Soluções Generalizadas para a Hierarquia de Lax

Maurílio Márcio Melo

Campinas, 25 de fevereiro de 1996

SOLUÇÕES GENERALIZADAS PARA A HIERARQUIA DE LAX

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Maurílio Márcio Melo e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 25 de fevereiro de 1997.

Hebe Biagioni

Prof(a). Dr(a). Hebe de Azevedo Biagioni
Orientadora

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 25 de fevereiro de 1997

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JOSÉ FELIPE LINARES

Prof (a). Dr (a). WAGNER VIEIRA LEITE NUNES

Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Prof (a). Dr (a). JAIME ANGULO PAVA

Prof (a). Dr (a). HEBE DE AZEVEDO BIAGIONI

SOLUÇÕES GENERALIZADAS PARA A HIERARQUIA DE LAX

por

Maurílio Márcio Melo[1]

TESE DE DOUTORADO

IMECC-UNICAMP

[1]O autor teve apoio financeiro do programa PICD-CAPES durante a elaboração desta tese.

À Cláudia, João e Pedro

Agradecimentos

À Deus por estar sempre do meu lado.

À Hebe de Azevedo Biagioni, minha orientadora, pela dedicação e competência.

À minha esposa Cláudia, pela paciência e por ter sacrificado vários fins de semana para que este trabalho pudesse ser concluído.

Aos professores dos Departamentos de Matemática e de Matemática Aplicada da UNICAMP, pela ajuda nos cursos e constante incentivo.

Aos meus colegas Pós-Graduandos, pelo constante incentivo, apoio e discussões favorecendo a conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática da UFG, por ter assumido encargos didáticos ora reservados a mim.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um resultado de existência e de unicidade de soluções para o problema de Cauchy envolvendo as equações da hierarquia de Lax.

O problema é apresentado no contexto das álgebras de Colombeau, modeladas em $H^\infty((0,T) \times \mathbf{R})$. Mostramos que se $g \in \mathcal{G}_2(\mathbf{R})$, então o problema de Cauchy para a equação $u_t = DG_m(u)$, $m \in \mathbf{Z}^+$, e dado inicial g tem soluções em $\mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ para todo $T > 0$. Como $H^{-\infty}(\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathcal{G}_2(\mathbf{R})$, isto permite considerar dados bastantes gerais.

Neste trabalho também apresentamos resultados de existência e de unicidade de soluções generalizadas para outras equações dispersivas de quinta ordem com dado inicial em $\mathcal{G}_2(\mathbf{R})$.

Demonstramos também que as soluções obtidas em $\mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R}))$ para os problemas aqui tratados são associadas com as soluções já existentes em $C([0,T] : H^s)$.

Conteúdo

Capítulo 0

Introdução.

A motivação original para generalizar o conceito de distribuições foi o problema de multiplicação que surge frequentemente no campo da física e que as vezes é resolvido de maneira não rigorosa, mas que produz resultados satisfatórios, merecendo portanto uma explicação matemática aceitável.

Na tentativa de definir um produto de distribuições, surgiram vários métodos, dentre eles citamos o método dual (ver, por exemplo, [28]), o método de Fourier ou de Ambrose [2] e o método de regularização e passagem ao limite (ver, por exemplo, [28]). Todos estes deixam a desejar com respeito à propriedades, e não são capazes de realizar um produto qualquer em $\mathcal{D}'$.

O método dual, quando restrito a espaços de Sobolev, diz que o produto $u \cdot v$ definido por $< u \cdot v, \varphi >=< u\chi, \varphi v >$, para $\varphi \in \mathcal{D}$, onde $<,>$ é o colchete de dualidade e $\chi \in \mathcal{D}$ (arbitrária), define uma aplicação bilinear contínua de $W^{m,q}_{loc} \times W^{l,p}_{loc} \to W^{k,r}_{loc}$ se $l, m \in \mathbf{Z}$ com $l+m \geq 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r} \leq 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$ e $k = \min\{l, m\}$.

A definição anterior justifica a notação $\frac{1}{4\pi|x|}\delta(t-|x|)$ dada para a medida

$$\varphi \to \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{1}{|x|}\varphi(x,|x|)dx,$$

solução fundamental com suporte no cone de luz adiantado para o operador de ondas $\partial_t^2 - \Delta_x$ em $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ (ver, por exemplo [38, p.62]). Por outro lado não é capaz de realizar o produto $\delta \cdot \delta$, visto que os espaços de Sobolev que contêm δ são do tipo $W^{-\frac{n}{p}-\sigma,q}_{loc}(\mathbf{R}^n)$, $\sigma > 0$ e portanto a condição $l + m \geq 0$ não pode ser satisfeita.

Se tentássemos calcular o produto $\delta \cdot \delta$ pelo método de regularização e passagem ao limite seríamos levados ao estudo da convergência de $\rho_\varepsilon^2(x)$ em $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ onde ρ_ε é um núcleo regularizante; para isto, tomando uma função teste $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ tal que $\varphi \equiv 1$ numa vizinhança de $x = 0$, então, para ε suficientemente pequeno, teríamos

$$\int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon^2(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} \rho_\varepsilon^2(x)dx.$$

Assim se a família $(\rho_\varepsilon^2)_{\varepsilon>0}$ convergisse em $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ seria limitada em $L^2(\mathbf{R}^n)$, portanto teria uma subsequência convergindo fracamente em $L^2(\mathbf{R}^n)$. Isto implicaria que $\delta \in L^2(\mathbf{R}^n)$, o que é um absurdo.

Dadas u e v em $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, o produto de Ambrose de u e v existe se u e v satisfazem à condição, ver [2]: (A) para todo $x \in \mathbf{R}^n$ existe uma vizinhança Ω_x tal que para $w, \psi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$ tem-se

$$F(wu)F^{-1}(\psi v) \in L^1(\mathbf{R}^n),$$

onde F denota a transformada de Fourier. Neste caso o produto de Ambrose de u e v é definido por

$$(u \cdot v)(w) = \int_{\mathbf{R}^n} F(wu)F^{-1}(\psi v)dx, \quad w \in \mathcal{D}(\Omega_x),$$

onde $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$ é tal que $\psi \equiv 1$ no $\operatorname{supp}(w)$. A motivação para esta definição está na identidade de Parseval

$$\int uv dx = \int F(u)F^{-1}(v)dx.$$

Tomando $u = v = \delta$, vemos diretamente que u e v não cumprem a condição (A).

Na construção de uma álgebra $(\mathcal{A}(\Omega), \cdot, +)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aberto, capaz de absorver elementos do tipo δ^2, algumas propriedades são naturalmente requeridas:

(i) $\mathcal{D}'(\Omega)$ está linearmente imerso em $\mathcal{A}(\Omega)$ e $f(x) \equiv 1$ é o elemento unidade em $\mathcal{A}(\Omega)$.

(ii) existe um operador derivação $\partial_{x_i} : \mathcal{A}(\Omega) \to \mathcal{A}(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$, que é linear e satisfaz à regra de Leibnitz da derivação do produto.

(iii) a restrição $\partial_{x_i}|_{\mathcal{D}'(\Omega)}$ é a derivada parcial usual de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

(iv) a restrição $\cdot|_{L^\infty_{loc}(\Omega) \times L^\infty_{loc}(\Omega)}$ coincide com o produto usual sobre funções limitadas.

Entretanto qualquer álgebra comutativa que satisfaz (i) e (ii) não pode satifazer simultaneamente às propriedades (iii) e (iv), como mostra o seguinte exemplo: seja H a função de Heaviside em $\mathbf{R}$; por (ii)

$$\partial(H^2) = 2H\partial H \quad \text{e} \quad \partial(H^3) = 3H^2\partial H.$$

Se (iv) for satisfeita

$$H^2 = H \quad \Rightarrow \quad H^3 = H,$$

e assim

$$2H\partial H = \partial H = 3H^2\partial H = 3H\partial H;$$

segue-se que

$$H\partial H = 0 \ \text{ e } \ \partial H = 0,$$

que contradiz (iii).

O exemplo acima sugere o relaxamento de uma das exigências (iii) e (iv). Trocando (iv) por

(v) $\cdot|_{C(\Omega)\times C(\Omega)}$ coincide com o produto usual sobre funções contínuas; ainda assim a construção de uma tal álgebra seria impossível como mostra o seguinte resultado de impossibilidade de Schwartz, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [28, p.27]: *não existe uma álgebra comutativa satisfazendo às propriedades (i), (ii), (iii) e (v)* (mesmo relaxando (v) para o produto em $C^k(\Omega) \times C^k(\Omega)$, $k \in \mathbf{Z}^+$, o resultado de Schwartz continua valendo).

As álgebras $\mathcal{G}$ das funções generalizadas construídas por J. F. Colombeau, ver [14], satisfazem às propriedades (i), (ii), (iii) e

(vi) $\cdot|_{C^\infty(\Omega)\times C^\infty(\Omega)}$ coincide com o produto usual sobre funções $C^\infty(\Omega)$.

Uma versão simplificada destas álgebras, denotada por $\mathcal{G}_s(\Omega)$, é dada por H. A. Biagioni em [5]. Esta versão mantém a injeção linear de $\mathcal{D}'(\Omega)$ e tem $C^\infty(\Omega)$ como sub-álgebra.

Esta álgebra de Colombeau permite estudar equações diferenciais que envolvem produtos de distribuições com dado e/ou coeficientes sendo funções singulares, conforme [5], [14] e [28].

Citaremos alguns resultados envolvendo equações diferenciais onde essas álgebras são usadas.

Considerando o problema de Cauchy para a equação parabólica não linear

$$u_t - \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 \quad \text{em} \quad (0,T) \times \Omega \tag{0.1}$$

e condição inicial

$$u(0,x) = \delta(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{0.2}$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ é um domínio contendo 0, $0 < p < \infty$, $0 < T < \infty$, H. Brézis e A. Friedman provaram em [10] que uma solução fraca de (0.1) e (0.2) existe se e somente se $0 < p < \frac{n+2}{n}$, não importando a condição de fronteira. Em particular o problema

$$\begin{aligned} &u_t - \Delta u + u^3 = 0 \quad \text{em} \quad (0,T) \times \Omega \\ &u(0,x) = \delta(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \end{aligned} \tag{0.3}$$

não tem solução fraca para qualquer dimensão $n \geq 1$.

Usando a teoria das funções generalizadas J. F. Colombeau e M. Langlais obtêm em [15] resultado de existência e unicidade de soluções para o problema (0.3) com condições nulas na fronteira.

Por outro lado, o problema de Cauchy envolvendo a equação de Burgers

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0 \\ &u(0,x) = u_0(x), \end{aligned} \tag{0.4}$$

não admite solução quando $u_0 = H$ (função de Heaviside) nas álgebras de Colombeau (ver [28, p.187]) apesar de ter solução fraca, ver, por exemplo, [37, p.266]. Este mesmo problema foi estudado por H. A. Biagioni e M. Oberguggenberger em [7] onde eles obtêm soluções generalizadas quando a igualdade na equação é trocada por associação, ver Definição 1.3.3.

O exemplo seguinte é a motivação principal de escolhermos a álgebra $\mathcal{G}_2$ como ambiente para estudarmos os vários problemas citados neste trabalho.

Em [8], Biagioni e Oberguggenberger mostram que o problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \\ &u|_{\{t=0\}} = g, \end{aligned} \tag{0.5}$$

não tem unicidade quando estudado na álgebra $\mathcal{G}_s([0,\infty)\times\mathbf{R})$. Considerando a solução tipo soliton da KdV, eles exibem uma solução generalizada para a equação KdV diferente de zero cuja restrição em $t = 0$ é zero em $\mathcal{G}_s(\mathbf{R})$, implicando portanto na não unicidade de soluções de (0.5). Eles obtêm resultado de existência e unicidade de soluções para o problema (0.5) quando estudado na álgebra $\mathcal{G}_2((0,\infty) \times \mathbf{R})$, ver Teorema 1.3.2.

As álgebras $\mathcal{G}_2(\Omega)$ são contruídas na seção 3 do capítulo 1 e têm a propriedade de que existe uma injeção linear de $H^{-\infty}(\Omega)$ em $\mathcal{G}_2(\Omega)$ que faz com que $H^{\infty}(\Omega)$ seja uma sub-álgebra de $\mathcal{G}_2(\Omega)$.

Em [6], [8], [11] e [12] outras equações tais como Benjamin-Ono (BO), Smith (S), Benjamin-Bona-Mohony (BBM), Schrödinger cúbica não linear (NLS) e Korteweg-de Vries modificada (mKdV) foram estudadas no mesmo contexto.

A distribuição do conteúdo desse trabalho segue a seguinte ordem:

No capítulo 1 apresentamos as equações de evolução não lineares que serão estudadas, enunciamos os principais resultados usados e apresentamos o espaço $\mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R})$ onde pretendemos estudar os problemas de Cauchy. Também neste capítulo damos as definições a serem usadas no trabalho.

No capítulo 2 demonstramos o seguinte resultado (Teorema 2.1.1) de existência e unicidade de soluções para o problema de valor inicial envolvendo as equações da hierarquia de Lax

Sejam $g \in \mathcal{G}_2(\mathbf{R})$ e $T > 0$ finito. Então existe uma solução u em $\mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R})$ para o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t &= DG_m(u) \;\text{ em }\; \mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R}) \\ u|_{\{t=0\}} &= g \;\text{ em }\; \mathcal{G}_2(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Além disso, se exigirmos que u juntamente com suas derivadas em relação a x até a ordem $3m-3$ sejam do tipo ∞-$(\log)^{1/2(m-1)^2}$, então existe no máximo uma solução $u \in \mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R})$ para este problema. Esta condição é satisfeita se g, g', $\cdots$, $g^{(3m-2)}$ forem de tipo 2-$(\log)^{\frac{1}{(3m-1)2(m-1)^2}}$.

Este resultado estende para a hierarquia de Lax o Teorema 1.3.2 obtido em [8] para a equação KdV. Neste capítulo também demonstramos a Proposição 2.3.1 que estabelece um resultado de coerência (ver Definição 1.3.2) entre a solução generalizada e a solução clássica do mesmo problema dada no Teorema 1.2.6 devido a Ponce [30].

O capítulo 3 é dedicado à terceira equação da hierarquia; para esta equação melhoramos o resultado obtido no capítulo 2. Provamos o seguinte resultado de unicidade (Teorema 3.1.1)

Dados $g \in \mathcal{G}_2(\mathbf{R})$ e $T > 0$ finito, *com g, g' e g'' do tipo 2-$(log)^{\frac{1}{2}}$, o problema* *de Cauchy para a equação* $u_t = DG_3(u)$ *e dado inicial* g *tem no máximo uma solução* $u \in \mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ *satisfazendo à condição: possui um representante* $\widehat{u} \in \mathcal{E}_{M,2}[(0,T) \times \mathbf{R})]$ *tal que*

$$\sup_{[0,T]} \|\widehat{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|_4 = \mathcal{O}(|log\varepsilon|^{\frac{1}{4}}), \text{ com } \varepsilon \to 0.$$

Esta condição é satisfeita se g, $g', \cdots, g^{(4)}$ *forem de tipo* 2-$(\log)^{\frac{1}{20}}$.

Finalmente no capítulo 4, usando como modelo uma equação de evolução não linear de quinta ordem, obtemos resultado de existência local, unicidade e coerência das soluções para o problema de Cauchy envolvendo as equações de Olver (1.13), Benney (1.14) e Fisher (1.15). Temos o seguinte resultado (Teorema 4.2.2)

Dado $g \in \mathcal{G}_2(\mathbf{R})$, *com* g *e suas derivadas até a ordem quatro de tipo 2-limitado, existe* $T > 0$ *e uma solução* u *em* $\mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ *para o problema de Cauchy envolvendo as equações de Olver, Benney e Fisher. Além disso, se exigirmos que* u *satisfaça à condição do Teorema 3.1.1, então existe no máximo uma solução em* $\mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ *para este problema.*

Notações:

$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$.

$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

$G_m(u)$ (é o gradiente em u do funcional $F_m(u)$).

$[A, B] = AB - BA$, (comutador dos operadores A e B).

$W^{k,p}(\Omega)$ (espaço usual de Sobolev).

$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$.

$H^\infty(\Omega) = \cap_k H^k(\Omega)$, $H^{-\infty}(\Omega) = \cup_k H^k(\Omega)$.

$\mathcal{D}(\Omega)$ (espaço das funções testes).

$\mathcal{D}'(\Omega)$ (espaço das distribuições).

$\|\cdot\|_k$ é a norma de H^k.

$\|\cdot\|_{L^p}$ é a norma de L^p.

$O_M(\mathbf{R}^l)$ (espaço das funções $C^\infty(\mathbf{R}^l)$ que crescem juntamente com suas derivadas no máximo como uma potência de $|x|$, quando $|x| \to \infty$).

$S(\mathbf{R}^n)$ (espaço de Schwartz das funções que decrescem juntamente com suas derivadas rapidamente no infinito).

$\mathcal{E}_2[\Omega]$ (álgebra das aplicações de $(0,1) \to H^\infty(\Omega)$, $\widehat{u} : \varepsilon \to \widehat{u}_\varepsilon \in H^\infty(\Omega)$).

$\mathcal{E}_{M,2}[\Omega]$ (álgebra das aplicações de $(0,1) \to H^\infty(\Omega)$ que têm crescimento moderado na norma $\|\cdot\|_k$, k inteiro).

$\mathcal{N}_2(\Omega)$ (ideal de $\mathcal{E}_{M,2}[\Omega]$ das aplicações cujas normas $\|\cdot\|_k$ decrescem mais rápido que $\varepsilon^M, \forall M > 0$).

$\mathcal{G}_2(\Omega) = \frac{\mathcal{E}_{M,2}[\Omega]}{\mathcal{N}_2(\Omega)}$ (álgebra das funções generalizadas modeladas em $H^\infty(\Omega)$).

$cl(\widehat{u})$ (classe em $\mathcal{G}_2(\Omega)$ representada por $\widehat{u} \in \mathcal{E}_{M,2}[\Omega]$).

$[a]$ (parte inteira de $a \in \mathbf{R}$).

S^1 (círculo de centro na origem e raio 1).

c, c_i (são as várias constantes que podem mudar de valor em cada passagem ou depender polinomialmente de ε).

Capítulo 1

Preliminares.

Este capítulo é dedicado à apresentação das equações a serem estudadas neste trabalho. As propriedades relevantes satisfeitas por estas equações serão também apresentadas. Ainda neste capítulo exibiremos o espaço onde pretendemos estudar o problema de Cauchy para equações da hierarquia de Lax, e também para outras equações de evolução. Os principais resultados a serem usados serão também enunciados.

1.1 A hierarquia de Lax.

Comecemos apresentando uma família de equações diferenciais parciais não lineares de evolução da forma

$$u_t = DG_m(u), \tag{1.1}$$

onde para cada $m \in \mathbf{Z}^+, G_m(u)$ é o gradiente em u de um funcional $F_m(u)$ que é constante ao longo das soluções da equação de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t = uu_x + u_{xxx}. \tag{1.2}$$

A família de funcionais $\{F_m(u)\}$ foi exibida por Miura, Gardner, Kruskal e Zabusky em [23] e [27], onde eles mostraram que os $F_m(u)$ são da forma

$$F_m(u) = \int_{\mathbf{R}} f_m(u)dx, \tag{1.3}$$

onde $f_m(u)$ é um polinômio em u e suas x-derivadas até a ordem $m-1$ e cada monômio de f_m é dado por um produto do tipo

$$\prod_{j=0}^{m-1}(D^j u)^{l_j}, \tag{1.4}$$

para inteiros $l_j \geq 0$, com j, l_j e m satisfazendo à relação

$$\sum_{j=0}^{m-1}(1+\frac{j}{2})l_j = m+1. \tag{1.5}$$

Relacionamos a seguir os quatro primeiros polinômios $f_m(u)$, ver [27]

$$\begin{aligned}
f_1(u) &= \frac{1}{2}u^2,\\
f_2(u) &= \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}(Du)^2,\\
f_3(u) &= \frac{1}{4}u^4 - 3u(Du)^2 + \frac{9}{5}(D^2u)^2,\\
f_4(u) &= \frac{1}{5}u^5 - 6u^2(Du)^2 + \frac{36}{5}u(D^2u)^2 - \frac{108}{35}(D^3u)^2.
\end{aligned}$$

Multiplicando por uma constante adequada, os $f_m(u)$ podem ser escritos na forma, ver [23]

$$f_m(u) = (D^{m-1}u)^2 + c_m(D^{m-2}u)^2u + Q_m(u, Du, ..., D^{m-3}u), \tag{1.6}$$

onde Q_m é um polinômio nas variáveis u e suas derivadas em x de ordem no máximo $m-3$.

Gardner, Kruskal, Miura e Zabusky mostraram em [27] que os autovalores do operador de Schrödinger com potencial u,

$$L(t) = D^2 + \frac{1}{6}u(\cdot, t), \tag{1.7}$$

são invariantes se u é solução da KdV. Este fato lhes permitiu usar as idéias do espalhamento inverso, ver [20], para obter soluções exatas do problema de valor inicial para a equação KdV. Este princípio foi generalizado em [25], onde Lax exibe uma família de equações diferenciais do tipo $u_t = K(u)$, chamada de KdV generalizada com a seguinte propriedade: o operador $L(t)$ dado em (1.7) se mantém unitariamente equivalente ao longo das soluções da equação em questão. Isto significa que existe uma família a um parâmetro de operadores unitários $U(t)$ tal que

$$U^{-1}(t)L(t)U(t)$$

é independente de t quando u satisfaz à equação $u_t = K(u)$. E se isto acontece, pode-se mostrar então que os autovalores do operador $L(t)$ formam uma família de quantidades conservadas (leis de conservação) para a equação em consideração.

Considerando o teorema de Stone, ver [33, p. 265], que estabelece que uma família de operadores unitários satisfaz a uma equação da forma

$$U_t = BU, \tag{1.8}$$

onde B é um operador anti-simétrico, e reciprocamente, todas as soluções de (1.8) com B anti-simétrico constituem uma família de operadores unitários, Lax mostrou que

$$\frac{d}{dt}L(t) = [B, L] = BL - LB. \tag{1.9}$$

Como o operador $\frac{dL}{dt}$ se reduz à multiplicação por $\frac{1}{6}u_t$, para exibir uma família de equações com a propriedade acima é suficiente exibir uma família de operadores anti-simétricos B_m tal que o colchete $[B_m, L]$ corresponda a um operador multiplicação.

Com a escolha $B_1 = D$ tem-se que $[B_1, L] = \frac{1}{6}Du$ que, combinando com a equação (1.9), fornece a seguinte equação

$$u_t = u_x.$$

Esta equação constitui a primeira equação da hierarquia de Lax.

Propondo $B_2 = D^3 + bD + Db$ para b escolhido de modo que o colchete $[B_2, L]$ tenha ordem zero, Lax produziu a segunda equação de sua hierarquia, a qual coincide com a KdV (1.2).

Em geral Lax considerou a família de operadores anti-simétricos

$$B_m = D^{2m-1} + \sum_{j=1}^{m-1}(b_j D^{2j-1} + D^{2j-1}b_j).$$

Como $[B_m, L]$ é simétrico, requerer que seja de ordem zero impõe $m-1$ condições sobre B_m; estas determinam unicamente os coeficientes b_j, e o termo de ordem zero de $[B_m, L] =: K_m$ determina a ordem $2m-1$ da equação

$$u_t = K_m(u), \tag{1.10}$$

que constitui a chamada hierarquia de Lax e tem a propriedade de que os autovalores do operador de Schrödinger (1.7) com potencial u são invariantes com o tempo se u é solução de (1.10).

Em [19] e também em [24] é mostrado que

$$DG_m(u) = c(m)[B_m, L], \tag{1.11}$$

onde $c(m)$ é uma constante que depende somente de m. Portanto a família de equações dada em (1.1) é, a menos de multiplicação por constantes, a mesma família dada em (1.10).

Observemos que de (1.4) podemos concluir que os polinômios f_m têm grau $m+1$, pois contêm o termo u^{m+1} (caso $l_0 = m+1$ e $l_j = 0$ para $j \geq 1$, ver [35]), e $\sum_{j=0}^{m-1} l_j = m + 1 - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{2} l_j \leq m+1$); portanto $G_m(u)$ é um polinômio de grau m. Uma fórmula explicita para os $G_m(u)$ é dada em [35]. Assim a equação (1.1) é uma equação não linear de ordem $2m-1$ e grau m.

1.2 Resultados básicos.

A seguir enunciaremos os principais resultados a serem usados neste trabalho. Alguns teoremas envolvem equações que não pertencem à hierarquia de Lax, neste caso, estas equações serão apresentadas.

Martin Schwarz considerou em [36] o problema periódico associado às equações da hierarquia de Lax. Usando a estrutura Hamiltoniana exibida pela família, ele estabeleceu o seguinte resultado global de existência e unicidade.

Teorema 1.2.1 *Para todo m, se $n \geq 2m-1$ e o dado inicial g é um elemento de $H^n(S^1)$, então existe uma solução global $u(t) \in H^n(S^1)$ $\forall t > 0$ para a equação (1.1). Além disso, para $n \geq 3m-2$, u é unicamente determinada pelo seu dado inicial.*

O Teorema 1.2.2 é devido a Saut [34, Corolários 3 e 4].

Teorema 1.2.2 *Para qualquer $T > 0$, existe uma solução $u \in C^\infty([0,T] \times \mathbf{R}) \cap L^\infty([0,T] : H^\infty(\mathbf{R}))$ do problema de Cauchy para a equação (1.1) e dado inicial $g \in H^\infty(\mathbf{R})$.*

Obs.: A solução obtida por Saut neste teorema é única na classe considerada; este resultado é consequência da demonstração feita por Martin Schwarz em [36] do Teorema 1.2.1, adaptada para o caso $\mathbf{R}$.

