ALGUMAS IMPORTANTES CONSTANTES EM MATEMÁTICA

ALESSANDRO FERREIRA ALVES

IMECC-UNICAMP
Campinas - Estado de São Paulo
Fevereiro de 1999

ALGUMAS IMPORTANTES CONSTANTES EM MATEMÁTICA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida pelo Sr. ALESSANDRO FERREIRA ALVES e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, *3* de *Fevereiro* de 1999.

Prof. ~~Dr.~~ JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtensão do Título de MESTRE em *Matemática*.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA CENTRAL DA UNICAMP

	Alves, Alessandro Ferreira
AL87a	Algumas importantes constantes em matemática Alessandro Ferreira Alves. - Campinas, SP : [s.n.], 1999.
	Orientador : José Plínio de Oliveira.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica.
	1. Números irracionais. 2. Números transcendentes. 3. Números racionais. 4. Frações contínuas. 5. Teoria dos números. 6. Séries (Matemática). I. Santos, José Plínio de Oliveira. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Cientifica. III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 03 de fevereiro de 1999 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JOSÉ PLÍNIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof (a). Dr (a). EDMUNDO CAPELAS DE OLIVEIRA

Prof (a). Dr (a). RAYMUNDO LUIZ DE ALENCAR

Aos
meus pais

Agradecimentos

Primeiramente dedico este trabalho, sem dúvida alguma, àquelas que foram minhas maiores fontes de força nos momentos difíceis.

Gostaria de agradecer a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho.

Principalmente:

- A professora Maria Ignêz Ferraz Gouveia Salomão, pelo incentivo desde os tempos de graduação.
- Ao professor José Plínio de Oliveira Santos pela orientação, paciência e dedicação.
- Aos colegas Érik, Marcela Luciana e Osmar pela amizade e momentos de estudo em grupo.
- Aos meus companheiros de República, Nelson e Edson, pelas conversas e jogos de baralho agradáveis.
- Aos meus pais e irmãos pelo apoio e estímulo constante.
- Aos professores e funcionários do IMECC pela atenção.
- Ao CNPq pelo suporte financeiro.
- Ao pessoal do predinho pelos momemtos de alegria e pela amizade harmoniosa.
- Ao pessoal do futebol pelas brincadeiras e companheirismo.
- a Deus, pois sem Ele nada disto teria acontecido.

Sumário

Resumo

Neste trabalho são estudadas algumas constantes numéricas importantes, tais como π, e e a constante de Euler que aparecem amplamente em todos os ramos da matemática, bem como suas principais características e propriedades, dentre elas irracionalidade e transcendência.

Abstract

In this dissertation we study some important mathematical constants such as π, e and Euler's constant that appear in almost all branches of mathematics. Special attention is given for the transcendence and irrationality of them.

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas importantes constantes numéricas que aparecem amplamente na matemática. Dentre elas, não poderíamos deixar de ressaltar os números π, e e a razão áurea. No primeiro capítulo, apresentamos algumas definições e resultados extremamente úteis no decorrer deste trabalho.

No capítulo seguinte, introduzimos inicialmente um aparato histórico sobre o número π; além disso, damos três provas distintas da irracionalidade de π, bem como mostramos sua transcendência.

A seguir, no capítulo 3, definimos o número e, retratamos sua importância com aplicações e vemos que tal número também é irracional transcendente.

No capítulo 4, definimos a constante de Apery que está diretamente relacionada com a função zeta de Riemann e vemos que tal constante é irracional. Em seguida, nosso estudo engloba a constante de Euler γ, onde mostramos que $0 < \gamma < 1$, e também damos uma representação em séries para γ.

No capítulo 6 estudamos a chamada razão áurea (ou proporção divina) e sua importante relação algébrica, bem como geométrica, com a seqüência de Fibonacci.

E por fim, analizamos a constante de Niven e alguns limites provados pelo próprio Niven.

Capítulo 1

Aspectos Teóricos

Neste capítulo estudaremos alguns conceitos e resultados que serão úteis no decorrer deste trabalho.

Definição 1.1 Dizemos que o número α é *algébrico* se ele satisfaz alguma equação polinomial da forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ com $a_i \in \mathbb{Z}, \forall\, i$. Caso contrário, α é dito *transcendente*.

Exemplos:

(i) $\alpha = \sqrt{2}$ é algébrico, pois satisfaz a equação $x^2 - 2 = 0$.

(ii) Todo número racional $\alpha = a/b$ é algébrico, pois satisfaz a equação $bx - a = 0$.

(iii) $\alpha = \sqrt[3]{5}$ é algébrico, pois é raiz da equação $x^3 - 5 = 0$.

Definição 1.2 Uma *forma linear* com coeficientes racionais é uma expressão do tipo

$$x = q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_mx_m$$

onde $q_1, q_2, \ldots, q_m \in \mathbb{Q}$ e os $x_i{}'$s podem ser vistos como números reais fixados.

Lema 1.3 *Dadas $m + 1$ formas lineares*

$$\begin{aligned} x_1 &= q_{11}x_1 + \ldots + q_{1m}x_m \\ &\vdots \\ x_{m+1} &= q_{m+1,1}x_1 + \ldots + q_{m+1,m}x_m \end{aligned}$$

elas são linearmente dependentes sobre o conjunto dos racionais, isto é, existem $r_1, \ldots, r_{m+1} \in \mathbb{Q}$ com alguns ou todos não nulos, tais que

$$r_1x_1 + r_2x_2 + \ldots + r_{m+1}x_{m+1} = 0$$

A demonstração do lema pode ser vista em [1].

Teorema 1.4 (ver [1]) *Sejam α, β dois números algébricos; então, o produto $\alpha.\beta$ é também algébrico.*

Demonstração:
Como α, β são números algébricos, então exitem equações polinomiais

$$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0 = 0$$

$$d_mx^m + d_{m-1}x^{m-1} + \ldots + d_1x + d_0 = 0$$

e daí dividindo por c_n a primeira equação e por d_m a segunda equação, obtemos

$$(1) \qquad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$(2) \qquad x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$$

onde $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0, b_{m-1}, \ldots, b_1, b_0$ são números racionais, de tal modo que α seja raiz de (1) e β seja raiz de (2). De (1) segue que

$$(3) \qquad \alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \ldots - a_1\alpha - a_0,$$

ou seja, α^n está escrito como combinação linear de $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ com coeficientes racionais.

Em seguida, multiplicando (3) por α obtemos

$$\alpha^{n+1} = -a_{n-1}\alpha^n - \ldots - a_1\alpha^2 - a_0\alpha$$

e substituindo o valor de α^n encontrado em (3) expressamos α^{n+1} como combinação linear dos mesmos $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ com coeficientes racionais. E assim sucessivamente, escrevemos as potências α^j, para $j \geq n$, como combinação linear de $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ com coeficientes racionais. Analogamente, para β podemos exprimir as potências β^k para $k = m, m+1, \ldots$, como combinação linear de $1, \beta, \ldots, \beta^{n-1}$ com coeficientes racionais. Agora vamos mostrar que $\alpha.\beta$ satisfaz uma equação polinomial de grau $m.n$ com coeficientes racionais; para isto, consideremos os $m.n + 1$ números

$$(4) \qquad 1, \alpha.\beta, (\alpha.\beta)^2, \ldots, (\alpha.\beta)^{m.n}$$

Desenvolvendo tais potências acima e observando o que fizemos para as potências α^j, $j \geq n$ e β^k, $k \geq m$, obtemos que os números em (4) podem ser expressos como combinações lineares dos $m.n$ números $\alpha^j\beta^k$, $0 \leq j \leq n-1$, $0 \leq k \leq m-1$ com coeficientes racionais. Agora aplicando o Lema (1.3), considerando os $x_i's$ como os $mn+1$ números em (4), resulta que existem racionais $r_0, r_1, \ldots, r_{mn}$ tais que $r_0 + r_1(\alpha\beta) + r_2(\alpha\beta)^2 + \ldots + r_{mn}(\alpha\beta)^{mn} = 0$, ou seja, $\alpha\beta$ satisfaz uma equação polinomial de grau mn, i.e., $\alpha\beta$ é um número algébrico.

c.q.d.

Definição 1.5 Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita *derivável* no ponto $z \in \mathbb{C}$ quando existe o limite $\lim_{z_0 \to 0} \frac{f(z+z_0) - f(z)}{z_0}$, onde $z_0 \in \mathbb{C}$. Dizemos que a função f é *analítica* quando $\exists\, f'(z), \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Considere $u(x,y)$ e $v(x,y)$ as partes real e imaginária de $f(z)$, isto é, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$. Suponhamos que $f(z)$ seja analítica em $\mathbb{C}$ então, $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y)$ e $f'(z) = -iu_y(x,y) + v_y(x,y)$. Assim, temos:

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \text{e} \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

Estas duas equações acima são chamadas equações de Cauchy-Riemman.

Lema 1.6 (ver [1]) *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica e $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Então:*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq 2|z_2 - z_1| \sup\{|f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| : 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

onde $|z|$ representa o módulo de $z = x + iy$, ou seja, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Demonstração:

Vamos mostrar inicialmente que o resultado é válido para os pontos $z_2 = z_0$ e $z_1 = 0$, ou seja, que

$$(1) \qquad |f(z_0) - f(0)| \leq 2|z_0| \sup\{|f'(\lambda z_0)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Sejam $u(x,y)$ e $v(x,y)$ as partes real e imaginária de $f(z)$. Dado o ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, vamos definir as funções:

$$\begin{array}{rccl} \phi: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \lambda & \mapsto & \phi(\lambda) = u(\lambda x_0, \lambda y_0) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccl} \psi: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \lambda & \mapsto & \psi(\lambda) = v(\lambda x_0, \lambda y_0) \end{array}$$

Como ϕ e ψ são funções reais, aplicando o teorema do valor médio no intervalo $[0,1]$, obtemos:

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\lambda_1) \quad \text{com } 0 < \lambda_1 < 1 \tag{2}$$

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\lambda_2) \quad \text{com } 0 < \lambda_2 < 1. \tag{3}$$

Assim,

$$u(x_0, y_0) - u(0,0) = u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0$$

$$v(x_0, y_0) - v(0,0) = v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)y_0$$

e daí, multiplicando a segunda equação por $(+i)$ e somando as duas equações , temos:

$$\begin{array}{l} f(z_0) - f(0) = \\ u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0 + \\ i[v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)y_0] \end{array} \tag{4}$$

Agora utilizaremos as seguintes desigualdades:

(i) se $z = x + iy$, então $|z| \leq |x| + |y|$.

(ii) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz): dados $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ então

$$|a_1 b_1 + a_2 b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

Aplicando (i) e (ii) em (4), resulta

$$\begin{array}{l} |f(z_0) - f(0)| \leq \\ \sqrt{u_x^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0) + u_y^2(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)}.\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \\ \sqrt{v_x^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0) + v_y^2(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)}.\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \end{array} \tag{5}$$

Assim, observando que $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = -iu_y(x,y) + v_y(x,y)$, segue que os radicais em (5) envolvendo u e v são o módulo de f' calculado em determinados pontos, ou seja,

$$|f(z_0) - f(0)| \leq |f'(\lambda_1 z_0)||z_0| + |f'(\lambda_2 z_0)||z_0|,$$

e portanto,

$$|f(z_0) - f(0)| \ \leq \ 2|z_0| \sup\{|f'(\lambda z_0)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Agora, considerando a função $g(z) = f(z + z_1)$ e os pontos $z_0 = z_2 - z_1$, segue que

$$\begin{array}{rcl} |g(z_2 - z_1) - g(0)| & \leq & 2|z_2 - z_1| \sup\{|g'(\lambda(z_2 - z_1))| : 0 \leq \lambda \leq 1\}. \\ |f(z_2) - f(z_1)| & \leq & 2|z_2 - z_1| \sup\{|f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| : 0 \leq \lambda \leq 1\}. \end{array}$$

c.q.d.

Definição 1.7 Sejam $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$ as raízes de um polinômio $P(X)$; logo, podemos escrever:

$$P(X) = (X - t_1).(X - t_2).\ldots.(X - t_n)$$

Desenvolvendo o produto acima obtemos

$$P(X) = X^n - s_1 X^{n-1} + s_2 X^{n-2} + \ldots + (-1)^n s_n,$$

onde

$$\begin{aligned}
&(1.1) \qquad & s_1 &= \sum_{j=1}^{n} t_j \\
&(1.2) \qquad & s_2 &= \sum_{i<j} t_i.t_j \\
&(1.3) \qquad & s_3 &= \sum_{i<j<k} t_i.t_j t_k \\
& & &\vdots \\
&(1.n) \qquad & s_n &= t_1.t_2.t_3.\ldots.t_n
\end{aligned}$$

Esses polinômios representados acima são chamados *polinômios simétricos elementares* em $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$.

Exemplos:

(i) No caso $n = 1$, existe apenas um polinômio simétrico elementar, $s_1 = t_1$.

(ii) No caso $n = 3$, os polinômios simétricos elementares são

$$s_1 = t_1 + t_2 + t_3, \quad s_2 = t_1.t_2 + t_1.t_3 + t_2.t_3, \quad s_3 = t_1.t_2.t_3.$$

Definição 1.8 Uma *permutação* σ dos inteiros $1, 2, \ldots, n$ é uma função bijetora do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ sobre ele mesmo. Em símbolos:

$$\begin{array}{rccc}
\sigma: & \{1,2,\ldots,n\} & \longrightarrow & \{1,2,\ldots,n\} \\
& i & \mapsto & \sigma(i)
\end{array}$$

Exemplos:

(i) Se $n = 2$, temos as permutações

$$\begin{array}{rcclcrccl}
\sigma_1: & 1 & \longrightarrow & 1, & \qquad & \sigma_2: & 1 & \longrightarrow & 2 \\
& 2 & \longrightarrow & 2 & & & 2 & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

(ii) Se $n = 3$, temos as permutações

$$\begin{array}{rccl@{\qquad}rccl@{\qquad}rccl}
\sigma_1: & 1 & \longrightarrow & 1, & \sigma_2: & 1 & \longrightarrow & 2, & \sigma_3: & 1 & \longrightarrow & 3 \\
& 2 & \longrightarrow & 2 & & 2 & \longrightarrow & 3 & & 2 & \longrightarrow & 1 \\
& 3 & \longrightarrow & 3 & & 3 & \longrightarrow & 1 & & 3 & \longrightarrow & 2 \\
\sigma_4: & 1 & \longrightarrow & 1, & \sigma_5: & 1 & \longrightarrow & 2, & \sigma_6: & 1 & \longrightarrow & 3 \\
& 2 & \longrightarrow & 3 & & 2 & \longrightarrow & 1 & & 2 & \longrightarrow & 2 \\
& 3 & \longrightarrow & 2 & & 3 & \longrightarrow & 3 & & 3 & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Definição 1.9 Um *monômio* é uma expressão da forma $at_1^{k_1} t_2^{k_2} \ldots t_n^{k_n}$ com $k_i \in \mathbb{Z}^+$ e $a \in A$ onde A é um conjunto.

Exemplos:

(i) $3t_1t_3^2t_5$

(ii) $t_3^3t_5^7t_6$

Definição 1.10 O *grau* de um monômio é o inteiro $\sum_{i=1}^{n} k_i$ e o *peso* de um monômio é o inteiro $\sum_{i=1}^{n} ik_i$.

Exemplo: O monômio $3t_1t_3^2t_5$ tem grau igual a 4 e peso igual a 12.

Definição 1.11 O *grau* de um polinômio é o máximo dos graus de seus monômios.E o *peso* de um polinômio é o máximo dos pesos de seus monômios.

Exemplos:

(i) O polinômio $(t_1 + \ldots + t_n)^5$ tem grau igual a 5 e peso igual a $5n$.

(ii) O polinômio $t_1^3 + \ldots + t_n^3$ tem grau igual a 3 e peso igual a $3n$.

Definição 1.12 Um polinômio $f(t_1, \ldots, t_n)$ é dito *simétrico* se $f^\sigma(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$, $\forall\ \sigma$ permutação de $1, 2, \ldots, n$. Onde $f^\sigma(t_1, \ldots, t_n)$ é por definição $f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)})$.

Observação: De um modo geral podemos definir o polinômio simétrico como segue. Seja $\mathcal{A}$ um anel comutativo qualquer com elemento unidade. Um polinômio de $\mathcal{A}[x_1, \ldots, x_n]$ que se transforme em si mesmo por quaisquer das permutações das indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$, chama-se uma *função (racional, inteira) simétrica* das variáveis $x_1, \ldots, x_n$ (ver [3]).

Exemplos:

(i) Os polinômios simétricos elementares definidos anteriormente são simétricos.

(ii) Todo polinômio nos polinômios simétricos elementares com coeficientes racionais é um polinômio simétrico.

Teorema 1.13 (ver [1]) *Seja $f(t_1, \ldots, t_n)$ um polinômio simétrico de grau d com coeficientes em A, onde $A = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$. Então, existe um polinômio $p(s_1, \ldots, s_n)$ de peso menor do que ou igual a d com coeficientes em A, onde $s_1, \ldots, s_n$ são os polinômios simétricos elementares definidos anteriormente tal que*

$$f(t_1, \ldots, t_n) = p(s_1, \ldots, s_n).$$

Demonstração:
A demonstração será feita por indução sobre n.

Observemos que obviamente o resultado é válido para $n = 1$, pois temos $s_1 = t_1$. Daí,

Hipótese de indução: Suponhamos que o resultado seja válido para os polinômios em $t_1, \ldots, t_{n-1}$.

Tese: O resultado é válido para os polinômios em $t_1, \ldots, t_n$.

