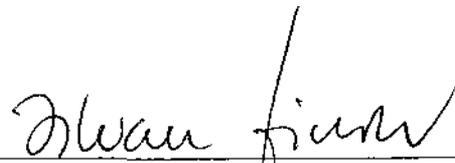


**SOBRE REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS ORIENTADAS DE GRUPOS**

Este exemplar corresponde a redação final da tese defendida pela Srta. Célia Picinin de Mello e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 21 de dezembro de 1984



p/ Prof. Dr. CLÁUDIO LEONARDO LUCCHESI  
Orientador

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Dezembro – 1984

- *Aos meus pais,*

*Álvaro e Alice*

## AGRADEÇO

Ao Prof. Dr. Cláudio Leonardo Lucchesi, sempre amigo, minha profunda gratidão pelo estímulo, dedicação e valiosa orientação.

Aos meus pais, pelo amor, confiança e apoio nos momentos difíceis.

Aos amigos queridos pelos conselhos e incentivos ao meu desenvolvimento.

A Elda, pelo esmerado trabalho de datilografia e a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

*Célia Picinin de Mello.*

## ÍNDICE

### CAPÍTULO 1:

#### Definições e Notações Básicas

1. Representações Gráficas de Grupos . . . . .	1
2. Algumas Definições da Teoria dos Grafos . . . . .	4
3. Algumas Definições da Teoria dos Grupos . . . . .	8

### CAPÍTULO 2:

#### Os Teoremas de Frucht

1. Introdução . . . . .	12
2. Grupos de Permutações . . . . .	13
3. Grafos Coloração e Grupos de Automorfismos . . . . .	17
4. Os Teoremas de Frucht . . . . .	24
5. O Teorema de Frucht e os Grupos Cíclicos . . . . .	35
6. O Teorema de Frucht (Grupos não Cíclicos) . . . . .	45

### CAPÍTULO 3:

#### Representações Regulares Gráficas Orientadas

1. Introdução . . . . .	60
2. Uma Condição Necessária para RRG . . . . .	62
3. Uma Condição Suficiente para RRG . . . . .	64
4. Condições Análogas para RRG . . . . .	65
5. Uma Classificação dos Grupos Finitos . . . . .	67
6. Representações Regulares Gráficas Orientadas para Grupos não Diedrais . . . . .	70
7. Representações Regulares Gráficas Orientadas para os Grupos Diedrais Generalizados não Abelianos . . . . .	91
8. Resultados Negativos . . . . .	97

### CAPÍTULO 4:

#### Os Grupos $Z_2^n$

1. Introdução . . . . .	100
2. Os Grupos $Z_2^n$ , $n \geq 6$ . . . . .	101
3. O Grupo $Z_2^5$ . . . . .	104
4. Resultados Negativos . . . . .	108

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .	113
--------------------------------------	-----

## CAPÍTULO 1

### DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES BÁSICAS

#### 1. REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE GRUPOS

A motivação básica para este trabalho é uma pergunta feita em 1936 por König: "Dado um grupo abstrato  $G$ , existe um grafo  $X$  com  $\text{Aut } X \cong G$ ? Se existir, como é construído? [15].

Posteriormente, outras questões foram feitas e algumas serão analisadas aqui.

A ferramenta básica para tal construção é o grafo coloração  $X_{G,H}$  de  $G$  em relação a algum subconjunto  $H$  de  $G$ , também chamado de *grafo de Cayley*.

No capítulo 2, temos a resposta à questão de König dada por Frucht (Teorema I): todo grupo (finito) é isomorfo ao grupo de automorfismos de um grafo (finito). Assim, a condição de um grafo  $X$  possuir  $\text{Aut } X$  isomorfo a um dado grupo não é "muito forte". De fato, posteriormente, Frucht acrescentou a condição de  $X$  ser cúbico (Teorema II): todo grupo (finito) é isomorfo ao grupo de automorfismos de um grafo cúbico (finito). Sabidussi demonstrou que existe infinitos grafos  $X$  com  $\text{Aut } X$  isomorfo a um dado grupo, tendo ainda, propriedades adicionais especificadas, tais como conexidade, número cromático, regularidade.

Em outro aspecto, mas ainda ligado à questão inicial, surgiu a pergunta: Se o grupo considerado for um grupo de permutações  $P$ , existe um grafo  $X$  tal que o grupo de automorfismo de  $X$  é isomorfo, como um grupo de permutação, a  $P$ ? A resposta é negativa: por exemplo, o grupo alternado  $A_n$  não é isomorfo, como grupo de permutação, a nenhum grupo de automorfismos de grafos, pois caso contrário todo par de vértices poderia ser levado a qualquer outro par de vértices e portanto o grafo seria completo ou sem arestas, e, em ambos os casos, o grupo de automorfismos é o simétrico  $S_n$ . Babai [1], analisou uma forma mais fraca e provou que para todo grupo (finito)  $P$  de permutações, existe um grafo  $X$  tal que  $P$  é a restrição do grupo de automorfismos de  $X$  a um subgrafo  $Y$  de  $X$  invariante (cada permutação em  $P$  é um automorfismo de  $Y$ ).

Uma classificação interessante de grupos finitos é feita no capítulo 3, um grupo é diedral generalizado se, e somente se, não é gerado pelos seus elementos de ordem maior que 2. Com base nessa classificação, estudamos nos capítulos 3 e 4 as representações regulares gráficas orientadas (RRGO) de um dado grupo  $G$  e mostramos que, com exceção de precisamente cinco grupos ( $Z_2^2$ ,  $Z_2^3$ ,  $Z_2^4$ ,  $Z_3^2$  e  $Q$  (o grupo quaterniônico)), todos os demais grupos finitos têm uma representação regular gráfica orientada.

A resposta afirmativa à questão de König segue da existência de grafos coloração fortemente conexos enquanto a existência de uma representação regular gráfica orientada para um grupo  $G$

segue da existência de grafos coloração fortemente conexos e fortemente livres de pontos fixos.

Como um subproduto de estudo da existência de representação regular gráfica orientada, vemos, no capítulo 4, que os únicos grupos abelianos que possuem uma representação regular gráfica (RRG) são os  $Z_2^n$   $n \leq 1$  ou  $n \geq 5$ . O problema da existência de representação regular gráfica de grupos não abelianos tem sido estudado há algum tempo. Este problema não será analisado neste trabalho. Damos a seguir alguns dos resultados mais significativos. Nowitz e Watkins [20, 21] demonstraram que todo grupo não abeliano de ordem prima com 6 têm uma RRG. Mais tarde, Imrich [14] provou que com uma única exceção todo grupo não abeliano de ordem ímpar têm uma RRG. Hetzel [12] estendeu o problema para grupos solúveis e finalmente, segundo Babai [2], Godsil [9] provou que todo grupo não solúvel possui uma RRG. Assim, o problema da existência de RRG está completamente resolvido.

Antes desses resultados outros particulares foram estudados. Damos a seguir alguns deles: Watkins [24] demonstrou que grupos diedrais  $D_m$  ( $m \geq 6$ ), grupos de ordem  $p^3$  para  $p$  um primo ímpar (distinto de 3), possuem RRG; em [25] Watkins demonstrou que grupos simétricos  $S_n$  ( $n \geq 4$ ) e alternados  $A_n$  ( $n \geq 5$ ) têm RRG e ainda mais, se  $G$  é um grupo diedral generalizado de núcleo  $Z_3^n$  então  $G$  têm RRG para  $n \geq 3$ . Bannai [3] demonstrou que se  $G = \langle x, y \rangle$ ,  $x^3 = 1$  e se  $G$  não é solúvel então  $G$  têm uma

RRG; Godsil [ 8 ] provou que todo grupo não abeliano simples têm uma RRG.

## 2. ALGUMAS DEFINIÇÕES DA TEORIA DOS GRAFOS

O restante deste capítulo apresenta as definições e notações básicas da Teoria dos grafos [16] , [17] e dos grupos [ 5 ] , [10] e [19] que serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

Nesta seção relacionamos definições da Teoria dos grafos; na seção seguinte, definições da Teoria dos grupos. Desta forma o leitor familiarizado com estas definições pode prosseguir diretamente para o capítulo 2.

Convém ressaltar que vamos considerar apenas grupos e grafos finitos.

Um *grafo*  $X$  consiste de um conjunto finito  $V_X$  de *vértices*, um conjunto finito  $A_X$  de *arestas* e uma *função de incidência*  $\psi_X$  que associa a cada aresta de  $X$  um par não ordenado de vértices, não necessariamente distintos, de  $X$ , chamados *extremos* da aresta.

Os grafos podem ser representados por diagramas, onde cada vértices é representado por um ponto e cada aresta por uma linha ligando os pontos que representam seus extremos. (Subentende-se que nenhuma linha passa por pontos que representem vértices outros que os extremos da aresta correspondente).

Muitos termos utilizados na teoria dos grafos advêm da representação em diagramas. Assim, os extremos de uma aresta são *incidentes* à aresta e vice-versa. Os extremos de uma aresta são *adjacentes* (mesmo que coincidam).

Uma aresta é um *laço* se seus extremos coincidem, uma *ligação* caso contrário.

Para um elemento  $x$  de  $VX$ ,  $Adj x$  denota o conjunto dos vértices de  $X$  adjacentes a  $x$ .

O *grau* de um vértice  $v$  de um grafo  $X$  é o número de arestas que incidem em  $v$ , laços contados duas vezes.

*Grafo simples* é aquele que não contém laços, nem *arestas múltiplas* (isto é, duas ou mais arestas com o mesmo par de extremos).

*Grafo completo* é um grafo simples cujos vértices são dois a dois adjacentes. Um grafo completo com exatamente  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ . *Grafo vértice* é o grafo  $K_1$ .

Uma *bipartição* de um grafo  $X$  é um par não ordenado  $Y, Z$  tal que  $Y \cup Z = VX$ ,  $Y \cap Z = \phi$  e cada aresta de  $X$  tem um extremo em  $Y$  e outro em  $Z$ . Um grafo é *biparticionável* se admite uma bipartição.

Dois grafos  $X$  e  $\bar{X}$  são *complementares* se ambos forem simples, com  $VX = V\bar{X}$  e tais que quaisquer dois vértices distintos são adjacentes em  $X$  se, e somente se não o forem em  $\bar{X}$ . Denotamos por  $\bar{X}$  o grafo complementar do grafo  $X$ .

Um grafo  $H$  é um *subgrafo* de outro,  $X$ , se  $VH \subseteq VX$ ,  $AH \subseteq AX$  e para toda aresta de  $H$ , seus extremos em  $H$  são também seus extremos em  $X$ .

Para um subconjunto  $W$  de  $V$ , o *subgrafo de  $X$  gerado por  $W$* , é o subgrafo  $H$  de  $X$  tal que  $VH = W$  e  $AH$  é o conjunto de arestas de  $X$  que têm ambos os extremos em  $W$ .

Um *passeio*  $P$  em  $X$  é uma seqüência finita e não vazia  $(v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n)$ , cujos termos são alternadamente vértices  $v_i$  e arestas  $\alpha_j$ , tais que para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $v_{i-1}$  e  $v_i$  são os extremos de  $\alpha_i$ . Dizemos que  $P$  é um passeio de  $v_0$  a  $v_n$ . O comprimento de  $P$  é o inteiro  $n$ . Se os vértices  $v_0, \dots, v_n$  forem dois a dois distintos então  $P$  é um *caminho*. Se  $v_0 = v_n$  e  $v_1, \dots, v_n$  forem dois a dois distintos então  $P$  é um *círculo*.

O grafo  $X$  é *conexo* se quaisquer dois de seus vértices são ligados por um passeio.

*Componente* de um grafo  $X$  é um subgrafo  $Y$  conexo maximal de  $X$  (isto é,  $Y$  é conexo e nenhum supergrafo próprio de  $Y$  é conexo).

Uma *orientação* de um grafo  $X$  é um par ordenado  $(i, f)$  de funções, ambas de  $AX$  em  $VX$ , tais que para cada aresta  $\alpha$  em  $AX$ ,  $i(\alpha)$  e  $f(\alpha)$  são os extremos de  $\alpha$  em  $X$ :  $i(\alpha)$  é o *extremo inicial* de  $\alpha$  e  $f(\alpha)$  é o *extremo final* de  $\alpha$ .

Dois grafos  $X$  e  $Y$  são *isomorfos* ( $X \cong Y$ ) se existe bijeções  $\theta : VX \rightarrow VY$  e  $\varphi : AX \rightarrow AY$  tal que para  $\forall a \in AX$ ,  $\psi_X(a) = \{u, v\}$

se, e somente se  $\psi_Y(\varphi(a)) = \{\theta(u), \theta(v)\}$ . Se  $X$  e  $Y$  forem simples, então o isomorfismo será encarado como uma bijeção de  $VX$  em  $VY$  que preserva adjacências.

Um *automorfismo*  $\varphi$  de um grafo é um isomorfismo do grafo em si mesmo. Denotaremos por  $\text{Aut } X$  o conjunto dos automorfismos de um grafo  $X$ .

Um *grafo orientado*  $X$  consiste de um grafo  $SX$ , chamado *grafo subjacente* de  $X$ , e de uma orientação de  $X$ .

Na representação de um grafo orientado por um diagrama, colocamos, em cada aresta  $\alpha$ , uma flecha que aponta de  $i(\alpha)$  para  $f(\alpha)$ .

Ao aplicarmos um conceito ou propriedade definido para grafos (não orientados), a um grafo orientado, subentendemos que estamos aplicando o conceito ou propriedade ao seu grafo subjacente. Dessa forma, podemos dizer que um grafo orientado é conexo, etc.

*Grafo semi-simples* é o grafo orientado que não possui laços nem arestas múltiplas de mesmo sentido (isto é, arestas distintas  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $i(\alpha) = i(\beta)$  e  $f(\alpha) = f(\beta)$ ).

Seja  $X$  um grafo orientado,  $(i, f)$  sua orientação. Para um subconjunto  $W$  de  $VX$ , o *subgrafo  $Z$  orientado gerado* por  $W$  é o grafo orientado que tem  $SZ$  como grafo subjacente e a restrição  $(i_W, f_W)$  de  $(i, f)$  a  $W$ .

Um passeio  $P = (v_0, \alpha_1, v_1, \dots, \alpha_n, v_n)$  em um grafo orientado

é orientado se para todo  $j$  tal que  $1 \leq j \leq n$ ,  $i(\alpha_j) = v_{j-1}$  (ou equivalentemente,  $f(\alpha_j) = v_j$ ).

Um grafo orientado é *fortemente conexo* se todo par de vértices pode ser unido através de um passeio orientado.

Um vértice  $v$  de um grafo orientado  $X$  é uma *fonte* (sorvedouro) se  $v$  é o extremo inicial (final) de toda aresta que nele incide.

Dois grafos orientados  $X$  e  $Y$  são *isomorfos* ( $X \cong Y$ ) se existe bijeções  $\theta : VX \rightarrow VY$  e  $\varphi : AX \rightarrow AY$  tal que para  $\forall a \in AX$ ,  $\psi_X(a) = (u,v)$  se, e somente se  $\psi_Y(\varphi(a)) = (\theta(u), \theta(v))$ .

Um automorfismo  $\varphi$  de um grafo orientado é um isomorfismo do grafo em si mesmo. Denotaremos por  $\text{Aut } X$  o conjunto dos automorfismos de um grafo orientado  $X$ .

### 3. ALGUMAS DEFINIÇÕES DA TEORIA DOS GRUPOS

Seja  $G$  um conjunto e seja  $*$  uma operação definida sobre  $G$ . Dizemos que o par  $(G, *)$  é um *grupo* se, e somente se, as seguintes propriedades estiverem verificadas:

$G_1$  : (propriedade associativa): quaisquer que sejam  $x, y$  e  $z$  em  $G$ , tem-se  $(x * y) * z = x * (y * z)$ ;

$G_2$  : (existência do elemento neutro): existe em  $G$  um elemento  $1$  tal que  $x * 1 = x = 1 * x$  para todo  $x \in G$ ;

$G_3$  : (existência de inversos em  $G$ ): para todo  $x$  de  $G$ , existe  $x^{-1}$  em  $G$  tal que  $x * x^{-1} = 1 = x^{-1} * x$ .

Se a operação  $*$  de um grupo  $G$  satisfaz

$G_4$  : (propriedade comutativa): quaisquer que sejam  $x$  e  $y$  em  $G$ , tem-se  $x * y = y * x$ : diremos que  $G$  é um grupo abeliano.

Geralmente, confundimos o grupo  $G$  com seu conjunto  $G$ .

Ordem de um grupo  $G$  é a cardinalidade do conjunto  $G$ . Denotamos cardinalidade de um conjunto  $G$  por  $\# G$ .

Se  $G$  é um grupo e  $a \in G$  a ordem de  $a$  é o menor inteiro positivo  $m$  tal que  $a^m = 1$ . Se  $m = 2$ , diremos que  $a$  é uma involução.

Um subconjunto  $H$  de um grupo  $G$  é dito um subgrupo de  $G$ , se com relação ao produto em  $G$  restrito a  $H$ , o próprio  $H$  forma um grupo.

Seja  $G$  um grupo e  $H$  um subconjunto de  $G$ . Denotaremos por  $\langle H \rangle$  o conjunto dos elementos de  $G$  que podem ser expressos como um produto de elementos de  $H$ . É fácil ver que  $\langle H \rangle$  é um subgrupo de  $G$ . Diremos que  $\langle H \rangle$  é o subgrupo de  $G$  gerado por  $H$ . Diremos que  $H$  é um conjunto gerador de  $G$  se  $G = \langle H \rangle$ .

Diz-se que um grupo  $G$  é cíclico se, e somente se existe  $a$  em  $G$  tal que  $G = \langle a \rangle$ . Todo elemento  $a$  que satisfaz esta condição é denominado gerador do grupo cíclico  $G$ . Denotamos  $G$  por

$\mathbb{Z}_n$ , onde  $n$  é a ordem do gerador.

Dados dois grupos  $(G, *)$  e  $(H, \circ)$ , uma função  $\varphi$  de  $G$  em  $H$  é um *homomorfismo* de  $G$  em  $H$  se para quaisquer dois elementos  $g_1, g_2$  de  $G$ ,  $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$ . Neste caso,  $G$  é *homomorfo* a  $H$ . Um *isomorfismo* de  $G$  em  $H$  é um homomorfismo bijetor de  $G$  em  $H$ , e neste caso dizemos que  $G$  e  $H$  são *isomorfos*. Um isomorfismo de  $G$  em  $G$  é um *automorfismo* de  $G$ .

Se  $H$  é um subgrupo de  $G$ ,  $a \in G$ , então  $Ha = \{ha \mid h \in H\}$ . O conjunto  $Ha$  é denominado *classe lateral à direita* de  $H$  em  $G$ . Analogamente,  $aH = \{ah \mid h \in H\}$  é *classe lateral à esquerda* de  $H$  em  $G$ . O número de classes laterais à direita, igual ao número de classes laterais à esquerda de  $H$ , é chamado *índice* de  $H$  em  $G$  e denotado por  $|G : H|$ .

Sejam  $W$  um conjunto não vazio e  $S(W)$  o conjunto de todas as permutações sobre  $W$ . O conjunto  $S(W)$ , com a operação de composição de funções, é um grupo: o *grupo simétrico* do conjunto  $W$ . Se  $\# W = n$ , o grupo  $S(W)$  será indicado por  $S_n$  e denominado *gru*po *simétrico* de grau  $n$ .

Todo subgrupo de  $S(W)$  é denominado *grupo de permutações so*bre  $W$ .

Dado  $x \in G$ , o subconjunto  $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$  de  $G$  é denominado *estabilizador* do elemento  $x$ .

Sejam  $(A, *)$  e  $(B, \circ)$  grupos e consideremos o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b)$ ,  $a \in A$ ,  $b \in B$ . O *produto direto*

$A \times B$  é o grupo formado pelos pares ordenados  $(a,b)$  e a operação  $+$  definida por  $(a_1,b_1) + (a_2,b_2) = (a_1 * a_2, b_1 \circ b_2)$ .

TEOREMA FUNDAMENTAL DOS GRUPOS ABELIANOS FINITOS: Todo grupo abeliano finito é isomorfo ao produto direto de grupos cíclicos, cujas ordens são potências de primos.

Seja  $\mathcal{C}$  uma coleção de conjuntos. Um conjunto  $C$  em  $\mathcal{C}$  é *mínimal* em  $\mathcal{C}$  se nenhum de seus subconjuntos próprios pertence a  $\mathcal{C}$ ; um conjunto  $C$  é *mínimo* em  $\mathcal{C}$  se nenhum conjunto de  $\mathcal{C}$  tem cardinalidade menor que a de  $C$ .