Considerando o caso $m = 3$, que corresponde à seguinte equação

$$u_t + c_1 u^2 u_x + c_2 u_x u_{xx} + c_3 u u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0, \tag{1.12}$$

para constantes c_1, c_2, c_3 convenientemente escolhidas, Ponce dá em [31] uma prova da unicidade de soluções para o problema do Teorema 1.2.2 diferente da demonstração feita em [36] por M. Schwarz; esta técnica será a base da demonstração do Teorema 3.1.1. O método usado por Ponce não usa a propriedade Hamiltoniana da equação, o que lhe permitiu estender o resultado às equações de Olver, Benney e Fisher, respectivamente

$$u_t + u_x + c_1 u u_x + c_2 u_{xxx} + c_3 u_x u_{xx} + c_4 u u_{xxx} + c_5 u_{xxxxx} = 0, \tag{1.13}$$

$$u_t - 2u_x u_{xx} - u u_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \tag{1.14}$$

$$u_t + (u + u^2) u_x + (1 + u)(u_x u_{xx} + u u_{xxx}) + u_{xxxxx} = 0. \tag{1.15}$$

Considerando como modelo a equação do problema (1.16) abaixo, a qual já contém a estrutura básica exibida pelas equações acima, Ponce demonstrou em [31], o seguinte resultado

Teorema 1.2.3 *Para $g \in H^s(\mathbf{R})$ com $s \geq 4$, existe $T = T(\|g\|_4) > 0$ e uma única solução u do problema*

$$\begin{aligned} &u_t + c_1 u_x u_{xx} + c_2 u u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0 \\ &u(0, \cdot) = g \end{aligned} \tag{1.16}$$

na classe

$$\chi_T = C([0,T] : H^s(\mathbf{R})) \cap L^2([0,T] : H^{s+2}_{loc}(\mathbf{R})).$$

Mais ainda, para todo $T' < T$ existe uma vizinhança V de g em $H^s(\mathbf{R})$ tal que a aplicação $V \to \chi_{T'}$, $\tilde{g} \mapsto \tilde{u}$ é contínua.

As leis de conservação permitiram a Ponce estender o resultado desse teorema para a equação (1.12) a qualquer intervalo de tempo $[0, T_0]$; mais precisamente

Teorema 1.2.4 *Para a equação (1.12), o resultado do Teorema 1.2.3 vale em qualquer intervalo de tempo* $[0, T_0]$.

Em [31] Ponce estabelece também o seguinte resultado

Teorema 1.2.5 *O resultado do Teorema 1.2.3 vale também para as equações de Olver (1.13), Benney (1.14) e Fisher (1.15).*

Para a equação geral (1.1), o resultado obtido por Ponce em [30, Teorema 1.1] é o seguinte.

Teorema 1.2.6 *Existem* $s = s(m)$ *e* $\sigma = \sigma(m) \in \mathbf{Z}^+$ *tais que para qualquer* $g \in H^s(\mathbf{R}) \cap L^2(|x|^\sigma dx) = \chi_{s,\sigma}$, *existe* $T = T(\|g\|_{\chi_{s,\sigma}})$ *e uma única solução* u *da equação (1.1), com dado inicial* g, *satisfazendo às condições*

$$u \in C([0,T] : \chi_{s,\sigma}),$$

$$\sup_x \int_0^T |D^{s+m-1}u(t,x)|^2 dt < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{[0,T]} |D^k u(t,x)| dx < \infty, \; k = 0, 1, \cdots, \left[\frac{s+m-1}{2}\right].$$

Mais ainda, existe uma vizinhança V *de* g *em* $\chi_{s,\sigma}$ *tal que a aplicação* $\tilde{g} \mapsto \tilde{u}(t)$ *de* V *na classe definida no teorema é Lipschitz.*

Enumeramos agora algumas desigualdades que serão usadas em nossas demonstrações.

O resultado seguinte é devido a Gagliardo-Nirenberg, sua demonstração pode ser encontrada em [18, p.24]

$$\|D^s w\|_{L^p} \leq c \left\|D^k w\right\|_{L^q}^{\lambda} \|w\|_{L^r}^{1-\lambda}, \tag{1.17}$$

onde $\frac{1}{p} - s = \lambda(\frac{1}{q} - k) + (1-\lambda)\frac{1}{r}$, $\lambda \in [\frac{s}{k}, 1]$.

As desigualdades abaixo são devidas a Young, (1.18) é consequência da convexidade da função logarítmica, e (1.19) pode ser encontrada em [9, p.77].

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \tag{1.18}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \ 1 < p, q < \infty,\ \ a, b > 0.$

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q}, \tag{1.19}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r} > 0,\ f \in L^p,\ g \in L^q.$

A demonstração da seguinte desigualdade, conhecida como desigualdade generalizada de Minkowski, pode ser encontrada em [22, p.102]

$$\left(\int_{\mathbf{R}} \left| \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dy \right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x, y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy, \tag{1.20}$$

$1 \leq p < \infty.$

O resultado seguinte é uma das versões do Lema de Gronwall, ver [13, p.55]

Lema 1.2.1 *Sejam f e g funções de $L^1(0, T)$, positivas tais que $fg \in L^1(0, T)$ e $\alpha \geq 0$ (constante). Se*

$$f(t) \leq \alpha + \int_0^t g(\sigma) f(\sigma) d\sigma, \text{ para todo } t \in (0, T),$$

então

$$f(t) \leq \alpha \exp\left(\int_0^t g(\sigma) d\sigma\right).$$

1.3 A álgebra $\mathcal{G}_2(\Omega)$.

Nesta seção exibiremos o espaço onde estudaremos o problema de Cauchy para as equações da hierarquia de Lax e também para as equações de Olver, Benney e Fisher. Definiremos a álgebra tipo Colombeau $\mathcal{G}_2(\Omega)$ que é um caso particular das álgebras $\mathcal{G}_{p,q}(\Omega)$, definidas em [8].

Sejam $I = (0,1)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aberto. Denotamos por $\mathcal{E}_2[\Omega] = (H^\infty(\Omega))^I$ o conjunto das aplicações $\widehat{u} : I \to H^\infty(\Omega)$, $\varepsilon \in I \to \widehat{u}_\varepsilon \in H^\infty(\Omega)$, a valores reais.

Definimos os conjuntos

$$\mathcal{E}_{M,2}[\Omega] = \{\widehat{u} \in \mathcal{E}_2[\Omega] : \text{ para todo } k \in \mathbf{Z}^+, \exists N > 0 \text{ tal que}$$

$$\|\widehat{u}_\varepsilon\|_k = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}), \text{ com } \varepsilon \to 0\}, \tag{1.21}$$

$$\mathcal{N}_2[\Omega] = \{\widehat{u} \in \mathcal{E}_{M,2}[\Omega] : \text{ para todo } k \in \mathbf{Z}^+, \text{ todo } M > 0, \text{ tem-se}$$

$$\|\widehat{u}_\varepsilon\|_k = \mathcal{O}(\varepsilon^{M}), \text{ com } \varepsilon \to 0\}. \tag{1.22}$$

Os elementos de $\mathcal{E}_{M,2}[\Omega]$ são representados por $\widehat{u}$, $\widehat{v}$,$\cdots$ e são chamados de moderados. O conjunto $\mathcal{N}_2[\Omega]$ é chamado de espaço nulo.

Se Ω tem a propriedade do cone, ver [1, p.66], então valem as seguintes propriedades, ver [8]:

(i) $\mathcal{E}_{M,2}[\Omega]$ é uma álgebra com derivadas parciais,

(ii) $\mathcal{N}_2[\Omega]$ é um ideal de $\mathcal{E}_{M,2}[\Omega]$ que é invariante sob derivação,

(iii) Se $\Omega = \mathbf{R}^n$ e $\widehat{u} \in \mathcal{E}_2[\Omega]$ então, para todo $\varepsilon > 0$ $\lim_{|x|\to\infty} \widehat{u}_\varepsilon(x) = 0$.

O conjunto $\mathcal{G}_2(\Omega)$, definido pelo quociente

$$\mathcal{G}_2(\Omega) = \frac{\mathcal{E}_{M,2}[\Omega]}{\mathcal{N}_2[\Omega]},$$

é também uma álgebra; seus elementos representados por u, v, $\cdots$, são chamados de funções generalizadas em Ω. O produto em $\mathcal{G}_2(\Omega)$ é definido sobre os representantes, isto é, se u e $v \in \mathcal{G}_2(\Omega)$ então o produto uv é a classe de $\widehat{u}\widehat{v}$, onde $\widehat{u}$ e $\widehat{v}$ são quaisquer representantes de u e v respectivamente. Vemos imediatamente que a definição independe dos representantes. Vale o seguinte teorema

Teorema 1.3.1 *(i) Existe um operador derivação em $\mathcal{G}_2(\Omega)$ que é oriundo da derivação em $\mathcal{E}_{M,2}[\Omega]$, isto é, se $u \in \mathcal{G}_2(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbf{N}^n$ então $D^\alpha u := cl(D^\alpha \widehat{u})$ em $\mathcal{G}_2(\Omega)$, onde $\widehat{u} \in \mathcal{E}_{M,2}[\Omega]$ é um representante de u, e $cl(D^\alpha \widehat{u}) \in \mathcal{G}_2(\Omega)$ é a classe representada por $D^\alpha \widehat{u}$.*

(ii) Existe uma injeção linear de $H^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ em $\mathcal{G}_2(\mathbf{R}^n)$ construída da seguinte maneira: fixemos $\rho \in S(\mathbf{R}^n)$ satisfazendo às condições

$$\int_{\mathbf{R}^n} \rho(x)dx = 1, \quad \int_{\mathbf{R}^n} x^\alpha \rho(x)dx = 0 \ , \ \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, \ |\alpha| \geq 1. \tag{1.23}$$

A aplicação $\iota : w \to (w * \rho_\varepsilon)_\varepsilon$, *onde* $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$, *define uma injeção linear de* $H^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ *em* $\mathcal{E}_{M,2}[\mathbf{R}^n]$. *Esta aplicação define, por passagem ao quociente, uma injeção linear de* $H^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$ *em* $\mathcal{G}_2(\mathbf{R}^n)$ *que faz com que* $H^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ *seja uma sub-álgebra de* $\mathcal{G}_2(\mathbf{R}^n)$.

Para a demonstração deste teorema, ver [8].

Tendo em vista as aplicações a problemas de valor inicial que faremos logo mais, daremos agora algumas definições.

Definição 1.3.1 *Se* $u \in \mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R})$ *a restrição de* u *a* $\{0\}\times\mathbf{R}$ *é definida do seguinte modo: seja* $\widehat{u} \in \mathcal{E}_{M,2}[(0,T)\times\mathbf{R}]$ *um representante de* u. *Por imersão em espaço de Sobolev temos que* $\widehat{u}_\varepsilon \in C^\infty([0,T]\times\mathbf{R})$ *para todo* $\varepsilon > 0$. *Como a aplicação restrição* $H^{m+1}((0,T)\times\mathbf{R}) \to H^m(\mathbf{R})$ *é contínua para todo* $m \in \mathbf{Z}^+$, *temos que a aplicação* $\widehat{u} : I \to H^m(\mathbf{R})$, $\varepsilon \to \widehat{u}_\varepsilon(0,\cdot)$ *pertence a* $\mathcal{E}_{M,2}[\mathbf{R}]$. *Resultado análogo vale para* $\widehat{u} \in \mathcal{N}_2((0,T)\times\mathbf{R}))$. *Assim podemos definir a restrição de* u *a* $\{0\}\times\mathbf{R}$ *como a classe em* $\mathcal{G}_2(\mathbf{R})$ *representada por* $\widehat{u}_\varepsilon(0,\cdot)$ *em* $\mathcal{E}_{M,2}[\mathbf{R}]$. *Denotamos esta classe por* $u|_{\{t=0\}}$.

Definição 1.3.2 *Dizemos que* $u \in \mathcal{G}_2(\Omega)$ *é associada a uma distribuição* $w \in H^{-\infty}(\Omega)$ *se existir um representante* $\widehat{u}$ *de* u *tal que* $\widehat{u}_\varepsilon \to w$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *quando* $\varepsilon \to 0$. *Denotamos esta propriedade por* $u \approx w$. *Diremos que* u *e* v *pertencentes a* $\mathcal{G}_2(\Omega)$ *são associadas se* $u - v \approx 0$.

Da definição segue que duas distribuições em $H^{-\infty}(\Omega)$, vistas como elementos de $\mathcal{G}_2(\Omega)$ são associadas se e só se são iguais. Assim o conceito de associação generaliza a igualdade de distribuições.

Definição 1.3.3 *Dizemos que* $u \in \mathcal{G}_2(\Omega)$ *é de tipo* r-$(\log)^{\frac{1}{j}}$, $2 \leq r \leq \infty$, $j \geq 1$, *se* u *tem um representante* $\widehat{u} \in \mathcal{E}_{M,2}[\Omega]$ *tal que*

$$\|\widehat{u}_\varepsilon\|_{L^r} = \mathcal{O}(|\log\varepsilon|^{\frac{1}{j}}), \text{ com } \varepsilon \to 0; \tag{1.24}$$

u é de tipo $r-$*limitado se existirem constantes* C *e* δ *positivas tais que*

$$\|\widehat{u}_\varepsilon\|_{L^r} \leq C, \quad 0 < \varepsilon < \delta.$$

Se $r = \infty$ *dizemos que* u *é de tipo limitado.*

Notemos que se $\widehat{u} \in \mathcal{E}_{M,2}[\Omega]$ então $\widehat{u}$ satisfaz (1.21) com a norma de $W^{k,r}(\Omega)$ para todo $2 \leq r \leq \infty$. Observemos também que as definições acima são boas, no sentido que independem dos representantes.

Para a próxima definição convém observarmos uma propriedade não linear das funções generalizadas: se $F \in O_M(\mathbf{R}^l)$ podemos definir $F(u_1, \cdots, u_l)$, para $u_i \in \mathcal{G}_2(\Omega)$, $i = 1, \cdots, l$, (ver [5]).

Definição 1.3.4 *Seja $L : \mathcal{G}_2(\Omega) \to \mathcal{G}_2(\Omega)$ um operador diferencial tipo polinomial definido sobre os elementos de $\mathcal{G}_2(\Omega)$. Dizemos que $u \in \mathcal{G}_2(\Omega)$ é solução da equação diferencial $L(u) = 0$ em $\mathcal{G}_2(\Omega)$ se, para qualquer representante $\widehat{u}$ em $\mathcal{E}_{M,2}[\Omega]$, existe $\widehat{\eta} \in \mathcal{N}_2(\Omega)$ tal que*

$$L(\widehat{u}_\varepsilon(x)) = \widehat{\eta}_\varepsilon(x), \text{ para } \varepsilon \in I \text{ e } x \in \Omega.$$

É nesse sentido que u é solução generalizada da equação $L(u) = 0$.

O seguinte teorema de existência e unicidade de soluções generalizadas do problema de Cauchy para a equação KdV (1.2) é devido a Biagioni e Oberguggenberger [8]. É este resultado que pretendemos, no capítulo 2, generalizar para a hierarquia de Lax.

Teorema 1.3.2 *Seja $g \in \mathcal{G}_2(\mathbf{R})$ e $T > 0$ finito. Então existe uma solução $u \in \mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ para a equação (1.2) tal que $u|_{\{t=0\}} = g$. Além disso, se exigirmos que Du seja de tipo ∞-log, teremos no máximo uma solução para este problema. Esta condição é satisfeita se g, g' e g'' forem de tipo 2-$(\log)^{\frac{1}{4}}$.*

Para maiores informações sobre funções generalizadas, citamos [5], [14], [16] e [28]

Capítulo 2

Soluções generalizadas para a hierarquia de Lax.

2.1 Existência e unicidade em $\mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$.

Na demonstração do teorema de existência e unicidade para a equação (1.1) com dado inicial em $\mathcal{G}_2(\mathbf{R})$ que faremos a seguir, usamos a característica especial exibida pela família, isto é, as soluções destas equações satisfazem a uma infinidade de leis de conservação. Mostraremos que para cada inteiro positivo m, existem soluções generalizadas de (1.1), em todo tempo, e que, sob certas condições, as soluções são unicamente determinadas pelo seu valor inicial.

Teorema 2.1.1 *Sejam $g \in \mathcal{G}_2(\mathbf{R})$ e $T > 0$ finito. Então existe uma solução u em $\mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ para o problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} &u_t = DG_m(u) \quad em\ \mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R}) \\ &u|_{\{t=0\}} = g \quad em\ \mathcal{G}_2(\mathbf{R}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Além disso, se exigirmos que u juntamente com suas derivadas em relação a x até a ordem $3m-3$ sejam do tipo ∞-$(\log)^{1/2(m-1)^2}$ (ver (1.24)), então existe no máximo uma solução $u \in \mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ para o problema (2.1).

Restrições sobre o dado inicial g que garantem que a condição acima seja satisfeita serão dadas na seção 2.2.

Prova *Existência:* Seja $\widehat{g}$ um representante de g em $\mathcal{E}_{M,2}[\mathbf{R}]$. Como $\widehat{g}_\varepsilon \in H^\infty(\mathbf{R})$, para todo $\varepsilon > 0$, pelo Teorema 1.2.2, existe uma solução $\widehat{u}_\varepsilon$ em $C^\infty([0,T] \times \mathbf{R}) \cap L^\infty([0,T], H^\infty(\mathbf{R}))$ para o problema

$$\begin{aligned} &\partial_t \widehat{u}_\varepsilon = DG_m(\widehat{u}_\varepsilon) \ \text{ em } (0,T) \times \mathbf{R} \\ &\widehat{u}_\varepsilon(0) = \widehat{g}_\varepsilon \ \text{ em } \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Portanto dado $\alpha \in \mathbf{N}^2$, segue da equação em (2.2) que $D^\alpha \widehat{u}_\varepsilon(t,\cdot) \in L^2(\mathbf{R})$ para todo $t \in (0,T)$ e $\varepsilon > 0$. Como

$$\|D^\alpha \widehat{u}_\varepsilon\|_0 \leq \sqrt{T}\, sup_t \|D^\alpha \widehat{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|_0,$$

temos que $\widehat{u}_\varepsilon \in H^\infty((0,T) \times \mathbf{R})$. Em particular a aplicação $\widehat{u} : I \times (0,T) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(\varepsilon, t, x) \to \widehat{u}_\varepsilon(t,x)$ pertence a $\mathcal{E}_2[(0,T) \times \mathbf{R}]$. Como as leis de conservação satisfeitas pelas equações (1.2) e (1.1) são as mesmas, a demonstração de que $\widehat{u} \in \mathcal{E}_{M,2}[(0,T) \times \mathbf{R}]$ é a mesma dada por Biagioni e Oberguggenberger na prova do Teorema 1.3.2 em [8], onde eles mostram que uma x-derivada de ordem qualquer da solução $\widehat{u}_\varepsilon$ da equação KdV satisfaz a estimativa (1.21) com a norma de L^2, e usando a equação, estendem o resultado para uma derivada qualquer de $\widehat{u}_\varepsilon$. Assim a classe $u \in \mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$, cujo representante é $\widehat{u}$, é uma solução de (2.1).

Unicidade: Suponhamos que existam duas soluções $u, v \in \mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ desse problema satisfazendo às condições do teorema. Neste caso existem $\widehat{N} \in \mathcal{N}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ e $\widehat{\eta} \in \mathcal{N}_2(\mathbf{R})$ tais que, se denotarmos por $\widehat{u} = \widehat{u}_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ e $\widehat{v} = \widehat{v}_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ os representantes em $\mathcal{E}_{M,2}[(0,T) \times \mathbf{R})]$ das soluções u e v respectivamente, então

$$\begin{aligned} &\partial_t(\widehat{u}_\varepsilon - \widehat{v}_\varepsilon)(t,x) = D(G_m(\widehat{u}_\varepsilon) - G_m(\widehat{v}_\varepsilon))(t,x) + \widehat{N}_\varepsilon(t,x) \\ &(\widehat{u}_\varepsilon - \widehat{v}_\varepsilon)(0,x) = \widehat{\eta}_\varepsilon(x). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Vamos seguir a demonstração de Schwarz do Teorema 1.2.1 dada em [36], adaptando para o caso $\mathbf{R}$. Devemos observar que as constantes que aparecem nas suas estimativas, no nosso caso dependem de ε, a saber, são polinômios de grau no máximo $2(m-1)^2$ nas normas L^∞ de $\widehat{u}_\varepsilon$, $\widehat{v}_\varepsilon$ e de suas x-derivadas de ordem no máximo $3m - 3$ e temos que controlar a dependência destas constantes em relação a ε.

Para facilitar as contas e simplificar as notações podemos supor $\widehat{\eta} = 0$, pois caso contrário, trocamos $\widehat{u}$ por $\widehat{u} + \widehat{\eta}$. Também omitiremos a letra ε e o sinal ^ em nossas notações. Assim se fizermos $w = u - v$, o problema (2.3) para w toma a forma

$$\begin{aligned} &\partial_t w = D(G_m(u) - G_m(v)) + N \\ &w|_{t=0} = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Multiplicando a equação em (2.4) por w e integrando o resultado em x e t obtemos, após usar integração por partes em x, a equação

$$\frac{1}{2}\int_0^t \int_{\mathbf{R}} \partial_t w^2 dx dt = -\int_0^t \int_{\mathbf{R}} w_x (G_m(u) - G_m(v)) dx dt + \int_0^t \int_{\mathbf{R}} wN dx dt. \tag{2.5}$$

Lembremos que $G_m(u)$ é o gradiente do funcional $F_m(u)$ em u, onde $F_m(u)$ tem a forma (1.3), e cada termo em $f_m(u)$ é dado por um produto do tipo (1.4), para inteiros $l_j \geq 0$ com j, l_j e m satisfazendo a relação (1.5), de modo que podemos escrever f_m na forma (1.6).

Nas notações que seguem omitiremos, sempre que não houver risco de confusão, o domínio $\mathbf{R}$ e as variáveis de integração. Os termos $(D^{m-1}u)^2$ e $(D^{m-2}u)^2 u$ de f_m fornecem a $G_m(u)$ as parcelas

$$2D^{2m-2}u \quad \text{e} \quad 2(-1)^{m-2}D^{m-2}(uD^{m-2}u) + (D^{m-2}u)^2$$

respectivamente. O termo $2D^{2m-2}u$ não oferece contribuição em (2.5), pois

$$\int w_x [D^{2m-2}(w)] = 0, \quad \text{e} \quad 2(-1)^{m-2}D^{m-2}(uD^{m-2}u) + (D^{m-2}u)^2$$

contribui com

$$\left| \int_0^t \int w_x [2D^{m-2}(uD^{m-2}u - vD^{m-2}v) + (D^{m-2}u)^2 - (D^{m-2}v)^2] \right|$$

que, após integração por partes em x, fornece a expressão

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \int 2D^{m-1}w(uD^{m-2}u - vD^{m-2}v) \right. \\ &\left. + \int_0^t \int w_x (D^{m-2}u - D^{m-2}v)(D^{m-2}u + D^{m-2}v) \right| \\ = &\left| \int_0^t \int [2uD^{m-1}wD^{m-2}w + 2wD^{m-1}wD^{m-2}v] \right. \\ &\left. + \int_0^t \int w_x D^{m-2}w(D^{m-2}u + D^{m-2}v) \right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\|u\|_{I,\infty}\int_0^t\int[(D^{m-1}w)^2+(D^{m-2}w)^2]\\
&\quad +2\left\|D^{m-2}v\right\|_{I,\infty}\int_0^t\int[(D^{m-1}w)^2+w^2]\\
&\quad +\left\|D^{m-2}u+D^{m-2}v\right\|_{I,\infty}\int_0^t\int[(Dw)^2+(D^{m-2}w)^2]\\
&\leq 2(\|u\|_{I,\infty}+\left\|D^{m-2}u\right\|_{I,\infty}+\left\|D^{m-2}v\right\|_{I,\infty})\\
&\quad \cdot\int_0^t\int[w^2+(Dw)^2+(D^{m-2}w)^2+(D^{m-1}w)^2].
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Usando equivalência de normas em $H^{m-1}(\mathbf{R})$, obtemos que (2.6) é menor ou igual a

$$
c\int_0^t[\|w(s)\|_0^2+\left\|D^{m-1}w(s)\right\|_0^2]\,ds.
$$

O termo de maior grau em $f_m(u)$, obtido quando $l_0=m+1$ e portanto $l_j=0$ para $j\neq 0$ é, a menos de coeficiente u^{m+1}, ver [35], o que oferece a $G_m(u)$ o termo u^m, cuja contribuição em (2.5) é dada por

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\int w_x(u^m-v^m)\right|\\
=\ &\left|\int_0^t\int w_x w(u^{m-1}+u^{m-2}v+\cdots+uv^{m-2}+v^{m-1})\right|\\
\leq\ &\left\|u^{m-1}+u^{m-2}v+\cdots+uv^{m-2}+v^{m-1}\right\|_{I,\infty}\int_0^t(\|w(s)\|_0^2+\|Dw(s)\|_0^2)\,ds\\
\leq\ &\left[\|u\|_{I,\infty}^{m-1}+\|v\|_{I,\infty}\|u\|_{I,\infty}^{m-2}+\cdots+\|u\|_{I,\infty}\|v\|_{I,\infty}^{m-2}+\|v\|_{I,\infty}^{m-1}\right]\\
&\cdot\int_0^t(\|w(s)\|_0^2+\|Dw(s)\|_0^2)\,ds\\
\leq\ &c\int_0^t(\|w(s)\|_0^2+\|Dw(s)\|_0^2)\,ds.
\end{aligned}
$$

De maneira semelhante os outros termos em (2.5) podem ser estimados fornecendo, após efetuar a soma dos resultados e substituir em (2.5), a estimativa

$$
\|w(t)\|_0^2\leq\|w\|_0\|N\|_0+c\int_0^t(\|w(s)\|_0^2+\left\|D^{m-1}w(s)\right\|_0^2)ds,
\tag{2.7}
$$

onde c é um polinômio nas variáveis $\left\|D^k u\right\|_{I,\infty}$, $\left\|D^k v\right\|_{I,\infty}$, $k=0,1,2,\cdots,m-2$, com grau no máximo igual a $m-1$.

