UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

SOBRE AS ÁLGEBRAS SIMÉTRICA E DE REES DE CERTOS IDEAIS MONOMIAIS

Aparecida Francisco da Silva
Orientador: **Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de DOUTOR EM MATEMÁTICA.

Junho - 1997
Campinas - SP

Sobre as Álgebras Simétrica e de Rees de certos ideais monomiais

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. Aparecida Francisco da Silva e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 17 de junho de 1997.

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti
orientador

TESE
~~Dissertação~~ apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em MATEMÁTICA.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 17 de junho de 1997

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). PAULO ROBERO BRUMATTI

Prof (a). Dr (a). ARON SIMIS

Prof (a). Dr (a). EDUARDO DO NASCIMENTO MARCOS

Prof (a). Dr (a). YVES ALBERT EMILE LEQUAIN

Prof (a). Dr (a). ANTONIO PAQUES

Agradecimentos

Ao concluir o presente trabalho agradeço:

- Ao orientador Professor Paulo Roberto Brumatti, pela paciência, amizade e pelo constante estímulo que, com seu conhecimento, nos trilhou em caminhos seguros e produtivos.
- Aos professores Aron Simis e Wolmer Vasconcelos pelas sugestoẽs e incentivo.
- Ao meu esposo Garcia e a meus pais pela compreensão e apoio inestimáveis nos momentos difíceis.
- Ao meu filho Felipe pela minha constante ausência.
- Aos Professores do IMECC - Unicamp, pela acolhida, formação e estímulo.
- Aos meus irmãos e amigos, pelo companheirismo e solidariedade.
- Aos Professores do Departamento de Matemática do Ibilce - Unesp - São José do Rio Preto - SP, que me concederam condições para a realização deste trabalho.
- À CAPES pelo suporte financeiro.
- À todos que direta e indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.
- À Deus, por tudo.

A meus pais,
ao meu esposo Gar-
cia e
ao meu filho
Felipe.

Conteúdo

Introdução

Os principais objetos de nossos estudos neste trabalho são as Álgebras Simétricas e de Rees de certos ideais monomiais de um anel de polinômios a n variáveis sobre um corpo. Mais precisamente, estaremos principalmente interessados em determinar quando tais álgebras de um ideal são isomorfas, isto é, quando tal ideal é de tipo linear.

A determinação de classes de ideais que sejam de tipo linear tem sido um problema constantemente abordado em Álgebra Comutativa, desde o trabalho de Micali [8], onde encontramos o primeiro exemplo de tais ideais: os gerados por seqüências regulares.

Através do uso de bases de Gröbner, muitas questões sobre ideais em anéis de polinômios podem ser reduzidas a questões a repeito de ideais monomiais que, a princípio, são mais fáceis de se trabalhar. Em particular, quanto à questão de ser de tipo linear, podemos citar que, em [3], Conca, Herzog e Valla demonstraram que para um ideal equihomogêneo (isto é, gerado por polinômios homogêneos de mesmo grau) num anel de polinômios ser de tipo linear basta que seu ideal inicial o seja. Assim nos parece claro que tal resultado evidencia uma motivação para a procura de classes de ideais monomiais que sejam, ou não, de tipo linear.

Uma outra evidência de motivação para o estudo do problema de um ideal monomial ser de tipo linear ou não, está no fato que o ideal de definição da álgebra simétrica associada a ele ser binomial . E o estudo dos ideais binomiais tem aparecido com freqüência na literatura, já que eles aparecem de maneira natural no estudo das variedades tóricas (variedades definidas por ideais binomiais primos).

Em trabalhos recentes de Conca, De Negri, Villarreal e outros, tem-se estudado ideais monomiais associados a grafos. Por exemplo, em [14], Villarreal dá uma fórmula para a dimensão da álgebra simétrica do ideal monomial gerado por caminhos de comprimento dois em um grafo conexo. Lembramos que a dimensão de tal álgebra pode, entre outras coisas, decidir se tal ideal não é de tipo linear. O principal resultado apresentado no capítulo 2 deste trabalho é uma generalização deste resultado.

Um outro resultado nesta direção foi apresentado por Conca e De Negri em [2], onde provam que dado um grafo que é uma árvore, o ideal monomial gerado pelos caminhos de comprimento k é de tipo linear. No capítulo 3 tomamos um grafo que é um ciclo de comprimento n e para $1 \leq k \leq n$ consideramos o ideal monomial gerado pelos caminhos de comprimento k (o qual chamamos de ideal (n, k) – *cíclico*) e, na última parte, caracterizamos de uma maneira quase completa os pares (n, k) tais que o ideal (n, k) – *cíclico* é de tipo linear.

Um resumo do conteúdo deste trabalho é :

No capítulo 1 apresentamos fatos gerais da teoria utilizados nos demais capítulos, bem como fixamos a notação.

No segundo capítulo temos um adequação da teoria geral de grafos para o caso que estudamos, demonstramos uma generalização do resultado conhecido de Villarreal [14] sobre a dimensão de Krull da Álgebra Simétrica de ideais associados a grafos, em termos do número de vértices, arestas e componentes conexas do mesmo e, também, apresentamos uma demonstração que obtivemos para a dimensão de $S(I)$ quando I é o ideal gerado por todos os k-produtos.

Compõem o terceiro capítulo, os resultados que obtivemos para ideais cíclicos. Inicialmente, usando a fórmula da dimensão de Simis e Vasconcelos mostramos que $\dim S(I) = n + 1 = \dim \mathcal{R}(I)$. A partir daí apresentamos o resultado da investigação que fizemos sobre para que pares (n, k) o ideal cíclico é de tipo linear.

Capítulo 1

Generalidades

Neste capítulo apresentaremos as definições e alguns resultados gerais da teoria que utilizaremos no desenvolvimento do trabalho.

No que segue, a menos de menção explícita em contrário, R denotará anel comutativo com identidade e $dim A$ a dimensão de Krull de A.

1.1 Definições e Resultados Preliminares

Definição 1.1 *Dados R e E um R-módulo, a álgebra simétrica de E, que denotaremos por $S_R(E)$ (ou simplesmente $S(E)$) é o quociente da álgebra tensorial $T_R(E)$ pelo ideal $\langle x \bigotimes y - y \bigotimes x, x, y \in E \rangle$, isto é,*

$$S_R(E) := \frac{T_R(E)}{\langle x \bigotimes y - y \bigotimes x, \ \ x, y \in E \rangle}.$$

Tal álgebra pode, ainda, ser vista como uma R-álgebra $S_R(E)$ juntamente com um homomorfismo de R-módulos $\pi : E \rightarrow S_R(E)$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: dados uma R-álgebra comutativa B e um homomorfismo de R-módulos $\varphi : E \rightarrow B$, existe um único homomorfismo de R-álgebras $\phi : S_R(E) \rightarrow B$ tal que $\phi \circ \pi = \varphi$, ou seja, tal que o diagrama a seguir seja comutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ S_R(E) \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Por exemplo, se E é um R-módulo livre de posto n, $S_R(E)$ é o anel de polinômios $R\,[T_1, \ldots, T_n]$.

Mais geralmente, quando E é dado por uma apresentação

$$R^m \xrightarrow{\alpha} R^n \longrightarrow E \longrightarrow O \qquad \alpha = (a_{ij})_{n\times m},$$

sua álgebra simétrica é o quociente do anel de polinômios $R[T_1, \ldots, T_n]$ pelo ideal Q gerado pelas 1-formas $f_j = a_{1j}T_1 + \ldots + a_{nj}T_n$, $j = 1, \ldots, m$. Neste caso dizemos que Q é o ideal de definição da álgebra simétrica de E.

Também, dado J, ideal de $R[T_1, \ldots, T_n]$ gerado por 1-formas, $\frac{R[T_1,\ldots,T_n]}{J}$ é a álgebra simétrica de algum R-módulo.

Definição 1.2 *Dados R e $I \subset R$ um ideal, chama-se álgebra de Rees de I a R-álgebra graduada $\mathcal{R}(\mathcal{I}) := R[IT] = R \oplus IT \oplus I^2T^2 \oplus \ldots$.*

Existe um R-homomorfismo natural $\varphi : I \longrightarrow \mathcal{R}(I)$, dado por $\varphi(x) = xT$, e, portanto, um homomorfismo de R-álgebras $\phi : S_R(I) \longrightarrow \mathcal{R}(I)$, que é, obviamente, sobrejetor. Se $I = (x_1, \ldots, x_n)$ o homomorfismo ϕ pode ser descrito concretamente da seguinte forma:

Seja $O \longrightarrow Z_1 \longrightarrow R^n \xrightarrow{\beta} I \longrightarrow O$, com $\beta(e_i) = x_i$. Então β induz uma sobrejeção de $R[\mathbf{T}] = R[T_1, \ldots, T_n]$ sobre $S(I)$, cujo núcleo é o ideal Q determinado por Z_1, isto é, Q é gerado pelas formas lineares $\sum_{i=1}^{n} r_iT_i$ tais que $\sum_{i=1}^{n} r_ix_i = 0$.

Também, a álgebra de Rees de I é a imagem homomórfica de $R[\mathbf{T}]$ dada por $T_i \longmapsto x_iT$. O núcleo deste homomorfismo é o ideal Q_∞ gerado por todas as formas $f(T_1, \ldots, T_n)$ tais que $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Temos, obviamente, $Q \subset Q_\infty$ e, mais, o núcleo do homomorfismo de $R-$álgebras $\phi : S_R(I) \to R(I)$ é o ideal $A \cong \frac{Q_\infty}{Q}$.

Definição 1.3 *Com as notações adotadas anteriormente, um ideal I de R é dito de tipo linear se $A = 0$, ou seja, se ϕ for injetora.*

Observação 1.4 *Em [8], Micali mostrou que $\frac{Q_\infty}{Q}$ é o submódulo de torsão de $S_R(I)$. Assim, no caso em que R é um domínio, dizer que o ideal I é de tipo linear é o mesmo que afirmar que o ideal de definição da álgebra simétrica de I é primo, já que, neste caso, a álgebra de Rees é um domínio.*

Os exemplos mais simples de ideais de tipo linear são os gerados por R-seqüências regulares e podem ser encontrados no trabalho de Micali [[8] Theorème 1 , chap 1].

Outro exemplo é dado pelos ideais gerados por d-seqüências. As d-seqüências, introduzidas por C. Huneke em 1980, são uma generalização natural do conceito de R-seqüência no sentido do Teorema 1.6 a seguir.

Definição 1.5 *Seja* $\underline{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *uma seqüência de elementos de* R *gerando o ideal* I*. Então* $\underline{x}$ *é chamada uma d-seqüência se:*
(i) $\underline{x}$ *é um sistema minimal de geradores de* I*.*
(ii) $(x_1, \ldots, x_i) : (x_{i+1} \cdot x_k) = (x_1, \ldots, x_i) : x_k$ *para* $i = 0, \ldots, n-1$ *e* $k \geq i+1$.

Teorema 1.6 [[13], Theorem 2.3.2]*"Todo ideal gerado por uma d-seqüência é de tipo linear".*

1.2 A dimensão de Krull da Álgebra Simétrica de um R-módulo.

A dimensão de Krull da álgebra simétrica $S(E)$ do R-módulo E está conectada com o invariante $b(E)$ de um módulo E introduzido por Forster nos anos 60. Este invariante limita o número de geradores de R -módulos finitamente gerados quando R é noetheriano com dimensão de Krull finita:

$$b(E) := sup\left\{dim\frac{R}{P} + \mu_P(E), \quad P \in Spec\, R\right\},$$

onde $\mu_P(E)$ denota o número mínimo de geradores do R_P-módulo E_P.

Em 1986, Huneke e Rossi obtiveram que a dimensão da álgebra simétrica de um R-módulo é a sua cota de Forster, no caso em que $R = \frac{A}{I}$, onde A é um anel noetheriano universalmente catenário com dimensão de Krull finita, mais precisamente:

Teorema 1.7 [[7], Theorem 2.6] *Sejam* E *um* R*-módulo finitamente gerado e* R *um domínio noetheriano universalmente catenário, com dimensão de Krull finita. Então,* dim $S\,(E)$ *é sua cota de Forster:*

$$\dim_{Krull} S(E) = sup\{\dim\frac{R}{P} + \mu_P(E), \quad P \in Spec\ R\}.$$

Ainda em [7], pag. 201, há uma ressalva dos autores em que citam que W. Vasconcelos e M. Külh mostraram a eles como remover a hipótese de R ser o quociente de um domínio noetheriano universalmente catenário com dimensão de Krull finita. Em [10], Theorem 1.1.1, temos uma demonstração do teorema anterior para o caso de R ser um domínio noetheriano, portanto, sob hipóteses menos restritivas.

Em [13] temos a dimensão de Krull da álgebra de Rees de um ideal I.

Teorema 1.8 [[13], Theorem 1.2.4] *Sejam R anel noetheriano e I um ideal de R. Para cada ideal primo P de R seja $c(\mathcal{P}) = 1$ se I não está contido em P e $c(\mathcal{P}) = 0$, caso contrário. Então $dim R[It] = sup\left\{dim \frac{R}{\mathcal{P}} + c(\mathcal{P})\right\}$. Em particular, $dim R[It] \leq dim R + 1$, e a igualdade vale quando I contém elementos regulares.*

Uma aplicação do Teorema 1.7 foi dada por R. Villarreal em [14], conforme pode ser visto a seguir:

Definição 1.9 *Dado um grafo G com conjunto de vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e conjunto de arestas $A(G)$, definimos o ideal associado a G como sendo o ideal $I = I(G)$ de $F[X_1, \ldots, X_n]$ (F corpo e uma variável para cada vértice) gerado pelos monômios X_iX_j tais que $\{v_i, v_j\} \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$.*

Teorema 1.10 [[14], Theorem 3.6] *Sejam G um grafo com n vértices e q arestas e $I = I(G)$. Se G é conexo, então a dimensão de Krull de $S(I)$ é o* $\sup\{n+1, q\}$.

Conforme pode ser visto em [13], por exemplo, no caso de um $R-$módulo E finitamente apresentado por $\alpha : R^m \rightarrow R^n$, onde R é domínio noetheriano, podemos expressar a dimensão de Krull de $S(E)$ em termos das alturas dos ideais determinantais da matriz de α.

Definição 1.11 *Seja α a matriz com entradas em R cujas colunas definem um R-módulo E. Para cada inteiro k, dizemos que α (ou E) satisfaz a condição $\mathcal{F}_k$ se:*

$$ht(I_t(\alpha)) \geq rank\, \alpha - t + 1 + k, \quad 1 \leq t \leq rank\, \alpha,$$

onde $I_t(\alpha)$ denota o ideal gerado pelos $t \times t-$menores de α.
Se α é uma matriz $m \times n$ de rank m_0, usando a condição $\mathcal{F}_0$ de φ, definimos a função

$$d : ([1, m_0] \cap \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$$

da seguinte forma:

$$d(t) = \begin{cases} m_0 - t + 1 - ht\left(I_t(\alpha)\right), & se\ \mathcal{F}_0\ não\ vale\ em\ t \\ 0 & caso\ contrário \end{cases}.$$

A partir da função d podemos definir para um R-módulo E finitamente apresentado por $\alpha : R^m \rightarrow R^n$, $d(E) = sup_t\{d(t)\}$, e então obter a seguinte fórmula para a dimensão de $S(E)$:

Teorema 1.12 [[10], Theorem 1.1.3] *Com a notação dos parágrafos anteriores, seja R um domínio catenário equidimensional e E um R-módulo finitamente gerado. Então*

$$b(E) = b_0(E) + d(E)$$

onde $b_0(E) := dim\, R + rank\, E$.