## CAPÍTULO 2

### OS TEOREMAS DE FRUCHT

#### 1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo nos propomos a estudar a resposta de Frucht à questão de König: "Dado um grupo abstrato  $G$ , existe um grafo  $X$  com  $\text{Aut } X \cong G$ ? Se existir, como é construído?" [15].

Veremos que tal grafo é fortemente livre de pontos fixos e existe para todo  $G$ ; é formado por modificações do grafo coloração no sentido de que vértices e arestas se transformam em certos grafos, "preservando" a orientação e as cores das arestas do grafo original.

Para tal estudo, na seção 2 veremos grupos de permutações e daremos uma caracterização de grupos fortemente livre de pontos fixos. Na seção 3, analisaremos grafos coloração e algumas das propriedades dos grupos de automorfismos desses grafos.

Observamos também que os resultados dessas seções são básicas para a continuidade do trabalho. De fato, alguns desses resultados somente serão utilizados em capítulos posteriores.

Nas seções seguintes deste capítulo trataremos especialmente do trabalho de Frucht.

Na seção 4 é demonstrado o (primeiro) teorema de Frucht [6].

TEOREMA I: Todo grupo (finito) é isomorfo ao grupo de automorfismos de algum grafo (simples, não orientado).

Nas seções 5 e 6 é demonstrado o (segundo) teorema de Frucht [ 7 ].

TEOREMA II: Todo grupo (finito) é isomorfo ao grupo de automorfismos de um grafo cúbico (simples, não orientado).

## 2. GRUPOS DE PERMUTAÇÕES

Seja  $W$  um conjunto não vazio e consideremos o grupo simétrico  $(S(W), o)$  de todas as permutações sobre  $W$  e munido da operação de composição  $o$  formado pelo conjunto  $S(W)$ . Todo subgrupo de  $S(W)$  é denominado *grupo de permutações sobre  $W$* .

EXEMPLO 1: O grupo canônico de permutações sobre um grupo  $G$ , denotado  $\Lambda G$ , é o conjunto das permutações  $\lambda_g (g \in G)$  definidas por  $\lambda_g(x) = gx$ , para todo  $x$  em  $G$ .

Observemos que cada  $\lambda_g$  é de fato uma permutação (pela lei do cancelamento) e que  $\Lambda G$  é um grupo.

EXEMPLO 2: Seja  $X$  um grafo simples. Uma bijeção  $\varphi$  sobre  $VX$  é um automorfismo de  $X$  se  $\varphi$  preserva adjacências. Observemos que o conjunto de todos os automorfismos de  $X$ , denotado  $\text{Aut } X$ , é um subgrupo de  $S(VX)$ . Assim, no grafo da figura 1,  $\text{Aut } X$  é

um grupo de permutações isomorfo a  $Z_3$ , enquanto no da Figura 2,  
 $\text{Aut } X = \{1, (13), (24), (13)(24)\}$ .

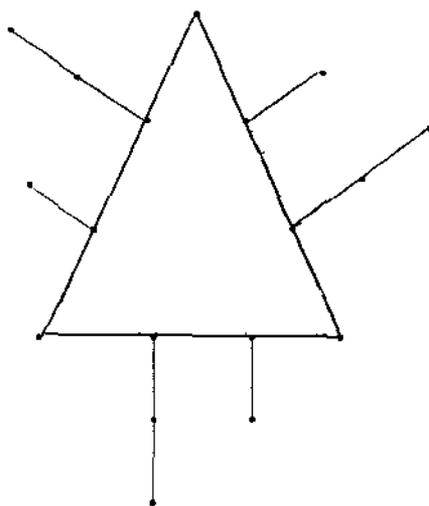
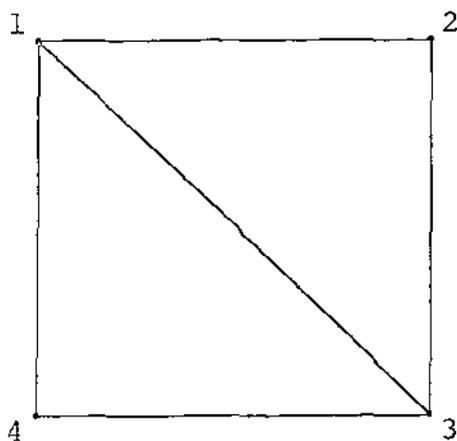


FIGURA 1: Um grafo cujo grupo de automorfismos é  $Z_3$ .



$$\text{Aut } X = \{1, (13), (24), (13)(24)\}$$

FIGURA 2: Um grafo e seu grupo de automorfismos.

Um grupo de permutações  $G$  sobre  $W$  é *livre de pontos fixos* se, para qualquer  $w$  de  $W$ , existe  $\varphi$  em  $G$  tal que  $\varphi(w) \neq w$ .

Diremos que  $G$  é *fortemente livre de pontos fixos* (f.l.p.f.) de  $G \neq \{1\}$  e  $\varphi(w) \neq w$ , para todo  $w$  em  $W$  e  $\varphi$  em  $G - 1$ .

Denotemos o subgrupo de  $G$  que fixa  $w \in W$  por  $G_w$ . Assim,  $G$  é f.l.p.f. se  $G_w = 1$ , para todo  $w$  em  $W$ .

Um grupo de permutações  $G$  sobre  $W$  é *transitivo* se para quaisquer que sejam  $x, y \in W$ , existe  $\varphi \in G$  tal que  $\varphi(x) = y$ .

Um grupo de permutações sobre  $W$  é *regular* se é transitivo e f.l.p.f. .

Observemos que o grupo de automorfismos do grafo da Figura 1 é f.l.p.f. mas não é transitivo, enquanto o da Figura 2 não é nem f.l.p.f. e nem transitivo. Ainda,  $S_3$  é um exemplo de um grupo de permutações transitivo mas não f.l.p.f. e  $\Lambda G$  é regular, para todo grupo  $G$ .

**PROPOSIÇÃO 1:** O grupo canônico  $\Lambda G$  é regular e isomorfo a  $G$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** O grupo  $\Lambda G$  é transitivo, pois para quaisquer  $x, y$  em  $G$ ,  $\lambda_z(y) = x$ , onde  $z = xy^{-1}$ . Ainda,  $\Lambda G$  é f.l.p.f., pois  $\lambda_g(x) = x$  se  $g = 1$ , isto é, se  $\lambda_g = 1$ . Dessa forma,  $\Lambda G$  é regular.

Para mostrar que  $\Lambda G \cong G$ , observemos que para quaisquer elementos  $g, h$  e  $x$  de  $G$ ,  $\lambda_g(\lambda_h(x)) = \lambda_g(hx) = ghx = \lambda_{gh}(x)$ . Assim,

$\varphi : G \rightarrow AG$  definida por  $\varphi(g) = \lambda_g (g \in G)$  é um isomorfismo de  $G$  em  $AG$ .  $\blacktriangle$

LEMA DOS GRUPOS FORTEMENTE LIVRE DE PONTOS FIXOS: Seja  $G \neq 1$  um grupo de permutações sobre  $W$ . O grupo  $G$  é f.l.p.f. se, e somente se, dados  $x, y \in W$  existe no máximo um  $\varphi \in G$  tal que  $\varphi(x) = y$ .

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que  $G$  é f.l.p.f.. Sejam  $x, y \in W$  e  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  em  $G$  tais que  $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = y$ ,  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x) = x$ . Por hipótese,  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = 1$ , isto é,  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Logo, existe no máximo um  $\varphi$  em  $G$  tal que  $\varphi(x) = y$ .

Para provar a recíproca, suponhamos que para quaisquer  $x, y \in W$  existe no máximo um  $\varphi \in G$  tal que  $\varphi(x) = y$ . Em particular,  $1(x) = x, \forall x \in W$ . Logo, por hipótese,  $\varphi(x) \neq x$  para todo  $x \in W$  e  $\varphi \neq 1$ . Portanto  $G$  é f.l.p.f..  $\blacktriangle$

COROLÁRIO: O grupo  $G$  é regular se, e somente se, para cada par  $x, y$  de elementos de  $W$  existe exatamente um  $\varphi$  em  $G$  tal que  $\varphi(x) = y$ .

LEMA DA PROPRIEDADE TRIANGULAR: Seja  $G$  um grupo de permutações sobre  $W$ . Quaisquer dois itens abaixo implicam o terceiro:

- (i)  $G$  é f.l.p.f.

(ii)  $G$  é transitivo

(iii)  $\# G = \# W$ .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $x \in W$ . De (i), para cada  $y \in W$  existe no máximo um  $\varphi$  em  $G$  tal que  $\varphi(x) = y$ . Assim,

$$\# G \leq \# W, \quad (1)$$

com igualdade somente se  $G$  é transitivo. Logo, (i) e (iii) implicam (ii).

De (ii), para cada  $y \in W$  existe pelo menos um  $\varphi$  em  $G$  tal que  $\varphi(x) = y$ . Assim,

$$\# G \geq \# W, \quad (2)$$

com igualdade somente se  $G$  é f.l.p.f.. Logo, (ii) e (iii) implicam (i).

Finalmente, de (1) e (2), (i) e (ii) implicam (iii).  $\blacktriangle$

### 3. GRAFOS COLORAÇÃO E GRUPOS DE AUTOMORFISMOS

Seja  $G$  um grupo e  $H$  um subconjunto de  $G - 1$ . Chamamos *grafo coloração* (orientado)  $X_{G,H}$ , de  $G$  em relação a  $H$ , ao grafo orientado semi-simples tal que:

$$VX_{G,H} = G$$

$$AX_{G,H} = \{(g,gh), g \in G \text{ e } h \in H\}.$$

A cor de  $(g,gh)$  é  $h$ .

Quando  $G$  e  $H$  forem subentendidos, denotaremos  $X_{G,H}$  simplesmente por  $X$ . Observemos que  $1 \notin H$  e portanto o grafo não possui laços; observemos também que  $gh \neq gh'$  sempre que  $h \neq h'$  e portanto a cor de cada aresta é bem definida; finalmente, se  $h$  e  $h^{-1}$  são elementos de  $H$ ,  $X$  possui arestas *antiparalelas*, isto é, pares  $\{(g,gh), (gh,g)\}$  pois se  $(g,gh) \in AX$  então  $(gh,g) = (gh,ghh^{-1}) \in AX$ .

Denotaremos por  $\text{Cor } X_{G,H}$  o conjunto dos automorfismos de  $X_{G,H}$  que preservam as cores das arestas. A seguinte propriedade é facilmente demonstrada.

PROPOSIÇÃO 1: O conjunto  $\text{Cor } X$  é um subgrupo de  $\text{Aut } X$ .

LEMA 2: O conjunto dos automorfismos de  $X_{G,H}$  é transitivo. De fato,  $G \cong AG \subseteq \text{Cor } X \subseteq \text{Aut } X$ .

DEMONSTRAÇÃO: Da Proposição 2.1,  $AG$  é transitivo e  $G \cong AG$ . Ainda,  $AG \subseteq \text{Cor } X$  (demonstração abaixo). Da Proposição 1,  $\text{Cor } X \subseteq \text{Aut } X$ . Logo,  $G \cong AG \subseteq \text{Cor } X \subseteq \text{Aut } X$  e  $\text{Aut } X$  é transitivo.

Agora, vamos demonstrar que  $\Lambda G \subseteq \text{Cor } X$ . De fato, seja  $(x, xh) \in AX$ , de cor  $h$ , e  $\lambda_g \in \Lambda G$  então  $\lambda_g(x, xh) = (gx, gxh)$  é uma aresta de  $X$  da mesma cor  $h$ , ou seja  $\Lambda G \subseteq \text{Cor } X$ .  $\blacktriangle$

Quando teremos  $\Lambda G = \text{Cor } X$ ? Esta questão é essencial para a construção de grafos feita por Frucht, solução da pergunta de König e é estudada a seguir. A igualdade  $\Lambda G = \text{Aut } X$  é justamente a preocupação dos capítulos 3 e 4.

TEOREMA 3: Seja  $X_{G,H}$  um grafo coloração. A menos de uma única exceção são equivalentes:

- (i)  $G \cong \Lambda G = \text{Cor } X$ .
- (ii)  $X_{G,H}$  é fortemente conexo.
- (iii)  $H$  gera  $G$ .
- (iv)  $\text{Cor } X$  é regular.

A exceção ocorre quando  $G$  é  $Z_2$ ,  $H = \phi$  e  $X_{G,H} \cong \bar{K}_2$ . Neste caso, (i) e (iv) valem mas, (ii) e (iii) não valem.

DEMONSTRAÇÃO: Segue-se do Lema 4 abaixo que (i)  $\rightarrow$  (ii) a menos que  $G$  seja  $Z_2$  e  $H = \phi$ .

As implicações (ii)  $\leftrightarrow$  (iii) seguem do Lema 5, abaixo.

A implicação (iii)  $\rightarrow$  (iv), segue do Lema 6, abaixo.

Vamos provar agora a implicação (iv)  $\rightarrow$  (i). Do Lema 2,  $G \cong \Lambda G \subseteq \text{Cor } X$  e assim, da propriedade triangular (Seção 2),  $\# \text{Cor } X = \# G$ . Portanto,  $G \cong \Lambda G = \text{Cor } X$ .

LEMA 4: Se  $\Delta G = \text{Cor } X$  então  $X_{G,H}$  é fortemente conexo ou  $\bar{K}_2$ .

LEMA 5: O grafo  $X$  é fortemente conexo se, e somente se,  $H$  gera  $G$ .

LEMA 6: Se  $H$  gera  $G$  então  $\text{Cor } X$  é regular.

A demonstração do teorema se reduz então às demonstrações dos três lemas.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 4: Neste caso, provaremos um lema que implica o Lema 4.

Sejam  $Z$  um grafo,  $Y$  uma componente de  $Z$  e  $\varphi \in \text{Aut } Z$ . Consideremos  $\mu = \mu[\varphi, Y]$  a extensão de  $\varphi|_Y$  definida da seguinte maneira:

$$\mu(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se } x \in Y \\ \varphi^{-1}(x) & \text{se } x \in \varphi(Y) \setminus Y \\ x & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim,  $\mu$  é uma extensão de  $\varphi|_Y$ , um isomorfismo de  $Y$  em  $\varphi(Y)$ , ao automorfismo de  $Z$  que fixa os vértices em  $V \setminus (Y \cup \varphi(Y))$ .

Um subgrupo  $\Phi$  de  $\text{Aut } Z$  é *completo* se para quaisquer que sejam  $\varphi$  em  $\Phi$  e  $Y$  componente de  $Z$ ,  $\mu[\varphi, Y] \in \Phi$ .

É fácil ver que  $\text{Cor } X$  é completo.

LEMA 4': Seja  $Z$  um grafo. Se  $\text{Aut } Z$  contém um subgrupo  $\Phi$  completo e regular então  $Z$  é fortemente conexo ou  $\bar{K}_2$ .

O resultado a seguir segue trivialmente do Lema 4', e será usado posteriormente no capítulo 3.

COROLÁRIO: Se  $Z$  é um grafo regular então ou  $Z$  é  $\bar{K}_2$  ou  $Z$  é fortemente conexo.

Observemos que o Lema 4' implica o Lema 4 com  $\Phi = \text{Cor } X$  e  $Z = X$ , pois  $\text{Cor } X$ , um subgrupo de  $\text{Aut } X$ , é completo e  $AG$  é regular.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 4': Suponhamos que  $Z$  não seja conexo. Então para quaisquer vértices  $x$  e  $y$ , existe  $\varphi \in \Phi$  tal que  $\varphi(x) = y$ , pois  $\Phi$  é transitivo. Conseqüentemente todas as componentes são isomorfas duas a duas e cada componente é transitiva.

Vamos provar agora que cada componente é o grafo vértice. Suponhamos que, pelo contrário,  $Z$  tem uma componente  $K$  com mais de um vértice. Como  $\Phi$  é transitivo e completo, podemos fixar todas as componentes menos  $K$ , obtendo um automorfismo de  $Z$  em  $\Phi$  não livre de pontos fixos. Contradição, pois  $\Phi$  é f.l.p.f.. De fato as componentes de  $Z$  são o grafo vértice.

Finalmente, não pode haver três ou mais componentes, pois

caso contrário, podemos trocar duas componentes e fixar as demais obtendo, novamente, um automorfismo de  $Z$  não livre de pontos fixos e pertencente a  $\Phi$ . Portanto, se  $Z$  não é conexo então  $Z \cong \bar{K}_2$ .

Suponhamos  $Z$  conexo. Para provar que  $Z$  é fortemente conexo, resta mostrar que toda aresta  $\alpha$  pertence a um circuito orientado. Seja  $\alpha$  uma aresta, com extremo inicial  $x_0$  e final  $x_1$ . Como  $\Phi$  é transitivo, existe  $\varphi$  em  $\Phi$  tal que  $\varphi(x_0) = x_1$ . Então  $\{\varphi^i(x_0) \mid i \in \mathbb{N}\}$  é o conjunto dos vértices de um circuito orientado que passa por  $\alpha$ , pois  $Z$  é finito e  $\varphi$  é injetora.

A demonstração do Lema 4' completa a demonstração do Lema 4. ▲▲

**DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 5:** Suponhamos que  $X_{G,H}$  é fortemente conexo. Seja  $l \in G$ . Para qualquer que seja  $x \in G$ , existe um caminho orientado  $(l = x_0, h_1, x_1, h_2, x_2, \dots, h_r, x_r = x)$ , de  $l$  para  $x$ , onde  $x_{i+1} = x_i h_{i+1}$ ,  $h_i \in H$ ,  $0 \leq i < r$ . Assim,  $x_r = h_1 h_2 \dots h_r$ . De fato,  $H$  gera  $G$ .

Para provar a recíproca, suponhamos que  $H$  gera  $G$ . Sejam  $x, y$  vértices de  $X$ . Então existe uma seqüência  $(h_1, \dots, h_r)$   $h_i \in H$ ,  $r \geq 0$ , tal que  $x^{-1}y = h_1 \dots h_r$ . Logo  $y = xh_1 \dots h_r$ . Portanto,  $(x = x_0, h_1, x_1, h_2, x_2, \dots, h_r, x_r)$ , onde  $x_i = xh_1 \dots h_i$ , é um caminho orientado em  $X$ , de  $x$  para  $y$ . Assim, para todo par  $x, y$  de vértices de  $X$ , existe caminho orientado de  $x$  para  $y$  em  $X$ . ▲

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 6: Provaremos o Lema 6', abaixo, que implica o Lema 6.

LEMA 6': Seja  $K \subseteq H$  que gera  $G$  e  $\Phi$  um subgrupo de  $\text{Aut } X$  que inclui  $\Lambda G$ . Se  $\Phi_1 \subseteq \Phi_k$  para todo  $k \in K$  então  $\Phi$  é regular.

Observemos que o Lema 6' implica o Lema 6, com  $K = H$  e  $\Phi = \text{Cor } X$ .

DEMONSTRAÇÃO: Sejam  $\mu \in \Phi$ ,  $z \in VX$  tal que  $\mu(z) = z$ . Vamos provar que  $\mu = 1$ . Para tanto, seja  $\varphi = \lambda_z^{-1} \mu \lambda_z \in \Phi$  e observemos que  $\varphi \in \Phi_1$  pois  $\varphi(1) = \lambda_z^{-1} \mu \lambda_z(1) = \lambda_z^{-1} \mu(z) = \lambda_z^{-1}(z) = 1$ . Basta agora provar que  $\varphi = 1$ .

Seja  $x \in G$ . Como  $H$  gera  $G$ , existe uma seqüência  $(k_1, \dots, k_r)$  de elementos de  $K$  ( $r \geq 0$ ) tal que  $x = k_1 \dots k_r$ . Provaremos, por indução em  $r$ , que  $\varphi(x) = x$ . De fato, se  $r = 0$ ,  $x = 1$  e  $\varphi(1) = 1$ , por hipótese. Para  $r > 0$ , seja  $y = k_1 \dots k_{r-1}$ ; pela hipótese de indução,  $\varphi(y) = y$ . Assim,  $\lambda_y^{-1} \varphi \lambda_y$  também é automorfismo de  $X$  e observemos que  $\lambda_y^{-1} \varphi \lambda_y(1) = \lambda_y^{-1} \varphi(y) = \lambda_y^{-1}(y) = 1$ . Logo,  $\lambda_y^{-1} \varphi \lambda_y \in \Phi_1$ . Por hipótese,  $\Phi_1 \subseteq \Phi_{k_r}$ . Logo,  $\lambda_y^{-1} \varphi \lambda_y \in \Phi_{k_r}$ , i.é.,  $k_r = \lambda_y^{-1} \varphi \lambda_y(k_r) = \lambda_y^{-1} \varphi(y k_r) = \lambda_y^{-1} \varphi(x)$ . Portanto,  $\varphi(x) = y k_r = x$ . De fato,  $\varphi(x) = x$  para todo  $x$ , isto é,  $\varphi = 1$ .