A seguir, multiplicando a equação em (2.4) por $G_m(u) - G_m(v)$ e integrando em x e t, obtemos a expressão

$$\int_0^t \int \partial_t w(G_m(u) - G_m(v)) = \int_0^t \int N(G_m(u) - G_m(v)). \qquad (2.8)$$

Da caracterização de F_m, cada termo de f_m é da forma (1.4), isto é,

$$u^{l_0}(Du)^{l_1}(D^2u)^{l_2} \cdots (D^{m-1}u)^{l_{m-1}}.$$

O termo correspondente em $G_m(u)$ é dado por

$$\begin{aligned} &l_0 u^{l_0-1}(Du)^{l_1} \cdots (D^{m-1}u)^{l_{m-1}} - l_1 D[u^{l_0}(Du)^{l_1-1} \cdots (D^{m-1}u)^{l_{m-1}}] \\ &+ \cdots + (-1)^{m-1} l_{m-1} D^{m-1}[u^{l_0}(Du)^{l_1} \cdots (D^{m-1}u)^{l_{m-1}-1}]. \end{aligned}$$

Em $G_m(u)$ aparece o termo $2D^{2m-2}u$, obtido no caso em que $l_j = 0$, $0 \leq j \leq m-2$ e $l_{m-1} = 2$. Sua contribuição no primeiro membro de (2.8) é dada por

$$2\int_0^t \int \partial_t w D^{2m-2} w = (-1)^{m-1} \int_0^t \int \partial_t (D^{m-1}w)^2 = (-1)^{m-1} \left\| D^{m-1}w(t) \right\|_0^2.$$

Vamos reescrever (2.8) na forma

$$\left\| D^{m-1}w(t) \right\|_0^2 = J_0 + \cdots + J_4 + (-1)^{m-1} \int_0^t \int N(G_m(u) - G_m(v)), \qquad (2.9)$$

onde os $J_i's$ são contribuições no primeiro membro de (2.8) obtidas como segue: denotamos por $\Delta a = a(u) - a(v)$ e $u_j = D^j u$. Consideremos os seguintes casos: (a) $l_j = 0$, $j \geq 1$; (b) $l_j = 0$, $j \geq 2$; (c) $l_j = 0$, $j \geq 3$; (d) $l_0 = 1$ e $l_{m-2} = 2$.

(a) $l_j = 0, j \geq 1$. O termo correspondente em $G_m(u)$ é $(m+1)u^m$, que contribui em (2.8) com

$$\begin{aligned} J_0 &= l_0 \int_0^t \int \partial_t w(u^m - v^m) \\ &= l_0 \int_0^t \int \partial_t w w_0 (u^{m-1} + u^{m-2}v + \cdots + uv^{m-2} + v^{m-1}) \\ &= \frac{l_0}{2} \int w_0^2 (u^{m-1} + u^{m-2}v + \cdots + uv^{m-2} + v^{m-1}) \\ &\quad - \frac{l_0}{2} \int_0^t \int w_0^2 \partial_t (u^{m-1} + u^{m-2}v + \cdots + uv^{m-2} + v^{m-1}) \\ &\leq \frac{l_0}{2} \left\| u^{m-1} + u^{m-2}v + \cdots + uv^{m-2} + v^{m-1} \right\|_{L^\infty} \int w_0^2 \\ &\quad + \frac{l_0}{2} \left\| \partial_t (u^{m-1} + u^{m-2}v + \cdots + uv^{m-2} + v^{m-1}) \right\|_{L^\infty} \int_0^t \int w_0^2. \end{aligned}$$

Lembrando que o segundo membro da equação em (2.2) tem grau m e portanto $\partial_t(u^{m-1} + u^{m-2}v + \cdots + uv^{m-2} + v^{m-1})$ tem grau $2m-2$, concluímos que

$$J_0 \leq c\{\|w(t)\|_0^2 + \int_0^t \|w(s)\|_0^2\, ds\},$$

onde c é um polinômio nas variáveis $\left\|D^k u\right\|_{L^\infty}$, $\left\|D^k v\right\|_{L^\infty}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 2m-1$, de grau $2m-2$.

(b) $l_j = 0$, $j \geq 2$. Este caso corresponde em G_m a

$$l_0 u^{l_0-1}(Du)^{l_1} - l_1 D[u^{l_0}(Du)^{l_1-1}],$$

cuja contribuição em (2.8) é dada por

$$J_1 = \int_0^t \int \partial_t w[l_0 u_0^{l_0-1} u_1^{l_1} - l_0 v_0^{l_0-1} v_1^{l_1} - l_1 D(u_0^{l_0} u_1^{l_1-1}) + l_1 D(v_0^{l_0} v_1^{l_1-1})],$$

que após integração por partes fornece a expressão

$$\int_0^t \int [\partial_t w l_0 \Delta(u_0^{l_0-1} u_1^{l_1}) + l_1 \partial_t w_1 \Delta(u_0^{l_0} u_1^{l_1-1})].$$

Usando as identidades

$$\Delta(u_i u_j) = (\Delta u_i) u_j + v_i \Delta u_j, \tag{2.10}$$

e

$$\begin{aligned} \Delta u_i^{l_i} &= u_i^{l_i} - v_i^{l_i} = (\Delta u_i)(u_i^{l_i-1} + u_i^{l_i-2} v_i + \cdots + u_i v_i^{l_i-2} + v_i^{l_i-1}) \\ &= : (\Delta u_i) P_{l_i-1}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

podemos escrever o integrando em J_1 na forma

$$\begin{aligned} & l_0 \partial_t w_0[(\Delta u_0^{l_0-1}) u_1^{l_1} + v_0^{l_0-1}(\Delta u_1^{l_1})] + l_1 \partial_t w_1[(\Delta u_0^{l_0}) u_1^{l_1-1} + v_0^{l_0}(\Delta u_1^{l_1-1})] \\ = \; & l_0 \partial_t w_0 (w_0 P_{l_0-2} u_1^{l_1} + v_0^{l_0-1} w_1 P_{l_1-1}) + l_1 \partial_t w_1 (w_0 P_{l_0-1} u_1^{l_1-1} + v_0^{l_0} w_1 P_{l_1-2}). \end{aligned}$$

Assim J_1 pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} J_1 \; = \; & \frac{1}{2} \int_0^t \int (l_0 \partial_t w_0^2 P_{l_0-2} u_1^{l_1} + l_1 \partial_t w_1^2 v_0^{l_0} P_{l_1-2} \\ & + 2 l_0 \partial_t w_0 w_1 v_0^{l_0-1} P_{l_1-1} + 2 l_1 \partial_t w_1 w_0 P_{l_0-1} u_1^{l_1-1}), \end{aligned}$$

ou ainda, usando integração por partes em t e a regra de Leibnitz,

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{2}\int (l_0 w_0^2 P_{l_0-2} u_1^{l_1} + l_1 w_1^2 v_0^{l_0} P_{l_1-2} + 2 l_1 w_1 w_0 P_{l_0-1} u_1^{l_1-1}) \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^t \int [l_0 w_0^2 \partial_t (P_{l_0-2} u_1^{l_1}) + l_1 w_1^2 \partial_t (v_0^{l_0} P_{l_1-2}) \\
&\quad +2 l_1 w_0 w_1 \partial_t (P_{l_0-1} u_1^{l_1-1})] + \int_0^t \int [\partial_t w_0 w_1 (l_0 v_0^{l_0-1} P_{l_1-1} - l_1 P_{l_0-1} u_1^{l_1-1})].
\end{aligned}$$

E, portanto temos a estimativa

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \frac{1}{2} l_0 \left\| P_{l_0-2} u_1^{l_1} \right\|_{L^\infty} \int w_0^2 + \frac{1}{2} l_1 \left\| P_{l_1-2} v_0^{l_0} \right\|_{L^\infty} \int w_1^2 \\
&\quad + l_1 \left\| P_{l_0-1} u_1^{l_1-1} \right\|_{L^\infty} \int (w_0^2 + w_1^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} l_0 \left\| \partial_t (P_{l_0-2} u_1^{l_1}) \right\|_{L^\infty} \int_0^t \int w_0^2 + \frac{1}{2} l_1 \left\| \partial_t (P_{l_1-2} v_0^{l_0}) \right\|_{L^\infty} \int_0^t \int w_1^2 \\
&\quad + l_1 \left\| \partial_t (P_{l_0-1} u_1^{l_1-1}) \right\|_{L^\infty} \int_0^t \int (w_0^2 + w_1^2) \\
&\quad + \left| \int_0^t \int [\partial_t w_0 w_1 (l_0 v_0^{l_0-1} P_{l_1-1} - l_1 P_{l_0-1} u_1^{l_1-1})] \right|. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

O último termo da soma acima pode ser escrito na forma

$$\int_0^t \int \partial_t w_0 w_1 [l_0 v_0^{l_0-1} (P_{l_1-1} - l_1 u_1^{l_1-1}) + l_1 u_1^{l_1-1} (l_0 v_0^{l_0-1} - P_{l_0-1})]. \qquad (2.13)$$

Como

$$\begin{aligned}
P_{l_i-1} - l_i u_i^{l_i-1} &= (1-l_i) u_i^{l_i-1} + u_i^{l_i-2} v_i + \cdots + u_i v_i^{l_i-2} + v_i^{l_i-1} \\
&= v_i^{l_i-1} - u_i^{l_i-1} + u_i (v_i^{l_i-2} - u_i^{l_i-2}) + \cdots + u_i^{l_i-2} (v_i - u_i),
\end{aligned}$$

podemos escrever as igualdades

$$P_{l_i-1} - l_i u_i^{l_i-1} = -w_i P(u_i, v_i) \qquad (2.14)$$

$$P_{l_i-1} - l_i v_i^{l_i-1} = w_i P(u_i, v_i), \qquad (2.15)$$

onde, $P(u_i, v_i)$ é um polinômio em u_i e v_i de grau $l_i - 2$. Usando isto, (2.13) toma a forma

$$\left| \int_0^t \int \partial_t w_0 w_1 [-l_0 v_0^{l_0-1} w_1 P(u_1, v_1) - l_1 u_1^{l_1-1} w_0 P(u_0, v_0)] \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\int_0^t \int [\partial_t w_0 l_0 v_0^{l_0-1} P(u_1,v_1) w_1^2 + \partial_t w_0 l_1 u_1^{l_1-1} P(u_0,v_0) w_0 w_1]\right| \\
&\le l_0 \left\|\partial_t w_0 v_0^{l_0-1} P(u_1,v_1)\right\|_{L^\infty} \int_0^t \int w_1^2 \\
&\quad + l_1 \left\|\partial_t w_0 u_1^{l_1-1} P(u_0,v_0)\right\|_{L^\infty} \int_0^t \int (w_0^2 + w_1^2).
\end{aligned}
$$

Este resultado, substituído em (2.12), fornece a estimativa

$$
J_1 \le c\{\|w(t)\|_0^2 + \|Dw(t)\|_0^2 + \int_0^t (\|w(s)\|_0^2 + \|Dw(s)\|_0^2) ds\}.
$$

Observando por exemplo, que

$$
\partial_t(P_{l_0-2} u_1^{l_1}) = \partial_t(P_{l_0-2}) u_1^{l_1} + l_1 P_{l_0-2} u_1^{l_1-1} D u_t,
$$

e sendo $DG_m(u)$ de ordem $2m-1$, temos que $\partial_t(P_{l_0-2}u_1^{l_1})$ tem ordem $2m$ e lembrando que $\sum_{j=0}^{m-1}(1+\frac{j}{2})l_j = m+1$, concluímos que c é um polinômio nas variáveis $\left\|D^k u\right\|_{L^\infty}$ e $\left\|D^k v\right\|_{L^\infty}$, $k = 0,1,2,\cdots,2m$ de grau menor que $2m-2$.

(c) $l_j = 0$, $j \ge 3$, que corresponde em G_m ao termo

$$
l_0 u_0^{l_0-1} u_1^{l_1} u_2^{l_2} - l_1 D(u_0^{l_0} u_1^{l_1-1} u_2^{l_2}) + l_2 D^2(u_0^{l_0} u_1^{l_1} u_2^{l_2-1}),
$$

cuja contribuição em (2.8) é dada por

$$
\begin{aligned}
J_2 \;=\; & \int_0^t \int [l_0 \partial_t w_0 (u_0^{l_0-1} u_1^{l_1} u_2^{l_2} - v_0^{l_0-1} v_1^{l_1} v_2^{l_2}) \\
& - l_1 \partial_t w_0 D(u_0^{l_0} u_1^{l_1-1} u_2^{l_2} - v_0^{l_0} v_1^{l_1-1} v_2^{l_2}) \\
& + l_2 \partial_t w_0 D^2(u_0^{l_0} u_1^{l_1} u_2^{l_2-1} - v_0^{l_0} v_1^{l_1} v_2^{l_2-1})],
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
J_2 \;=\; & \int_0^t \int [l_0 \partial_t w_0 \Delta(u_0^{l_0-1} u_1^{l_1} u_2^{l_2}) - l_1 \partial_t w_0 D(\Delta(u_0^{l_0} u_1^{l_1-1} u_2^{l_2})) \\
& + l_2 \partial_t w_0 D^2(\Delta(u_0^{l_0} u_1^{l_1} u_2^{l_2-1}))].
\end{aligned}
$$

Usando (2.10) duas vezes, escrevemos o integrando na forma

$$
\begin{aligned}
& l_0 \partial_t w_0 [(\Delta u_0^{l_0-1}) u_1^{l_1} u_2^{l_2} + v_0^{l_0-1} (\Delta u_1^{l_1}) u_2^{l_2} + v_0^{l_0-1} v_1^{l_1} (\Delta u_2^{l_2})] \\
& + l_1 \partial_t w_1 [(\Delta u_0^{l_0}) u_1^{l_1-1} u_2^{l_2} + v_0^{l_0} (\Delta u_1^{l_1-1}) u_2^{l_2} + v_1^{l_1-1} (\Delta u_2^{l_2}) v_0^{l_0}] \\
& + l_2 \partial_t w_2 [(\Delta u_0^{l_0}) u_1^{l_1} u_2^{l_2-1} + v_0^{l_0} (\Delta u_1^{l_1}) u_2^{l_2-1} + v_1^{l_1} (\Delta u_2^{l_2-1}) v_0^{l_0}],
\end{aligned}
$$

e usando (2.11), a expressão acima toma a forma

$$\begin{aligned}
& l_0\partial_t w_0(w_0 P_{l_0-2}u_1^{l_1}u_2^{l_2} + v_0^{l_0-1}w_1 P_{l_1-1}u_2^{l_2} + v_0^{l_0-1}v_1^{l_1}w_2 P_{l_2-1}) \\
& + l_1\partial w_1(w_0 P_{l_0-1}u_1^{l_1-1}u_2^{l_2} + v_0^{l_0}w_1 P_{l_1-2}u_2^{l_2} + v_0^{l_0}v_1^{l_1-1}w_2 P_{l_2-1}) \\
& + l_2\partial w_2(w_0 P_{l_0-1}u_1^{l_1}u_2^{l_2-1} + v_0^{l_0}w_1 P_{l_1-1}u_2^{l_2-1} + v_0^{l_0}v_1^{l_1}w_2 P_{l_2-2}).
\end{aligned}$$

Usando integração por partes, obtemos a seguinte expressão para J_2

$$\begin{aligned}
J_2 = & \int l_0\frac{w_0^2}{2}P_{l_0-2}u_1^{l_1}u_2^{l_2} - \int_0^t\int l_0\frac{w_0^2}{2}\partial_t(P_{l_0-2}u_1^{l_1}u_2^{l_2}) \\
& + \int_0^t\int l_0\partial_t w_0(w_1 v_0^{l_0-1}P_{l_1-1}u_2^{l_2} + v_0^{l_0-1}v_1^{l_1}w_2 P_{l_2-1}) \\
& + \int l_1\frac{w_1^2}{2}v_0^{l_0}P_{l_1-2}u_2^{l_2} - \int_0^t\int l_1\frac{w_1^2}{2}\partial_t(v_0^{l_0}P_{l_1-2}u_2^{l_2}) \\
& + \int_0^t\int l_1\partial_t w_1(w_0 P_{l_0-1}u_1^{l_1-1}u_2^{l_2} + v_0^{l_0}v_1^{l_1-1}w_2 P_{l_2-1}) \\
& + \int l_2\frac{w_2^2}{2}v_0^{l_0}v_1^{l_1}P_{l_2-2} - \int_0^t\int l_2\frac{w_2^2}{2}\partial_t(v_0^{l_0}v_1^{l_1}P_{l_2-2}) \\
& + \int_0^t\int l_2\partial_t w_2(w_0 P_{l_0-1}u_1^{l_1}u_2^{l_2-1} + v_0^{l_0}w_1 P_{l_1-1}u_2^{l_2-1}).
\end{aligned}$$

Tomando o valor absoluto, obtemos a seguinte estimativa para J_2

$$\begin{aligned}
J_2 \leq & \frac{l_0}{2}\left\|P_{l_0-2}u_1^{l_1}u_2^{l_2}\right\|_{L^\infty}\|w(t)\|_0^2 + \frac{l_0}{2}\left\|\partial_t(P_{l_0-2}u_1^{l_1}u_2^{l_2})\right\|_{L^\infty}\int_0^t\|w(s)\|_0^2 \\
& + \frac{l_1}{2}\left\|P_{l_1-2}v_0^{l_0}u_2^{l_2}\right\|_{L^\infty}\|Dw(t)\|_0^2 \\
& + \frac{l_1}{2}\left\|\partial_t(P_{l_1-2}v_0^{l_0}u_2^{l_2})\right\|_{L^\infty}\int_0^t\|Dw(s)\|_0^2 \\
& + \frac{l_2}{2}\left\|P_{l_2-2}v_0^{l_0}v_1^{l_1}\right\|_{L^\infty}\left\|D^2w(t)\right\|_0^2 \\
& + \frac{l_2}{2}\left\|\partial_t(P_{l_2-2}v_0^{l_0}v_1^{l_1})\right\|_{L^\infty}\int_0^t\left\|D^2w(s)\right\|_0^2 \\
& + \left|\int_0^t\int(l_0\partial_t w_0 w_1 v_0^{l_0-1}P_{l_1-1}u_2^{l_2} + l_1\partial_t w_1 w_0 P_{l_0-1}u_1^{l_1-1}u_2^{l_2})\right| \\
& + \left|\int_0^t\int(l_0\partial_t w_0 w_2 v_0^{l_0-1}v_1^{l_1}P_{l_2-1} + l_2\partial_t w_2 w_0 P_{l_0-1}u_1^{l_1}u_2^{l_2-1})\right| \\
& + \left|\int_0^t\int(l_1\partial_t w_1 w_2 v_0^{l_0}u_1^{l_1-1}P_{l_2-1} + l_2\partial_t w_2 w_1 v_0^{l_0}P_{l_1-1}u_2^{l_2-1})\right|. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Usando integração por partes em t e a regra de Leibnitz, obtemos a seguinte expressão para os últimos três termos do segundo membro da desigualdade (2.16)

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t \int \partial_t w_0 w_1 u_2^{l_2}(l_0 v_0^{l_0-1}P_{l_1-1} - l_1 u_1^{l_1-1}P_{l_0-1})\right.\\
&\left. -\int_0^t \int l_1 w_1 w_0 \partial_t (P_{l_0-1}u_1^{l_1-1}u_2^{l_2}) + \int l_1 w_1 w_0 P_{l_0-1}u_1^{l_1-1}u_2^{l_2}\right|\\
&+\left|\int_0^t \int \partial_t w_0 w_2 (l_0 v_0^{l_0-1}v_1^{l_1}P_{l_2-1} - l_2 P_{l_0-1}u_1^{l_1}u_2^{l_2-1})\right. \qquad (2.17)\\
&\left. -\int_0^t \int l_2 w_2 w_0 \partial_t (P_{l_0-1}u_1^{l_1}u_2^{l_2-1}) + \int l_2 w_2 w_0 P_{l_0-1}u_1^{l_1}u_2^{l_2-1}\right|\\
&+\left|\int_0^t \int \partial_t w_1 w_2 v_0^{l_0}(l_1 u_1^{l_1-1}P_{l_2-1} - l_2 P_{l_1-2}u_2^{l_2-1})\right.\\
&\left. -\int_0^t \int l_2 w_2 w_1 \partial_t (v_0^{l_0}P_{l_1-1}u_2^{l_2-1}) + \int l_2 w_2 w_1 v_0^{l_0}P_{l_1-1}u_2^{l_2-1}\right|.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
&\partial_t w_0 w_1 u_2^{l_2}(l_0 v_0^{l_0-1}P_{l_1-1} - l_1 u_1^{l_1-1}P_{l_0-1})\\
=\ &\partial_t w_0 w_1 u_2^{l_2}(l_0 v_0^{l_0-1}P_{l_1-1} - l_0 l_1 v_0^{l_0-1}u_1^{l_1-1} + l_0 l_1 v_0^{l_0-1}u_1^{l_1-1} - l_1 u_1^{l_1-1}P_{l_0-1})\\
=\ &\partial_t w_0 w_1 u_2^{l_2}[l_0 v_0^{l_0-1}(P_{l_1-1} - l_1 u_1^{l_1-1}) - l_1 u_1^{l_1-1}(P_{l_0-1} - l_0 v_0^{l_0-1})]\\
=\ &\partial_t w_0 w_1 u_2^{l_2}[-l_0 v_0^{l_0-1}w_1 P(u_1,v_1) - l_1 u_1^{l_1-1}w_0 P(u_0,v_0)],
\end{aligned}$$

e analogamente temos que

$$\begin{aligned}
&\partial_t w_1 w_2 v_0^{l_0}(l_1 u_1^{l_1-1}P_{l_2-1} - l_2 P_{l_1-2}u_2^{l_2-1})\\
=\ &\partial_t w_1 w_2 v_0^{l_0}[-l_1 v_1^{l_1-1}w_2 P(u_2,v_2) - l_2 u_2^{l_2-1}w_1 P(u_1,v_1)].
\end{aligned}$$

O integrando de (2.17) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
&\partial_t w_0 w_2\{l_0 v_0^{l_0-1}v_1^{l_1}(P_{l_2-1} - l_2 u_2^{l_2-1}) - l_2[(u_1^{l_1} - v_1^{l_1})P_{l_0-1}\\
&+ v_1^{l_1}(P_{l_0-1} - l_0 v_0^{l_0-1})]u_2^{l_2-1}\}\\
=\ &\partial_t w_0 w_2\{-l_0 v_0^{l_0-1}v_1^{l_1}w_2 P(u_2,v_2) - l_2[w_1 P_{l_1-1}P_{l_0-1}\\
&+ v_1^{l_1}w_0 P(u_0,v_0)]u_2^{l_2-1}\},
\end{aligned}$$

onde usamos (2.14) e (2.15).

Juntando estas informações, obtemos que os últimos três termos em (2.16) podem ser estimados por

$$
\begin{aligned}
& l_0 \left\|\partial_t w u_2^{l_2} v_0^{l_0-1} P(u_1,v_1)\right\|_{L^\infty} \int_0^t \|Dw(s)\|_0^2\,ds \\
& + l_1 \left\|\partial_t w u_2^{l_2} u_1^{l_1-1} P(u,v)\right\|_{L^\infty} \int_0^t (\|w(s)\|_0^2 + \|Dw(s)\|_0^2) ds \\
& + l_1 \left\|\partial_t w_1 v_0^{l_0} v_1^{l_1-1} P(u_2,v_2)\right\|_{L^\infty} \int_0^t \left\|D^2 w(s)\right\|_0^2 ds \\
& + l_2 \left\|\partial_t w_1 v_0^{l_0} u_2^{l_2-1} P(u_1,v_1)\right\|_{L^\infty} \int_0^t (\|Dw(s)\|_0^2 + \left\|D^2 w(s)\right\|_0^2) ds \\
& + l_0 \left\|\partial_t w v_0^{l_0-1} v_1^{l_1} P(u_2,v_2)\right\|_{L^\infty} \int_0^t \left\|D^2 w(s)\right\|_0^2 ds \\
& + l_2 \left\|\partial_t w u_2^{l_2-1} P_{l_1-1} P_{l_0-1}\right\|_{L^\infty} \int_0^t (\|Dw(s)\|_0^2 + \left\|D^2 w(s)\right\|_0^2) ds \\
& + l_2 \left\|\partial_t w v_1^{l_1} u_2^{l_2-1} P(u,v)\right\|_{L^\infty} \int_0^t (\|w(s)\|_0^2 + \left\|D^2 w(s)\right\|_0^2) ds \\
& + l_1 \left\|\partial_t (P_{l_0-1} u_1^{l_1-1} u_2^{l_2})\right\|_{L^\infty} \int_0^t (\|w(s)\|_0^2 + \|Dw(s)\|_0^2) ds \\
& + l_2 \left\|\partial_t (P_{l_0-1} u_1^{l_1} u_2^{l_2-1})\right\|_{L^\infty} \int_0^t (\|w(s)\|_0^2 + \left\|D^2 w(s)\right\|_0^2) ds \\
& + l_2 \left\|\partial_t (v_0^{l_0} P_{l_1-1} u_2^{l_2-1})\right\|_{L^\infty} \int_0^t (\|Dw(s)\|_0^2 + \left\|D^2 w(s)\right\|_0^2) ds \\
& + l_1 \left\|P_{l_0-1} u_1^{l_1-1} u_2^{l_2}\right\|_{L^\infty} (\|w(t)\|_0^2 + \|Dw(t)\|_0^2) \\
& + l_2 \left\|P_{l_0-1} u_1^{l_1} u_2^{l_2-1}\right\|_{L^\infty} (\|w(t)\|_0^2 + \left\|D^2 w(t)\right\|_0^2) \\
& + l_2 \left\|P_{l_0-1} u_1^{l_1} u_2^{l_2-1}\right\|_{L^\infty} (\|Dw(t)\|_0^2 + \left\|D^2 w(t)\right\|_0^2),
\end{aligned}
$$

que após substituir em (2.16), dá a seguinte estimativa para J_2

$$
\begin{aligned}
J_2 \leq\ & c\{\|w(t)\|_0^2 + \|Dw(t)\|_0^2 + \left\|D^2 w(t)\right\|_0^2 \\
& + \int_0^t (\|w(s)\|_0^2 + \|Dw(s)\|_0^2 + \left\|D^2 w(s)\right\|_0^2) ds\}.
\end{aligned}
$$

Usando equivalência de normas em $H^2(\mathbf{R})$, obtemos a desigualdade

$$
J_2 \leq c\{\|w(t)\|_0^2 + \left\|D^2 w(t)\right\|_0^2 + \int_0^t (\|w(s)\|_0^2 + \left\|D^2 w(s)\right\|_0^2) ds\}.
$$

Lembrando que $\partial_t(P_{l_0-2}u_1^{l_1}u_2^{l_2}) = \partial_t(P_{l_0-2}u_1^{l_1})u_2^{l_2} + l_2P_{l_0-2}u_1^{l_1}u_2^{l_2-1}D^2u_t$ e que $DG_m(u)$ tem ordem $2m-1$, concluímos que c é um polinômio nas variáveis $\left\|D^k u\right\|_{L^\infty}$ e $\left\|D^k v\right\|_{L^\infty}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 2m+1$ de grau $< 2m-2$.