1.3 Módulos com apresentação linear.

As álgebras simétricas de módulos definidos sobre um anel de polinômios por matrizes com entradas lineares têm propriedades únicas. Alguns dos ideais que estudamos no terceiro capítulo pertencem a esta classe. Assim vejamos algumas destas propriedades.

Conforme já vimos, se E é um R-módulo com uma apresentação

$$R^m \xrightarrow{\alpha} R^n \longrightarrow E \longrightarrow O,$$

as equações de sua álgebra simétrica $S(E)$ são $\mathbf{f} = [f_1 \dots f_m] = [T_1 \dots T_n]\alpha$.

No caso em que $R = F[X_1, \dots, X_n]$, α pode ser vista como a matriz jacobiana de $\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]$ com relação às variáveis $T's$. Se, ainda, as entradas da matriz α são lineares, podemos escrever $\mathbf{f} = \mathbf{X} \cdot B(\alpha)$ onde $B(\alpha)$ é a matriz jacobiana de $\mathbf{f}$ com relação a $\mathbf{X}$.

Por abuso de linguagem diremos que $B(\alpha)$ define o dual jacobiano de E, mesmo nos casos em que as entradas de α não são formas lineares.

Sob certas circunstâncias é possível dizermos mais a respeito da matriz B.

Proposição 1.13 [[13], Proposition 1.5.3] *Seja E um módulo sobre $R = F[X_1, \dots, X_d]$ com apresentação linear $\alpha = (a_{ij})_{n \times d}$ cujas linhas são sizígias das variáveis $X_1, \dots, X_d$. Então B é uma matriz anti-simétrica.*

Mais ainda,

Proposição 1.14 [[13], Proposition 1.5.5] *Sejam R anel local noetheriano, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ uma $R-$ seqüência regular e E um R-módulo com uma apresentação*

$$R^d \longrightarrow R^n \xrightarrow{\alpha} E \longrightarrow O$$

tal que $\alpha \cdot \mathbf{x}^t = 0$. Se escrevemos $S = R\,[\mathbf{T}] = R[T_1, \dots, T_n]$, então existe uma matriz anti-simétrica $B_{d \times d}$, sobre S com entradas lineares nas variáveis em $\mathbf{T}$ tal que

$$\mathbf{T} \cdot \alpha = \mathbf{x} \cdot B.$$

Como, também, os ideais que estudamos no capítulo três tem dimensão projetiva dois, vejamos alguns resultados nesta direção.

É relativamente fácil caracterizar quando as álgebras simétricas são "almost complete intersection":

Proposição 1.15 [[13], Proposition 3.4.1] *Seja R um anel noetheriano local e E um R-módulo finitamente gerado. Suponha que E tem dimensão projetiva finita ou R é um anel domínio fatorial. Então $S(E)$ é "almost complete intersection" se e somente se E tem uma resolução projetiva do tipo:*

$$O \longrightarrow R \xrightarrow{\psi} R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow E \longrightarrow O \qquad (*).$$

Se, para a resolução (*) considerarmos o ideal $I_1(\psi)$, temos relações entre ele e o ideal Q de definição de $S(E)$, conforme [13]:

Proposição 1.16 [[13], Proposition 3.4.2] *Seja E um módulo com uma resolução como (*) e satisfazendo $\mathcal{F}_1$. Então $I_1(\psi)$ também satisfaz $\mathcal{F}_1$.*

Proposição 1.17 *Nas condições das proposições* 1.15 *e* 1.16, *se Q, o ideal de definição da álgebra simétrica de E, é "almost complete intersection" e um ideal primo então a altura de $I_1(\psi)$ é ímpar.*

Para os módulos com segundo número de Betti igual a um, há que se destacar mais dois resultados.

Com as mesmas notações anteriores, seja $\mathbf{g}= (g_1, \ldots, g_d)$ o ideal gerado pelos $(d-1)$−Pfaffianos de B.

Teorema 1.18 [[13] Theorem 7.5.1] *Seja E um módulo definido sobre um anel local regular (R, m) de dimensão ímpar, com $dim\ proj\ E_{\mathcal{P}} \leq 1$ para todo $\mathcal{P} \subsetneq \mathrm{m}$, $\beta_2(E) = 1$ e $\mu(E) = dim\, R + rank\, E - 1$.*
(a) Se E satisfaz $\mathcal{F}_0$, então $S(E)$ é Cohen-Macaulay de tipo 2,
(b) Se E satisfaz $\mathcal{F}_1$, então E é de tipo linear. Mais ainda, $(x_1, g_1)S(E)$ é o módulo canônico de $S(E)$.

Teorema 1.19 [[13] Theorem 7.5.4] *Sejam $\mathbf{Q} = R[T] = R[T_1, \ldots, T_n]$, $\overline{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Q}}{(Pf(B))}$, $\overline{E} = E \bigotimes_Q \overline{\mathbf{Q}}$ e $D = S_R(E) \bigotimes_Q \overline{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Q}}{(x \cdot B, Pf(B))}$. Seja (R, m) um anel regular local de dimensão par e E um $R-$módulo tal que $\beta_2(E) = 1$, $dim\ proj\ E_{\mathcal{P}} \leq 1$ para todo $\mathcal{P} \subsetneq \mathrm{m}$ e $\mu(E) = dim\, R + rank\, E - 1$.*
(a) Se E satisfaz $\mathcal{F}_0$, então D é Gorenstein.
(b) Se E satisfaz $\mathcal{F}_1$, então D é a álgebra de Rees de E.

Capítulo 2

Sobre a Dimensão de Krull de $S(I)$ para alguns ideais monomiais

Neste capítulo apresentaremos uma generalização do resultado de R. Villarreal [14] para a dimensão de Krull da álgebra simétrica do ideal de um grafo conexo, e, também, usando a mesma técnica, uma demonstração da dimensão de Krull da álgebra simétrica do ideal de $F[X_1, \ldots, X_n]$, gerado por todos os monômios de grau k, livres de quadrados.

Na primeira parte fixaremos a notação e apresentaremos algumas adaptações de resultados gerais da teoria de grafos para o caso em que estamos trabalhando. Também, apresentaremos o resultado que nos dá a dimensão de Krull da álgebra simétrica do ideal de um grafo G em função do número de vértices, arestas e componentes conexas que são árvores, mais precisamente: *Se G é um (n,q,m)-grafo, onde n é o número de vértices, q o número de arestas e m o número de componentes conexas de G, com r das m componentes conexas sendo árvores, então*

$$\dim S(I) = \max \{n+1, q+r\}.$$

Finalizaremos o capítulo, apresentando a demonstração que obtivemos para a dimensão de Krull da álgebra simétrica do ideal gerado por todos os monômios de grau k, livres de quadrados em $F[X_1, \ldots, X_n]$.

Comecemos fixando a notação e apresentando as adaptações dos resultados gerais da teoria de grafos:

Dado um grafo G, $V(G)$ e $A(G)$ denotarão, respectivamente, o conjunto de vértices e arestas de G.

Neste trabalho, grafo denotarão sempre grafos simples e sem laços.

Definição 2.1 *Dado um grafo G, dizemos que o grafo H é um subgrafo de G se $V(H) \subset V(G)$ e $A(H) \subset A(G)$. Além disso, diremos que o subgrafo H é obtido de G pela retirada de algum vértice v_i se $V(H) \subset V(G) - \{v_i\}$ e as arestas de H são as arestas de G que não contem $\{v_i\}$.*

Com esta definição, se G é o grafo definido sobre $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ tal que $A(G) = \{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}, \{u_3, u_4\}\}$. Se H é o subgrafo de G obtido pela retirada de u_3, $A(H) = \{\{u_1, u_2\}\}$. Se, ainda, H_1 é o subgrafo obtido pela retirada de u_1, $A(H_1) = \{\{u_2, u_3\}, \{u_3, u_4\}\}$.

Diremos que $c \subset V(G)$ é um caminho ligando dois vértices u e v de G se $c = \{u = u_1, u_2, ..., u_k = v : \{u_i, u_{i+1}\} \in A(G), \forall i = 1, ..., k-1\}$.

Um grafo G será dito ser conexo se quaisquer dois de seus vértices são ligados por algum caminho.

A distância entre dois vértices que estão ligados por algum caminho é o mínimo dos comprimentos dos caminhos que os une. Observamos que o comprimento de um caminho c é $|c| - 1$.

Diremos que um vértice v tem grau de incidência d se a cardinalidade do conjunto $\{\{v, x\} : \{v, x\} \in A(G)\}$ for d.

Um vértice v será chamado ponto de separação de G se o número de componentes conexas do subgrafo de G, obtido pela retirada do vértice v for maior que o número de componentes conexas de G.

Exemplo 2.2 *Considerando G cuja representação geométrica é*

temos que v_3 é o seu único ponto de separação.

Proposição 2.3 *Sendo G grafo conexo e $v \in V(G)$ são equivalentes:*
(i) Existem w e u em $V(G) \setminus \{v\}$ tais que v pertence a todo caminho ligando u e w.
(ii) Existe uma partição $\{U, W\}$ de $V(G) \setminus \{v\}$ tal que, se $u \in U$, $w \in W$ e c é um caminho ligando u e w então $v \in c$.
Além disso, se v é um ponto de separação de G valem (i) e (ii).

Demonstração: (ii) $\Longrightarrow$(i) é obvia
(i) $\Longrightarrow$(ii) Sejam u e $w \in V(G) \setminus \{v\}$ tais que v pertence a todo caminho ligando u e w. Nesta situação podem ocorrer:
(a) ao retirarmos o vértice v de G não definimos um subgrafo (no sentido que fixamos) ou seja, $v \in \{x, y\}$, $\forall$ $\{x, y\} \in A(G)$. Neste caso, tomando $U = \{u\}$ e $W = V(G) \setminus \{u, v\}$ segue-se o resultado.
(b) ao retirarmos o vértice v de G obtemos um subgrafo não conexo H. Tomando U como sendo o conjunto de vértices de uma componente conexa de H e $W = V(G) \setminus (U \cup \{v\})$ segue-se o resultado.
A última implicação segue-se do fato que se v é um ponto de separação de G, o número de componentes conexas do subgrafo H de G, obtido pela retirada do vértice v, é maior que o número de componentes conexas de G e também, neste caso, tomando U o conjunto de vértices de uma componente conexa do subgrafo e $W = V(G) \setminus (U \cup \{v\})$ segue-se o resultado. ∎

Proposição 2.4 *Todo grafo G, (n, q)-conexo $(n \geq 3)$ tem pelo menos um vértice tal que o subgrafo H de G, obtido com a sua remoção ainda é conexo e $|V(H)| = |V(G)| - 1 = n - 1$.*

Demonstração: Sejam u e v dois vértices a uma distância máxima em G. Se v fosse um ponto de separação de G, pela proposição anterior, existiria uma partição $\{U, W\}$ de $V(G)$ tal que $u \in U$ e para $w \in W$, v pertence a todo caminho ligando u e w. Mas, então, $d(u, w) > d(v, u)$ (contradição!!). Portanto, v não é um ponto de separação de G. Mais, se existisse $t \in V(G)$ tal que $\{t, v\}$ fosse o único elemento de $A(G)$ com t pertencente a ele, teríamos $d(t, u) > d(v, u)$ (contradição!!).
Logo, retirando v o subgrafo obtido ainda é conexo e $|V(H)| = |V(G)| - 1$. ∎

Proposição 2.5 *Se G é um (n, q) -grafo conexo, então* $q \geq n - 1$.

Demonstração: (por indução sobre n).
O resultado é evidente para $n = 2$.
Supondo que o mesmo seja válido para todo $(n_1, q_1)-$ grafo conexo com $n_1 < n$, consideremos G um $(n, q)-$ grafo conexo com v o vértice de G como na proposição anterior, isto é, tal que o subgrafo H de G, obtido com a remoção de v é conexo e $| V(H) |=| V(G) | -1$.
Sendo $|V(H)| = n_1 = n - 1$ e $A(H) = q_1$, H é um $(n_1, q_1)-$grafo conexo. Por hipótese de indução temos $q_1 \geq n_1 - 1$, assim, $q \geq q_1 + 1 \geq n_1 = n - 1$. ∎

Proposição 2.6 *Seja G um $(n,q)-$grafo conexo com $q = n-1$. Então, existe vértice em $V(G)$ com grau de incidência exatamente 1.*

Demonstração: (por indução sobre n)
Se $n = 2$ o resultado é óbvio.
Seja G um $(n, n-1)-$grafo conexo com $n \geq 3$.
Se nenhum dos vértices de G tem grau de incidência igual a 1, considere $v \in V(G)$ tal que o subgrafo H de G obtido pela sua remoção ainda seja conexo e $n_1 = |V(H)| - 1$ (existe por 2.4). Portanto, temos $n_1 = n - 1$. Seja d o grau de incidência de v (no grafo G). Se $q_1 = |A(H)|$ temos $q_1 = q - d$. Agora, pela proposição anterior, $q_1 \geq n_1 - 1$. Mas, então,

$$\begin{aligned} q &= q_1 + d \geq (n_1 - 1) + d \geq (n-1) - 1 + d = \\ &= (n-1) + (d-1) \geq n - 1 = q. \end{aligned}$$

Portanto, $d - 1 = 0$ ou seja $d = 1$. Assim, G possui um vértice cujo grau de incidência é exatamente 1. ∎

2.1 Dimensão de Krull de $S(I)$ onde I é o ideal das arestas de um grafo G.

No que segue usaremos a seguinte notação: se G é um grafo, $I = I(G)$ denotará o ideal das arestas de G, mais explicitamente, se $|V(G)| = n$ e $R = F[X_1, \ldots, X_n]$, onde F é um corpo então $I = \langle X_i X_j : \{v_i, v_j\} \in A(G) \rangle \subset R$.

Ao final desta secção apresentaremos uma generalização do resultado de R. Villarreal [14] para a dimensão de Krull da álgebra simétrica de I.

Como é conhecido (Huneke-Rossi [7] e Simis-Vasconcelos [10]), sendo E um R-módulo, onde R é um anel noetheriano,

$$\dim S_R(E) = \sup_{P \in Spec R} \left\{ \dim \frac{R}{P} + \mu_P(E) \right\}$$

$\mu_P(E)$ denota o número mínimo de geradores de E_P como R_P-módulo.

Se $P \in Spec\ R$ é tal que $P \notin V(I)$, então $\mu_P(\ I\ ) = 1$ e como $\dim \frac{R}{P} \leq$
$\leq \dim R$, segue-se que

$$\dim \frac{R}{P} + \mu_p(I) \leq n + 1.$$

Como $F[X_1, \ldots, X_n]$ é um domínio, se $P = (0)$, $\dim \frac{R}{P} + \mu_P(I) = n+1$.
Assim, para I ideal de um grafo G,

$$\dim S(I) = \sup\{\dim \frac{R}{P} + \mu_P(I) : P = 0 \quad ou\, P \supseteq I, P \in SpecR\}.$$

Para chegarmos à dimensão de Krull de $S(\ I\ )$, resta-nos analisar o que ocorre com os primos que contém I.