Portanto, o único  $\mu$  que fixa algum vértice é a identidade. Ou seja,  $\Phi$  é f.l.p.f.. Portanto,  $\Phi$  é regular, pois  $\Lambda G \subseteq \Phi$ .

A demonstraco do Lema 6' completa a demonstraco do Lema 6 e do Teorema 3. ▲▲▲

#### 4. OS TEOREMAS DE FRUCHT

Nesta e nas seoes seguintes examinaremos dois teoremas de vidos a Frucht, a saber:

TEOREMA I: Todo grupo (finito)  isomorfo ao grupo de automorfismos de algum grafo (não orientado, simples).

TEOREMA II: Todo grupo (finito)  isomorfo ao grupo de automorfismos de um grafo cúbico (não orientado, simples).

Um grafo (não orientado)  *cúbico* se cada um de seus vértices tem grau 3.

A Figura 1 ilustra um grafo cúbico cujo grupo de automorfismos  isomorfo a  $Z_3$ .

A demonstraco do Teorema I, virá a seguir. A demonstraco do Teorema II está dividida em três seoes: caso de grupos pequenos, de ordem 1 ou 2, será analisado ainda nesta seao; demais grupos cíclicos serão analisados na seao seguinte e os grupos não cíclicos na última seao do capítulo.

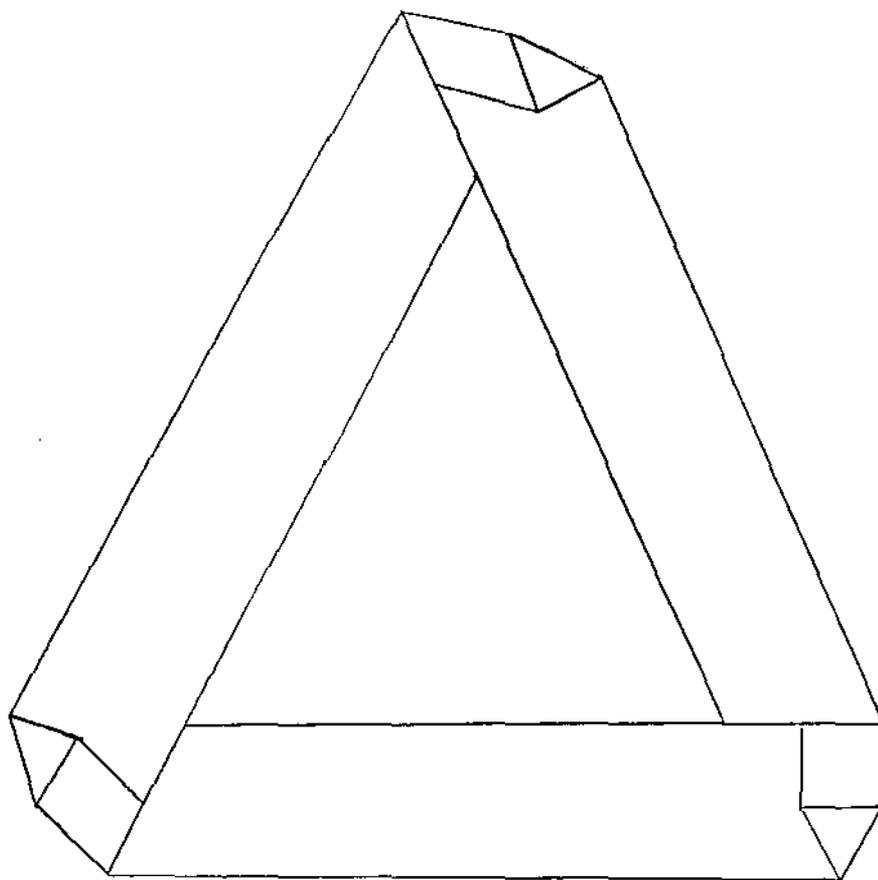


FIGURA 1: Uma representação cúbica de  $Z_3$ .

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA I: Seja  $G$  um grupo,  $H = \{h_1, \dots, h_n\}$  um subconjunto de  $G - 1$  que gera  $G$ . Pelo Teorema 2.3.3,  $\text{Cor } X_{G,H} \cong G$ . Formemos um grafo não orientado  $Y$ , distinguindo cada aresta do grafo  $X_{G,H}$  através da cor e do sentido da orientação, da seguinte forma: substituímos cada aresta  $(g_1, g_2)$  de  $X_{G,H}$ , da cor  $g_1^{-1}g_2 = h_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) por grafos  $Y_i$  (Figura 2) onde:

$$VY_i = \{g_1, g_2, u_0, \dots, u_i, v_0, \dots, v_{i+1}\}$$

$$AY_i = \{\{g_1, u_0\}, \{u_0, u_1\}, \dots, \{u_{i-1}, u_i\}, \{u_0, v_0\}, \{v_0, v_1\}, \dots, \{v_i, v_{i+1}\}, \{v_0, g_2\}\}$$

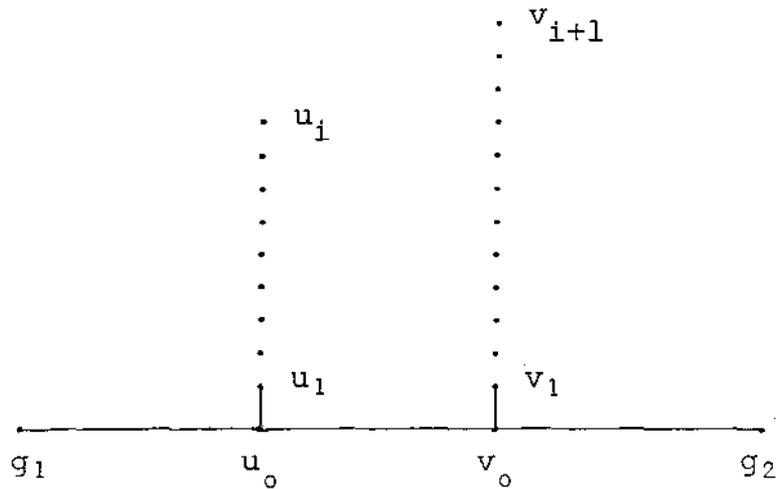


FIGURA 2: A substituição da aresta  $(g_1, g_2)$  de cor  $h_i$  pelo grafo  $Y_i$ .

É fácil ver que  $\text{Aut } Y \cong \text{Cor } X_{G,H}$ ; este fato segue fundamentalmente de quatro pontos:

(i)  $X_{G,H}$  é fortemente conexo (Teorema 2.3.3) e portanto cada vértice "original" de  $X$  tem grau pelo menos 2.

(ii) Automorfismos preservam grau (em particular, os vértices

"novos" de grau 1 são levados por automorfismos em vértices de grau 1, "novos").

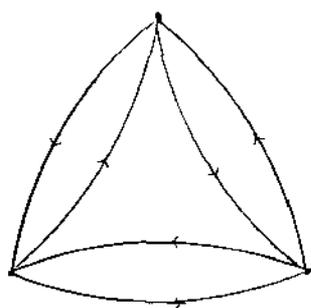
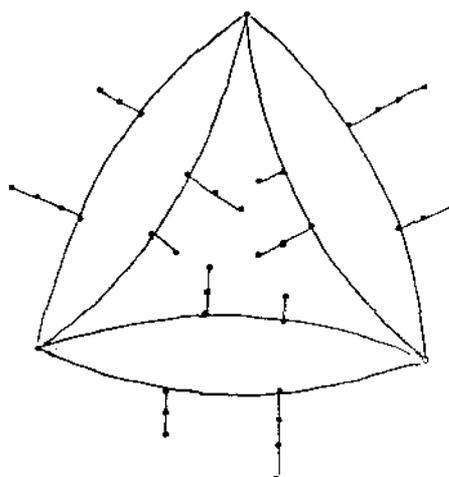
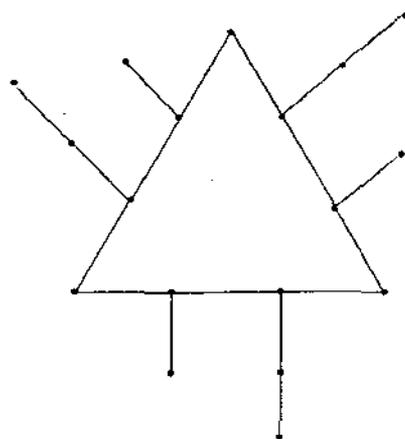
(iii) As cores "perdidas" das arestas "originais" são embutidas nos comprimentos dos caminhos de  $u_0$  a  $u_i$  e de  $v_0$  a  $v_{i+1}$  (Figura 2).

(iv) As orientações "perdidas" das arestas originais são embutidas na assimetria entre os caminhos de  $u_0$  a  $u_i$  e de  $v_0$  a  $v_{i+1}$  (de comprimento  $i$  e  $i+1$  respectivamente - Figura 2). Assim,  $\text{Aut } Y \cong \text{Cor } X_{G,H} = \text{AG} \cong G$ .  $\blacktriangle$

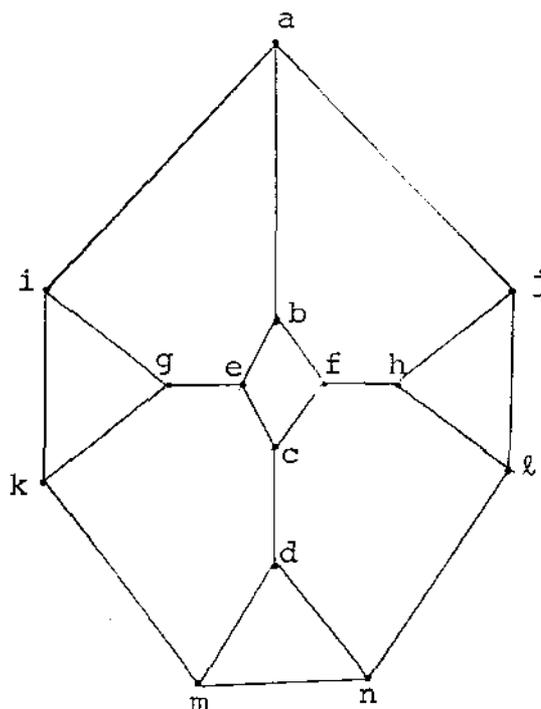
A figura 3, ilustra a construção do Teorema I para  $G = Z_3$  e  $H = Z_3 - 1$ . Se restringirmos  $H$ , obteremos grafos com um número menor de vértices. A Figura 3(c) é o grafo obtido quando  $H$  possui apenas um elemento.

Analisaremos agora a demonstração do Teorema II, separadamente para grupos cíclicos e não cíclicos.

Seja  $X$  um grafo (simples),  $x \in VX$  de grau  $n$ ,  $x_1, \dots, x_n$  os vértices adjacentes a  $x$  então  $d_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , é o comprimento do menor circuito em  $X$  que passa pelas arestas  $\{x, x_i\}$  e  $\{x, x_j\}$ . (Se o par de arestas  $\{x, x_i\}, \{x, x_j\}$  não pertencer a nenhum circuito, diremos que  $d_{ij}$  é infinito). O tipo de  $x$  é a  $\binom{n}{2}$ -upla obtida de  $(d_{12}, \dots, d_{1n}, d_{23}, \dots, d_{2n}, \dots, d_{n-1,n})$  pela classificação em ordem crescente.

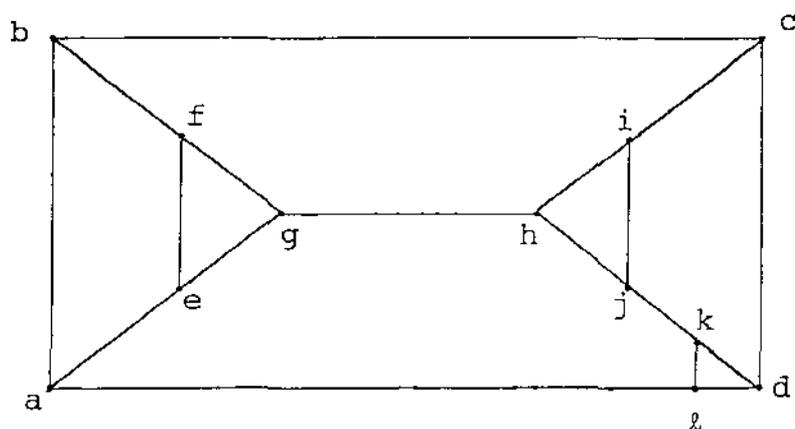
(a)  $X_{Z_3, Z_3-1}$ (b)  $Y \quad (H = Z_3 - 1)$ (c)  $Y \quad (H \text{ unitário})$ FIGURA 3: Duas representações gráficas de  $Z_3$ .

As Figuras 4 e 5 apresentam cada uma um grafo e a tabela de tipos de seus vértices.



Vértice(s)	Tipo
a	(5,5,7)
b	(4,5,5)
c	(4,6,6)
d	(3,6,6)
e, f	(4,5,6)
g, h, i, j	(3,5,6)
k, l, m, n	(3,6,7)

FIGURA 4: Um grafo cúbico e os tipos de seus vértices.



Vértice(s)	Tipo
a	(4,5,7)
b	(4,5,6)
c	(5,5,6)
d	(3,5,5)
e,f	(3,4,5)
g,h	(3,6,7)
i,j,k,l	(3,5,6)

FIGURA 5: Outro grafo cúbico e os tipos de seus vértices.

A seguinte proposição, cuja demonstração omitiremos, ilustra o papel dos tipos na demonstração do Teorema 2.

PROPOSIÇÃO 1: Sejam  $X$  um grafo e  $v, w \in VX, v \neq w$ . Se  $\varphi \in \text{Aut } X$  e  $\varphi(v) = w$  então  $v$  e  $w$  possuem o mesmo tipo, ou seja, automorfismos preservam os tipos dos vértices.

LEMA 2: O grupo dos automorfismos dos grafos das Figura 4 e 5 são isomorfos, respectivamente, a  $Z_2$  e ao grupo trivial (unitário).

DEMONSTRAÇÃO: Na Figura 5, temos  $\text{Aut } X = \{1\}$ , pois, os vértices  $a, b, c, d$  possuem tipos distintos dois a dois e distintos dos tipos dos demais vértices, logo, todo automorfismo de  $X$  fixa  $a, b, c, d$ . Daí segue que os demais vértices são fixos. Portanto  $\text{Aut } X$  é trivial.

Para o grafo  $Y$  da Figura 4, mostremos que  $\text{Aut } Y = \langle \varphi \rangle$ , onde  $\varphi$  é a involução  $(ef)(gh)(ij)(kl)(mn)$ .

De fato, todo automorfismo fixa  $a, b, c, d$  pois seus tipos são únicos. Se um automorfismo de  $Y$ , digamos  $\rho$ , fixa  $i$  então é fácil ver que  $\rho$  fixa:  $j; g$  e  $k; h$  e  $l; e$  e  $f; m$  e  $n$ ; ou seja,  $\rho = 1$ .

Por outro lado,  $\varphi$  é um automorfismo de  $Y$ . Finalmente, se  $\rho$  não fixa  $i$ , então  $\rho(i) = j$ . Nesse caso, o automorfismo  $\varphi\rho$

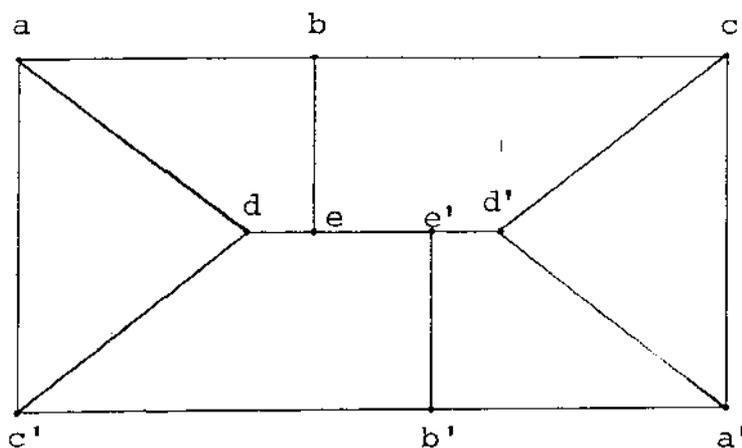
fixa  $i$  e portanto  $\varphi\rho = 1$ , ou seja,  $\rho = \varphi^{-1} = \varphi$ .

De fato,  $\text{Aut } Y \cong \mathbb{Z}_2$ . ▲

Dessa forma, dado um grupo  $G$  de ordem 1 ou 2, existe um grafo cúbico cujo grupo de automorfismos é isomorfo a  $G$ .

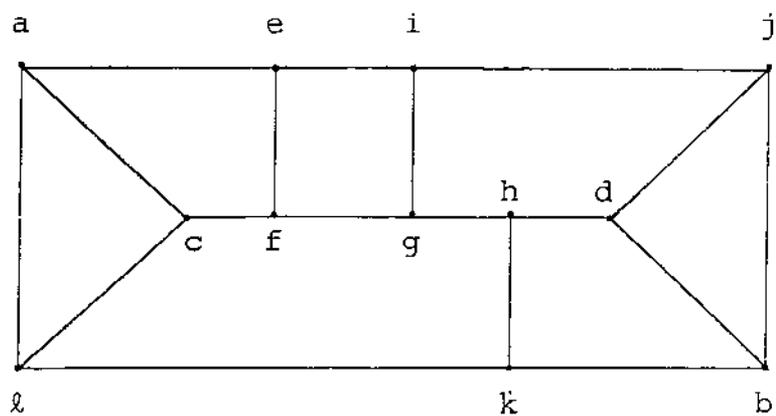
É claro que podemos construir grafos cúbicos diferentes dos indicados nas Figuras 4 e 5, e que possuam grupo de automorfismos de ordem 1 e 2. As Figuras 6 e 7, indicam outros grafos cúbicos com essas propriedades.

A Figura 6 mostra um grafo com 10 vértices cujo grupo de automorfismos é de ordem 2. Observemos que se unirmos os "pontos médios" das arestas  $\{a,b\}$  e  $\{d,e\}$  obteremos um grafo (diferente do da Figura 5) com grupo de automorfismos de ordem 1 (Figura 7).



Vértice(s)	Tipos
$a, a', d, d'$	$(3, 4, 5)$
$b, b'$	$(4, 5, 6)$
$c, c'$	$(3, 5, 6)$
$e, e'$	$(4, 5, 5)$

FIGURA 6: Outro grafo cúbico cujo grupo de automorfismos é isomorfo a  $Z_2$ .



Vértice(s)	Tipos
a,b,c,d	(3,4,5)
e,f	(4,4,6)
g,h	(4,5,6)
i	(4,5,7)
j	(3,5,6)
k	(4,6,7)
l	(3,6,7)

FIGURA 7: Outro grafo cúbico totalmente assimétrico (somente o automorfismo trivial).

## 5. O TEOREMA DE FRUCHT E OS GRUPOS CÍCLICOS

Nesta seção examinaremos a demonstração do Teorema II no caso de grupos cíclicos com pelo menos três elementos. Os casos de  $Z_1$  e  $Z_2$  já foram examinados na seção anterior.

TEOREMA 1: Se  $G$  é um grupo cíclico de ordem  $h > 2$ , existe um grafo cúbico  $X$  com  $6h$  vérfices tal que  $\text{Aut } X \cong G$ .

DEMONSTRAÇÃO: Sejam  $B_i$  ( $i = 0, \dots, h-1$ ) grafos dois a dois isomorfos tais que:

$$VB_i = \{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i\}$$

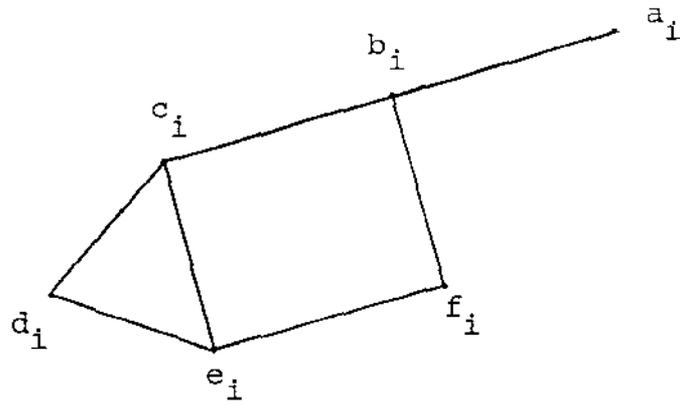
e  $AB_i$  dado pela tabela de adjacências da Figura 1.

