Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática e Estatística

Departamento de Matemática pura

Torneios Normais

Tese de mestrado - área de Topologia

autor : Alexandre Casassola Gonçalves
orientador : José Carlos de Sousa Kiihl

Campinas , 28 de fevereiro de 1997 .

Torneios Normais

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Alexandre Casassola Gonçalves e aprovada pela Comissão Julgadora .

Campinas , 28 de fevereiro de 1997 .

Prof. Dr. ____________________
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática , Estatística e Computação Científica , UNICAMP , como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática .

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 28 de fevereiro de 1997

pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Claudina Izepe Rodrigues

Prof (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES

Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

Prof (a). Dr (a). JOSÉ CARLOS DE SOUZA KIIHL

Como não poderia deixar de ser ,
agradeço ao meu pai e à minha mãe ,

aos amigos , porque me ajudaram conscientes disso ,
aos inimigos , porque me ajudaram sem o saber ,
aos indiferentes , porque fizeram número ,
matéria-prima no trabalho dos matemáticos

e ao pessoal de Piatã e Boninal , que por terem sido mal
esquecidas , um dia serão bem lembradas .

Índice

Introdução

A Teoria de Homotopia Regular de Grafos , que foi desenvolvida por Davide C. Demaria nos anos 70 e 80 (veja [1]) deu origem a diversos invariantes que se demonstraram muito úteis para atacar problemas de caracterização estrutural de certas famílias de digrafos , especialmente no caso de torneios .

Estes invariantes são combinatórios e portanto podem ser perfeitamente utilizados neste contexto . Em particular , surgem desta nova teoria conceitos como : ciclos projetados e não projetados , ciclos minimais , ciclos característicos , etc . Com tais conceitos , M. Burzio e D. C. Demaria , em [2] (veja também [3]) apresentaram uma classificação para os torneios hamiltonianos , introduzindo as noções de ciclo característico , característica cíclica e diferença característica .

Um caso extremo nessa classificação ocorre quando o torneio hamiltoniano H_n admite um único ciclo minimal (que neste caso é o característico) . Estes torneios constituem os torneios normais , que foram estudados por D. C. Dmaria e G. M. Gianella em [4] . Nesse trabalho eles apresentam a caracterização estrutural dos torneios normais , em termos das relações de adjacência entre os polos (vértices neutros) e os vértices do único ciclo minimal (vértices não neutros) . Essa caracterização permite que obtenhamos a enumeração desta família de torneios .

Nessa nossa dissertação , apresentamos detalhadamente o trabalho de Demaria e Gianella .

No capítulo 1 , apenas definimos e desenvolvemos algumas idéias essenciais na teoria dos digrafos , como os conceitos de torneio e torneio hamiltoniano , homomorfismos e quocientes de torneios . Também demonstramos a existência de no mínimo 2 vértices neutros em um torneio hamiltoniano genérico com ordem maior que três (veja [2] e [3]) .

No capítulo 2 , definimos os torneios normais e apresentamos um dos resultados fundamentais na caracterização destes torneios , o qual mostra ser um único subtorneio minimal necessariamente um bineutral A_k .

No capítulo 3 caracterizamos totalmente os torneios normais , especificando a estrutura dos vértices não neutros (que formam um bineutral) assim como a dos polos , na forma mais geral possível . Também considerando as possibilidades de adjacências entre polos e subtorneio minimal , podemos facilmente deduzir as condições de isomorfismo entre torneios normais , o primeiro fato relevante quando se procura enumerá-los .

No capítulo 4 , finalmente , desenvolvemos os conceitos combinatórios pertinentes e procedemos à enumeração dos torneios normais . Devido à complexidade dos algoritmos envolvidos , limitamo-nos a construir uma tabela contabilizando o número de não-isomorfos torneios apenas nas ordens mais baixas . Também exibimos fórmulas para este cálculo quando a característica cíclica é pequena , ou seja , quando a ordem dos polos é menor que 7 .

Destacamos que esta família de torneios tem se demonstrado muito importante para a caracterização de outras famílias de torneios hamiltonianos , como por exemplo aqueles que possuem um único ciclo hamiltoniano máximo (veja [5]) .

A caracterização apresentada aqui foi essencial para a obtenção de resultados positivos quanto ao problema da reconstrução de torneios (veja [6]) .

Capítulo 1

Torneios Hamiltonianos

Introduzimos aqui as definições preliminares na teoria de grafos . Lembramos que tais definições não são universais , e em certo aspecto , eliciam alguma confusão , pois o que é grafo para um autor , para outro é digrafo e um terceiro chama multigrafo . Contudo , as definições apresentadas são satisfatoriamente objetivas para o propósito do texto , e podem ser encontradas em [7] .

Definições 1.1) Um **Grafo** consiste numa dupla (V,A) , onde V é um conjunto finito não vazio e A é uma família finita de pares não ordenados de V . Chamando G o grafo em questão , temos G = (V,A) , V = V(G) é o conjunto dos vértices e A = A(G) é a família das arestas . Se $\alpha \in A$, α está associada a dois vértices (não necessariamente distintos) u , v $\in$ V , e dizemos que α liga u e v . Em alguns casos , por abuso de linguagem , consideramos G = V mas sempre subentendendo as arestas A .

Portanto , um grafo se caracteriza por uma estrutura finita de pontos na maneira como se ligam estes pontos . Se mantivermos a definição acima alterando uma característica de A , ou melhor , considerando A como uma família finita de pares *ordenados* de V , obtemos uma estrutura um pouco mais rica , a qual denominamos **Digrafo** .

Em ambos os casos acima definidos são permitidas arestas distintas associadas ao mesmo par de vértices , distintos ou não . Fazendo apenas a restrição de exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos (no digrafo) chegamos então ao torneio .

Um **Torneio** é uma dupla (V,A) , com V conjunto finito não vazio , $A \subset V\text{x}V$ um subconjunto que não intercepta a diagonal , e com a seguinte propriedade : dados a , b $\in$ V com $a \neq b$, então ou $(a,b) \in A$ ou $(b,a) \in A$ (exclusivamente) . Assim , um torneio é um digrafo aonde não se permitem laços (um vértice ligado a ele mesmo) nem arestas múltiplas , mas exige-se exatamente uma aresta entre dois vértices distintos .

A ordem de um torneio é o número de seus vértices . Em geral , designamos T_n um torneio de ordem n , e denotamos $|T_n| = n$. Quando $(a,b) \in A$ dizemos a precede b , denotamos $a \to b$, e quando contrário , a sucede b , denotamos $a \leftarrow b$.

Um **homomorfismo** entre os torneios T_n e T_k' é uma função $f : T_n \to T_k'$ tal que se a , b $\in T_n$, com $a \to b$, então , ou $f(a) = f(b)$, ou $f(a) \to f(b)$. Um **epimorfismo** é um homomorfismo sobrejetor , um **isomorfismo** é um homomorfismo bijetor .

Um **caminho** é uma sequência de vértices de um torneio da forma $a_1 \to a_2 \to a_3 \to \ldots \to a_k$, tal que se $i \neq j$, $a_i \neq a_j$ e para todo i , $1 \leq i \leq k-1$, $a_i \to a_{i+1}$. Um

ciclo é um caminho fechado , ou seja , com a notação acima , teríamos $a_k \to a_1$. Neste caso , consideramos dois ciclos iguais se passarem pelos mesmos vértices e na mesma sequência , a menos de rotação dos índices . Um caminho L que passe por todos os vértices de um torneio é um caminho hamiltoniano . Um torneio será **hamiltoniano** se houver um ciclo por todos os seus vértices , sendo genericamente designado H_n , n sua ordem .

Se T= (V,A) é torneio e $V' \subset V$, o torneio dado por T' = (V', A') onde A' são as relações induzidas de A , é chamado subtorneio de T induzido por V' , também denotado T' = [V'] . Observe que A' é o maior subconjunto de A para o qual a definição de T' faz sentido .

Dado um epimorfismo entre dois torneios , $f : T_n \to R_k$, f define uma partição com k classes sobre T_n . Se $V(R_k) = \{ a_1 , ..., a_k \}$, chamo $U_i = f^{-1}(a_i)$. Se para algum i , j , $a_i \to a_j$, temos $w \to z$ para todo $w \in U_i$ e $z \in U_j$. Neste caso , existe uma relação bem definida entre estes dois conjuntos , e podemos escrever $U_i \to U_j$. Podemos também escrever $T_n = R_k (U_1 , U_2 , ... , U_k)$, onde cada U_i substitui o vértice a_i original . R_k é então um **quociente** de T_n . Observe que se escolhermos k vértices de T_n , sejam $\{p_1 , p_2 , ... , p_k \}$, com $p_i \in U_i$ para todo $1 \le i \le k$, o subtorneio de T_n gerado por esses vértices será isomorfo a R_k pela restrição de f .

Se $T' \subset T$ é um subtorneio , e $v \in V(T) - V(T')$, dizemos que v projeta T' se $v \to T'$ ou $v \leftarrow T'$. Analogamente para um ciclo .

Dado um torneio hamiltoniano H_n , e $v \in V(H_n)$, dizemos que v é **vértice neutro** de H_n quando $[H_n - v]$ for hamiltoniano . Indicamos $\nu(H_n)$ o número de vértices neutros de H_n .

Um torneio T_n com n > 1 é dito **simples** quando seus únicos quocientes são ele próprio e o torneio T_1 formado por um único vértice .

Os resultados a seguir , conquanto sejam pré-requisitos à teoria dos torneios normais , e estejam quase todos nas referências , são apresentados para que o leitor tenha uma idéia do gênero das demonstrações na teoria de grafos diretos .

Proposição 1.1) Todo torneio T_n , n > 1 , admite um quociente simples .
Se T_n for simples , nada há para demonstrar . Se não , existe k , 1 < k < n , e um epimorfismo $f : T_n \to T_k$. Se T_k for simples , está demonstrado . Se não , encontramos s , 1 < s < k e um epimorfismo $g : T_k \to T_s$. Não é difícil ver que a composta de g com f é um epimorfismo de T_n sobre T_s .Repetimos o mesmo argumento para T_s , obtendo , se necessário , m com 1 < m < s e um torneio T_m em condições análogas . Como tal procedimento só tem chance de acabar num torneio simples , concluímos que este torneio (que é um quociente simples de T_n) existe , pois o processo tem no máximo n-1 etapas □

Teorema 1.2) Todo torneio T_n admite exatamente um quociente simples . Se T_k' é esse quociente simples e $p_s : T_n \to T_s''$ é um epimorfismo sobre outro torneio T_s'' , então T_k' é quociente simples de T_s'' também .

demonstração : sendo $p_k : T_n \to T_k'$ um epimorfismo sobre algum quociente simples T_k' . Seja U_k e U_s os conjuntos das partições associadas a p_k e p_s respectivamente . Coloco $T_k' = T_k' (u_1 , u_2 , ... , u_k)$ e $T_s'' = T_s'' (v_1 , v_2 , ..., v_s)$, $\alpha_j = p_k^{-1}(u_j)$, $\beta_i = p_s^{-1}(v_i)$, para j e i satisfazendo $1 \le j \le k$, $1 \le i \le s$.