(d) $l_0 = 1$ e $l_{m-2} = 2$, que corresponde ao termo $(D^{m-2}u)^2u$ de $f_m(u)$, fornece a $G_m(u)$ os termos $2(-1)^{m-2}D^{m-2}(uD^{m-2}u) + (D^{m-2}u)^2$ e contribui em (2.8) com

$$J_4 = \int_0^t \int \partial_t w[2(-1)^{m-2}D^{m-2}(uD^{m-2}u - vD^{m-2}v) + (D^{m-2}u)^2 - (D^{m-2}v)^2].$$

Usando as identidades

$$uD^{m-2}u - vD^{m-2}v = uD^{m-2}w + wD^{m-2}v$$

e

$$(D^{m-2}u)^2 - (D^{m-2}v)^2 = D^{m-2}w(D^{m-2}u + D^{m-2}v),$$

obtemos a expressão

$$\begin{aligned} J_4 &= \int_0^t \int \partial_t w[2(-1)^{m-2}D^{m-2}(uD^{m-2}w + wD^{m-2}v) \\ &\quad + D^{m-2}w(D^{m-2}u + D^{m-2}v)]. \end{aligned}$$

Usando integração por partes em x, encontramos a estimativa

$$\begin{aligned} J_4 &\leq \left|\int_0^t \int [2D^{m-2}\partial_t w(uD^{m-2}w + wD^{m-2}v) \right. \\ &\quad \left. + \partial_t w D^{m-2}w(D^{m-2}u + D^{m-2}v)]\right| \\ &= \left|\int_0^t \int [\partial_t(D^{m-2}w)^2u + 2D^{m-2}\partial_t w w D^{m-2}v \right. \\ &\quad \left. + \partial_t w D^{m-2}w(D^{m-2}u + D^{m-2}v)]\right|. \end{aligned}$$

Integrando por partes em t, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned} J_4 \leq &\left|\int (D^{m-2}w)^2u - \int_0^t \int (D^{m-2}w)^2\partial_t u + 2\int D^{m-2}wwD^{m-2}v \right. \\ &\left. -2\int_0^t \int D^{m-2}w\partial_t(wD^{m-2}v) + \int_0^t \int \partial_t w D^{m-2}w(D^{m-2}u + D^{m-2}v)\right|. \end{aligned}$$

Aplicando a regra do produto na derivada $\partial_t(wD^{m-2}v)$ e usando a identidade

$$\partial_t w D^{m-2}wD^{m-2}u - D^{m-2}w\partial_t w D^{m-2}v = \partial_t w(D^{m-2}w)^2,$$

obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}J_4 \leq & \left|\int (D^{m-2}w)^2 u - \int_0^t \int (D^{m-2}w)^2 \partial_t u + 2\int D^{m-2}w w D^{m-2}v \right. \\ & \left. - \int_0^t \int \partial_t w (D^{m-2}w)^2 - \int_0^t \int D^{m-2}w w \partial_t D^{m-2}v \right|.\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}J_4 \leq & \|u\|_{L^\infty} \left\|D^{m-2}w(t)\right\|_0^2 + \|\partial_t u\|_{L^\infty} \int_0^t \left\|D^{m-2}w(s)\right\|^2 ds \\ & +2\left\|D^{m-2}v\right\|_{L^\infty} (\|w(t)\|_0^2 + \left\|D^{m-2}w(t)\right\|_0^2) \\ & + \|\partial_t w\|_{L^\infty} \int_0^t \left\|D^{m-2}w(s)\right\|_0^2 ds \\ & + \left\|\partial_t D^{m-2}v\right\|_{L^\infty} \int_0^t (\|w(s)\|_0^2 + \left\|D^{m-2}w(s)\right\|_0^2) ds.\end{aligned}$$

Portanto

$$J_4 \leq c\{\|w(t)\|_0^2 + \left\|D^{m-2}w(t)\right\|_0^2 + \int_0^t (\|w(s)\|_0^2 + \left\|D^{m-2}w(s)\right\|_0^2) ds\}.$$

Observando que $DG_m(u)$ tem ordem $2m-1$, temos que c é um polinômio nas variáveis $\left\|D^k u\right\|_{L^\infty}$ e $\left\|D^k v\right\|_{L^\infty}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 3m-3$ de grau m.

Analogamente os termos intermediários que aparecem em (2.9) podem ser avaliados, obtendo sempre estimativas do tipo

$$c\{\|w(t)\|_0^2 + \|D^\gamma w(t)\|_0^2 + \int_0^t (\|w(s)\|_0^2 + \|D^\gamma w(s)\|_0^2) ds\},$$

com γ sendo um inteiro entre 0 e $m-2$, e c um polinômio nas variáveis $\left\|D^k u\right\|_{L^\infty}$ e $\left\|D^k v\right\|_{L^\infty}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 3m-3$, de grau no máximo igual a $2m-3$.

Combinando estes resultados com (2.9) obtemos, após usar equivalência de normas em $H^{m-2}(\mathbf{R})$, a seguinte estimativa para $\|D^{m-1}w(t)\|_0$

$$\begin{aligned}\left\|D^{m-1}w(t)\right\|_0^2 \leq & c\{\|w(t)\|_0^2 + \left\|D^{m-2}w(t)\right\|_0^2 \\ & + \int_0^t (\|w(s)\|_0^2 + \left\|D^{m-2}w(s)\right\|_0^2) ds\} \\ & + \|N\|_0 \|G_m(u) - G_m(v)\|_0 .\end{aligned}$$

Da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, (1.17), com $p = q = r = 2$, $s = m - 2$, $k = m - 1$ e $\lambda = \frac{m-2}{m-1}$, obtemos que

$$\left\|D^{m-2}w\right\|_0^2 \leq c\left\|D^{m-1}w\right\|_0^{2\frac{m-2}{m-1}} \|w\|_0^{\frac{2}{m-1}}.$$

Aplicando a desigualdade de Young, (1.18), com $p = \frac{m-1}{m-2}$ e $q = m - 1$, obtemos a desigualdade

$$\left\|D^{m-2}w(t)\right\|_0^2 \leq \delta\left\|D^{m-1}w(t)\right\|_0^2 + k(\delta)\|w(t)\|_0^2, \tag{2.18}$$

onde $k(\delta) = \delta^{2-m}$ e $\delta > 0$ (arbitrário). Substituindo (2.18) na estimativa obtida para $\|D^{m-1}w(t)\|_0^2$, obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}\left\|D^{m-1}w(t)\right\|_0^2 \;\leq\;& c\{\|w(t)\|_0^2 + k(\delta)\|w(t)\|_0^2 + \delta\left\|D^{m-1}w(t)\right\|_0^2\} \\ &+c\int_0^t(\|w(s)\|_0^2 + \left\|D^{m-1}w(s)\right\|_0^2)ds \\ &+\|N\|_0\|G_m(u) - G_m(v)\|_0.\end{aligned}$$

Escolhendo δ tal que $c\delta = \frac{1}{2}$ e, portanto $ck(\delta) = 2^{m-2}c^{m-1}$ é um polinômio nas variáveis $\left\|D^k u\right\|_{L^\infty}$, $\left\|D^k v\right\|_{L^\infty}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 3m - 3$ de grau igual a $2(m-1)^2$, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}\left\|D^{m-1}w(t)\right\|_0^2 \;\leq\;& c\|w(t)\|_0^2 + c\int_0^t(\|w(s)\|_0^2 + \left\|D^{m-1}w(s)\right\|_0^2)ds \\ &+\|N\|_0\|G_m(u) - G_m(v)\|_0,\end{aligned}$$

onde c é um polinômio nas variáveis $\left\|D^k u\right\|_{L^\infty}$ e $\left\|D^k v\right\|_{L^\infty}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 3m - 3$ de grau igual a $2(m-1)^2$.

Usando (2.7), encontramos que

$$\begin{aligned}\left\|D^{m-1}w(t)\right\|_0^2 \;\leq\;& c\|w\|_0\|N\|_0 + c\int_0^t(\|w(s)\|_0^2 + \left\|D^{m-1}w(s)\right\|_0^2)ds \\ &+\|N\|_0\|G_m(u) - G_m(v)\|_0.\end{aligned}$$

Somando este resultado com a desigualdade (2.7), obtemos finalmente a estimativa

$$\begin{aligned}\|w(t)\|_0^2 + \left\|D^{m-1}w(t)\right\|_0^2 \;\leq\;& c\int_0^t(\|w(s)\|_0^2 + \left\|D^{m-1}w(s)\right\|_0^2)ds \\ &+c(\|N\|_0\|G_m(u) - G_m(v)\|_0 + \|N\|_0\|w\|_0).\end{aligned}$$

Usando o Lema 1.2.1, concluímos que

$$\|w(t)\|_0^2 + \left\|D^{m-1}w(t)\right\|_0^2 \leq \alpha e^{cT}, \tag{2.19}$$

onde $\alpha = c(\|N\|_0 \|G_m(u) - G_m(v)\|_0 + \|N\|_0 \|w\|_0)$ e c é um polinômio nas variáveis $\left\|D^k u\right\|_{L^\infty}$ e $\left\|D^k v\right\|_{L^\infty}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 3m-3$ de grau igual a $2(m-1)^2$.

Por hipótese as soluções e suas x-derivadas de ordem até $3m-3$ são do tipo ∞-$(\log)^{\frac{1}{2(m-1)^2}}$, isto é, os representantes u e v podem ser escolhidos de modo a satisfazerem a condição

$$\left\|D^k u_\varepsilon\right\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(|\log\varepsilon|^{\frac{1}{2(m-1)^2}}), \text{ com } \varepsilon \to 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots, 3m-3.$$

A desigualdade (2.19) e o fato de $N \in \mathcal{N}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ fornecem portanto a estimativa

$$\|w(t)\|_0^2 + \left\|D^{m-1}w(t)\right\|_0^2 \leq c\varepsilon^q, \forall q \text{ e } \varepsilon > 0, \text{ suficientemente pequeno.} \tag{2.20}$$

Temos então que $\sup_{0\leq t\leq T} \|w_\varepsilon(t)\|_0^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^q)$, com $\varepsilon \to 0$, $\forall q$; o que implica em

$$\|w_\varepsilon\|_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^q),\ \varepsilon \to 0. \tag{2.21}$$

De (2.20) tiramos também que (2.21) vale para as derivadas $D^k w$, $k = 1, 2, \cdots, m-1$. Nosso objetivo é mostrar que (2.21) vale para qualquer derivada em x de w. Para isto, dado um inteiro k, $k \geq m$, seja ℓ tal que $m + \ell = k$. Diferenciando $\ell + 1$ vezes a equação em (2.4) em relação a x, multiplicando o resultado por $D^{\ell+1}w$ e integrando em x e t, obtemos, após usar integração por partes, a expressão

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\|D^{\ell+1}w(t)\right\|_0^2 &= (-1)^{\ell+2}\int_0^t \int D^{2\ell+3}w(G_m(u) - G_m(v)) \\ &+ \int_0^t \int D^{\ell+1}ND^{\ell+1}w. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Vejamos, como fizemos para obter a estimativa para $\|w(t)\|_0^2$, qual a contribuição em (2.22) de cada termo que aparece em $G_m(u)$. O termo $2D^{2m-2}u$ não oferece contribuição e o termo $(D^{m-2}u)^2$ contribui com

$$\int_0^t \int D^{2\ell+3}wD^{m-2}wD^{m-2}(u+v)$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{\ell+2}\int_0^t\int D^{\ell+1}wD^{\ell+2}(D^{m-2}wD^{m-2}(u+v))\\
&= (-1)^{\ell+2}\int_0^t\int D^{\ell+1}w\sum_{j=0}^{\ell+2}\binom{\ell+2}{j}D^{m+\ell-j}wD^{m-2+j}(u+v)\\
&= (-1)^{\ell+2}\int_0^t\int D^{\ell+1}wD^{m+\ell}wD^{m-2}(u+v)\\
&\quad +(-1)^{\ell+2}\int_0^t\int D^{\ell+1}w\sum_{j=1}^{\ell+2}\binom{\ell+2}{j}D^{m+\ell-j}wD^{m-2+j}(u+v)\\
&= (-1)^{\ell+2}\int_0^t\int D^{\ell+1}wD^{m+\ell}wD^{m-2}(u+v)\\
&\quad -\int_0^t\int wD^{\ell+1}\left[\sum_{j=1}^{\ell+2}\binom{\ell+2}{j}D^{m+\ell-j}wD^{m-2+j}(u+v)\right]. \qquad (2.23)
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Hölder, obtemos que (2.23) é estimado por

$$
\begin{aligned}
&\left\|D^{m-2}(u+v)\right\|_{L^\infty}\int_0^t(\left\|D^{\ell+1}w(s)\right\|_0^2+\left\|D^{\ell+m}w(s)\right\|_0^2)ds\\
&+\|w\|_0\sum_{j=1}^{\ell+2}\sum_{i=0}^{\ell+1}c_{ij}\left\|D^{m+2\ell+1-j-i}w\right\|_0\left\|D^{m-2+j+i}(u+v)\right\|_{L^\infty}.
\end{aligned}
$$

A contribuição do termo $2(-1)^{m-2}D^{m-2}(uD^{m-2}u)$ em (2.22) é

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int D^{2\ell+3}w2(-1)^{m-2}D^{m-2}(uD^{m-2}u-vD^{m-2}v)\\
&= \int D^{2\ell+3}w2(-1)^{m-2}D^{m-2}(D^{m-2}wu+D^{m-2}vw)\\
&= 2(-1)^{m+2\ell+1}\int_0^t\int wD^{m+2\ell+1}(D^{m-2}wu+D^{m-2}vw)\\
&= 2(-1)^{m+1}\int_0^t\int[w\sum_{j=0}^{m+2\ell+1}c_j(D^{2m+2\ell-1-j}wD^ju\\
&\quad +D^{m-2+j}vD^{m+2\ell+1-j}w)]. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

Portanto (2.24) é majorada por

$$
\|w\|_0\sum_{j=0}^{m+2\ell+1}c_j(\left\|D^{2m+2\ell-1-j}w\right\|_0\left\|D^ju\right\|_{L^\infty}+\left\|D^{m+2\ell+1-j}w\right\|_0\left\|D^{m-2+j}v\right\|_{L^\infty}).
$$

O termo u^m que aparece em $G_m(u)$ contribui em (2.22) com

$$\left|\int_0^t \int D^{2\ell+3} w(u^m - v^m)\right| = \left|\int_0^t \int w D^{2\ell+3} w P_{m-1}\right|$$
$$\leq \|w\|_0 \left\|D^{2\ell+3} w\right\|_0 \|P_{m-1}\|_{L^\infty},$$

onde P_{m-1} é dado por (2.11).

Analogamente os outros termos que aparecem em (2.22) podem ser estimados por um produto onde um dos fatores é $\|w\|_0$. Fazendo uso destas estimativas em (2.22), obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} \left\|D^{\ell+1} w(t)\right\|_0^2 &\leq c \int_0^t (\left\|D^{\ell+1} w(s)\right\|_0^2 + \left\|D^{\ell+m} w(s)\right\|_0^2) ds \\ &\quad + \left\|D^{\ell+1} N\right\|_0 \left\|D^{\ell+1} w\right\|_0 + \alpha, \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde $c = \|D^{m-2}(u+v)\|_{L^\infty}$ e $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, é uma soma onde cada termo tem o fator $\|w\|_0$ que, por (2.21), é $\mathcal{O}(\varepsilon^q)$, $\varepsilon \to 0$.

Diferenciando a equação (2.4) $\ell + 1$ vezes em relação a x, multiplicando o resultado por $D^{\ell+1}(G_m(u) - G_m(v))$ e integrando em x e t, obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int D^{\ell+1} \partial_t w D^{\ell+1}(G_m(u) - G_m(v)) \\ = &\int_0^t \int D^{\ell+1} N D^{\ell+1}(G_m(u) - G_m(v)). \end{aligned} \tag{2.26}$$

O termo $2D^{2m-2}u$ de $G_m(u)$ contribui no primeiro membro de (2.26) com

$$\int_0^t \int D^{\ell+1} \partial_t w D^{\ell+1}(2D^{2m-2} w),$$

que após integração por partes torna-se igual a $\left\|D^{\ell+m} w(t)\right\|_0^2$. Assim podemos reescrever (2.26) na forma

$$\left\|D^{\ell+m} w(t)\right\|_0^2 = J_0 + \cdots + J_4 + \int_0^t \int D^{\ell+1} N D^{\ell+1}(G_m(u) - G_m(v)). \tag{2.27}$$

As contribuições $J_i's$ são definidas abaixo, e para estimá-las usaremos a hipótese de indução, isto é, queremos mostrar que vale uma estimativa do tipo

$$\sup_t \left\|D^k w_\varepsilon(t, \cdot)\right\|_0 \leq c(k) \varepsilon^q. \tag{2.28}$$

Como já sabemos que (2.28) vale para $0 \le k < m$, suponhamos que seja válida para k substituído por s, $s = m, m+1, \cdots, m+\ell-1$. Considerando a caracterização das leis de conservação F_m, temos os seguintes casos:

(a) $l_j = 0$, $j \ge 1$.

$$
\begin{aligned}
J_0 &= \int_0^t \int \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}(l_0 u^m - l_0 v^m) = \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}(w P_{m-1}) \\
&= \int_0^t \int \frac{l_0}{2} \partial_t (w_{\ell+1})^2 P_{m-1} + \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} \sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} D^{\ell+1-j} w D^j P_{m-1}.
\end{aligned}
$$

Usando integração por partes em t, obtemos a expressão

$$
\begin{aligned}
J_0 &= \int \frac{l_0}{2} (w_{\ell+1})^2 P_{m-1} - \int_0^t \int \frac{l_0}{2} (w_{\ell+1})^2 \partial_t P_{m-1} \\
&\quad + \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} \sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} D^{\ell+1-j} w D^j P_{m-1}.
\end{aligned}
$$

Assim J_0 pode ser estimado por

$$
J_0 \le c\{ \left\| D^{\ell+1} w(t) \right\|_0^2 + \int_0^t \left\| D^{\ell+1} w(s) \right\|_0^2 ds \} + \alpha_0,
$$

onde c é um polinômio nas variáveis $\|D^s u\|_{L^\infty}$, $\|D^s v\|_{L^\infty}$, $s = 0, 1, 2, \cdots, 3m-3$ de grau no máximo igual a $2m-2$, e α_0 é uma soma onde cada termo contém um fator do tipo $\sup_t \|D^s w_\varepsilon(t)\|_0$, que por (2.28) é $\mathcal{O}(\varepsilon^q)$, $\varepsilon \to 0$.

(b) $l_j = 0$, $j \ge 2$.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^t \int \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1} [l_0 u_0^{l_0-1} u_1^{l_1} - l_0 v_0^{l_0-1} v_1^{l_1} - l_1 D(u_0^{l_0} u_1^{l_1-1}) + l_1 D(v_0^{l_0} v_1^{l_1-1})] \\
&= \int_0^t \int \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1} [l_0 \Delta(u_0^{l_0-1} u_1^{l_1}) - l_1 D(\Delta(u_0^{l_0} u_1^{l_1-1}))],
\end{aligned}
$$

ou, usando (2.10)

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^t \int \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1} \{ l_0 [(\Delta u_0^{l_0-1}) u_1^{l_1} + v_0^{l_0-1} (\Delta u_1^{l_1})] \\
&\quad - l_1 D[(\Delta u_0^{l_0}) u_1^{l_1-1} + v_0^{l_0-1} (\Delta u_1^{l_1-1})] \}.
\end{aligned}
$$

Usando (2.11) e integração por partes, obtemos a expressão

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}(w_0 P_{l_0-2} u_1^{l_1} + v_0^{l_0-1} w_1 P_{l_1-1}) \\
&\quad + \int_0^t \int l_1 \partial_t w_{\ell+2} D^{\ell+1}(w_0 P_{l_0-1} u_1^{l_1-1} + w_1 P_{l_1-2} v_0^{l_0-1}) \\
&= \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} w_{\ell+1} P_{l_0-2} u_1^{l_1} \\
&\quad + \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} \sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} D^{\ell+1-j} w D^j (P_{l_0-2} u_1^{l_1}) \\
&\quad + \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}(v_0^{l_0-1} w_1 P_{l_1-1}) + \int_0^t \int l_1 \partial_t w_{\ell+2} w_{\ell+2} P_{l_1-2} v_0^{l_0-1} \\
&\quad + \int_0^t \int l_1 \partial_t w_{\ell+2} \sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} D^{\ell+2-j} w D^j (P_{l_1-2} v_0^{l_0-1}) \\
&\quad + \int_0^t \int l_1 \partial_t w_{\ell+2} D^{\ell+1}(w_0 P_{l_0-1} u_1^{l_1-1}).
\end{aligned}$$

Usando integração por partes em t, podemos escrever os termos

$$\int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} w_{\ell+1} P_{l_0-2} u_1^{l_1} \quad \text{e} \quad \int_0^t \int l_1 \partial_t w_{\ell+2} w_{\ell+2} P_{l_1-2} v_0^{l_0-1}$$

respectivamente nas formas

$$\begin{gathered}
\int \frac{l_0}{2}(w_{\ell+1})^2 P_{l_0-2} u_1^{l_1} - \int_0^t \int \frac{l_0}{2}(w_{\ell+1})^2 \partial_t (P_{l_0-2} u_1^{l_1}) \text{ e} \\
\int \frac{l_1}{2}(w_{\ell+2})^2 P_{l_1-2} v_0^{l_0-1} - \int_0^t \int \frac{l_1}{2}(w_{\ell+2})^2 \partial_t (P_{l_1-2} v_0^{l_0-1}).
\end{gathered}$$

Os outros termos que aparecem em J_1 podem ser estimados por uma soma onde cada termo contém um fator do tipo $\sup_t \|D^s w_\varepsilon(t)\|_0$, que por (2.28) é $\mathcal{O}(\varepsilon^q)$, $\varepsilon \to 0$. Assim, J_1 pode ser estimado por

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq c\{\left\|D^{\ell+1} w(t)\right\|_0^2 + \left\|D^{\ell+2} w(t)\right\|_0^2 \\
&\quad + \int_0^t (\left\|D^{\ell+1} w(s)\right\|_0^2 + \left\|D^{\ell+2} w(s)\right\|_0^2) ds\} + \alpha_1,
\end{aligned}$$

onde c é um polinômio nas variáveis $\|D^s u\|_{L^\infty}$, $\|D^s v\|_{L^\infty}$, $s = 0, 1, 2, \cdots, 3m-3$ de grau no máximo igual a $2m-2$, e α_1 é $\mathcal{O}(\varepsilon^q)$, $\varepsilon \to 0$.

(c) $l_j = 0$, $j \geq 3$.