Observamos que para Q, $P \in Spec\ R$ com $Q \supset P \supset I$, definindo

$$\begin{aligned} B_P &= \{X_i : X_i \notin P\}, \\ C_P &= \{X_j : \exists X_i \in B_P \mid X_i X_j \in I\} \text{ e} \\ Y_P &= \{X_l X_k \in I \mid \{X_l, X_k\} \cap C_P = \emptyset\} \end{aligned}$$

Se $B_P = B_Q$ (1) tem-se:

$$\begin{aligned} C_Q &= \{X_j : \exists X_i \in B_Q \mid X_i X_j \in I\} \overset{(1)}{=} \\ &= \{X_i : \exists X_i \in B_P \mid X_i X_j \in I\} = C_P \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Também}, \quad Y_Q &= \{X_l X_k \in I : \{X_l, X_k\} \cap C_Q = \emptyset\} \overset{(2)}{=} \\ &= \{X_l X_k \in I : \{X_l, X_k\} \cap C_P = \emptyset\} = Y_P \end{aligned}$$

Assim, para $Q \supset P \supset I$ com $B_P = B_Q$, temos,

$$C_P = C_Q \quad e \quad Y_P = Y_Q. \qquad (3)$$

Lema 2.7 *Sejam G um (n,q)-grafo e I=$I(G)$. Se P é um ideal primo de $R =$ $= F[X_1, \ldots, X_n]$ contendo I, tem-se $\mu_P(I) = |C_P| + |Y_P|$, onde C_P e Y_P são os definidos anteriormente.*

Demonstração: Antes da demonstração propriamente dita, observemos que $\mu_P(\ I\ ) \leq |C_P| + |Y_P|$, onde C_P, Y_P são os definidos anteriormente. Aliás, basta demonstrarmos a igualdade para o caso em que P é gerado por variáveis, uma vez que se $Q \supset P$ e $B_P = B_Q$ então $C_Q = C_P$ e $Y_Q = Y_P$.

Agora, sabe-se que $I_Q \overset{(*)}{=} (C_P, Y_Q)R_Q$ portanto, se a igualdade vale para P gerado por variáveis, temos:

$$|C_P| + |Y_P| = \mu_P(I) \leq \mu_Q(I) \overset{(*)}{\leq} |C_Q| + |Y_Q| = |C_P| + |Y_P|$$

De onde segue-se que $\mu_Q(I) = |C_Q| + |Y_Q| = |C_P| + |Y_P| = \mu_P(I)$.
Vejamos, então, que a igualdade vale para P gerado por variáveis.
Obviamente, $I_P = (C_P,\ Y_P)R_P$, restando-nos mostrar que $C_P \cup Y_P$ é um sistema minimal de geradores de I_P.
Para tanto consideremos $C_P = \{X_1, \ldots, X_r\}$, (a menos de reordenação dos índices) e $D_P = \{X_k \in P : X_k X_l \in Y_P \text{ para algum } X_l\}$
Observamos que se $X_k X_l \in Y_P$ então $\{X_k, X_l\} \cap C_P = \phi$, ou seja, X_k, $X_l \notin C_P$ e portanto X_k, $X_l \notin B_P$, ou ainda, $X_k, X_l \in P$.
Como $C_P \cap D_P = \phi$, podemos considerar $D_P = \{X_{r+1,\ldots,}X_t\}$ para algum $t \leq n$.
Temos então, $P = (\ C_P,\ D_P\ )$ já que
(i) $C_P \cup D_P \subset P$ e
(ii) $\{\underline{X}\} \setminus [C_P \cup D_P] = B_P$.
Assim, podemos considerar $P = (X_{1,\ldots,}X_t)$.
Para mostrarmos que $C_P \cup Y_P$ é conjunto mínimo de geradores de I_P basta termos

$$\sum_{i=1}^{r} a_i X_i + \sum_{X_k X_l \in Y_P} b_{kl} X_k X_l = y \in P I_P \quad \text{com} \quad a_i' s \;\; e \;\; b_{kl}' s \quad \text{em } R_P,$$

se, e somente se $a_i's$ e $b_{kl}'s \in PR_P$. Tal fato obviamente ocorre uma vez que $\{X_1, \ldots, X_t\}$ é seqüência regular e gera PR_P
Com isso, demonstramos que $C_P \cup Y_P$ é um sistema minimal de geradores de I_P. Assim,

$$\mu_P(I) = |C_P| + |Y_P|,$$

uma vez que a união é disjunta. ∎

Como consequência imediata deste lema temos:

Lema 2.8 *Seja G um (n,q)-grafo com m componentes conexas $G_1, \ldots, G_m$ e $I = I(G)$. Se V_j denota o conjunto das variáveis correspondentes aos vértices da $j-$ésima componente conexa G_j, $j = 1, \ldots, m$, denotaremos $R_j = F[V_j]$. Sejam $P \in SpecR$, $R = F[X_{1,\ldots,}X_n]$, $P \supset I$ e $I_j = I \cap R_j$, $P_j = P \cap R_j$, $j = 1, \ldots, m$, então*

$$\mu_P(I) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{P_j}(I_j).$$

Demonstração: Obviamente, $B_P = \overset{\circ}{\cup} B_j$, com $B_j = B_P \cap V_j$, $j = 1, \ldots, m$, ou seja, $B_j = \{X_k \in V_j : X_k \notin P_j\}$, $j = 1, \ldots, m$. Assim, $C_P = \overset{\circ}{\cup} C_j$ onde $C_j = C_P \cap V_j$, $j = 1, \ldots, m$, ou ainda, $C_j = \{X_k \in V_j : \exists X_i \in B_j \text{ com } X_i X_k \in I_j\}$.

$$\text{Logo,} \qquad |C_P| = \sum_{j=1}^{m} |C_j| \qquad (1)$$

Ainda, se $Y_j = Y_P \cap R_j$, temos $Y_j \cap Y_i = \phi$, para $i \neq j$, e

$$Y_P = \{X_i X_k \in I : \{X_i, X_k\} \cap C_P = \phi\} = \bigcup_{j=1}^{m} Y_j$$

Conforme vimos anteriormente,

$$\begin{aligned} \mu_P(I) &= |C_P| + |Y_P| && \text{e} \\ \mu_{P_j}(I_j) &= |C_j| + |Y_j| && j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Então,

$$\mu_P(I) = |C_P| + |Y_P| = \sum_{j=1}^{m} |C_j| + \sum_{j=1}^{m} |Y_j| = \sum_{j=1}^{m} (|C_j| + |Y_j|) = \sum_{j=1}^{m} \mu_{P_j}(I_j).$$

■

Proposição 2.9 *Sejam G um $(n,q)-$grafo conexo com $q = n - 1$ $(n \geq 2)$, $R = F[\mathbf{X}] = F[X_1, \ldots, X_n]$ e $I = I(G)$. Então existe $P \in Spec\ R$ com*

$$\dim \frac{R}{P} + \mu_P(I) = n$$

Demonstração: (por indução sobre n.)
Se $n = 2$, $I = (X_1 X_2)$. Tomando $P = (X_1)$ teremos o resultado.
Seja $n \geq 3$. Como estamos considerando $q = n - 1$ e G conexo, existe um vértice de G com grau de incidência exatamente um, tal que o subgrafo de G obtido pela sua remoção ainda é conexo. Podemos supor que este vértice seja o associado à variável X_n e mais, que o único gerador de I para o qual X_n constribui seja $X_{n-1} X_n$.
Nestas condições, considerando $R' = F[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ e $I' = I \cap R'$, teremos:

$I = (I', X_{n-1}X_n)R$ e, $I' = I(G')$, onde G' é o subgrafo $(n-1, n-2)-$conexo, obtido de G pela remoção do vértice correspondente à variável X_n.
Por hipótese de indução, existe $P' \in Spec\, R'$ com $\dim \frac{R'}{P'} + \mu_{P'}(I) = n - 1$.
Agora, podemos ter:
(i) $X_{n-1} \notin P'$ e, neste caso, tomando $P = (P', X_n)$ teremos $\mu_P(I) =$
$= \mu_{P'}(I') + 1$ e, então

$$\dim \frac{R}{P} + \mu_P(I) = \dim \frac{R'}{P'} + \mu_{P'}(I') + 1 = (n-1) + 1 = n.$$

(ii) $X_{n-1} \in P'$ e $X_{n-1} \notin C_{P'} = \{X_j : \exists X_i \in \{X_1, ..., X_{n-1}\} \backslash P' : X_iX_j \in I'\}$.
Também neste caso, considerando $P = (P', X_n)$ teremos,

$$\dim \frac{R}{P} = \dim \frac{R'}{P'} \quad \text{e} \quad \mu_{P'}(I) = \mu_{P'}(I') + 1.$$

Logo, $\dim \frac{R}{P} + \mu_P(I) = \dim \frac{R'}{P'} + \mu_{P'}(I') + 1 = n - 1 + 1 = n$.
(iii) $X_{n-1} \in P' \cap C_{P'}$.
Tomando $P = P'R$, teremos:

$$\mu_{P'}(I') = \mu_P(I) \quad \text{e} \quad \dim \frac{R}{P} = \dim \frac{R'}{P'} + 1,$$

de onde segue-se,

$$\dim \frac{R}{P} + \mu_P(I) = n.$$

Em qualquer caso, existe $P \in Spec\, R$ com $\dim \frac{R}{P} + \mu_P(I) = n$. ■

A seguir apresentaremos um lema cuja demonstração aparece em R. Villareal [14] e que utilizaremos no que segue:

Lema 2.10 *Seja G um $(n, q)-$grafo conexo. Com as mesmas notações adotadas anteriormente temos:*
a) se $q \geq n$, $\dim \frac{R}{P} + \mu_P(I) \leq q$, $\forall P \in Spec\ R$, $P \supset I$.
b) se $q = n - 1$ então $\dim \frac{R}{P} + \mu_P(I) \leq q + 1$.

Teorema 2.11 *Sejam G um (n, q, m)-grafo, $I = I(G) \subset R = F[X_1, \ldots, X_n]$, supondo que r das m componentes conexas são árvores, tem-se*

$$dim\, S(I) = max\{n + 1, \mu(I) + r\}.$$

Demonstração: Como antes, consideremos V_j conjunto das variáveis associadas aos vértices que pertencem à j-ésima componente conexa de G, $R_j =$ $= F[V_j]$, $I_j = I \cap R_j$, $P_j = P \cap R_j$, $j = 1, \ldots, m$ onde $P \supset I$, $P \in SpecR$. Se

$$q_j = \mu(I_j) \quad \text{e} \quad n_j = |V_j|, \quad \text{então}$$
$$q = \sum_{j=1}^{m} q_j \quad \text{e} \quad n = \sum_{j=1}^{m} n_j.$$

Se denotarmos $\dim \frac{R}{P} + \mu_P(I)$ por b_P, sabemos que
$\dim S(I) = \max\{n+1, \sup\{b_P, P \in SpecR, P \supset I, \text{ gerado por variáveis}\}\}$.
Assim, para obtermos o resultado, basta mostrar que

$$sup\,\{b_P : P \in Spec\,R, P \supset I, \text{ gerado por variáveis}\} = \mu(I) + r.$$

Como $R = F[X_1, \ldots, X_n]$ e P é gerado por variáveis temos que, se $ht\,P = s$, então $dim\,\frac{R}{P} = n - s$, e também,

$$dim\,\frac{R}{P} = \sum_{j=1}^{m} n_j - \sum_{j=1}^{m} s_j, \quad onde \quad s_j = htP_j,$$

$$\begin{aligned} dim\,\frac{R}{P} = \sum_{j=1}^{m}(n_j - s_j) &= \sum_{j=1}^{m}(dim R_j - htP_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{m} dim\,\frac{R_j}{P_j} \qquad (1) \end{aligned}$$

Ainda, admitindo-se que as componentes conexas que são árvores são as r-primeiras, tem-se $dim\,\frac{R_j}{P_j} + \mu_{P_j}(I_j) \leq q_j$, para todo j, $j \in \{r+1, \ldots, m\}$.
Pela proposição 2.9, para cada $j = 1, \ldots r$, existe $P_j \in Spec\;R_j$ tal que $I_j \subset P_j$ e

$$dim\,\frac{R_j}{P_j} + \mu_{P_j}(I_j) = n_j, \forall j = 1, \ldots, r.$$

Considerando $Q = (P_1, \ldots, P_r, V_{r+1}, \ldots, V_m)$ temos:
$.Q \supset I$ (obviamente), e

$$.dim\,\frac{R}{Q} + \mu_P(I) = \sum_{j=1}^{m}\left(dim\,\frac{R_j}{Q_j}\right) + \sum_{j=1}^{m}\mu_{Q_j}(I_j) = \sum_{j=1}^{m}\left(dim\,\frac{R_j}{Q_j} + \mu_{Q_j}(I_j)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{r}\left(dim\frac{R_j}{Q_j}+\mu_{Q_j}(I_j)\right)+\sum_{j=r+1}^{m}\left(dim\frac{R_j}{Q_j}+\mu_{Q_j}(I_j)\right)\\
&= \sum_{j=1}^{r}n_j+\sum_{j=r+1}^{m}q_j=\sum_{j=1}^{r}(q_j+1)+\sum_{j=r+1}^{m}q_j\\
&= \left(\sum_{j=1}^{m}q_j\right)+r=\mu_P(I)+r.
\end{aligned}
$$

Portanto, $dim\ S(I)\geq max\{n+1,\mu(I)+r\}$. (*)
Mas, para todo P gerado por variáveis,

$$
\begin{aligned}
dim\frac{R}{P}+\mu_P(I) &= \sum_{j=1}^{r}\left(dim\frac{R_j}{Q_j}+\mu_{P_j}(I_j)\right)+\sum_{j=r+1}^{m}\left(dim\frac{R_j}{Q_j}+\mu_{P_j}(I_j)\right)\leq\\
&\leq \sum_{j=1}^{r}(q_j+1)+\sum_{j=r+1}^{m}q_j=q+r=\mu(I)+r. \qquad (**)
\end{aligned}
$$

De (*) e (**) segue-se: $dimS(I)=max\{n+1,\mu(I)+r\}$ ■

2.2 A dimensão de Krull de S(I) para I o ideal gerado por todos os k-produtos.

No que segue, apresentaremos uma demonstração de que a dimensão de Krull da álgebra simétrica de ideais gerados por todos os k produtos, isto é, todos os monômios de grau k, livres de quadrados, a n variáveis é $n+1$, baseada na mesma idéia da demonstração de Villarreal, para ideais de grafos conexos.

Proposição 2.12 *Seja $I\subset F[X_1,\ldots,X_n]$ ideal gerado por todos os monômios de grau k, $1\leq k\leq n$, livres de quadrados. Então, $dim\ S(I)=max\{n+1,\mu(I)\}$.*

Demonstração: Observamos, inicialmente, que $\mu(I)=\binom{n}{k}$. Sendo $R=F[X_1,\ldots,X_n]$ e sabendo que

$$dim\ S_R(I)=sup\left\{dim\ \frac{R}{P}+\mu_P(I),P\in SpecR\right\},$$

temos, em $P = (0)$,

$$dim\ \frac{R}{P} + \mu_P(I) = n + 1$$

e, em $P = (X)$,

$$dim\ \frac{R}{P} + \mu_P(I) = \mu(I) = \binom{n}{k}.$$

Assim, claramente,

$$dim\ S_R(I) \geq max\left\{n+1,\ \binom{n}{k}\right\}. \qquad (I)$$

Para obtermos a desigualdade contrária, observamos inicialmente que basta considerarmos $P \in Spec\ R$ tal que $P \supset I$, caso contrário

$$dim\frac{R}{P} + \mu_P(I) \leq n + 1.$$

Se tomarmos $P \in Spec\,R$ gerado por variáveis e tal que $P \supset I$ *se* $B_P = \{X_j : X_j \notin P\}$, tem-se $|B_P| = r < k$ pois, se $r \geq k$, $\mu_P(I) = 1$, uma vez que teremos $m \in I$ com $supp\,m = \{X_j : X_j \text{ divide } m\} \subset B_P$ e, assim, $dim\,\frac{R}{P} + \mu_P(I) \leq n + 1$.