Seja  $X$  definido por:

$$VX = \bigcup_{i=0}^{h-1} VB_i$$

$$AX = \bigcup_{i=0}^{h-1} (AB_i \cup \{d_i, f_{i-1}\} \cup \{a_i, a_{i+1}\})$$

onde os índices são tomados módulo  $h$ .



Vértice	seus adjacentes
$a_i$	$b_i$
$b_i$	$a_i, c_i, f_i$
$c_i$	$b_i, d_i, e_i$
$d_i$	$c_i, e_i$
$e_i$	$c_i, d_i, f_i$
$f_i$	$b_i, e_i$

FIGURA 1: Os blocos  $B_i$ .

A Figura 2 ilustra o grafo  $X$  para  $Z_5$ .

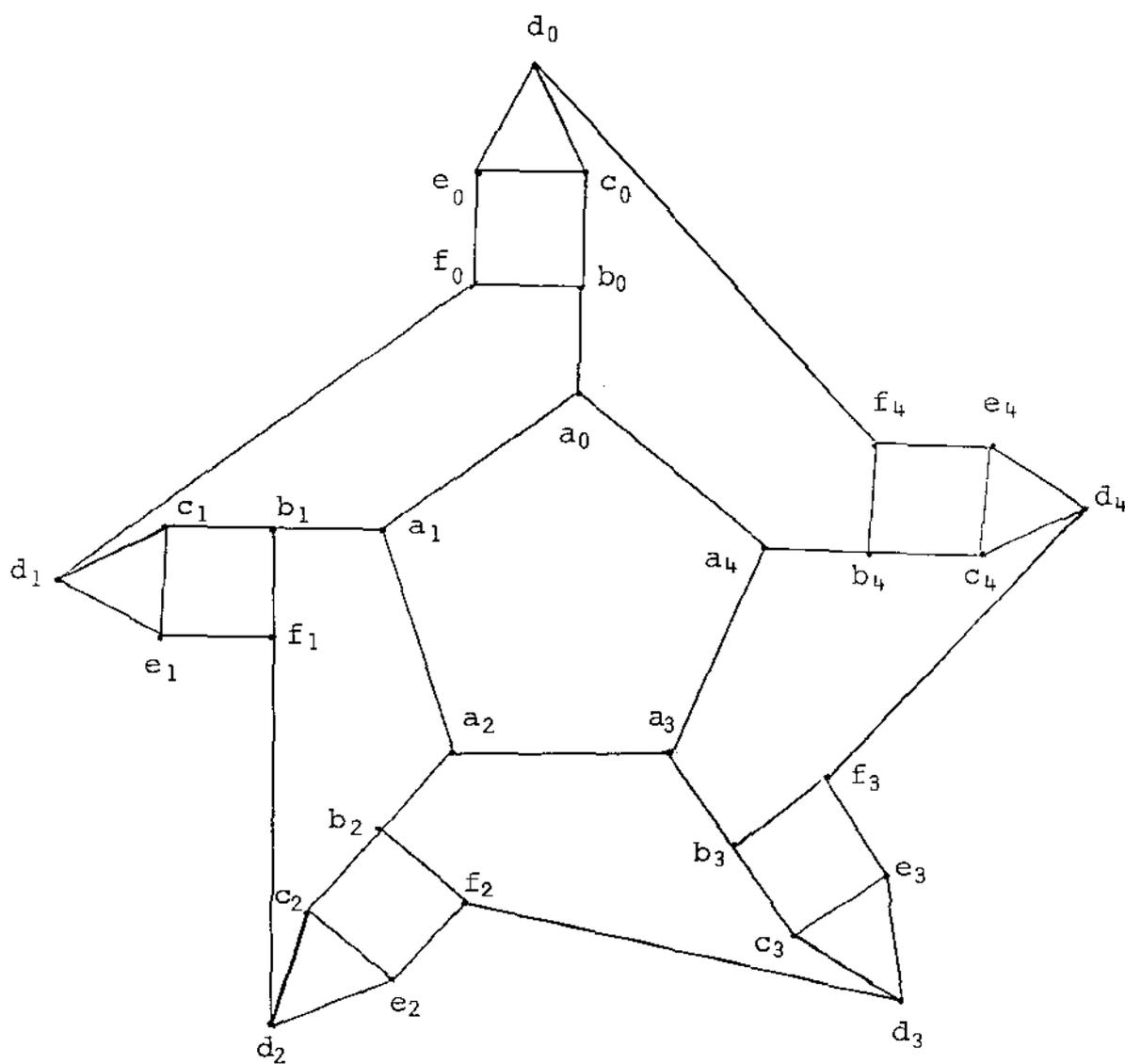


FIGURA 2: O grafo cúbico para  $G = Z_5$ .

É claro que o grafo  $X$ , definido acima, é simples, cúbico e tem  $6h$  vértices. Mostremos que  $\text{Aut } X$  é cíclico, isto é, se  $\varphi \in \text{Aut } X$ , então  $\varphi = \rho^n$ , onde

$$\rho = (a_0 a_1 \dots a_{h-1}) (b_0 b_1 \dots b_{h-1}) \dots (f_0 f_1 \dots f_{h-1}) \quad \text{e} \quad 0 \leq n < h.$$

É fácil ver que os tipos dos vértices de  $X$  são os indicados pela tabela da Figura 3.

Vértice(s)	Tipo
$a_i$	$(h, 7, 7)$ , se $h \leq 7$ $(7, 7, h)$ , se $7 < h \leq 11$ $(7, 7, 11)$ , se $h \geq 11$
$b_i$	$(4, 7, 7)$
$c_i, e_i$	$(3, 4, 5)$
$d_i$	$(3, 7, 8)$
$f_i$	$(4, 7, 9)$

FIGURA 3: Os tipos dos vértices do grafo construído pela demonstração do Teorema 1.

O Teorema 1 agora segue do Lema 4 abaixo; para prová-lo necessitamos dos Lemas 2 e 3.

Seja  $\varphi \in \text{Aut } X$ .

LEMA 2: Se  $\varphi(f_i) = f_i$  para algum  $i$  em  $[0, h)$  então  $\varphi|_{B_i} = 1$ .

LEMA 3: Se  $\varphi|_{B_i} = 1$  para algum  $i$  em  $[0, h)$  então  $\varphi = 1$ .

LEMA 4: O conjunto  $\text{Aut } X$  é igual ao conjunto  $\{\rho^n \mid 0 \leq n < h\}$ .

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2: Suponhamos que  $\varphi(f_i) = f_i$ . Os adjacentes de  $f_i$ , a saber,  $b_i$ ,  $e_i$  e  $d_{i+1 \bmod h}$  tem tipos dois a dois distintos; logo  $\varphi(b_i) = b_i$  e  $\varphi(e_i) = e_i$ .

Os adjacentes de  $b_i$  (fixo), a saber  $f_i$  (fixo),  $c_i$  e  $a_i$ , tem tipos dois a dois distintos, logo  $\varphi(c_i) = c_i$  e  $\varphi(a_i) = a_i$ . Assim, já sabemos serem fixos  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $f_i$ . Finalmente, os dois vértices restantes,  $e_i$  e  $d_i$ , de tipos distintos, são adjacentes a  $c_i$ , juntamente com  $b_i$ . Assim,  $e_i$  e  $d_i$  estão fixos.

De fato,  $\varphi|_{B_i} = 1$ . ▲

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 3: Suponhamos que  $\varphi|_{B_i} = 1$ . Em particular,  $\varphi(d_i) = d_i$ ,  $\varphi(c_i) = c_i$  e  $\varphi(e_i) = e_i$ . O terceiro vértice adjacente a  $d_i$ , a saber,  $f_{i-1 \bmod h}$  também está fixo. Logo, pelo

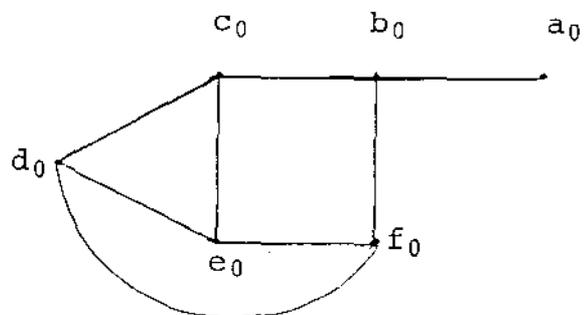
Lema 2,  $\varphi|_{B_{i-1 \bmod h}} = 1$ . Repetindo este raciocínio mais  $h-2$  vezes temos que  $\varphi|_{B_j} = 1$  para todo  $j$  em  $[0, h)$ . De fato,  $\varphi = 1$ .  $\blacktriangle$

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 4: É claro que  $\rho \in \text{Aut } X$  e portanto  $\{\rho^n \mid 0 \leq n < h\} \subseteq \text{Aut } X$ . Seja  $\varphi \in \text{Aut } X$ . Seja  $x = \varphi(f_0)$ . Como o tipo dos  $f_i$  é único,  $x = f_i$  ( $0 \leq i < h$ ). Assim  $\rho^{-i}\varphi$  fixa  $f_0$ . Pelos Lemas 1 e 2,  $\rho^{-i}\varphi = 1$ . Assim,  $\varphi = \rho^i$ .

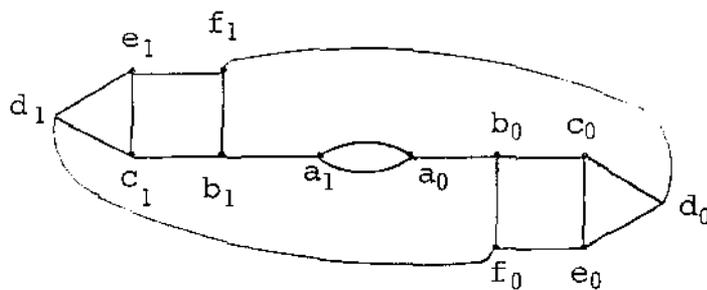
De fato,  $\text{Aut } X = \{\rho^n \mid 0 \leq n < h\}$ .  $\blacktriangle\blacktriangle$

Podemos observar que a idéia para a construção do grafo isomorfo a um grupo cíclico de ordem  $h$  ( $h > 2$ ), baseia-se na construção de grafos  $B_i$  com  $\text{Aut } B_i = \{1\}$ ,  $i = 0, \dots, h-1$ , sobre cada vértice do circuito com  $h$  vértices. Para  $h \leq 2$  o grafo não é simples e ainda, se  $h = 1$  o conjunto dos automorfismos do grafo tem ordem 2, (Figura 4). Daí termos analisado a parte, na seção anterior o caso  $h \leq 2$ .

Se a condição do grafo ser cúbico for relaxada, podemos construir grafos com número de vértices menores do que os do Teorema 1 e com grupo de automorfismos cíclico. Nestes, o grau de cada vértice torna-se fato fundamental na construção do grafo, podemos dizer que substitui a noção de tipo de um vértice.



$X$ , para  $h = 1$



$X$ , para  $h = 2$

FIGURA 4: A construção indicada não é correta para  $1 \leq h \leq 2$ .

TEOREMA 5: Se  $G$  é um grupo cíclico de ordem  $h > 3$ , existe um grafo  $X$  com  $3h$  vértices tal que  $\text{Aut } X \cong G$ .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $X$  o grafo tal que

$$VX = \{x_i, y_i, z_i\}, \quad i = 0, \dots, h-1$$

AX : dada pela tabela da Figura 5.

vértices	seus Adjacentes
$x_i$	$x_{i-1}, x_{i+1}, y_i, z_{i-1}$
$y_i$	$x_i, z_i$
$z_i$	$x_{i+1}, y_i, z_j \ (0 \leq j < h, j \neq i)$

FIGURA 5: Adjacências no grafo da demonstração do Teorema 2, onde os índices são tomados módulo  $h$ .

Observamos que o grau de  $x_i$  é 4, de  $y_i$  é 2 e de  $z_i$  é  $h+1$ , para cada  $i = 0, \dots, h-1$  e que  $X$  possui  $3h$  vértices.

Mostremos que  $\text{Aut } X$  é cíclico e de ordem  $h$ . De fato,  $\text{Aut } X = \{\rho^n \mid 0 \leq n < h\}$ , onde  $\rho = (x_0 x_1 \dots x_{h-1}) (y_0 y_1 \dots y_{h-1}) (z_0 \dots z_{h-1})$ .

Seja  $\varphi \in \text{Aut } X$  então  $\varphi(x_0) = x_0$  ou  $\varphi(x_0) = x_i \ (i \neq 0)$ .

Seja  $i$  tal que  $\varphi(x_0) = x_i \ (0 \leq i \leq h)$ . Consideremos o automorfismo  $\rho^{-i}\varphi$ : este fixa  $x_0$ , portanto,  $\rho^{-i}\varphi = 1$ , pelo Lema 6, abaixo. Logo,  $\varphi = \rho^i$ .

A demonstração do Teorema se resume, agora, a demonstração

do Lema 6.

LEMA 6: Seja  $\varphi \in \text{Aut } X$ . Se  $\varphi(x_0) = x_0$  então  $\varphi = 1$ .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $\varphi \in \text{Aut } X$  tal que  $\varphi(x_0) = x_0$ . Dois dos adjacentes de  $x_0$ ,  $z_{h-1}$  e  $y_0$ , estão fixos pois possuem graus únicos em  $\text{Adj } x_0$ . Ainda,  $z_0$  está fixo. Agora, em  $\text{Adj } z_0$  o único vértice de grau 4 é  $x_1$ , logo, está fixo. Repetindo os argumentos acima para  $x_1, x_2, \dots, x_{h-1}$ , temos  $\varphi = 1$ . ▲▲

A Figura 6 ilustra a construção do Teorema para o grupo cíclico  $Z_4$ .

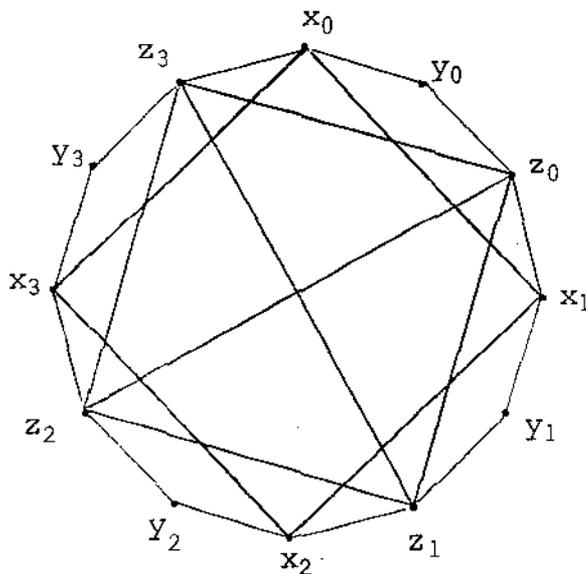


FIGURA 6: Uma representação gráfica de  $Z_4$ .

Para completar a seção, analisaremos os casos  $h = 1, 2, 3$  excluídos do Teorema 5.

Se  $h = 1$ , o grafo trivial. Se  $h = 2$ , o grafo  $K_2$  satisfaz o Teorema 5. (Em ambos os casos, com exceção do número de vértices).

Se  $h = 3$ , na construção do grafo  $X$  do Teorema 5, os vértices  $x_i$  e  $z_i$  tem grau 4 e a permutação  $(x_0 z_2)(y_0 y_2)(z_0 x_2)(x_1 z_1)$  pertence a  $\text{Aut } X$  (Figura 7).

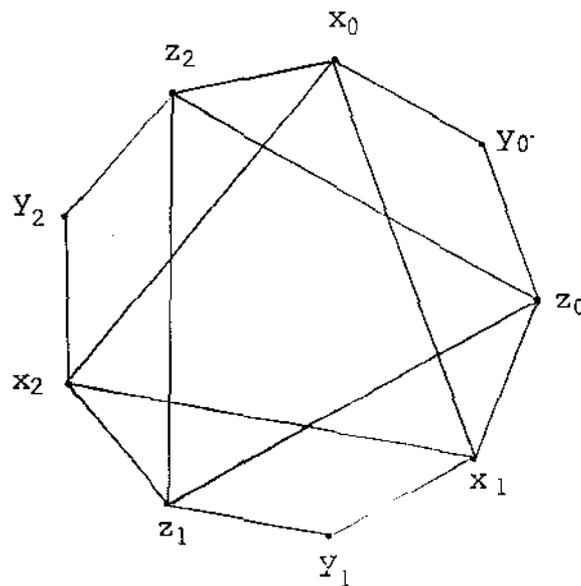


FIGURA 7: A construção do Teorema 5 não é correta para  $h = 3$ .

A Figura 8 é um exemplo de representação gráfica de  $Z_3$ .

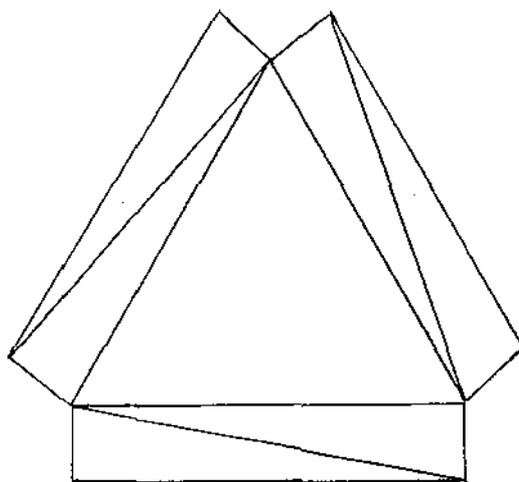


FIGURA 8: Uma representação gráfica de  $Z_3$  com 9 vértices.

## 6. O TEOREMA DE FRUCHT (GRUPOS NÃO CÍCLICOS)

TEOREMA 1: Seja  $G$  um grupo finito de ordem  $n \geq 3$  e seja  $H$  um conjunto gerador minimal de  $G$  com  $m$  elementos ( $m \geq 2$ ). Então existe um grafo cúbico  $X$ , com  $(2m + 4)n$  vértices, tal que  $\text{Aut } X \cong G$ .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $H = \{h_1, \dots, h_m\}$  e seja  $X$  o grafo dado por:

$$VX = \{1, 2, \dots, 2m + 4\} \times G$$

$AX$  : dado pela tabela de adjacências da Figura 1.

Vértice(s): $v$	Adj( $v$ )
$(1, g)$	$(2m + 2, g), (2m + 4, g), (2, gh_1)$
$(2, g)$	$(2m + 4, g), (3, g), (1, gh_1^{-1})$
$(2i - 1, g)$ $2 \leq i \leq m$	$(2i - 2, g), (2i, g), (2_i, gh_i)$
$(2i, g)$ $2 \leq i \leq m$	$(2i - 1, g), (2i + 1, g), (2i - 1, gh_i^{-1})$
$(2m + 1, g)$	$(2m, g), (2m + 2, g), (2m + 3, g)$
$(2m + 2, g)$	$(2m + 1, g), (2m + 3, g), (1, g)$
$(2m + 3, g)$	$(2m + 1, g), (2m + 2, g), (2m + 4, g)$
$(2m + 4, g)$	$(2m + 3, g), (1, g), (2, g)$

FIGURA 1: A tabela de adjacências do grafo  $X$ .