Sejam $\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_{n-1}$ os polinômios simétricos elementares em $t_1, \ldots, t_{n-1}$, ou seja, considerando $t_n = 0$ obtemos

$$\overline{s}_1 = \sum_{j=1}^{n-1} t_j,\ \overline{s}_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} t_it_j, \ldots,\ \overline{s}_{n-1} = t_1t_2\ldots t_{n-1}.$$

Para verificarmos que o resultado é válido para polinômios em $t_1, \ldots, t_n$, usaremos indução sobre os graus d destes polinômios .

Se $d = 0$, o resultado é trivialmente válido, pois temos somente neste caso os polinômios constantes.

Suponhamos então que o resultado seja válido para os polinômios de grau menor do que d, e vamos mostrar que ele é válido para polinômios de grau d. Considere $f(t_1, \ldots, t_n)$ um polinômio de grau d, logo, pela hipótese de indução existe um polinômio de peso menor do que ou igual a d, $p_1(\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_{n-1})$, tal que

$$(1) \qquad f(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0) = p_1(\overline{s}_1, \ldots, \overline{s}_{n-1}).$$

Deste modo $p_1(s_1, \ldots, s_{n-1})$ é um polinômio simétrico em $t_1, \ldots, t_n$ com grau menor ou igual a d.

Agora, consideremos o polinômio

$$(2) \qquad f_1(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n) - p_1(s_1, \ldots, s_{n-1})$$

o qual também é simétrico em $t_1, \ldots, t_n$.

Afirmação: $f_1(t_1, \ldots, t_n) = s_n . f_2(t_1, \ldots, t_n)$ onde o grau de $f_2(t_1, \ldots, t_n)$ é menor do que d.

De fato:

Fazendo $t_n = 0$, obtemos de (2) e (1) $f_1(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0) = 0$, então t_n é fator comum em $f_1(t_1, \ldots, t_n)$. Como $f_1(t_1, \ldots, t_n)$ é simétrico em $t_1, \ldots, t_n$ resulta que $\forall\ j = 1, \ldots, n$, t_j é fator comum de $f_1(t_1, \ldots, t_n)$, e então $f_1(t_1, \ldots, t_n) = s_n f_2(t_1, \ldots, t_n)$ e $\partial(f_2) \leq d - n < d$.

Agora, aplicando a hipótese de indução, existe um polinômio $p_2(s_1, \ldots, s_n)$ de peso menor do que ou igual a $d - n$, tal que $f_2(t_1, \ldots, t_n) = p_2(s_1, \ldots, s_n)$.

Deste modo, obtemos que $f(t_1, \ldots, t_n) = s_n g_2(s_1, \ldots, s_n) + g_1(s_1, \ldots, s_{n-1})$. Tomando $p(s_1, \ldots, s_n) = s_n p_2(s_1, \ldots, s_n) + p_1(s_1, \ldots, s_{n-1})$ o teorema se verifica. **c.q.d.**

Na verdade, o teorema acima diz que o subanel dos polinômios simétricos com coeficientes racionais é gerado pelos polinômios simétricos elementares.

Lema 1.14 *Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números algébricos, tais que os polinômios simétricos elementares $s_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $s_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j, \ldots,$ $s_n = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$ sejam números em A (onde $A = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$). Se os α's são raízes de um polinômio de grau n, com coeficientes em A, então os $\binom{n}{j}$ números algébricos $\beta_{k_1 \ldots k_j} = \alpha_{k_1} + \ldots + \alpha_{k_j}$ com $1 \leq k_1 < \ldots < k_j \leq n$ são raízes de um polinômio de grau $\binom{n}{j}$, com coeficientes em A.*

A demonstração do lema pode ser vista em [1].

Definição 1.15 Uma expressão da forma

$$a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \cfrac{b_5}{\ddots}}}} \qquad \text{ou} \qquad a_1 + \frac{b_2}{a_2 +}\ \frac{b_3}{a_3 +}\ \frac{b_4}{a_4 +}\ \cdots$$

é chamada de *fração contínua* e os números $a_1, a_2, \ldots$ são chamados *quocientes parciais*. Quando os b_i's são iguais a 1, então denota-se a fração contínua por $[a_1, a_2, \ldots]$.

Observação: Se o número dos a_i's for finito dizemos que a fração contínua é *finita* e caso contrário dizemos que é *infinita*; e quando todos os a_i's são inteiros dizemos que a fração contínua é *simples*.

Exemplos:

(i) Vamos obter a fração contínua que representa o número racional $\frac{79}{28}$:

$$\begin{aligned} 79 &= 2\text{x}28 + 23 \\ 28 &= 1\text{x}23 + 5 \\ 23 &= 4\text{x}5 + 3 \\ 5 &= 1\text{x}3 + 2 \\ 3 &= 1\text{x}2 + 1 \\ 2 &= 2\text{x}1 + 0 \end{aligned}$$

logo podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{79}{28} &= 2 + \frac{23}{28} = 2 + \frac{1}{\frac{28}{23}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{5}{23}} \\ &= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{23}{5}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3}{5}}} \\ &= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{5}{3}}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}}}} \\ &= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}}}} \\ &= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}} \end{aligned}$$

Assim, a última expressão é a fração contínua que representa o número racional $\frac{79}{28}$, e às vezes é denotado por $[2, 1, 4, 1, 1, 2]$

(ii) Consideremos a seqüências 2,1,4,5 e 3 e a fração contínua representada por $[2, 1, 4, 5, 3]$, isto é,

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}}$$

onde podemos reduzí-la para

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{15+1}{3}}}} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{3}{16}}}$$

$$= 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{64+3}{16}}} = 2+\frac{67}{83} = \frac{233}{83}$$

Observações:

1. Todo número racional pode ser representado de duas maneiras distintas sob a forma de fração contínua e toda fração contínua simples finita representa um número racional.

2. Toda fração contínua simples infinita representa um número irracional.

Teorema 1.16 *Se $a_2,\ldots,a_n,b_1,b_2,\ldots,b_n$ são todos inteiros positivos, então:*

1. A fração contínua infinita

$$\frac{b_2}{a_2+}\,\frac{b_3}{a_3+}\,\frac{b_4}{a_4+}\,\frac{b_5}{a_5+}\cdots\frac{b_n}{a_n+}\cdots$$

converge para um limite irracional se após algum valor finito de n a condição $a_n \geq b_n$ sempre seja satisfeita.

2. A fração contínua infinita

$$\frac{b_2}{a_2-}\,\frac{b_3}{a_3-}\,\frac{b_4}{a_4-}\,\frac{b_5}{a_5-}\cdots\frac{b_n}{a_n-}\cdots$$

converge para um limite irracional se após algum valor finito de n a condição $a_n \geq b_n+1$ sempre seja satisfeita onde o sinal $>$ não precisa ocorrer sempre , mas deve ocorrer infinitas vezes.

A demonstraçãodo teorema pode ser vista em [2]

Definição 1.17 A *função maior inteiro* é a que associa a cada número real x o maior inteiro menor do que ou igual a x. Denotaremos tal valor por $\lfloor x \rfloor$.

Exemplos:

(i) $\lfloor 4 \rfloor = 4$;

(ii) $\lfloor 5{,}2 \rfloor = 5$;

(iii) $\lfloor -5{,}1 \rfloor = -6$;

(iv) $\lfloor 0{,}380 \rfloor = 0$.

Na proposição seguinte temos algumas propriedades desta função .

Proposição 1.18 **(ver [10])** *Para $x \in \mathbb{R}$, temos:*

1. $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

2. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1,\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x,\ 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1.$

3. *se* $x \notin \mathbb{Z}$, *então* $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1.$

4. $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$

5. $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$ *se* $x \in \mathbb{Z}$ *e* -1 *se* $x \notin \mathbb{Z}$

6. *Se* n *é um inteiro positivo,* $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$ *é o número de inteiros do conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *que são divisíveis por* a.

Demonstração:
As afirmações (1),(2) e (3) são conseqüências da definição.
(4) Considere $x = n + \alpha$ e $y = m + \beta$ onde n e m são inteiros e $0 \leq \alpha < 1,\ 0 \leq \beta < 1$, daí:

$$\begin{aligned}
\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor &= n + m \\
&= \lfloor n + m \rfloor \\
&\leq \lfloor n + \alpha + m + \beta \rfloor \\
&= \lfloor x + y \rfloor \\
&= n + m + \lfloor \alpha + \beta \rfloor \\
&\leq n + m + 1 \\
&= \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.
\end{aligned}$$

(5) Seja $x = n + \alpha$ com $0 \leq \alpha < 1$, temos $-x = -n - 1 + 1 - \alpha$, daí:

$$\begin{aligned}
\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor &= n + \lfloor -n - 1 + 1 - \alpha \rfloor \\
&= n - n - 1 + \lfloor 1 - \alpha \rfloor \\
&= \begin{cases} 0 \text{ se } \alpha = 1 \text{ e} \\ -1 \text{ se } \alpha > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

(6) Basta observarmos que o quociente na divisão do inteiro n por a ($a \neq 0$) é igual a $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$, i. e., $n = \lfloor \frac{n}{a} \rfloor a + r$ onde $0 \leq r < a$. **c.q.d.**

Definição 1.19 Dada uma seqüência (a_r), a *função geradora ordinária* para esta seqüência é definida como a série de potências

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Exemplos:

(i) A função geradora para a seqüência $(a_r) = (0, 0, 1, 1, 1, \ldots)$ é a série de potências $f(x) = 0 + 0x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$

(ii) A função geradora para a seqüência $(a_r) = (1, \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \ldots)$ é a série de potências $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^r}{r!} + \ldots$

(iii) Vamos encontrar a seqüência cuja função geradora ordinária é dada por $x^2 + x^3 + e^x$.
Seja (a_r) a seqüência que procuramos, daí:

$$\begin{aligned}
x^2 + x^3 + e^x &= x^2 + x^3 + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^r}{r!} + \ldots\right) \\
&= 1 + x + \left(1 + \frac{1}{2!}\right) x^2 + \left(1 + \frac{1}{3!}\right) x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \ldots,
\end{aligned}$$

logo,

$$(a_r) = \left(1, 1, 1 + \frac{1}{2!}, 1 + \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \ldots, \frac{1}{r!}\right)$$

Teorema 1.20 (ver [20]) **Teorema Binomial**

$$(1+x)^u = 1 + ux + \frac{u(u-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!}x^r + \ldots$$

onde u é um real qualquer e $|x| < 1$.

E se denotarmos por

$$\left(\begin{array}{c} u \\ r \end{array}\right) = \begin{cases} \frac{u(u-1)\ldots(u-r+1)}{r!} & \text{se } r > 0 \\ 1 & \text{se } r = 0 \end{cases}$$

teremos

$$(1+x)^u = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} u \\ r \end{array}\right) x^r$$

O número $\left(\begin{array}{c} u \\ r \end{array}\right)$ definido acima é chamado de *coeficiente binomial generalizado.* Se u for igual ao inteiro positivo n, $\left(\begin{array}{c} u \\ r \end{array}\right)$ será o familiar coeficiente binomial, e como $\left(\begin{array}{c} n \\ r \end{array}\right)$ é zero para $r > n$, a expansão acima se reduzirá à expansão binomial usual.

Proposição 1.21 *Seja $P(X)$ um polinômio de grau r. Defina a função $F(X) = P(X) + P'(X) + \ldots + P^{(r)}(X)$, então*

$$\frac{d}{dX}(e^{-X}F(X)) = -e^{-X}P(X).$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dX}(e^{-X}F(X)) &= -e^{-X}.F(X) + e^{-X}.F'(X) \\ &= -e^{-X}[P(X) + P'(X) + \ldots + P^{(r)}(X)] + e^{-X}.[P'(X) + P''(X) + \ldots + P^{(r)}(X) + \\ &\qquad + P^{(r+1)}(X)] \\ &= -e^{-X}.P(X) \end{aligned}$$

c.q.d.

Proposição 1.22 (**ver** [1]) *Seja $Q(X) = \sum_{j=0}^{r} a_j X^j$ um polinômio com coeficientes inteiros, e seja $p < r$. Então:*

(i) $Q^{(i)}(X) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-1)!} a_j X^{j-i}, \; i \leq r$

(ii) $\frac{1}{(p-1)!}Q^{(i)}(X)$, *para $i \geq p$ é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por p.*

Demonstração:

(i) Seja $Q(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{r-1} X^{r-1} + a_r X^r$. Observemos que $Q'(X) = 0 + a_1 + \ldots + (r-1)a_{r-1}X^{r-2} + ra_r X^{r-1}$, ou seja, $Q^{(1)}(X) = \frac{1!}{(1-1)!} a_1 X^{(1-1)} + \ldots + \frac{r!}{(r-1)!} a_r X^{r-1}$ e assim por diante; daí, concluímos que

$$Q^{(i)}(X) = \sum_{j=i}^{r} \frac{j!}{(j-1)!} a_j X^{j-i}$$

(ii) Basta observarmos que $\frac{j!}{(j-1)!} \in \mathbb{Z}$ e como $i \geq p$ segue também que

$$\frac{1}{(p-1)!} \frac{j!}{(j-1)!} \in \mathbb{Z}.$$

c.q.d.

Capítulo 2

O número π

2.1 A história do número π

Podemos indagar, o que é o número π? Um modo simples de responder tal indagação é dizer que π é a área de um círculo de raio 1, ou também dizer que π é o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 1.

Desde a antigüidade observou-se que o número de vezes em que o diâmetro está contido na circunferência é constante, seja qual for o tamanho desta circunferência; dizendo de outro modo, se uma circunferência tem comprimento C e diâmetro D, enquanto outra tem comprimento C' e diâmetro D', então $\frac{C}{D} = \frac{C'}{D'}$.

Esse valor, hoje é representado pela letra grega π. Porém na antigüidade, não existia uma representação padrão para designar tal razão; Euler, em princípio, utilizava as letras p ou c, mas, a partir de 1737, passou a adotar a letra π. Desde então, todo mundo o seguiu.

Arquimedes foi o primeiro a dar limites superior e inferior para π. Ele comparou a circunferência do círculo com o comprimento total dos lados do polígono regular de n lados, obtendo para $n = 96$ a desigualdade $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, ou seja, $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$. Com o método de Arquimedes tornou-se possível determinar o valor de π mais corretamente.

Já Ptolomy (mais ou menos 150 anos depois de Cristo) escolheu um valor intermediário entre os dois valores de Arquimedes a saber $\pi \approx 3\frac{17}{20} \approx 3,14166\ldots$. Desde então, astrônomos de todo o mundo procuram melhorar o valor de π. O astrônomo e filósofo chinês Zhang Heng (78-139) trabalhou com o valor $\sqrt{10} \approx 3,162$; Liu Hui calculou (cerca 263) para um polígono regular de 192 lados os limites $3,14\frac{64}{625} < \pi < 3,14\frac{169}{625}$ e mais tarde para um de 3072 lados um valor aproximado correspondendo à fração decimal 3,14159. Finalmente, de Zu Chang-Zhi (430-501) surge a aproximação $\pi \approx \frac{355}{113}$, a qual é a primeira aproximação com seis casas decimais corretas. O astrônomo islâmico al-kasi calculou o valor de 2π na circunferência de um círculo de raio unitário por meio de um polígono regular de 3.2^{28} lados encontrando 6,2831853071795865.

Leonardo di Pisa (cerca de 1170-1240) calculou π por meio de um polígono de 96 lados obtendo $\pi \approx \frac{864}{275} \approx 3,141818$.

Porém, foi Ludolph Van Ceulen (1540-1610) o primeiro a encontrar o valor de π com 35 casas decimais corretas; assim, esse feito computacional impressionou tanto seus sucessores que π freqüentemente foi chamado a *constante de Ludolph*. As primeiras 20 casas decimais corretas do valor de π são

$$3,14159265358979323846\ldots$$

Já Wallis em 1655, descobriu seu famoso produto:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3}.\frac{4.4}{3.5}.\frac{6.6}{5.7}\cdots\frac{2n.2n}{(2n-1)(2n+1)}\cdots$$

enquanto que Vieta em 1759, encontrou a primeira representação analítica de π, na forma do produto infinito

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Mais tarde, o desenvolvimento do cálculo infinitesimal e da teoria de séries infinitas contribuíram para um entendimento melhor do número π.

Assim, em 1761 James Gregory dá a clássica representação em séries

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,$$

a qual é redescoberta por Leibniz.

Newton, tomando $z=\frac{1}{2}$ na série

$$\text{arcsen}z=z+\frac{1}{2}.\frac{z^3}{3}+\ldots+\frac{1.3.\ldots.(2n-1)}{2.4.\ldots.(2n)}.\frac{z^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

obteve, mais ou menos em 1665, a representação

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{8}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{5}.\frac{1}{32}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{1}{7}.\frac{1}{128}+\ldots$$

a qual permitiu a ele calcular sem grandes dificuldades as catorze primeiras casas decimais do valor de π.

A seguir, apresentaremos provas da irracionalidade e da transcendência de π.

Teorema 2.2 *O número π é irracional.*

Demonstração:

$1^{\underline{o}}$ **MODO:**(ver [2]) Suponhamos por absurdo que π seja racional; então, $\frac{\pi}{4}$ também é racional. Assim, podemos escrever $\frac{\pi}{4}=\frac{\lambda}{\mu}$ com $\text{mdc}(\lambda,\mu)=1$.

Daí, a representação em frações contínua de $\tan x$ é dada por

$$\tan x=\frac{x}{1-}\,\frac{x^2}{3-}\,\frac{x^2}{5-}\cdots\frac{x^2}{(2n+1)-}$$

em particular, para $\frac{\pi}{4}$, obtemos

$$\tan(\frac{\pi}{4})=1=\frac{\lambda/\mu}{1-}\,\frac{\lambda^2/\mu^2}{3-}\,\frac{\lambda^2/\mu^2}{5-}\cdots\frac{\lambda^2/\mu^2}{2n+1-}\tag{1}$$

Por outro lado, como λ e μ são inteiros fixos, podemos tomar n suficientemente grande de tal forma que tenhamos $2n+1>\frac{\lambda^2}{\mu^2}+1$; então, pelo teorema (1.16) (parte 2) segue que a fração contínua (1) converge para um limite irracional (ABSURDO). Portanto π é irracional

$2^{\underline{o}}$ **MODO:**(ver [1]) Mostraremos, na verdade, que π^2 não é racional e, por conseguinte, π não pode ser racional (pois o quadrado de um racional é racional).