Afirmo que se existem índices $t \ne r$ e i com $\beta_i \cap \alpha_t \ne \phi$ e $\beta_i \cap \alpha_r \ne \phi$, então $\beta_i \cap \alpha_m \ne \phi \ \forall \ m$, $1 \le m \le k$. O caso k = 2 é consequência das próprias sentenças anteriores . Se $k > 2$, tome $x_t \in \beta_i \cap \alpha_t$ e $x_r \in \beta_i \cap \alpha_r$. Suponha exista h com $\beta_i \cap \alpha_h = \phi$. Agora tome x_m em α_m arbitrariamente , com $1 \le m \le k$ e $m \notin \{t , r\}$. Vemos que o subtorneio $L_k = [x_1 , x_2 , \ldots , x_k]$ é isomorfo a T_k' , logo é simples . Mas , $\{v_i , p_s(x_h) \} \subset p_s(L_k)$, e como $p_s(x_h) \neq v_i$, $2 \le | p_s(L_k) |$. Como $p_s(x_t) = p_s(x_r)$, $| p_s(L_k) | < k$. Assim , a imagem de L_k por p_s é um subtorneio não trivial e menor que L_k , contrariando sua simplicidade . Para não ocorrer isto , devemos ter $\beta_i \cap \alpha_m \neq \phi \ \forall m$, $1 \le m \le k$ (*) .

1) Se houver alguma classe β_i satisfazendo (*) , ela será única .Se não , supor por absurdo existam i , j ,índices com β_i e β_j satisfazendo (*) , $i \neq j$, e tome duas classes α_r e α_t , $r \neq t$. Sem perda de generalidade , podemos supor $\beta_i \to \beta_j$ e $\alpha_r \leftarrow \alpha_t$. Tome $u \in \beta_i \cap \alpha_r$ e $u' \in \beta_j \cap \alpha_t$, então $u \to u'$ e simultaneamente $u \leftarrow u'$, absurdo . Há portanto no máximo uma classe β_i satisfazendo (*) .

2) No caso $k>2$, não há nenhuma classe β_i satisfazendo (*) , se não ela seria única e poderíamos construir L_k de forma análoga a 1) , tomando k-1 vértices em β_i e um único fora . Daí , $p_s(L_k)$ seria isomorfo a T_2 , contrariando novamente sua simplicidade . Então , neste caso , $\forall$ i , existe j com $\beta_i \subset \alpha_j$. Para todo i , escolha qualquer $x_i \in \beta_i$, e $J_s = [x_1 , x_2 , \ldots, x_s]$ será isomorfo a T_s'' , com $p_k(J_s) = T_k'$.

3) No caso $k = 2$, $U_k = \{\alpha_1 , \alpha_2 \}$, $\alpha_1 \to \alpha_2$. Se para nenhum índice i valer (*) , fazemos como no caso anterior e obtemos um epimorfismo $T_s'' \to T_2$. Se houver algum β_i verificando (*) , defina $f : T_s'' \to T_2$ por $f(v_j) = \alpha_1$ se $\beta_j \subset \alpha_1$, $f(v_j) = \alpha_2$ se $\beta_j \subset \alpha_2$, e $f(v_i) = \alpha_1$ ou α_2 de forma a f ser sobrejetiva . Então f é epimorfismo .

Por 2) ou 3) concluo que T_s'' será epimorfo a T_k' , e portanto , T_k' é quociente simples de qualquer outro quociente não trivial de T_n . Mas , dado outro quociente simples R_d de T_n , este será quociente simples de T_k' , logo ,será o próprio T_k' , oque prova a unicidade do quociente simples □

Teorema 1.3) Um torneio T_n é hamiltoniano se e somente se seu quociente simples R_m é $\neq T_2$.

demonstração : Se T_n for hamiltoniano , seja $x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n \to x_1$ um ciclo hamiltoniano . Se houver , um epimorfismo $f : T_n \to T_2$, existe i com $f(x_i) = a_2$ e $f(x_j) = a_1$, onde $j = i+1 \bmod n$. Então $x_i \to x_j$ mas $f(x_i) \leftarrow f(x_j)$, absurdo . Logo , $R_m \neq T_2$.

Seja $R_m \neq T_2$. Primeiro provemos que existe um 3-ciclo em T_n .
Tome um vértice $a \in T_n$, e defina U = { vértices de T_n que precedem a } , U' = {vértices de T_n que sucedem a } , como a não projeta T_n - a , U , U' são $\neq \phi$. Se para todo $w \in U$ e $v \in U'$ tivéssemos $w \to v$, então $[U \cup \{a\}] \to U'$, contradição . Donde existe $w \in U$ e $v \in U'$ formando o ciclo $v \to w \to a \to v$.

Considere agora um ciclo C de comprimento máximo em T_n , $|C| = k$. Todo vértice de T_n - C deverá projetar C , pois se um vértice v não projeta C : $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k \to a_1$, podemos encontrar índice i com $v \leftarrow a_i$ e $v \to a_j$, $j = i+1 \bmod k$ e reobtemos um ciclo de comprimento k+1 passando por $V(C) \cup \{v\}$ .Então , seja U = { vértices que precedem C } , U' = { vértices que sucedem C } . Como $T_n - C = [U \cup U']$, queremos provar que $U = U' = \phi$.

Se for apenas um dos dois vazio , por exemplo , U' , teremos $T_n = [U \to C]$, contrariando a hipótese . Sejam então ambos não vazios . Se $U \to U'$, novamente teríamos $T_n = [\,(U \cup C) \to U'\,]$, absurdo . Logo , existem $w \in U$, $v \in U'$ e $w \leftarrow v$. Então , o ciclo $w \to a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k \to v \to w$ contraria ser a maximalidade de $C < n$. Assim , o ciclo de comprimento máximo necessariamente passa por todos os vértices de T_n , e logo T_n é hamiltoniano □

Lema 1.4) Todo torneio T_n admite um caminho que passe por todos os seus vértices (caminho hamiltoniano) .

demonstração : por indução . Os casos n = 2 , 3 são triviais . Suponha o lema válido para todo T_k , $k < n$. Dado T_n , se for hamiltoniano , (um) seu ciclo máximo já será o caminho pedido . Se não for hamiltoniano , $T_n = T_2(S^1, S^2)$, com $|S^1|$, $|S^2| < n$. Podemos então usar a hipótese de indução e tomar caminhos em S^1 e S^2 , ou melhor , $V(S^1) = \{a_1, \ldots, a_r\}$, $V(S^2) = \{b_1, \ldots, b_s\}$, $r+s = n$ e $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_r$, $b_1 \to b_2 \to \ldots \to b_s$ .Como $S^1 \to S^2$, necessariamente $a_r \to b_1$, e justapondo ambos os caminhos por essa adjacência , obtemos o caminho hamiltoniano em T_n □

Dizemos que um torneio T é transitivo se T não possuir nenhum ciclo passando por um subconjunto de seus vértices . O resultado a seguir define completamente os torneios transitivos de ordem n .

Lema 1.5) Para cada n , existe apenas um torneio transitivo de ordem n ,Tr_n .

demonstração : Se T_n é transitivo , tome $x_1 \to x_2 \to \ldots \to x_n$ um caminho hamiltoniano pelos seus vértices . Dados $i < j$, $1 \leq i , j \leq n$, mostremos que $x_i \to x_j$. Com efeito , negando tal , obteríamos o ciclo $C : x_i \to x_{i+1} \to \ldots \to x_j \to x_i$, oque contradiz a transitividade de T_n . Então , as únicas relações de adjacência possíveis neste torneio são da forma $x_i \to x_j$ sempre que $i < j$. Se T_n' é outro torneio transitivo de ordem n , denotando $T_n' = T_n'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ com vértices satisfazendo as mesmas relações de adjacência segundo o índice que T_n , a aplicação que leva x_i em x_i' é um isomorfismo de T_n em T_n' □

Chamaremos Tr_n ao único torneio transitivo de ordem n . Estabelecemos a seguinte convenção quanto à numeração dos vértices de Tr_n :

$Tr_n = Tr_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \Rightarrow \quad x_i \to x_j \;$ se $\; i > j$. Assim , o único caminho hamiltoniano de Tr_n , por essa convenção , é $x_n \to x_{n-1} \to \ldots \to x_1$. Para o caso n = 2 , entretanto , denotamos $T_2 = T_2(a, b)$ para indicar $a \to b$.

Dado um torneio T_n , definimos a sua **condensação** como um quociente transitivo de T_n da forma $T_n = Tr_k{*}(S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(k)})$, onde cada componente $S^{(i)}$ é **strong** , ou seja , hamiltoniano ou trivial (T_1) . Para $k > 1$, Tr_k é sempre epimorfo a T_2 , e portanto , a condensação de um torneio hamiltoniano é sempre T_1 . Relativo a condensação , temos o seguinte resultado :

Teorema 1.6) Todo torneio não hamiltoniano T_n admite uma única condensação $Tr_k{*}$, a menos de isomorfismo , $1 < k \leq n$.

demonstração : Inicialmente , vamos construir uma condensação para T_n . Como T_n é não hamiltoniano , $T_n = T_2(S^{(2)}, S^{(1)}) = Tr_2(S^{(1)}, S^{(2)})$. Se forem $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ strong , obtemos Tr_2 uma condensação para T_n . Se não , ou $S^{(1)}$ ou $S^{(2)}$ será não trivial e não hamiltoniano . Seja , por exemplo , $S^{(1)}$ nessas condições . Então , $S^{(1)} = T_2(J^{(2)}, J^{(1)})$. Daí , $J^{(2)} \to J^{(1)}$, e $S^{(2)} \to J^{(s)}$ para s = 1 , 2 . Podemos reorganizar os vértices de T_n como $T_n = Tr_3(J^{(1)}, J^{(2)}, S^{(2)})$. Em geral : na etapa t , teremos $T_n = Tr_t(S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(t)})$. Se todo $S^{(i)}$ for strong , $1 \leq i \leq t$, uma condensação de T_n é Tr_1 . Se houver algum i com $S^{(i)}$ não strong $\Rightarrow S^{(i)} = T_2(P^{(2)}, P^{(1)})$. Considere a reenumeração

$$S^{(j)'} = \begin{cases} S^{(j)} & \text{se } j < i \\ P^{(1)} & \text{se } j = i \\ P^{(2)} & \text{se } j = i+1 \\ S^{(j-1)} & \text{se } j > i+1 \end{cases}$$

e vendo que $S^{(r)'} \rightarrow S^{(q)'}$ se $r > q$, podemos reagrupar os vértices

$T_n = Tr_{l+1}(S^{(1)'}, S^{(2)'}, \ldots, S^{(l+1)'})$. O processo deve parar após um número finito de etapas , pois em cada uma o número de componentes $S^{(i)}$, todas não vazias , aumenta em uma unidade , e a soma de todas as suas ordens é igual a n . Como tal processo só termina quando todas as componentes $S^{(i)}$ forem strong , para $1 \le i \le k$, obtemos o transitivo $Tr_k{}^*$ como uma condensação de T_n .