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^t \int \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}[(l_0 u_0^{l_0-1} u_1^{l_1} u_2^{l_2} - l_0 v_0^{l_0-1} v_1^{l_1} v_2^{l_2}) \\
&\quad - l_1 D(u_0^{l_0} u_1^{l_1-1} u_2^{l_2} - v_0^{l_0} v_1^{l_1-1} v_2^{l_2}) + l_2 D^2(u_0^{l_0} u_1^{l_1} u_2^{l_2-1} - v_0^{l_0} v_1^{l_1} v_2^{l_2-1})] \\
&= \int_0^t \int \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}[l_0 \Delta(u_0^{l_0-1} u_1^{l_1} u_2^{l_2}) - l_1 D(\Delta(u_0^{l_0} u_1^{l_1-1} u_2^{l_2})) \\
&\quad + l_2 D^2(\Delta(u_0^{l_0} u_1^{l_1} u_2^{l_2-1}))] \\
&= \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}(\Delta(u_0^{l_0-1} u_1^{l_1} u_2^{l_2})) + \int_0^t \int l_1 \partial_t w_{\ell+2} D^{\ell+1}(\Delta(u_0^{l_0} u_1^{l_1-1} u_2^{l_2})) \\
&\quad + \int_0^t \int l_2 \partial_t w_{\ell+3} D^{\ell+1}(\Delta(u_0^{l_0} u_1^{l_1} u_2^{l_2-1})) \\
&= \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}\{(\Delta u_0^{l_0-1}) u_1^{l_1} u_2^{l_2} + v_0^{l_0-1}[(\Delta u_1^{l_1}) u_2^{l_2} + v_1^{l_1} \Delta u_2^{l_2}]\} \\
&\quad + \int_0^t \int l_1 \partial_t w_{\ell+2} D^{\ell+1}\{(\Delta u_0^{l_0}) u_1^{l_1-1} u_2^{l_2} + v_0^{l_0}[(\Delta u_1^{l_1-1}) u_2^{l_2} + v_1^{l_1-1} \Delta u_2^{l_2}]\} \\
&\quad + \int_0^t \int l_2 \partial_t w_{\ell+3} D^{\ell+1}\{(\Delta u_0^{l_0}) u_1^{l_1} u_2^{l_2-1} + v_0^{l_0}[(\Delta u_1^{l_1}) u_2^{l_2-1} + v_1^{l_1} \Delta u_2^{l_2-1}]\}.
\end{aligned}
$$

Usando (2.11), J_2 pode ser escrito na forma

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}(w_0 P_{l_0-2} u_1^{l_1} u_2^{l_2} + v_0^{l_0-1} w_1 P_{l_1-1} u_2^{l_2} + v_1^{l_1} v_0^{l_0-1} w_2 P_{l_2-1}) \\
&\quad + \int_0^t \int l_1 \partial_t w_{\ell+2} D^{\ell+1}(w_0 P_{l_0-1} u_1^{l_1-1} u_2^{l_2} + v_0^{l_0} w_1 P_{l_1-2} u_2^{l_2} + v_0^{l_0} v_1^{l_1-1} w_2 P_{l_2-1}) \\
&\quad + \int_0^t \int l_2 \partial_t w_{\ell+3} D^{\ell+1}(w_0 P_{l_0-1} u_1^{l_1} u_2^{l_2-1} + v_0^{l_0} w_1 P_{l_1-1} u_2^{l_2-1} + v_0^{l_0} v_1^{l_1} w_2 P_{l_2-2}).
\end{aligned}
$$

Usando a regra de Leibnitz, podemos escrever J_2 na forma

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1} w P_{l_0-2} u_1^{l_1} u_2^{l_2} \\
&\quad + \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} \sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} D^{\ell+1-j} w D^j (P_{l_0-2} u_1^{l_1} u_2^{l_2}) \\
&\quad + \int_0^t \int l_0 \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}(v_0^{l_0-1} w_1 P_{l_1-1} u_2^{l_2} + v_0^{l_0-1} v_1^{l_1} w_2 P_{l_2-1}) \\
&\quad + \int_0^t \int l_1 \partial_t w_{\ell+2} D^{\ell+2} w v_0^{l_0} P_{l_1-2} u_2^{l_2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t\int l_1\partial_t w_{\ell+2}\sum_{j=1}^{\ell+1}\binom{\ell+1}{j}D^{\ell+2-j}wD^j(v_0^{l_0}P_{l_1-2}u_2^{l_2})\\
&+\int_0^t\int l_1\partial_t w_{\ell+2}D^{\ell+1}(wP_{l_0-1}u_1^{l_1-2}u_2^{l_2}+v_0^{l_0}v_1^{l_1-1}w_2P_{l_2-1})\\
&+\int_0^t\int l_2\partial_t w_{\ell+3}D^{\ell+3}wv_0^{l_0}v_1^{l_1}P_{l_2-2}\\
&+\int_0^t\int l_2\partial_t w_{\ell+3}\sum_{j=1}^{\ell+1}\binom{\ell+1}{j}D^{\ell+3-j}wD^j(v_0^{l_0}v_1^{l_1}P_{l_2-2})\\
&+\int_0^t\int l_2\partial_t w_{\ell+3}D^{\ell+1}(wP_{l_0-1}u_1^{l_1}u_2^{l_2-1}+v_0^{l_0}w_1P_{l_1-1}u_2^{l_2-1}).
\end{aligned}
$$

A 1^a, 4^a e 7^a linhas de J_2 acima podem ser escritas respectivamente nas formas

$$
\begin{aligned}
&\int\frac{l_0}{2}(w_{\ell+1})^2P_{l_0-2}u_1^{l_1}u_2^{l_2}-\int_0^t\int\frac{l_0}{2}(w_{\ell+1})^2\partial_t(P_{l_0-2}u_1^{l_1}u_2^{l_2}),\\
&\int\frac{l_1}{2}(w_{\ell+2})^2v_0^{l_0}P_{l_1-2}u_2^{l_2}-\int_0^t\int\frac{l_1}{2}(w_{\ell+2})^2\partial_t(v_0^{l_0}P_{l_1-2}u_2^{l_2}),\\
&\int\frac{l_2}{2}(w_{\ell+3})^2v_0^{l_0}v_1^{l_1}P_{l_2-2}-\int_0^t\int\frac{l_2}{2}(w_{\ell+3})^2\partial_t(v_0^{l_0}v_1^{l_1}P_{l_2-2}).
\end{aligned}
$$

Portanto podemos concluir, após usar equivalência de normas em $H^3(\mathbf{R})$, que J_2 pode ser estimado por

$$
\begin{aligned}
J_2 \quad\leq\quad & c\{\left\|D^{\ell+1}w(t)\right\|_0^2+\left\|D^{\ell+3}w(t)\right\|_0^2\\
&+\int_0^t(\left\|D^{\ell+1}w(s)\right\|_0^2+\left\|D^{\ell+3}w(s)\right\|_0^2)ds\}+\alpha_2,
\end{aligned}
$$

onde c é um polinômio nas variáveis $||D^su||_{L^\infty}$, $||D^sv||_{L^\infty}$, $s=0,1,2,\cdots,3m-3$ de grau no máximo igual a $2m-2$, e α_2 é $\mathcal{O}(\varepsilon^q)$, $\varepsilon\to 0$.

(d)A contribuição J_4 em (2.27) é devida ao termo $2(-1)^{m-2}D^{m-2}(uD^{m-2}u)+(D^{m-2}u)^2$ de $G_m(u)$, e portanto é dada por

$$
\begin{aligned}
J_4 \quad=\quad & \int_0^t\int\partial_t w_{\ell+1}D^{\ell+1}[2(-1)^{m-2}D^{m-2}(uD^{m-2}u-vD^{m-2}v)\\
&+(D^{m-2}u)^2-(D^{m-2}v)^2]\\
=\quad & \int_0^t\int\partial_t w_{\ell+1}D^{\ell+1}[2(-1)^{m-2}D^{m-2}(uD^{m-2}w+wD^{m-2}v)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+D^{m-2}w(D^{m-2}u + D^{m-2}v)]\\
= \; & \int_0^t \int \{\partial_t w_{\ell+m-1} D^{\ell+1}[2(uD^{m-2}w + wD^{m-2}v)]\\
&+ \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}[D^{m-2}w(D^{m-2}(u+v))]\}\\
= \; & 2(\int_0^t \int \partial_t w_{\ell+m-1} D^{\ell+m-1} wu\\
&+ \int_0^t \int \partial_t w_{\ell+m-1} \sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} D^{\ell+m-1-j} w D^j u)\\
&+ 2[\int_0^t \int \partial_t w_{\ell+m-1} D^{\ell+1}(wD^{m-2}v)\\
&+ \int_0^t \int \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}[D^{m-2}w(D^{m-2}(u+v))],
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
J_4 \; = \; & \int (w_{\ell+m-1})^2 u - \int_0^t \int (w_{\ell+m-1})^2 \partial_t u\\
&+2(\int_0^t \int \partial_t w_{\ell+m-1} \sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} D^{\ell+m-1-j} w D^j u)\\
&+2\int w_{\ell+m-1} D^{\ell+1}(wD^{m-2}v) - 2\int_0^t \int w_{\ell+m-1} \partial_t (D^{\ell+1}(wD^{m-2}v))\\
&+ \int_0^t \int \partial_t w_{\ell+1} D^{\ell+1}[D^{m-2}w(D^{m-2}(u+v))].
\end{aligned}
$$

As linhas 3 e 4 de J_4 acima, podem ser escritas na forma

$$
\begin{aligned}
& 2\int w_{\ell+m-1} D^{\ell+1} w D^{m-2} v + 2\int w_{\ell+m-1} \sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} D^{\ell+1-j} w D^{m-2+j} v\\
& - 2\int_0^t \int w_{\ell+m-1} \partial_t \left(w_{\ell+1} D^{m-2} v + \sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} D^{\ell+1-j} w D^{m-2+j} v \right)\\
= \; & 2\int w_{\ell+m-1} D^{\ell+1} w D^{m-2} v + 2\int w_{\ell+m-1} \sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} D^{\ell+1-j} w D^{m-2+j} v\\
& -2\int_0^t \int w_{\ell+m-1} w_{\ell+1} \partial_t (D^{m-2} v) - 2\int_0^t \int w_{\ell+m-1} \partial_t w_{\ell+1} D^{m-2} v\\
& -2\int_0^t \int w_{\ell+m-1} \partial_t \left(\sum_{j=1}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{j} D^{\ell+1-j} w D^{m-2+j} v \right).
\end{aligned}
$$

De volta à expressão de J_4, concluímos que J_4 pode ser estimado por

$$
\begin{aligned}
J_4 \;\leq\; & c\{\left\|D^{\ell+1}w(t)\right\|_0^2 + \left\|D^{\ell+m-1}w(t)\right\|_0^2 \\
& + \int_0^t (\left\|D^{\ell+1}w(s)\right\|_0^2 + \left\|D^{\ell+m-1}w(s)\right\|_0^2) ds\} + \alpha_4,
\end{aligned}
$$

onde c é um polinômio nas variáveis $\|D^s u\|_{L^\infty}$, $\|D^s v\|_{L^\infty}$, $s = 0, 1, 2, \cdots, 3m-3$ de grau no máximo igual a $2m-2$, e α_4 é $\mathcal{O}(\varepsilon^q)$, $\varepsilon \to 0$.

Os outros termos que aparecem em (2.26) podem, analogamente ser estimados, obtendo estimativas do tipo

$$
c\{\left\|D^{\ell+1}w(t)\right\|_0^2 + \left\|D^{m+\gamma}w(t)\right\|_0^2 + \int_0^t (\left\|D^{\ell+1}w(s)\right\|_0^2 + \left\|D^{m+\gamma}w(s)\right\|_0^2) ds\} + \alpha_\gamma,
$$

$1 < \gamma < \ell - 1$, e c um polinômio nas variáveis $\left\|D^k u\right\|_{L^\infty}$ e $\left\|D^k v\right\|_{L^\infty}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, 3m-3$, de grau no máximo igual a $2m-3$.

Levando estes resultados em (2.27) obtemos, após usar equivalência de normas em $H^{m+\ell-1}(\mathbf{R})$, a estimativa

$$
\begin{aligned}
\left\|D^{\ell+m}w(t)\right\|_0^2 \;\leq\; & c\{\left\|D^{\ell+1}w(t)\right\|_0^2 + \left\|D^{\ell+m-1}w(t)\right\|_0^2 \\
& + \int_0^t (\left\|D^{\ell+1}w(s)\right\|_0^2 + \left\|D^{\ell+m-1}w(s)\right\|_0^2) ds \\
& + \left\|D^{\ell+1}N\right\|_0 \left\|D^{\ell+1}(G_m(u) - G_m(v))\right\|_0\}. \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade (1.17), $p = q = r = 2$, $s = m-2$, $k = m-1$, $\lambda = \frac{m-2}{m-1}$, e w substituído por $D^{\ell+1}w$, obtemos a desigualdade

$$
\left\|D^{\ell+m-1}w(t)\right\|_0^2 \leq \left\|D^{\ell+m}w(t)\right\|_0^{2\frac{m-2}{m-1}} \left\|D^{\ell+1}w(t)\right\|_0^{2\frac{1}{m-1}}.
$$

Aplicando a desigualdade de Young (1.18) com $p = \frac{m-1}{m-2}$ e $q = m-1$, obtemos a desigualdade

$$
\left\|D^{\ell+m-1}w(t)\right\|_0^2 \leq k(\delta)\left\|D^{\ell+1}w(t)\right\|_0^2 + \delta\left\|D^{\ell+m}w(t)\right\|_0^2.
$$

Substituindo esta última desigualdade em (2.29), escolhendo δ de maneira conveniente, obtemos a seguinte estimativa

$$
\begin{aligned}
\left\|D^{\ell+m}w(t)\right\|_0^2 \;\leq\; & c\left\|D^{\ell+1}w(t)\right\|_0^2 + c\int_0^t (\left\|D^{\ell+1}w(s)\right\|_0^2 + \left\|D^{\ell+m}w(s)\right\|_0^2) ds \\
& + \left\|D^{\ell+1}N\right\|_0 \left\|D^{\ell+1}(G_m(u) - G_m(v))\right\|_0.
\end{aligned}
$$

Usando (2.25), encontramos a desigualdade

$$\begin{aligned}\left\|D^{\ell+m}w(t)\right\|_0^2 &\leq c\alpha + c\left\|D^{\ell+1}N\right\|_0\left\|D^{\ell+1}w\right\|_0 \\ &+\left\|D^{\ell+1}N\right\|_0\left\|D^{\ell+1}(G_m(u)-G_m(v))\right\|_0 \\ &+c\int_0^t(\left\|D^{\ell+1}w(s)\right\|_0^2+\left\|D^{\ell+m}w(s)\right\|_0^2)ds.\end{aligned}$$

Somando este resultado com a desigualdade (2.25), encontramos finalmente a estimativa

$$\left\|D^{\ell+1}w(t)\right\|_0^2+\left\|D^{\ell+m}w(t)\right\|_0^2 \leq c\int_0^t(\left\|D^{\ell+1}w(s)\right\|_0^2+\left\|D^{\ell+m}w(s)\right\|_0^2)ds+\beta.$$

onde β é $\mathcal{O}(\varepsilon^q)$. Usando o Lema de Gronwall, concluímos que

$$\left\|D^{\ell+1}w(t)\right\|_0^2+\left\|D^{\ell+m}w(t)\right\|_0^2 \leq \beta e^{cT}, \tag{2.30}$$

onde c é um polinômio nas variáveis $\left\|D^k u\right\|_{L^\infty}$ e $\left\|D^k v\right\|_{L^\infty}$, $k=0,1,2,\cdots,3m-3$ de grau igual a $2(m-1)^2$.

Tal como fizemos para estimar a norma $||w_\varepsilon(\cdot,\cdot)||_0$, obtemos de (2.30) que

$$||D^{\ell+m}w_\varepsilon(\cdot,\cdot)||_0=\mathcal{O}(\varepsilon^q),\ \varepsilon\to 0.$$

Usando a equação de (2.4), obtemos uma estimativa análoga para as derivadas mistas de w, implicando assim que $w\in\mathcal{N}_2((0,T)\times\mathbf{R})$, e portanto a unicidade pretendida. □

2.2 Condições sobre o dado.

As exigências impostas sobre as soluções do problema de Cauchy (2.1) no Teorema 2.1.1, as quais garantem a unicidade de soluções para aquele problema, podem ser obtidas impondo certas restrições no dado g, como mostra o seguinte resultado

Proposição 2.2.1 *Suponhamos que g e suas derivadas até a ordem $(3m-2)$ sejam do tipo 2-$(\log)^{\frac{1}{(3m-1)2(m-1)^2}}$ (ver (1.24)). Então as soluções u do problema (2.1) são, juntamente com suas x-derivadas até a ordem $(3m-3)$, do tipo ∞-$(\log)^{\frac{1}{2(m-1)^2}}$.*

Prova Seja $u = \hat{u}_\varepsilon$ o representante de u solução do problema (2.2). Da desigualdade

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \|u(t)\|_0 + \|u_x(t)\|_0, \tag{2.31}$$

que é consequência da desigualdade (1.17), quando fazemos $p = \infty$, $s = 0, q = r = 2, k = 1$ e $\lambda = \frac{1}{2}$, podemos obter, após tomar o supremo em t, a estimativa

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \sup_t \|u(t)\|_0 + \sup_t \|u_x(t)\|_0. \tag{2.32}$$

A primeira lei de conservação

$$F_1(u) = \frac{1}{2}\int u^2(x,t)dx,$$

implica em $\|u(t)\|_0 = \|g\|_0$, e portanto temos que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|g\|_0 + \sup_t \|u_x(t)\|_0. \tag{2.33}$$

Para estimar $\sup_t \|u_x(t)\|_0$, usamos a segunda lei de conservação

$$F_2(u) = \int (\frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2)dx,$$

de onde obtemos a igualdade

$$\int u_x^2 dx = \frac{1}{3}\int u^3 dx - \frac{1}{3}\int g^3 dx + \int (g')^2 dx.$$

Consequentemente temos a seguinte desigualdade

$$\|u_x(t)\|_0^2 \leq \frac{1}{3}\|u(t)\|_{L^\infty}\int u^2 dx + \frac{1}{3}\|g\|_{L^\infty}\int g^2 dx + \int (g')^2 dx.$$

Usando (2.31) em $\|u(t)\|_{L^\infty}$ e em $\|g\|_{L^\infty}$, obtemos a estimativa

$$\|u_x(t)\|_0^2 \leq \frac{1}{3}(\|g\|_0 + \|u_x(t)\|_0)\|g\|_0^2 + \frac{1}{3}(\|g\|_0 + \|g'\|_0)\|g\|_0^2 + \|g'\|_0^2,$$

ou ainda

$$\|u_x(t)\|_0^2 \leq \frac{2}{3}\|g\|_0^3 + \frac{1}{3}\|g\|_0^4 + \frac{1}{6}\|u_x(t)\|_0^2 + \frac{7}{6}\|g'\|_0^2,$$

onde usamos a desigualdade $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$. O resultado anterior implica em

$$\|u_x(t)\|_0 \leq c(\|g\|_0 + \|g\|_0^2 + \|g'\|_0). \tag{2.34}$$

Tomando o supremo em (2.34) e substituindo em (2.33), obtemos a estimativa

$$\|u\|_{L^\infty} \leq c(\|g\|_0 + \|g\|_0^2 + \|g'\|_0). \tag{2.35}$$

Vamos obter agora uma estimativa para $\|u_x\|_{L^\infty}$ em função das normas L^2 de g e suas derivadas. Para isto trocando u por u_x em (2.31), obtemos a desigualdade

$$\|u_x(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_x(t)\|_0 + \|u_{xx}(t)\|_0. \tag{2.36}$$

O primeiro termo do segundo membro de (2.36) está estimado em (2.34). Para estimar o segundo termo usamos a terceira lei de conservação

$$F_3(u) = \int(\frac{1}{4}u^4 - 3uu_x^2 + \frac{9}{5}u_{xx}^2)dx,$$

de onde obtemos a identidade

$$\int u_{xx}^2 dx = \frac{5}{9}(-\frac{1}{4}\int u^4 dx + 3\int uu_x^2 dx + \frac{1}{4}\int g^4 dx - 3\int g(g')^2 dx + \frac{9}{5}\int (g'')^2 dx).$$

Consequentemente temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\|u_{xx}(t)\|_0^2 \;\leq\; & c\{\|u\|_{L^\infty}^2\|g\|_0^2 + \|u\|_{L^\infty}\|u_x(t)\|_0^2 + (\|g\|_0 + \|g'\|_0)^2\|g\|_0^2 \\ & +(\|g\|_0 + \|g'\|_0)\|g'\|_0^2 + \|g''\|_0^2\}.\end{aligned}$$

Usando (2.34) e (2.35), obtemos a estimativa

$$\|u_{xx}(t)\|_0 \leq P_3(\|g\|_0, \|g'\|_0, \|g''\|_0), \tag{2.37}$$

onde P_3 é um polinômio de grau 3. De volta a (2.36) obtemos, após tomar o supremo em t, uma estimativa análoga a (2.37) para $\|u_x\|_{L^\infty}$.

Trocando u por u_{xx} em (2.31), obtemos a desigualdade

$$\|u_{xx}(t)\|_{L^\infty} \leq \|u_{xx}(t)\|_0 + \|u_{xxx}(t)\|_0. \tag{2.38}$$

O primeiro termo do segundo membro de (2.38) está estimado em (2.37). Para estimar o segundo termo usamos a quarta lei de conservação

$$F_4(u) = \int (\frac{1}{5}u^5 - 6u^2u_x^2 + \frac{36}{5}uu_{xx}^2 - \frac{108}{35}u_{xxx}^2)dx,$$

de onde obtemos a igualdade

$$\begin{aligned}\int u_{xxx}^2 dx &= \frac{35}{108}\{\int \frac{1}{5}u^5 dx - \int 6u^2u_x^2 dx + \int \frac{36}{5}uu_{xx}^2 dx - \int \frac{1}{5}g^5 dx \\ &+ \int 6g^2(g')^2 dx - \int \frac{36}{5}g(g'')^2 dx + \int \frac{108}{35}(g''')^2 dx\}.\end{aligned}$$

Consequentemente temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\|u_{xxx}(t)\|_0^2 &\leq c\Big\{\|u\|_{L^\infty}^3 \|g\|_0^2 + \|u\|_{L^\infty}^2 \|u_x(t)\|_0^2 + \|u\|_{L^\infty} \|u_{xx}(t)\|_0^2 \\ &+(\|g\|_0 + \|g'\|_0)^3 \|g\|_0^2 + (\|g\|_0 + \|g'\|_0)^2 \|g'\|_0^2 \\ &+ (\|g\|_0 + \|g'\|_0) \|g''\|_0^2 + \|g'''\|_0^2\Big\}.\end{aligned}$$

Usando (2.34), (2.35) e (2.37), obtemos a estimativa

$$\|u_{xxx}(t)\|_0 \leq P_4(\|g\|_0, \|g'\|_0, \|g''\|_0, \|g'''\|_0). \tag{2.39}$$

De volta a (2.38) obtemos, após tomar o supremo em t, uma estimativa análoga a (2.39) para $\|u_{xx}\|_{L^\infty}$.

Dado um inteiro positivo ℓ, trocando u por $D^\ell u$ em (2.31), obtemos a desigualdade

$$\left\|D^\ell u(t)\right\|_{L^\infty} \leq \left\|D^\ell u(t)\right\|_0 + \left\|D^{\ell+1}u(t)\right\|_0. \tag{2.40}$$

Supondo já obtidas as estimativas

$$\left\|D^k u(t)\right\|_0 \leq P_{k+1}(\|g\|_0, \|g'\|_0, \cdots, \left\|g^{(k)}\right\|_0), \tag{2.41}$$

$1 \leq k \leq \ell$, onde P_{k+1} é um polinômio de grau $k+1$, vamos prová-la para $k = \ell + 1$. Usando a lei de conservação

$$F_{\ell+2}(u) = \int \{(D^{\ell+1}u)^2 + cu(D^\ell u)^2 + Q_{\ell+2}(u, Du, \cdots, D^{\ell-1}u)\}dx,$$

obtemos a igualdade

$$\begin{aligned}\int (D^{\ell+1}u)^2 dx = -c\int u(D^\ell u)^2 dx - \int Q_{\ell+2}(u, Du, \cdots, D^{\ell-1}u)dx \\ + \int (D^{\ell+1}g)^2 dx + c\int g(D^\ell g)^2 \\ + \int Q_{\ell+2}(g, Dg, \cdots, D^{\ell-1}g)dx. \qquad (2.42)\end{aligned}$$

Agora, observando que

$$\int u(D^\ell u)^2 dx \leq \|u\|_{L^\infty} \left\|D^\ell u(t)\right\|_0^2,$$

concluímos, usando a hipótese de indução, que $\left|\int u(D^\ell u)^2 dx\right|$ pode ser estimado por um polinômio nas variáveis

$$\|g\|_0, \|Dg\|_0, \cdots, \left\|D^\ell g\right\|_0 \text{ de grau } 2 + 2(\ell+1) = 2\ell + 4.$$

Para estimar a integral $\int Q_{\ell+2}(u, Du, \cdots, D^{\ell-1}u)dx$, usamos que cada termo de $Q_{\ell+2}$ tem grau ≥ 3 e é do tipo (ver (1.4) e (1.5))

$$\prod_{i=0}^{\ell-1}(D^i u)^{l_i}, \text{ onde } \sum_{i=0}^{\ell-1}(1+\frac{i}{2})l_i = \ell + 3.$$

Assim podemos escrever a expressão

$$\begin{aligned}\int \prod_{i=0}^{\ell-1}(D^i u)^{l_i} dx &= \\ &= \int u^{l_0}(Du)^{l_1}\cdots(D^j u)^{l_j-1}\cdots(D^k u)^{l_k-1}\cdots(D^{\ell-1}u)^{l_{\ell-1}} D^j u D^k u dx,\end{aligned}$$

$0 \leq j, k \leq \ell - 1$, de onde vemos que, aplicando a desigualdade de Hölder em dois termos enquanto os demais termos são estimados pela norma L^∞,

$$\begin{aligned}\int \prod_{i=0}^{\ell-1}(D^i u)^{l_i} dx \leq \; & \|u\|_{L^\infty}^{l_0} \|Du\|_{L^\infty}^{l_1} \cdots \left\|D^j u\right\|_{L^\infty}^{l_j-1} \cdots \left\|D^k u\right\|_{L^\infty}^{l_k-1} \cdots \\ & \left\|D^{\ell-1}u\right\|_{L^\infty}^{l_{\ell-1}} \left\|D^j u(t)\right\|_0 \left\|D^k u(t)\right\|_0.\end{aligned}$$

Pela hipótese de indução temos que $\left\|D^k u\right\|_{L^\infty}$ pode ser estimado por um polinômio

$$P'_{k+2}(\|g\|_0, \|Dg\|_0, \cdots, \left\|D^{k+1}g\right\|_0), \; 1 \leq k \leq \ell - 1,$$

portanto $\int \prod_{i=0}^{\ell-1}(D^i u)^{l_i}dx$ pode ser majorado por um polinômio nas normas $\|g\|_0, \|Dg\|_0, \cdots, \left\|D^{\ell-1}g\right\|_0$ de grau dado pela soma

$$\begin{aligned}&2l_0+3l_1+\cdots+(j+2)(l_j-1)+\cdots+(k+2)(l_k-1)\\&+\cdots+(\ell-1+2)l_{\ell-1}+(j+1)+(k+1),\end{aligned}$$

e esta é igual a

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{\ell-1}(i+2)l_i-(j+2)-(k+2)+(j+1)+(k+1)\\=\;&2\sum_{i=0}^{\ell-1}(1+\frac{i}{2})l_i-2=2\ell+4.\end{aligned}$$

De onde concluímos que $\int Q_{\ell+2}(u, Du, \cdots, D^{\ell-1}u)dx$ pode ser estimado por um polinômio nas variáveis $\|g\|_0, \|Dg\|_0, \cdots, \left\|D^{\ell-1}g\right\|_0$ de grau $2\ell+4$. O mesmo resultado vale para $\int Q_{\ell+2}(g, Dg, \cdots, D^{\ell-1}g)dx$.