Para cada  $g$ , denotaremos por  $B_g$  o *bloco*  $g$  definido por:

$$B_g = \{(i, g) \mid 1 \leq i \leq 2m + 4\} \quad (\text{Figura 2}).$$

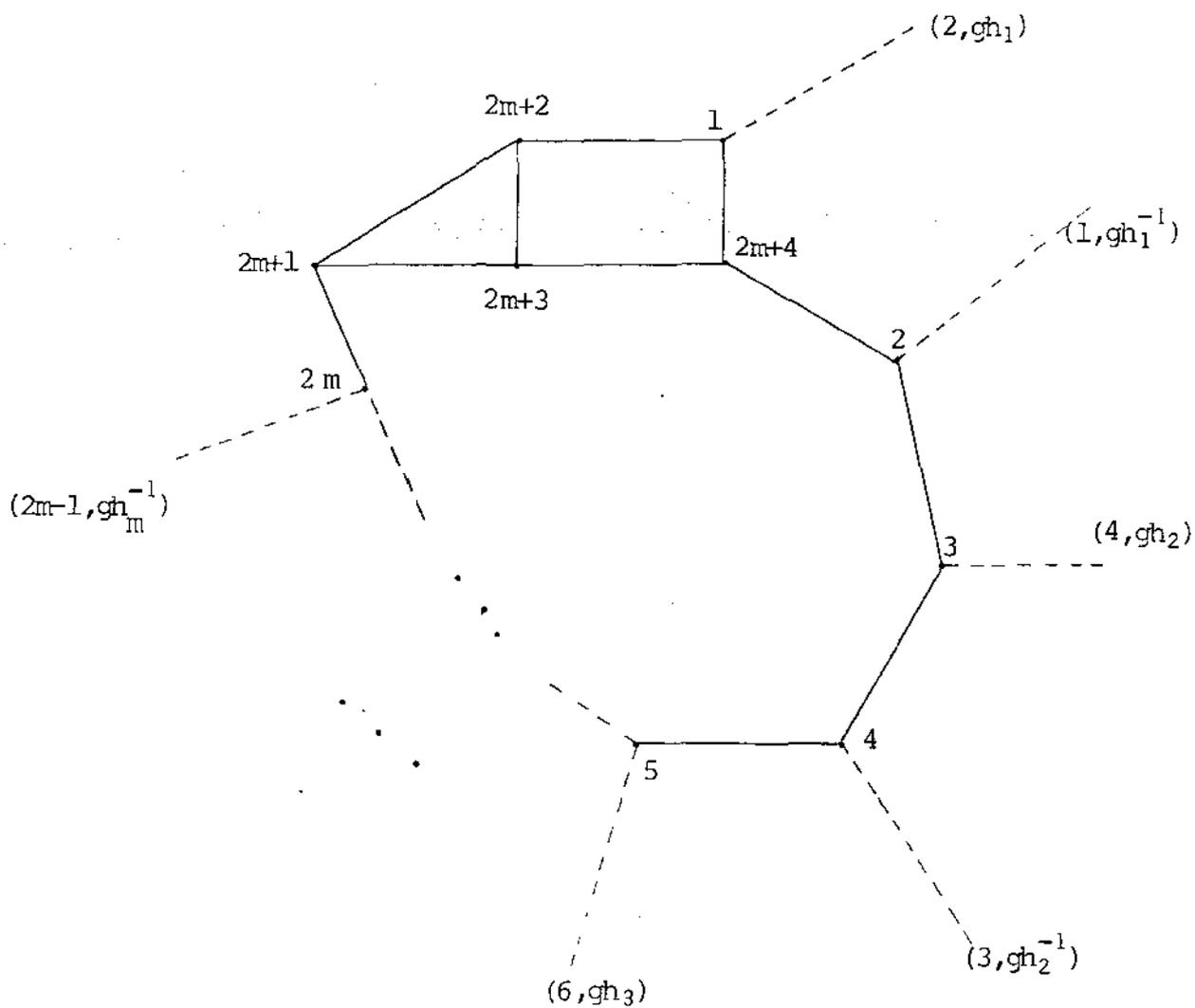


FIGURA 2: O bloco  $B_g$ .

A Figura 3 indica o grafo obtido para  $Z_2^3$ .

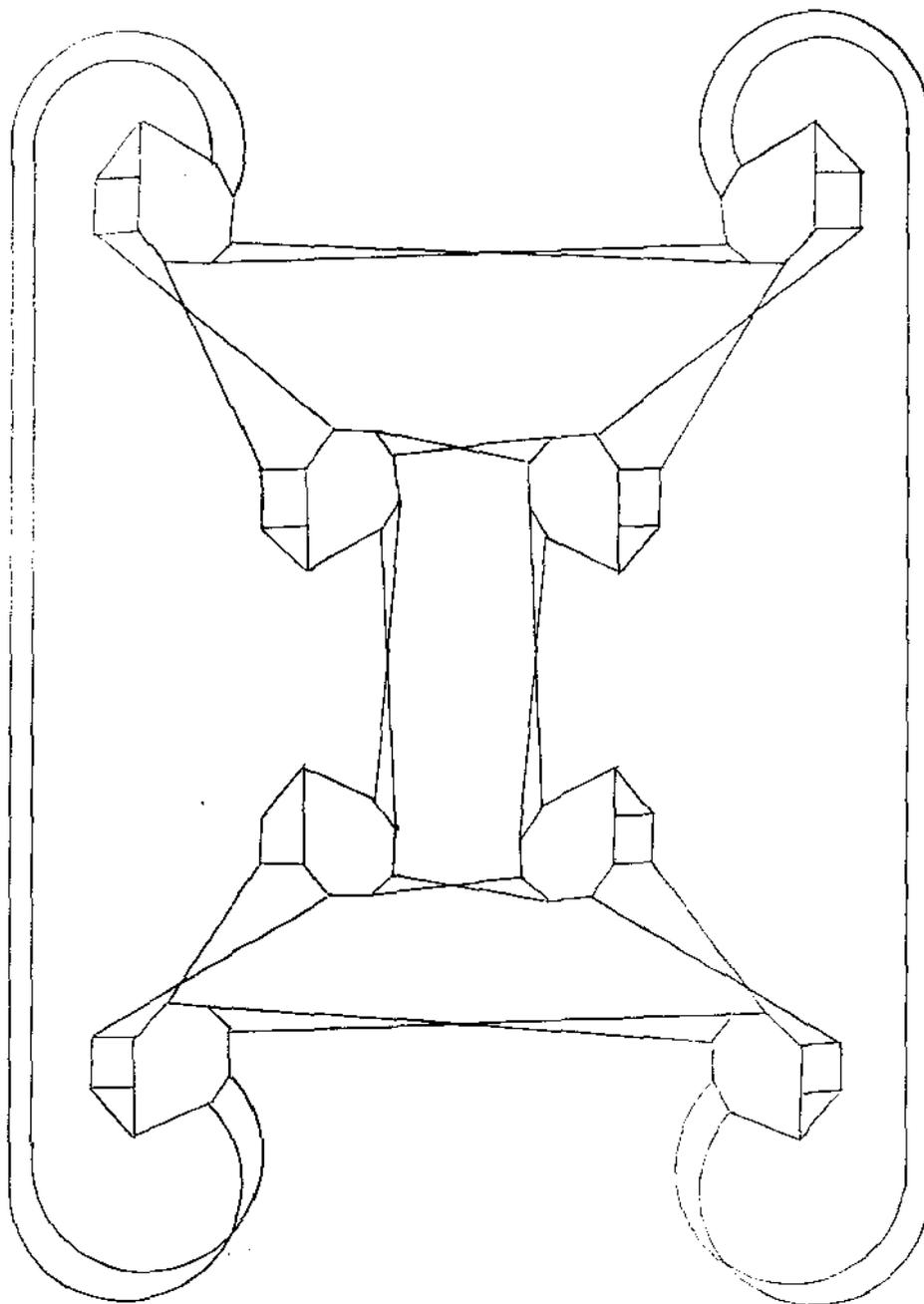


FIGURA 3: Uma representação gráfica para  $Z_2^3$ .

Recordemos que  $\Lambda G$ , o grupo regular canônico das permutações sobre  $G$ , é definido por  $\Lambda G = \{\lambda_g \mid g \in G\}$ , onde  $\lambda_g(x) = gx$  ( $\forall x \in G$ ) e é isomorfo a  $G$ . (Proposição 2.1).

Seja  $\Sigma G = \{\sigma_g \mid g \in G\}$  onde  $\sigma_g : VX \rightarrow VX$  e  $\sigma_g(i, x) = (i, \lambda_g(x)) = (i, gx)$ .

As seguintes proposições podem ser facilmente verificadas.

PROPOSIÇÃO 2: O grafo  $X$  é simples e cúbico.

PROPOSIÇÃO 3:  $G \cong \Lambda G \cong \Sigma G \subseteq \text{Aut } X$ .

Precisamos agora demonstrar que  $\text{Aut } X = \Sigma G$ , para completar a demonstração do Teorema. Faremos isto com base nos seguintes Lemas:

LEMA 4: Associados a cada  $\tau$  em  $\text{Aut } X$  e a cada  $k \in G$  existe um elemento  $k' \in G$  e uma seqüência  $(g_1, \dots, g_m)$  onde  $g_i \in \{1, h_1\}$  para cada  $i$  em  $\{1, m\}$ , que verificam as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \tau(2m + 1, k) = (2m + 1, k')$$

$$(ii) \quad \tau(2m, k) = (2m, k')$$

$$(iii) \quad \tau\{(2m + 2, k), (2m + 3, k)\} = \{(2m + 2, k'), (2m + 3, k')\}$$

$$\tau(2m + 2, k) = (2m + 2, k') \quad \text{see} \quad g_1 = 1.$$

$$(iv) \quad \tau\{(2m + 4, k), (1, k)\} = \{(2m + 4, k'), (1, k')\}$$

$$\tau(1, k) = (1, k') \quad \text{see} \quad g_1 = 1.$$

$$(v) \quad \tau(2, k) = (2, k'g_1)$$

$$(vi) \quad \tau(2i - 1, k) = (2i - 1, k'g_1 \dots g_{i-1}) \quad 2 \leq i \leq m$$

$$\tau(2i, k) = (2i, k'g_1 \dots g_i) \quad 2 \leq i \leq m.$$

LEMA 5: Para cada  $\mu$  em  $\text{Aut } X$  e  $k$  em  $G$  a seqüência  $(g_1, \dots, g_m)$  associada a  $\mu$  e  $k$  é igual a  $(1, \dots, 1)$ .

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1: Pelas Proposições 2 e 3, basta mostrar que  $\text{Aut } X \subseteq \Sigma G$ . Para tanto, seja  $\varphi \in \text{Aut } X$ ,  $k \in G$  tal que  $\varphi(2m + 1, 1) \in B_k$ . Pela Proposição 3,  $\sigma_{k^{-1}} \in \text{Aut } X$  e portanto  $\mu = \sigma_{k^{-1}} \circ \varphi \in \text{Aut } X$ .

Vamos agora mostrar que  $\mu = 1$ , ou seja,  $\varphi = \sigma_k$ . Para isso, mostraremos, por indução na altura  $r$  de  $\ell$ , que  $\mu|_{B_\ell} = 1$  para cada  $\ell \in G$ . Dado um elemento  $\ell$  de  $G$ , a altura de  $\ell$  é o menor natural  $r$  tal que  $\ell$  é o produto de  $r$  fatores, todos elementos de  $H$ .

Pela escolha de  $\mu$ ,  $\mu(2m + 1, 1) \in B_1$ . Pelos Lemas 4 e 5,  $\mu|_{B_1} = 1$ . Assim, a afirmação é válida para  $r = 0$ . Suponhamos agora  $r > 0$ , seja  $\ell = \ell_1 \cdot h_i$ , onde a altura de  $\ell_1$  é  $r - 1$  e  $1 \leq i \leq m$ .

Por indução,  $\mu|_{B_{\ell_1}} = 1$ ; em particular,  $\mu$  fixa  $(2i-1, \ell_1)$  e seus dois adjacentes em  $B_{\ell_1}$ . Assim,  $\mu$  fixa também o seu terceiro adjacente, a saber,  $(2i, \ell_1 h_i) = (2i, \ell)$  (Figura 2). Pelos Lemas 4 e 5, como  $\mu(2i, \ell) \in B_{\ell}$ , segue que  $\mu|_{B_{\ell}} = 1$ .

De fato,  $\varphi = \sigma_k \in \Sigma G$ . Como esta conclusão vale para cada  $\varphi$  em  $\text{Aut } X$ , então  $\text{Aut } X = \Sigma G$ . A demonstração do teorema depende agora apenas da demonstração dos Lemas 4 e 5.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 5: Seja  $k' \in G$  tal que  $\mu(2m, k) \in B_{k'}$ . Pelo Lema 4 (ii) e (vi),

$$(2m, k') = \mu(2m, k) = (2m, k' g_1 \dots g_m).$$

Logo,  $g_1 \dots g_m = 1$ . Assim, para cada  $i$  em  $\{1, m\}$ ,

$$g_i = (g_1 \dots g_{i-1})^{-1} (g_{i+1} \dots g_m)^{-1} \in \langle H - h_i \rangle,$$

pela minimalidade de  $H$ ,  $g_i = 1$ .

De fato,  $g_1 = g_2 = \dots = g_m = 1$ .

A demonstração do Lema 5 e do Teorema só depende da demonstração do Lema 4.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 4: Para cada  $k \in G$  seja  $k'$  o elemento de  $G$  tal que  $\tau(2m+1, k) \in B_{k'}$ ; seja  $T_k = \{(2m+1, k), (2m+2, k), (2m+3, k)\}$ .

Vamos inicialmente observar que os vértices de  $T_\ell$  ( $\ell \in G$ ) são os únicos vértices de  $B_\ell$  que são vértices de triângulos de  $X$  (Figura 2). Podemos então concluir que  $\tau(2m+1, k)$ , um vértice de  $B_k$ , por hipótese, pertence a  $T_k$ . Ainda os vértices de  $T_\ell$  são adjacentes somente a vértices de  $B_\ell$  (Figura 2). Logo,

$$\tau(T_k) = T_k, \quad (1)$$

Ainda, como  $m \geq 2$  por hipótese, então  $(2m+1, \ell)$  não é vértice de nenhum quadrilátero em  $X$  (Figura 2). Por outro lado, tanto  $(2m+2, \ell)$  quanto  $(2m+3, \ell)$  são vértices de um (mesmo) quadrilátero. Assim, de (1), segue que

$$\tau(2m+1, k) = (2m+1, k') \quad e$$

$$\tau\{(2m+2, k), (2m+3, k)\} = \{(2m+2, k'), (2m+3, k')\}.$$

Isto é, (i) e a primeira parte de (iii) valem. O terceiro adjacente de  $(2m+1, k)$ , a saber,  $(2m, k)$  é então necessariamente levado a  $(2m, k')$ . Assim, (ii) vale. Para completar (iii), basta definir  $g_1 = 1$  se  $\tau(2m+2, k) = (2m+2, k')$  e  $g_1 = h_1$  caso contrário.

(iv) e (v). Observemos que (para  $\ell \in G$ ):

$$\text{Adj}(2m+2, \ell) = \{(2m+1, \ell), (2m+3, \ell), (1, \ell)\} \quad (1)$$

$$\text{Adj}(2m+3, \ell) = \{(2m+1, \ell), (2m+2, \ell), (2m+4, \ell)\} \quad (2)$$

$$\text{Adj}(1, \ell) = \{(2m+2, \ell), (2m+4, \ell), (2, \ell h_1)\} \quad (3)$$

$$\text{Adj}(2m+4, \ell) = \{(2m+3, \ell), (1, \ell), (2, \ell)\} \quad (4)$$

(Figura 2)

Consideremos dois casos: Se  $g_1 = 1$ , de (1) e (2), por (i) e (iii)

$$\tau(2m+1, k) = (2m+1, k')$$

$$\tau(2m+2, k) = (2m+2, k')$$

$$\tau(2m+3, k) = (2m+3, k').$$

Portanto,

$$\tau(1, k) = (1, k')$$

$$\tau(2m+4, k) = (2m+4, k')$$

Então, de (4),

$$\tau(2, k) = (2, k') = (2, k'g_1).$$

Se por outro lado,  $g_1 = h_1$ , então analogamente, de (1) e (2), por (i) e (iii),

$$\tau(2m+1, k) = (2m+1, k')$$

$$\tau(2m+2, k) = (2m+3, k')$$

$$\tau(2m+3, k) = (2m+2, k')$$

Portanto,

$$\tau(1, k) = (2m+4, k')$$

$$\tau(2m+4, k) = (1, k').$$

Então, de (3) e (4),

$$\tau(2, k) = (2, k' h_1) = (2, k' g_1).$$

(iv) Para todo  $i$ ,  $2 \leq i \leq m$

$$\tau(2i-1, k) = (2i-1, k' g_1 \dots g_{i-1})$$

$$\tau(2i, k) = (2i, k' g_1 \dots g_i)$$

Provemos por indução.

base:  $i = 2$ ,  $\tau(3, k) = (3, k' g_1)$

Pelo item (v),  $\tau(2, k) = (2, k' g_1)$  (1)

Pela definição de  $X$ , para cada  $\ell \in G$ ,

$$\text{Adj}(2, \ell) = \{(2m + 4, \ell), (3, \ell), (1, \ell h_1^{-1})\} \quad (\text{Figura 2}) \quad (2)$$

Pelo item (iv), para cada  $\ell \in G$  existe  $\ell'$  em  $G$  tal que

$$\tau\{(1, \ell), (2m + 4, \ell)\} = \{(2m + 4, \ell'), (1, \ell')\} \quad (3)$$

De (1), (2) e (3) (Figura 4)

$$\tau\{(1, kh_1^{-1}), (2m + 4, k)\} = \{(1, k'g_1h_1^{-1}), (2m + 4, k'g_1)\}.$$

Logo,

$$\tau(3, k) = (3, k'g_1).$$

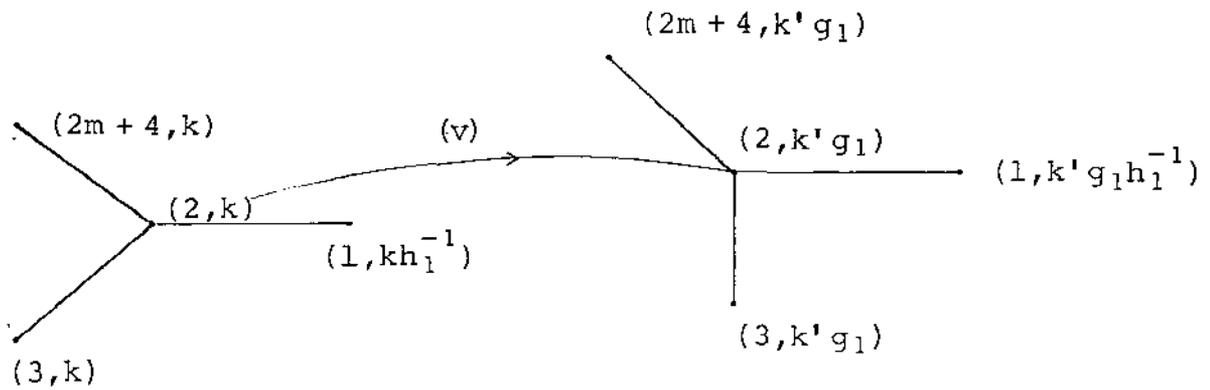


FIGURA 4:

passo  $i \geq 2$ ,  $\tau(2i, k) = (2i, k'g_1 \dots g_i)$ .