Seja , então , $Tr_m{}'$ um outro quociente transitivo de T_n , ou $T_n = Tr_m{}'(G^{(1)}, \ldots, G^{(m)})$. Para $1 \le i \le k$, existe apenas um j com $P^{(i)} \cap G^{(j)} \neq \phi$. Se não , suponhamos haver j , com $P^{(i)} \cap (G^{(1)} \cup G^{(2)} \cup \ldots \cup G^{(j)}) = A^{(1)} \neq \phi$ e $P^{(i)} \cap (G^{(j+1)} \cup G^{(j+2)} \cup \ldots \cup G^{(m)}) = A^{(2)} \neq \phi$. Naturalmente , $P^{(i)} = T_2(A^{(2)}, A^{(1)})$, oque contraria $P^{(i)}$ ser strong . Mas se $G^{(j)} \supset P^{(i)}$ e $G^{(j)} \supset P^{(s)}$, para i < s , então $G^{(j)} \supset P^{(t)}$ para $i \le t \le s$. Se negarmos isto , teremos $P^{(t)} \subset G^{(h)}$, para algum $h \neq j$. Se $h > j$, de $G^{(j)} \leftarrow G^{(h)} \Rightarrow P^{(s)} \leftarrow P^{(t)}$, absurdo pois $t \le s$. Analogamente , $h < j \Rightarrow G^{(h)} \leftarrow G^{(j)} \Rightarrow P^{(t)} \leftarrow P^{(i)}$, nova contradição pois $t \ge i$. Logo , cada componente $G^{(j)} = [P^{(d_j)} \cup P^{(d_j+1)} \cup \ldots \cup P^{(d_j+s)}]$ para algum d_j . Em particular , se $Tr_m{}^*$ é outra condensação de T_n , cada uma de suas componentes é exatamente igual a alguma componente de $Tr_k{}^*$, e portanto , $k = m \Rightarrow$ a unicidade está provada □

Teorema 1.7) Sendo $\nu(H_n)$ o número de vértices neutros de H_n , vale $2 \le \nu(H_n) \le n$, $\forall\, n \ge 4$.

demonstração : Existe um 3-ciclo em H_n , seguindo a mesma prova do teorema 1.3 . Então , existe um ciclo C de comprimento máximo $\le n - 2$. Suponhamos que $|C| < n-2$.

$\forall\ v \in V(H_n) - V(C)$, v projeta C . Definindo $U = \{v \in V(H_n - C) ; v \rightarrow C\}$ e $U' = \{v \in V(H_n - C) ; v \leftarrow C\}$. Novamente , $U , U' \neq \phi$.
Como $U \rightarrow C \rightarrow U'$, não pode ser $U \rightarrow U' \Rightarrow \exists\, v \in U , w \in U'$ com $v \rightarrow C \rightarrow w \rightarrow v$. Se $C : x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \ldots \rightarrow x_r \rightarrow x_1$, o ciclo $v \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \ldots \rightarrow x_r \rightarrow w \rightarrow v$ é de comprimento $r+1 \le n-2$, oque contradiz a escolha de C . Logo , $|C| = n-2$ e $V(H_n) = V(C) \cup \{v_1 , v_2\}$.

a) se v_1 e v_2 não projetam C , ambos são neutros ;

b) se v_1 não projeta C e v_2 projeta , v_2 é neutro . Podemos supor $v_2 \rightarrow C$ ($\Rightarrow v_1 \rightarrow v_2$) . Escrevendo $C : x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \ldots \rightarrow x_{n-2} \rightarrow x_1$, tome i com $x_i \rightarrow v_1$. Então , x_{i+1} é neutro , devido ao ciclo $x_i \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow x_{i+2} \rightarrow \ldots \rightarrow x_{i-1} \rightarrow x_i$. E v_2 , x_{i+1} são dois vértices neutros .

c) se v_1 e v_2 projetarem C , com raciocínio análogo , obtemos 2 vértices x_i e x_j do ciclo C , e ambos neutros □

Observamos que , por um resultado de [2] , para cada ordem $n \ge 5$, o único torneio hamiltoniano H_n que possui somente dois vértices neutros é o bineutral A_n .

Capítulo 2

Ciclos e Subtorneios minimais

Introduziremos agora as definições básicas relativas aos torneios normais .

Definições 2.1) Seja H_n um torneio hamiltoniano , e S um seu subtorneio . Dizemos que S é **não projetado** (em H_n) se S for não projetado por cada vértice de H_n - S , que é chamado subtorneio dos polos de S . Um ciclo C será não projetado se o subtorneio dos seus vértices for não projetado .

Dado um ciclo C , diremos que C é um **ciclo minimal** de H_n caso C seja não projetado e para todo C' ciclo , com $V(C') \subset V(C)$, $V(C') \neq V(C)$, tivermos C' projetado (por pelo menos um vértice de $[H_n - C']$) . Pelo teorema 1.7 associado a um resultado de [1] , se $n \geq 5$ e C for ciclo minimal , teremos $|C| \leq n-2$. Analogamente , um subtorneio hamiltoniano S de H_n é minimal quando verificar essa condição em relação à propriedade "subtorneios hamiltonianos não projetados de H_n", ou seja , $\forall$ S'$\subset$ S , S'$\neq$ S , houver algum vértice de H_n - S' projetando S'. A **característica cíclica** de H_n é o comprimento mínimo de seus ciclos minimais , denotada por $cc(H_n)$. H_n é dito **normal** se apresenta um único ciclo minimal . À diferença n - $cc(H_n)$ chamamos **diferença característica de H_n** , e denotamos $cd(H_n)$.

Dizemos que um ciclo C não projetado de H_n é **característico** se C possuir comprimento mínimo entre os ciclos não projetados . Evidentemente , C característico implica C minimal .

Lema 2.2) T torneio , C ciclo em T e L : $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots \rightarrow v_h$ caminho em T , com v_1 e v_h em V(C) . Então , J = $[C \cup L]$ é hamiltoniano .

demonstração : Considere um homomorfismo genérico f : J $\rightarrow$ T_2 . Se T_2 = T_2(a,b) , com a $\rightarrow$ b , e sendo C ciclo , deve ser f (C) = a ou b . Suponha f (C) = a . Em particular , f (v_h) = a . Como $v_{h-1} \rightarrow v_h$, deve ser f (v_{h-1}) = também . E repetindo indutivamente , obtemos f (v_i) = a $\Rightarrow$ f (v_{i-1}) = a , para $2 \leq i \leq h$. Donde se conclue f (J) = a . Analogamente , se f (C) = b , f (J) = b . Ou seja , não existe epimorfismo de J em T_2 , daí J é hamiltoniano □

Lema 2.3) T torneio , C e C' ciclos disjuntos de T , ou , $V(C) \cap V(C') = \phi$. Se existirem u,v $\in$V(C) e u',v' $\in$ V(C') com u $\rightarrow$ u' e v $\leftarrow$ v' , então J = $[C \cup C']$ é subtorneio hamiltoniano de T .

demonstração : Sendo C' : $c_1' \rightarrow c_2' \rightarrow \ldots \rightarrow c_s' \rightarrow c_1'$, u' = c_r' e v'= c_t' . Considere o caminho L' : u $\rightarrow$ u' $\rightarrow$ c_{r+1}' $\rightarrow$ c_{r+2}' $\rightarrow \ldots \rightarrow$ c_{t-1}' $\rightarrow$ v' $\rightarrow$ v onde os (sub)índices são tomados modulo s . L' e o ciclo C satisfazem as hipóteses do lema 2.2 , logo $[C \cup L']$ é hamiltoniano . Da mesma forma , se C" é um ciclo máximo de $[C \cup L']$, este ciclo juntamente com o caminho L : v' $\rightarrow$ c_{t+1}' $\rightarrow$ c_{t+2}'

$\rightarrow \ldots \rightarrow u'$ satisfazem o lema anterior , então $[C'' \cup L] = [C \cup C']$ é hamiltoniano □

Teorema 2.4) Seja H_n um torneio hamiltoniano que apresenta um único subtorneio minimal H_k' , $k \geq 3$. Então , $H_k' = A_k$.

demonstração : Se $k = 3$ ou 4 , H_k' será respectivamente $A_3 = H_3$ ou $A_4 = H_4$, pois são os únicos dessas ordens . Se $k > 4$, suponhamos por absurdo que $v(H_k') \geq 3$.

Seja P_{n-k} os polos de H_k' e $L : x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \ldots \rightarrow x_{n-k}$ um caminho hamiltoniano por P_{n-k} . Como x_1 e x_{n-k} não projetam H_k' , existem a' , $a \in V(H_k')$ satisfazendo $a' \rightarrow x_1$ e $x_{n-k} \rightarrow a$. Da hipótese $v(H_k') \geq 3$, existe $a^* \in V(H_k') - \{ a, a' \}$, com a^* neutro de H_k' . Logo , L é um caminho com extremos no ciclo $H_k' - a^*$ $\Rightarrow$ $[L \cup (H_k' - a^*)] = H_n - a^*$ é hamiltoniano . Isso permite obter um subtorneio minimal $H_s'' \subset H_n - a^*$, $H_s'' \neq H_k'$, contradição à hipótese . Então , H_k' só poderá ter dois vértices neutros , que serão a e a' ($\Rightarrow a \neq a'$) , donde $H_k' = A_k$ □

Corolário teo 2.4) (com a notação anterior) Se um torneio hamiltoniano H_n apresentar um único subtorneio minimal , ele será normal .

Pois , se C é ciclo minimal , claramente $V(C) = V(H_k')$. Mas para qualquer $k \geq 3$, só há um ciclo passando por todos os vértices de A_k . Assim , H_n é normal .

Observamos então que a condição 'ter um único ciclo minimal' é equivalente a 'ter um único subtorneio minimal' .

Capítulo 3

Estrutura dos Torneios Normais

Com os teoremas anteriores , iniciamos a caracterização dos torneios normais . Para tanto , vemos que o teorema 2.4 e seu corolário já definiram completamente o subtorneio (e consequentemente o ciclo) minimal de um torneio normal , demonstrando que ele será um bineutral . Resta estabelecer as relações entre este bineutral e os polos , e dos polos entre si . Os teoremas 3.1 até 3.6 analisam os aspectos associados a normalidade de um torneio para casos particulares de característica cíclica . O teorema 3.7 sintetiza todos esses numa caracterização geral dos torneios normais .