De volta a (2.42), obtemos a estimativa

$$\left\|D^{\ell+1}u(t)\right\|_0 \leq P_{\ell+2}(\|g\|_0, \|Dg\|_0, \cdots, \left\|D^{\ell+1}g\right\|_0). \tag{2.43}$$

As desigualdades (2.40) e (2.43) implicam, finalmente na seguinte estimativa para as soluções u do problema (2.1)

$$\left\|D^{\ell}u\right\|_{I,\infty} \leq P_{\ell+2}(\|g\|_0, \|Dg\|_0, \cdots, \left\|D^{\ell+1}g\right\|_0), \;\; \ell\in\mathbf{Z}^+.$$

Assim se exigirmos que g e suas derivadas até a ordem $(3m-2)$ sejam do tipo 2-$(\log)^{\frac{1}{(3m-1)2(m-1)^2}}$, isto é, g tem um representante ainda denotado por g em $\mathcal{E}_{M,2}[\mathbf{R}]$, tal que

$$\left\|D^k g_\varepsilon\right\|_0 \leq c_k|\log\varepsilon|^{\frac{1}{(3m-1)2(m-1)^2}}, \;\; k=0,1,2,\cdots,3m-2, \; 0<\varepsilon<\delta,$$

sendo

$$\left\|D^{\ell}u_\varepsilon\right\|_{I,\infty} \leq c\left\{\|g_\varepsilon\|_0^{r_0}+\|Dg_\varepsilon\|_0^{r_1}+\cdots+\left\|D^{\ell+1}g_\varepsilon\right\|_0^{r_{\ell+1}}\right\},$$

com $r_j \leq 3m-1$, $0\leq j\leq \ell+1$, teremos que

$$\begin{aligned}\left\|D^{\ell}u_\varepsilon\right\|_{I,\infty} \;\leq\; & c\left\{|\log\varepsilon|^{\frac{r_0}{(3m-1)2(m-1)^2}}+|\log\varepsilon|^{\frac{r_1}{(3m-1)2(m-1)^2}}\right.\\&\left.+\cdots+|\log\varepsilon|^{\frac{r_{\ell+1}}{(3m-1)2(m-1)^2}}\right\}.\end{aligned}$$

E como $\frac{r_j}{(3m-1)2(m-1)^2} \leq \frac{1}{2(m-1)^2}$, concluímos que para $\varepsilon < mín\{\delta, e^{-1}\}$, vale

$$\left\|D^\ell u_\varepsilon\right\|_{L^\infty} < c|\log\varepsilon|^{\frac{1}{2(m-1)^2}}, \quad \ell = 0, 1, 2, \cdots, 3m-3.$$

O que conclui a demonstração da proposição. □

2.3 Coerência com resultados conhecidos.

A proposição seguinte mostra que a solução generalizada obtida no Teorema 2.1.1 para o problema (2.1) é associada (ver Definição 1.3.2) à solução obtida por Ponce (ver Teorema 1.2.6).

Proposição 2.3.1 *Seja $g \in H^r(\mathbf{R}) \cap L^2(|x|^\sigma dx) = \chi_{r,\sigma}$ com $r = máx\{3m-2, s\}$, onde s e σ são inteiros positivos obtidos no Teorema 1.2.6. Então a solução do problema (2.1) com dado $cl(\iota(g))$ dada no Teorema 2.1.1 é associada à solução $v \in C([0,T] : \chi_{r,\sigma})$ dada no Teorema 1.2.6.*

Prova Consideremos a injeção $\iota : H^{-\infty}(\mathbf{R}) \to \mathcal{E}_{M,2}[\mathbf{R}]$ dada no Teorema 1.3.1. Como $r \geq 3m-2$, a desigualdade de Young (1.19) implica que $cl(\iota(g))$ e suas derivadas até a ordem $3m-2$ são do tipo 2-limitado, em particular $cl(\iota(g))$ satisfaz às hipóteses da Proposição 2.2.1; segue do Teorema 2.1.1 que existe uma única solução $u \in \mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ para a equação $u_t = D(G_m(u))$ com dado $cl(\iota(g))$ em $\mathcal{G}_2(\mathbf{R})$. Esta solução tem, por construção, como representante a única solução $\widehat{u}_\varepsilon$ em $C^\infty([0,T] \times \mathbf{R}) \cap L^\infty([0,T] : H^\infty(\mathbf{R}))$ do problema (2.2) com dado $g * \rho_\varepsilon$ obtida no Teorema 1.2.2 e observação no final do enunciado desse teorema.

Vamos mostrar que $g*\rho_\varepsilon$ está em $\chi_{r,\sigma}$, para todo $\varepsilon > 0$. Como $g \in H^s(\mathbf{R})$, segue (ver, por exemplo [3, Teorema 5.11, pg. 165]) que $g * \rho_\varepsilon \in H^\infty(\mathbf{R})$; por outro lado, usando (1.20), temos que

$$\begin{aligned}
\|g * \rho_\varepsilon\|_{L^p(|x|^\sigma)} &= \left(\int |(g*\rho_\varepsilon)(x)|^p |x|^\sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} = \\
&= \left(\int \left|\int g(x-y)\rho_\varepsilon(y)dy\right|^p |x|^\sigma dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int \left|\int g(x-y)\rho_\varepsilon(y)|x|^{\frac{\sigma}{p}} dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int \left(\int |g(x-y)|^p |\rho_\varepsilon(y)|^p |x|^\sigma dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&= \int |\rho_\varepsilon(y)| \left(\int |g(x-y)|^p |x|^\sigma dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&= \int |\rho_\varepsilon(y)| \left(\int |g(z)|^p |y+z|^\sigma dz \right)^{\frac{1}{p}} dy \\
&\leq c \int |\rho_\varepsilon(y)| |y|^{\frac{\sigma}{p}} dy \left(\int |g(z)|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + c \int |\rho_\varepsilon(y)| dy \left(\int |g(z)|^p |z|^\sigma dz \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

Portanto temos a desigualdade (uma generalização da desigualdade de Young (1.19) para $g \in L^p \cap L^p(|x|^\sigma)$)

$$
\|g * \rho_\varepsilon\|_{L^p(|x|^\sigma)} \leq c \left\{ \|g\|_{L^p} \|\rho_\varepsilon\|_{L^1(|x|^{\frac{\sigma}{p}})} + \|g\|_{L^p(|x|^\sigma)} \|\rho_\varepsilon\|_{L^1} \right\}, \tag{2.44}
$$

onde usamos a desigualdade $|y+z|^\sigma \leq c(|y|^\sigma + |z|^\sigma)$ que é consequência de (1.18).

Como $\rho \in S(\mathbf{R})$, segue que $\int |\rho_\varepsilon(y)| |y|^{\frac{\sigma}{p}} dy$ e $\int |\rho_\varepsilon(y)| dy$ são finitos, e como $g \in L^2(|x|^\sigma dx)$ a desigualdade (2.44) com $p = 2$, implica que $g * \rho_\varepsilon$ $\in L^2(|x|^\sigma dx)$.

Como $C([0,T] : \chi_{s,\sigma}(\mathbf{R})) \subset L^\infty([0,T] : H^s(\mathbf{R}))$ com inclusão contínua, segue da dependência contínua dada no Teorema 1.2.6, que

$$
\sup_t \|\widehat{u}_\varepsilon(t) - v(t)\|_s \to 0, \text{ se } \|g * \rho_\varepsilon - g\|_{\chi_{s,\sigma}(\mathbf{R})} \to 0,\ \varepsilon \to 0, \tag{2.45}
$$

onde

$$
\|g * \rho_\varepsilon - g\|_{\chi_{s,\sigma}(\mathbf{R})} = \|g * \rho_\varepsilon - g\|_s + \|g * \rho_\varepsilon - g\|_{L^2(|x|^\sigma)}. \tag{2.46}
$$

Como $\mathcal{D}(\mathbf{R}) \subset S(\mathbf{R}) \subset L^1(\mathbf{R})$ densamente, segue que $\forall \delta > 0$ existe φ^δ $\in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, tal que $\left\|\varphi^\delta - \rho\right\|_{L^1} < \delta$.

Avaliemos o último termo de (2.46)

$$
\begin{aligned}
\|g * \rho_\varepsilon - g\|_{L^2(|x|^\sigma)} &= \left\|(\rho_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^\delta) * g + \varphi_\varepsilon^\delta * g - g\right\|_{L^2(|x|^\sigma)} \\
&\leq \left\|(\rho_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^\delta) * g\right\|_{L^2(|x|^\sigma)} + \left\|\varphi_\varepsilon^\delta * g - g\right\|_{L^2(|x|^\sigma)}.
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

Por (2.44), temos que

$$\left\|(\rho_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^\delta) * g\right\|_{L^2(|x|^\sigma)} \leq c\left\{\|g\|_{L^2}\left\|\rho_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^\delta\right\|_{L^1(|x|^{\frac{\sigma}{2}})} + \|g\|_{L^2(|x|^\sigma)}\left\|\rho_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^\delta\right\|_{L^1}\right\}.$$

Como ρ, $\varphi^\delta \in S(\mathbf{R})$ temos que

$$\left\|\rho_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^\delta\right\|_{L^1(|x|^{\frac{\sigma}{2}})} = \varepsilon^{\frac{\sigma}{2}}\int|\rho(x) - \varphi^\delta(x)||x|^{\frac{\sigma}{2}}dx \leq \varepsilon^{\frac{\sigma}{2}}M_1,$$

onde $M_1 = \left\|\rho - \varphi^\delta\right\|_{L^1(|x|^{\frac{\sigma}{2}})}$. Por outro lado φ^δ foi escolhida de modo que $\left\|\rho_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^\delta\right\|_{L^1} = \left\|\rho - \varphi^\delta\right\|_{L^1} < \delta$; segue então que

$$\left\|(\rho_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^\delta) * g\right\|_{L^2(|x|^\sigma)} \leq c\{\|g\|_{L^2} M_1\varepsilon^{\frac{\sigma}{2}} + \|g\|_{L^2(|x|^\sigma)}\delta\}. \tag{2.48}$$

Antes de estimarmos o último termo de (2.47), observemos que a densidade de $C_c(\mathbf{R})$ em $L^p(|x|^\sigma)$ (ver por exemplo, Teorema 3.14 de [32, p.71]), nos permite escolher $g_1^\delta \in C_c(\mathbf{R})$ tal que $\left\|(g - g_1^\delta)(\cdot)^{\frac{\sigma}{2}}\right\|_{L^2} < \delta$. Como g_1^δ tem suporte compacto temos que $\varphi_\varepsilon^\delta * g_1^\delta - g_1^\delta$ converge a zero uniformemente sobre compactos quando $\varepsilon \to 0$. O mesmo acontece com $(\varphi_\varepsilon^\delta * g_1^\delta - g_1^\delta)|\cdot|^{\frac{\sigma}{2}}$. Como $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon^\delta * g_1^\delta) \subset \varepsilon\operatorname{supp}\varphi^\delta + \operatorname{supp}g_1^\delta \subset K_\delta$, K_δ compacto fixo, consequentemente temos a convergência,

$$\left\|\varphi_\varepsilon^\delta * g_1^\delta - g_1^\delta\right\|_{L^2(|x|^\sigma)} = \left\|(\varphi_\varepsilon^\delta * g_1^\delta - g_1^\delta)(\cdot)^{\frac{\sigma}{2}}\right\|_{L^2} \to 0, \ \varepsilon \to 0. \tag{2.49}$$

Agora avaliemos o último termo de (2.47); segue de (2.44) que

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_\varepsilon^\delta * g - g\right\|_{L^2(|x|^\sigma)} &= \left\|[\varphi_\varepsilon^\delta * (g - g_1^\delta)] + (\varphi_\varepsilon^\delta * g_1^\delta - g_1^\delta) + (g_1^\delta - g)\right\|_{L^2(|x|^\sigma)} \\
&\leq c\{\left\|g - g_1^\delta\right\|_{L^2}\left\|\varphi_\varepsilon^\delta\right\|_{L^1(|x|^{\frac{\sigma}{2}})} + \left\|g - g_1^\delta\right\|_{L^2(|x|^\sigma)}\left\|\varphi_\varepsilon^\delta\right\|_{L^1} \\
&\quad + \left\|(\varphi_\varepsilon^\delta * g_1^\delta - g_1^\delta)(\cdot)^{\frac{\sigma}{2}}\right\|_{L^2} + \left\|(g - g_1^\delta)(\cdot)^{\frac{\sigma}{2}}\right\|_{L^2}\} \\
&\leq c\{\left\|g - g_1^\delta\right\|_{L^2} M_2\varepsilon^{\frac{\sigma}{2}} + \delta(\delta + \|\rho\|_{L^1}) \\
&\quad + \left\|(\varphi_\varepsilon^\delta * g_1^\delta - g_1^\delta)(\cdot)^{\frac{\sigma}{2}}\right\|_{L^2} + \delta\},
\end{aligned}$$

onde $M_2 = \left\|\varphi^\delta\right\|_{L^1(|x|^{\frac{\sigma}{2}})}$ e onde usamos

$$\left\|\varphi_\varepsilon^\delta\right\|_{L^1} \leq \left\|\varphi_\varepsilon^\delta - \rho_\varepsilon\right\|_{L^1} + \|\rho_\varepsilon\|_{L^1} < \delta + \|\rho\|_{L^1}.$$

Usando esta estimativa e a desigualdade (2.48) em (2.47), obtemos que

$$\begin{aligned} \|\rho_\varepsilon * g - g\|_{L^2(|x|^\sigma)} \leq\; & c\Big\{\|g\|_{L^2} M_1\varepsilon^{\frac{\sigma}{2}} + \|g\|_{L^2(|x|^\sigma)}\,\delta + \left\|g - g_1^\delta\right\|_{L^2} M_2\varepsilon^{\frac{\sigma}{2}} \\ & + \left\|(\varphi_\varepsilon^\delta * g_1^\delta - g_1^\delta)(\cdot)^{\frac{\sigma}{2}}\right\|_{L^2} + \delta(\delta + \|\rho\|_{L^1}) + \delta\Big\}. \end{aligned}$$

Segue de (2.49) que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup \|\rho_\varepsilon * g - g\|_{L^2(|x|^\sigma)} \leq c(\delta^2 + \delta),\ \forall \delta > 0.$$

Como δ é arbitrário temos que

$$\|\rho_\varepsilon * g - g\|_{L^2(|x|^\sigma)} \to 0 \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{2.50}$$

A convergência para zero de $\|\rho_\varepsilon * g - g\|_s$, quando $\varepsilon \to 0$ é clara; portanto segue de (2.50) e de (2.46) que

$$\|g * \rho_\varepsilon - g\|_{\chi_{s,\sigma}} \to 0, \text{ quando } \varepsilon \to 0.$$

Finalmente, (2.45) mostra que $\widehat{u}_\varepsilon \to v$ em $L^\infty([0,T] : H^s(\mathbf{R}))$, e portanto em $\mathcal{D}'((0,T) \times \mathbf{R})$. Isto conclui a demonstração da proposição. □

Capítulo 3

Soluções generalizadas para a equação $u_t = DG_3(u)$.

O Teorema 2.1.1 para a equação geral (1.1) já nos garante a existência de soluções em $\mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R})$ para o problema de Cauchy envolvendo a equação (3.4) com dado inicial $g \in \mathcal{G}_2(\mathbf{R})$. A demonstração de unicidade de soluções que faremos no Teorema 3.1.1, ao contrário da demonstração que fizemos para o Teorema 2.1.1, não usa a caracteristica básica satisfeita pela classe, isto é, a equação (1.1) é completamente integrável. Isto permitirá estender o resultado às equações (3.1), (3.2) e (3.3) que correspondem aos modelos considerados respectivamente por Olver [29], Benney [4] e Fisher [17]

$$u_t + u_x + c_1 u u_x + c_2 u_{xxx} + c_3 u_x u_{xx} + c_4 u u_{xxx} + c_5 u_{xxxxx} = 0, \tag{3.1}$$

$$u_t - 2u_x u_{xx} - u u_{xxx} + u_{xxxxx} = 0, \tag{3.2}$$

$$u_t + (u + u^2)u_x + (1+u)(u_x u_{xx} + u u_{xxx}) + u_{xxxxx} = 0. \tag{3.3}$$

O que será feito no capítulo 4.

3.1 Unicidade de soluções.

Consideremos a equação (3.4), que corresponde ao terceiro membro da hierarquia de Lax, obtida quando fazemos $m = 3$ na equação (1.1)

$$u_t + c_1 u^2 u_x + c_2 u_x u_{xx} + c_3 u u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0. \tag{3.4}$$

Teorema 3.1.1 *Dados $g \in \mathcal{G}_2(\mathbf{R})$ e $T > 0$ finito, com g, g' e g'' do tipo $2 - (log)^{\frac{1}{2}}$, o problema de Cauchy para a equação (3.4) e dado inicial g tem no máximo uma solução $u \in \mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ satisfazendo à condição: possui um representante $\widehat{u} \in \mathcal{E}_{M,2}[(0,T) \times \mathbf{R})]$ tal que*

$$\sup_{[0,T]} \|\widehat{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|_4 = \mathcal{O}(|log\varepsilon|^{\frac{1}{4}}), \quad com\ \varepsilon \to 0. \tag{3.5}$$

Condições sobre o dado inicial g que garantem que (3.5) seja satisfeita serão dadas na Proposição 3.2.1.

Uma comparação da Proposição 2.2.1 com a Proposição 3.2.1 nos permite concluir que a condição imposta neste teorema, a qual garante a unicidade, é mais fraca que as exigências impostas sobre as soluções no Teorema 2.1.1.

Prova Suponhamos que existam duas funções generalizadas $u, v \in \mathcal{G}_2((0,T)\times \mathbf{R})$ satisfazendo à equação (3.4), à hipótese do teorema e tal que em $t = 0$ coincidam com g. Neste caso existem $\widehat{n}_1$, $\widehat{n}_2 \in \mathcal{N}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ e $\widehat{\eta} \in \mathcal{N}_2(\mathbf{R})$, tais que, se denotamos também por $u = \widehat{u}_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ e $v = \widehat{v}_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ os representantes das soluções em $\mathcal{E}_{M,2}[(0,T) \times \mathbf{R}]$ satisfazendo portanto às equações (3.4) com 0 no segundo membro substituído respectivamente por $\widehat{n}_1$, $\widehat{n}_2$, então

$$\begin{aligned}
&\partial_t(u-v) + c_1(u^2Du - v^2Dv) + c_2(DuD^2u - DvD^2v)\\
&+c_3(uD^3u - vD^3v) - D^5(u-v) = \widehat{n}_1 - \widehat{n}_2 \text{ em } (0,T) \times \mathbf{R})\\
&(u-v)|_{t=0} = \widehat{\eta} \text{ em } \mathbf{R}.
\end{aligned}$$

Fazendo $w = u - v$, $N = \widehat{n}_1 - \widehat{n}_2$ supondo, sem perder a generalidade, que $\widehat{\eta} = 0$, o problema acima se escreve na forma

$$\begin{aligned}
&\partial_t w + c_1(u+v)Duw + c_1v^2Dw + c_2DvD^2w\\
&+c_2D^2uDw + c_3D^3uw + c_3vD^3w - D^5w = N,\\
&w|_{t=0} = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Multiplicando a equação em (3.6) por w e integrando o resultado em relação a x, obtemos a expressão

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int w^2dx + c_1\int w^2(u+v)Dudx + c_1\int wv^2Dwdx$$

$$+c_2\int wDvD^2wdx + c_2\int wD^2uDwdx + c_3\int w^2D^3udx$$

$$+c_3\int wvD^3w dx-\int wD^5w dx=\int wN dx. \tag{3.7}$$

Usando as identidades abaixo, obtidas por integração por partes

$$\int wvD^3w dx=-\frac{3}{2}\int wDvD^2w dx+\frac{1}{4}\int w^2D^3v dx,$$

$$\int wD^5w dx=0,$$

$$\int wD^2uDw dx=-\frac{1}{2}\int w^2D^3u dx$$

e

$$\int wv^2Dw dx=-\int w^2vDv dx,$$

podemos escrever (3.7) na forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int w^2dx+c_1\int w^2(u+v)Du dx-c_1\int w^2vDv dx+c_2\int wDvD^2w dx$$

$$-\frac{c_2}{2}\int w^2D^3u dx+c_3\int w^2D^3u dx-\frac{3c_3}{2}\int wDvD^2w dx$$

$$+\frac{c_3}{4}\int w^2D^3v dx=\int wN dx,$$

de onde obtemos a desigualdade

$$\frac{d}{dt}\int w^2dx\le c\int[(|u|+|v|)|Du|+|v||Dv|+|D^3u|+|D^3v|]w^2dx$$
$$+c\int|wDvD^2w|dx+c\int|wN|dx,$$

onde c é uma constante positiva.

Integrando a desigualdade anterior de 0 a $t\le T$, usando imersão de Sobolev e a desigualdade $ab\le\delta a^2+\delta^{-1}b^2$, $\delta>0$, obtemos a estimativa

$$\int w^2dx\le c\,\|N\|_0\,\|w\|_0+c(M(T)+c\delta^{-1})\int_0^t\int w^2dxdt$$
$$+\delta\int_0^t\int(DvD^2w)^2dxdt. \tag{3.8}$$

onde $M(T)$ é dado por

$$M(t)=c\sup_{[0,t]}\left(1+\|u(s)\|_4+\|v(s)\|_4\right)^2 \tag{3.9}$$

Obtém-se uma estimativa conveniente para o último termo de (3.8) usando o argumento devido a Ginibre e Tsutsumi [21], isto é,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int [(vD^2w)^2 + (DvD^2w)^2] dxdt \\
\leq\ & \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^t \int [(vD^2w)^2 + (DvD^2w)^2] \chi_j^3(x) dxdt \\
\leq\ & \{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_{[0,T]} \sup_x [(v(x,t))^2 + (Dv(x,t))^2] \chi_j^2(x) \} \cdot \\
& \cdot \{ \sup_j \int_0^t \int (D^2w)^2 \chi_j(x) dxdt \} \\
\leq\ & c\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_{[0,T]} \|(v\chi_j)(t)\|_2^2 \} \cdot \{ \sup_j \int_0^t \int (D^2w)^2 \chi_j dxdt \},
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

onde $\chi_j(x) = \chi(x-j)$, $j \in \mathbf{Z}$ e $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi = 1$ em $[0,\ 1]$, $\chi = 0$ fora de $(-1,\ 2)$.

Para continuar a demonstração usaremos as estimativas abaixo, baseadas em Ponce [31], que serão demonstradas posteriormente

$$
\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_{[0,T]} \|(v\chi_j)(t)\|_2^2 \leq K := c\,\|v(0)\|_2^2 + cT \sup_{[0,T]} \left(\|v(t)\|_4^2 + \|v(t)\|_4^4 \right) + \alpha,
\tag{3.11}
$$

onde α é $\mathcal{O}(\varepsilon^q)$, e

$$
\begin{aligned}
&\sup_j \int_0^t \int (w_{xx})^2 \chi_j dxdt \\
&\leq c \int (w(x,t))^2 dx + c(M(t) + c\delta^{-1}) \int_0^t \int (w(x,t))^2 dxdt \\
&\quad + \delta \left(\int_0^t \int (vw_{xx})^2 dxdt + \int_0^t \int (v_x w_{xx})^2 dxdt \right) + \beta,
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

onde c é uma constante, $\delta > 0$ é arbitrário, $M(t)$ é dado por (3.9) e β é $\mathcal{O}(\varepsilon^q)$.

Admitindo as estimativas acima, temos que (3.10) é estimado por

$$
\begin{aligned}
cK &\left\{ c \int w^2 dx + c(M(T) + c\delta^{-1}) \int_0^t \int w^2 dxdt \right. \\
&\left. + \delta \int_0^t \int [(vD^2w)^2 + (DvD^2w)^2] dxdt + \beta \right\}.
\end{aligned}
$$

Escolhendo $\delta = \frac{1}{2(cK+2c^2K)}$, temos das desigualdades anteriores que

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{2(1+2c)}\right)\int_0^t\int[(vD^2w)^2+(DvD^2w)^2]dxdt\\ \leq\;& cK\left\{c\int w^2dx + c(M(T)+c\delta^{-1})\int_0^t\int w^2dxdt+\beta\right\}.\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2}\leq 1-\frac{1}{2(1+2c)}$, obtemos que

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int[(vD^2w)^2+(DvD^2w)^2]dxdt\\ \leq\;& 2cK\left\{c\int w^2dx + c(M(T)+c\delta^{-1})\int_0^t\int w^2dxdt+\beta\right\}.\end{aligned}$$

A desigualdade acima usada em (3.8) fornece a estimativa

$$\begin{aligned}\int w^2dx \;\leq\;& c\left\|N\right\|_0\left\|w\right\|_0 + c(M(T)+c\delta^{-1})\int_0^t\int w^2dxdt\\ &+2cK\delta\left\{c\int w^2dx + c(M(T)+c\delta^{-1})\int_0^t\int w^2dxdt+\beta\right\},\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}(1-2c^2K\delta)\int w^2dx \;\leq\;& c\left\|N\right\|_0\left\|w\right\|_0+\frac{1}{1+2c}\beta\\ &+(M(T)+c\delta^{-1})(c+2c^2K\delta)\int_0^t\int w^2dxdt.\end{aligned}$$

Observando que

$$1-2c^2K\delta = 1-\frac{2c^2K}{2(cK+2c^2K)} = 1-\frac{c}{1+2c}\geq\frac{1}{2},$$

concluímos que

$$\int w^2dx\leq 2c\left\|N\right\|_0\left\|w\right\|_0+\beta+L\int_0^t\int w^2dxdt,$$

onde $L = 2c(1+2cK\delta)(M(T)+c\delta^{-1})$.