Se $s = k - r$ e $C_P = \left\{X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_s} : X_{i_l} \neq X_{i_k}, X_{i_j} \notin B_P,\ j,k,l = 1,\ldots,s\right\}$, temos $I_P = (C_P)R_P$.

De fato, supondo $B_P = \left\{X_n, X_{n-1}, \ldots, X_{n-(r-1)}\right\}$ e m um k-produto, livre de quadrados, a n variáveis, $m = X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_k}$, então,

$$\left|(supp\,m \cap B_P)\overset{\circ}{\bigcup}(supp\,m \cap P)\right| = k.$$

Agora, se $|supp\ m \cap P| = t$, digamos, $supp\ m \cap P = \{X_{i_1}, \ldots, X_{i_t}\}$, claramente, $s \leq t$, e assim,

$$\{X_{i_1}, \ldots X_{i_s}\} \subset \{X_{i_1}, \ldots X_{i_t}\}.$$

Considerando $M = X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_s} \cdot X_n \cdot \ldots \cdot X_{n-(r-1)}$, temos que M é um k-produto livre de quadrados a n variáveis e, portanto, um gerador de I.
Se $\varphi_P : R \rightarrow R_P$ é a inclusão canônica, $\varphi_P(M) \in C_P$, e mais $\varphi_P(M)$ divide $\varphi_P(m)$, de onde podemos concluir que $\varphi_P(m) \in (C_P)$.
Também, se $Q \in Spec\ R$ e $Q \supset P \supset I$ é tal que $B_P = B_Q$, teremos

$C_Q = \left\{ X_{i_1} \cdot \ldots \cdot X_{i_s} : X_{i_l} \neq X_{i_k}, X_{i_j} \notin B_Q, \, j,k,l = 1,\ldots,s \right\} = C_P$ e, consequentemente, $\mu_Q(I) \leq |C_Q| = |C_P|$.
Assim, basta demonstrar que $|B_P| + |C_P| \leq \binom{n}{k}$, onde $P \supset I$ é gerado por variáveis e $|B_P| = r < k$. No entanto, nestas condições $| \; C_P \; |= \binom{n-r}{k-r}$.
Também,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \ldots + \binom{n-r}{k-(r-1)} + \binom{n-r}{k-r},$$

de onde segue-se que

$$r + \binom{n-r}{k-r} \leq \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \ldots + \binom{n-r}{k-(n-r)} + \binom{n-r}{k-r} = \binom{n}{k},$$

ou seja , $|B_P| + |C_P| \leq \binom{n}{k}$.
Portanto,

$$dim \, \frac{R}{P} + \mu_P(I) \leq \mu(I).$$

Assim, $dim \; S(I) \leq sup \{n+1, \mu(I)\}$ (II).
De (I) e (II) temos , então, que $dim \; S(I) = sup \{n+1, \mu(I)\}$. ■

Capítulo 3

A Álgebra Simétrica de um Ideal (n, k)–Cíclico

Conforme vimos no capítulo 1, Teorema 1.12., Simis e Vasconcelos demonstraram que a dimensão de Krull de um R-módulo E, finitamente apresentado, pode ser obtida em termos das alturas dos ideais determinantais da matriz de uma apresentação de E, quando R é um domínio noetheriano. Usando este resultado, demonstraremos, na primeira parte deste capítulo, que $\dim S(I) = n+1$, para o caso em que $I \subset F[X_1, \ldots, X_n]$ (F corpo) é um ideal (n, k)–cíclico. Para tanto, inicialmente, obteremos uma apresentação do ideal (n, k)-cíclico, para $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ e, também, concluiremos como deve ser a parte linear da matriz de uma apresentação do mesmo para $k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

A seguir, demonstraremos que todo ideal (n, k)–cíclico de $F[X_1, \ldots, X_n]$ satisfaz a condição $\mathcal{F}_0$, e mais, para $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$, satifaz, também, $\mathcal{F}_1$.

Usando estes fatos e o Teorema 1.1.3 de [10], chegaremos ao principal resultado da secção que nos dá a dimensão da Álgebra Simétrica de ideais (n, k)-cíclicos.

Como esta dimensão coincide com a dimensão da Álgebra de Rees de I e existe epimorfismo canônico $\phi : S(I) \to \mathcal{R}(I)$, pergunta-se para que pares (n, k) temos que o ideal (n, k)–cíclico I em $F[X_1, \ldots, X_n]$ é de tipo linear.

Em [14], Teorema 3.4. R. Villarreal caracterizou, completamente, os grafos cujos ideais associados são de tipo linear. Como para $k = 2$ o ideal (n, k)–cíclico é o ideal associado a um grafo que é um ciclo, usando o resultado citado anteriormente, concluímos que I será de tipo linear se, e somente se, o comprimento do ciclo for ímpar.

Também, usando 7.5.1 e 7.5.4 de [13], teremos que se $k = n - 2$, I será de tipo linear se, e somente se, k for ímpar.

Na segunda parte do capítulo, apresentamos um estudo de mais alguns casos, a saber: se $mdc(n,k) = r \neq 1$, $\left[\frac{n+1}{2}\right] \leq k \leq n-1$ e $k = \frac{n-1}{2}$. Em tais casos, concluiremos que I é de tipo linear somente quando $k = n-1$, ou, com n ímpar, $k = n-2$ ou $k = \frac{n-1}{2}$. Em todos os demais casos citados os ideais (n,k)−cíclicos não são de tipo linear.

No que segue $R = F[X_1, \ldots, X_n]$ denotará o anel de polinômios nas variáveis $X_1, \ldots, X_n$, definido sobre o corpo F; I o ideal (n,k)−cíclico em R; $[n]$ parte inteira de n ; $\equiv_n$ congruência módulo n e os índices das variáveis serão sempre considerados módulo n.

Definição 3.1 *Diremos que o ideal* $I \subset R = F[X_1, \ldots, X_n]$ *é* (n,k)*−cíclico,* $1 \leq k \leq n$, *se* I *for gerado pelos monômios* $M_i's$, *onde* $i = 1, \ldots, n$, *e* $M_i = \prod_{v=1}^{k} X_{i+v}$

Observação 3.2 *Se, na definição anterior,* $k \neq n$ *então* $\mu(I) = n$.

Observação 3.3 *O ideal* (n,k)*−cíclico definido em 3.1. é o ideal de caminhos de comprimento* k *num grafo* G *que é um ciclo com* n *vértices, segundo a definição de Conca e De Negri em [2].*

Conforme é conhecido na literatura, vide [4], por exemplo, se $I \subset R$ é um ideal (n,k)−cíclico e $\beta : R^n \to I$ é tal que $\beta(e_i) = M_i$, temos que $ker\, \beta$ é gerado pelos σ_{ij}, onde $\sigma_{ij} = \frac{M_i}{d_{ij}} \cdot e_j - \frac{M_j}{d_{ij}} \cdot e_i$ para $1 \leq i \leq j \leq n$ e $d_{ij} = mdc(M_i, M_j)$.

Seja N o submódulo de R^n gerado por $\{\sigma_{i(i+1)}, 1 \leq i \leq n\}$.

Lema 3.4 *Com as notações dos parágrafos anteriores, temos* $\sigma_{ij} \in N$, *se* i *e* j *são tais que* $supp(M_i) \cap supp(M_j) \neq \emptyset$.

Demonstração: Observamos, inicialmente, que dado um inteiro a, $1 \leq a \leq n$ e definindo-se o F-homorfismo $\varphi_a : R \to R$ por $\varphi_a(X_i) = X_{i+a}$ teremos que φ_a é um automorfismo. Usando φ_a também para denotar o F-isomorfismo de R^n definido por

$$\varphi_a\left(\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_a(f_i) \cdot e_{i+a},$$

claramente teremos $\varphi_a(\sigma_{ij}) = \sigma_{(i+a)(j+a)}$ e, portanto, $\varphi_a(N) = N$.

Assim, para que tenhamos $\sigma_{ij} \in N$ basta mostrarmos que $\sigma_{1(j-i+1)} \in N$, ou seja, que $\sigma_{1l} \in N$ se $supp(M_1) \cap supp(M_l) \neq \emptyset$.

Os resultados possíveis para $supp(M_1) \cap supp(M_j) \neq \emptyset$ são:

1) $supp(M_1) \cap supp(M_j) = \{X_{j+1}, \ldots, X_{1+k}\}$
2) $supp(M_1) \cap supp(M_j) = \{X_2, \ldots, X_{j+k}\}$
3) $supp(M_1) \cap supp(M_j) = \{X_2, \ldots, X_{j+k}, X_{j+1}, \ldots, X_{1+k}\}$.

Como $supp(M_1) \cap supp(M_j)$ nos dá o $supp(d_{1j})$, os d_{1j} correspondentes a estes resultados são:

1) $d_{1j} = X_{j+1} \cdot \ldots \cdot X_{1+k}$
2) $d_{1j} = X_2 \cdot \ldots \cdot X_{j+k}$
3) $d_{1j} = X_2 \cdot \ldots \cdot X_{j+k} \cdot X_{j+1} \cdot \ldots \cdot X_{1+k}$.

Facilmente se demonstra (por indução sobre j-r, se $1 \leq r \leq j$) que

$$X_r \cdot \ldots \cdot X_j \cdot e_j \equiv X_{r+k} \cdot \ldots \cdot X_{j+k} \cdot e_{r-1} \quad \mathrm{mod}(N).(*)$$

Assim, se valer (1),

$$\sigma_{1j} = X_2 \cdot \ldots \cdot X_j \cdot e_j - X_{k+2} \cdot \ldots \cdot X_{j+k} \cdot e_1 \overset{(*)}{\equiv} 0 \ \mathrm{mod}(N).$$

Também, para $d_{1j} = X_2 \cdot \ldots \cdot X_{j+k}$, sendo u e t os inteiros tais que $1 \leq u, t \leq k$, $j + k \equiv_n 1 + u$ e $j + t \equiv_n 2$,

$$\sigma_{1j} = X_{(1+u)+1} \cdot \ldots \cdot X_{k+1} \cdot e_j - X_{j+1} \cdot \ldots \cdot X_{j+t-1} \cdot e_{n+1}.$$

Agora, $X_{j+1} \cdot \ldots \cdot X_{j+t-1} \cdot e_{n+1} = X_{j+1} \cdot \ldots \cdot X_{n+1} \cdot e_{n+1} \overset{(*)}{\equiv}$ $\overset{(*)}{\equiv} X_{j+k+1} \cdot \ldots \cdot X_{k+n+1} \cdot e_j \equiv X_{2+u} \cdot \ldots \cdot X_{k+1} \cdot e_j$.

Se ocorrer (3), também aqui existem u e t, inteiros, $1 \leq u, t \leq k$, com $j + k \equiv_n 1 + u$, $1 + k \equiv_n j + t$ e $1 + u < j + 1$. e então,

$\sigma_{1j} = X_{u+2} \cdot \ldots \cdot X_j \cdot e_j - X_{j+t+1} \cdot \ldots \cdot X_n \cdot X_1 \cdot e_1$.

Também por indução sobre r, facilmente se demonstra que

$$X_{r+1} \cdot \ldots \cdot X_{r+n-k} \cdot e_{r+n-k} \equiv X_1 \cdot \ldots \cdot X_{n-k} \cdot e_{n-k} \ \mathrm{mod}\,(N). \qquad (**)$$

Sendo $j+k \equiv_n 1+u$, $X_{u+2} \cdot \ldots \cdot X_j \cdot e_j \equiv X_{r+1} \cdot \ldots \cdot X_{r+n-k} \cdot e_{r+n-k}$ mod(N), tomando $r = n + 1$. Também, se $1 + k \equiv_n j + t$,

$$X_{j+t+1} \cdot \ldots \cdot X_n \cdot X_1 e_1 \equiv X_{r+1} \cdot \ldots \cdot X_{r+n-k} e_{r+n-k} \ \mathrm{mod}(N), \text{ onde } r = k + 1.$$

Assim, usando (**), temos:

$$X_{u+2} \cdot \ldots \cdot X_j \cdot e_j - X_{j+t+1} \cdot \ldots \cdot X_n \cdot X_1 \cdot e_1 \equiv 0 \bmod(N).$$

Portanto, se $supp(M_1) \cap supp(M_j) \neq \emptyset$ temos $\sigma_{1j} \in N$, como queríamos demonstrar. ■

Lema 3.5 *Com a notação do lema anterior, se $supp(M_i) \cap supp(M_j) = \emptyset$ e $2k = n$ ou $2k = n-1$, ainda assim $\sigma_{ij} \in N$.*

Demonstração: Observe que, neste caso, tomando $i = 1$ teremos

$$(n = 2k \text{ e } j = k+1) \text{ ou } [n = 2k+1 \text{ e } (j = k+1 \text{ ou } j = k+2)].$$

Como $X_r \cdot \ldots \cdot X_j \cdot e_j \equiv X_{r+k} \cdot \ldots \cdot X_{j+k} \cdot e_{r-1} \bmod(N)$, se $j = k+1$, temos

$$\begin{aligned}
\sigma_{1(1+k)} &= X_2 \cdot \ldots \cdot X_{k+1} \cdot e_{k+1} - X_{k+2} \cdot \ldots \cdot X_{2k+1} \cdot e_1 \equiv \\
&\equiv X_{k+2} \cdot \ldots \cdot X_{2k+1} \cdot e_{2k+1} - X_{k+2} \cdot \ldots \cdot X_{2k+1} \cdot e_1 \equiv \\
&\equiv 0 \quad mod\,(N)
\end{aligned}$$

Também, $\sigma_{1(k+2)} = \varphi_{(k+1)}(\sigma_{1(1+k)})$, onde $\varphi_{(k+1)}$ denota o homomorfismo definido na demonstração de 3.4. para $a = k+1$.