Consideremos a função $f(X)=\frac{X^n(1-X)^n}{n!}$, onde n é um inteiro positivo.

Afirmação 1: $D^kf(0)\in\mathbb{Z},\forall\, k=0,1,2,\ldots$; de fato: Tomando $g(X)=\frac{1}{n!}X^n$ e $h(X)=(1-X)^n$, pela fórmula de Leibniz para as derivadas do produto de duas funções resulta que:

$$
\begin{aligned}
D^k(f) = D^k(gh) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j g D^{k-j} h \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j X^n D^{k-j} (1-X)^n.
\end{aligned}
$$

Observando que

$$
D^j X^n|_{X=0} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad j < n \\ n! & \text{se} \quad j = n \\ 0 & \text{se} \quad j > n \end{cases}
$$

obtemos $D^k f(0) = 0$ se $k < n$ e $D^k f(0) = \binom{k}{n} D^{k-n}(1-X)^n|_{X=0}$ se $k \geq n$. Como $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$, segue que $D^k f(0) \in \mathbb{Z}$, $\forall\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

Afirmação 2: $D^k f(1) \in \mathbb{Z}$, $\forall\ k = 0, 1, 2, \ldots$, de fato: Basta usar a afirmação 1, notando que $f(1-X) = f(X)$.

Agora, suponhamos por absurdo que π^2 seja racional, ou seja, $\pi^2 = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $mdc(p,q) = 1$. Definimos a função :

(2) $$F(X) = q^n\{\pi^{2n} f(X) - \pi^{2n-2} D^2 f(X) + \ldots + (-1)^n D^{2n} f(X)\}$$

Temos que $F(0), F(1) \in \mathbb{Z}$ (em virtude das duas afirmações anteriores e do fato que $\pi^2 \in \mathbb{Q}$). Agora, vamos calcular a seguinte derivada primeira

$$
\begin{aligned}
&\{F'(X)\mathrm{sen}(\pi X) - \pi F(X)\cos(\pi X)\}' = \\
&= F''(X)\mathrm{sen}(\pi X) + \pi\cos(\pi X).F'(X) - \pi[F'(X)\cos(\pi X) - \pi\mathrm{sen}(\pi X)F(X)] \\
&= F''(X)\mathrm{sen}(\pi X) + \pi^2 F(X)\mathrm{sen}(\pi X) \\
&= \mathrm{sen}(\pi X)[F''(X) + \pi^2 F(X)] \\
&= p^n \pi^2 f(X)\mathrm{sen}(\pi X)
\end{aligned}
$$

Daí, aplicando o Teorema Fundamental do Cáculo para a função $h(X) = F'(X)\mathrm{sen}(\pi X) - \pi F(X)\cos(\pi X)$, obtemos $\int_0^1 h'(X)dX = h(1) - h(0)$, ou seja,

$$\int_0^1 p^n \pi^2 f(X)\mathrm{sen}(\pi X)dX \;=\; \pi F(1) + \pi F(0) \;=\; \pi(F(1) + F(0))$$

(3) $$\pi p^n \int_0^1 f(X)\mathrm{sen}(\pi X)dX = F(1) + F(0).$$

Como $F(0), F(1) \in \mathbb{Z}$ segue que o lado direito de (3) é um inteiro. Vamos mostrar que para um certo valor adequado de n o lado esquerdo de (3) é um inteiro estritamente menor do que 1.

Para $0 < X < 1$, temos que $0 < f(X) < \frac{1}{n!}$ (pois $X^n < 1$ e $(1-X)^n < 1$) assim:

$$0 \;<\; \pi p^n \int_0^1 f(X)\mathrm{sen}(\pi X)dX \;<\; \pi p^n \int_0^1 \frac{1}{n!}\mathrm{sen}(\pi X)dX \;=\; \frac{\pi p^n}{n!}\int_0^1 \mathrm{sen}(\pi X)dX \;=\; \frac{2p^n}{n!},$$

e como $\lim_{n \to +\infty} \frac{p^n}{n!} = 0$, então podemos tomar um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2p^n}{n!} < 1$, e portanto o lado esquerdo de (3) é um inteiro menor que 1 (ABSURDO).

Portanto π^2 não é racional e, conseqüentemente, π não é racional.

3º **MODO:**(ver [3]) Necessitamos do seguinte resultado auxiliar:

Lema *Uma função* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *a qual tende para zero quando a variável tende ao infinito deve ser eventualmente nula a partir de um determinado índice.*

Demonstração:
Se $f(n) \to 0$ quando $n \to +\infty$, nós temos que $|f(n) - 0| < \frac{1}{2}$ para $n \geq N$, para algum $N \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $f(n) \in \mathbb{Z}$, isto implica que $f(n) = 0$ para $n \geq N$.
Portanto, $f \equiv 0, \forall\, n \geq \mathbb{N}$. **c.q.d.**

Agora vamos mostrar que π é irracional.
Consideremos a integral

$$I_n = \int_{-1}^{+1} (1 - X^2)^n \cos(\alpha X) dX$$

Integrando por partes nós obtemos:

$$(4) \qquad \alpha^2 I_n = 2n(2n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2} \qquad \text{se } n \geq 2.$$

Fazendo a indução sobre n segue que

$$(5) \qquad \alpha^{2n+1} I_n = n!(P\mathrm{sen}(\alpha) + Q\mathrm{sen}(\alpha))$$

onde P e Q são polinômios em α de grau menor que $2n+1$ com coeficientes inteiros. O termo $n!$ origina-se do fator $2n(2n-1)$ da equação (4).

Daí, suponhamos por absurdo que π seja racional, ou seja , $\pi = \frac{a}{b}$ onde $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$ com $mdc(a,b) = 1$. Seja $\alpha = \frac{\pi}{2}$, substituindo em (5), obtemos então que $J_n = \frac{b^{2n+1} I_n}{n!}$ é um inteiro. Por outro lado,

$$(6) \qquad J_n = \frac{b^{2n+1}}{n!} \int_{-1}^{+1} (1 - X^2)^n \cos(\frac{\pi}{2} X) dX.$$

Assim, se $-1 < X < 1$ temos que o integrando de (6) é maior que zero; logo, $J_n > 0$. Então $J_n \neq 0, \forall\, n$. Porém,

$$|J_n| \leq \frac{|b|^{2n+1}}{n!} \int \cos\left(\frac{\pi}{2} X\right) dX \leq \frac{C|b|^{2n+1}}{n!}$$

onde C é uma constante. Portanto, quando $n \to +\infty$, $J_n \to 0$ (contradição, com o lema anterior). Logo, π é irracional. **c.q.d.**

Em verdade, o primeiro a acreditar na irracionalidade de π foi Euler. A nossa primeira demonstração acima, segue a primeira demonstração da irracionalidade de π, dada pelo matemático francês J.H.Lambert, por volta de 1761, enquanto a segunda é devida ao matemático Legendre, dada em 1794.

Teorema 2.3 (ver [1]) **(Teorema de Lindemann)** *O número π é transcendente, ou seja, π não é solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros.*

Demonstração:
Suponhamos por absurdo que π seja algébrico. Como $i = \sqrt{-1}$ é algébrico, então $i\pi$ também é algébrico (pois, o produto de dois números algébricos é algébrico), assim, $i\pi$ é raíz de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros $P_1(X) = 0$.

Sejam $\alpha_1 = i\pi, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ as raízes de $P_1(X)$. Como $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\text{sen}(\pi) = -1$, temos:

$$(1) \qquad \prod_{j=1}^{n}(1 + e^{\alpha_j}) = 0 = 1 + \text{ somatório de exponenciais}$$

cujos expoentes são:

(2.1)	$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$
(2.2)	$\alpha_i + \alpha_j$ para quaisquer $i < j$
	$\vdots$
(2.n)	$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$

Além disso, observemos que o número de termos em (2.1) é n, em (2.2) é $\binom{n}{2}, \ldots,$ e em (2.n) é $\binom{n}{n} = 1$.

Como $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são raízes da equação polinomial $P_1(X)$ de grau n, segue pelo Lema (1.14) do capítulo 1 que

(i) os números em (2.2) são raízes de uma equação polinomial de grau $\binom{n}{2}$ com coeficientes inteiros $P_2(X) = 0$.

(ii) os números em (2.3) são raízes de uma equação polinomial de grau $\binom{n}{3}$ com coeficientes $P_3(X) = 0$.

e assim sucessivamente, e portanto, os números $(2.1), (2.2), \ldots, (2.n)$ são raízes da equação polinomial com coeficientes inteiros $P_1(X).P_2(X). \ldots .P_n(X) = 0$ cujo grau é $2^n - 1$.

Sejam $\beta_1, \ldots, \beta_m$ os números em $(2.1), \ldots, (2.n)$ que são diferentes de zero. Como $2^n - 1 > m$, existem fatores da forma X^a, para $a > 0$, assim simplificando tais fatores obtemos que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ são raízes de uma equação polinomial com coeficientes inteiros $R(X) = c_m X^m + c_{m-1}X^{m-1} + \ldots + c_1 X + c_0 = 0$. Como $\prod_{j=1}^{n}(1 + e^{\alpha_j}) = 0$, segue que $k + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_m} = 0$, onde k é uma constante.

Consideremos o polinômio $P(X) = \frac{c^s}{(p-1)!}X^{p-1}(R(X))^p$ onde $s = mp - 1$ e p é um número primo que iremos escolher posteriormente. Observemos que o grau de $P(X)$ é $r = s + p$.

Consideremos a função $F(X) = P(X) + P'(X) + \ldots + P^{s+p}(X)$, daí, aplicando a proposição (1.21), obtemos que

$$\frac{d}{dX}(e^{-X}F(X)) = -e^{-X}P(X).$$

Agora, vamos considerar a função $f(z) = e^{-z}.F(z)$; logo, pelo lema (1.6) do capítulo 1, temos:

$$|e^{-\beta_j}.F(\beta_j) - F(0)| \leq 2|\beta_j| \sup\{|e^{-\lambda\beta_j}P(\lambda\beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

para $j = 1, 2, \ldots, m$, ou seja,

$$|F(\beta_j) - e^{\beta_j}.F(0)| \leq 2|\beta_j| \sup\{|e^{(1-\lambda)\beta_j}P(\lambda\beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

para $j = 1, 2, \ldots, m$.

Tomando $\epsilon_j = 2|\beta_j| \sup\{|e^{(1-\lambda)\beta_j}P(\lambda\beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, obtemos que para $j = 1, 2, \ldots, m$

$$(3) \qquad |kF(0) + \sum_{j=1}^{m} F(\beta_j)| \leq \sum_{j=1}^{m} \epsilon_j \quad (\text{pois } k + e^{\beta_1} + \ldots + e^{\beta_m} = 0.)$$

Vamos mostrar que o lado esquerdo de (3) é um inteiro diferente de zero, enquanto que o lado direito para p adequado, é menor do que 1. Para isto, calculemos as derivadas do polinômio $P(X)$ nos pontos $0, \beta_1, \ldots, \beta_m$.

Temos que

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{c^s}{(p-1)!} X^{p-1}.(R(X))^p \\ &= \frac{c^s}{(p-1)!} X^{p-1}.\{c_m X^m + c_{m-1}X^{m-1} + \ldots + c_1 X + c_0\}^p \\ &= \frac{c^s}{(p-1)!}.\{c_0^p X^{p-1} + \ldots\} \end{aligned}$$

logo, $P^{(i)}(0) = 0$ para $i < p-1$ e $P^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p$. Por outro lado, $P^{(i)}(\beta_j) = 0$, $i < p$, $j = 1, 2, \ldots, m$ (pois β_j é raíz de $R(X)$).

Assim, pela proposição (1.22) temos que os coeficientes de $P^{(i)}(X)$ são inteiros divisíveis por p, e como tais coeficientes são obviamente divisíveis por c^s segue que os coeficientes de $P^{(i)}(X)$, $i \geq p$, são inteiros divisíveis por pc^s, e portanto $F(0) = c^s c_0^p + pc^s k_0$, onde $k_0 \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, para os β_i temos que $\sum_{j=1}^m F(\beta_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i \geq p} P^{(i)}(\beta_j) = \sum_{i\geq p} \sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_J)$ (pois $P^{(i)}(\beta_j) = 0$ para $i < p$).

Agora, para cada i fixado com $p \leq i \leq s+p$, obtemos $\sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j) = pc^s Q(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, onde $Q(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ é um polinômio nos β_i's de grau menor ou igual a s. Claramente vemos que $Q(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ é um polinômio simétrico nos β_i's com coeficientes inteiros; logo, pelo Lema (1.14) do capítulo 1, existe um polinômio $G(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$de grau menor ou igual a s com coeficientes inteiros, onde $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ são os polinômios simétricos em $\beta_1, \ldots, \beta_m$ tal que $Q(\beta_1, \ldots, \beta_m) = G(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. Observando também que $\gamma_1 = \frac{c_{m-1}}{c}$, $\gamma_2 = \frac{c_{m-2}}{c}, \ldots, \gamma_m = \frac{c_0}{c}$ temos que $\sum_{j=1}^m F(\beta_j) = pk_1$, onde $k_1 \in \mathbb{Z}$, e conseqüentemente, obtemos que o lado esquerdo de (3) é um inteiro $b = |c^s c_0^p + pc^s k_0 + pk_1| = |c^s c_0^p + p(c^s k_0 + k_1)|$ e, tomando $p > k$, c e c_0 segue que $b \neq 0$ (pois $p \not| \, b$).

Agora vamos estimar o lado direito de (3).

Seja $M = max\{|\beta_1|, \ldots, |\beta_m|\}$ e como $\epsilon_j = 2|\beta_j| \sup\{|e^{(1-\lambda)\beta_j} P(\lambda\beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ segue $\epsilon_j \leq 2Me^M C \frac{|c|^s}{(p-1)!} \sup\{|\lambda\beta_j|^{p-1} R(\lambda\beta_j) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Seja $N = max\{|R(z)| : |z| > M\}$, que usado na desigualdade acima nos dá:

$$\epsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} M^{p-1} N^p.$$

Como $\lim_{n\to+\infty} \frac{M^n}{n!} = 0 \ \forall \ M > 0$, temos que para p suficientemente grande, podemos tomar $\epsilon_j < \frac{1}{m+1}$ e então,

$$\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j \leq \frac{m}{m+1} < 1 \qquad (\text{ABSURDO}).$$

Portanto π é transcendente. **c.q.d.**

Surge como conseqüência direta do teorema (2.3) a resposta negativa da quadratura do círculo. Em outras palavras, seria possível construir utilizando apenas régua e compasso, um quadrado de área igual à de um círculo dado; o teorema (2.3) mostra que não; de fato, caso contrário, se pudéssemos construir um segmento igual a $\sqrt{\pi}$ (pois $\sqrt{\pi}$ é o lado do quadrado de área igual à de um círculo de raio unitário), então$\sqrt{\pi}$ seria algébrico (pois todos os segmentos construtíveis com régua e compasso possuem comprimento igual a um número algébrico). Deste modo, π também seria algébrico (contradição com o teorema (2.3)).

Capítulo 3

O número e

Definimos o número e, que aparece na teoria da função logarítmica, como o número tal que a área hachurada abaixo é igual a 1

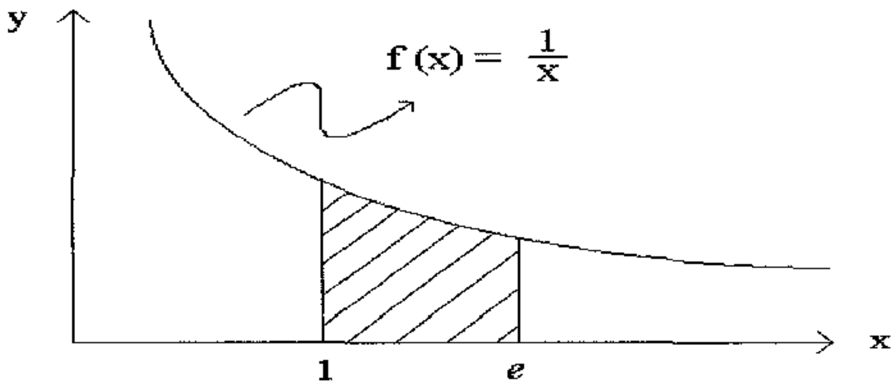


Figura 3.1

Em verdade, provavelmente por volta de 1727 ou 1728, Euler usou a letra e mais de doze vezes para representar a base de sistema de logaritmos naturais numa exposição manuscrita de seus resultados. O conceito por trás desse número era bem conhecido desde a invenção dos logaritmos, porém nenhuma notação padronizada para ele se tornara comum.

Numa carta a Goldbach em 1731, Euler novamente usou a letra e para designar aquele número cujo logaritmo hiperbólico é igual a 1, aparecendo impresso pela primeira vez na mechanica de Euler de 1736, livro onde a dinâmica de Newton é apresentada inicialmente em forma analítica. Assim, essa notação sugerida talvez pela primeira letra da palavra "exponencial" tornou-se padrão. Um valor mais preciso de e é $2,718281828459\ldots$, e mais ainda, veremos neste capítulo que é irracional transcendente, surgindo assim uma indagação natural sobre a importância de tal número. Ele aparece em várias questões dentro da matemática.