Por hipótese de indução,

$$\tau(2i - 1, k) = (2i - 1, k'g_1 \dots g_{i-1}) \quad (\text{I})$$

Pela definição de  $X$ , para cada  $\ell \in G$ , (Figura 2),

$$\text{Adj}(2i - 1, \ell) = \{(2i - 2, \ell), (2i, \ell), (2i, \ell h_i)\} \quad (\text{II})$$

Por indução (ou pelo item (v), se  $i = 2$ ), para cada  $\ell$  em  $G$ , existe  $\ell''$  em  $G$  tal que

$$\tau(2i - 2, \ell) = (2i - 2, \ell'') \quad (\text{III})$$

De (I), (II) e (III), segue que (Figura 5)

$$\tau(2i, k) \in \{(2i, k'g_1 \dots g_{i-1}), (2i, k'g_1 \dots g_{i-1}h_i)\}$$

Definindo  $g_i = 1$  se  $\tau(2i, k) = (2i, k'g_1 \dots g_{i-1})$  e  $g_i = h_i$  caso contrário, temos que

$$\tau(2i, k) = (2i, k'g_1 \dots g_i).$$

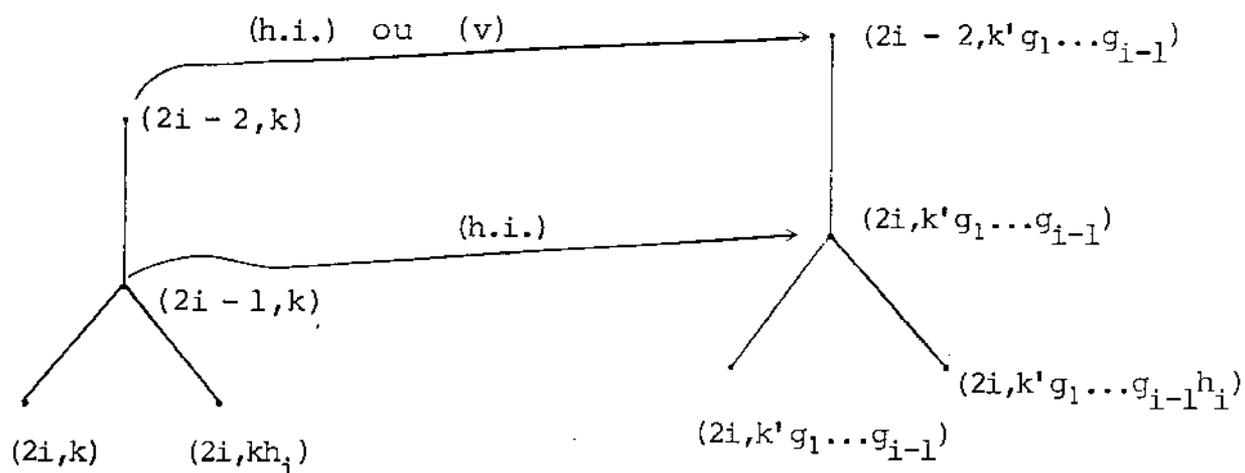


FIGURA 5.

passo  $i > 2$ ,  $\tau(2i-1, k) = (2i-1, k'g_1 \dots g_{i-1})$

Por indução

$$\tau(2i-2, k) = (2i-2, k'g_1 \dots g_{i-1}) \quad (I')$$

Pela definição de  $X$ , para cada  $\ell \in G$  (Figura 2)

$$\text{adj}(2i-2, \ell) = \{(2i-3, \ell), (2i-1, \ell), (2i-3, \ell h_{i-1}^{-1})\} \quad (II')$$

Por indução, para cada  $\ell$ , existe  $\ell''$  em  $G$  tal que

$$\tau(2i-3, \ell) = (2i-3, \ell'') \quad (III')$$

De  $(I')$ ,  $(II')$  e  $(III')$  (Figura 6)

$$\tau\{(2i - 3, k), (2i - 3, kh_{i-1}^{-1})\} = \{(2i - 3, k'g_1 \dots g_{i-1}), \\ (2i - 3, k'g_1 \dots g_{i-1} h_{i-1}^{-1})\}.$$

Logo,

$$\tau(2i - 1, k) = (2i - 1, k'g_1 \dots g_{i-1})$$

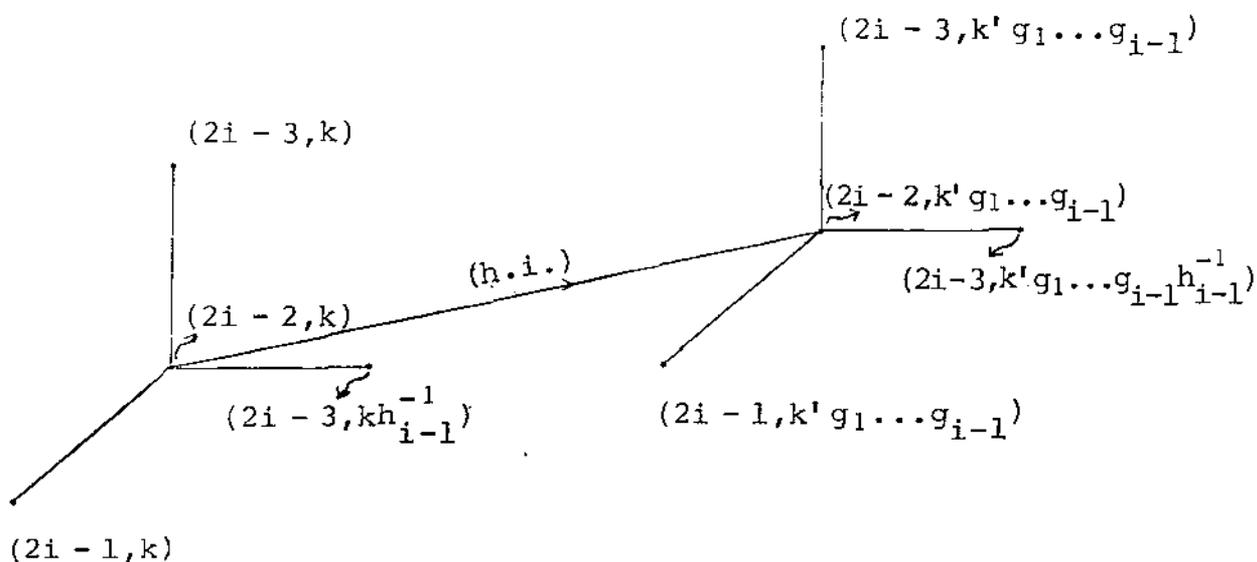
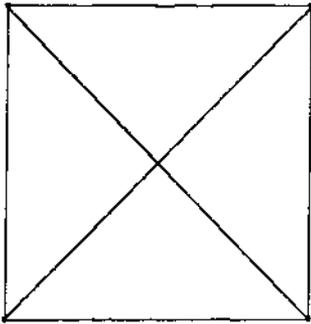


FIGURA 6.

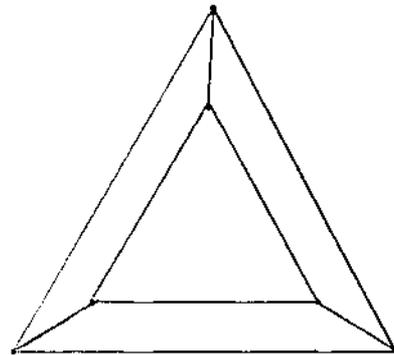
A demonstraçãõ do Lema 4 completa a demonstraçãõ do Lema 5 e do Teorema. ▲▲▲

Se a condiçãõ do grafo ser cúbico for relaxada é possível construir grafos com um número de vértices menores que os do Teorema 5 e com grupo de automorfismos isomorfo a  $G$ . [7]

Encontraremos para alguns grupos especiais grafos cúbicos com número de vértices menor do que  $(2m+4)n$  do Teorema 1. Por exemplo, o grafo completo com 4 vértices é cúbico e seu grupo de automorfismos é isomorfo a  $S_4$  (grupo simétrico de grau 4); o grafo de Kagno para o grupo diedral de ordem 12 (Figura 7).



grafo completo  
com 4 vértices  
( $S_4$ )



grafo de Kagno  
( $D_6$ )

FIGURA 7: Alguns grafos cúbicos com número de vértices menor do que  $(2m+4)n$  do Teorema 1.

## CAPÍTULO 3

### REPRESENTAÇÕES REGULARES GRÁFICAS ORIENTADAS

#### 1. INTRODUÇÃO

Um grafo  $Y$  é *regular* se  $\text{Aut } Y$  é regular. Da mesma forma, diremos que  $Y$  é *transitivo* (f.l.p.f.) se  $\text{Aut } Y$  é transitivo (f.l.p.f.).

Uma *representação regular gráfica (orientada)* RRG (RRGO) de um grupo  $G$  é um grafo  $Y$  simples (orientado, semi-simples) e regular tal que  $\text{Aut } Y \cong G$ .

No Capítulo 2 verificamos que para todo grupo  $G$  existe um grafo  $Y$  com  $\text{Aut } Y \cong G$ . Conforme vimos, podemos afirmar que a existência desse grafo segue da existência de grafos colocação  $X_{G,H}$  com  $\text{Cor } X = \Lambda G$ . Vimos ainda naquele Capítulo (Lema 2.3.2) que, em geral, para  $X = X_{G,H}$ ,

$$G \cong \Lambda G \subseteq \text{Cor } X \subseteq \text{Aut } X. \quad (1)$$

Neste e no próximo Capítulo analisaremos a questão da representação regular gráfica orientada de grupos finitos. Mostraremos uma condição necessária e outra suficiente para a existência de tais representações. A condição necessária afirma, em última análise, que para que um grafo  $Y$  seja um RRG de um grupo

$G, Y$  deve ser um grafo coloração fortemente conexo. A condição suficiente para que um grafo coloração  $X_{G,H}$  seja uma RRG de  $G$  é que a igualdade valha nas duas inclusões em (1).

Com base nestas duas condições, será demonstrado o seguinte resultado, devido a Babai [2].

**TEOREMA:** Todo grupo (finito) admite uma RRG com exceção de precisamente cinco grupos, a saber,  $Z_2^2$ ,  $Z_2^3$ ,  $Z_2^4$ ,  $Z_3^2$  e  $Q$ , onde  $Q$  denota o grupo quaterniônico.

Da análise exigida obtemos como subproduto o seguinte resultado para RRG de grupos abelianos.

**TEOREMA:** Os únicos grupos (finitos) abelianos que admitem uma RRG são os  $Z_2^n$  ( $n \neq 2, 3$  e  $4$ ).

Neste Capítulo consideramos os grupos não isomorfos a  $Z_2^n$ : todos admitem uma RRG, com precisamente duas exceções, o  $Z_3^2$  e o  $Q$ ; destes grupos, não isomorfos a  $Z_2^n$ , nenhum abeliano admite uma RRG.

No Capítulo seguinte, analisaremos os grupos  $Z_2^n$ : todos admitem RRG (e RRG), exceto o  $Z_2^2$ ,  $Z_2^3$  e  $Z_2^4$ .

Existe uma literatura extensa a respeito de RRG para grupos não abelianos. Não tratamos deste caso neste trabalho.

## 2. UMA CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA RRG0

TEOREMA DA CONDIÇÃO NECESSÁRIA: Seja  $G$  um grupo. Se para todo conjunto gerador  $H$  de  $G$  existir  $\varphi \in \text{Aut } G - 1$  tal que  $\varphi(H) = H$  então  $G$  não tem uma RRG0.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que exista  $X$ , RRG0 de  $G$ , e que, para todo  $H \subseteq G$  que gera  $G$  exista  $\varphi \in \text{Aut } G - 1$  tal que  $\varphi(H) = H$ . Do Corolário do Lema 2.3.4',  $X$  é o  $\bar{K}_2$  ou  $X$  é fortemente conexo.

Observemos inicialmente que  $G \neq Z_2$  e  $X \neq \bar{K}_2$ . De fato,  $\text{Aut } Z_2 - 1 = \emptyset$ ; por outro lado, da hipótese,  $\text{Aut } G - 1 \neq \emptyset$ . Logo,  $G \neq Z_2$ . Portanto,

$$\text{Aut } X \cong G \neq Z_2 \cong \text{Aut } \bar{K}_2.$$

De fato,  $X \neq \bar{K}_2$ .

Do Lema abaixo,  $X \cong X_{G,H}$  e  $H$  gera  $G$ .

Por hipótese, existe  $\varphi \in \text{Aut } G - 1$  tal que  $\varphi(H) = H$ . Observemos que isto implica que  $\varphi \in \text{Aut } X$ . De fato, sejam  $x, y \in VX$ ; então, da definição de grafo coloração e do fato que  $\varphi$  é automorfismo de  $G$  que fixa  $H$ , segue que

$$(x, y) \in AX \Leftrightarrow$$

$$x^{-1}y \in H \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x^{-1}y) \in H \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x)^{-1}\varphi(y) \in H \Leftrightarrow$$

$$(\varphi(x), \varphi(y)) \in AX.$$

Finalmente,  $\varphi(1) = 1$ , pois  $\varphi \in \text{Aut } G$ . Assim,  $\varphi \in \text{Aut } X-1$  e fixa 1. Portanto,  $X$  não é f.l.p.f., contradição.

A demonstração do teorema se reduz agora à demonstração do Lema.

LEMA: Se  $X$  é um grafo regular então  $X$  é  $\bar{K}_2$  ou  $X \cong X_{\text{Aut } X, H}$  com  $\langle H \rangle = \text{Aut } X$ .

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar inicialmente que  $X \cong X_{\text{Aut } X, H}$  para  $H \subseteq \text{Aut } X$ .

Seja  $x_0 \in VX$ . Como  $X$  é regular, então para todo  $x$  em  $VX$  existe um único automorfismo de  $X$ , denotado  $\varphi_x$ , tal que  $\varphi_x(x_0) = x$ .

Seja  $\varphi$  a bijeção de  $X$  em  $\text{Aut } X$  dada por  $\varphi(x) = \varphi_x$ . Seja  $H = \{\varphi_x \mid (x_0, \varphi_x(x_0)) \in AX\}$ .

Formemos  $Y = X_{\text{Aut } X, H}$  e mostremos que  $\varphi$  é um isomorfismo de  $X$  em  $Y$ . De fato,

$$(x, y) \in AX \Leftrightarrow$$

$$(\varphi_X(x_0), \varphi_Y(x_0)) \in AX \Leftrightarrow$$

$$(x_0, \varphi_X^{-1} \varphi_Y(x_0)) \in AX \Leftrightarrow$$

$$\varphi_X^{-1} \varphi_Y \in H \Leftrightarrow$$

$$(\varphi_X, \varphi_Y) \in AY.$$

Logo,  $X \cong X_{\text{Aut } X, H}$ .

Finalmente, do Corolário do Lema 2.3.4', ou  $X \cong \overline{K_2}$  ou  $X_{\text{Aut } X, H}$  é fortemente conexo. No segundo caso, pelo Lema 2.3.5,  $H$  gera  $\text{Aut } X$ .

A demonstração do Lema, completa a do Teorema.  $\blacktriangle\blacktriangle$

### 3. UMA CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA RRG0

TEOREMA DA CONDIÇÃO SUFICIENTE: Sejam  $X = X_{G, H}$  e  $K$  um subconjunto de  $H$  que gera  $G$ . Se  $\text{Aut}_1 X \subseteq \text{Aut}_K X$  para todo  $k \in K$  então  $G \cong \Lambda G = \text{Cor } X = \text{Aut } X$  e portanto  $X$  é um RRG0 de  $G$ .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $X = X_{G, H}$ . Temos que  $\text{Aut } X$  é transitivo e

$$G \cong \Lambda G \subseteq \text{Cor } X \subseteq \text{Aut } X \quad (1)$$

pelo Lema 2.3.2.

Suponhamos que  $\text{Aut}_1 X \subseteq \text{Aut}_k X$  para todo  $k \in K$ ,  $\langle K \rangle = G$ . Do Lema 2.3.6',  $X$  é regular. Em conseqüência, da propriedade triangular  $\# \text{Aut } X = \# G = \# \Lambda G$ . Portanto, as inclusões em (1) tornam-se igualdades, isto é,  $G \cong \Lambda G = \text{Cor } X = \text{Aut } X$  e portanto  $X$  é uma RRG de  $G$ . ▲

#### 4. CONDIÇÕES ANÁLOGAS PARA RRG

**TEOREMA DA CONDIÇÃO NECESSÁRIA:** Seja  $G$  um grupo. Se para todo conjunto gerador  $H$  de  $G$  existir  $\varphi \in \text{Aut } G - 1$  tal que  $\varphi(H \cup H^{-1}) = H \cup H^{-1}$  então  $G$  não tem uma RRG.

**DEMONSTRAÇÃO:** Seja  $X$  uma RRG de  $G$ . Então  $Y$  obtido de  $X$  substituindo cada aresta por um par de arestas antiparalelas, isto é, pares de forma  $\{(x,y), (y,x)\}$  (Figura 1), é uma RRG de  $G$ .



FIGURA 1: Um par de arestas antiparalelas.

Pela demonstração do Teorema da condição necessária para RRG,

$Y$  é um grafo coloração  $X_{G,L}$  onde  $L = H \cup H^{-1}$  (pois cada aresta tem uma antiparalela). Ainda, pela mesma demonstração, todo automorfismo  $\varphi$  de  $G - 1$  que fixa  $H \cup H^{-1}$  é um automorfismo de  $X_{G,L}$ . Logo,  $X_{G,L}$  não é f.l.p.f., pois  $\varphi \neq 1$  e conseqüentemente  $X_{G,L}$  não é uma RRG de  $G$ . Contradição.  $\blacktriangle$

**TEOREMA 1:** Seja  $G$  abeliano e não isomorfo a  $Z_2^n$ , então  $G$  não admite uma RRG.

**DEMONSTRAÇÃO:** Se  $G \not\cong Z_2^n$ ,  $G$  possui pelo menos um elemento de ordem maior do que 2. (Esta afirmação segue imediatamente do Teorema fundamental dos grupos abelianos finitos: todo grupo abeliano finito é isomorfo ao produto direto de grupos cíclicos cujas ordens são potências de primos).

O automorfismo  $\rho$  de  $G$  definido por  $\rho(g) = g^{-1}$ ,  $\forall g \in G$  difere da identidade e fixa  $H \cup H^{-1}$ , para todo  $H \subseteq G$ .  $\blacktriangle$

**TEOREMA DA CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA RRG:** Sejam  $X = X_{G,H}$  (não orientado) e  $K$  um subconjunto de  $H$  que gera  $G$ . Se  $\text{Aut}_1 X \subseteq \text{Aut}_K X$  para todo  $k \in K$  então  $G \cong AG = \text{Cor } X = \text{Aut } X$  e  $X$  é uma RRG de  $G$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Seja  $X = X_{G,H}$  e suponhamos que  $\text{Aut}_1 X \subseteq \text{Aut}_K X$ , para todo  $k$  em  $K$ . Formemos  $Y$  substituindo cada aresta de  $X$  por um par de arestas antiparalelas, assim,  $Y = X_{G,L}$  onde

$L = H \cup H^{-1}$ . Ainda  $\text{Aut } Y = \text{Aut } X$ , logo,

$$\text{Aut}_1 Y = \text{Aut}_1 X \subseteq \text{Aut}_k X = \text{Aut}_k Y,$$

para todo  $k \in K \subseteq L$ .

Pelo teorema da condição suficiente para RRG,  $Y$  é uma RRG de  $G$  e  $G \cong \text{AG} = \text{Cor } Y = \text{Aut } Y$ . Portanto,  $X$  é uma RRG de  $G$  e  $G \cong \text{AG} = \text{Cor } X = \text{Aut } X$ . ▲

## 5. UMA CLASSIFICAÇÃO DOS GRUPOS FINITOS

**TEOREMA 1:** Para qualquer grupo  $G$  de ordem maior do que 2, precisamente uma das seguintes afirmações ocorre:

- (i)  $G$  é gerado por seus elementos de ordem maior do que 2;
- (ii)  $G$  é um grupo diedral generalizado cujo núcleo é gerado por seus elementos de ordem maior do que 2;
- (iii)  $G$  é um  $Z_2^n$ .

Um grupo  $G$  é um *diedral generalizado* se  $G$  possui um subgrupo abeliano  $A$  de índice 2 e um elemento  $b \in G \setminus A$  tal que  $b^2 = 1$  e  $b^{-1}ab = a^{-1}$  para todo  $a \in A$ . Diremos que  $A$  é o *núcleo* de  $G$ .

Obviamente,  $Z_1$  satisfaz as condições (i) e (iii) do teorema

e  $Z_2$  satisfaz as condições (ii) e (iii).

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1: Seja  $A$  o subgrupo de  $G$  gerado pelos elementos de ordem  $> 2$ .

Se  $G = A$ , ocorre (i).

Se  $A \subsetneq G$ , então pela Proposição 4 abaixo,  $G$  é diedral generalizado. Ainda, pela demonstração da Proposição 4 abaixo, se  $G$  não for  $Z_2^n$  então  $A$  é núcleo. Portanto, ocorre (ii).

Obviamente (i), (ii) e (iii) são mutuamente exclusivas, exceto para  $Z_1$  e  $Z_2$ .

A demonstração do Teorema 1, se reduz agora à demonstração da Proposição 4.

Para tanto, demonstraremos primeiramente os Lemas a seguir:

LEMA 2: Se  $G$  é um diedral generalizado de núcleo  $A$  então  $g^2=1$ , para qualquer que seja  $g$  em  $G \setminus A$ .

LEMA 3: O grupo  $G$  é o  $Z_2^n$  ( $n \geq 1$ ) se, e somente se  $G$  é grupo diedral generalizado abeliano.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2: Sejam  $G$  um diedral generalizado de núcleo  $A$  e  $b$  um elemento de  $G \setminus A$  de ordem 2 e tal que  $bab = a^{-1}$   $\forall a \in A$ . Como  $|G : A| = 2$ , então,  $\forall g \in G \setminus A$ ,  $g \in Ab$ , logo,  $g = ab$ ,

$a \in A$ . Então  $g^2 = abab = a(bab) = aa^{-1} = 1$ . ▲

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 3: É claro que  $Z_2^n$  ( $n \geq 1$ ) é diedral generalizado, com núcleo  $Z_2^{n-1}$ .

Seja  $G$  um diedral generalizado abeliano e  $A$  seu núcleo. Pelo Lema 2,  $b^2 = 1$ ,  $\forall b \in G \setminus A$ . Mas, se  $x \in A$ ,  $x^2 = 1$ . De fato,  $b^{-1}xb = x^{-1}$  e  $G$  é abeliano, então,  $x^{-1} = b^{-1}bx = x$ . Portanto, todo elemento de  $G$  tem ordem 2, isto é,  $G \cong Z_2^n$ , pelo Teorema fundamental dos grupos abelianos finitos. ▲

PROPOSIÇÃO 4: Um grupo  $G$  é diedral generalizado se, e somente se,  $G$  possui um subgrupo próprio  $B$  tal que para qualquer  $b \in G \setminus B$ ,  $b^2 = 1$ .