Portanto, se $n = 2k+1$ e $j = k+2$, ainda assim teremos $\sigma_{ij} \in N$. ■

Proposição 3.6 *Sejam $I \subset R = F[X_1, \ldots, X_n]$ o ideal $(n,k)-$cíclico e $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$. Então a matriz da apresentação de I induzida por β, $\beta : (R)^n \to I : \beta(e_i) = M_i$ é a seguinte*

$$\begin{pmatrix}
-X_{k+2} & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\
X_2 & -X_{k+3} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & X_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & -X_{k+n} & 0 \\
0 & \cdots & 0 & X_n & -X_{k+1}
\end{pmatrix}_{n \times n} . \qquad (**)$$

Demonstração: Se $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ estamos nas condições dos lemas anteriores e portanto $\sigma_{ij} \in N$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo $\{\sigma_{i(i+1)} : 1 \leq i \leq n\}$ gera ker β, ou seja $ker\ \beta = N$. ■

Observação 3.7 *Se $k \leq \left[\frac{n-1}{2}\right]$, ainda assim as sigízias $\sigma_{i(i+1)}$ gerarão uma parte das sizígias de I. Neste caso, no entanto, haverão, também, sizígias que não pertençam ao ideal gerado por aquelas ou seja, podemos ter entradas não lineares na matriz da apresentação de I. Se, $\overline{\alpha} = (a_{ij})_{n\times m}$ denota a matriz da apresentação de I induzida por β, então $\overline{\alpha}$ terá uma submatriz com entradas lineares que pode ser tomada como a matriz dada em (**). Neste caso, representaremos $\overline{\alpha} = (a_{ij})_{n\times m}$ por $\overline{\alpha} = \left[\alpha \vdots \gamma\right]$ com $\alpha = (a_{ij})_{n\times n}$ a matriz com entradas lineares (**) e γ a matriz $(b_{ij})_{n\times(m-n)}$ cujas entradas não são lineares. Observe que se $supp(M_i) \cap supp(M_j) = \emptyset$ e σ_{ij} não pertence ao submódulo de R^n gerado pelas sizígias $\sigma_{i(i+1)}$ então o grau dos monômios envolvidos será k.*

3.1 A Dimensão de Krull da Álgebra Simétrica do Ideal Cíclico de Grau k em $F[X_1,\ldots,X_n]$.

Nesta parte manteremos a notação fixada anteriormente, a menos de menção explícita em contrário, isto é, $R = F[X_1,\ldots,X_n]$ denotará o anel dos polinômios nas variáveis $X_1,\ldots,X_n$ definido sobre o corpo F, $I \subset R = F[X_1,\ldots,X_n]$ o ideal $(n,k)-$cíclico, k, $1 \leq k \leq n$, $M_i = \prod_{v=1}^{k} X_{i+v}$, os índices das variáveis serão considerados módulo n, $I_t(\alpha)$ denotará o ideal gerado pelos $t\times t-$menores da matriz α e I_t o ideal contido em $R = F[X_1,\ldots,X_n]$ gerado por todos os monômios de grau t, livres de quadrados.

Conforme 1.1.3. de [10], a dimensão da álgebra simétrica de um R-módulo finitamente gerado E, quando R é um domínio catenário equidimensional é dada por

$$dim\, S(E) = b_0(E) + d(E)$$

onde $b_0 = dim\ R + 1$, $d(E) = sup\{d(t)\}$ e $d : ([1, rank\,\alpha] \cap \mathbf{Z}) \longrightarrow \mathbf{Z}$ é definida por $d(t) = \begin{cases} rank\,\alpha - t + 1 - ht(I_t(\alpha)), & \text{se não vale } \mathcal{F}_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Como $R = F[X_1,\ldots,X_n]$ é um domínio catenário equidimensional e sabemos, pela observação 3.7, que a matriz de uma apresentação de I é

$\overline{\alpha} = (a_{ij})_{n\times m}$ onde $\overline{\alpha} = \left[\alpha \vdots \gamma\right]$ com γ parte com entradas não lineares e

$$\alpha = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} -X_{k+2} & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ X_2 & -X_{k+3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X_{k+n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X_n & -X_{k+1} \end{pmatrix}_{n\times n},$$

temos condições de determinar a dimensão de Krull da Álgebra Simétrica de I, para $I \subset R$ ideal $(n,k)-$cíclico, usando 1.1.3 de [10].

Verifiquemos que I satisfaz a condição $\mathcal{F}_0$.

Lema 3.8 *Seja $I \subset F[X_1, ..., X_n]$ o ideal $(n,k)-$cíclico. Se $\overline{\alpha}$ é a matriz da apresentação de I induzida por $\beta : R^n \longrightarrow I$, $\beta(e_i) = M_i$ então, $n-1 \leq rank\ \overline{\alpha} \leq n$.*

Demonstração: Observe, inicialmente, que $rank\ \overline{\alpha} \leq \min\{m,n\} = n(*)$.

Agora, se $\alpha = \begin{pmatrix} -X_{k+2} & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ X_2 & -X_{k+3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X_{k+n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X_n & -X_{k+1} \end{pmatrix}_{n\times n}$ temos, obviamente, que $\det \alpha = 0$.

Considerando α_1 a submatriz de α obtida pela eliminação das 1° linha e 1° coluna, então $\det \alpha_1 \neq 0$. Como α_1 é uma submatriz $(n-1)\times(n-1)$ de $\overline{\alpha}$, com determinante não nulo, $rank\ \overline{\alpha} \geq n-1(**)$.

De (*) e (**) segue que $n-1 \leq rank\ \overline{\alpha} \leq n$. ∎

Observação 3.9 *Com as notações adotadas no lema [3.8] se temos, ainda, que $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ então $rank\ \overline{\alpha} = n-1$.*

Para mostrarmos que o ideal $(n,k)-$cíclico satisfaz $\mathcal{F}_0$, consideremos o seguinte:

Lema 3.10 *Sejam $I \subset R = F[X_1, ..., X_n]$ o ideal $(n,k)-$cíclico e $\overline{\alpha}$ a apresentação de I induzida por $\beta : R^n \longrightarrow I$, $\beta(e_i) = M_i$ Então $ht\,(I_t(\overline{\alpha})) \geq n-t+1$, para todo t, $1 \leq t \leq rank\ \overline{\alpha}$.*

Demonstração: Seja α a submatriz de $\overline{\alpha}$ cujas entradas são lineares:

$$\alpha = \begin{pmatrix} -X_{k+2} & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ X_2 & -X_{k+3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X_{k+n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X_n & -X_{k+1} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Podemos supor, $t \leq n-1$, pois se $t = rank\ \overline{\alpha} = n$ a afirmação é óbvia. Também, podemos nos restringir à matriz α. Observe que se $a \in \{1, \ldots, n\}$, tomando o R-isomorfismo φ_a, definido na prova do lema 3.4., temos que $\varphi_{-a} = {\varphi_a}^{-1}$ e, se $\alpha' = \alpha \circ \varphi_a$, então,

$$\alpha' = \begin{pmatrix} -X_{k+a+2} & 0 & \cdots & 0 & X_{1+a} \\ X_{a+2} & -X_{k+a+3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_{3+a} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X_{k+a+n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X_{n+a} & -X_{k+a+1} \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

Assim, por resultado conhecido de Álgebra Linear, $I_t(\alpha) = I_t(\alpha')$, $1 \leq t \leq n-1$.

Logo, para todo a, $X_{a+2} \cdot \ldots \cdot X_{a+n}$ pertence a $I_{n-1}(\alpha)$ e, também, qualquer t-subproduto de $X_{a+2} \cdot \ldots \cdot X_{a+n}$ está em $I_t(\alpha)$, $1 \leq t \leq n-1$.

Seja I_t o ideal de $R = F[X_1, ..., X_n]$ gerado por todos os monômios de grau t que são livres de quadrados. I_t pode ser visto como o ideal das não faces do complexo simplicial Δ cujas facetas são os suportes dos monômios de grau $t-1$, livres de quadrados em $R = F[X_1, ..., X_n]$. É fato conhecido na literatura (vide [1], por exemplo) que os primos minimais de I_t são dados por $\underline{X} \setminus \mathcal{F}$ onde $\mathcal{F}$ denota uma faceta de Δ.

Assim, para qualquer $\mathcal{P}$ ideal primo minimal de I_t, tem-se

$$ht(\mathcal{P}) = n - (t-1) = n - t + 1, \quad \text{ou seja,}$$

$$ht(I_t) = n - (t-1) \quad (I)$$

Agora, $I_t(\alpha) \supset I_t$, logo, $ht(I_t(\alpha)) \geq ht(I_t) = n - (t-1)$. ∎

Usando estes últimos lemas podemos concluir que:

Proposição 3.11 *Seja $I \subset R = F[X_1, ..., X_n]$ ideal $(n,k)-$cíclico. Então I satisfaz a condição $\mathcal{F}_0$. Mais, se $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ então I satisfaz, também, $\mathcal{F}_1$.*

Demonstração: Sabemos que a condição $\mathcal{F}_0$ vale se, considerando $\overline{\alpha}$ a matriz de uma apresentação de I, $ht(I_t(\overline{\alpha}) \geq rank\ (\overline{\alpha}) - t + 1$, para todo t, $1 \leq t \leq rank\ \overline{\alpha}$.

Se $\overline{\alpha}$ é a matriz da apresentação induzida por $\beta : R^n \to I$, $\beta(e_i) = M_i$, pelo lema 3.8, $n - 1 \leq rank\ \overline{\alpha} \leq n$ e então,

$$n - t \leq rank\, \overline{\alpha} - t + 1 \leq n - t + 1.(*)$$

Agora, usando (*) e 3.10, temos que $ht(I_t(\overline{\alpha}) \geq n - (t-1) \geq rank\ \overline{\alpha} - -t + 1$, ou seja, I satisfaz $\mathcal{F}_0$.
Se $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$, vale a igualdade $rank\ \overline{\alpha} = n - 1$ e, então,

$$rank\, \overline{\alpha} - t + 2 \leq (n-1) - t + 2 = n - t + 1 \leq ht(I_t(\overline{\alpha})).$$

Portanto, vale, também, $\mathcal{F}_1$. ■

Com esta proposição e 1.1.3 de [10] podemos concluir o seguinte:

Teorema 3.12 *Seja $I \subset R = F[X_1, ..., X_n]$ um ideal $(n,k)-$cíclico. Então, a dimensão de Krull da Álgebra Simétrica de I é $n+1$.*

Demonstração: Sendo $R = F[X_1, ..., X_n]$ um domínio catenário equidimensional e I, $R-$módulo finitamente gerado, estamos nas hipóteses de 1.1.3 em [10]. Então, $\dim S(I) = b_0(I) + d(I)$.

Conforme vimos na última proposição, I satisfaz $\mathcal{F}_0$, de onde segue-se que $d(I) = 0$. Logo, $\dim S(I) = b_0(I) = n + 1$. ■

3.2 Para que pares (n,k) tem-se $\mathcal{R}(I) \cong S(I)$?

Conforme é conhecido na literatura a dimensão da Álgebra de Rees de um ideal em $F[X_1, ..., X_n]$ é $n+1$. Sabemos, também, que existe epimorfismo canônico ϕ da álgebra simétrica sobre a álgebra de Rees.

Considerando o último teorema é natural perguntarmos se ϕ é um isomorfismo, ou melhor, para que pares (n,k), ϕ é um isomorfismo.

Observamos que, conforme vimos no capítulo 1, isto equivale a decidir se o ideal de definição da Álgebra Simétrica é primo. Mais precisamente, nos casos em que $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ equivale a decidir se os ideais gerados pelos binômios $X_i \cdot T_i - X_{i+k} \cdot T_{i-1}$ com $i = 1, \ldots, n$ em $R = F[X_1, ..., X_n]$ são primos. De imediato podemos dizer que se $k = n - 1$ então I é de tipo linear uma vez que o ideal de definição da álgebra simétrica neste caso é o mesmo que o de $(X_1, \ldots, X_n)$ e $(X_1, \ldots, X_n)$ é uma R-sequência.

No que segue, apresentamos resposta a esta pergunta, em mais alguns casos:

$Q = \langle X_i \cdot T_i - X_{i+k} \cdot T_{i-1}, i = 1, ..., n\rangle \subset R[\mathbf{T}]$, $R = F[\mathbf{X}]$ é primo se:

1) $k = 2$ e n é ímpar
2) $k = n - 2$ e n é ímpar
3) $k = n - 1$
4) $k = \frac{n-1}{2}$ com n ímpar

Agora, se $\left[\frac{n+1}{2}\right] < k \leq n - 3$ ou $mdc(n, k) = r \neq 1$, então Q não é um ideal primo.

Antes de passarmos à discussão de cada um destes casos vejamos um pouco mais a respeito da apresentação dos ideais $(n, k)-$cíclicos.

Conforme já vimos, dado um $R-$módulo E com uma apresentação

$$R^m \xrightarrow{\alpha} R^n \longrightarrow E \longrightarrow O,$$

o ideal de definição de sua álgebra simétrica é dado por $Q = [f_1, \ldots, f_m] = \mathbf{T} \cdot \alpha$ onde $\mathbf{T} = [T_1 \ldots T_n]$.

Como, no caso, R é o anel de polinômios $F[\mathbf{X}] = F[X_1, \ldots, X_n]$ e as entradas de α são 1-formas lineares nas variáveis $X_i's$, podemos escrever, também, $Q = \mathbf{X} \cdot B$ onde $B = (b_{ij})_{n \times m}$ é a matriz jacobiana dual de α.

Observamos que, neste caso, as entradas de B são 1-formas lineares nas variáveis $T_j's$.

Pela proposição 1.5.3, de [13], se um $R-$módulo, $R = F[X_1, \ldots, X_n]$ tem apresentação linear α, de ordem $n \times n$ cujas linhas são sizígias de $X_1, \ldots, X_n$ então B é uma matriz anti-simétrica, o que ocorre nas condições que estamos trabalhando.

Quando (R, m) é anel regular local com dimensão $d \geq 3$, um caso é particularmente interessante: se tivermos uma resolução minimal de E da forma

$$O \longrightarrow R \xrightarrow{\psi} R^d \longrightarrow R^n \longrightarrow E \longrightarrow O \quad (1)$$

onde as entradas de ψ formam uma R-seqüência.

Veremos, no que segue, que este é o caso do ideal $(n, k)-$cíclico, se $k = n - 2$.

Teorema 3.13 *Seja* $I \subset R = F[X_1, \ldots, X_n]$ *ideal* $(n,k)-$*cíclico* $n-1 \geq k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$, $n \geq 4$. *Então,* $0 \longrightarrow R \xrightarrow{\psi} R^n \xrightarrow{\alpha} R^n \longrightarrow I \longrightarrow 0$ *é uma resolução livre de* I, *onde as entradas de* ψ *geram o ideal* $(n, n-k-1)-$*cíclico e* α *é dada pela matriz*

$$(*) \begin{pmatrix} -X_{k+2} & 0 & \cdots & 0 & X_1 \\ X_2 & -X_{k+3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X_{k+n} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X_n & -X_{k+1} \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

Demonstração:

Observamos, inicialmente, que qualquer ideal primo contendo o ideal $(n,k)-$cíclico tem altura maior ou igual a dois, já que cada variável divide exatamente k geradores e, sendo $k \leq n-1$, todo ideal primo contendo I deverá ter pelo menos duas variáveis distintas. Mais, se $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ então $2(n-k-1) \leq n$. Logo todo primo contendo o ideal I $(n, n-k-1)-$cíclico tem pelo menos três variáveis distintas. Segue-se da que, nas hipóteses consideradas, o ideal $(n, n-k-1)-$cíclico tem altura maior ou igual a três.

Agora, conforme já vimos, $\beta \circ \alpha = 0$.

Também, facilmente se verifica que $\alpha \circ \psi = 0$, e β é obviamente sobrejetora.

Assim, $0 \longrightarrow R \xrightarrow{\psi} R^n \xrightarrow{\alpha} R^n \longrightarrow I \longrightarrow 0$ é um complexo de $R-$módulos livres, satisfazendo ainda:

a) $rank(R^n) = rank\psi + rank\alpha = n$;

b)$prof\ I_1(\psi) \geq 2$, $prof\ I_1(\alpha) \geq 1$ e $prof\ I_1(\beta) \geq 1$.