Teorema 3.1) Seja H_n hamiltoniano , $cc(H_n) \geq 5$ e tendo o bineutral A_m ($m \geq 5$) como um subtorneio minimal , $A_m = A_m\{a_1 , a_2 ,..., a_m\}$. Então , a_1 e a_m são não neutros de H_n se e somente se :

a) O subtorneio P_{n-m} de polos de A_m é não hamiltoniano e

b) Escrevendo a condensação de $P_{n-m} = Tr_j^*(P^{(1)} , P^{(2)} ,..., P^{(j)})$, tem-se

$(A_m - a_1) \to P^{(1)} \to a_1$

$a_m \to P^{(j)} \to (A_m - a_m)$

demonstração : ($\Rightarrow$) Existe $v \in P_{n-m}$ que projeta $[A_m - a_m]$, pois este último é hamiltoniano e está propriamente contido em A_m . Podemos supor $[A_m - a_m] \to v \to a_m$ (o caso $[A_m - a_m] \leftarrow v \leftarrow a_m$ é análogo) . Tome $u \in A_m - \{ a_1 , a_m \}$, então $u \to v$ e $v \to a_m$. Se P_{n-m} for hamiltoniano , caímos nas condições do lema 2.3 , e $[H_n - a_1] = [P_{n-m} \cup (A_m - a_1)]$ será hamiltoniano , contradizendo a_1 ser não neutro de H_n . Logo , P_{n-m} é não hamiltoniano e para algum $j \geq 2$, $P_{n-m} = Tr_j^*(P^{(1)} , P^{(2)} ,..., P^{(j)})$, cada $P^{(i)}$ strong . Considere , então , as possibilidades abaixo :

i) $(A_m - a_1) \to P^{(1)}$

ii) $(A_m - a_1)\ n\!\!\to P^{(1)}$

Se ocorrer i) , claramente $P^{(1)} \to a_1$, pois $P^{(1)}$ são polos de A_m . Se não i) $\Rightarrow$ ii) que é $\exists\, p \in P^{(1)}$ e $a \in (A_m - a_1)$ com $a \leftarrow p$. Neste caso , afirmo que $(A_m - a_1) \leftarrow P^{(j)}$, pois se houvesse $a' \in (A_m - a_1)$ e $p' \in P^{(j)}$ com $a' \to p'$, poderíamos construir um caminho hamiltoniano $a' \to p' \to ... \to p \to a$ passando por todos os vértices de P_{n-m} , já que cada $P^{(s)}$, $1 \leq s \leq j$ é hamiltoniano , e pelo lema 2.2 contradiríamos novamente ser a_1 não neutro de H_n . Concluo que vale a condição

α) $(A_m - a_1) \to P^{(1)} \to a_1$, ou , se Nα) , vale

β) $a_1 \to P^{(j)} \to (A_m - a_1)$

De forma análoga para o vértice a_m , temos

α') $a_m \to P^{(j)} \to (A_m - a_m)$ ou

β') $(A_m - a_m) \to P^{(1)} \to a_m$

Assim , sendo por hipótese a_1 e a_m não neutros de H_n , as possibilidades são :

$\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ ou $\beta\beta'$.

1) $\alpha\beta' \Rightarrow$ teremos $P^{(1)} \to a_1$ e $(A_m - a_m) \to P^{(1)}$, donde $a_1 \to P^{(1)}$, absurdo .

2) $\alpha'\beta \Rightarrow a_m \to P^{(j)}$ e $P^{(j)} \to (A_m - a_1)$, daí $P^{(j)} \to a_m$, absurdo .

3) $\beta\beta' \Rightarrow$ neste caso , tomando $p \in P^{(j)}$ e $p' \in P^{(1)}$ teríamos $C : p \to p' \to a_m \to a_1 \to p$ um 4-ciclo . Como $p \to (A_m - a_1)$ e $p' \leftarrow (A_m - a_m)$, $\forall$ $1 < i < m$, a_i não projeta C . Para $1 < i < j$, $P^{(1)} \leftarrow P^{(i)} \leftarrow P^{(j)}$, e , se $p'' \in P^{(1)} \cup P^{(j)}$, $a_1 \to p'' \to a_m$. Assim , C é não projetado , contradizendo $cc(H_n) \geq 5$.

Portanto , a única condição possível dentro das hipóteses do teorema é $\alpha\alpha'$)

$(A_m - a_1) \to P^{(1)} \to a_1$ e $a_m \to P^{(j)} \to (A_m - a_m)$. A ida está demonstrada .

($\Leftarrow$) se valem a) e b) , vemos que $H_n - a_1 = [(A_m - a_1) \cup P_{n-m}] = [(A_m - a_1) \cup P^{(1)} \cup ... \cup P^{(j)}]$. Mas $P^{(1)} \leftarrow P^{(s)}$ se $s > 1$ (observe que $j > 1$) e $P^{(1)} \leftarrow (A_m - a_1)$, donde $H_n - a_1$ é epimorfo a T_2 . De forma análoga , concluímos que $H_n - a_m$ é epimorfo a T_2 . Logo , a_1 e a_m são não neutros de H_n □

Corolário teo 3.1) Se H_n é torneio normal , $cc(H_n) = k \geq 4$, então :

a) o subtorneio característico de H_n é A_k ;

b) P_{n-k} é não hamiltoniano e sua condensação , $P_{n-k} = Tr_j^*(P^{(1)} , P^{(2)} ,..., P^{(j)})$ satisfaz $(A_k - a_1) \to P^{(1)} \to a_1$ e $a_k \to P^{(j)} \to (A_k - a_k)$.

Do teorema 2.4 obtemos a) , e da demonstração do teorema 3.1 obtemos que P_{n-k} é não hamiltoniano , logo sua condensação é não trivial , e vale uma das condições $\alpha\alpha'$ ou $\beta\beta'$. Se $k \geq 5$, vale $\alpha\alpha'$, e o corolário está demonstrado . Se $k = 4$, observe que no caso $\beta\beta'$, o 4-ciclo C não projetado é diferente do único ciclo de $H_4 = A_4$, contrariando a normalidade de H_n neste corolário . Portanto , para $k \geq 4$, vale ainda $(A_k - a_1) \to P^{(1)} \to a_1$ e $a_k \to P^{(j)} \to (A_k - a_k)$.

Teorema 3.2) H_n torneio hamiltoniano , $cc(H_n) = k \geq 4$. H_n é normal se e somente se valem as condições abaixo :

a) o subtorneio minimal de H_n é A_k ;

b) sendo P_{n-k} o subtorneio de polos de H_n , P_{n-k} é não hamiltoniano e sua condensação $P_{n-k} = Tr_j^*(P^{(1)} , P^{(2)} ,..., P^{(j)})$ verifica $(A_k - a_1) \to P^{(1)} \to a_1$ e $a_k \to P^{(j)} \to (A_k - a_k)$;

c) não existe nenhum caminho $L : a_r \to x_1 \to x_2 \to ... \to x_q \to a_s$, onde a_r , $a_s \in A_k$, com $r+1 < s$ e $x_i \in P_{n-k}$, $1 \leq q \leq n-k$.

demonstração : Seja H_n normal . a) e b) decorrem do teorema 3.1 e seu corolário . Suponha haver caminho L nas condições de c) . Considere o ciclo C : $a_1 \to a_2 \to ... \to a_{r-1} \to L \to a_{s+1} \to ... \to a_k \to a_1$ e o caminho hamiltoniano E : $a_k \to p(P^{(j)}) \to p(P^{(j-1)}) \to ... \to p(P^{(1)}) \to a_1$, onde $p(P^{(i)})$ significa um caminho hamiltoniano em $P^{(i)}$. Estamos nas condições do lema 2.2 , daí $[E \cup C]$ é hamiltoniano . Mas $[E \cup C] = [H_n - \{ a_{r+1} , a_{r+2} ,..., a_{s-1} \}]$. Escolha $p \in P^{(j)}$ e $p' \in P^{(1)}$, e para todo t com $r+1 < t < s$, considere Ft : $p \to a_t \to p'$. Então , $[E \cup C \cup Ft]$ será hamiltoniano , pelo lema 2.2 . Aplicando repetidamente o argumento , concluímos $[E \cup C \cup F_{r+2} \cup ... \cup F_{s-1}] = H_n - a_{r+1}$ é hamiltoniano , oque é absurdo pois a_{r+1} é não neutro de H_n . Logo , não existe tal caminho L e vale c) .

($\Leftarrow$) Se valerem a) , b) e c) , é suficiente mostrar que os vértices de A_k são não neutros de H_n . Para a_1 , veja que $H_n - a_1 = [P^{(1)} \cup (P_{n-k} - P^{(1)}) \cup (A_k - a_1)]$, e $(P_{n-k} - P^{(1)}) \to P^{(1)}$, $(A_k - a_1) \to P^{(1)}$. Assim também , $H_n - a_k = T_2(P^{(j)} , [(P_{n-k} - P^{(j)}) \cup (A_k - a_k)])$ $\Rightarrow$ a_1 e a_k são não neutros de H_n .

Agora , tome t , $1 < t < k$, e suponha por absurdo que a_t seja neutro de H_n . Existe , então , um ciclo C passando pelos vértices de $H_n - a_t$. Na sequência deste ciclo , podemos tirar um caminho L' com início em a_1 e final em a_k , passando no máximo uma vez em cada vértice . Enumero esse caminho L' : $a_1 = y_1 \to y_2 \to \ldots \to y_s = a_k$. Definamos $A' = [a_{t+1} , a_{t+2} , \ldots, a_k]$ e $A'' = [a_1 , a_2 ,\ldots, a_{t-1}]$, e tomamos i , $1 \leq i < s$, o maior índice com $y_i \in A''$. Depois , tomamos j , $i < j \leq s$, o menor índice com $y_j \in A'$. Claramente , $y_i = a_r$ para algum $r < t$ e $y_j = a_s$ para algum $s > t$. O caminho L : $a_r \to y_{i+1} \to \ldots \to y_{j-1} \to a_s$ contradiz a hipótese c) , levando ao absurdo . Portanto , a_t deve ser não neutro para $1 \leq t \leq k \Rightarrow H_n$ é normal □

Teorema 3.3) Seja H_n hamiltoniano , $cc(H_n) = 3$ e C um ciclo característico , C : $a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_1$. H_n é normal se e somente se valerem as condições abaixo (rodando os índices se necessário) :

a) os polos de C são do tipo x , x', y ou y' , abaixo especificados :

$(a_2 , a_3) \to x \to a_1$ $\quad$ $a_3 \to x' \to (a_1 , a_2)$

$(a_1 , a_3) \to y \to a_2$ $\quad$ $a_2 \to y' \to (a_1 , a_3)$

b) o subtorneio dos polos P_{n-3} é não hamiltoniano ;

c) Existe uma composição

$P_{n-3} = Tr_4^*(T^{(0)} , T^{(1)} , T^{(2)} , T^{(3)})$, onde

$T^{(0)}$ são polos tipo x

$T^{(1)}$ são polos tipo x , x', y

$T^{(2)}$ são polos tipo x , x', y'

$T^{(3)}$ são polos tipo x'

$T^{(1)}$ e $T^{(2)}$ podem ser vazios .

demonstração : ($\Rightarrow$) A demonstração de b) é idêntica a dos teoremas anteriores . Tome , então , a condensação (não trivial) de $P_{n-3} = Tr_j^*(P^{(1)} , P^{(2)} ,\ldots, P^{(j)})$, $j \geq 2$. Da normalidade de H_n temos $H_n - a_1 = [P_{n-3} \cup (a_2 , a_3)]$ não hamiltoniano , ou seja , $H_n - a_1 = T_2(T', T'')$, $T' \to T''$, e $T', T'' \neq \phi$. Temos três possibilidades mutuamente exclusivas :

i) $a_2 , a_3 \in T'$

ii) $a_2 , a_3 \in T''$

iii) $a_2 \in T'$ e $a_3 \in T''$

Observe que cada $P^{(s)}$, $1 \leq s \leq j$, é hamiltoniano ou singular , logo , $P^{(s)} \subset T'$ ou $P^{(s)} \subset T''$.