DEMONSTRAÇÃO: Se  $G$  é diedral generalizado, por definição e pelo Lema 2, a asserção vale com  $B = A$ , onde  $A$  é o núcleo de  $G$ .

Suponhamos que um grupo  $G$  possua um subgrupo próprio  $B$  tal que para qualquer  $b \in G \setminus B$ ,  $b^2 = 1$ . Para provar que  $G$  é diedral generalizado, podemos supor que  $G \neq Z_2^n$ , pois pelo Lema 3,  $Z_2^n$  é diedral generalizado. Para  $G \neq Z_2^n$ , mostremos:

$$(1) \quad b^{-1}ab = a^{-1}, \quad \forall a \in B \quad (\forall b \in G \setminus B)$$

$$(2) \quad B \text{ é abeliano}$$

$$(3) \quad |G : B| = 2.$$

Primeiramente, observemos que se  $b \in G \setminus B$  e  $a \in B$  então  $ab \in G \setminus B$ , pois caso contrário,  $b = a^{-1}(ab) \in B$ , contradição.

Mostremos, agora, (1), (2) e (3).

(1) Seja  $a \in B$ . Então  $ab \in G \setminus B$ , para  $\forall b \in G \setminus B$ . Por hipótese,  $(ab)^2 = 1 \Rightarrow abab = 1 \Rightarrow b^{-1}ab = a^{-1}$ .

(2) Sejam  $a_1$  e  $a_2$  elementos de  $B$ . Então, de (1),

$$a_1 a_2 = b a_1^{-1} b b a_2^{-1} b = b a_1^{-1} a_2^{-1} b = b (a_2 a_1)^{-1} b = a_2 a_1.$$

(3) Sejam  $b, c \in G \setminus B$ . Então  $bc \in B$ . Caso contrário, seja  $a \in B$ . Por (1),

$$a^{-1} = (bc)^{-1} a (bc) = cbabc = c(bab)c = ca^{-1}c = a.$$

Então todo elemento de  $G$  tem ordem 2. Assim,  $G$  é abeliano, pois  $xyxy = 1 = xyyx$ ,  $\forall x, y \in G$ . Pelo Teorema fundamental dos grupos abelianos finitos,  $G \cong Z_2^n$  ( $n \geq 1$ ), contradição.

De fato,  $bc \in B$ ,  $\forall b, c \in G \setminus B$ . Então  $c \in bB$ . Logo,  $G \setminus B \subseteq bB$ . Portanto  $|G : B| = 2$ .  $\blacktriangle\blacktriangle$

## 6. REPRESENTAÇÕES REGULARES GRÁFICAS ORIENTADAS PARA GRUPOS NÃO DIEDRAIS

Analisaremos, agora, os grupos gerados por seus elementos de ordem maior do que 2. Mostraremos que, à exceção de  $Z_3^2$  e do quaterniônico, os demais têm uma RRG. A demonstração da existência de uma RRG para os grupos não diedrais é feita nos Teoremas 1 e 2, exceto alguns casos particulares, tratados no Teorema

3, abaixo. Iniciaremos com os grupos não cíclicos.

TEOREMA 1: Seja  $G$  um grupo não cíclico gerado por  $H = \{h_1, \dots, h_d\}$ , onde  $H$  é o conjunto gerador mínimo de  $G$  e sem involuções. Seja  $j$  um inteiro em  $[1, d]$  que satisfaz cada condição abaixo:

- (a) se  $j = 1 \Rightarrow h_1^3 \neq 1$ ;
- (b) se  $j = 1 \Rightarrow h_1^2 \neq h_d^{\pm 2}$ ;
- (c) se  $j = d \Rightarrow h_1 h_d \neq h_d h_1$ ;
- (d) se  $j = d \Rightarrow h_1^2 \neq h_d^{-2}$ ;
- (e)  $h_j^{-1} h_1 h_j \neq h_1^{-1}$ ;
- (f)  $h_{d-1}^{-1} h_d h_{d-1} \neq h_d^{-1}$ .

Então existe  $K \subseteq G$  tal que  $K = K^{-1}$ ,  $1 \notin K$ ,  $H \cap K = \emptyset$  e  $X_{G, H \cup K}$  é uma RRG0 de  $G$ .

Um grupo  $G$  não abeliano é o grupo quaterniônico se existe  $a, b$  em  $G$  tais que  $G = \langle a, b \rangle$ ,  $a^2 = b^2 = (ab)^2$ . Indicaremos o grupo quaterniônico pela letra  $Q$ .

TEOREMA 2: Seja  $G$  um grupo (finito), gerado por seus elementos de ordem maior do que 2 e distinto de  $Z_3^2$ , de  $Q$ , de  $Z_n$ , de  $Z_n \times Z_2$  e de  $Q \times Z_2$ . Então  $G$  tem um gerador mínimo  $H$  que satisfaz as hipóteses do Teorema 1. Conseqüentemente  $G$  tem uma RRG0.

TEOREMA 3: Os grupos  $Z_n$ ,  $Z_m \times Z_2$  ( $m > 2$ ) e  $Q \times Z_2$  têm representações regulares gráficas orientadas.

COROLÁRIO: Todos os grupos gerados pelos seus elementos de ordem maior do que 2 têm RRCGO, exceto os grupos  $Z_3^2$  e  $Q$ .

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1: Seja  $L = \{h_i^{-1}h_{i+1}, i=1, \dots, d-1\} \cup \{h_jh_1\}$  e  $K = L \cup L^{-1}$ .

É claro que  $K \subseteq G$  e  $K = K^{-1}$ .

Pelo Lema 4, abaixo,  $1 \notin K$  e do Lema 5, abaixo  $H \cap K = \emptyset$ .

Seja  $X = X_{G, H \cup K}$  e consideremos o subgrafo  $Y$  gerado por  $H$  (Figura 1). Mostremos que  $Y$  é constituído pelos dois caminhos orientados  $(h_1, \dots, h_d)$  e  $(h_d, \dots, h_1)$ . De fato, suponhamos que exista uma aresta  $(h_p, h_q)$  em  $Y$ . Então  $(h_p^{-1}h_q)^{\pm 1} \in H \cup K$ . Mas, da minimalidade de  $H$ ,  $(h_p^{-1}h_q)^{\pm 1} \in K$ . Como  $K = K^{-1}$ , basta considerarmos  $h_p^{-1}h_q \in K$ , ou seja,  $h_p^{-1}h_q = (h_i^{-1}h_{i+1})^{\pm 1}$  ou  $h_p^{-1}h_q = (h_jh_1)^{\pm 1}$  e pelo Lema 6, abaixo  $\{p, q\} = \{i, i+1\}$  e a aresta pertence a um dos caminhos  $(h_1, \dots, h_d)$  ou  $(h_d, \dots, h_1)$ .

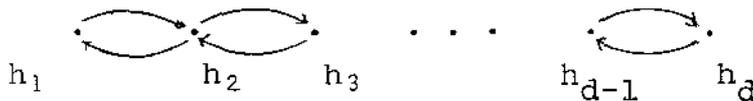


FIGURA 1: O subgrafo  $Y$  de  $X$  gerado por  $H$ .

Seja  $\varphi \in \text{Aut}_1 X$ . Então  $\varphi(H \cup K) = H \cup K$ . Observemos que

$(1, k)$  e  $(k, 1)$  são arestas de  $X$  para cada  $k \in K$ , ( $K = K^{-1}$ ). Ainda,  $(1, h_i) \in AX$ , para todo  $h_i$  em  $H$ , mas  $(h_i, 1) \notin AX$ . De fato, se  $(h_i, 1) \in AX$  então  $h_i^{-1} \in H \cup K$  e da minimalidade de  $H$ ,  $h_i^{-1} \in K$ . Logo,  $h_i \in K$ , pois  $K = K^{-1}$ , o que contradiz a disjunção de  $H$  e  $K$ . Portanto,  $\varphi(H) = H$ . Assim,  $\varphi|_H$  é um automorfismo de  $Y$ .

Suponhamos, por contradição, que  $\varphi|_H$  não é a identidade: então  $\varphi(h_i) = h_{d+1-i}$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Mais,  $\text{Adj } 1 = \{H, K, H^{-1}\}$ , portanto  $\varphi(H^{-1}) = H^{-1}$ .

Seja  $h_k$  em  $H$  tal que  $\varphi(h_j^{-1}) = h_k^{-1}$ . Como  $(h_j^{-1}, h_1) \in AX$  então  $(h_k^{-1}, h_d) \in AX$  e  $h_k h_d \in H \cup K$ . Novamente pela minimalidade de  $H$ ,  $h_k h_d \in K$  e temos:

$$h_k h_d = (h_i^{-1} h_{i+1})^{\pm 1}$$

ou

$$h_k h_d = (h_j h_1)^{\pm 1}.$$

Do Lema 7, abaixo, as igualdades acima não ocorrem, contradição.

De fato,  $\varphi|_H = 1$ . Como esta conclusão vale para cada  $\varphi \in \text{Aut}_1 X$ , então pelo teorema da condição suficiente para RRG0,  $X$  é uma RRG0 de  $G$ .

LEMA 4:  $1 \notin K$ .

LEMA 5:  $H \cap K = \emptyset$ .

LEMA 6: Se (1)  $h_p^{-1}h_q = (h_i^{-1}h_{i+1})^{\pm 1}$  ou

$$(2) \quad h_p^{-1}h_q = (h_j h_1)^{\pm 1}$$

então (1) ocorre e  $\{p, q\} = \{i, i+1\}$ .

LEMA 7:  $h_k h_d \neq (h_i^{-1}h_{i+1})^{\pm 1}$  e

$$h_k h_d \neq (h_j h_1)^{\pm 1}.$$

Para completar a demonstração do teorema, resta demonstrar os Lemas 4, 5, 6 e 7.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 4: Suponhamos  $1 \in K$ . Então,  $h_i^{-1}h_{i+1} = 1$  ou  $h_j h_1 = 1$ . Nenhuma das igualdades ocorre. De  $H$  não possuir involuções temos  $h_j h_1 = 1$ ,  $j \neq 1$ , (caso contrário,  $h_1^2 = 1$ ), e da minimalidade de  $H$ ,  $h_i^{-1}h_{i+1} \neq 1$  e  $h_j h_1 \neq 1$  para  $j \neq 1$ , caso contrário,  $H - h_i$  e  $H - h_1$  geram  $G$ , respectivamente.  $\blacktriangle$

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 5: Suponhamos  $H \cap K \neq \emptyset$  e seja  $h_p \in H \cap K$ , então

$$(1) \quad h_p = (h_i^{-1}h_{i+1})^{\pm 1} \quad \text{ou}$$

$$(2) \quad h_p = (h_j h_1)^{\pm 1}.$$

Nenhuma das igualdades ocorre, pois contradizem a minimalidade

de  $H$  e a condição (a) da hipótese do teorema. De fato, em

(1), se  $p \notin \{i, i+1\}$  então  $H - h_p$  gera  $G$ ; se  $p \in \{i, i+1\}$  então um de  $H - h_i$  e  $H - h_{i+1}$  gera  $G$ , ou  $h_i = 1$  ou  $h_{i+1} = 1$ ; em

(2), se  $j \neq 1$ , analogamente ao anterior se obtém uma contradição; se  $j = 1$  e  $p \neq 1$ , então  $h_p = h_1^{\pm 2}$  e  $H - h_p$  gera  $G$ , se  $p = 1 = j$ , então  $h_1 = h_1^{\pm 2}$ , logo,  $h_1 = 1$  ou  $h_1^3 = 1$ ; e a minimalidade de  $H$  ou (a) é contradita.  $\blacktriangle$

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 6: Pelo Lema 4,  $p \neq q$ .

Suponhamos que ocorra (1), então, se  $q \notin \{i, i+1\}$ ,  $h_q \in \{(h_i^{-1}h_{i+1})^{\pm 1}h_p\}$ , logo,  $H - h_q$  gera  $G$ . Analogamente, se  $p \notin \{i, i+1\}$ ,  $H - h_p$  gera  $G$ . Logo, pela minimalidade de  $H$ ,  $p, q \in \{i, i+1\}$ . Desta e de  $p \neq q$ , temos  $\{p, q\} = \{i, i+1\}$ .

Suponhamos que ocorra (2), analogamente ao anterior, temos que  $p, q \in \{j, 1\}$  e portanto  $\{p, q\} = \{j, 1\}$  e  $j \neq 1$ , pois caso contrário,  $p = q$ . Assim, ou  $h_1^{-1}h_j = (h_jh_1)^{\pm 1}$  ou  $h_j^{-1}h_1 = (h_jh_1)^{\pm 1}$ . Segue que ou  $h_j^{-1}h_1 = h_jh_1$  ou  $h_j^{-1}h_1 = h_1^{-1}h_j^{-1}$ . No 1º caso,  $h_j^2 = 1$ , no 2º caso  $h_j^{-1}h_1h_j = h_1^{-1}$ . Nenhuma ocorre pois  $H$  não possui involuções e a condição (e) vale por hipótese.  $\blacktriangle$

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 7: Suponhamos  $h_k h_d = (h_i^{-1}h_{i+1})^{\pm 1}$  ou  $h_k h_d = (h_j h_1)^{\pm 1}$ .

Se  $k \neq d$ , com análise análoga ao do Lema 6,  $\{k, d\} = \{i, i+1\}$  ou  $\{k, d\} = \{j, i\}$  e  $j \neq 1$ . Logo  $d = i + 1$  e  $k = i = d - i$  ou  $k = 1$  e  $d = j \neq 1$ , pois  $d > k$ . Então, temos as igualdades:

$$h_{d-1}h_d = h_{d-1}^{-1}h_d, \quad \text{ou seja,} \quad h_{d-1}^2 = 1;$$

$$h_{d-1}h_d = h_d^{-1}h_{d-1}, \quad \text{isto é,} \quad h_{d-1}^{-1}h_d h_{d-1} = h_d^{-1};$$

$$h_1h_d = h_d h_1 \quad \text{ou}$$

$$h_1h_d = h_1^{-1}h_d^{-1}, \quad \text{isto é,} \quad h_1^2 = h_d^{-2},$$

que não ocorrem, pois contradizem, respectivamente,  $H$  não ter involuções, e as condições (f), (c) e (d).

Então  $k = d$ ; se  $h_d^2 = (h_i^{-1}h_{i+1})^{\pm 1}$  então  $H - h_i$  gera  $G$ , se  $h_d^2 = (h_j h_1)^{\pm 1}$  então ou  $H - h_i$  gera  $G$  ou  $j = 1$  e  $h_d^2 = h_1^{\pm 2}$ , contradizendo (b).

A demonstração do Lema 7 completa a demonstração do Teorema. ▲▲

NOTA: No artigo original [2] a condição (b): se  $j=1 \Rightarrow h_1^2 = h_d^{\pm 2}$  não foi considerada. Para tornar clara a necessidade desta condição, daremos o seguinte exemplo: Seja  $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ , onde

$\langle a \rangle = Z_4$  e  $\langle b \rangle = Z_2$ . É fácil ver que os únicos geradores mínimos de  $G$  e sem involuções  $H = \{h_1, h_2\}$  são:  $\{a, ab\}$ ,  $\{a, a^3b\}$ ,  $\{a^3, ab\}$ ,  $\{a^3, a^3b\}$  e satisfazem a condição  $h_1^2 = h_2^2$ , qualquer que seja a ordem adotada.

Sendo  $G$  abeliano, consideramos  $j = 1$  e as condições (a), (c), (d), (e) e (f) são válidas. Mas o grafo  $X = X_{G, H \cup K}$  para  $H = \{a, ab\}$  e  $K = \{a^2, b\}$ , como definidos no teorema não é uma RRG0 de  $G$  (Figura 2).

Seja  $\varphi$  a involução sobre  $G$  que permuta  $a^3b$  com  $a^3$ ,  $ab$  com  $a$  e fixa os demais elementos:  $\varphi$  é um automorfismo de  $X$  não idêntico, mas com pontos fixos.

Vamos agora demonstrar o Teorema 2. Para isso, precisamos de algumas propriedades ligadas ao grupo quaterniônico.

LEMA 8: O grupo  $\langle a, b \rangle$  é isomorfo ao quaterniônico se, e somente se  $a^2 \neq 1 \neq b^2$ ,  $a^{-1}ba = b^{-1}$ ,  $b^{-1}ab = a^{-1}$ .

Ademais, se  $\langle a, b \rangle \cong Q$  então  $a^4 = 1$ .

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos  $\langle a, b \rangle \cong Q$ . É claro que  $a^2 = b^2 = (ab)^2$ , por definição de quaterniônico. Suponhamos  $a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1$ , então  $abab = 1 \Rightarrow ab = ba$  e  $Q$  é abeliano, contradição. Portanto,  $a^2 = b^2 \neq 1$ .

De  $(ab)^2 = a^2$ , temos:  $abab = a^2 \Rightarrow a^{-1}bab = 1 \Rightarrow a^{-1}ba = b^{-1}$ . (1)

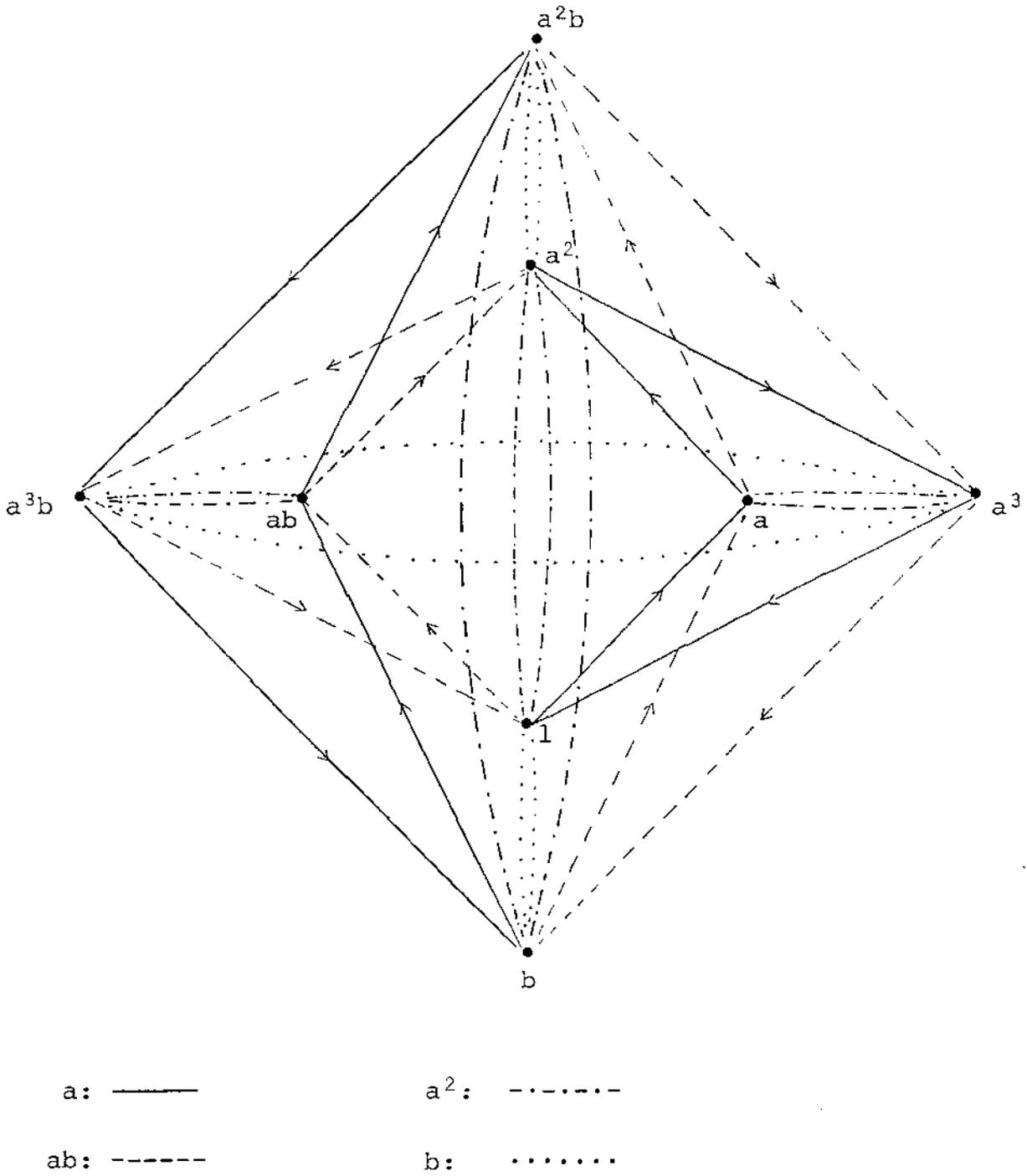


FIGURA 2: Um contra-exemplo para a demonstraçãõ original, sem a condiçãõ (b) no Teorema 1.