Agora, usando o critério de aciclicidade dado em [4], Theorem 20.9. segue-se que $0 \longrightarrow R \xrightarrow{\psi} R^n \xrightarrow{\alpha} R^n \longrightarrow I \longrightarrow 0$ é uma resolução livre de I. ■

Proposição 3.14 *Sendo* I *o ideal* $(n,k)-$*cíclico em* $R = F[X_1, \ldots, X_n]$, *com* $\left[\frac{n}{2}\right] \leq k \leq n-2$, *a resolução livre obtida no teorema anterior é minimal.*

Demonstração: Sem perda da generalidade, já que $I \subset (X_1, \ldots, X_n)$ podemos considerar $R = F[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$ e, assim estaremos no caso de anel noetheriano local.

Obviamente, $\alpha(R^n) \subseteq (X_1, \ldots, X_n) R^n$ e $\psi(R^n) \subseteq (X_1, \ldots, X_n) R^n$, de onde segue-se que $(**)$ é uma resolução minimal de $IR_{\mathbf{m}}$. ■

Conseqüência imediata desta proposição é que, quando $k = n - 2$, a resolução minimal de I é da forma $O \to R \xrightarrow{\psi} R^n \xrightarrow{\alpha} R^n \to I \to 0$, onde as entradas de ψ formam uma R-seqüência.

Agora, tais hipóteses são equivalentes a dizer que o 2° número de Betti, $\beta_2(I)$, é um e que *dim proj* $I_{\mathcal{P}} \leq 1$ para todo $\mathcal{P} \subsetneq \mathbf{m}$. Também, já vimos que o ideal cíclico de grau $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ satisfaz $\mathcal{F}_1$.

Logo, se n for ímpar e $k = n - 2$ estamos nas hipóteses de 7.5.1 de [13]. Assim, podemos concluir que, neste caso, I é de tipo linear. Mais ainda, $S(I)$ é Cohen-Macaulay.

Já, se n for par, tomando B a dual jacobiana de α conforme explicitada no capítulo 1 e, se de acordo com [13] definimos $\overline{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Q}}{(Pf(B))}$ e $D = S_R(I) \bigotimes \overline{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Q}}{(x \cdot B, Pf(B))}$, então pelo Teorema 7.5.4, também de [13], segue-se que D é a Álgebra de Rees de I. Assim, se $k = n - 2$ com n par, I não é de tipo linear.

Com o exposto, acabamos de demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 3.15 *Seja $I \subset R = F[X_1, ..., X_n]$ ideal $(n, k)-$cíclico, com $k = n - 2$. I será de tipo linear se, e somente se, n for ímpar. Mais ainda, caso n seja ímpar, $S(I)$ Cohen-Macaulay e se n for par a álgebra de Rees de I é $D = S_R(I) \bigotimes \overline{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{Q}}{(x \cdot B, Pf(B))}$.*

Um caso que pode ser naturalmente derivado a partir desta proposição é o caso $k = \frac{n-1}{2}$ com n ímpar. Para tanto, consideremos o seguinte:

Lema 3.16 *Considere k, $1 \leq k \leq n$, com $mdc(k, n) = 1$ e seja l $(1 \leq l \leq n)$ tal que $lk \equiv_n 1$. Denotando $n - l$ por l' e $F[\mathbf{X}, \mathbf{T}]$ por R, temos que o $R-$automorfismo $\delta : R \to R$, definido por $\delta(X_i) = T_{il'}$ e $\delta(T_i) = X_{il'}$ satisfaz: $\delta(Q_k) = Q_l$, onde $Q_k = (X_i \cdot T_i - X_{i+k} \cdot T_{i-1}, i = 1, \ldots, n)R$ e $Q_l = (X_j \cdot T_j - X_{j+l} \cdot T_{j-1}, j = 1, ..., n) R$*

Demonstração: Obviamente δ é um isomorfismo de anéis e mais,

$$\begin{aligned}
\delta(X_i \cdot T_i - X_{i+k} \cdot T_{i-1}) &= T_{il'} \cdot X_{il'} \cdot - T_{(i+k)l'} \cdot X_{(i-1)l'} \\
&= X_{i(n-l)} \cdot T_{i(n-l)} - X_{(i-1)(n-l)} \cdot T_{(i+k)(n-l)} \\
&= X_{n-il} \cdot T_{n-il} - X_{n-il+l} \cdot T_{n-il-kl} \\
&= X_{n-il} \cdot T_{n-il} - X_{(n-il)-(n-l)} \cdot T_{n-il-1} \\
&= X_{n-il} \cdot T_{n-il} - X_{(n-il)+l} \cdot T_{(n-il)-1}
\end{aligned}$$

que é um elemento de Q_l. ■

Observação 3.17 *Quando $k \geq [\frac{n}{2}]$, temos que Q_k é o ideal de definição da Álgebra Simétrica do ideal $(n,k)-$cíclico. Se, também, $l \geq [\frac{n}{2}]$, teremos que Q_l é o ideal de definição da Álgebra Simétrica do ideal $(n,l)-$cíclico. Neste caso δ induz um isomorfismo entre as Álgebras Simétricas.*

Corolário 3.18 *Se $k = \frac{n-1}{2}$ com n ímpar, então o ideal $(n,k)-$cíclico é de tipo linear. Além disso, sua álgebra simétrica é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Se $k = \frac{n-1}{2}$ com n ímpar, então $l = n-2$. Daí, como em ambos os casos $\{\sigma_{i(i+1)}, i = 1, \ldots, n\}$ é um conjunto de geradores do ideal de definição da álgebra simétrica, segue-se que o ideal $(n,k)-$cíclico, onde $k = \frac{n-1}{2}$ e n ímpar será de tipo linear. ■

O lema 3.16 nos permite, ainda, decidir mais alguns casos, onde $lk \equiv_n 1$ e l, $k \geq [\frac{n}{2}]$, conhecendo-se o resultado para k ou para l.

No que segue consideraremos a ordem monomial lexicográfica reversa definida à partir da ordem $X_n > \ldots > X_1 > T_n > \ldots > T_1$ sobre as variáveis. Desta forma, o termo líder de $g_i = X_{i+1} \cdot T_{i+1} - X_{i+k+1} \cdot T_i$ é $X_{i+1} \cdot T_{i+1}$ e o de $g_n = X_{k+1} \cdot T_n - X_1 \cdot T_1$ é $X_{k+1} \cdot T_n$

Proposição 3.19 *Seja $I \subset F[X_1, \ldots, X_n]$ ideal $(n,k)-$cíclico com $mdc(n,k) = r \neq 1$. Então I não é de tipo linear.*

Demonstração: Seja $\underline{X} = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$. Assim,

$\underline{X}^{\frac{k}{r}} = (X_1 \cdot \ldots \cdot X_k) \cdot (X_{k+1} \cdot \ldots \cdot X_{2k}) \cdot \ldots \cdot \left(X_{(\frac{n}{r}-1)k+1} \cdot \ldots \cdot X_{(\frac{n}{r})k}\right)$,

$\underline{X}^{\frac{k}{r}} = (X_2 \cdot \ldots \cdot X_{k+1}) \cdot (X_{k+2} \cdot \ldots \cdot X_{2k+1}) \cdot \ldots \cdot \left(X_{(\frac{n}{r}-1)k+2} \cdot \ldots \cdot X_n \cdot X_1\right)$

Então,

$$A = T_n \cdot T_k \cdot \ldots \cdot T_{(\frac{n}{r}-1)k} - T_1 \cdot T_{k+1} \cdot \ldots \cdot T_{(\frac{n}{r}-1)k+1} \cdot \ldots \cdot T_{(\frac{n}{r})k}$$

é uma relação da álgebra de Rees.

Observe que $tk \equiv sk + 1$ com $0 \leq t \leq (\frac{n}{r} - 1)$ e $0 \leq s \leq (\frac{n}{r} - 1)$, se, e somente se, $(t-s)k \equiv 1 \ (mod\ n)$. Mas, isso equivale a k ser invertível em $\mathbf{Z}_n$, o que não ocorre.

Obviamente, sendo A um polinômio sem variáveis X_i, não pertence ao ideal de definição da álgebra simétrica de I. ■

Proposição 0.1 *Sejam* $g_i := X_{i+1} \cdot T_{i+1} - X_{i+1+k} \cdot T_i$, $i = 1, \ldots, n-1$ *e* $g_n := X_{k+1} \cdot T_n - X_1 \cdot T_1$ *os geradores de* $Q \subset F[X_1, \ldots, X_n, T_1, \ldots, T_n]$, *ideal de definição da álgebra simétrica do ideal* I, $(n,k)-$*cíclico onde* $k \geq \left[\frac{n}{2}\right]$. *Sejam, também,* $R' = F[X_1, \ldots X_n, T_1, \ldots T_{n-1}]$,

$$Q' = \langle g_1, \ldots, g_{n-2} \rangle R' + \langle X_1 \cdot T_1 \rangle R' + \langle X_k \cdot T_{n-1} \rangle R',$$

$G = \{g_1, \ldots, g_{n-2}, X_1 T_1\}$ *e* $\mathcal{N} = \{N \in \langle g_1, \ldots, g_{n-2} \rangle + \langle X_k \cdot T_{n-1} \langle R' : N$ *é monômio e* $\exists\, j, 2 \leq j \leq n$ *com* $X_{j+k} \cdot T_{j-1} | N\}$. *Então* $G \cup \mathcal{N}$, *contém uma base de Gröbner de* $Q\prime$

Demonstração: Seja $B = G \cup \{X_k \cdot T_{n-1}\}$, um conjunto de geradores de Q'. Observamos que, se $f = g_i$, $h = g_j$ ou se $f, h \in \mathcal{N}$ então $S(f,g) \in \langle \mathcal{N} \rangle$. Agora, se $f \in N$ e $h = g_j$ temos $in(f) = f$ e $in(h) = X_{j+1} \cdot T_{j+1}$. Assim, podem ocorrer $mdc(in(f), in(h)) = 1$, X_{j+1}, T_{j+1}, ou $X_{j+1} \cdot T_{j+1}$.
Se $mdc(f, in(h)) = 1$, não há o que fazer.

Se $mdc(f, in(h)) = X_{j+1}$ então

$$\begin{aligned} S(f,h) = S(f, g_j) &= T_{j+1} f - \tfrac{f}{X_{j+1}} \cdot (X_{j+1} \cdot T_{j+1} - X_{j+k+1} \cdot T_j) = \\ &= X_{j+k+1} \cdot T_j \tfrac{f}{X_{j+1}} \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Analogamente, se $mdc(f, in(h)) = T_{j+1}$, $S(f,h) = X_{j+k+1} \cdot T_j \frac{f}{T_{j+1}} \in \mathcal{N}$.

Também, se $mdc(f, in(h)) = X_{j+1} \cdot T_{j+1}$,

$$S(f,h) = S(f, g_j) = X_{j+\cdot k+1} T_j \frac{f}{X_{j+1} \cdot T_{j+1}} \in \mathcal{N}.$$

$\blacksquare$

No que segue consideraremos a base de Gröbner B contida em $G \cup \mathcal{N}$.

Teorema 0.2 *Sejam* $I \subset R = F[X_1, \ldots, X_n]$ *ideal* $(n,k)-$*cíclico, com* $mdc(n,k) = 1$ *e* $\left[\frac{n}{2}\right] < k \leq n-3$. *Então* Q, *o ideal de definição da álgebra simétrica de* I, *não é primo.*

Demonstração: Consideremos

$$\begin{aligned} g_i &= X_{i+1} \cdot T_{i+1} - X_{i+1+k} \cdot T_i \qquad i = 1, \ldots, n-1 \ \text{ e} \\ g_n &= X_{k+1} \cdot T_n - X_1 \cdot T_1 \quad \text{os geradores de } Q. \end{aligned}$$

Definindo h_i por $h_1 = S(g_n, g_{n-1})$, e, para $i > 1$, $h_i = S(h_{i-1}, g_{n-i})$ temos $h_1 = X_k \cdot X_{k+1} \cdot T_{n-1} - X_1 \cdot X_n \cdot T_1$ e

$$h_i = \left(\prod_{w=k-(i-1)}^{k+1} X_w \right) T_{n-i} - X_1 \cdot \left(\prod_{v=n-i+1}^{n} X_v \right) \cdot T_1$$

Se $t(n-k) > k+1$, onde t é o quociente da divisão eucliana de n por $(n-k)$, isto é, $n = t(n-k) + a$ com $1 \leq a < n-k$, temos $n - a = t(n-k)$ e $k - a = (t-1)(n-k)$. Assim,

$$h_a = \left(\prod_{w=(t-1)(n-k)+1}^{k+1} X_w \right) \cdot T_{t(n-k)} - X_1 \cdot T_1 \left(\prod_{v=1}^{n-t(n-k)} X_{t(n-k)+v} \right).$$

Agora, se $m_1 = S(h_a, g_{(t-1)(n-k)})$, temos

$$m_1 = X_{(t-2)(n-k)+1} \cdot \left(\prod_{w=(t-1)(n-k)+2}^{k+1} X_w \right) T_{t(n-k)} \cdot T_{(t-1)(n-k)} -$$

$$-X_1 \left(\prod_{v=1}^{n-t(n-k)} X_{t(n-k)+v} \right) \cdot T_1 \cdot T_{(t-1)(n-k)+1}.$$

Enquanto $s \leq t-1$, definimos, $m_s = S(m_{s-1}, g_{(t-s+1)(n-k)})$. Assim,

$$m_s = X_{(t-s)(n-k)+1} \cdot \left(\prod_{w=(t-1)(n-k)+2}^{k+1} X_w \right) \cdot \left(\prod_{v=t-(s-1)}^{t} T_{v(n-k)} \right) -$$

$$-X_1 \left(\prod_{w=1}^{n-t(n-k)} X_{t(n-k)+w} \right) \cdot T_1 \cdot \left(\prod_{w=t-(s-1)}^{t-1} T_{w(n-k)+1} \right).$$

Como $(t-s)(n-k)+1 \equiv_n t(n-k) + sk + 1$, tomando $s = t-1$, temos,

$$m_{(t-1)} = X_{n-k+1} \cdot \left(\prod_{w=(t-1)(n-k)+2}^{k+1} X_w \right) \cdot \left(\prod_{q=2}^{t} T_{q(n-k)} \right) -$$

$$-X_1 \cdot \left(\prod_{w=1}^{n-t(n-k)} X_{t(n-k)+w} \right) \cdot T_1 \cdot \left(\prod_{w=2}^{t-1} T_{w(n-k)+1} \right).$$

Agora, se $S = S\left(g_{n-k}, m_{t-1}\right)$, temos que $S = X_1 \cdot U$, onde

$$U = \left(\prod_{w=(t-1)(n-k)+2}^{k+1} X_w\right) \cdot \left(\prod_{q=2}^{t} T_{q(n-k)}\right) -$$

$$- \left(\prod_{w=1}^{n-t(n-k)} X_{t(n-k)+w}\right) \cdot \left(\prod_{q=1}^{t-1} T_{q(n-k)+1}\right) \cdot T_1.$$

Como $2 \leq (t-1)(n-k)+2 \leq k+1 \leq n$ e $1 \leq q \leq t \leq n$, temos $(n-k) \leq q\,(n-k) \leq t\,(n-k) < n$.