No caso i) deve ser $P^{(1)} \subset T''$, se não , $T'' = \phi$, pois $P^{(s)} \to P^{(1)}$ se $s > 1$. Então , $(a_2 , a_3) \to P^{(1)} \to a_1$ (pois C é não projetado) . Se valer ii) deve ser $P^{(j)} \subset T'$ já que T' é não vazio . Então , $a_1 \to P^{(j)} \to (a_2 , a_3)$ é a única relação possível . Finalmente , negar i) e ii) implica iii) , e chamando $\Lambda = P_{n-3} \cap T'$, $M = P_{n-3} \cap T''$, obtemos $T' = [a_2 , \Lambda]$, $T'' = [a_3 , M]$ e $[a_2 , \Lambda] \to [a_3 , M]$. Ou , ao menos uma das três condições abaixo é verdadeira :

α_1) $(a_2 , a_3) \to P^{(1)} \to a_1$

α_2) $a_1 \to P^{(j)} \to (a_2 , a_3)$

α_3) $(a_2 , \Lambda) \to (a_3 , M)$

Analogamente , sendo H_n - a_2 não hamiltoniano , uma das condições β vale :

β_1) $(a_1 , a_3) \rightarrow P^{(1)} \rightarrow a_2$

β_2) $a_2 \rightarrow P^{(j)} \rightarrow (a_1 , a_3)$

β_3) $(a_3 , \Lambda') \rightarrow (a_1 , M')$

E para o vértice a_3 , também não neutro ,

γ_1) $(a_1 , a_2) \rightarrow P^{(1)} \rightarrow a_3$

γ_2) $a_3 \rightarrow P^{(j)} \rightarrow (a_1 , a_2)$

γ_3) $(a_1 , \Lambda'') \rightarrow (a_2 , M'')$

Nas condições do teorema , ao menos uma hipótese tipo α , uma tipo β e uma tipo γ tem que ser verdadeiras . Suponha alguma condição índice 1 seja verdadeira , ou , $P^{(1)}$ suceda exatamente dois vértices de C . Podemos reenumerar C , se necessário , para obter $P^{(1)} \leftarrow (a_2 , a_3)$ e cair em α_1 . Como $(a_2 , a_3) \rightarrow P^{(1)}$, não valem β_1 nem γ_1 , pois nestes casos ou a_2 ou a_3 sucedem $P^{(1)}$.

Se valerem α_1 e β_2 , contradizemos ser C o único ciclo caracteristico de H_n , pois $a_2 \rightarrow p(P^{(j)}) \rightarrow p(P^{(j-1)}) \rightarrow \ldots \rightarrow p(P^{(1)}) \rightarrow a_1 \rightarrow a_2$ seria um ciclo hamiltoniano e a_3 seria não neutro . Assim , α_1 é incompatível com β_2 . Logo , $\alpha_1 \Rightarrow \beta_3$.

Se valerem α_1 e γ_3 , teríamos $P^{(1)} \rightarrow a_1$, logo $P^{(1)} \subset \Lambda''$. Mas isso obriga $P^{(1)} \rightarrow a_2$ (de γ_3) e $P^{(1)} \leftarrow a_2$ (de α_1) , absurdo . Donde $\alpha_1 \Rightarrow \gamma_2$.

Portanto , valendo alguma condição tipo 1 , que supomos ser α_1 , a única alternativa possível é $\alpha_1 , \beta_3 , \gamma_2$.

Com argumentação totalmente análoga , vemos que se uma condição tipo 2 for verdadeira , podemeos supor γ_2 , a alternativa será $\alpha_1 , \beta_3 , \gamma_2$.

Finalmente , supondo que nenhuma condição tipo 1 ou 2 seja verdadeira , teriam que valer todas as tipo 3 , que são

α_3) $(a_2 , \Lambda) \rightarrow (a_3 , M)$

β_3) $(a_3 , \Lambda') \rightarrow (a_1 , M')$

γ_3) $(a_1 , \Lambda'') \rightarrow (a_2 , M'')$

Temos dois casos a estudar :

1) Se $M = \phi \Rightarrow \Lambda' = \phi$, pois se fosse $\Lambda' \neq \phi$, teríamos $P^{(j)} \subset \Lambda$ (de $M = \phi$) e $P^{(j)} \subset \Lambda'$ (de $\Lambda' \neq \phi$) , e por α_3 e β_3 $P^{(j)} \rightarrow (a_1 , a_3) \Rightarrow a_2 \rightarrow P^{(j)} \rightarrow (a_1 , a_3)$, que é o caso β_2 .

Por outro lado , $\Lambda' = \phi \Rightarrow M'' = \phi$, pois se $M'' \neq \phi$ deve ser $P^{(1)} \subset M''$, e $P^{(1)} \subset M'$ também (de $\Lambda' = \phi$) . Então , fica $(a_1 , a_3) \rightarrow P^{(1)} \Rightarrow (a_1 , a_3) \rightarrow P^{(1)} \rightarrow a_2$, caso β_1 .

E se $M'' = \phi \Rightarrow \Lambda = \phi$. Pois se $P^{(j)} \subset \Lambda$, como $P^{(j)} \subset \Lambda'' = P_{n-3}$, $P^{(j)} \rightarrow (a_3 , a_2) \Rightarrow a_1 \rightarrow P^{(j)} \rightarrow (a_3 , a_2)$, caso α_2 . Então , $M = \phi \Rightarrow \Lambda' = \phi \Rightarrow M'' = \phi \Rightarrow \Lambda = \phi \Rightarrow M = P_{n-3}$, oque é absurdo . Pode-se chegar a resultado semelhante se supusermos qualquer dos outros conjuntos tipo M ou tipo $\Lambda = \phi$, obtendo sempre um absurdo . Então , o caso que resta é

2) Se todos os conjuntos tipo M ou tipo Λ são $\neq \phi$. Em particular , $P^{(j)} \subset \Lambda$ e $P^{(j)} \subset \Lambda' \Rightarrow a_2 \rightarrow P^{(j)} \rightarrow (a_1 , a_3)$, é o caso β_2 .

Conclusão : a menos de rotação dos índices , o único caso possível é α_1 , β_3 e γ_2 .

Agora , para os polos de C , considere as seis possibilidades distintas :

$(a_2 , a_3) \rightarrow x \rightarrow a_1 \qquad a_3 \rightarrow x' \rightarrow (a_1 , a_2)$

$(a_1 , a_3) \rightarrow y \rightarrow a_2 \qquad a_2 \rightarrow y' \rightarrow (a_1 , a_3)$

$(a_1 , a_2) \to z \to a_3 \qquad a_1 \to z' \to (a_2 , a_3)$

Os polos tipo z , z' não existem devido a β_3 , já que $a_1 \to v \to a_3 \Rightarrow v \in \Lambda'$ e $v \in M'$, que é absurdo .

Os polos tipo $x \notin P^{(j)}$, pois $x \leftarrow a_2$. Analogamente $x' \notin P^{(1)}$. Assim também , y e $y' \notin P^{(1)} \cup P^{(j)}$, pois estes últimos polos ou precedem (a_1 , a_3) ou sucedem (a_1 , a_3) e $a_3 \to P^{(1)} \to a_1$, $a_3 \to P^{(j)} \to a_1$ (de α_1 e γ_2) . Verificamos até aqui b) e a) .

Das condições α_1 e γ_2 , obtemos que $P^{(1)}$ é formado de polos tipo x e $P^{(j)}$ é formado de polos tipo x' . Da condição β_3 , resulta $y \in M'$ e $y' \in \Lambda'$. Logo , se para algum s , $1 < s < j$, $y \in P^{(s)}$ ($y' \in P^{(s)}$) $\Rightarrow P^{(s)} \subset M'$ ($P^{(s)} \subset \Lambda'$) . Donde podemos agrupar as componentes $P^{(s)}$ nos quatro grupos abaixo :

$$T^{(0)} = P^{(1)}$$
$$T^{(1)} = P^{(2)} \cup \ldots \cup P^{(d)}$$
$$T^{(2)} = P^{(d+1)} \cup \ldots \cup P^{(j-1)}$$
$$T^{(3)} = P^{(j)}$$

onde d é tomado de forma que $T^{(1)}$ não contenha polos y' e $T^{(2)}$ não contenha polos y (a escolha de d não é única) . As únicas componentes obrigatoriamente não vazias são $T^{(0)}$ e $T^{(3)}$, e elas formam uma decomposição transitiva de $P_{n-3} = Tr_3^*(T^{(0)} , T^{(1)} , T^{(2)} , T^{(3)})$. A parte direta do teorema está demonstrada .

($\Leftarrow$) Valendo a) , b) e c) , devemos apenas provar que a_1 , a_2 e a_3 são não neutros . a_1 é não neutro porque $H_n - a_1 = [T^{(0)} \cup (P_{n-3} - T^{(0)}) \cup (a_2 , a_3)]$ e ,$T^{(0)} \leftarrow [(P_{n-3} - T^{(0)}) \cup (a_2 , a_3)]$. Analogamente , a_3 é não neutro .

Para a_2 , vejamos que $H_n - a_2 = [(a_1 , a_3) \cup T^{(0)} \cup \ldots \cup T^{(3)}]$ e $[T^{(1)} \cup T^{(0)} \cup \{a_1\}] \leftarrow [T^{(3)} \cup T^{(2)} \cup \{a_3\}]$. Sendo estes três vértices não neutros , o ciclo C é o único minimal e H_n é normal □

Os teoremas 3.2 e 3.3 são as ferramentas para caracterizarmos os torneios hamiltonianos normais . Um resultado direto desses teoremas é a caracterização de subtorneios de torneios normais que possuam o ciclo característico .

Teorema 3.4) Um subtorneio T_m de um torneio normal H_n que possua o ciclo característico deste último e ao menos um vértice de $P^{(j)}$ e um vértice de $P^{(1)}$ é normal .

demonstração : É suficiente mostrar que valem as condições das recíprocas dos teoremas 3.2 e 3.3 nos casos $k \geq 4$ e $k = 3$, respectivamente , onde $k = cc(H_n)$. Definamos $S = [H_n - T_m] \subset P_{n-k}$. Evidentemente $T_m = H_m'$ é hamiltoniano , pois existe um ciclo não projetado (o ciclo característico de H_n) .

No caso $k > 3$, este ciclo é A_k . Como $(A_k - a_1)$ e $(A_k - a_k)$ são projetados respectivamente por u e v , onde $u \in H_m' \cap P^{(1)}$ e $v \in H_m' \cap P^{(j)}$, A_k é um subtorneio minimal de H_m' . Claramente $P_{m-k}' = H_m' - A_k$ é não hamiltoniano , pois $P_{m-k}' = [(P_{m-k}' - H_m' \cap P^{(1)}) \cup H_m' \cap P^{(1)}]$ e $H_m' \cap P^{(1)} \leftarrow [P_{m-k}' - H_m' \cap P^{(1)}]$, com ambas componentes diferentes de ϕ . Condensando , fica $P_{m-k}' = Tr_s^*(Q^{(1)} ,\ldots, Q^{(s)})$. $Q^{(1)} \subset P^{(1)}$ pois $H_m' \cap P^{(1)} \neq \phi \Rightarrow Q^{(1)} \cap P^{(1)} \neq \phi$. Assim também $Q^{(s)} \subset P^{(j)}$. Logo , $(A_k - a_1) \to Q^{(1)} \to a_1$ e $a_k \to Q^{(s)} \to (A_k - a_k)$, relações estas induzidas de H_n .