Segue do Lema de Gronwall que

$$\left\|w(t)\right\|_0^2\leq(2c\left\|N\right\|_0\left\|w\right\|_0+\beta)\,e^{TL}. \tag{3.13}$$

Substituindo na expressão de L o valor escolhido para δ, e usando as expressões de K e $M(T)$ dados respectivamente em (3.11) e (3.9), obtemos a seguinte estimativa para L

$$L \leq c\left\{1+\alpha+\|g\|_2^2+\sup_{[0,T]}(\|u(t)\|_4+\|v(t)\|_4+\|u(t)\|_4^2+\|v(t)\|_4^2+\|v(t)\|_4^4)\right\}.$$

Assim, se exigirmos que o dado g e as soluções u e v satisfaçam às hipóteses do teorema, teremos por (3.13) que

$$\sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_0 \leq c\varepsilon^M, \text{ para todo } M \text{ dado.} \tag{3.14}$$

A demonstração do Teorema 3.1.1 estará concluída quando encontrarmos uma estimativa análoga à estimativa (3.14) para uma derivada qualquer de w. Para isto observemos primeiramente que valem as seguintes igualdades

$$u^2Du-v^2Dv=\frac{1}{3}(hw)_x, \tag{3.15}$$

$$DuD^2u-DvD^2v=\frac{1}{2}(DlDw)_x \tag{3.16}$$

e

$$uD^3u-vD^3v=\frac{1}{2}(lw)_{xxx}-\frac{3}{2}(DlDw)_x, \tag{3.17}$$

onde $h=u^2+uv+v^2$ e $l=u+v$.

Usando (3.15), (3.16) e (3.17), a equação em (3.6) pode ser escrita na forma

$$\partial_t w+\frac{c_1}{3}(hw)_x+\frac{c_3}{2}(lw)_{xxx}+d(DlDw)_x-D^5w=N, \tag{3.18}$$

onde $d=\frac{c_2-3c_3}{2}$.

Diferenciando a equação acima em relação a x e multiplicando o resultado por Dw, obtemos a expressão

$$Dw\partial_tDw+(\frac{c_1}{3}D^2h+\frac{c_3}{2}D^4l)wDw+[\frac{2}{3}c_1Dh+(2c_3+d)D^3l](Dw)^2+[\frac{c_1}{3}h$$

$$+(3c_3+2d)D^2l]DwD^2w+(2c_3+d)DlD^3wDw+\frac{c_3}{2}lD^4wDw$$

$$-D^6wDw=DNDw.$$

Integrando a equação acima em x e usando integração por partes, obtemos a equação

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int(Dw)^2dx - \frac{1}{2}\int(\frac{c_1}{3}D^3h + \frac{c_3}{2}D^5l)w^2dx$$

$$+\int[\frac{2}{3}c_1Dh + (2c_3+d)D^3l](Dw)^2dx - \frac{1}{2}\int[\frac{c_1}{3}Dh + (3c_3+2d)D^3l](Dw)^2dx$$

$$-(2c_3+d)\int(D^2lD^3w + DlD^4w)wdx - \frac{c_3}{2}\int(DlD^4w + lD^5w)wdx$$

$$-\int D^6wDwdx = \int DNDwdx,$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int(Dw)^2dx - \int(\frac{c_1}{6}D^3h + \frac{c_3}{4}D^5l)w^2dx + \int(\frac{1}{2}c_1Dh + \frac{1}{2}c_3D^3l)(Dw)^2dx$$

$$+\int[(-2c_3-d)(D^2lD^3w + DlD^4w) - \frac{c_3}{2}(DlD^4w + lD^5w]wdx = \int DNDw.$$

Integrando a última igualdade de zero a $t < T$, usando a desigualdade de Hölder e a estimativa

$$\sup_{[0,T]}(\|Dh(t)\|_{I,\infty} + \left\|D^3l(t)\right\|_{I,\infty}) \leq c\sup_{[0,T]}(\|Dh(t)\|_1 + \left\|D^3l(t)\right\|_1)$$

$$\leq c\sup_{[0,T]}(\|u(t)\|_4^2 + \|v(t)\|_4^2 + \|u(t)\|_4 + \|v(t)\|_4), \tag{3.19}$$

obtemos a desigualdade

$$\|Dw(t)\|_0^2 \leq c\Big\{(\left\|D^3h\right\|_{I,\infty} + \left\|D^5l\right\|_{I,\infty})\sup_{[0,T]}\|w(t)\|_0^2 + (\left\|D^2l\right\|_{I,\infty}\left\|D^3w\right\|_0$$

$$+\|Dl\|_{I,\infty}\left\|D^4w\right\|_0 + \|l\|_{I,\infty}\left\|D^5w\right\|_0)\sup_{[0,T]}\|w(t)\|_0 + \sup_{[0,T]}(\|u(t)\|_4^2 + \|v(t)\|_4^2$$

$$+\|u(t)\|_4 + \|v(t)\|_4)\int_0^t\|Dw(t)\|_0^2\,dt\Big\} + \|DN\|_0\|Dw\|_0.$$

Consequentemente temos que

$$\|Dw(t)\|_0^2 \leq \|DN\|_0\|Dw\|_0 + A\sup_{[0,T]}\|w(t)\|_0 + B\int_0^t\|Dw(t)\|_0^2\,dt,$$

onde

$$A = c((\left\|D^3h\right\|_{L^\infty} + \left\|D^5l\right\|_{L^\infty})\sup_{[0,T]}\|w(t)\|_0 + \left\|D^2l\right\|_{L^\infty}\left\|D^3w\right\|_0$$
$$+ \|Dl\|_{L^\infty}\left\|D^4w\right\|_0 + \|l\|_{L^\infty}\left\|D^5w\right\|_0)$$

e

$$B = c\sup_{[0,T]}(\|u(t)\|_4^2 + \|v(t)\|_4^2 + \|u(t)\|_4 + \|v(t)\|_4).$$

Usando o Lema de Gronwall obtemos que

$$\|Dw(t)\|_0^2 \leq (\|DN\|_0\|Dw\|_0 + A\sup_{[0,T]}\|w(t)\|_0)e^{BT}.$$

Usando que $\sup_{[0,T]}\|w(t)\|_0$ já satisfaz a estimativa desejada, que w é moderada e as hipóteses sobre u e v, obtemos que

$$\sup_{[0,T]}\|Dw(t)\|_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^M),\ \varepsilon \to 0,\ \forall M.$$

Seguindo por indução, diferenciamos a equação (3.18) k-vezes em relação a x, multiplicando o resultado por D^kw e em seguida integrando em x, obtemos a expressão

$$\int D^k\partial_t wD^kwdx + \frac{c_1}{3}\int D^{k+1}(hw)D^kwdx + \frac{c_3}{2}\int D^{k+3}(lw)D^kwdx$$
$$+d\int D^{k+1}(DlDw)D^kwdx - \int D^{k+5}wD^kwdx = \int D^kND^kwdx. \qquad (3.20)$$

Aplicando a regra de Leibnitz para a derivada do produto e integração por partes, obtemos, para o 2^0 termo de (3.20), a expressão

$$\begin{aligned}\int D^{k+1}(hw)D^kwdx &= \int\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}D^{k+1-j}hD^jwD^kwdx\\ &= \int hD^{k+1}wD^kwdx + (k+1)\int Dh(D^kw)^2dx\\ &\quad + \int\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}D^{k+1-j}hD^jwD^kwdx,\end{aligned}$$

de onde obtemos, usando integração por partes, a igualdade

$$\begin{aligned}\int D^{k+1}(hw)D^kwdx &= (k+\frac{1}{2})\int Dh(D^kw)^2dx\\ &\quad + \int\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}D^{k+1-j}hD^jwD^kwdx. \qquad (3.21)\end{aligned}$$

O 3^0 termo de (3.20) é igual a

$$
\begin{aligned}
\int D^{k+3}(lw)D^k w dx &= \int \sum_{j=0}^{k+3} \binom{k+3}{j} D^{k+3-j} l D^j w D^k w dx \\
&= \int l D^{k+3} w D^k w dx + (k+3) \int D l D^{k+2} w D^k w dx \\
&\quad + \frac{(k+3)(k+2)}{2} \int D^2 l D^{k+1} w D^k w dx \\
&\quad + \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6} \int D^3 l (D^k w)^2 dx \\
&\quad + \int \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+3}{j} D^{k+3-j} l D^j w D^k w dx,
\end{aligned}
$$

de onde obtemos, aplicando integração por partes, a expressão

$$
\begin{aligned}
\int D^{k+3}(lw)D^k w dx &= -\int D^{k+2} w D(l D^k w) dx \\
&\quad -(k+3) \int D^{k+1} w D(D l D^k w) dx \\
&\quad - \frac{(k+3)(k+2)}{4} \int D^3 l (D^k w)^2 dx \\
&\quad + \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6} \int D^3 l (D^k w)^2 dx \\
&\quad + \int \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+3}{j} D^{k+3-j} l D^j w D^k w dx,
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\int D^{k+3}(lw)D^k w dx &= -\frac{1}{2} \int D^3 l (D^k w)^2 dx + \int D l (D^{k+1} w)^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int D l (D^{k+1} w)^2 dx + \frac{k+3}{2} \int D^3 l (D^k w)^2 dx \\
&\quad -(k+3) \int D l (D^{k+1} w)^2 dx \\
&\quad - \frac{(k+3)(k+2)}{4} \int D^3 l (D^k w)^2 dx \\
&\quad + \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6} \int D^3 l (D^k w)^2 dx \\
&\quad + \int \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+3}{j} D^{k+3-j} l D^j w D^k w dx;
\end{aligned}
$$

reorganizando os termos, encontramos a expressão

$$\begin{aligned}
\int D^{k+3}(lw)D^k w dx &= [\frac{3}{2} - (k+3)] \int Dl(D^{k+1}w)^2 dx \\
&+[-\frac{1}{2} + \frac{k+3}{2} - \frac{(k+3)(k+2)}{4} \\
&+\frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6}] \int D^3 l(D^k w)^2 dx \\
&+ \int \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+3}{j} D^{k+3-j} l D^j w D^k w dx. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

O 4^0 termo de (3.20) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
\int D^{k+1}(DlDw)D^k w dx &= \int \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} D^{k+2-j} l D^{j+1} w D^k w dx \\
&= \int Dl D^{k+2} w D^k w dx \\
&\quad +(k+1) \int D^2 l D^{k+1} w D^k w dx \\
&\quad +\frac{k(k+1)}{2} \int D^3 l (D^k w)^2 dx \\
&\quad + \int \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k+1}{j} D^{k+2-j} l D^{j+1} w D^k w dx,
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\int D^{k+1}(DlDw)D^k w dx &= \frac{1}{2} \int D^3 l (D^k w)^2 dx - \int Dl (D^{k+1} w)^2 dx \\
&\quad +\frac{k^2-1}{2} \int D^3 l (D^k w)^2 dx \\
&\quad + \int \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k+1}{j} D^{k+2-j} l D^{j+1} w D^k w dx,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\int D^{k+1}(DlDw)D^k w dx &= \frac{k^2}{2} \int D^3 l (D^k w)^2 dx - \int Dl (D^{k+1} w)^2 dx \\
&\quad + \int \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k+1}{j} D^{k+2-j} l D^{j+1} w D^k w dx. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Nas expressões (3.22) e (3.23) aparece o termo $\int Dl(D^{k+1}w)^2dx$, que pode ser substituído por

$$\frac{1}{2}\int D^3l(D^kw)^2dx + \int D^2lD^{k-1}wD^{k+2}wdx + \int DlD^{k-1}wD^{k+3}wdx.$$

Usando isto, substituindo (3.21), (3.22) e (3.23) em (3.20) e lembrando que $\int D^{k+5}wD^kwdx = 0$, obtemos a expressão.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int (D^kw)^2dx &= \int (c_1Dh + c_2D^3l)(D^kw)^2dx \\
&+ \int c_3(D^2lD^{k+2}w + DlD^{k+3}w)D^{k-1}wdx \\
&+ \sum_{j=0}^{k-1}\int (d_jD^{k+1-j}h + e_jD^{k+3-j}l)D^jwD^kwdx \\
&+ \sum_{j=0}^{k-2}\int f_jD^{k+2-j}lD^{j+1}wD^kwdx \\
&+2\int D^kND^kwdx, \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

onde c_1, c_2, c_3, d_j, e_j e f_j são constantes que dependem apenas de k.

Chamando de μ_T o segundo membro (3.19), usando esta desigualdade, segue de (3.24) que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int (D^kw)^2dx &\leq \mu_T\int (D^kw)^2dx + \int |c_3(D^2lD^{k+2}w + DlD^{k+3}w)D^{k-1}w|dx \\
&+ \sum_{j=0}^{k-1}\int |d_jD^{k+1-j}h + e_jD^{k+3-j}l||D^jw||D^kw|dx \\
&+ \sum_{j=0}^{k-2}\int |f_jD^{k+2-j}lD^{j+1}wD^kw|dx + 2\int |D^kND^kw|dx.
\end{aligned}$$

Consequentemente, integrando a desigualdade anterior de 0 a t, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}
\int (D^kw)^2dx &\leq \mu_T\int_0^t\int (D^kw)^2dxdt \\
&+ \sum_{j=0}^{k-1}\int_0^t\int |d_jD^{k+1-j}h + e_jD^{k+3-j}l||D^jw||D^kw|dxdt
\end{aligned}$$

$$+\sum_{j=0}^{k-2}\int_0^t\int |f_j D^{k+2-j} l D^{j+1} w D^k w| dxdt$$
$$+\int_0^t\int |c_3(D^2 l D^{k+2} w + Dl D^{k+3} w) D^{k-1} w| dxdt$$
$$+2\int_0^t\int |D^k N D^k w| dxdt. \qquad (3.25)$$

As duas somatórias juntamente com os dois últimos termos que aparecem em (3.25) podem ser estimados por

$$c\left\{\sum_{j=0}^{k-1}\left(\left\|D^{k+1-j}h\right\|_{L^\infty}+\left\|D^{k+3-j}l\right\|_{L^\infty}\right)\left\|D^k w\right\|_0 \sup_{[0,T]}\left\|D^j w(t)\right\|_0\right.$$
$$\left.+\sum_{j=0}^{k-2}\left\|D^{k+2-j}l\right\|_{L^\infty}\left\|D^k w\right\|_0 \sup_{[0,T]}\left\|D^{j+1}w(t)\right\|_0\right\}$$
$$+c\left\{\left\|D^2 l\right\|_{L^\infty}\left\|D^{k+2}w\right\|_0+\|Dl\|_{L^\infty}\left\|D^{k+3}w\right\|_0\right\}\sup_{[0,T]}\left\|D^{k-1}w(t)\right\|_0$$
$$+2\left\|D^k N\right\|_0\left\|D^k w\right\|_0,$$

que denotaremos por α_T. Assim (3.25) toma a forma

$$\int (D^k w)^2 dx \leq \alpha_T + \mu_T \int_0^t\int (D^k w)^2 dxdt.$$

Usando o Lema de Gronwall, obtemos a seguinte estimativa

$$\left\|D^k w(t)\right\|_0 \leq \alpha_T\, e^{T\mu_T}.$$

Então se assumirmos por hipótese de indução que $\sup_{[0,T]}\|D^j w(t)\|_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^M)$, com $\varepsilon \to 0$, para todo $M > 0$ e $0 \leq j < k$, obtemos, como h, l, e w são moderadas, a estimativa

$$\sup_{[0,T]}\left\|D^k w(t)\right\|_0 \leq c\varepsilon^M e^{T\mu_T}.$$

Usando as hipóteses do teorema, isto é, que u e v satisfazem a desigualdade

$$\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_4 \leq c|\log\varepsilon|^{\frac{1}{4}},$$

obtemos que

$$\sup_{[0,T]} \left\| D^k w(t) \right\|_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^M), \text{ com } \varepsilon \to 0, \ \forall M. \tag{3.26}$$

Finalmente usando a equação de (3.6), obtemos uma estimativa equivalente a (3.26) para uma derivada qualquer de w. Isto conclui a demonstração do teorema. □

A seguir demonstraremos a estimativa (3.11). Observemos primeiramente que

$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_{[0,T]} \|(v\chi_j)(t)\|_2^2 \ &\leq \ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_{[0,T]} \|(v\chi_j)(t)\|_0^2 + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_{[0,T]} \|(v\chi_j)_x(t)\|_0^2 \\ &+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_{[0,T]} \|(v\chi_j)_{xx}(t)\|_0^2 .\end{aligned} \tag{3.27}$$

Para majorar, por exemplo, o termo $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_{[0,T]} \|(v_{xx}\chi_j)(t)\|_0^2$ que aparece no desenvolvimento da última parcela do segundo membro de (3.27), diferenciamos a equação (3.4) duas vezes em relação a x com v no lugar de u e n_2 no lugar de 0, multiplicamos o resultado por $v_{xx}\varphi_j$, onde $\varphi_j = \chi_j^2$ e, integrando na variável x, obtemos a equação

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (D^2v)^2\varphi_j dx + c_1 \int (v^2Dv)_{xx}D^2v\varphi_j dx + c_2\int (DvD^2v)_{xx}D^2v\varphi_j dx +$$

$$c_3\int (D^2vD^3v + 2DvD^4v + vD^5v)D^2v\varphi_j dx - \int D^7vD^2v\varphi_j dx = \int n_2\varphi_j v_{xx}. \tag{3.28}$$

Usando integração por partes podemos escrever a seqüência de igualdades abaixo

$$\begin{aligned}\int vD^5vD^2v\varphi_j dx \ &= \ -\int DvD^4vD^2v\varphi_j dx - \int vD^4vD^3v\varphi_j dx \\ &- \int vD^4vD^2v(\varphi_j)_x dx,\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int D^7vD^2v\varphi_j dx \ &= \ -\int D^6vD^3v\varphi_j dx - \int D^6vD^2v(\varphi_j)_x dx \\ &= \ \int D^5vD^4v\varphi_j dx + 2\int D^5vD^3v(\varphi_j)_x dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\int D^5vD^2v(\varphi_j)_{xx}dx \\
= & -\frac{1}{2}\int(D^4v)^2(\varphi_j)_xdx - 2\int(D^4v)^2(\varphi_j)_xdx \\
& -3\int D^4vD^3v(\varphi_j)_{xx}dx - \int D^4vD^2v(\varphi_j)_{xxx}dx \\
= & -\frac{5}{2}\int(D^4v)^2(\varphi_j)_xdx + \frac{3}{2}\int(D^3v)^2(\varphi_j)_{xxx}dx \\
& +\int(D^3v)^2(\varphi_j)_{xxx}dx + \int D^3vD^2v(\varphi_j)_{xxxx}dx \\
= & -\frac{5}{2}\int(D^4v)^2(\varphi_j)_xdx + \frac{5}{2}\int(D^3v)^2(\varphi_j)_{xxx}dx \\
& -\frac{1}{2}\int(D^2v)^2(\varphi_j)_{xxxxx}dx.
\end{aligned}
$$

Usando estes resultados em (3.28), obtemos a expressão

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int(D^2v)^2\varphi_j + c_1\int(v^2Dv)_{xx}D^2v\varphi_j + c_2\int(DvD^2v)_{xx}D^2v\varphi_j \\
& +c_3\int(D^2vD^3v + 2DvD^4v)D^2v\varphi_j - c_3\int D^4vDvD^2v\varphi_j \\
& -c_3\int vD^4vD^3v\varphi_j - c_3\int vD^4vD^2v(\varphi_j)_x + \frac{5}{2}\int(D^4v)^2(\varphi_j)_x \\
& -\frac{5}{2}\int(D^3v)^2(\varphi_j)_{xxx} + \frac{1}{2}\int(D^2v)^2(\varphi_j)_{xxxxx} = \int n_2\varphi_jv_{xx}.
\end{aligned}
$$

Integrando em t, em seguida passando ao supremo quando $t \in [0,T]$, usando imersões de Sobolev e a desigualdade $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ obtemos, após tomar a soma em j, a estimativa

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sup_{[0,T]}\int(D^2v)^2\varphi_j \leq\ & c\left\|D^2v(0)\right\|_0^2 + cT\sup_{[0,T]}(\|v(t)\|_4^2 + \|v(t)\|_4^3 + \|v(t)\|_4^4) \\
& +c\,\|n_2\|_0\,\|v_{xx}\|_0\,,
\end{aligned}
$$

onde c é uma constante positiva.

Analogamente podemos majorar os outros termos do 2^0 membro de (3.27) encontrando sempre uma estimativa do tipo acima, implicando na desigualdade (3.11). □

A demonstração da estimativa (3.12) é feita seguindo a demonstração dada por Ponce da Proposição 2.4 em [31] adaptando para o nosso caso, observando que o termo $\int J^{-1}(N)J^{-1}(w)\eta dx$ pode ser estimado por $c_\eta\,\|N\|_0\,\|w\|_0$ que é $\mathcal{O}(\varepsilon^q)$, $\varepsilon \to 0$.

3.2 Coerência entre as soluções.

A proposição seguinte, cuja demonstração usa-se as mesmas técnicas empregadas na demonstração da Proposição 2.2.1, mostra que a condição imposta sobre a solução u no Teorema 3.1.1 que garante a unicidade de soluções, pode ser obtida impondo mais restrições sobre o dado g. Este fato será usado na demonstração do resultado de associação Proposição 3.2.2.

Proposição 3.2.1 *Se exigirmos que g e suas derivadas até a ordem quatro sejam do tipo 2-$(\log)^{\frac{1}{20}}$, então existe um representante da solução u de (3.4) satisfazendo a condição do Teorema 3.1.1.*

Proposição 3.2.2 *Se $g \in H^s(\mathbf{R})$ com $s \geq 4$, então a solução $u \in \mathcal{G}_2((0,T)\times \mathbf{R})$ dada no Teorema 2.1.1 para o problema (2.1) com dado $cl(\iota(g))$ e $m = 3$ é associada à solução $v \in C([0,T] : H^s(\mathbf{R})) \cap L^2([0,T] : H^{s+2}_{loc}(\mathbf{R}))$, dada no Teorema 1.2.4.*

Prova Consideremos a injeção $\iota : H^{-\infty}(\mathbf{R}) \to \mathcal{E}_{M,2}[\mathbf{R}]$ dada no Teorema 1.3.1. Segue da desigualdade de Young para convolução (1.19) que as normas L^2 de $\iota(g)_\varepsilon(\cdot)$, $\iota(g')_\varepsilon(\cdot), \cdots, \iota(g^{(4)})_\varepsilon(\cdot)$ são limitadas independente de ε. Pelo Teorema 2.1.1, Proposição 3.2.1 e Teorema 3.1.1, existe uma única solução $u \in \mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ para a equação $u_t = DG_3(u)$ com dado inicial a classe representada por $\iota(g)$ em $\mathcal{G}_2(\mathbf{R})$.

Esta solução tem, por construção, como representante a única solução em $C^\infty([0,T] \times \mathbf{R}) \cap L^\infty([0,T] : H^\infty(\mathbf{R}))$ da equação $\partial_t \hat{u}_\varepsilon = DG_3(\hat{u}_\varepsilon)$ e dado $\iota(g)_\varepsilon$, obtida no Teorema 1.2.2. Claramente $\iota(g)_\varepsilon(\cdot) \to g$ em $H^s(\mathbf{R})$, quando $\varepsilon \to 0$. Segue da dependência contínua dada no Teorema 1.2.4 que a família $\hat{u}_\varepsilon$ converge a v em $C([0,T] : H^s(\mathbf{R})) \cap L^2([0,T] : H^{s+2}_{loc}(\mathbf{R}))$, portanto em $\mathcal{D}'((0,T) \times \mathbf{R})$. Isto demonstra a proposição. □

Capítulo 4

Soluções generalizadas para as equações de Olver, Benney e Fisher.

A equação do problema (4.1) abaixo foi estudada por Ponce em [31], onde ele estabelece um teorema de existência local e unicidade de soluções em $C([0,T]:H^s(\mathbf{R}))\cap L^2([0,T]:H^{s+2}_{loc}(\mathbf{R}))$ para o problema de Cauchy com dado em $H^s(\mathbf{R})$, para $s\geq 4$, ver Teorema 1.2.3.

Nosso objetivo neste capítulo é estabelecer um teorema de existência local, e, sob certas condições, de unicidade de soluções em $\mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R}))$ para o mesmo problema com dado inicial em $\mathcal{G}_2(\mathbf{R})$. Para a existência usaremos o resultado do Teorema 4.1.1 abaixo, em cuja demonstração usamos o Teorema 1.2.3. Para demonstrar a unicidade basta seguirmos a mesma técnica utilizada na demonstração do Teorema 3.1.1.

Estes resultados são válidos também para as equações de Olver, Benney e Fisher.

4.1 O problema clássico.

O resultado a ser usado na demonstração do Teorema 4.2.1 é o seguinte

Teorema 4.1.1 *Dado $g \in \mathcal{E}_{M,2}[\mathbf{R}]$, com $\|g_\varepsilon\|_4$ limitado independentemente de ε, existe T que independe de ε e uma única solução do problema*

$$\begin{aligned} &u_t^\varepsilon + c_1 u_x^\varepsilon u_{xx}^\varepsilon + c_2 u^\varepsilon u_{xxx}^\varepsilon - u_{xxxxx}^\varepsilon = 0 \\ &u^\varepsilon(0,x) = g_\varepsilon(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

na classe $C([0,T] : H^\infty(\mathbf{R}))$. Além disso, temos a seguinte estimativa para a solução u^ε

$$\sup_{[0,T]} \|u^\varepsilon(t)\|_s = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}),\ N = N(s),\ \varepsilon \to 0. \tag{4.2}$$

Prova A demonstração que faremos a seguir se baseia na demonstração dada por Ponce em [31, Lemma 3.5]. O Teorema 1.2.3 já garante a existência de um $T = T(\|g_\varepsilon\|_4)$ e de uma única solução do problema (4.1) na classe acima. Resta mostrar que T é limitado inferiormente por uma constante maior que zero independente de ε e que vale a estimativa (4.2). Omitindo a letra ε e aplicando o método usual de estimativa de energia obtemos, após derivar a equação em (4.1) k vezes em relação a x, multiplicar o resultado por $D^k u$, integrar em x e tomar a soma a partir de $k = 0$ até $k = s$, a seguinte estimativa

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_s^2 \leq c\|u(t)\|_4 \|u(t)\|_s^2 + c\int uD^s uD^{s+3}u dx.$$

Usando a identidade abaixo, obtida por integração por partes

$$\int uD^s uD^{s+3}u dx = \frac{1}{4}\int (D^s u)^2 D^3 u dx - \frac{3}{2}\int D^s uDuD^{s+2}u dx,$$

obtemos a desigualdade

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_s^2 \leq c\|u(t)\|_4 \|u(t)\|_s^2 + c\int D^s uDuD^{s+2}u dx, \tag{4.3}$$

válida para qualquer $s \in \mathbf{Z}^+$.