Vejamos um exemplo sobre a aplicação do número e. Suponhamos que nós emprestássemos a alguém a quantia de 1 real a juros de 100% ao ano; no final do ano, essa pessoa deveria nos pagar e traria 2 reais: 1 que tomara emprestado e 1 de juros. Isso seria justo? A resposta é certamente que não; vejamos a razão de tal fato: Se tal pessoa viesse nos pagar seis meses depois do empréstimo, nós receberíamos $1+\frac{1}{2}$ reais, ou seja, neste momento ela estava com $1+\frac{1}{2}$ reais nosso e ficou com esse por mais seis meses, com juros de 100% ao ano; logo, deveríamos receber

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{reais}$$

no fim do ano. Porém, isto ainda não é justo.

Dividindo o ano num número arbitrário n de partes iguais, transcorrido o primeiro período de (1 ano)$/n$, nosso capital estaria valendo $1+\frac{1}{n}$ reais. No fim do segundo período de (1 ano)$/n$, nós estaríamos com $(1+\frac{1}{n})^2$ reais, e assim por diante. No fim do ano nós deveríamos receber $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ reais, $\forall\ n$; decorre que o valor justo e exato que deveríamos receber pelo real emprestado seria

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{reais}$$

Agora, considerando $x>0$ e a expressão $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, vamos mostrar que tomando valores muito grandes para x, podemos fazer o valor desta expressão aproximar-se do e tanto quanto desejemos, ou seja, em outras palavras provaremos que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \ \ (x\neq 0)$. Pondo $y=\frac{1}{x}$ (com $x\neq 0$) equivale mostrar que $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e \ \ (y\neq 0)$.

Observação: Seja $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais positivos. Definimos a função real $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ pondo, para cada $x>0$

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

O número $\ln x$ será chamado o logaritmo natural de x. Relembrando sobre a convensão sobre os extremos do intervalo de integração:

$$\int_a^a f = 0 \text{ e } \int_a^b f = -\int_b^a f$$

temos, pois:

$\ln 1 = 0$ e $\ln x < 0$ quando $0<x<1$.

Quando $x>1$, $\ln x$ é a área da "faixa de hipérbole"

$$H_1^x = \{(t,y)\in\mathbb{R}^2; 1\le t\le x,\ 0\le y\le 1/t\}.$$

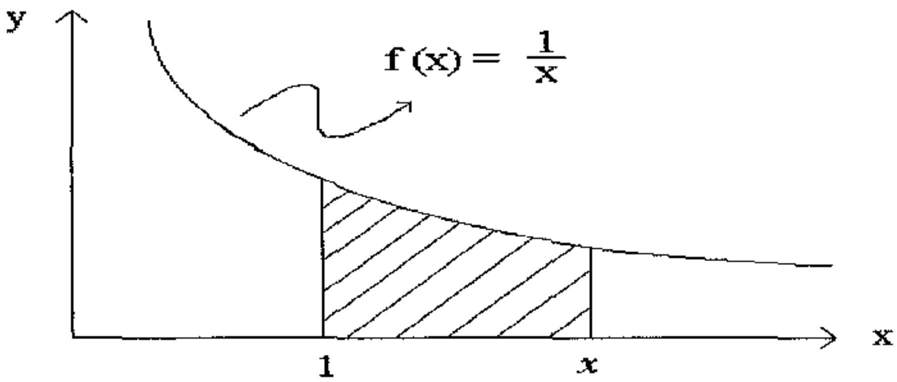


Figura 3.2

A área hachurada é igual a $\ln x$.

Quando $0<x<1$, $\ln x$ é a área da faixa hachurada da Figura 3.3 com o sinal menos.

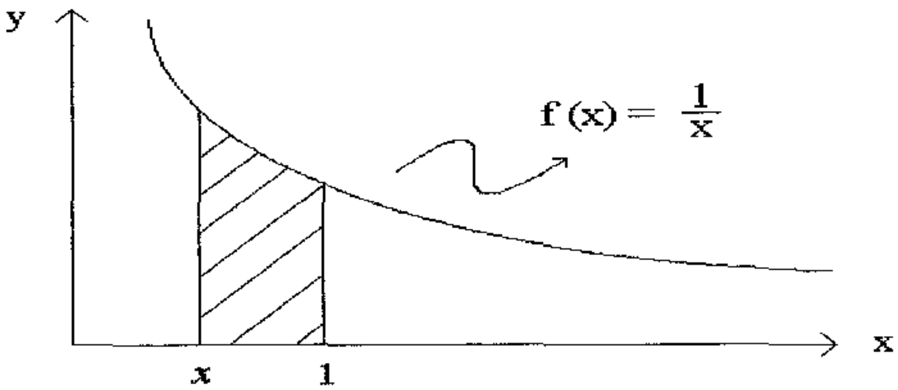


Figura 3.3

Resumindo, temos:

$$\begin{aligned} &\ln 1 = 0; \\ &\ln x > 0, \quad \text{se } x > 1; \\ &\ln x < 0, \quad \text{se } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

Alguns matemáticos, consideram o logaritmo acima de maneira errônea como *logaritmo neperiano*, devido ao matemático John Napier (1550-1617), porém o logaritmo definido por Napier tinha valores diferentes deste (ver [2]).

Teorema 3.1 *Para* $x \neq 0$, *temos* $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Demonstração:
Suponhamos inicialmente que $x > 0$.

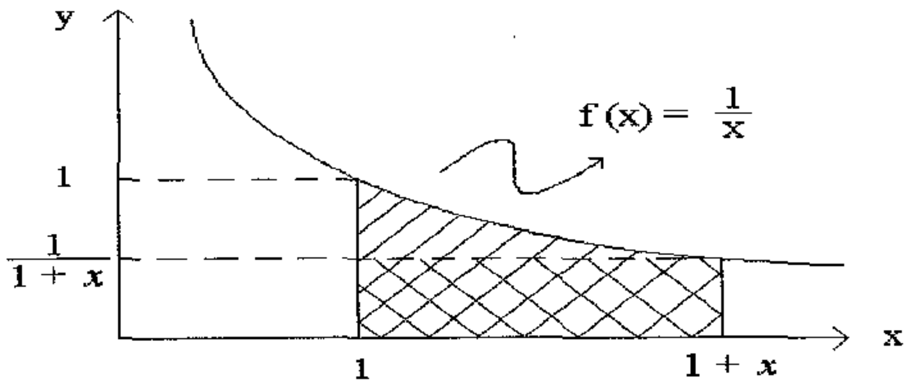


Figura 3.4

Assim, $\ln(1+x)$ é a área da faixa H_1^{1+x}, a qual está contida no retângulo de base igual a x com altura igual a 1. Como a área deste retângulo é igual a x, segue que $\ln(1+x) < x$; então, $\frac{1}{x}.\ln(1+x) < x$, ou seja, $\ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}] < 1$. Isto nos diz que o número $(1+x)^{\frac{1}{x}} < 1$.

Portanto,

$$(1) \qquad (1+x)^{\frac{1}{x}} < e, \quad \text{para } x > 0.$$

Por outro lado, notando que a faixa H_1^{1+x} contém um retângulo de base igual a x e altura igual a $\frac{1}{1+x}$, logo com área $\frac{x}{1+x}$, temos

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x),$$

ou seja,

$$\frac{1}{1+x} < \ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$$

Isto nos mostra que

$$(2) \qquad e^{\frac{1}{1+x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}, \text{ para } x > 0$$

De (1) e (2) resulta que

$$e^{\frac{1}{1+x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e, \ \forall\, x > 0.$$

Fazendo $x \to 0$ vemos que $e^{\frac{1}{1+x}} \to e$. Como $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ está mais próximo de e do que $e^{\frac{1}{1+x}}$, concluímos que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, isto é, quando x tende a zero por valores positivos, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tende a e.

Suponhamos agora que $x < 0$ e sem perda de generalidade que $x > -1$ (pois faremos x tender a zero); logo, $x+1 > 0$ e então, podemos considerar $\ln(1+x)$.

Como $-1 < x < 0$, $-\ln(1+x)$ é a área da faixa de hipérbole H_{1+x}^{1}, a qual contém um retângulo com base igual ao número positivo $-x$ a altura igual a 1; logo, a altura deste retângulo é $-x$. Além disso, a mesma faixa H_{1+x}^{1} está contida num retângulo com base igual a $-x$ e altura igual a $\frac{1}{1+x}$, e então de área igual ao número positivo $\frac{-x}{1+x}$, e assim escrevemos

$$-x < -\ln(1+x) < \frac{-x}{1+x}.$$

Observe a figura abaixo:

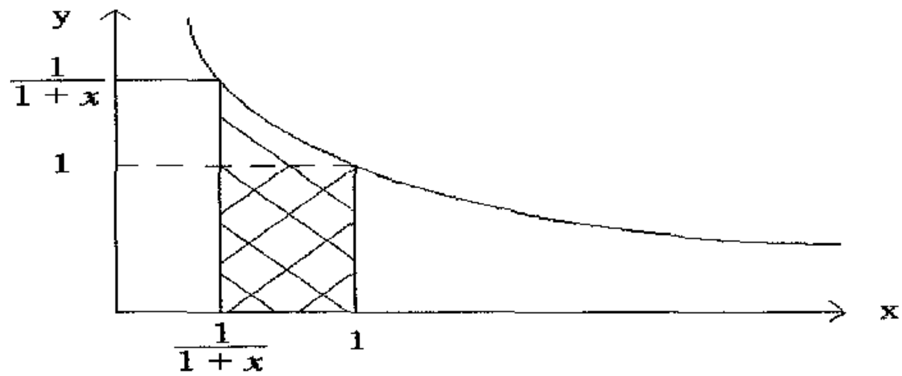


Figura 3.5

Dividindo os três membros da dupla desigualdade anterior pelo número positivo $-x$, obtemos

$$1 < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{1+x},$$

ou seja,

$$1 < \ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}] < \frac{1}{1+x},$$

então

$$e < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{1}{1+x}}$$

donde concluímos que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ se } x < 0.$$

Portanto, $\forall\ x \in \mathbf{R}$ temos $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Ou equivalentemente, $\lim_{y\to +\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$. **c.q.d.**

Em particular, dando a $n = 1, 2, 3, \ldots$ valores inteiros, temos $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ que é a fórmula clássica do número e.

Teorema 3.2 (ver [1]) *O número e é irracional.*

Demonstração:
Sabemos do cálculo que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right) = e^x$, onde $x \in \mathbf{R}$. Em particular, para $x = 1$, temos:

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = e^1 = e.$$

Suponhamos por absurdo que e seja racional, isto é, $e = \frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(p,q) = 1$. Daí, de (1) nós obtemos

$$(2) \qquad \frac{p}{q} - \left(1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right) = \sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{i!}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{i!} &= \frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\ldots \\
&= \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)(q+2)}+\ldots\right) \\
&< \frac{1}{q!}\left(\left(\frac{1}{q+1}\right)+\frac{1}{(q+1)^2}+\ldots\right) \qquad \text{pois } \frac{1}{(q+1)} > \frac{1}{(q+n)}\ \forall\ n > 1.
\end{aligned}$$

Agora a expressão $\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)^2}+\ldots$ denota uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{(q+1)} < 1$, logo sua soma é igual a

$$\frac{r}{1-r} = \frac{\frac{1}{(q+1)}}{1-\frac{1}{(q+1)}} = \frac{1}{q},$$

então

$$\sum_{i=q+1}^{\infty}\frac{1}{i!} < \frac{1}{q!}.\frac{1}{q}$$

Logo, retomando (2) com a estimativa anterior, obtemos

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!}.\frac{1}{q},$$

ou seja,

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q}. \tag{3}$$

Observando as desigualdades em (3), vemos que o termo do meio é um inteiro, pois $q!$ cancela todos os denominadores das frações aí presentes (ABSURDO, pois como $\frac{1}{q} \leq 1$, (3) nos diz que o termo do meio é um inteiro não-nulo estritamente menor do que 1).

Portanto e é irracional. **c.q.d.**

Vamos mostrar agora a transcendência do número e. O nome "Teorema de Hermite" é freqüentemente dado à afirmação de que e é um número transcendente, pois foi este talentoso matemático francês Charles Hermite (1822) quem demonstrou tal afirmação. Depois, matemáticos como Weierstrass e Hilbert simplificaram a prova original de Hermite.

Teorema 3.3 (ver [1]) *O número e não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros, i.e., e é transcendente.*

Demonstração:
Suponhamos por absurdo que e não seja transcendente, ou seja, existe uma equação polinomial de grau m tal que $a_m e^m + \ldots \quad a_1 e + a_0 = 0$, onde, sem perda de generalidade, podemos supor que $a_0 \neq 0$. Vamos definir a função

$$f(x) = \frac{x^{p-1}.(x-1)^p.(x-2)^p \ldots (x-m)^p}{(p-1)!}$$

onde p é um número primo arbitrário.

Observemos que f é um polinômio na variável x com grau$(f(x)) = mp + p - 1$.

Seja $F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(mp+p-1)}(x)$; notando que $f^{(mp+p)}(x) = 0$, e como vimos que

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x}F(x)\right] = -e^{-x}.f(x)$$

então para todo j

$$a_j \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx = a_j.\left[-e^{-x}.F(x)\right]_0^j = a_j F(0) - a_j e^{-j} F(j).$$

Multiplicando por e^j e somando sobre $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ nós obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m}\left(a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)\,dx\right) &= F(0)\sum_{j=0}^{m} a_j e_j - \sum_{j=0}^{m} a_j F(j) \\ &= -\sum_{j=0}^{m}\sum_{j=0}^{mp+p-1} a_j f^{(i)}(j) \end{aligned} \tag{1}$$

Nós alegamos agora que cada $f^{(i)}(j)$ é um inteiro e que este inteiro é divisível por p a menos que $j = 0$ e $i = p - 1$. Nós usamos a regra de Leibniz para o produto de duas funções $\left(D^k(fg) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j f.D^{k-j} g\right)$ novamente. Os únicos termos não-nulos que surgem quando $j \neq 0$, provêm do fator $(x-j)^p$ por diferenciar exatamente p vezes. Como $\frac{p!}{(p-1)!} = p$, todos tais termos são inteiros divisíveis por p. No caso $j = 0$ o único termo não-nulo é quando $i = p - 1$ e então

$$f^{(p-1)}(0) = (-1)^p \dots (-m)^p .$$

O valor de (1) é portanto $kp + a_0(-1)^p \dots (-m)^p$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Agora se $p > \max\{m, |a_0|\}$ então o inteiro $a_0(-1)^p \dots (-m)^p$ não é divisível por p. Deste modo para p primo suficientemente grande o valor de (1) é um inteiro não divisível por p, então não-nulo.

Agora, vamos estimar a integral em (1). Se $0 \leq x \leq m$, nós temos

$$|f(x)| \leq \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!},$$

daí

$$\begin{aligned} \left|\sum_{j=0}^{m} a_j e^j \int_0^j e^{-x} f(x)\, dx\right| &\leq \sum_{j=0}^{m} |a_j e^j| \int_0^j \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} dx \\ &= \sum_{j=0}^{m} |a_j e^j| \frac{m^{mp+p-1}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

a qual tende a zero quando $p \to \infty$ (ABSURDO).

Portanto e é transcendente.

c.q.d.

Capítulo 4

A constante de Apery

Definição 4.1 A *função zeta de Riemann* $\zeta(s)$ tem sua origem nas identidades expressas pelas duas fórmulas

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

onde n percorre todos os inteiros, e

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

onde p percorre todos os primos.

Ambas expressões acima podem ser tomadas como definição de $\zeta(s)$, onde s é uma variável complexa $s = \sigma + it$.

Definição 4.2 A *constante de Apery* é definida como o valor da função zeta de Riemann quando $s = 3$, ou seja,

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1{,}202056903\ldots \quad (\text{ Constante de Apery})$$

Esta designação se deve ao fato de que Apery em 1979, demonstrou a irracionalidade de $\zeta(3)$. Em verdade, nesta seção mostraremos que $\zeta(s)$ para $s = 2$ e $s = 3$ são ambos números irracionais.

Observação: Denotaremos o mínimo múltiplo comum de $1, 2, \ldots, n$ por d_n. É fácil verificar que:

$$\mathrm{d}_n = \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor} < \prod_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} p^{\frac{\log n}{\log p}} < n^{\pi(n)}$$

onde $\lfloor \quad \rfloor$ denota a função maior inteiro definida em (1.17) e $\pi(n)$ denota o número de primos menores ou iguais a n. Além disso, se tornarmos n suficientemente grande, temos $\mathrm{d}_n < 3^n$, visto que $\lim_{n \to \infty} \frac{\pi(n) \log n}{n} = 1$.

Lema 4.3 (ver [14]) *Sejam r e s inteiros não-negativos. Se $r > s$, então:*

(a) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *é um número racional cujo denominador é um divisor de* d_r^2.

(b) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} x^r y^s \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *é um número racional cujo denominador é um divisor de* d_r^3.

Se $r = s$, *então:*

(c) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \ldots - \frac{1}{r^2}$,

(d) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2.\left\{\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \ldots - \frac{1}{r^3}\right\}$.

Observação: No caso $r = 0$, nós temos que as somas $\frac{1}{1^2} - \ldots - \frac{1}{r^2}$ e $\frac{1}{1^3} - \ldots - \frac{1}{r^3}$ desaparecem.

Demonstração:

Seja σ um número não-negativo qualquer. Consideremos a integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

Desenvolvendo $\frac{1}{1-xy}$ em série geométrica, isto é, $\frac{1}{1-xy} = 1 + xy + x^2y^2 + x^3y^3 + \ldots$ e substituindo em (1), nós obtemos

$$\int_0^1 \int_0^1 \{x^{r+\sigma}y^{s+\sigma} + x^{r+\sigma+1}y^{s+\sigma+1} + x^{r+\sigma+1+1}y^{s+\sigma+1+1} + \ldots\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Calculando a dupla integral resulta que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1).(k+s+\sigma+1)} \tag{2}$$

Assumindo $r > s$, então podemos escrever

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1).(k+s+\sigma+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{(k+s+\sigma+1)} - \frac{1}{(k+r+\sigma+1)} \right\} \\ &= \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{s+1+\sigma} + \ldots + \frac{1}{r+\sigma} \right\} \end{aligned} \tag{3}$$

Logo, se $\sigma = 0$, então:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{r-s} \left\{ \frac{1}{(s+1)} + \ldots + \frac{1}{(r+1)} \right\}$$

e portanto a afirmação (a) fica demonstrada.