Finalmente , se houvesse um caminho L : $a_r \to x_1 \to \ldots \to x_h \to a_t$, com $r+1 < t$, $x_i \in P_{m-k}'$, evidentemente tal caminho estaria em H_n , contradizendo a parte direta do teorema 3.2 . Assim , verificamos a) , b) e c) deste teorema para $k > 3$, oque prova ser H_m' normal e $cc(H_m') = k$.

No caso $k = 3$, vendo que o 3-ciclo característico de H_n estaria em H_m', $P_{m-3}' \subset P_{n-3}$ seria constituído de polos tipos x , x' , y e y'. Também P_{m-3}' será não hamiltoniano , e $P_{m-3}' = Tr_3^*(Q^{(1)}, ..., Q^{(s)})$, $Q^{(1)} \subset P^{(1)}$, $Q^{(s)} \subset P^{(j)}$. Logo , as componentes $Q^{(i)}$ podem ser agrupadas em quatro componentes $T^{(d)}$' , $0 \leq d \leq 3$, com as propriedades de c) do teorema 3.3 $\Rightarrow$ H_m'será normal , $cc(H_m') = 3$ □

Conquanto H_3 não tenha vértices neutros , vamos extender a notação e chamar $A_3 = H_3$, observando que se H_3 é subtorneio característico de um torneio normal , valem as propriedades análogas ao caso $k > 3$ para alguma das três possíveis numerações de vértices . Ou seja , $a_1 \leftarrow P^{(1)} \leftarrow (A_3 - a_1)$ e $a_3 \rightarrow P^{(j)} \rightarrow (A_3 - a_3)$.

Lema 3.5) H_{k+3} torneio normal com $cd(H_{k+3}) = 3$, $k > 3$. Seja A_k o subtorneio característico e P_3 os polos . Então , $P_3 = Tr_3^*(x , z , x')$, $[A_k \cup \{x , x'\}] \approx A_{k+2}$ e vale uma das duas regras de adjacência para z :

1) $(a_{i+1} , a_{i+2} ,..., a_k) \rightarrow z \rightarrow (a_1 , a_2 ,..., a_i)$

2) $(a_i , a_{i+2} , a_{i+3} ,..., a_k) \rightarrow z \rightarrow (a_1 , a_2 ,..., a_{i-1} , a_{i+1})$ com $1 \leq i \leq k-1$

demonstração : Consequência do teorema 3.2 . A condensação de P_3 é não trivial , portanto cada componente $P^{(s)}$ tem exatamente um vértice . $[A_k \cup \{x , x'\}] \approx A_{k+2}$ devido às propriedades já observadas para x , x' . As regras de adjacência para z e A_k decorrem da exigência c) do teorema 3.2 . □

Relativo a esse lema , observamos que , reciprocamente , se $A_{k+2} \approx [A_k \cup \{x , x'\}]$ e acrescentamos um vértice z satisfazendo as relações de adjacência mencionadas , o torneio $[A_{k+2} \cup \{z\}]$ será normal de característica cíclica k , pois $[(A_{k-2} \cup \{z\}) - a_s]$, $\forall\ 1 \leq s \leq k$, continua não hamiltoniano .

O polo z designado no lema anterior é chamado classe 1 ou 2 e tipo i , denotando-se x_i ou y_i , dado pelas condições 1) ou 2) , respectivamente .

Então , num torneio normal H_n genérico , um polo z será do tipo x_1 ou x_{k-1} se $z \in P^{(1)}$ ou $P^{(j)}$, respectivamente , ou podemos considerar um subtorneio $H_{k+3} \subset H_n$ nas condições do lema 3.5 , com $H_{k+3} = [A_k \cup \{z , x , x'\}]$, e z será de classe 1 ou 2 e tipo i , para algum $1 \leq i \leq k-1$.

$(a_{i+1} , a_{i+2} ,..., a_k) \rightarrow x_i \rightarrow (a_1 , a_2 ,..., a_i)$

ou $(a_i , a_{i+2} ,..., a_k) \rightarrow y_i \rightarrow (a_1 , a_2 ,..., a_{i-1} , a_{i+1})$

No caso $k = 3$, $x = x_1$, $x' = x_3$, $y = y_1$ e $y' = y_2$.

Proposição 3.6) Com as notações x_i e y_j para os polos , as seguintes regras de adjacências valem :

1) $x_i \rightarrow x_j' \Rightarrow j \leq i+2$

2) $y_i \rightarrow y_j' \Rightarrow j \leq i$

3) $x_i \rightarrow y_j' \Rightarrow j \leq i+1$

4) $y_i \rightarrow x_j' \Rightarrow j \leq i+1$

demonstração : Decorre de c) do teorema 3.2 □

Observação : não é dificil ver que as relações entre os índices i e j acima valem não apenas quando o polo i precede o polo j , mas no caso mais geral em que existe um caminho $z_i \rightarrow w_1 \rightarrow \ldots \rightarrow w_q \rightarrow z_j$, onde cada w_s é polo .

Teorema 3.7) Um torneio H_n é normal se e somente se valem as hipóteses abaixo :

a) H_n possui o bineutral A_k como subtorneio minimal (aqui k pode ser 3);

b) os polos associados a A_k são dos (k-1) tipos da classe 1 ou dos (k-1) tipos da classe 2 ;

c) P_{n-k} subtorneio dos polos é não hamiltoniano ;

d) P_{n-k} admite a composição

$P_{n-k} = Tr_{k+1}(T^{(0)}, T^{(1)},\ldots, T^{(k)})$, onde

$T^{(0)}$ é formado por polos tipo x_1

$T^{(1)}$ é formado por polos tipo x_1 , x_2 , y_1

$T^{(2)}$ .... x_1 , x_2 , x_3 , y_2

....

$T^{(i)}$ .... x_{i-1} , x_i , x_{i+1} , y_i

....

$T^{(k-1)}$ é formado por polos tipo x_{k-2} , x_{k-1} , y_{k-1}

$T^{(k)}$ é formado por polos tipo x_{k-1}

demonstração : (considerando apenas o caso $k > 3$. No caso $k = 3$, reobtemos o teorema 3.3) . ($\Leftarrow$) Se valerem a) , b) , c) e d) do teorema 3.7 , valem a) e b) do teorema 3.2 . Suponhamos que haja um caminho L : $a_r \rightarrow z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \ldots \rightarrow z_q \rightarrow a_s$, com $r+1 < s$ e $z_i \in P_{n-k}$ para $1 \le i \le q$. Com relação a z_1 e z_q , as possibilidades são :

1) z_1 é polo $x_i \Rightarrow i \le r-1$

2) z_1 é polo $y_i \Rightarrow i \le r$

3) z_q é polo $x_j \Rightarrow j \ge s$

4) z_q é polo $y_j \Rightarrow j \ge s-1$

Como existe um caminho de z_1 para z_q , devemos analizar as combinações (1,3) , (1,4) , (2,3) e (2,4) . Coloque então $z_1 \in T^{(h)}$ e $z_q \in T^{(g)}$. Usamos a hipótese d) , em cada um desses casos , para estabelecer as relações entre i e h , j e g .

No caso (1,3) , temos $i \le r-1$ e $j \ge s \Rightarrow i+2 \le r+1 \le s-1 \le j-1 \Rightarrow i+3 \le j$. Como $h \le i+1 \le j - 2 < g$, obtemos $T^{(g)} \rightarrow T^{(h)} \Rightarrow x_j \rightarrow x_i$, oque é absurdo pois isto obriga x_i e x_j pertencerem a um mesmo ciclo contido em P_{n-k} . Para não haver absurdo , (1,3) não pode ocorrer .

No caso (1,4) , há um caminho de x_i para y_j via polos , e $i+2 \le r+1 \le s-1 \le j \Rightarrow h \le i+1 \le j - 1 < g$, donde novamente $T^{(g)} \rightarrow T^{(h)}$ obrigando $y_j \rightarrow x_i$, nova contradição pois estes vértices estão em componentes distintas .

Nos casos (2,3) e (2,4) , repetimos um argumento similar , e obtemos que z_1 e z_q pertencem a componentes distintas $T^{(h)}$ e $T^{(g)}$, mas simultaneamente , estão num mesmo ciclo de P_{n-k} , oque contradiz d) . Para não haver essa contradição em nenhum caso , não pode haver o caminho L sugerido , e portanto , verificamos c) do teorema 3.2 $\Rightarrow$ H_n é normal .

($\Rightarrow$) para provar a parte direta , vemos que a) , b) e c) são novamente consequências dos teoremas 3.2 e 3.5 e da proposição 3.6 . Definamos , agora , o seguinte arranjo dos polos P_{n-k} :

$U^{(1)} = P^{(2)} \cup \ldots \cup P^{(r1)}$ a maior união possível com polos tipo x_1,x_2,y_1

$U^{(2)} = P^{(2)} \cup \ldots \cup P^{(r2)}$ " " " x_1,x_2,x_3,y_1,y_2

....

$U^{(i)} = P^{(2)} \cup \ldots \cup P^{(ri)}$ a maior união possível com polos tipo $x_1, \ldots x_{i+1}, y_1, \ldots, y_i$

....

$U^{(k-2)} = P^{(2)} \cup \ldots \cup P^{(rk-2)}$ " " " $x_1, \ldots, x_{k-1}, y_1, \ldots, y_{k-2}$

$U^{(k-1)} = P^{(2)} \cup \ldots \cup P^{(j-1)}$

Se $i < s$, $U^{(i)} \subset U^{(s)}$. Defino

$\Pi^{(0)} = P^{(1)}$

$\Pi^{(1)} = U^{(1)} - P^{(1)}$

$\Pi^{(2)} = U^{(2)} - U^{(1)}$

....

$\Pi^{(i)} = U^{(i)} - U^{(i-1)}$

....

$\Pi^{(k-1)} = U^{(k-1)} - U^{(k-2)}$

$\Pi^{(k)} = P^{(j)}$

Vemos que $\cup\, \Pi^{(i)} = P_{n-k}$, e se $r < s$ e $\Pi^{(r)}$, $\Pi^{(s)} \neq \phi$, então $\Pi^{(r)} \leftarrow \Pi^{(s)}$

Podemos então compor P_{n-k} como

$$P_{n-k} = Tr_{k+1}(\Pi^{(0)} , \Pi^{(1)} ,\ldots, \Pi^{(k)})$$

Finalmente , $\Pi^{(0)}$ só contém polos x_1 e $\Pi^{(k)}$ polos x_{k-1} , sendo ambas componentes não vazias . Se $0 < i < k$ e $\Pi^{(i)} \neq \phi$, $\Pi^{(i)} = P^{(\alpha)} \cup \ldots \cup P^{(ri)}$, onde $P^{(\alpha)}$ contém ao menos um polo y_i ou um polo x_{i+1} . Se algum $y_i \in P^{(\alpha)}$, e houver $y_j \in \Pi^{(i)}$, então necessariamente existe um caminho de y_j para y_i , oque obriga ser $j \geq i \Rightarrow j = i$ (pois $\Pi^{(i)}$ não contém y_g para $g > i$) . Se houver $x_j \in \Pi^{(i)}$, também concluímos $j \geq i\text{-}1$ pois haverá um caminho de x_j para y_i . Logo , $j \in \{i-1, i, i+1\}$.