Logo, T_n não divide nenhum dos termos de U .

Assim, se U pertencesse a Q deveria pertencer a Q' e, portanto, existiria $h \in G \cup \mathcal{N}$ com $in(h) \mid in(U)$.

Mas, $X_iT_i \mid in(U)$ se, e só se, $(t-1)(n-k)+2 \leq q(n-k) \leq k+1$ para algum q, $2 \leq q \leq t$.

No entanto, se $k+1 = (t-1(n-k)+w$ temos

$$\begin{aligned} w &\equiv_n (k+1)-(t-1)(n-k) \equiv_n -(n-k)+1-(t-1)(n-k) \equiv_n \\ &\equiv_n n-t(n-k)+1 \equiv_n n-t(n-k)+1 \equiv_n a+1 \end{aligned}$$

onde a é o resto da divisão euclidiana de n por $n-k$.

Assim, $k+1 = (t-1)(n-k)+a+1$, $1 \leq a < n-k$.

Logo, $X_iT_i \mid inH$ se, e somente se existe q, $2 \leq q \leq t$ com $(t-1)(n-k) <$ $< (t-1)(n-k)+2 \leq q(n-k) \leq (t-1)(n-k)+a+1 < t(n-k)$, o que, de fato, não ocorre.

Vejamos, agora, como proceder se $t(n-k) = k+1$.

Como antes, tomamos $h_1 = S(g_n, g_{n-1})$ e, para $i : 1 < i \leq b$, com $b \equiv_n n-t(n-k)-1$ e definimos $h_i = S(h_{i-1}, g_{n-i})$. Nestas condições,

$$k-b+1 \equiv_n (t-1)(n-k)+2 \quad \text{e} \quad n-b+1 \equiv_n t(n-k)+2$$

Assim,

$$h_b = \left(\prod_{w=(t-1)(n-k)+2}^{k+1} X_w\right) \cdot T_{k+2} - X_1 \left(\prod_{v=k+3}^{n} X_v\right) \cdot T_1.$$

Tomando $H_1 = S(h_b, g_{(t-1)(n-k)+1})$ e $H_j = S(H_{j-1}, g_{(t-j)(n-k)+1})$ para j tal que $j+1 \leq t$,

$$H_{t-1} = X_2 \cdot \left(\prod_{w=(t-1)(n-k)+3}^{k+1} X_w \right) \cdot T_{t(n-k)+1} \cdot \ldots \cdot T_{(n-k)+1} -$$

$$-X_1 \cdot \left(\prod_{v=k+3}^{n} X_v \right) \cdot T_1 \cdot T_{(t-1)(n-k)+2} \cdot \ldots \cdot T_{(n-k)+2}.$$

Lembrando que $g_{n-k} = X_{n-k+1} \cdot T_{n-k+1} - X_1 \cdot T_{n-k}$, $t \geq 2$ e considerando $A = S(H_{t-1}, g_{n-k})$, teremos,

$$A = X_1 \cdot X_2 \cdot \left(\prod_{w=(t-1)(n-k)+3}^{k+1} X_w \right) \cdot T_{t(n-k)+1} \cdot \ldots \cdot T_{2(n-k)+1} \cdot T_{n-k} -$$

$$-X_1 \cdot X_{n-k+1} \cdot \left(\prod_{v=k+3}^{n} X_v \right) \cdot T_1 \cdot T_{(t-1)(n-k)+2} \cdot \ldots \cdot T_{(n-k)+2}.$$

Agora, se $D = \frac{A}{X_1}$, D obviamente é um elemento de Q_∞. Como T_n não divide nenhum dos termos de D, se D pertencesse a Q, D pertenceria a Q'. Porém, considerando a base de Gröbner de Q' que pode ser obtida pela proposição 3.20 temos que D pertence a Q' se, e só se, existe $i = 1, \ldots, n-1$ tal que $X_i \cdot T_i \mid in(D)$ ou $X_{j+k} \cdot T_{j-1} \mid in(D)$ para algum $j = 2, \ldots, n$.

Mas, $X_i \mid in(D)$ se, e só se, $i = 2$ ou $i = (t-1)(n-k) + w$ com $3 \leq w \leq$ $\leq n-k$.

Portanto, $(t-1)(n-k) + 3 \leq (t-1)(n-k) + w \leq t(n-k)$.

Também, $T_i \mid in(D)$ se, e só se, $i = n-k$ ou $i = q(n-k) + 1$ com $q = 2, \ldots, t-1$.

Já que $t \geq 2$ e $n-k < (t-1)(n-k) + 1 < (t-1)(n-k) + 3 \leq$ $\leq (t-1)(n-k) + w \leq t(n-k) < t(n-k) + 1$, $q(n-k) + 1 \neq$ $\neq (t-1)(n-k) + w$, para todo $w, 3 \leq w \leq n-k$ e todo $q = 2, \ldots, t$.

Segue-se, daí, que $X_i T_i$ não divide $in(D)$.

Mais, $X_{j+k} \cdot T_{j-1} \mid in(D)$ se, e só se, $j - 1 = q(n-k) + 1$ para algum q, $2 \leq q \leq t$, ou $j - 1 \equiv_n n - k$. Mas, daí, $j + k \equiv (q-1)(n-k) + 2 < n$.

Assim, $2 < (n-k) + 2 \leq (q-1)(n-k) + 2 \leq (t-1)(n-k) + 2 <$ $< (t-1)(n-k) + 3$.

Logo, não ocorre $X_{j+k} T_{j-1} \mid in(D)$ para $j \equiv q(n-k) + 1$ com $2 \leq q \leq t$.

Resta-nos analisar se $j-1 \equiv_n n-k$. Mas, então, $j+k \equiv_n 1$. Portanto, também neste caso não temos $X_{j+k} \cdot T_{j-1} \mid in(D)$.

Pelo exposto, temos que $D \notin Q'$ e, então, $D \notin Q$. ■

Resumindo os resultados anteriores, se $I \subset R = F[X_1, \ldots, X_n]$ é o ideal cíclico de grau k, temos:

(1) se $k = n-1$, I é de tipo linear

(2) se n é ímpar e $k = n-2$ ou $k = \frac{n-1}{2}$ então I é de tipo linear

(3) se $mdc(k, n) = r \neq 1$ então I não é de tipo linear

(4) se $mdc(k, n) = 1$ e $\left[\frac{n}{2}\right] < k \leq n-3$ então I não é de tipo linear.

Conforme observamos anteriormente, se I é o ideal cíclico de grau k, com $k < \frac{n}{2}$, ainda assim $\sigma_{i(i+1)}$ gerarão parte das sizígias de I (aquelas para as quais $supp(M_i) \cap supp(M_j) \neq \emptyset$). Se $\overline{\alpha}$ é a matriz da apresentação de I, $\overline{\alpha} = \left[\alpha \vdots \gamma\right]$ onde α é a submatriz com entradas lineares e γ é uma submatriz cujas entradas são os $M_i's$.

Assim, se Q é o ideal de definição da álgebra simétrica do ideal cíclico de grau k, $Q = \langle Q_1, Q_k \rangle$, onde Q_1 denota os geradores correspondente a α e Q_k os geradores correspondentes a γ. Portanto, todo elemento de Q que tenha grau um nas variáveis $X_j's$ deve pertencer a $Q_1 R$.

Com estas observações estamos aptos a analisar o que ocorre se $k < \left[\frac{n}{2}\right]$, $mdc(n, k) = 1$, e l é tal que $lk \equiv_n 1$, $\left[\frac{n}{2}\right] < l \leq n$.

Proposição 3.22 *Seja $I \subset R = F[X_1, \ldots, X_n]$ ideal cíclico de grau k, com $mdc(n, k) = 1$ e $k < \frac{n}{2}$. Se l é tal que $lk \equiv_n 1$ e $1 \leq l < \frac{n}{2}$, então I não é de tipo linear.*

Para demonstrá-la, utilizaremos o lema a seguir cuja demonstração é análoga a da proposição 3.20.

Lema 3.23 *Sejam $g_i := X_{i+1} \cdot T_{i+1} - X_{i+1+k} \cdot T_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $g_n := X_{k+1} \cdot T_n - X_1 \cdot T_1$, $R' = R[T_2, \ldots, T_n]$ e $Q'' = \langle g_2, \ldots, g_{n-1} \rangle R' + \langle X_{k+1} \cdot T_n, X_2 \cdot T_2 \rangle R'$. Sejam, também, $G = \{g_2, \ldots, g_{n-1}, X_2 T_2\}$ e $\mathcal{N} = \{N \in \langle g_2, \ldots, g_{n-1} \rangle + \langle X_{k+1} \cdot T_n \rangle R' \mid N$ monômio e $\exists j, 2 \leq j \leq n$ com $X_{k+j+1} \cdot T_j \mid N\}$. Então, $S(f, h) \in G \cup \mathcal{N}$, para todo par (f, h) de $G \cup \mathcal{N}$.*

Vejamos, então, a demonstração da proposição 3.22:

Demonstração: Sejam, como antes, $g_i := X_{i+1} \cdot T_{i+1} - X_{i+1+k} \cdot T_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $g_n := X_{k+1} \cdot T_n - X_1 \cdot T_1$ e definamos h_i recursivamente por: $h_1 = S(g_n, g_k)$, $h_2 = S(h_1, g_{2k}), \ldots, h_s = S(h_{s-1}, g_{sk})$.

Como $lk \equiv_n 1$ segue-se
$h_{(l-1)} = X_2 \cdot T_n \cdot T_k \cdot \ldots \cdot T_{(l-1)k} - X_1 \cdot T_1 \cdot T_{k+1} \cdot \ldots \cdot T_{(l-1)k+1}$.

Então, $S(h_{l-1}, g_1) = T_1 A$, onde A é dado por

$$A = X_{2+k} \cdot T_n \cdot T_k \cdot \ldots \cdot T_{(l-1)k} - X_1 \cdot T_{k+1} \cdot \ldots \cdot T_{(l-1)k+1} \cdot T_2.$$

Como A é linear nas variáveis $X_j's$ temos que se A pertencesse a Q então $B \in Q_1 R$. Também, T_1 não divide os termos de A, então, se $A \in Q_1 R$, $A \in Q''$. Mas, daí,

$2 + k \equiv_n bk$ com $1 \le b \le (l-1)$, ou

$(j + 1 \equiv_n 2$ ou $j \equiv_n mk + 1)$ com $1 \le m \le l - 1$.

Vejamos: se $2 \equiv_n (b-1)k$ com $0 \le b - 1 \le l - 2, b - 1 = 2l$.

Já que $l < \frac{n}{2}$ nos dá $2l < n$ teremos $b = 2l + 1$ (absurdo!).

Também de $j + 1 \equiv_n 2$ segue-se $j = 1$ e T_1 não divide $in(A)$.

Se $j = 1$, como $1 \le m < l - 1$, segue-se $1 \le mk \le (l-1)k \le n$.

Daí, $j = mk + 1 \ge 2$, donde podemos concluir que $X_{j+k+1} \cdot T_j$ não divide $in(A)$ em qualquer caso.

Logo, se I é (n,k)−cíclico, $mdc(n,k) = 1$ e $lk = 1$ com $k < \frac{n}{2}$ e $l < \frac{n}{2}$, I não é de tipo linear. ■

Para completar o estudo dos ideais cíclicos falta analisar um único caso, a saber, $mdc(n,k) = 1$, $lk \equiv_n 1$ e $k < \frac{n}{2}$ com $\frac{n}{2} < l < n$

Nestes casos há fortes indícios de que os ideais cíclicos sejam de tipo linear. Testes realizados usando o Software Macaulay apontam para isso. Também, se n é ímpar e $k = 2$, estamos no caso de ideais de grafos e o resultado é conhecido em [14]. Além disso, se $k = \frac{n-1}{2}$ o corolário 3.18 nos dá que o ideal cíclico também é de tipo linear, neste caso.

Com estes resultados, usando ainda o corolário 1.4.2 de [13], temos que, nos casos estudados, a algebra simétrica do ideal (n,k)−cíclico só é Cohen-Macaulay para $k = n-1$ ou se n for ímpar e ($k = n-2$, ou $k = \frac{n-1}{2}$ ou $k = 2$.

Apêndice

Anéis de Cohen-Macaulay

Seja M um R-módulo. Dizemos que $x \in R$ um elemento M-regular se $xz = 0$ nos dá $z = 0$ para todo $z \in M$, ou seja, se x não for um divisor de zero sobre M.

Definição A.1. *Uma sequência* $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ *de elementos de* R *é chamada de sequência* M*-regular, ou simplesmente* M*-sequência se* x_i *for um elemento* $\frac{M}{(x_1,\ldots,x_{i-1})M}$*-regular para* $i = 1, \ldots, n$ *e* $\frac{M}{\mathbf{x}M} \neq 0$.

Sejam, agora, R um anel noetheriano, M um R-módulo finitamente gerado e I um ideal de R com $IM \neq M$. Se $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ é uma M-sequência com $x_i \in I$, então a sequência $(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \ldots \subset (x_1, \ldots, x_n)$ é estritamente crescente. Sendo R noetheriano, esta sequência pode ser estendida a uma M-sequência maximal em I. Mas temos o seguinte resultado a respeito de sequências maximais:

Teorema A.2. *Sejam* R *anel noetheriano,* M R*-módulo finitamente gerado e* I *um ideal de* R *com* $IM \neq M$*. Então, todas as* M*-sequências maximais em* I *possuem o mesmo comprimento* n *dado por*

$$n = min\{i : Ext^i{}_R(\frac{R}{I}, M) \neq 0\}$$

Com este resultado faz sentido a seguinte definição:

Definição A.3. *Sejam* R *anel noetheriano,* M *um* R*-módulo finitamente gerado e* I *um ideal de* R *tal que* $IM \neq M$*. então o comprimento comum de todas as* M*-sequências maximais e* I *é chamado de* I*-profundidade e denotado por* $prof_I(M)$*. Caso* $IM = M$ *dizemos que* $prof_I(M)$ *é infinita.*

Uma situação especial que ocorre com frequência é a seguinte:

Definição A.4. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local e noetheriano e* $M \neq 0$ *um* R*-módulo finitamente gerado. Então* $prof_{\mathfrak{m}}(M)$ *é chamado simplesmente de profundidade de* M *e é denotado por* $prof\,(M)$.

As M-sequências e profundidade são objetos algébricos importantes.

Uma propriedade interessante pode ser vista em [1], 1.2.12:

Proposição A.5. *Sejam* $(R, \mathfrak{m})$ *um anel local noetheriano e* $M \neq 0$ *um* R*-módulo finitamente gerado. Então toda* M*-sequência faz parte de um sistema de parâmetros de* M*. Em particular,*

$$prof\,(M) \leq dim\, M$$

.

Recordamos que uma sequência $x_1, \ldots, x_s$ de elementos de R é um sistema de parâmetros de M se s é o menor inteiro tal que $sup\left(\frac{M}{(x_1,\ldots,x_s)M}\right) =$ $= \{\mathfrak{m}\}$ e $dim\ M = dim\ \left(\frac{M}{(0:M)}\right)$, onde $sup\ N := \{P \in Spec\ R | N_P \neq 0\}$, para um R-módulo N qualquer.