Agora diferenciando a integral (1) com respeito a σ, nós obtemos

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^{r+\sigma} y^{s+\sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

e calculando em $\sigma = 0$ nos dá

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

enquanto que a soma em (3) se transforma em

$$-\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}+\ldots+\frac{1}{r^2}\right\},$$

e então:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^s \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}+\ldots+\frac{1}{r^2}\right\},$$

ou seja,

$$\int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log xy}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{r-s}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}+\ldots+\frac{1}{r^2}\right\},$$

e a afirmação (b) fica demonstrada.

Suponhamos agora que $r = s$, logo de (1) e (2) vem que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{r+\sigma} y^{s+\sigma}}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+\sigma+1)^2} \tag{4}$$

Fazendo $\sigma = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^r}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+r+1)^2} \\
&= \frac{1}{(r+1)^2} + \frac{1}{(r+2)^2} + \ldots \\
&= \zeta(2) - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \ldots - \frac{1}{r^2},
\end{aligned}$$

logo, a afirmação (c) fica demonstrada.

Diferenciando (4) com respeito a σ, nós temos

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^{r+\sigma} y^{r+\sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(k+r+\sigma+1)^3}$$

e calculando em $\sigma = 0$ vem que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{\log xy}{1-xy} x^r y^r \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-2}{(k+r+1)^3} \\
&= 2\left\{\zeta(3) - \frac{1}{1^3} - \ldots - \frac{1}{r^3}\right\}
\end{aligned}$$

logo, a afirmação (d) fica demonstrada.

c.q.d.

Teorema 4.4 (ver [14]) *A constante $\zeta(2)$ é um número irracional.*

Demonstração:
Seja n um inteiro positivo e consideremos a seguinte integral

$$(1) \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

onde $P_n(x)$ é um polinômio tipo Legendre dado por $n!P_n(x) = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\}^n x^n.(1-x)^n$. Temos que $P_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Pelo lema anterior (parte (c)) a integral (1) é igual a $(A_n + B_n\ \zeta(2))\mathrm{d}_n^{-2}$ para algum A_n e B_n em $\mathbb{Z}$. Em seguida, tomando:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{1-xy} \\ dv = P_n(x)\mathrm{d}x \end{cases}$$

e fazendo n-passos de integração parcial com respeito a x, a integral (1) se transforma em

$$(2) \qquad (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^n(1-y)^n x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Agora, consideremos a função de duas variáveis

$$F(x,y) = \frac{y(1-y)x(1-x)}{(1-xy)}$$

para todo $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.
Obviamente $F(x,y) = F(y,x)$, além disso:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = \frac{y(1-y).(1-2x+x^2y)}{(1-xy)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = \frac{x(1-x).(1-2y+y^2x)}{(1-xy)^2}$$

Assim, vamos analisar os pontos críticos de $F(x,y)$ na região indicada na Figura 4.1:

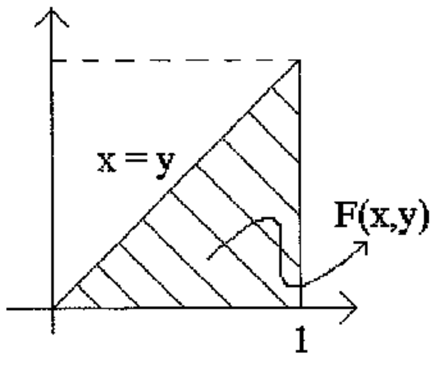


Figura 4.1

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y(1-y).(1-2x+x^2y)}{(1-xy)^2} = 0$$
$$\Rightarrow \quad 1 - 2x + x^2y = 0$$

pois, $y(1-y) \neq 0\ \forall\ \ 0 < y < 1$, então $y = \frac{2x-1}{x^2}$.

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x(1-x).(1-2y+y^2x)}{(1-xy)^2}=0$$
$$\Rightarrow \quad 1-2y+y^2x=0$$

pois $x(1-x)\neq 0\ \forall\ \ 0<x<1$, então $x=\frac{2y-1}{y^2}$.

Disto concluímos que as derivadas parciais se anulam simultaneamente se e somente $x=y$. Mas ao longo de $x=y$, temos:

$$1-2x+x^3=0 \Rightarrow (x-1).(x^2+x-1)=0 \longrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ x'' = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\text{ não convém}) \end{cases}$$

e

$$1-2y+y^3=0 \Rightarrow (y-1).(y^2+y-1)=0 \longrightarrow \begin{cases} y' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ y'' = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\text{ não convém}) \end{cases}$$

Logo, o ponto $(x,y)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ é um ponto crítico de $F(x,y)$, e como

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) &= \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

e

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4$$

então

$$F(x,y)\leq\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^r$$

para todo $0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1$.

Então a integral (1) é limitada em valor absoluto por

$$\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}^{5n}\int_0^1\int_0^1\frac{1}{1-xy}dxdy=\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}^{5n}\zeta(2) \qquad \text{(pela observação feita no Lema (4.3).)}$$

Como a integral (2) é não-nula, nós temos:

$$0<|A_n+B_n\,\zeta(2)|\,\mathrm{d}_n^{-2}<\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}^{5n}\zeta(2)$$

e portanto,

$$0<|A_n+B_n\zeta(2)|\ <\mathrm{d}_n^2\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}^{5n}\zeta(2)<9^n\left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}^{5n}\zeta(2)<\left\{\frac{5}{6}\right\}^n$$

para n suficientemente grande.

Isto implica na irracionalidade de $\zeta(2)$, pois como $A_n, B_n \in \mathbb{Z}$ se $\zeta(2)$ fosse racional a expressão em módulo seria limitada abaixo independentemente de n. **c.q.d.**

Teorema 4.5 (ver [14]) *A constante de Apery $\zeta(3)$ é um número irracional.*

Demonstração:
Consideremos a integral

$$(1) \qquad \int_0^1 \int_0^1 -\frac{\log xy}{1-xy} P_n(x) P_n(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

onde $n! P_n(x) = \left\{\frac{d}{dx}\right\}^n x^n (1-x)^n$.

Pelo Lema (4.3) (parte(d)) a integral (1) é igual a $(A_n + B_n\ \zeta(3))\mathrm{d}_n^{-3}$ para algum $A_n \in \mathbb{Z}$ e $B_n \in \mathbb{Z}$.

Observando que $-\frac{\log xy}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)z}\mathrm{d}z$ então podemos escrever a integral (1) como

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{P_n(x) P_n(y)}{1-(1-xy)z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Tomando

$$\begin{cases} u = \frac{1}{(1-(1-xy)z)^{-1}} \\ \mathrm{d}v = P_(x)\mathrm{d}x \end{cases}$$

e fazendo n-passos de integração por partes com respeito a x, a integral (1) se transforma em

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(xyz)^n (1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)z)^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Agora, substituindo $w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z}$ nós obtemos

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-x)^n P_n(y)}{(1-(1-xy)w))} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}w.$$

Utilizando novamente o argumento

$$\begin{cases} u = \frac{1}{(1-(1-xy)w)} \\ \mathrm{d}v = P_n(y)\mathrm{d}y \end{cases}$$

e fazendo n-passos de integração parcial com respeito a y, nós obtemos

$$(2) \qquad \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n (1-y)^n w^n (1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}w$$

Vamos considerar a função de três variáveis

$$F(x,y,w) = \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \quad \text{para } 0 \leq x,y,w \leq 1.$$

Daí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= y(1-y)w(1-w)\left\{\frac{[1-(1-xy)w].(1-2x) - x(1-x).yw}{[1-(1-xy)w]^2}\right\} \\
&= y(1-y)w(1-w)\left\{\frac{[1-w-2x+2xw-x^2yw]}{[1-(1-xy)w]^2}\right\} \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= x(1-x)w(1-w)\left\{\frac{1-w-2y+2yw-y^2xw}{[1-(1-xy)w]^2}\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial w} &= x(1-x)y(1-y)\left\{\frac{[1-(1-xy)w].(1-2w)-w(1-w).(xy-1)}{[1-(1-xy)w]^2}\right\} \\
&= x(1-x)y(1-y)\left\{\frac{1-2w+w^2-xyw^2}{[1-(1-xy)w]^2}\right\}
\end{aligned}
$$

assim:

$$
\begin{cases}
1-w-2x+2xw-x^2yw=0 \\
1-w-2y+2yw-y^2xw=0 \\
1-2w+w^2-xyw^2=0
\end{cases}
$$

Da 1ª equação temos: $w(2x-1-x^2y)=2x-1$.
Da 2ª equação temos: $w(2y-1-y^2x)=2y-1$.
Dividindo , obtemos:

$$
\frac{2x-1-x^2y}{2y-1-y^2x}=\frac{2x-1}{2y-1},
$$

i.e.,

$$
4xy-2x-2x^2y^2-2y+1+y^2x=4xy-2x-2y+-2x^2y^2+x^2y
$$

e então $x=y$.
Substituindo $x=y$ na 1ª equação temos

$$
1-w-2x+2xw-x^2w=0 \Rightarrow w=\frac{2x-1}{2x-1-x^3}.
$$

Por outro lado, da 3ª equação temos:

$$
\begin{aligned}
1-2w+w^2-x^2w^2 &= 0 \\
1-2w+(1-x^2)w^2 &= 0 \\
1-2\left(\frac{2x-1}{2x-1-x^3}\right)+(1-x^2)\left(\frac{2x-1}{2x-1-x^3}\right)^2 &= 0 \\
\frac{2x-1-x^3-4x+2}{2x-1-x^3} &= \frac{(x^2-1)(2x-1)^2}{(2x-1-x^3)^2} \\
(-x^3-2x+1).(2x-1-x^3) &= (x^2-1)(4x^2-4x+1) \\
(x^3+2x-1)(x^3-2x+1) &= (x^2-1)(4x^2-4x+1) \\
(x^3+2x-1)(x-1)4(x^2+x-1) &= (x-1)4(x+1)(4x^2-4x+1) \\
x^5+2x^3-x^2+x^4+2x^2-x-x^3-2x+1 &= 4x^3-4x^2+x+4x^2-4x+1 \\
x^5+x^3+x^4+x^2-3x+1 &= 4x^3-3x+1 \\
x^5+x^4-3x^3+x^2 &= 0 \\
x^2(x^3+x^2-3x+1) &= 0 \\
x^2(x-1)(x^2+2x-1) &= 0 \Rightarrow x=y=\sqrt{2}-1
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{2x-1}{2x-1-x^3} \\
&= \frac{2(\sqrt{2}-1)-1}{2(\sqrt{2}-1)-1-(\sqrt{2}-1)^3} \\
&= \frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}-3-5\sqrt{2}+7}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{2}-3}{4-3\sqrt{2}} \cdot \frac{(4+3\sqrt{2})}{(4+3\sqrt{2})} \\
&= \frac{-\sqrt{2}}{-2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

logo:

$$\begin{aligned}
F(x,y,z) &= F(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \frac{\sqrt{2}}{2}) \\
&= \frac{(\sqrt{2}-1)^2(1-(\sqrt{2}-1))^2\sqrt{2}/2(1-\sqrt{2}/2)}{1-(1-(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1))\sqrt{2}/2} \\
&= (\sqrt{2}-1)(5\sqrt{2}-7) \\
&\leq (\sqrt{2}-1)^4
\end{aligned}$$

ou seja, o máximo da função $\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)-w}$ ocorre quando $x = y$ e portanto nós temos

$$\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)-w} \leq (\sqrt{2}-1)^4$$

para todo $0 \leq x, y, w \leq 1$.

Então a integral (1) é limitada superiormente por

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-(1-xy)w} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}w = \\
&= (\sqrt{2}-1)^{4n} \int_0^1 \int_0^1 \frac{-\log xy}{(1-xy)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2(\sqrt{2}-1)^{4n}\zeta(3) \qquad \text{(pela observação feita no Lema (4.3)).}
\end{aligned}$$

Como a integral (2) é não-nula nós temos

$$0 < |A_n + B_n\ \zeta(3)\mathrm{d}_n^{-3}| < 2\zeta(3)(\sqrt{2}-1)^{4n}$$

e então

$$\begin{aligned}
0 &< |A_n + B_n\ \zeta(3)| \\
&< \zeta(3)\mathrm{d}_n^3(\sqrt{2}-1)^{4n} \\
&< 2\ \zeta(3)\ 27^n(\sqrt{2}-1)^{4n} \\
&< \left(\frac{4}{5}\right)^n
\end{aligned}$$

para n suficientemente grande, o que implica na irracionalidade de $\zeta(3)$. **c.q.d.**

Teorema 4.6 (ver [13])**Uma representação em série para $\zeta(3)$**

$$\zeta(3) = \frac{\pi^2}{7}\left\{1 - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{(2n+1)(2n+2)2^{2n}}\right\}$$

Demonstração:
Consideremos a série binomial

$$(1) \qquad (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k x^{2k}$$

a qual converge para $|x| < 1$, com coeficientes $C_k = (-1)^k.\begin{pmatrix} -1/2 \\ k \end{pmatrix} = 2^{-2k}\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} = \frac{1.3.\ldots.(2k\text{-}1)}{2.4.\ldots.(2k)}$
onde $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ designa o coeficiente binomial generalizado definido no teorema (1.20).

Integrando a identidade (1) em relação a x, obtemos:

$$(2) \qquad \operatorname{sen}^{-1}x = x + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}$$

Dividindo (2) por x segue que

$$\frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{x^{2k}}{(2k+1)}$$

e integrando novamente, temos

$$(3) \qquad \int_0^x t^{-1}\operatorname{sen}^{-1}t\,dt = x + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

Tomando $u = \operatorname{sen}^{-1}t$, a integral do lado esquerdo de (3) se transforma em

$$\int_0^{\operatorname{sen}^{-1}x} u \cot u \; du,$$

e substituindo x por $\operatorname{sen} t$ em (3) nós temos

$$(4) \qquad \int_0^t u \cot u du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^{2k+1}t}{(2k+1)^2}.$$

Por outro lado, como

$$u \cot u = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} u^{2n},$$

então de (4) vem que

$$t - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \frac{\operatorname{sen}^{2k+1}t}{(2k+1)^2}$$

Integrando de 0 a $\frac{\pi}{2}$ e usando o produto de Wallis (ver [5]) na forma

$$C_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2k+1}t \; dt = \frac{1}{(2k+1)}$$

nós então obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} \frac{(\pi/2)^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \\ &= \frac{7}{8}\,\zeta(3) \end{aligned}$$

e portanto, simplificando a equação acima temos

$$\zeta(3) = \frac{\pi^2}{7}\left\{1 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{(2n+1)(2n+2)2^{2n}}\right\}$$

c.q.d.

Capítulo 5

A constante de Euler

Além dos três símbolos e, π, i pelos quais Euler em grande parte é responsável, uma outra constante importante na matemática, também devida a Euler, freqüentemente denotada por γ é definida pela seguinte relação

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right) = 0,5772156649\ldots$$

Euler em 1735 obteve o valor 0,577218, porém em 1781 ele calculou com maior precisão o valor 0,5772156649015325. Vários outros matemáticos continuaram a tentativa de encontrar uma excelente estimativa para γ, dentre eles Gauss, que encontrou $\gamma = 0,57721566490153286060653\ldots$; já famosos matemáticos astrônomos como Shanks que obteve 110 casas decimais (das quais 101 corretas) enquanto J.C. Adams, provavelmente estendendo o trabalho de Shanks, encontrou γ com 263 casas decimais corretas. O valor encontrado por Adams perdurou até 1952, quando J.W. Wrench Jr. calculou γ com 328 casas decimais precisas. Hoje já existem vários métodos computacionais proporcionando o cálculo de γ com milhares de casas decimais; entretanto, não é de nosso interesse aqui. Apesar do conhecimento de γ com mais de 30000 casas decimais, não é sabido se γ é racional ou irracional. A título de informação, alguns autores consideram a constante γ como a constante de Euler-Mascheroni, devido ao fato de que Mascheroni calculou γ com 32 casas decimais corretas (ver [11] e [23]).

Neste capítulo, apresentaremos algumas propriedades da constante γ; como primeiro resultado, vamos dar uma simples demonstração de que $0 < \gamma < 1$.

Teorema 5.1 (ver [5]) $0 < \gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) - \log n < 1$.

Demonstração:
Primeiramente observemos que:

- se $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ então, $\log(1+x) < x$;
- se $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 1$ então, $-\log(1-x) > x$;
  daí:
- se $x = \frac{1}{n}$, temos:
  $-\log\left(1-\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n} > \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, ou seja,
  $-\log\left(\frac{n-1}{n}\right) > \frac{1}{n} > \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

- se $x = \frac{1}{n-1}$ temos:

  $-\log\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) > \frac{1}{n-1} > \log\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$, ou seja,

  $\log\left(\frac{n-1}{n-2}\right) > \frac{1}{n-1} > \log\left(\frac{n}{n-1}\right)$

  e assim por diante,

  $\log\left(\frac{3}{2}\right) > \frac{1}{3} > \log\left(\frac{4}{3}\right)$

  $\log\left(\frac{2}{1}\right) > \frac{1}{2} > \log\left(\frac{3}{2}\right)$

  $1 = 1 > \log\left(\frac{2}{1}\right)$

então

$1 + \log n > \sum \frac{1}{n} > \log(n+1)$, ou seja,

$\log(n+1) < \sum \frac{1}{n} < 1 + \log n$ e portanto,

$\log(n+1) - \log n < \sum \frac{1}{n} - \log n < 1 + \log n - \log n$

$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) < \sum \frac{1}{n} - \log n < 1$

$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \sum \frac{1}{n} - \log n < 1$

Agora, quando $n \to \infty$ temos que $\lim \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$, e então

$$0 < \lim_{n\to\infty}\left(\sum \frac{1}{n} - \log n\right) = \gamma < 1.$$

c.q.d.