Se algum $x_{i+1} \in P^{(\alpha)}$, repetindo argumentos similares para y_j ou x_h , concluímos $j = i$ e $h \in \{i-1 , i , i+1\}$. Assim , $\Pi^{(i)}$ só contém polos tipo y_i , x_{i-1} , x_i , x_{i+1} , se $1 \leq i \leq k\text{-}1$. Nos casos $i = 1$ ou $i = k\text{-}1$, evidentemente não existirão polos x_0 ou x_k □

Observação : a composição $P_{n-k} = Tr_{k+1}(\Pi^{(0)} ,\ldots, \Pi^{(k)})$ é chamada composição canônica de P_{n-k} . Como a condensação de um torneio é única , os conjuntos $U^{(i)}$ e $\Pi^{(i)}$ do teorema anterior são definidos univocamente . Contudo , P_{n-k} pode admitir mais de uma composição similar a d) do teorema 3.7 .

Por exemplo , se $H_7 = [A_4 \cup \{u , v , w\}]$, com u,v,w dos tipos x_1,x_2,x_3 , respectivamente , e exigindo-se H_7 normal ,$cc(H_7) = 4$. $u \in T^{(0)}$, $w \in T^{(3)}$, mas v pode ser colocado indistintamente em $T^{(1)}$ ou $T^{(2)}$. A composição canônica é $\Pi^{(0)} = \{u\}$, $\Pi^{(1)} = \{v\}$, $\Pi^{(2)} = \phi$, $\Pi^{(3)} = \{w\}$.

Teorema 3.8) Dois torneios normais H_n e H_n' são isomorfos se e somente se :

a) têm a mesma característica cíclica ;

b) têm a mesma composição canônica , ou ,

1) $0 \leq i \leq k \Rightarrow \Pi^{(i)} \approx \Pi^{(i)'}$

2) os vértices correspondentes das i-ésimas componentes são do mesmo tipo .

demonstração : ($\Rightarrow$) a) é consequência direta do isomorfismo . Sendo A_k e A_k' os subtorneios característicos de H_n e H_n', respectivamente , temos $f(A_k) = A_k'$, onde $f : H_n \rightarrow H_n'$é o isomorfismo em questão . Disto , $f(P_{n-k}) = P_{n-k}'$. Em particular , P_{n-k} e P_{n-k}' têm condensações isomorfas

$$P_{n-k} = Tr_c^*(P^{(1)} ,..., P^{(c)})$$
$$P_{n-k}' = Tr_c^*(P^{(1)'} ,..., P^{(c)'})$$

Com $P^{(i)} \approx P^{(i)'}$ via f . Tome $x_1 \in P^{(1)}$ ($P^{(1)} \neq \phi$) , então $f(x_1) \in P^{(1)'}$. Dos vértices de A_k , o único que sucede x_1 é a_1 . Logo , $f(a_1)$ será o único vértice de A_k' que sucede $f(x_1) \Rightarrow f(a_1) = a_1'$, oque define um único isomorfismo entre A_k e A_k', que é dado por $f(a_i) = a_i'$ $\forall$ $1 \leq i \leq k$. Aplicando esse resultado aos polos

$$\text{se } x_i \in P_{n-k} \Rightarrow (a_1 ,..., a_i) \leftarrow x_i \leftarrow (a_{i+1} ,..., a_k)$$
$$\Rightarrow (a_1' ,..., a_i') \leftarrow f(x_i) \leftarrow (a_{i+1}' ,..., a_k')$$

donde $f(x_i)$ é polo tipo x_i' . Assim também

$$\text{se } y_i \in P_{n-k} \Rightarrow (a_1 ,..., a_{i-1} , a_{i+1}) \leftarrow y_i \leftarrow (a_i , a_{i+2} ,..., a_k)$$
$$\Rightarrow (a_1' ,..., a_{i-1}' , a_{i+1}') \leftarrow f(y_i) \leftarrow (a_i', a_{i+2}' ,..., a_k')$$

e $f(y_i)$ é polo y_i' . E com isto , fica claro que $\Pi^{(i)} \approx \Pi^{(i)'}$, e provamos b) .

($\Leftarrow$) Como $cc(H_n) = cc(H_n') = k$, os subtorneios minimais são respectivamente A_k e A_k', $k \geq 3$. Da condição b) , podemos considerar um isomorfismo $f : P_{n-k} \rightarrow P_{n-k}'$ definindo em cada $\Pi^{(i)}$ como o isomorfismo dado sobre $\Pi^{(i)'}$. Tal f será isomorfismo pelo fato de as relações entre as componentes $\Pi^{(i)}$ serem as mesmas que ocorrem entre as $\Pi^{(q)'}$, para $0 \leq i , q \leq k$. Agora , extendemos essa f (que denotaremos ainda por f) até A_k colocando $f(a_i) = a_i'$, $1 \leq i \leq k$. Para verificar que essa extensão de f é um isomorfismo , basta ver que se z é polo , e $z \rightarrow a_i$, f (z) será do mesmo tipo de z , logo $f(z) \rightarrow a_i' = f(a_i)$. Respeitando essas relações de adjacências , f é o isomorfismo entre H_n e H_n' □

Capítulo 4

Enumeração dos Torneios Normais

Tendo especificado totalmente a estrutura dos torneios normais , podemo agora analisar a sua enumeração .

definição 4.1) Chamamos $\lambda(n,k)$ o número de não isomorfos torneios normais de ordem n e característica cíclica k , e $\lambda(n)$ o número de torneios normais de ordem n . $\lambda(n) = \sum_{k=3}^{n-2} \lambda(n,k)$

Consideramos os torneios normais com seus polos sempre na forma canônica do teorema 3.7 . Pelo teorema 3.8 , um torneio normal de ordem n e característica cíclica k está completamente definido , a menos de isomorfismo , pela estrutura de cada uma componente $\Pi^{(i)}$, $0 \le i \le k$. Então , fixos n e k , consideremos

$\lambda(n,k,p_0,p_1,\ldots,p_k)$ o número de torneios normais de ordem e característica respectivamente n e k , e cujas ordens das componentes $\Pi^{(0)}$, $\Pi^{(1)}$,..., $\Pi^{(k)}$ são p_0 , p_1 ,..., p_k . As relações abaixo são evidentes

$\lambda(n,k) = \sum \lambda(n,k,p_0,p_1,\ldots,p_k)$, sendo tal soma sobre todos os $p_0 + p_1 + \ldots + p_k = n-k$, $p_i \ge 0\ \forall\, i$ e p_0 , $p_k \ne 0$. Chamemos estes de torneios $(n,k,p_0,\ldots,p_k)$.

Dois torneios $(n,k,p_0,\ldots,p_k)$ serão isomorfos se e só se cada componente $\Pi^{(i)}$ de suas composições canônicas forem isomorfas e os vértices associados forem do mesmo tipo . Aplicando um princípio de contagem , obtemos

$$\lambda(n,k,p_0,\ldots,p_k) = \mu(\Pi^{(0)}{}_{p0}) \,.\, \mu(\Pi^{(1)}{}_{p1}) \,.\, \ldots \mu(\Pi^{(k)}{}_{pk})$$

$\mu(\Pi^{(i)}{}_{pi}) = 1$ se $p_i = 0$ ou será igual ao número de não isomorfos torneios $\Pi^{(i)}{}_{pi}$, se $p_i \ne 0$, onde nesse isomorfismo se considera o tipo dos vértices (polos) tal como estabelece a proposição 3.6 .

Nesse sentido , estamos levando em conta uma colorição dos vértices , ou seja , a um torneio T_h está associada uma função $g : T_h \to S$, $S = \{cores\}$ é um conjunto finito . Chamamos a dupla (T_h , g) um torneio colorido , subentendendo-se S o conjunto de cores . Dois torneios coloridos (T_h , g) e (T_h',g') serão isomorfos se e somente se houver um isomorfismo estrutural f que preserve as cores , ou ,

$$\exists\, f : T_h \to T_h' \text{ iso de torneios com } g' \bullet f = g \,.$$

Assim , o parâmetro $\mu(\Pi^{(i)}{}_{pi})$ está associado ao número de não isomorfos torneios coloridos , num conjunto de no máximo 4 cores .

Podemos mexer arbitrariamente na estrutura de uma componente $\Pi^{(i)}{}_{pi}$, mantendo sempre seus vértices com as cores $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, y_i\}$, e obtemos um novo P_{n-k}' torneio de polos de um torneio $(n,k,p_0,\ldots,p_k)$. Contudo , essa nova componente $\Pi^{(i)}{}_{pi}$' poderá não estar associada à decomposição canônica desses polos , oque impede a precisa enumeração desses torneios . Por isso , temos que acrescentar a particularidade da decomposição canônica ,a qual queremos preservar (indicaremos $T_1 = H_1$) :

$\Pi^{(0)} = H^{(0)}[x_1] \neq \phi$ é sempre hamiltoniano

$\Pi^{(1)} = \Pi^{(1)}[x_1,x_2,y_1]$ é em geral não hamiltoniano

$\Pi^{(2)} = \Pi^{(2)}[x_1,x_2,x_3,y_2]$ é em geral não hamiltoniano , mas sua componente mais baixa da condensação é hamiltoniana e possui um polo x_3 ou y_2 , que denotaremos por x_3'ou y_2' .

$\Pi^{(2)} = H^{(2)}[x_1,x_2,x_3',y_2'] \leftarrow \Pi^{(2)\prime}[x_1,x_2,x_3,y_2]$

e para $2 \leq i \leq k\text{-}2$ também teremos

$\Pi^{(i)} = H^{(i)}[x_{i-1},x_i,x_{i+1}',y_i'] \leftarrow \Pi^{(i)\prime}[x_{i-1},x_i,x_{i+1},y_i]$

se i = k-1

$\Pi^{(k-1)} = H^{(k-1)}[x_{k-2},x_{k-1},y_{k-1}'] \leftarrow \Pi^{(k-1)\prime}[x_{k-2},x_{k-1},y_{k-1}]$

$\Pi^{(k)} = H^{(k)}[x_{k-1}]$ será sempre hamiltoniano .

$P_{n-k} = Tr_{2k-1}{}^*(H^{(0)}, \Pi^{(1)\prime}, H^{(2)}, \Pi^{(2)\prime},\ldots,H^{(i)}, \Pi^{(i)\prime},\ldots, H^{(k-1)}, \Pi^{(k-1)\prime}, H^{(k)})$

com $H^{(0)}, H^{(k)} \neq \phi$ e se $\Pi^{(i)\prime} \neq \phi \Rightarrow H^{(i)} \neq \phi$, $2 \leq i \leq k\text{-}1$.