Definição A.6. *Seja* $(R,\mathfrak{m})$ *um anel noetheriano local. Um* R*-módulo finitamente gerado* M *é de Cohen-Macaulay se* $prof\,(M) = dim\, M$. *Se* R *for um Módulo de Cohen-Macaulay sobre si mesmo, dizemos que é um anel de Cohen-Macaulay. Mais geralmente, se* R *for um anel noetheriano então um* R*-módulo* M *é de Cohen-Macaulay se* $M_{\mathfrak{m}}$ *for Cohen-Macaulay para todo ideal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* R *em* $sup\ M$*. Como no caso local,* R *é um anel de Cohen-Macaulay se o for como* R*-módulo.*

Anel de Stanley-Reisner

Definição A.7. *Seja* V *um conjunto finito. Um complexo simplicial* $\triangle$ *sobre* V *é uma família de subconjuntos de* V *tal que:*
(a) $\{v\} \in \triangle$ *para todo* $v \in V$,
(b) se $H \in \triangle$ *e* $G \subseteq H$, *então* $G \in \triangle$.

Os elementos de V são chamados vértices de $\triangle$. Os elementos de $\triangle$ são chamados faces e as faces que são maximais em relação à inclusão são chamadas facetas. Observe que ϕ é uma face de qualquer complexo simplicial e um complexo simplicial é determinado por suas facetas.

Definição A.8. *A dimensão de uma face H de um complexo simplicial $\triangle$ é*

$$dim\ H = |H| - 1.$$

A dimensão de $\triangle$ é $dim\,\triangle = max\ \{dim\ H : H \in \triangle\}$. A dimensão da face ϕ é definida como sendo -1.

Definição A.9. *Seja F um anel e $\triangle$ um complexo simplicial sobre $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. O anel de Stanley-Reisner associado a $\triangle$ com relação a F é a F-álgebra $F[\triangle] := \frac{F[X_1,\ldots,X_n]}{I_\triangle}$, onde $I_\triangle$ é o ideal gerado pelos monômios $X_{a_1} \cdot \ldots \cdot X_{a_p}$ tais que $\{v_{a_1}, \ldots, v_{a_p}\} \notin \triangle$.*

Apesar da definição de anel de Stanley-Reisner ser feita sobre um anel qualquer, os casos mais importantes ocorrem quando F é um corpo.

Observamos que $I_\triangle$ é gerado por monômios livres de quadrados. Também, se $I = (X_1, \ldots, X_n)^2$ for um ideal gerado por monômios livres de quadrados, então $\frac{F[X_1,\ldots,X_n]}{I} \cong F[\triangle]$ para algum complexo simplicial $\triangle$.

A dimensão de um complexo simplicial pode ser facilmente determinada a partir de suas facetas:

Seja $\triangle$ um complexo simplicial e F um corpo. Então $I_\triangle = \bigcup \mathcal{P}_H$, onde a intersecção é tomada sobre todas as facetas H de $\triangle$ e $\mathcal{P}_H$ denota o ideal (primo) gerado por todos os X_i tais que $v_i \notin H$. Em particular,

Proposição A.10. [[1], Corolário 3.6.6] *Se $\triangle$ é um complexo simplicial vale $dim\ F[\triangle] = dim\,\triangle + 1$.*

Bases de Gröbner

No que segue R denotará o anel de polinômios $F[X_1, \ldots, X_n]$ onde F é um corpo. Além disso, a menos de menção explícita em contrário L denotará um módulo livre finitamente gerado com base $\{e_i\}$.

Definição A.11. *Dado $\mathrm{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{N}^n$, um monômio de R é um elemento da forma $\mathbf{X}^{\mathrm{a}} = X_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{a_n}$, e um termo de R é um mônomio* *multiplicado por um escalar. Um ideal gerado por monômios será chamado um ideal monomial.*

Definição A.12. *Um monônio em L é um elemento da forma $m = \mathbf{X}^{\mathbf{a}} \cdot e_i$ para algum i. Neste caso diremos que m envolve o elemento básico e_i.*

Definição A.13. *Um submódulo monomial de L é um submódulo gerado por monômios de L.*

Observação A.14. *Todo submódulo monomial M de L pode ser escrito da seguinte forma*

$$M = \bigoplus I_j \cdot e_j \subset \bigoplus R \cdot e_j = L,$$

com I_j ideal gerado pelos monômios m tais que $m \cdot e_j \in M$.

Definição A.15. *Um termo em L é um monômio multiplicado por um escalar.*

Observação A.16. *Como os monômios formam uma base para o espaço vetorial L, todo elemento f de L pode ser expresso de maneira única como uma soma finita de termos envolvendo monômios distintos, que são chamados os monômios de f.*

Observação A.17. *Todas as definições anteriores dependem de uma base escolhida $\{e_i\}$ para L. Sempre que possível, suprimiremos a base $\{e_i\}$ de nossa notação e falaremos de L como um módulo livre com base.*

Definição A.18. *Seja L um R-módulo livre com base. Uma ordem monomial sobre L é uma ordem total $>$ sobre os monômios de L tais que se m_1 e m_2 são monômios de L e $n \neq 1$ é um monômio em R então $m_1 > m_2$ implica em $nm_1 > nm_2$.*

Lembrando que estamos supondo L finitamente gerado, a segunda das desigualdades acima tem uma conseqüência extremamente útil:

Lema A.19. [4],Lemma 15.2 *Seja L um R-módulo com base. Toda ordem monomial sobre L é Artiniana, isto é, todo subconjunto não vazio possui um menor elemento.*

Podemos estender a noção de ordem monomial aos termos da seguinte forma:

Definição A.20. *Se* um *e* vn *são termos de* R *com* $u, v \in F \setminus \{0\}$ *e* m, n *monômios com* $m > n$ *(respectivamente* $m \geq n$*), diremos que* $um > vn$ *(respectivamente* $um \geq vn$*). Note que não temos uma ordem parcial sobre os termos já que para todo* $u \neq v$ *temos* $um \geq vm$ *e* $vm \geq um$.

Definição A.21. *Se* $>$ *é uma ordem monomial definida sobre* L*, então para todo* $f \in L$ *definimos o termo inicial de* f*, denotado por* $in_>(f)$*, como sendo o maior termo de* f *com relação à ordem* $>$ *e, se* $M \subset L$ *é um submódulo, definimos* $in_>(M)$ *como sendo o submódulo monomial gerado pelos elementos* $in_>(f)$ *para todo* $f \in M$.

Observação A.22. *Quando não houver perigo de confusão escreveremos*
simplesmente in *no lugar de* $in_>$.

Observação A.23. *Observe que se* $p \in R$ *,* $f \in L$ *e denotamos por* n *o (único) termo de* p *tal que* $n\ in(f)$ *é o maior, então* $in(pf) = n\ in(f)$.

Teorema A.24. [[4], Theorem 15.3 - Macaulay] *Sejam* L *um* R*-módulo livre com base, e* M *um submódulo de* L*. Para toda ordem monomial* $>$ *sobre* L*, o conjunto* B *de todos os monômios que não pertencem a* $in_>(M)$ *forma uma base para* F/M.

Definição A.25. *Sejam* L *um* $R-$*módulo livre com base e ordem monomial* $>$ *. Seja* M *um submódulo de* L*. Um subconjunto finito* H *de* L *é chamado uma base de Gröbner para* M*, com relação à ordem* $>$*, se* H *gera* M *e* $in_>M$ *é gerado por* $\{in(f) : f \in H\}$.

Observamos que, em geral, um conjunto de geradores não é uma base de Gröbner.

Exemplo A.26. *Considere* I *o ideal gerado pelos monômios* $f_1 = X_1X_3 + X_2X_4$ *e* $f_2 = X_1X_4 + X_2X_3$ *em* $F[X_1, X_2, X_3, X_4]$*. Com relação à ordem lexicográfica, definida a partir da seguinte ordem sobre as variáveis* $X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq X_4$*, tem-se* $in(f_1) = X_1X_3$ *e* $in(f_2) = X_1X_4$*. O polinômio* $g = X_4 \cdot f_1 - X_3 \cdot f_2 \in I$ *e seu termo líder é* $X_2 \cdot X_3^2$*. No entanto* $X_2X_3^2 \notin (X_1 \cdot X_4,\ X_1 \cdot X_3)$ *e, portanto,* $\{f_1, f_2\}$ *não é uma base de Gröbner com relação à ordem lexicográfica.*

Proposição A.27. *Sejam* $R = F[X_1, \ldots, X_n]$ *e* L *um* R*-módulo livre com base e ordem monomial* $>$ *. Se* $f, g_1, \ldots, g_t \in L$ *então existem* $f_1, \ldots, f_t$

em R *tais que*

$$f = \sum_{i=1}^{t} f_i \cdot g_i + f'$$

com $f' \in L$*, nenhum dos monômios de* f' *pertence a* $(in(g_1), \ldots, in(g_t))$ *e* $in(f) \geq in(f_i \cdot g_i)$ *para todo* $i = 1, \ldots, t$.

Observação A.28. *Por conveniência, nas condições da proposição anterior,*

$$f = \sum_{i=1}^{t} f_i \cdot g_i + f'$$

satisfazendo as condições da proposição é chamada expressão padrão para f *em termos dos* $g_i's$ *e* f' *é chamado resto de* f *com relação a* $g_1, \ldots, g_t$*. Para obtê-lo temos a seguinte versão algorítmica da última proposição:*

Teorema A.28. (Algoritmo da divisão) *Seja* L *um* R*-módulo livre com base e uma ordem monomial fixa. Se* $f, g_1, \ldots, g_t \in L$ *então podemos produzir a expressão padrão para* f *com relação aos* $g_i's$

$$f = \sum m_u \cdot g_{s_u} + f'$$

definindo os índices s_u *e os termos* m_u *indutivamente da seguinte forma: tendo escolhido* $s_1, \ldots, s_p$ *e* $m_1, \ldots, m_p$*, se*

$$f'_p := f - \sum_{u=1}^{p} m_u \cdot g_{s_u} \neq 0$$

e m *é o maior termo de* f'_p *que é divisível por algum* $in(g_i)$*, escolhemos*

$$s_{p+1} = i$$
$$m_{p+1} = \frac{m}{in(g_i)}.$$

Esse processo termina quando $f'_p = 0$ *ou nenhum* $in(g_i)$ *divide um termo de* f'_p*; o resto* f' *é, então, o último* f'_p *produzido.*

Observação A.29. *Observe que não temos , necessariamente uma única expressão padrão para uma dada* f *em termos dos* $g_i's$*. Algumas vezes, entretanto, é útil termos um algorítmo da divisão determinado e podemos fazê-lo especificando (por exemplo) que a cada passo tomamos* m *o maior* *termo de f'_p que é divisível por algum $in(g_i)$ e s_{p+1} o menor índice para o qual tal divisão é possível. Desta forma o algorítmo da divisão nos dá um expressão padrão única.*

O algoritmo da divisão nos dá uma forma de obter bases de Gröbner e sizígias, como veremos a seguir:

Sejam $R = F[X_1, \ldots, X_n]$, L um R-módulo livre com base $\{e_i\}$ e ordem monomial $>$, M o $R-$ submódulo de L gerado pelos elementos $g_1, \ldots, g_t$ de L e

$$\varphi : \bigoplus R \cdot e_i \to M, \qquad \varphi(e_i) = g_i.$$

Para cada par de índices i, j tal que $in(g_i)$ e $in(g_j)$ envolvem o mesmo elemento básico de L, definimos

$$m_{ij} = \frac{in(g_i)}{mdc\,(in(g_i),\ in(g_j))} \in R$$

e seja

$$\sigma_{ij} = m_{ji} \cdot e_i - m_{ij} \cdot e_j.$$

Lema A.30. (das sizígias) *Com as notações do parágrafo anterior,* $\ker\varphi$ *é gerado pelos* σ_{ij}.

Agora, para cada par i, j escolhemos a expressão padrão

$$S\,(g_i, g_j) = m_{ij} \cdot g_i - m_{ji} \cdot g_j = \sum f_u^{(ij)} \cdot g_u + h_{ij}$$

para $m_{ji} \cdot g_i - m_{ij} \cdot g_j$ com relação a $g_1, \ldots, g_t$. h_{ij} assim obtido é chamado o resto de $m_{ji} \cdot g_i - m_{ij} \cdot g_j$ com relação a $g_1, \ldots, g_t$. Para $in(g_i)$ e $in(g_j)$ envolvendo elementos básicos distintos de L, indicaremos $h_{ij} = 0$.

Com esta notação temos:

Teorema A.31. (Critério de Buchberger) *Os elementos $g_1, ..., g_t$ formam uma base de Gröbner se, e somente se $h_{ij} = 0$ para todo i e j.*

Deste teorema temos um método efetivo para obter bases de Gröbner e sizígias, o chamado

Algoritmo de Buchberger

Com a mesma notação anterior, suponha que M é com sub-módulo de L, e sejam $g_1, \ldots, g_t \in M$ um conjunto de geradores de M. Obtenha os restos h_{ij}. Se todo $h_{ij} = 0$ então $g_1, \ldots, g_t$ forma uma base de Gröbner para M. Se algum $h_{ij} \neq 0$, então troque $g_1, \ldots, g_t$ por $g_1, \ldots, g_t, h_{ij}$ e repita o processo. Como o submódulo gerado por $in(g_1), \ldots, in(g_t), in(h_{ij})$ contém, estritamente, o submódulo gerado por $in(g_1), \ldots, in(g_t)$ este processo deve terminar após um número finito de passos.

Bibliografia

[1] W. Bruns and J. Herzog - Cohen-Macaulay Rings - Cambridge University Press, Cambridge, U. K.(1993).

[2] A. Conca and E. De Negri, M-sequences, graphs ideals and ladder ideals of linear type - preprint.

[3] A. Conca, J. Herzog and G. Valla, Sagbi bases with applications to blow-up algebras, J. Reine Angew. Math. 474 (1996), 113-138

[4] D.Eisenbud-Commutative algebra with a wiew toward algebraic geometry - Springer-Verlag New York, Inc. (1994).

[5] D. Eisenbud & b. Stumfels, Binomial Ideals- Duke Math. J. 84 (1996), 1-45

[6] C. Huneke, On the Symmetric Algebra of a Module, J. Algebra 69 (1981), 113 - 119

[7] C. Huneke and M. E. Rossi, The Dimension and Componentes of Symmetric Algebras, J. Algebra 98 (1986), 200 - 210.

[8] A. Micali, Sur les algebres universalles, Annales Inst. Fourier 14 (1964), 33 - 88.

[9] A. Simis and W.V. Vasconcelos, On the dimension and a integrality of symmetric algebras, Math. Z. 177 (1981), 341 - 358.

[10] A. Simis and W. V. Vasconcelos, Krull dimension and integrality of symmetric algebras, Manuscripta Math 61 (1988), 63 - 78.

[11] A. Simis, W. V Vasconcelos and R. Villarreal, On the Ideal Theory of Graphs, J. Algebra 167 (1994), 389 - 416.

[12] W. V. Vasconcelos, Symmetric Algebras, in Commutative Algebra, Proceeding, Salvador 1988 (W. Bruns and A. Simis, Eds), Lecture Notas in Mathematics 1430, Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1990), 115 - 160.

[13] W. V. Vasconcelos, Arithmetic of Blowup Algebras - London Mathematical Society - Lectures Notes Series 195 - Cambrige University Prees (1994).

[14] R. Villarreal, Cohen-Macauly graphs, Manuscripta Math. 66 (1990), 277 - 293.