Teorema 5.2 (ver [24]) *Para todo número natural n, temos que*

$$\frac{1}{2(n+1)} < D_n - \gamma < \frac{1}{2n}$$

onde $D_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n.$

Demonstração:

Vamos justificar o limitante superior através dos argumentos geométricos que apresentamos a seguir: Observamos inicialmente que a soma $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ corresponde à soma das áreas dos retângulos de base igual a 1 e altura igual a $\frac{1}{n}$ como segue

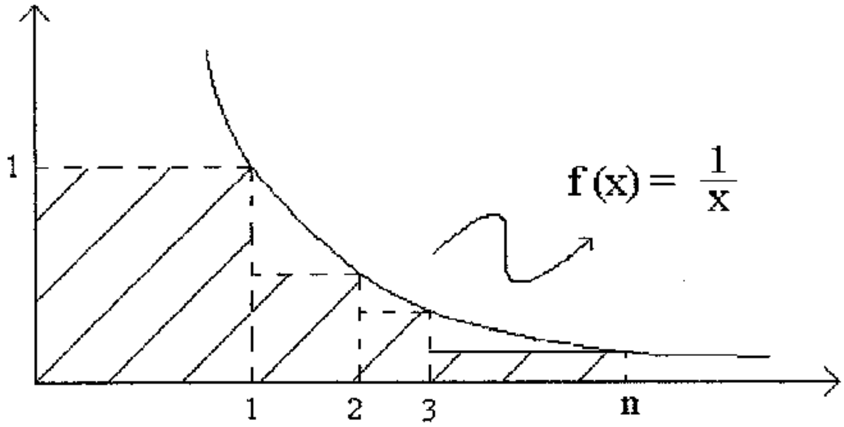


Figura 5.1

além disso, temos também que $\log n$ representa a seguinte área hachurada abaixo

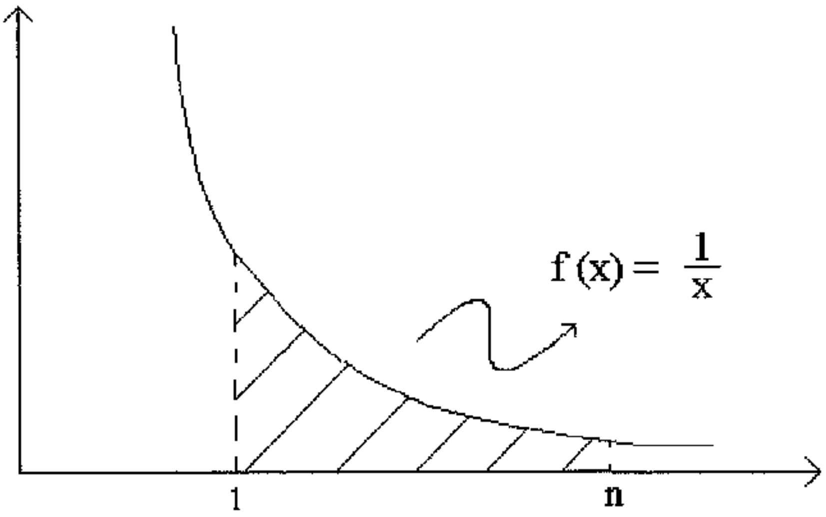


Figura 5.2

Portanto, observando as figuras anteriores, vemos que D_n corresponde à área hachurada a seguir

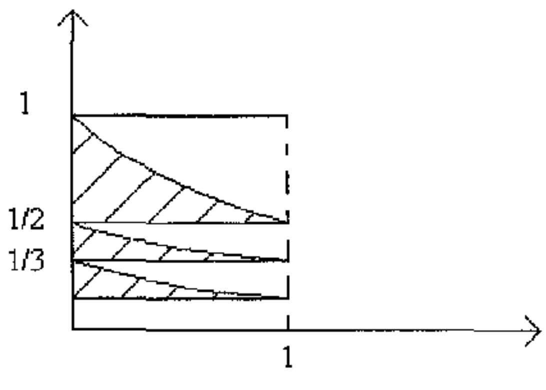


Figura 5.3

Por outro lado, observamos que γ geometricamente corresponde à área do quadrado de lado 1 menos a soma das infinitas áreas assinaladas abaixo

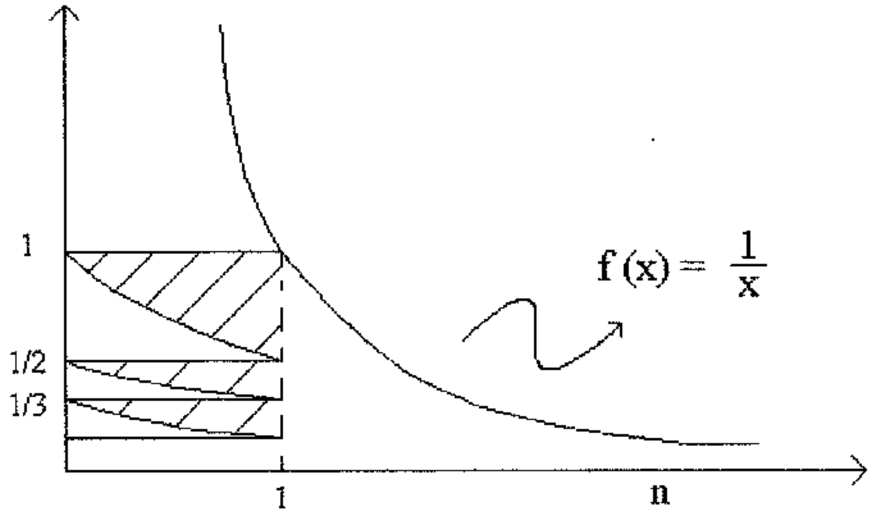


Figura 5.4

que equivale a dizer, que γ é a soma das infinitas áreas abaixo

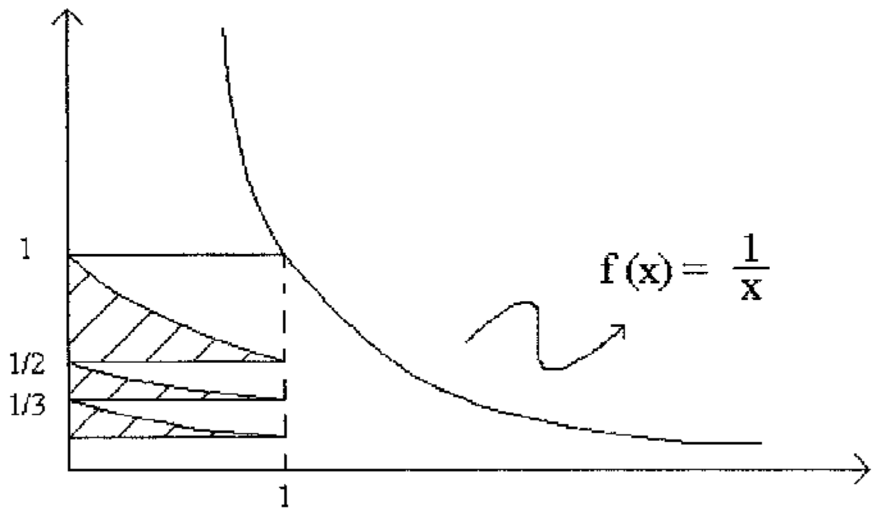


Figura 5.5

Pelas observações feitas acima, podemos concluir que $D_n - \gamma$ é estritamente menor do que $\frac{1}{2n}$, uma vez que estamos adicionando áreas inferiores à metade (já que o gráfico tem concavidade voltada para cima), e portanto a soma de todas elas será inferior à metade da área total do retângulo que é igual a $\frac{1}{n}$.

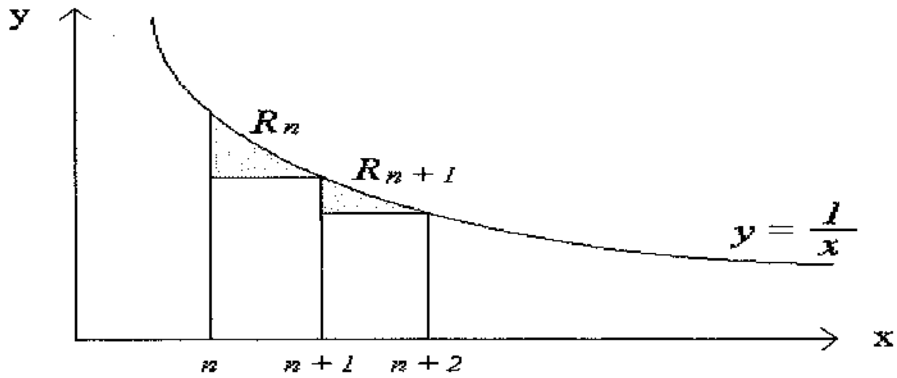


Figura 5.6

Para estabelecermos o limite inferior, nós inscrevemos em cada região pseudo-triangular R_n, R_{n+1}, $R_{n+2}, \ldots$ um certo triângulo definido como segue (a figura 5.7 ilustra a construção para R_m). O triângulo inscrito (escurecido na figura 5.7) tem a mesma base de R_m, mas sua hipotenusa é a extensão da hipotenusa do próximo triângulo circunscrito (o claro da figura 5.7). A concavidade da hipérbole assegura que esta extensão

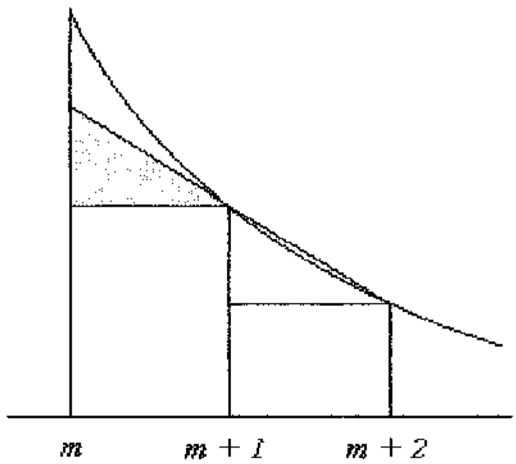


Figura 5.7

Como o triângulo inscrito é congruente a qualquer circunscrito, e como a área deste é $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right)$, segue que

$$\text{área}(R_m) > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right)$$

Somando essas relações sobre os valores de m, nós temos que

$$\begin{aligned} D_n - \gamma &= \sum_{m=n}^{\infty} área(R_m) \\ &> \frac{1}{2}\sum_{m=n}^{\infty}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) \end{aligned}$$

$$= \quad \frac{1}{2(n+1)} \qquad \text{desde que } \frac{1}{m} \to 0$$

c.q.d.

Teorema 5.3 (ver [17]) *Para todo número natural* n*, temos que*

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < R_n - \gamma < \frac{1}{24n^2},$$

onde $R_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Demonstração:
Consideremos $x \in \mathbf{R}$ com $x > 0$, e definamos a função

$$f(x) = -\frac{1}{x+1} - \log\left(x + \frac{1}{2}\right) + \log\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

Observemos que,

$$\begin{aligned}
R_n - R_{n+1} &= \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log\left(n + \frac{1}{2}\right) - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \log\left(n + \frac{3}{2}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{n+1} - \log\left(n + \frac{1}{2}\right) + \log\left(n + \frac{3}{2}\right) \\
&= f(n)
\end{aligned}$$

e também que,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (-1).(-1).(x+1)^{-2} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{x+\frac{3}{2}} \\
&= \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}} + \frac{1}{x+\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right).\left(x+\frac{3}{2}\right) - (x+1)^2.\left(x+\frac{3}{2}\right) + (x+1)^2.\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x+1)^2.\left(x+\frac{1}{2}\right).\left(x+\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right) - \left((x^2+2x+1).(x+\frac{3}{2})\right) + \left((x^2+2x+1).(x+\frac{1}{2})\right)}{(x+1)^2.\left(x+\frac{1}{2}\right).\left(x+\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{x^2+2x+\frac{3}{4} - \left(x^3+\frac{3}{2}x^2+2x^2+3x+x+\frac{3}{2}\right) + \left(x^3+\frac{1}{2}x^2+2x^2+x+x+\frac{1}{2}\right)}{(x+1)^2.\left(x+\frac{1}{2}\right).\left(x+\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{\left(\cancel{x^2}+\cancel{2}x+\frac{3}{4}-\cancel{x^3}-\cancel{\tfrac{3}{2}}x^2-\cancel{2}x^2-\cancel{4}x-\cancel{\tfrac{3}{2}}-\cancel{x^3}+\cancel{\tfrac{1}{2}}x^2+\cancel{2}x^2+\cancel{2}x+\frac{1}{2}\right)}{(x+1)^2.\left(x+\frac{1}{2}\right).\left(x+\frac{3}{2}\right)}
\end{aligned}$$

portanto

$$f'(x) = -\frac{1}{4}.(x+1)^{-2}.\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-1}.\left(x+\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

e então, temos que

$$-f'(x) < -\frac{1}{4}.\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-4}.$$

Por outro lado, como $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, segue que

$$f(k) = -\int_k^{+\infty} f'(x)dx < \frac{1}{4}\int_k^{+\infty}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{-4}dx = \frac{1}{12}.\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

Também como $\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 > k.(k+1)$, vem que

$$\begin{aligned}\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-3} &< \frac{1}{2}.\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\\ &= \int_k^{k+1} x^{-3}dx.\end{aligned}$$

Na verdade, geometricamente fica evidente que $\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-3}$ é menor que a área sob a curva $y = x^{-3}$ para $k \leq x \leq k+1$. Veja a figura 5.8:

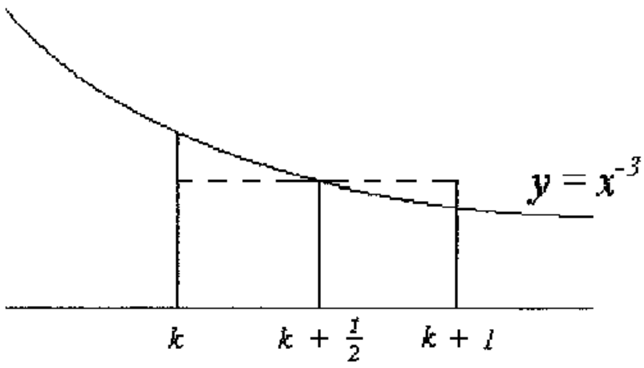


Figura 5.8

Então,

$$\begin{aligned}R_n - \gamma &= \sum_{k=n}^{\infty}(R_k - R_{k+1})\\ &= \sum_{k=n}^{\infty} f(k)\\ &< \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)^{-3}\\ &< \frac{1}{12}\int_n^{\infty} x^{-3}dx\\ &= \frac{1}{24(n)^2},\end{aligned}$$

ou seja,

(1) $$R_n - \gamma < \frac{1}{24n^2}$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned}\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right) &= x^2+2x+\frac{3}{4}\\ &< x^2+2x+1\\ &= (x+1)^2,\end{aligned}$$

daí segue que

$$-f'(x) > \frac{1}{4}(x+1)^{-4}$$

e procedendo com o mesmo raciocínio, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_k^\infty f'(x)dx\\ &> \frac{1}{4}\int_k^\infty (x+1)^{-4}dx\\ &= \frac{1}{12}(k+1)^{-3} \qquad (\text{já que } \lim_{x\to\infty} f(x)=0),\end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} R_n-\gamma = \sum_{k=n}^{\infty}(R_k-R_{k+1})\\ &= \sum_{k=n}^{\infty} f(k)\\ &> \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)^{-3}\\ &> \frac{1}{12}\sum_{n+1}^{\infty} x^{-3}dx\\ &= \frac{1}{24(n+1)^2},\end{aligned}$$

ou seja,

(2) $$\frac{1}{24(n+1)^2} < R_n-\gamma$$

De (1) e (2), vem que

$$\frac{1}{24(n+1)^2} < R_n-\gamma < \frac{1}{24n^2}$$

c.q.d.