Cada uma dessas componentes são univocamente definidas , são torneios coloridos com no máximo quatro cores , e em alguns casos , contém ao menos uma cor entre uma ou duas pré-fixadas .

Definimos agora

$\sigma^{(i)}{}_p$ = número de torneios hamiltonianos coloridos não isomorfos de ordem p , com no máximo i cores .

$\tau^{(i)}{}_p$ = número de torneios coloridos não isomorfos de ordem p , com no máximo i cores .

$\tilde{\sigma}_p^{(i)}$ = número de não isomorfos torneios hamiltonianos coloridos , com exatamente i cores .

As seguintes relações de recorrência podem ser obtidas entre essas funções :

$$\sigma_p^{(i)} = \binom{i}{1}\tilde{\sigma}_p^{(1)} + \binom{i}{2}\tilde{\sigma}_p^{(2)} + \ldots + \binom{i}{i}\tilde{\sigma}_p^{(i)}$$

$$\tau_p^{(i)} = \sigma_p^{(i)} + \sum_{r=1}^{p-1} \sigma_r^{(i)}.\tau_{p-r}^{(i)}$$ que podem ser mostradas por argumentos simples de combinatória .

Finalmente , definimos $\sigma^{(3,1)}{}_p$ e $\sigma^{(4,2)}{}_p$, respectivamente , o número de não isomorfos torneios hamiltonianos de ordem p , com no máximo 3 cores sendo 1 fixa ou no máximo 4 cores , com 1 escolhida entre 2 fixas .

$$\sigma_p^{(3,1)} = \tilde{\sigma}_p^{(1)} + 2.\tilde{\sigma}_p^{(2)} + \tilde{\sigma}_p^{(3)}$$

$$\sigma_p^{(4,2)} = 2.\tilde{\sigma}_p^{(1)} + 5.\tilde{\sigma}_p^{(2)} + 4.\tilde{\sigma}_p^{(3)} + \tilde{\sigma}_p^{(4)}$$

Aplicando as fórmulas acima para a obtenção de $\mu(\ )$:

se p = 0 , $\mu(\Pi^{(i)}{}_0) = 1$, $\forall\ 1 \leq i \leq k\text{-}1$

se $p \neq 0$,

$$\mu(\Pi_p^{(0)}) = \sigma_p^{(1)}$$
$$\mu(\Pi_p^{(1)}) = \tau_p^{(3)}$$
$$\mu(\Pi_p^{(i)}) = \sigma_p^{(4,2)} + \sum_{r=1}^{p-1} \sigma_r^{(4,2)}.\tau_{p-r}^{(4)} \quad , \quad 2 \le i \le k-2$$
$$\mu(\Pi_p^{(k-1)}) = \sigma_p^{(3,1)} + \sum_{r=1}^{p-1} \sigma_r^{(3,1)}.\tau_{p-r}^{(3)}$$
$$\mu(\Pi_p^{(k)}) = \sigma_p^{(1)}$$

Exemplos :

1) para o 3-ciclo H_3

$$\sigma_3^{(1)} = 1 \quad , \quad \widetilde{\sigma}_3^{(2)} = 2 \quad , \quad \widetilde{\sigma}_3^{(3)} = 2 \quad , \quad \widetilde{\sigma}_3^{(4)} = 0$$
$$\sigma_3^{(2)} = 2.\widetilde{\sigma}_3^{(1)} + \widetilde{\sigma}_3^{(2)}$$

2) para T_2 , $\quad \tau_2^{(1)} = 2 \quad , \quad \tau_2^{(2)} = 4$

3) Se H_n é um torneio hamiltoniano cujo único automorfismo é a identidade , e indicando $\widetilde{\sigma}^{(i)}(H_n)$ ou $\sigma^{(i)}(H_n)$ o número de torneios coloridos da forma (H_n ,f) , tendo exatamente ou ao máximo i cores , temos

$\sigma^{(i)}(H_n) = i^n$, que é o número de funções que existem entre um domínio de n elementos e um contradomínio de i elementos .

$$\widetilde{\sigma}^{(i)}(H_n) = i^n - \binom{i}{i-1}.\widetilde{\sigma}^{(i-1)}(H_n) - \binom{i}{i-2}.\widetilde{\sigma}^{(i-2)}(H_n) - \ldots - \binom{i}{1}.\widetilde{\sigma}^{(1)}(H_n)$$

Com essas fórmulas , após efetuar o cálculo de $\sigma_p^{(i)}$, $\widetilde{\sigma}_p^{(i)}$, $\tau_p^{(i)}$ (vide apêndice) para os primeiros valores de i , p , obtemos a tabela abaixo :

n	λ(n,3)	λ(n,4)	λ(n,5)	λ(n,6)	λ(n,7)	λ(n,8)	λ(n)
3	1						1
4	0						0
5	1						1
6	4	1					5
7	17	6	1				24
8	82	33	8	1			124
9	516	200	53	10	1		780
10	4760	1520	366	77	12	1	6736

Proposição 4.2) Apresentamos , agora , algumas fórmulas para $\lambda(n,k)$, nos casos $n-k = 2 , 3 , 4 , 5$ ou 6 :

$\lambda(k+2,k) = 1$
$\lambda(k+3,k) = 2.k - 2$
$\lambda(k+4,k) = 2.k^2 + 2.k - 7$
$\lambda(k+5,k) = (4.k^3 + 24.k^2 + 38.k - 192) / 3$
$\lambda(k+6,k) = (2.k^4 + 28.k^3 + 172.k^2 + 422.k - 2184) / 3$

Por exemplo , se a diferença característica for 3 , o torneio dos polos P_3 será o próprio transitivo $Tr_3{}^*(x_1 , z , x_{k-1})$, e z poderá ser qualquer um dos $2.(k-1)$ polos . Portanto , $\lambda(k+3,k) = 2.k - 2$.

Se a diferença característica for 4 , $P_4 = P_4(x_1,z_1,z_2,x_{k-1})$ e temos duas posibilidades :

a) P_4 possui um 3-ciclo . Então , $P_4 = Tr_2(H_3 , x_{k-1})$ ou $P_4 = Tr_2(x_1 , H_3)$, portanto , há apenas dois casos .

b) P_4 é transitivo , $P_4 = Tr_4{}^*(x_1,z_1,z_2,x_{k-1})$, z_1 e z_2 podendo ser polos tipo x ou y . Se forem ambos tipo x , com $x_i \leftarrow x_j$,

$$S_{x,x} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j \geq \max\{i-2,1\}}^{k-1} 1 = \frac{(k-1)(k+4)}{2} - 3$$

será o número de torneios associados . Analogamente ,

$$S_{x,y} = S_{y,x} = \frac{(k-1)(k+2)}{2} - 1 \quad \text{e} \quad S_{y,y} = \frac{k(k-1)}{2} ,$$

$$\lambda(k+4,k) = 2 + S_{x,x} + S_{x,y} + S_{y,x} + S_{y,y} = 2.k^2 + 2.k - 7 .$$

A demonstração das últimas duas fórmulas segue linha similar □

Chamamos um torneio hamiltoniano 3-neutral quando este possui exatamente três vértices neutros .

Teorema 4.3) Para $n \geq 6$, os torneios 3-neutrais de ordem n são os torneios normais com diferença característica = 3 , e existem $2.n - 8$ não isomorfos para essa ordem .

demonstração : Sabemos que $cd(H_n) \leq \nu(H_n)$ (vide [2]) . Então , se H_n é 3-neutral , e $n \geq 6$, $cd(H_n) = 2$ ou 3 . De [2] , os únicos torneios H_i'com $cd(H_i') = 2$ e $i \geq 6$ são os bineutrais . Logo , $cd(H_n) = 3 \Rightarrow cd(H_n) = \nu(H_n)$ e H_n é normal . Da proposição 4.2 , existem $\lambda(n,n-3) = 2.(n - 3) - 2 = 2.n - 8$ desses torneios , não isomorfos □

Apêndice

1) Primeiros valores de $\sigma^{(i)}$, $\widetilde{\sigma}^{(i)}$ e $\tau^{(i)}$

p	1	2	3	4	5	6
$\widetilde{\sigma}_p^{(1)} = \sigma_p^{(1)}$	1	0	1	1	6	35
$\widetilde{\sigma}_p^{(2)}$	0	0	2	14	140	
$\widetilde{\sigma}_p^{(3)}$	0	0	2	36	684	
$\widetilde{\sigma}_p^{(4)}$	0	0	0	24	1088	
$\sigma_p^{(2)}$	2	0	4	16	152	
$\sigma_p^{(3)}$	3	0	11	81	1122	
$\sigma_p^{(4)}$	4	0	24	256	4688	
$\sigma_p^{(3,1)}$	1	0	7	65	970	
$\sigma_p^{(4,2)}$	2	0	20	240	4536	
$\tau_p^{(1)}$	1	1	2	4	12	56
$\tau_p^{(2)}$	2	4	12	48	296	
$\tau_p^{(3)}$	3	9	38	228	2148	
$\tau_p^{(4)}$	4	16	88	704	8912	

2) valores para $\mu(\Pi_p^{(i)})$

p	0	1	2	3	4	5	6
$\mu(\Pi_p^{(0)}) = \mu(\Pi_p^{(k)})$	1	1	0	1	1	6	35
$\mu(\Pi_p^{(1)})$	1	3	9	38	228	2148	
$\mu(\Pi_p^{(i)}), 2 \le i \le k-2$	1	2	8	52	496	7224	
$\mu(\Pi_p^{(k-1)})$	1	1	3	16	124	1456	

Referências :

[1] Barros T.E., "Homotopia Regular de Grafos" , Tese de Mestrado - IMECC - UNICAMP (1991) .

[2] Burzio M., Demaria D.C. , "On a Classification of Hamiltonian Tournaments" , Acta Universitatis Carolinae - Mathematica et physica , vol 29 n° 2 , pg 3-14 .

[3] Lima N.A., "Uma classificação para os torneios hamiltonianos", Tese de Mestrado - IMECC - UNICAMP (1995) .

[4] Demaria D.C. , Gianella G.M. , "On Normal Tournaments", Conferenze del Seminario di Matematica dell'Università di Bari , 1989 .

[5] Demaria D.C., Kiihl J.C., "On the simple quotient of tournaments which admit exactly one hamiltonian cycle", Acta Accad. Scienze de Torino , vol 124 (1990) , 94 - 108 .

[6] Demaria D.C., Guido C.S., "On the reconstruction of normal tournaments", J. Comb. Inf. and Sys. Sci., vol 15 (1990) , 301 - 323 .

[7] Wilson R.J., "Introduction to Graph Theory" , Academic Press , New York .

[8] Burzio M. , Demaria D.C. , "Hamiltonian Tournaments with the Least Number of 3-cycles" , Journal of Graph Theory .

[9] Cartwright D., Harary F., Norman R.Z.,"Introduction a la théorie des graphes orientés - Modèles Structuraux", Dunod , Paris , 1968 .

[10] Moon J.W., "On Subtournaments of a Tournament" , Canad. Math. Bull. , vol 9 , No 3 (1996) .

[11] Douglas R.J., "Tournaments that Admit Exactly One Hamiltonian Circuit", Proc. London Math. Soc. 21 (1970) .