Usando a desigualdade $ab \leq \delta^{-1}a^2 + \delta b^2$, $\delta > 0$, obtemos de (4.3), a desigualdade

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_s^2 \leq c\left(\|u(t)\|_4 + c\delta^{-1}\right)\|u(t)\|_s^2 + \delta\int (DuD^{s+2}u)^2 dx. \tag{4.4}$$

Para estimar o último termo de (4.4), usamos novamente o argumento da desigualdade (3.10) para obter a estimativa

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int ((uD^{s+2}u)^2 + (DuD^{s+2}u)^2)dxdt \\
&\leq \quad c \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_t \|(u\chi_j)(t)\|_2^2 \right) \left(\sup_j \int_0^t \int \left(D^{s+2}u\right)^2 \chi_j dxdt \right) \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

onde χ_j é como na desigualdade (3.10)

Na demonstração do Teorema 3.1.1, usamos a estimativa (3.11), onde a equação envolvida continha o termo u^2u_x. Seguindo um raciocínio análogo ao usado na demonstração desta estimativa, podemos mostrar também que a desigualdade

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sup_t \|(u\chi_j)(t)\|_2^2 \leq U(t) := c\,\|g_\epsilon\|_4^2 + c\int_0^t (\|u(\sigma)\|_4^2 + \|u(\sigma)\|_4^3)d\sigma, \quad (4.6)$$

vale para qualquer solução u do problema (4.1).

Para estimar o segundo fator do segundo membro de (4.5), aplicamos o operador D^s na equação, multiplicamos o resultado por $(D^su)\phi$, $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ com ϕ e ϕ_x limitadas e integramos na variável x, obtendo assim a expressão

$$\begin{aligned}
\int D^su_tD^su\phi dx \quad &= \quad -c_1\int D^s(u_xu_{xx})D^su\phi dx - c_2\int D^s(uu_{xxx})D^su\phi dx \\
&\qquad + \int D^su_{xxxxx}D^su\phi dx. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

As integrais acima podem ser escritas nas seguintes formas:

$$\int D^su_tD^su\phi dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int (D^su)^2\phi dx,$$

$$\begin{aligned}
\int D^s(u_xu_{xx})D^su\phi dx \quad &= \quad \int D^{s+2}uDuD^su\phi dx \\
&\quad + \sum_{j=1}^{s}\int \binom{s}{j} D^{s+2-j}uD^{j+1}uD^su\phi dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int D^s(uu_{xxx})D^su\phi dx \quad &= \quad -\frac{3}{2}\int D^{s+2}uD^su(u\phi)_xdx + \frac{1}{4}\int (D^su)^2(u\phi)_{xxx}dx \\
&\quad + s\int D^{s+2}uDuD^su\phi dx \\
&\quad + \sum_{j=2}^{s}\int \binom{s}{j} D^{s+3-j}uD^juD^su\phi dx
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int D^{s+5}uD^su\phi dx &= -\frac{5}{2}\int (D^{s+2}u)^2\phi_x dx + \frac{5}{2}\int (D^{s+1}u)^2\phi_{xxx}dx \\ &\quad -\frac{1}{2}\int (D^su)^2\phi_{xxxxx}.\end{aligned}$$

Voltando com estas identidades em (4.7) obtemos, após um rearranjo conveniente dos termos e integração em t, a expressão

$$\begin{aligned}\int_0^t\int (D^{s+2}u)^2\phi_x dxdt &= \frac{1}{5}\Big\{\int (D^su(0,x))^2\phi dx - \int (D^su(t,x))^2\phi dx \\ &\quad -2(c_1+c_2s)\int_0^t\int D^{s+2}uDuD^su\phi dxdt \\ &\quad +3c_2\int_0^t\int D^{s+2}uD^su(u\phi)_x dx\, dt \\ &\quad -\frac{c_2}{2}\int_0^t\int (D^su)^2(u\phi)_{xxx}dxdt \\ &\quad -2c_1\sum_{j=1}^{s}\int_0^t\int \binom{s}{j} D^{s+2-j}uD^{j+1}uD^su\phi dx\, dt \\ &\quad -2c_2\sum_{j=2}^{s}\int_0^t\int \binom{s}{j} D^{s+3-j}uD^juD^su\phi dxdt \\ &\quad +5\int_0^t\int (D^{s+1}u)^2\phi_{xxx}dxdt \\ &\quad -\int_0^t\int (D^su)^2\phi_{xxxxx}dxdt\Big\}.\end{aligned}$$

Observando que as somatórias acima podem ser majoradas por

$$c\int_0^t (1+\|u(\sigma)\|_4)\,\|u(\sigma)\|_s^2\, d\sigma,$$

e usando a desigualdade $ab \le \delta a^2 + \delta^{-1}b^2$, obtemos a estimativa

$$\begin{aligned}\int_0^t\int (D^{s+2}u)^2\phi_x dxdt &\le c\int_0^t (c\delta^{-1}+1+\|u(\sigma)\|_4)\,\|u(\sigma)\|_s^2\, d\sigma \\ &\quad +\frac{1}{5}\int (D^su(0,x))^2\phi dx - \frac{1}{5}\int (D^su(t,x))^2\phi dx \\ &\quad +\delta\int_0^t\int ((D^{s+2}uDu)^2 + (uD^{s+2}u)^2)dxdt \\ &\quad +\int_0^t\int (D^{s+1}u)^2\phi_{xxx}dxdt. \qquad (4.8)\end{aligned}$$

Para estimar o último termo de (4.8) usamos argumentos semelhantes, isto é, derivamos a equação em (4.1) $s-1$ vezes em x, multiplicamos o resultado por $D^{s-1}u\psi$ e assim por diante, obtendo a estimativa

$$\begin{aligned}\int_0^t \int (D^{s+1}u)^2 \psi_x dx dt \;&\leq\; c\int_0^t (1+\|u(\sigma)\|_4)\,\|u(\sigma)\|_s^2\,d\sigma \\ &+\frac{1}{5}\int (D^{s-1}u(0,x))^2\psi dx - \frac{1}{5}\int (D^{s-1}u(t,x))^2\psi dx.\end{aligned}$$

Fazendo $\phi_x = \chi$, $\chi_j = \chi(x-j)$, escolhendo ψ positiva com derivada positiva tal que $|\phi_{xxx}| \leq \psi_x$ e substituindo a estimativa anterior em (4.8), obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}\int_0^t \int (D^{s+2}u)^2 \chi_j dx dt \;&\leq\; c\int_0^t (c\delta^{-1}+1+\|u(\sigma)\|_4)\,\|u(\sigma)\|_s^2\,d\sigma \\ &+\frac{1}{5}\int (D^{s}u(0,x))^2\phi_j dx - \frac{1}{5}\int (D^{s}u(t,x))^2\phi_j dx \\ &+\delta\int_0^t \int ((DuD^{s+2}u)^2 + (uD^{s+2}u)^2)dx dt \\ &+\frac{1}{5}\int (D^{s-1}u(0,x))^2\psi_j dx - \frac{1}{5}\int (D^{s-1}u(t,x))^2\psi_j dx.\end{aligned}$$

Escolhendo j_0 de modo que a quantidade no segundo membro da desigualdade anterior seja maior que a metade do seu supremo em $\mathbf{Z}$, obtemos de (4.5) e (4.6), a estimativa

$$\begin{aligned}&\int_0^t \int ((DuD^{s+2}u)^2 + (uD^{s+2}u)^2)dx dt \\ \leq\;& cU(t)\left\{\int_0^t (c\delta^{-1}+1+\|u(\sigma)\|_4)\,\|u(\sigma)\|_s^2\,d\sigma + \frac{1}{5}\int (D^{s}u(0,x))^2\phi_{j_0} dx\right. \\ &-\frac{1}{5}\int (D^{s}u(t,x))^2\phi_{j_0} dx + \delta\int_0^t \int ((D^{s+2}uDu)^2 + (uD^{s+2}u)^2)dx dt \\ &\left.+\frac{1}{5}\int (D^{s-1}u(0,x))^2\psi_{j_0} dx - \frac{1}{5}\int (D^{s-1}u(t,x))^2\psi_{j_0} dx\right\}, \qquad (4.9)\end{aligned}$$

onde $U(t)$ é dado por (4.6). Por hipótese, existe $M > 0$ tal que

$$\|g_\varepsilon\|_4 \leq M, \ \ \forall \varepsilon > 0. \qquad (4.10)$$

Tomando $\delta = \frac{1}{4cM^2}$, temos que

$$c\delta\,\|g_\varepsilon\|_4^2 \leq \frac{1}{4}, \qquad (4.11)$$

que, juntamente com (4.6), nos permite definir T^* (dependendo de ε) por

$$c\delta U(T^*) \leq c\delta\left(\|g_\varepsilon\|_4^2 + T^* \sup_{[0,T^*]}(\|u(t)\|_4^2 + \|u(t)\|_4^3)\right) = \frac{1}{2}. \tag{4.12}$$

Substituindo (4.12) em (4.9), obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int((uD^{s+2}u)^2 + (DuD^{s+2}u)^2)dxdt \\
\leq\ & 2cU\left\{\int_0^t (c\delta^{-1} + 1 + \|u(\sigma)\|_4)\,\|u(\sigma)\|_s^2\,d\sigma + \frac{1}{5}\int(D^s u(0,x))^2\phi_{j_0}dx\right. \\
&-\frac{1}{5}\int(D^s u(t,x))^2\phi_{j_0}dx + \frac{1}{5}\int(D^{s-1}u(0,x))^2\psi_{j_0}dx \\
&\left.-\frac{1}{5}\int(D^{s-1}u(t,x))^2\psi_{j_0}dx\right\}.
\end{aligned}$$

Integrando a desigualdade (4.4) de 0 a t, usando a desigualdade anterior e reorganizando convenientemente os termos, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|_s^2 + \frac{1}{5}\int(D^s u(t,x))^2\phi_{j_0}dx + \frac{1}{5}\int(D^{s-1}u(t,x))^2\psi_{j_0}dx \\
\leq\ & \|u(0)\|_s^2 + \frac{1}{5}\int(D^s u(0,x))^2\phi_{j_0}dx + \frac{1}{5}\int(D^{s-1}u(0,x))^2\psi_{j_0}dx \\
&+c\int_0^t (c\delta^{-1} + \|u(\sigma)\|_4)\,\|u(\sigma)\|_s^2\,d\sigma \\
&+\int_0^t (c\delta^{-1} + 1 + \|u(\sigma)\|_4)\,\|u(\sigma)\|_s^2\,d\sigma
\end{aligned} \tag{4.13}$$

A função definida pelo primeiro membro de (4.13) é equivalente a $\|u(t)\|_s^2$. A desigualdade (4.13) implica portanto na estimativa

$$\|u(t)\|_s^2 \leq c\,\|u(0)\|_s^2 + c\int_0^t (1 + \|u(\sigma)\|_4)\,\|u(\sigma)\|_s^2\,d\sigma. \tag{4.14}$$

Fazendo $s = 4$ e usando (4.10), obtemos a seguinte estimativa

$$\|u(t)\|_4^2 \leq cM^2 + c\int_0^t (1 + \|u(\sigma)\|_4)\,\|u(\sigma)\|_4^2\,d\sigma.$$

Usando o Lema Gronwall, obtemos que

$$\|u(t)\|_4 \leq \sqrt{c}M\exp(\frac{c}{2}t)\,\exp(\frac{c}{2}\int_0^t \|u(\sigma)\|_4\,d\sigma), \tag{4.15}$$

que implica em

$$\|u(t)\|_4 \exp(-\frac{c}{2}\int_0^t \|u(\sigma)\|_4\, d\sigma) \leq \sqrt{c}M \exp(\frac{c}{2}t).$$

Portanto temos que

$$\frac{d}{dt}\exp(-\frac{c}{2}\int_0^t \|u(\sigma)\|_4\, d\sigma) \geq -\frac{c}{2}\sqrt{c}M\, \exp(\frac{c}{2}t),$$

que integrada de zero a t fornece a desigualdade

$$\exp(-\frac{c}{2}\int_0^t \|u(\sigma)\|_4\, d\sigma) \geq 1 + \sqrt{c}M(1 - \exp(\frac{c}{2}t)),$$

de onde concluímos que, se $t \leq \overline{T} = \frac{2}{c}\ln(1 + \frac{1}{\sqrt{c}M})$

$$\exp(\frac{c}{2}\int_0^t \|u(\sigma)\|_4\, d\sigma) \leq \frac{1}{1 + \sqrt{c}M(1 - \exp(\frac{c}{2}t))}.$$

Usando este resultado em (4.15), obtemos a seguinte estimativa para a norma $\|u(t)\|_4$

$$\|u(t)\|_4 \leq \sqrt{c}M \exp(\frac{c}{2}t)\frac{1}{1 + \sqrt{c}M(1 - \exp(\frac{c}{2}t))},$$

Definindo $T_0 < \overline{T}$, agora independente de ε, pela igualdade

$$\exp(\frac{c}{2}t)\frac{1}{1 + \sqrt{c}M(1 - \exp(\frac{c}{2}t))} = 2,$$

temos que

$$\sup_{[0,T_0]} \|u(t)\|_4 \leq 2\sqrt{c}M. \tag{4.16}$$

Se $T_0 < T^*$ dado por (4.12) temos que T_0 e (4.16) fornecem o resultado desejado para o caso $s = 4$. Se $T_0 \geq T^*$, por (4.12), (4.11) e (4.16), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= c\delta\left(\|g_\varepsilon\|_4^2 + T^* \sup_{[0,T^*]}(\|u(t)\|_4^2 + \|u(t)\|_4^3)\right) \\ &\leq \frac{1}{4} + c\delta T^*(4cM^2 + 8c^{\frac{3}{2}}M^3), \end{aligned}$$

o que implica, pela definição de δ, em

$$T^* \geq \frac{1}{4c(1+2\sqrt{c}M)} = T^{**},$$

isto é, obtivemos uma cota inferior independente de ε para T^*. Em qualquer caso seja $T = \min\{T^{**}, T_0\}$, vemos que para todo $\varepsilon > 0$ as soluções u^ε estão definidas no intervalo $[0, T]$.

Finalmente, uma estimativa para $\|u(t)\|_s$ é obtida de (4.14): substituindo (4.16) em (4.14) temos que

$$\|u(t)\|_s^2 \leq c\,\|u(0)\|_s^2 + c\int_0^T (1+2\sqrt{c}M)\,\|u(t)\|_s^2\,dt,$$

e, pelo Lema de Gronwall,

$$\|u(t)\|_s \leq \sqrt{c}\,\|u(0)\|_s \exp\frac{c}{2}T(1+2\sqrt{c}M)\,,$$

para todo $0 \leq t \leq T$, produzindo o resultado desejado. □

4.2 Soluções generalizadas.

O teorema seguinte garante a existência de uma solução para o problema (4.17), estudado na álgebra $\mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R})$. A unicidade é garantida se exigirmos que as soluções desse problema satisfaçam às hipóteses do Teorema 3.1.1.

Teorema 4.2.1 *Dado $g \in \mathcal{G}_2(\mathbf{R})$, com g e suas derivadas até a ordem quatro de tipo 2-limitado, existe T e uma solução u em $\mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R})$ para o problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} &\partial_t u + c_1 Du D^2 u + c_2 u D^3 u - D^5 u = 0 \;\; em\;\; \mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R}) \\ &u|_{\{t=0\}} = g \;\; em\;\; \mathcal{G}_2(\mathbf{R}). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Além disso, se exigirmos que u satisfaça à condição do Teorema 3.1.1, então existe no máximo uma solução em $\mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R})$ para este problema.

Prova *Existência*: Seja $\widehat{g}$ um representante de g em $\mathcal{E}_{M,2}[\mathbf{R}]$. A condição sobre g implica que $\|\widehat{g}_\varepsilon\|_4$ é limitado independentemente de ε. Assim o Teorema 4.1.1 fornece um T e uma única solução $\widehat{u}_\varepsilon$ em $C([0,T]:H^\infty(\mathbf{R}))$ para o problema (4.1) com dado $\widehat{g}_\varepsilon$ satisfazendo à estimativa

$$\sup_{[0,T]} \|\widehat{u}_\varepsilon(t,\cdot)\|_s = \mathcal{O}(\varepsilon^{-M}), \quad M = M(s), \quad \varepsilon \to 0.$$

Temos portanto que $\widehat{u} \in \mathcal{E}_{M,2}[(0,T)\times\mathbf{R}]$. A função generalizada $u \in \mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R})$ que tem $\widehat{u}$ por representante é solução do nosso problema.

Unicidade: A condição imposta sobre g neste teorema implica que g, g' e g'' são de tipo 2-$(\log)^{\frac{1}{2}}$. Seguindo a mesma técnica empregada na demonstração do Teorema 3.1.1, podemos concluir o resultado. □

Teorema 4.2.2 *O resultado do Teorema 4.2.1 vale para as equações de Olver (3.1), Benney (3.2) e Fisher (3.3).*

Prova Usando o Teorema 1.2.5 e as mesmas técnicas empregadas na demonstração do Teorema 4.1.1 é possível mostrar que o resultado do Teorema 4.1.1 ainda vale para as equações em consideração. A conclusão do resultado é obtida como na demonstração do Teorema 4.2.1. □

A seguir demonstraremos o seguinte resultado de coerência com soluções clássicas que, com as devidas modificações, vale também para as equações de Olver, Benney e Fisher.

Proposição 4.2.1 *Se $g \in H^s(\mathbf{R})$ com $s \geq 4$, então a solução $u \in \mathcal{G}_2((0,T)\times\mathbf{R})$ dada no Teorema 4.2.1 para o problema (4.17) com dado inicial $cl(\iota(g))$ é associada à solução $v \in C([0,T]:H^s(\mathbf{R}))\cap L^2([0,T]:H^{s+2}_{loc}(\mathbf{R}))$, dada no Teorema 1.2.3.*

Prova Consideremos a injeção $\iota : H^{-\infty}(\mathbf{R}) \to \mathcal{E}_{M,2}[\mathbf{R}]$, $g \to g*\rho_\varepsilon$, com ρ satisfazendo (1.23). Como $g \in H^s(\mathbf{R})$ e $s \geq 4$, segue da desigualdade de Young para a convolução (1.19) que $\|g*\rho_\varepsilon\|_4$ é limitado independentemente de ε. O Teorema 4.1.1 fornece uma única solução $\widehat{u}_\varepsilon$ em $C([0,T]:H^\infty(\mathbf{R}))$ para o problema (4.1) com dado inicial $g*\rho_\varepsilon$. A desigualdade (4.16) mostra que

$$\sup_{[0,T]} \|\widehat{u}_\varepsilon(t)\|_4 \leq K.$$

Portanto a solução $u \in \mathcal{G}_2((0,T) \times \mathbf{R})$ para o problema (4.17) com dado $cl(\iota(g))$ dada no Teorema 4.2.1, que tem, por construção, $\widehat{u}_\varepsilon$ como representante, é única. Como $g * \rho_\varepsilon \to g$ em $H^s(\mathbf{R})$, com $\varepsilon \to 0$, segue da dependência contínua dada no Teorema 1.2.3 que $\widehat{u}_\varepsilon \to v$ em $C([0,T] : H^s(\mathbf{R})) \cap L^2([0,T] : H^{s+2}_{loc}(\mathbf{R}))$, portanto em $\mathcal{D}'((0,T) \times \mathbf{R})$, o que conclui a demonstração. $\square$

Bibliografia

[1] R. A. ADAMS, *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York, 1975.

[2] W. AMBROSE, *Products of distributions with values in distributions.* J. reine angew. Math., **315** (1980) pp. 73-91.

[3] J. BARROS NETO, *An Introduction to the Theory of Distributions,* Marcel Dekker Inc., New York, 1973.

[4] D. J. BENNEY, *A general theory for interactions between short and long waves,* Stud. Appl. Math., **56** (1977) pp. 81-94.

[5] H. A. BIAGIONI, *A Nonlinear Theory of Generalized Functions,* Lecture Notes in Math., **1421**, Springer, Berlin, 1990.

[6] H. A. BIAGIONI & R. J. IÓRIO JR., *Generalized solutions of the Benjamin-Ono and Smith equations,* J. Math. Anal. Appl., **182** (1994) pp. 465-485.

[7] H. A. BIAGIONI & M. OBERGUGGENBERGER, *Generalized solutions to the Burgers' equation,* J. Differential Equations, **97** (1992) pp. 263-287.

[8] H. A. BIAGIONI & M. OBERGUGGENBERGER, *Generalized solutions to the Korteweg-de Vries and the regularized long-wave equations,* SIAM J. Math. Anal., **23** (1992) pp. 923-940.

[9] H. BREZIS, *Analyse Fonctionnelle, Masson, Paris, New York, São Paulo, 1987.*

[10] H. BREZIS & A. FRIEDMAN, *Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions,* J. Math. Pures Appl., **62** (1983) pp. 73-97.

[11] C. BU *Generalized solutions to the cubic Schrödinger equation,* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **27** (1996) pp. 769-774.

[12] C. BU, *Modified KdV equation with generalized functions as initial values,* J. Math. Phys., **36** (1996) pp. 3454-3460.

[13] T. CAZENAVE & A. HARAUX, *Introduction aux Problèmes d'Évolution Semi-Linéaires,* Mathematiques & Applications, Ellipses, Paris 1990.

[14] J. F. COLOMBEAU, *Elementary Introduction to New Generalized Functions,* North-Holland Math. Studies, **113**, Amsterdan, 1985.

[15] J. F. COLOMBEAU & M. LANGLAIS, *Generalized solutions of nonlinear parabolic equations with distributions as initial conditions,* J. Math. Anal. Appl., **145** (1990) pp. 186-196.

[16] YU. V. EGOROV, *A contribution to the new generalized functions,* Russian Math. Survey, **45** (1990) pp. 1-49.

[17] E. J. FISHER, *Comments on the use of the Korteweg-de Vies equation in the study of anharmonic lattice,* Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **339** (1974) pp. 119-126.

[18] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations,* Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1969.

[19] C. S. GARDNER, *Korteweg-de Vries equation and generalizations IV: The Korteweg-de Vries equation as a Hamiltonian system,* J. Math. Phys., **12** (1971) pp. 1548-1551.

[20] C. S. GARDNER, J. M. GREENE, M. D. KRUSKAL & R. M. MIURA, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. VI: Methods for exact solution,* Comm. Pure Appl. Math., **27** (1974) pp. 97-133.

[21] J. GINIBRE & Y. TSUTSUMI, *Uniqueness of solutions for the generalized Korteweg-de Vries equations,* SIAM J. Math. Anal., **20** (1989) pp. 1388-1425.

[22] C. S. HÖNIG, *Análise Funcional e Aplicações,* Publicações IME-USP, São Paulo, 1990.

[23] M. D. KRUSKAL, R. M. MIURA, C. S. GARDNER & N. J. ZABUSKY, *Korteweg-de Vries equation and generalizations. V: Uniqueness and nonexistence of polynomial conservation laws*, J. Math. Phys. **11** (1970) pp. 952-960.

[24] P. D. LAX, *Almost periodic solutions of the KdV equation,* SIAM Rev. **18** (1976) pp. 351-375.

[25] P. D. LAX, *Integral of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968) pp. 467-490.

[26] R. M. MIURA, *The Korteweg-de Vries equations: A survey of results,* SIAM Rev. **18** (1976) pp. 412-459.

[27] R. M. MIURA, C. S. GARDNER & M. D. KRUSKAL, *Korteweg-de Vries equation and generalizations.II: Existence of conservation laws and constants of motion,* J. Math. Phys., **9** (1968) pp. 1204-1209.

[28] M. OBERGUGGENBERGER, *Multiplications of Distributions and Applications to Partial Differential Equations,* Pitman Research Notes in Mathematics Series **259**, Longman, New York, 1992.

[29] P. L. OLVER, *Hamiltonian and non-Hamiltonian models for water waves*, in Lecture Notes in Physics. **195**, pp. 273-290, Springer, New York, 1984.

[30] G. PONCE, *Higher order non-linear dispersive equations,* Proc. Amer. Math. Soc., **122** (1994) pp. 157-166.

[31] G. PONCE, *Lax pairs and higher order models for water waves,* J. Differential Equations. **102** (1993) pp. 360-381.

[32] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1974.

[33] M. REED & B. SIMON, *Functional Analysis,* Academic Press, Inc., vol. 1, New York, 1973.

[34] J. C. SAUT, *Quelques généralisations de l'équation de Korteweg-de Vries, II*, J. Differential Equations **33** (1979) pp. 320-335.

[35] R. SCHIMMING, *An explicit expression for the Korteweg-de Vries hierarchy,* Acta Appl. Math., **39** (1995) pp. 489-505.

[36] M. SCHWARZ JR., *The initial value problem for the sequence of generalized Korteweg-de Vries Equations,* Adv. in Math., **54** (1984) pp. 22-56.

[37] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations,* Springer, Berlin, 1983.

[38] F. TREVES, *Basic Linear Partial Differential Equations,* Academic Press, New York, 1975.