Teorema 5.4 (ver [19])

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(\frac{\text{sen}x}{x}-\cos x\right)\frac{\ln x}{x}\text{d}x = 1-\gamma$$

Demonstração:
Consideremos $I(\mu) = \int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x} - \cos x\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$, ou seja, $I(\mu) = \int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(\frac{\operatorname{sen}x - x\cos x}{x^2}\right)\ln x\mathrm{d}x$. Vamos resolver a integral, através da integração por partes: sejam $u = \ln x$, então $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}v = \frac{\operatorname{sen}x - x\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$, então $v = 1 - \frac{\operatorname{sen}x}{x}$; daí:

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x} - \cos x\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x \\ &= \left(1 - \frac{\operatorname{sen}x}{x}\right).\ln x\Big|_{\frac{1}{\mu}}^{\mu} - \int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \left(1 - \frac{\operatorname{sen}\mu}{\mu}\right).\ln\mu - \left(1 - \mu\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)\ln\left(\frac{1}{\mu}\right) - \int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \ln\mu - \frac{\operatorname{sen}\mu}{\mu}.\ln\mu - \ln\frac{1}{\mu} + \mu\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\mu}\right).\ln\left(\frac{1}{\mu}\right) - \int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \ln\mu - \frac{\operatorname{sen}\mu}{\mu}.\ln\mu - \cancel{\ln 1}^{0} + \ln\mu + \mu\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\mu}\right).\ln\mu - \int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= -\frac{\operatorname{sen}\mu}{\mu}.\ln\mu + \left(1 - \mu.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) + \ln\mu - \int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \end{aligned}$$

Por outro lado observemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x &= \ln(1+x)|_{\frac{1}{\mu}}^{\mu} \\ &= \ln(1+\mu) - \ln\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \\ &= \ln(1+\mu) - \ln\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\mu+1}{\frac{\mu+1}{\mu}}\right) \\ &= \ln(\mu) \end{aligned}$$

portanto, podemos escrever

$$I(\mu) = -\operatorname{sen}\mu.\frac{\ln\mu}{\mu} + \left(1 - \mu\operatorname{sen}\frac{1}{\mu}\right)\ln\mu + \int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x} - 1 + \frac{x}{1+x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

ou ainda,

$$I(\mu) = -\operatorname{sen}\mu.\frac{\ln\mu}{\mu} + \left(1 - \mu\operatorname{sen}\frac{1}{\mu}\right)\ln\mu + \int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Agora, como $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ e $1 - \mu\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\mu}\right) \sim \frac{1}{6\mu^2}$ e, além disso como a integral sob $[0, +\infty]$ é absolutamente convergente, temos que

$$\lim_{\mu\to+\infty} I(\mu) = \int_0^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Por outro lado, utilizando a conhecida relação $\gamma = 1 - \int_0^{+\infty}\left[\frac{\operatorname{sen}t}{t} - \frac{1}{1+t}\right]\frac{\mathrm{d}t}{t}$, nós temos

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_{\frac{1}{\mu}}^{\mu}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x} - \cos x\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = 1-\gamma$$

c.q.d.

Teorema 5.5 (ver [20]) **(Uma representação em série para γ)**

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=2^{n-1}}^{2^{n-1}}\frac{n}{(2m)(2m+1)(2m+2)}$$

Demonstração:

Consideremos a função $f(x) = -(x - \lfloor x \rfloor) + \frac{1}{2}$, onde $\lfloor x \rfloor$ denota a função maior inteiro definida em (1.17). Se $s = \sigma + it$ é uma variável complexa satisfazendo $\Re(s) = \sigma > 0$, então temos a seguinte representação para a função zeta de Riemann $\zeta(s)$ (definida em (4.1)),

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^{+\infty}\frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$$

multiplicando por (-1) ambos os lados, obtemos:

$$-\zeta(s) = -\frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} -\frac{(x - \lfloor x \rfloor)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x,$$

isto é,

$$s\int_1^{+\infty} -\frac{(x - \lfloor x \rfloor)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x = -\frac{s}{s-1} + \zeta(s) = -\left(\frac{s}{s-1} - \zeta(s)\right)$$

e daí, somando e subtraindo $\frac{1}{2}$ no numerador do integrando obtemos:

$$s\int_1^{+\infty} -\frac{(x - \lfloor x \rfloor) - \frac{1}{2}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x + s\int_1^{+\infty} -\frac{\frac{1}{2}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x = -\left(\frac{s}{s-1} - \zeta(s)\right)$$

ou seja,

$$s\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}s\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{s+1}} = -\left(\frac{s}{s-1} - \zeta(s)\right)$$

e considerando o fato de que $\frac{1}{2}s\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{s+1}} = \frac{1}{2}$, obtemos

$$(1) \qquad s\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x = -\left(\frac{s}{s-1} - \zeta(s)\right) + \frac{1}{2},$$

a qual é igual a $\gamma - \frac{1}{2}$ para $s = 1$, de fato:

Como $\lim_{s\to 1^+}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma$, temos que:

$$-\left(\frac{s}{s-1} - \zeta(s)\right) + \frac{1}{2} = -\left(\frac{s-1}{s-1} + \frac{1}{s-1} - \zeta(s)\right) + \frac{1}{2},$$

logo, passando o limite quando $s \to 1^+$ obtemos $\gamma - \frac{1}{2}$. Agora vamos definir a função

(2) $$g(x) = f(x) - \frac{f(2x)}{2}$$

assim

(3) $$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ se } 0 \leq x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \text{ se } \frac{1}{2} \leq x - \lfloor x \rfloor < 1. \end{cases}$$

De (2) segue que $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g(2^i.x)}{2^i}$, e se $\Re(s) > 0$ nós temos

(4) $$s\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} s \int_1^{+\infty} \frac{g(2^i.x)}{x^{s+1}}\mathrm{d}x$$

Fazendo $y = 2^i.x$ em (4), nós obtemos

(5) $$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i(s-1)}.s \int_{2^i}^{\infty} \frac{g(y)}{y^{s+1}}\mathrm{dy} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i} 2^{k(s-1)}.s \int_{2^i}^{2^{i+1}} \frac{g(y)}{y^{s+1}}\mathrm{dy}$$

Tomando $s = 1$ e observando que $\sum_{k=0}^{i} 2^{k(s-1)} = 1 + i$, então

$$\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty}(1+i) \int_{2^i}^{2^{i+1}} \frac{g(y)}{y^2}\mathrm{dy},$$

Daí de (3) segue que

$$\begin{aligned} \int_m^{m+1} \frac{g(y)}{y^2}\mathrm{dy} &= \frac{1}{4}\int_m^{m+\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{dy}}{y^2} - \frac{1}{4}\int_{m+\frac{1}{2}}^{m+1} \frac{\mathrm{dy}}{y^2} \\ &= \frac{1}{(2m)(2m+1)(2m+2)} \end{aligned}$$

e portanto,

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=2^{n-1}}^{2^{n-1}} \frac{n}{(2m)(2m+1)(2m+2)}$$

c.q.d.

Capítulo 6

A Razão Áurea

Nós iniciamos o capítulo com um problema de estética; consideremos o seguinte segmento de reta:

Agora indagamos, como seria mais "agradável" dividir tal segmento em duas partes?

Em princípio, alguém poderia responder imediatamente para particionarmos o segmento em duas partes iguais com base na noção de ponto médio

Porém outros poderiam dizer para particionarmos o segmento em 1-4 ou 1-3 pontos.

De qualquer modo, a resposta "correta", não é nenhuma destas, e é encontrada na ciência Western dos antigos gregos avançados (sábios teóricos que falavam dela como o princípio da "simetria dinâmica" ou "simetria ativa"). Se considerarmos o pedaço do lado esquerdo com comprimento igual a $u = 1$, então o pedaço do lado direito será de comprimento igual a $v = 0,618\ldots$. (ver [26], [28], [29]).

Definição 6.1 Um segmento de reta particionado desta forma é dito ser dividido em *seção áurea* ou *seção divina*.

Agora, como poderíamos justificar de modo a favorecer esta particular divisão com tal status? Na verdade, o pensamento é que o comprimento u está para o comprimento $u + v$, assim como o comprimento v está para o comprimento u; em símbolos temos:

$$\frac{u}{u+v} = \frac{v}{u}.$$

Daí, tomando $\phi = \frac{u}{v}$, e observando que

$$1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{\frac{u}{v}} = 1 + \frac{v}{u} = \frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} = \phi$$

obtemos a equação quadrática em ϕ

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \tag{1}$$

A raiz positiva da equação (1) é dada por

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\ldots$$

uma constante a qual é chamada *razão áurea* ou *proporção divina*

Observemos que se $u = 1$, então

$$v = \frac{u}{\phi} = \frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,6180339887\ldots$$

como vimos anteriormente.

Primeiramente, estudamos a relação entre ϕ e os números de Fibonacci.

Definição 6.2 A *seqüência de Fibonacci* (ou simplesmente *números de Fibonacci*) é a seqüência $F_0, F_1, \ldots, F_n$ definida por:

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \ n \geq 2 \end{cases}$$

assim, $(F_n) = (0,1,1,2,3,5,8,13,\ldots)$.

Então, vamos ver o que relaciona ϕ com a seqüência de Fibonacci. Inicialmente notemos que:

$$\begin{aligned}
\phi &= 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}}}} \\
&= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\ldots}}}}}
\end{aligned}$$

ou seja, ϕ está representada como uma fração contínua infinita simples e, além disso, olhando para as frações contínuas parciais, observamos que:

$$\begin{aligned}
1 + \tfrac{1}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1} &= \tfrac{2}{1}, \\
1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} &= 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}, \\
1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} &= 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \tfrac{5}{3}, \\
1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}} &= 1 + \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)} = \tfrac{8}{5}
\end{aligned}$$

assim, todos os resultados são razões de sucessivos números de Fibonacci. Vejamos a seguinte tabela abaixo

Razão	Valor
1/1	1
2/1	2
3/2	1,5
5/3	1,6666
8/5	1,600
13/8	1,625
21/13	1,6135
34/21	1,6190
55/34	1,61764
89/55	1,6181818
144/89	1,617977
233/144	1,6180556
377/233	1,6180258
610/377	1,6180371

Isto motiva a seguinte conjectura $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$. Para a demonstração de tal fato, necessitamos do seguinte resultado auxiliar:

Lema 6.3 (ver [9])

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \ n \geq 0$$

Demonstração:
Multiplicando cada membro da relação de recorrência $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ por x^n, obtemos

(1) $$F_n x^n = F_{n-1}x^n - F_{n-2}x^n$$

Somando a relação (1) para $n \geq 2$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n &= \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n \\
&= x\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^{n-2} \\
&= x\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n
\end{aligned}$$

Agora, seja $f(x)$ a função geradora para a seqüência $F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots$ (veja definição (1.17)), logo podemos reescrever a equação acima como

$$f(x) - F_0 - F_1 x = x(f(x) - F_0) + x^2 f(x)$$

Mas $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, daí obtemos

$$(1 - x - x^2)f(x) = x$$

ou seja,

(2) $$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Agora, vamos desenvolver (2) em série de potências, o coeficiente de x^n será então F_n.

Calculando as raízes do polinômio $1-x-x^2$ e lembrando que $x-a=-a\left(1-\frac{x}{a}\right)$, temos

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad f(x) &= \frac{x}{\left(1-\frac{x}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(1-\frac{x}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}\right)} \\
&= \frac{x}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} \\
&= \frac{A}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}+\frac{B}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} \qquad \text{(usando frações parciais)}
\end{aligned}
$$

daí:

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}+\frac{B}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} &= \frac{A\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)+B\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)} \\
&= \frac{\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}A-\frac{1+\sqrt{5}}{2}B\right)x+A+B}{1-x-x^2}
\end{aligned}
$$

logo:

$$
\left\{\begin{array}{l} -\frac{1-\sqrt{5}}{2}A-\frac{1+\sqrt{5}}{2}B=1 \\ A+B=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ e } B=\frac{1}{\sqrt{5}}
$$

substituindo os valores de A e B em (3) e desenvolvendo os termos obtemos:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n
$$

c.q.d.

Teorema 6.4 (ver [9])

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi,
$$

isto é, quando $n\to\infty$ o limite da seqüência de quocientes de sucessivos números de Fibonacci é a razão áurea.

Demonstração:
Pelo Lema anterior, temos:

$$
F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}
$$

e

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

daí

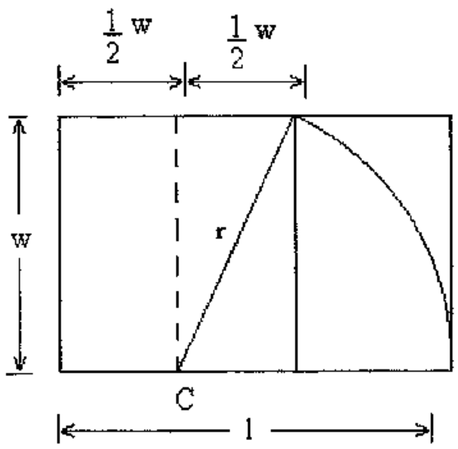
$$\begin{aligned}
\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.\left[1 - a^{n+1}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.\left[1 - a^{n}\right]}
\end{aligned}$$

onde $a = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$, e conseqüentemente temos,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.(1 - a^{n+1})}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.(1 - a^{n})} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\
&= \phi
\end{aligned}$$

c.q.d.

Em seguida vamos analizar a conexão geométrica entre a razão áurea ϕ e os números de Fibonacci. Inicialmente, chamamos de *retângulo áureo* àquele cuja razão de seus lados é aproximadamente igual à razão áurea ϕ, por exemplo um retângulo com lados iguais a 8 e 5. Os retângulos áureos foram descobertos pelos antigos gregos via geometria. A construção geométrica de um retângulo áureo pode ser feita como segue:



$$1 = \frac{w}{2} + r$$

Figura 6.1

Começa-se com um quadrado, o qual é dividido ao meio pelo segmento de reta pontilhado como mostra a figura 6.1 ; logo após um arco de círcunferência é traçado com centro em C e raio r; este é um retângulo áureo, de fato:

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$r^2 = \left(\frac{1}{2}w\right)^2 + w^2 = \frac{1}{4}w^2 + w^2 = \frac{5}{4}w^2$$

e então

$$l = \frac{w}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}w = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}w \Rightarrow \frac{l}{w} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Agora, consideremos a figura 6.2 que segue:

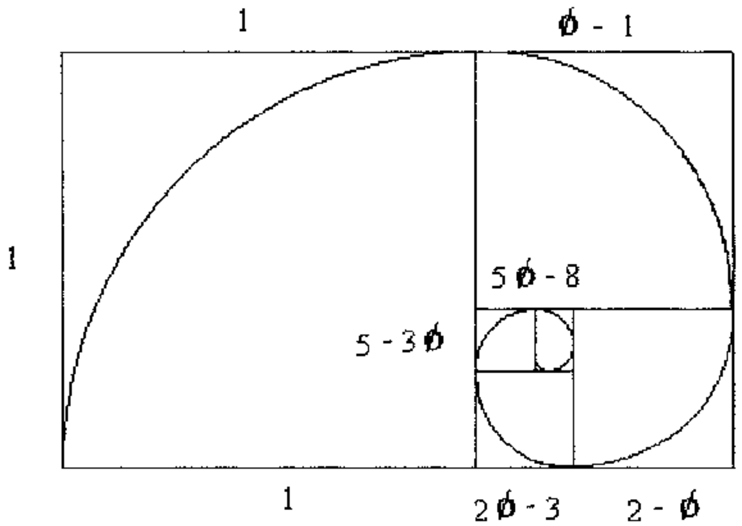


Figura 6.2

Começamos com um simples retângulo áureo (de comprimento igual a ϕ e largura igual a 1); existe uma seqüência natural de retângulos áureos colocados um dentro do outro, obtidos pela remoção do quadrado mais à esquerda para o primeiro retângulo, e do quadrado mais à direita para o segundo retângulo, etc.

O comprimento e largura dos n retângulos áureos podem ser escritos por expressões lineares $a + b.\phi$ onde os coeficientes a e b são sempre números de Fibonacci. Esses retângulos áureos podem ser inscritos em uma espiral logarítmica como a desenhada na figura 6.2..

Assumindo que o canto esquerdo mais baixo do primeiro retângulo seja origem de um sistema xy de coodenadas, então um ponto de acumulação para tal espiral é $(x_\infty, y_\infty) = \left(\frac{1+3\phi}{5}, \frac{3-\phi}{5}\right)$.

Tais espirais logarítmicas são "equiangulares" no sentido que toda reta através de (x_∞, y_∞) corta a espiral em um ângulo constante α. Neste caminho espirais logarítmicas generalizam círcunferências ordinárias (para os quais $\alpha = 90^o$). Na espiral logarítmica desenhada acima aparece o ângulo constante $\alpha = \operatorname{arccot}\left(\frac{2}{\pi}\ln\phi\right) = 72,968\ldots$ graus. Espirais logarítmicas são encontradas facilmente na natureza, por exemplo, os cascos de conchas, marfins de elefantes e desenhos de girassóis e pinheiros. Uma outra aplicação geométrica da razão áurea surge quando inscrevemos um pentágono regular dentro de uma dada círcunferência por meio de régua e compasso. Isto é conseqüência do fato que $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \phi$ e $2\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3-\phi}$ (ver [26] e [28]). A razão áurea também possui uma expansão infinita simples em radicais

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}}$$

Entre outras possíveis fórmulas envolvendo a razão áurea ϕ, convém mencionarmos duas famosas fórmulas devidas a Ramanujam (ver [27] e [28]):

$$\frac{1}{\left(\sqrt{\phi\sqrt{5}}-\phi\right).e^{\frac{2}{5}\pi}} = 1+\cfrac{e^{-2\pi}}{1+\cfrac{e^{-4\pi}}{1+\cfrac{e^{-6\pi}}{1+\cfrac{e^{-8\pi}}{1+\cfrac{e^{-10\pi}}{1+\ldots}}}}}$$

e

$$\frac{1}{\left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{4/3}.(\phi-1)^{5/2}-1}}-\phi\right].e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}} = 1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-8\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-10\pi\sqrt{5}}}{1+\ldots}}}}}$$

Capítulo 7

A Constante de Niven

Definição 7.1 Se $g(x) > 0$, $\forall\ x \geq a$, nós escrevemos $f(x) = O(g(x))$ quando o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ é limitado para $x \geq a$, ou seja, $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq Mg(x)$, $\forall\ x \geq a$. (lê-se: $f(x)$ é "o" grande de $g(x)$).

Definição 7.2 Dizemos que $f(x) = o(g(x))$ quando $x \to \infty$ se $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.(lê-se: $f(x)$ é "o" pequeno de $g(x)$).

Definição 7.3 Para todo inteiro positivo $m > 1$, seja $m = (p_1)^{a_1}.(p_2)^{a_2}.\ldots.(p_k)^{a_k}$ denotando a fatoração prima de m. Defina as seguintes funções

$$h(m) = \begin{cases} 1 \text{ se } m = 1 \\ \min(a_1, a_2, \ldots, a_k) \text{ se } m > 1 \end{cases}$$

e

$$H(m) = \begin{cases} 1 \text{ se } m = 1 \\ \max(a_1, a_2, \ldots, a_k) \text{ se } m > 1. \end{cases}$$

Ivan Niven (ver [30]) mostrou que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} h(m) = 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{m=1}^{n} h(m) - n}{\sqrt{n}} = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)}$$

onde $\zeta(x)$ denota a função zeta de Riemann definida em (4.1). Além disso, Niven provou que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} H(m) = C$$

onde

$$C = 1 + \sum_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\zeta(j)}\right) = 1,705211\ldots$$

devido a tal fato a constante C é conhecida como *Constante de Niven*.

Teorema 7.4 (ver [30])

$$\sum_{m=1}^{n} h(j) = n + c\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$$

onde $c = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)}$.

Demonstração:
Consideremos S o conjunto dos quadrados dos números naturais e $S(n)$ o número de elementos de S que não excedem n; além disso, seja T o conjunto dos inteiros positivos m tais que $h(m) \geq 2$.

Cada elemento $m \in T$ tal que $m \notin S$ pode ser escrito de forma única como

(1) $\quad m = k^2.q_1.q_2 \ldots q_t,\ (q_1.q_2 \ldots q_t)|k,\ t \geq 1,$ onde $q_1, q_2, \ldots, q_t$ são primos distintos.

Agora, fixemos $q_1.q_2 \ldots q_t$ e consideremos o número de elementos de T que são $\leq n$ e têm a forma (1) para algum k. Isto é o mesmo que o número de quadrados $\leq \frac{n}{q_1.q_2 \ldots q_t}$ que são dividíveis por $q_1.q_2 \ldots q_t$.

Daí, para qualquer número real $x > 0$ o número de quadrados positivos $\leq x$ que são divisíveis por $q_1.q_2 \ldots q_t$ é $S\left(\frac{x}{(q_1.q_2 \ldots q_t)^2}\right)$. Então o número de elementos de T que são$\leq n$ e têm a forma (4) é

$$S\left(\frac{n}{(q_1.q_2 \ldots q_t)^3}\right) \tag{2}$$

Observemos também que

$$\sqrt{x} - 1 < \lfloor \sqrt{x} \rfloor = S(x) \leq \sqrt{x}. \tag{3}$$

Logo, se somarmos os termos em (2) sobre todos os subconjuntos $q_1.q_2 \ldots q_t$ de $p_1, p_2, \ldots, p_r$ onde p_r é o r-ésimo primo e $p_{r+1} > n$, nós temos

$$T(n) = \sum S\left(\frac{n}{\left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}\right)}\right) \tag{4}$$

onde a soma é sobre os 2^r termos com cada $\beta_i = 0$ ou 3, daí de (3) segue que

$$T(n) \leq \sum S\left(\frac{n}{\left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}\right)}\right) \leq \sqrt{n}. \prod_{i=1}^{r}\left(1 + p_i^{-3/2}\right)$$

Para $s > 1$, sabemos que $\zeta(s) = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$ onde o produto se estende sobre todos os primos e então

$$\frac{T(n)}{\sqrt{n}} < \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} \tag{5}$$

Por outro lado, escolhamos $N > (p_1 p_2 \ldots p_r)^3$ logo, podemos reescrever (4) como uma inequação com n substituído por N e também usando (3) obtemos

$$T(N) > S\left(\frac{N}{\left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_r^{\beta_r}\right)}\right) > \sqrt{N}. \prod_{i=1}^{r}\left(1 + p_i^{-3/2}\right) - 2^r$$

e daí

$$\frac{T(N)}{\sqrt{N}} > \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(2)} \prod_{i>r}\left(1 + p_i^{-3/2}\right)^{-1} - \frac{2^r}{N}$$

Tomando r suficientemente grande, então N suficientemente grande, logo de (5) vem que

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{\sqrt{n}} &= \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)} \\
T(n) &= \sqrt{n}\zeta(3/2)\zeta(3) + o(\sqrt{o})
\end{aligned}
$$

Agora, sejam S_3 o conjunto dos cubos dos números naturais e T_3 o conjunto dos inteiros positivos m tais que $h(m) \geq 3$.

Cada elemento $m \in T_3$ tal que $m \notin S_3$ pode ser escrito unicamente como

$$
(7) \qquad m = k^3.q_1^{\alpha_1}.q_2^{\alpha_2}\dots q_t^{\alpha_t},\ (q_1.q_2\dots q_t)|k,\ t \geq 1,
$$

$\alpha_i = 1$ ou 2, onde $q_1, q_2, \dots, q_t$ são primos distintos. Daí fixemos $q_1^{\alpha_1}.q_2^{\alpha_2}\dots q_t^{\alpha_t}$ e consideremos os números inteiros $\leq n$ pertencentes a T_3 que tem a forma (7) acima para algum k.

Isto é o mesmo que o número de cubos $\leq \frac{n}{q_1^{\alpha_1}.q_2^{\alpha_2}\dots q_t^{\alpha_t}}$ que são divisíveis por $q_1^{\alpha_1}.q_2^{\alpha_2}\dots q_t^{\alpha_t}$. Então o número de elementos de T_3 que são $\leq n$ e tem a forma (7) é

$$
(8) \qquad S_3\left(\frac{n}{q_1^{3+\alpha_1}.q_2^{3+\alpha_2}\dots q_t^{3+\alpha_t}}\right)
$$

Logo o análogo de (4) é

$$
(9) \qquad T_3(n) = S_3\left(\frac{n}{\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_r^{\beta_r}\right)}\right)
$$

onde a soma é sobre os 3^r termos com $\beta_i = 0, 4$ ou 5, e r é escolhido tal que $p_r + 1 > n$.

Agora, para qualquer número real x temos $S_3(x) \leq \sqrt[3]{x}$, assim de (9) vem que

$$
\begin{aligned}
T_3(n) &\leq \sum\left\{\frac{n}{\left(p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_r^{\beta_r}\right)}\right\}^{1/3} \\
&< n^{1/3}.\prod_p\left(1+p^{-4/3}\right)\prod_p\left(1+p^{-5/3}\right) \\
&= n^{1/3}\zeta(4/3)\zeta(5/3)\left\{\zeta(8/3)\zeta(10/3)\right\}^{-1},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\frac{T_3(n)}{n^{1/3}} < \zeta(4/3)\zeta(5/3)\{\zeta(8/3)\zeta(10/3)\}^{-1}
$$

e então

$$
(10) \qquad T_3(n) = O\left(n^{1/3}\right)
$$

Com raciocínio análogo, obtemos $T_k(n) = O\left(n^{1/k}\right)$ para todo inteiro $k \geq 3$, onde T_k denota os inteiros m tais que $h(m) \geq k$.

Agora, vamos examinar os inteiros positivos $h(1), h(2), \dots, h(n)$. O número destes que excedem 1 é $T(n)$; o número destes que excedem 2 é $T_3(n)$. Além disso, observando que max $\{h(1), h(2), \dots, h(n)\} = \lfloor \log_2 n \rfloor$ segue que

$$
n + T(n) \leq h(1) + \dots + h(n) \leq n + T(n) + T_3(n).\log_2 n
$$

Isto com (6) (10) nos dá

$$\sum_{j=1}^{n} h(j) = n + c\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \qquad \text{com } c = \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)}.$$

c.q.d.

Teorema 7.5 (ver [30])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h(j) = 1$$

Demonstração:
Pelo teorema anterior temos que:

$$\sum_{j=1}^{n} h(j) = n + \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)}\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$$

multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{n}$, obtemos

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h(j) = 1 + \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)}\frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{o(\sqrt{n})}{n}$$

e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h(j) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\zeta(3/2)}{\zeta(3)}\frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{o(\sqrt{n})}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h(j) = 1$$

c.q.d.

Teorema 7.6 (ver [30])

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} H(j) = C,$$

onde $C = 1 + \sum_{k=2}^{j}\left[1 - \zeta(k)^{-1}\right]$.

Demonstração:
Seja Q_k o conjunto dos inteiros positivos m tais que $H(m) \leq k-1$, i.e., $Q_k = \{m \in \mathbb{Z}_+ / H(m) \leq k-1\}$ e $Q_k(n) = \{m \in \mathbb{Z}_+ / m \leq n \text{ e } H(m) \leq k-1\}$. Observemos que o número de inteiros m satisfazendo $1 \leq m \leq n$ e $H(m) = k-1$ é igual a $Q_k(n) - Q_{n-1}(n)$ e além disso, para $n \geq 2$ o $\max\{H(1), \ldots, H(m)\} = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Então, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} H(i) = \sum_{k=2}^{j+1}(k-1).\{Q_k(n) - Q_{k-1}(n)\},\ j = \lfloor \log_2(n) \rfloor .$$

Mas como $Q_{j+1}(n) = n$, logo podemos escrever

$$\text{(1)} \qquad \sum_{i=1}^{n} H(i) = j.n - \sum_{k=2}^{j} Q_k(n),\ j = \lfloor \log_2 n \rfloor$$

Agora, vamos mostrar que se r satisfaz $p_r^k \leq n \leq p_{r+1}^k$ então

$$(2) \qquad Q_k(n) = \sum (-1)^{\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_r}{k}} \left\lfloor \frac{n}{p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}} \right\rfloor$$

onde os p_i's são primos com $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$ e a soma contém 2^r termos obtidos fazendo cada $\alpha_i = 0$ ou k. Isto pode ser estabelecido interpretando $\left\lfloor \frac{n}{s} \right\rfloor$ como o número de inteiros $\leq n$ que são divisíveis por s. Consideremos os conjuntos

$$\begin{aligned} A_1 &= \{m \in \mathbb{Z}_+ / p_1^k | k\},\ \#(A_1) = \left\lfloor \frac{n}{p_1^k} \right\rfloor \\ &\vdots \\ A_r &= \{m \in \mathbb{Z}_+ / p_r^k | k\},\ \#(A_r) = \left\lfloor \frac{n}{p_r^k} \right\rfloor \end{aligned}$$

Assim, o lado direito de (2) pode ser visto como o número de inteiros de 1 até n menos $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r)$, então pelo princípio da inclusão exclusão resulta que:

$$\begin{aligned} Q_k(n) &= n - \#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r) \\ &= n - \left[\sum_{i=1}^{r} \#A_i - \sum_{1\leq i<j} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i<j<k} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots \right] \\ &= n - \left[\left\lfloor \frac{n}{p_1^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p_2^k} \right\rfloor - \ldots - \left\lfloor \frac{n}{p_r^k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p_1^k p_2^k} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{p_{r-1}^k p_r^k} \right\rfloor - \ldots \right] \\ &= \sum (-1)^{\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_r}{k}} \left\lfloor \frac{n}{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots P_r^{\alpha^r}} \right\rfloor \end{aligned}$$

Deste modo, podemos escrever a equação (2) como

$$(3) \qquad Q_k(n) = \sum \mu(d). \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor,$$

onde μ designa a função de Mœbius definida por

$\mu(1) = 1$ e para $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_r^{a_r}$ $\mu(n) = (-1)^r$ se $a_1 = a_2 = \ldots a_r = 1$
$\mu(n) = 0$ caso contrário.

onde a soma é sobre todos os divisores positivos d de $p_1 p_2 \ldots p_r$. Nesta soma qualquer termo para o qual $d^k > n$ tem $\left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor = 0$ e assim nós podemos tomar a soma em (2) sobre todos os inteiros positivos d satisfazendo $d^k \leq n$.

Por outro lado sabemos que

$$\zeta(k)^{-1} = \prod_p \left(1 - p^{-k}\right) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^k}.$$

Isto com (3) dá

$$\begin{aligned} n\zeta(k)^{-1} - Q_k(n) &= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d).n}{d^k} - \sum_{d^k \leq n} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \\ &= \sum_{d_k \leq n} \mu(d) \left\{ \frac{n}{d^k} - \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \right\} + \sum_{d^k > n} \frac{n}{d^k} . \mu(d) \end{aligned}$$

$$(4) \qquad |n\zeta(k)^{-1} - Q_k(n)| = \sum_{d_k \le n} \left\{ \frac{n}{d^k} - \left\lfloor \frac{n}{d^k} \right\rfloor \right\} + \sum_{d^k \ge n} \frac{n}{d^k}$$

Agora, vamos analizar as duas somas do lado direito de (4). A primeira soma é menor do que $n^{1/k}$ e como na segunda soma, seu primeiro termo é menor do que 1, e todos outros termos são limitados por

$$n \int_{n^{1/k}}^{\infty} x^{-k} \mathrm{d}x = \frac{n^{1/k}}{k-1} < n^{1/k} \quad \text{desde que } k \ge 2,$$

então, podemos escrever (4) como

$$|n\zeta(k)^{-1} - Q_k(n)| \le n^{1/k} + 1 + n^{1/k} < 3n^{1/k}$$

Isto com (1) resulta que

$$\begin{aligned}
&\left| n^{-1} \sum_{i=1}^{n} H(i) - 1 - \sum_{k=2}^{j} \{1 - \zeta(k)\}^{-1} \right| = \\
&= \left| j - n^{-1} \sum_{k=2}^{j} Q_k(n) - 1 - \sum_{k=2}^{j} \{1 - \zeta(k)^{-1}\} \right| \\
&= n^{-1} \left| \sum_{k=2}^{j} \{n\zeta(k)^{-1} - Q_k(n)\} \right| \\
&\le n^{-1} \sum_{k=2}^{j} \left| n\zeta(k)^{-1} - Q_k(n) \right| \\
&\le n^{-1} \sum_{k=2}^{j} 3n^{1/k} \\
&\le n^{-1} \left(3n^{1/2}\right) \log_2 n.
\end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$ e $j = \lfloor \log_2 n \rfloor$ temos que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} H(i) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left[1 - \zeta(k)^{-1}\right]$.

c.q.d.

Bibliografia

[1] Djairo G. de Figueiredo. **Números irracionais e transcendentes**. Coleção Fundamentos da Matemática Elementar. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1985.

[2] G. Chrystal. **Algebra, an Elementary Text-book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges**, Vol. I, Seventeenth Edition, 1964.

[3] Ian Stewart. **Galois Theory**. London New York. Chapman and Hall.University of Warwick, Coventry, 1972.

[4] Elon Lages Lima. **Logarítmos**. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1991.

[5] R. Courant. **Differential and Integral Calculus**. Interscience, New York, 1957.

[6] E. C. Titchmarsch. **The theory of the Riemann Zeta Function**, 2nd ed., revised by D. R. Heath-Brown, Oxford 1986.

[7] G. H. Hardy and E. M. Wright. **An Introduction to the Theory of Numbers**, Fourth edition, Oxford Press London 1960.

[8] I. S. Gradshteyn/ I.M. Ryzhik. **Table of Integrals Series and Products**, prepared by Yu.V. Geronimous, M. Yu. Tseytlin, translation edited by Alan Jeffrey. 4ª ed. New York, Academic Press, 1965.

[9] José Plínio O. Santos, Margarida P. Mello, Idani T. C. Murani. **Introdução à Análise Combinatória**. Editora da Unicamp, Campinas 1995.

[10] José Plínio de Oliveira Santos. **Introdução à Teoria dos Números**. Primeira Edição, IMPA, Rio de Janeiro 1999.

[11] D. E. Knuth. **Euler's constant to 1271 places**. Math. Comp. 16 (1962) 275-280.

[12] A van der Poorten, **A proof that Euler missed... Apery's proof of the irrationality of $\zeta 3$**, Math. Intelligencer 1 (1979) 196-203.

[13] J. A. Ewell. **A new series representation for $\zeta(3)$**. Amer. Math. Monthly 97 (1990) 219-220.

[14] F. Beuters. **A note on the irrationality $\zeta(3)$**. Bull. London Math. Soc. 11 (1979) 268-272.

[15] Elon Lages Lima. **Meu professor de Matemática e outras Histórias**. Coleção Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 1991.

[16] D. W. Sweeney. **On the computation of Euler's constant**. Amer. Math. Monthly 17 (1963) 170-178.

[17] D. W. DeTemple . **A quicker convergence to Euler's constant**. Amer. Math. Monthly 100 (1993) 468-470.

[18] I. Gerst. **Some series for Euler's constant**. Amer. Math. Monthly 76 (1969) 273-275.

[19] J. Anglesio and D. A. Darling. **An integral giving Euler's constant**. Amer. Math. Monthly 104 (1997) 881.

[20] A. W. Addison. **A series representation for Euler's constant**. Amer. Math. Monthly 74 (1967) 823-824.

[21] G. H. Hardy and E. M. Wright. **An Introduction to the Theory of Numbers**, 5th ed., Oxford Press, London 1985.

[22] John B. Conway. **Functions of One Complex Variable**, Second Edition. Springer-Verlag, New York 1973.

[23] J.W.L. Glaisher. **On the history of Euler's Constant**. Messenger of Mathematics, 1 (1871) 25-30.

[24] R.M. Young. **Euler's Constant** Math. Gazette 75, 472 (1991) 187-190.

[25] Elon Lages Lima.**Curso de análise**. Volume 1. Sétima edição, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1992.

[26] H.E.Huntley. **The Divine Proportion. A study in mathematical beauty**, Dover 1970.

[27] K. G. Ramathan. **On the Ramanujan's continued fraction**, Acta Arithmetica 43 (1984) 209-226.

[28] G. Markowsky. **Misconceptions about the Golden Ratio**. The Colege Math. J. 23 (1992) 2-19.

[29] S. Vajda.**Fibonacci and Lucas numbers and the Golden Section: Theory and Applications**. Halsted Press (1989).

[30] J. Niven. **Averages of exponents in factoring integers**. Proc. Amer. Math. Soc., 22 (1969) 356-360.

[31] Álgebra Moderna, **B. L. Van der Waerden, tradução da** 2ª edição alemã por Hugo Baptista Ribeiro, Volume 1- Fascículo 1. Lisboa 1948.