De  $(ab)^2 = b^2$ , temos:  $abab = b^2 \Rightarrow b^{-1}aba = 1 \Rightarrow b^{-1}ab = a^{-1}$ . (2)

Finalmente, de (1) e (2),

$$b^{-1} = a^{-1}ba = (b^{-1}ab)ba = b^{-1}ab^2a = b^{-1}a^4.$$

Assim,  $a^4 = 1$ .

Para provar a recíproca, suponhamos  $a^2 \neq 1 \neq b^2$ ,  $a^{-1}ba = b^{-1}$  e  $b^{-1}ab = a^{-1}$ . Então  $\langle a, b \rangle$  é não abeliano, pois  $ba = ab^{-1} \neq ab$ . Ainda,  $(ab)^2 = abab = a(ba)b = aab^{-1}b = a^2$ . Finalmente, de  $a^{-1}ba = b^{-1}$  e  $b^{-1}ab = a^{-1}$  vem  $b^{-1}abba = b^{-1}$ . Logo,  $b^2 = a^2$ . Portanto,  $\langle a, b \rangle \cong Q$ .  $\blacktriangle$

LEMA 9: Sejam  $a$  e  $b$  elementos de  $G$ , com  $a^2 \neq 1$ . Se  $a^{-1}ba = b^{-1}$  e  $b^{-1}ab \neq a^{-1}$  então:

(i)  $(ab)^2 \neq 1$ ,

(ii)  $a^{-1}(ab)a \neq (ab)^{-1}$ , e

(iii)  $(ab)^{-1}a(ab) \neq a^{-1}$ .

DEMONSTRAÇÃO: (i)  $(ab)^2 = abab = a^2(a^{-1}ba)b = a^2b^{-1}b = a^2 \neq 1$ .

(ii)  $a^{-1}(ab)a \neq (ab)^{-1}$ . De fato,

$$a^{-1}(ab)aab = baab = a(a^{-1}ba)ab = a(b^{-1}ab) \neq$$

$$\neq aa^{-1} = 1.$$

$$(iii) \quad (ab)^{-1}a(ab) = b^{-1}a^{-1}aab = b^{-1}ab \neq a^{-1}. \quad \blacktriangle$$

LEMA 10: Se  $\langle a,b \rangle \cong \langle b,c \rangle \cong \langle a,c \rangle \cong Q$  então:

$$(i) \quad (bc)^2 \neq 1,$$

$$(ii) \quad a^{-1}(bc)a \neq (bc)^{-1}, \quad e$$

$$(iii) \quad (bc)^{-1}a(bc) \neq a^{-1}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Usaremos o Lema 8 para os três grupos.

$$(i) \quad (bc)^2 \neq 1.$$

$$(ii) \quad a^{-1}(bc)a = a^{-1}baa^{-1}ca = (a^{-1}ba)(a^{-1}ca) = b^{-1}c^{-1} = \\ = (cb)^{-1} \neq (bc)^{-1}$$

pois  $\langle b,c \rangle \cong Q$  não é abeliano.

$$(iii) \quad (bc)^{-1}a(bc) = c^{-1}(b^{-1}ab)c = c^{-1}a^{-1}c = a \neq a^{-1}. \quad \blacktriangle$$

LEMA 11: Sejam  $a$  e  $b$  elementos de  $G$  tais que  $a^{-1}ba \neq b^{-1}$  e  $b^{-1}ab \neq a^{-1}$ . Então:

$$(i) \quad aba^{-1} \neq b^{-1} \quad e \quad b^{-1}a^{-1}b \neq a; \quad e$$

$$(ii) \quad (ab)^{-1}a(ab) \neq a^{-1}.$$

DEMONSTRAÇÃO: (i)  $aba^{-1} = a(b^{-1})^{-1}a^{-1} \neq a(a^{-1}ba)^{-1}a^{-1} =$   
 $= a(a^{-1}b^{-1}a)a^{-1} = b^{-1},$

$$b^{-1}a^{-1}b = (b^{-1}ab)^{-1} \neq (a^{-1})^{-1} = a.$$

(ii)  $(ab)^{-1}a(ab) = b^{-1}a^{-1}aab = b^{-1}ab \neq a^{-1}. \blacktriangle$

Finalmente podemos iniciar a demonstração propriamente dita do Teorema 2.

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $F = \{x \in G \mid x^2 = 1\}$ . Por hipótese,  $G \setminus F$  gera  $G$ . Seja  $d$  a cardinalidade mínima dos subconjuntos de  $G \setminus F$  que geram  $G$ . Seja  $H = \{h_1, \dots, h_d\}$  um conjunto gerador mínimo de  $G$ .

Por hipótese,  $G$  não é cíclico. Logo  $d \geq 2$ .

1º CASO:  $d = 2$  e  $G$  ABELIANO

Façamos  $j = 1$ . Provemos (a) e (b).

Se  $h_1^3 = h_2^3 = 1$  então  $G \cong Z_3^2$ , pelo Lema 12 abaixo. Logo, existe  $h_1 \in H$  tal que  $h_1^3 \neq 1$ ; permutamos  $h_1$  com  $h_2$ , se necessário, de forma a tornar (a) verdadeira.

Suponhamos  $h_1^2 = h_2^2$  ou  $h_1^2 = h_2^{-2}$ . Trocando  $h_2$  por  $h_2^{-1}$ ,

se necessário, obteremos  $h_1^2 = h_2^{-2}$  preservando a validade de (a). Ainda  $(h_1 h_2)^2 = h_1^2 h_2^2 = 1$  e pelo Lema 13, abaixo,  $G$  é cíclico ou isomorfo a  $Z_n \times Z_2$ . Portanto, (b) é válida, exceto nos casos acima.

As condições (c) e (d) são vacuosas com  $j = 1$ ; as condições (e) e (f) são trivialmente válidas, pois  $G$  é abeliano e  $H$  é livre de involuções.

LEMA 12: Seja  $G$  um grupo abeliano, não cíclico gerado por  $a$  e  $b$ , onde  $o(a) = o(b) = 3$ . Então  $G \cong Z_3^2$ .

LEMA 13: Seja  $G = \langle a, b \rangle$  um grupo abeliano tal que  $a^2 b^2 = 1$  então  $G$  é cíclico ou isomorfo a  $Z_m \times Z_2$ .

Para completar a demonstração do 1º Caso, resta demonstrar os Lemas 12 e 13.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 12: Se  $a^3 = b^3 = 1$ , então

$$G \subseteq \{a^i b^j \mid 0 \leq i, j < 3, a^3 = 1 = b^3, ab = ba\} \quad (1)$$

Logo,  $\# G \leq 9$ . Como  $a^3 = 1$ , então,  $3 \mid \# G$  e portanto,  $\# G$  é 3, 6 ou 9. Se  $\# G$  é 3 ou 6,  $G$  é cíclico. Assim,  $\# G$  é 9 e a igualdade vale em (1), com  $G \cong Z_3^2$ .  $\blacktriangle$

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 13: Observemos que

$$G \subseteq \{a^i b^j \mid 0 \leq i < m, 0 \leq j < 2, ab = ba\} \quad (1)$$

Logo,  $\#G \leq 2m$ . Mas, se  $\langle a \rangle \cap \langle a \rangle b \neq \emptyset$  então  $G = \langle a \rangle$ , isto é,  $G$  é cíclico. Se  $\langle a \rangle \cap \langle a \rangle b = \emptyset$  então  $\#G \geq 2m$ . Portanto, vale a igualdade em (1). Assim,  $G \cong Z_m \times Z_2$  onde  $f: G \rightarrow Z_m \times Z_2$  é o isomorfismo dado por  $f(a^i b^j) = (a^{i-j}, (ab)^j)$ , com  $\langle a \rangle = Z_m$  e  $\langle ab \rangle = Z_2$ . ▲

Estas demonstrações completam o 1º Caso.

## 2º CASO: $d = 2$ e $G$ NÃO É ABELIANO

Consideremos as desigualdades

$$h_2^{-1} h_1 h_2 \neq h_1^{-1} \quad (1)$$

e

$$h_1^{-1} h_2 h_1 \neq h_2^{-1} \quad (2)$$

Por hipótese,  $G \neq Q$  e  $h_1^2 \neq 1 \neq h_2^2$ . Pelo Lema 8, pelo menos uma de (1) e (2) vale. Pelo Lema 9, podemos supor que ambas valem, substituindo, se necessário,  $h_1$  por  $h_2 h_1$  ou  $h_2$  por  $h_1 h_2$ .

Se  $o(h_2) \neq 4$  ou se  $h_1^2 \neq h_2^{-2}$ , então podemos supor que  $h_1^2 \neq h_2^{-2}$ , substituindo, se necessário,  $h_2$  por  $h_2^{-1}$ : as desigualdades (1) e (2) se preservam, pelo Lema 11(i).

Nesse caso, faremos  $j = 2$ . As condições (a) e (b) são vacuosas, (c) válida por hipótese, (d) também, (e) e (f) são (1) e (2), respectivamente.

Podemos então supor que  $h_1^2 = h_2^2 = h_2^{-2}$  e  $h_1^4 = 1$ . De  $h_1^2 = h_2^2$  temos que ambos comutam com  $h_1$  e com  $h_2$ . Assim,

$$(h_1^{-1}h_2)^3 = (h_1^{-2}h_1h_2)^3 = (h_1^{-2})^3 \cdot (h_1h_2)^3 = h_1^2(h_1h_2)^3.$$

Como  $h_1^2 \neq 1$ , então ou  $(h_1^{-1}h_2)^3 \neq 1$  ou  $(h_1h_2)^3 \neq 1$ . Pelo Lema 11(i), trocando  $h_1$  por  $h_1^{-1}$  se necessário, podemos supor que  $(h_1h_2)^3 \neq 1$ , preservadas (1) e (2), e também  $h_1^4 = 1$  e  $h_1^2 = h_2^2$ .

Vamos agora substituir  $h_1$  por  $h_1h_2$  e fazer  $j = 1$ . Pelo Lema 13, abaixo,  $h_1h_2$  não é involução. Pelo Lema 11(ii), (2) é preservada, mas não (1). Provemos (a) - (f).

A propriedade (a) já verificamos que vale. A propriedade (b) também: se  $(h_1h_2)^2 = h_2^{\pm 2} = h_2^2$  então  $G$ , o grupo  $\langle h_1, h_2 \rangle$ , é isomorfo a  $Q$ , pelo Lema 8. De fato, (b) vale. As propriedades (c) e (d) são vacuosas. A propriedade (e) é trivial, pois  $j = 1$ . A propriedade (f) segue do Lema 11(ii).

A demonstração do Lema 14 abaixo, conclui a demonstração do 2º Caso.

LEMA 14: Sejam  $a^2 = b^2$ ,  $a^4 = 1$ ,  $(ab)^2 = 1$ , então  $\langle a, b \rangle$  é abeliano.

DEMONSTRAÇÃO: Por hipótese,  $abab = 1$ . Ainda,  $abba = a(bb)a = aa^2a = a^4 = 1$ . Destas duas igualdades temos:  $ab = ba$ , logo,  $\langle a, b \rangle$  é abeliano. ▲

### 3º CASO: $d = 3$

Pelos Lemas 8 e 10, podemos supor que pelo menos um de  $\langle h_1, h_2 \rangle$ ,  $\langle h_1, h_3 \rangle$  e  $\langle h_2, h_3 \rangle$  é não quaterniônico. Suponhamos que existe exatamente dois quaterniônicos. Ajustamos a notação a fim de que  $\langle h_1, h_2 \rangle \cong \langle h_1, h_3 \rangle \cong Q \neq \langle h_2, h_3 \rangle$ . Assim, pelo Lema 8, trocando  $h_2$  com  $h_3$ , se necessário,  $h_2^{-1}h_3h_2 \neq h_3^{-1}$ . Portanto (f) é verdadeira.

Seja  $h_2 := h_2h_3$  e  $j = 2$ , então (a) a (d) são vacuosas. Ainda, se  $(h_2h_3)^2 = 1$ , pelo Lema 14,  $\langle h_2, h_3 \rangle$  é abeliano. Portanto, pelo Lema 15, abaixo,  $G \cong Q \times Z_2$ . Logo,  $(h_2h_3)^2 \neq 1$ . Provemos (e) e (f).

$$(e) \quad (h_2h_3)^{-1}h_1(h_2h_3) = h_3^{-1}(h_2^{-1}h_1h_2)h_3 = h_3^{-1}h_1^{-1}h_3 = h_1 \neq h_1^{-1}.$$

$$(f) \quad (h_2h_3)^{-1}h_3(h_2h_3) = h_3^{-1}(h_2^{-1}h_3h_2)h_3 \neq h_3^{-1}h_3^{-1}h_3 = h_3^{-1}.$$

Suponhamos, agora, que no máximo um de  $\langle h_1, h_2 \rangle$ ,  $\langle h_1, h_3 \rangle$  e  $\langle h_2, h_3 \rangle$  é quaterniônico. Ajustemos a notação para obtermos  $\langle h_1, h_2 \rangle \neq Q \neq \langle h_2, h_3 \rangle$ .

Seja  $j = 2$ , então (a), (b), (c) e (d) são vacuosas. Prove mos (e) e (f).

(e) Suponhamos que  $h_2^{-1}h_1h_2 = h_1^{-1}$ . Então, do Lema 8,  $h_1^{-1}h_2h_1 \neq h_2^{-1}$  e portanto, do Lema 9,  $h_2^{-1}(h_1h_2)h_2 \neq (h_1h_2)^{-1}$ ,  $(h_1h_2)^2 \neq 1$  e assim, podemos substituir  $h_1$  por  $h_1h_2$ , se ne-  
cessário.

(f) Suponhamos que  $h_2^{-1}h_3h_2 = h_3^{-1}$ . Analogamente ao caso anterior, substituímos  $h_3$  por  $h_2h_3$ . Agora valem (a) até (f) e  $H$  é livre de involuções.

A demonstração do Lema 15, abaixo, completa a demonstração do 3º Caso.

LEMA 15: Seja  $G = \langle a, b, c \rangle$  tal que  $\langle a, b \rangle \cong \langle a, c \rangle \cong Q$  e  $(bc)^2 = 1$ . Então  $G \cong Q \times Z_2$ .

DEMONSTRAÇÃO: Do Lema 14,  $\langle b, c \rangle$  é abeliano. Então

$$G \subseteq \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i < 4, 0 \leq j, k < 2, a^2 = b^2 = c^2,$$

$$a^4 = 1, ba = a^{-1}b, ca = a^{-1}c, bc = cb\} \quad (1)$$

Assim,  $n = \# G \leq 16$ , Mas  $\langle a, b \rangle \cap \langle a, b \rangle c = \emptyset$  pois caso con-  
trário,  $G = \langle a, b \rangle$ . Analogamente,  $\langle a \rangle \cap \langle a \rangle b = \emptyset$ , portanto,  
 $\# \langle a, b \rangle = 8$ ; logo,  $n = 16$  e a igualdade em (1) vale.

A função  $f : G \rightarrow Q \times Z_2$  definida por  $f(a^i b^j c^k) = (a^i b^{j-k}, (bc)^k)$  é um isomorfismo de  $G$  em  $Q \times Z_2$ .  $\Delta$

4º CASO:  $d \geq 4$

Pelos Lemas 8 e 10, podemos supor que nem todos os três grupos  $\langle h_1, h_{d-1} \rangle$ ,  $\langle h_1, h_d \rangle$  e  $\langle h_{d-1}, h_d \rangle$  são o grupo  $Q$ . Permutemos  $h_1, h_{d-1}$  e  $h_d$  conforme a necessidade, de forma que

$$\langle h_{d-1}, h_d \rangle \neq Q \quad (1)$$

Analogamente, substituindo  $h_1$  por  $h_2 h_1$  se necessário, podemos supor, pelos Lemas 8 e 10, que nem todos os três grupos  $\langle h_1, h_2 \rangle$ ,  $\langle h_1, h_{d-1} \rangle$  e  $\langle h_2, h_{d-1} \rangle$  são o grupo  $Q$ . Se  $\langle h_1, h_2 \rangle \neq Q$ , façamos  $j = 2$ . Se  $\langle h_1, h_{d-1} \rangle \neq Q$  ou se  $\langle h_2, h_{d-1} \rangle \neq Q$ , façamos  $j = d - 1$  e permutemos  $h_1$  com  $h_2$  se necessário, de forma que  $\langle h_1, h_{d-1} \rangle \neq Q$ . Em todos os casos, (1) vale e valem também

$$\langle h_1, h_j \rangle \neq Q \quad (2)$$

e

$$2 \leq j \leq d - 1 \quad (3)$$

De (2), pelo Lema 9, podemos supor que (e) vale, substituindo  $h_1$  por  $h_j h_1$ , se necessário. De (1), podemos supor que

(f) vale, substituindo  $h_d$  por  $h_{d-1}h_d$ , se necessário. Finalmente, de (3), (a), (b), (c) e (d) são vacuas.

A demonstração do 4º Caso, completa a demonstração do Teorema 2. ▲

TEOREMA 3: Os grupos  $Z_n$ ,  $Z_m \times Z_2$  ( $m > 2$ ) e  $Q \times Z_2$ , têm representações regulares gráficas orientadas.

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $Z_n = \langle a \rangle$ . Do teorema da condição suficiente para RRGO (seção 3) segue que  $X_{\langle a \rangle, \{a\}}$  é uma RRGO para  $Z_n$ .

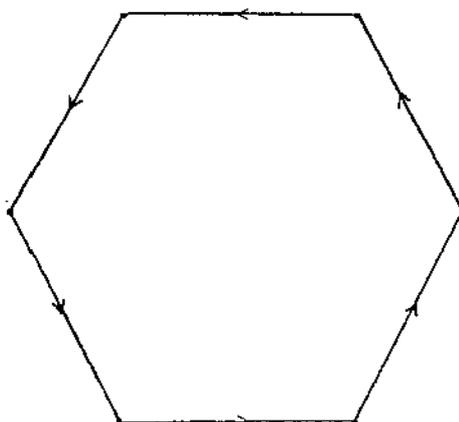


FIGURA 3: Uma RRGO para  $Z_6$ .

Seja  $G \cong Z_m \times Z_2$  ( $m > 2$ ) e  $H = \{a, b\}$  onde  $\langle a \rangle = Z_m$  e  $\langle b \rangle = Z_2$ . Então  $X_{G,H}$  é uma RRG de  $G$ . De fato, os únicos vértices adjacentes a  $1$  são  $a$ ,  $a^{-1}$  e  $b$ :  $(1,a)$  e  $(1,b)$  são as únicas arestas que saem de  $1$ ,  $(a^{-1},1)$  e  $(b,1)$  são as únicas arestas que chegam em  $1$  e  $a \neq a^{-1}$ , pois  $m > 2$  (Figura 4). Assim, todo  $\varphi$  em  $\text{Aut}_1 X$  fixa  $a$  e fixa  $b$ . Pelo teorema da condição suficiente para RRG,  $X_{G,H}$  é uma RRG de  $Z_m \times Z_2$ .

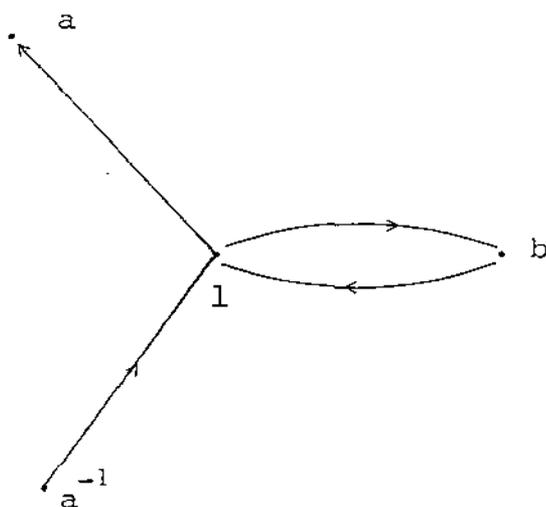


FIGURA 4: As adjacências de  $1$  para uma RRG de  $Z_m \times Z_2$  ( $m > 2$ ).

Seja  $G \cong Q \times Z_2$ , com  $Q = \langle a, b \rangle$  e  $Z_2 = \langle c \rangle$ , onde  $a^2 = b^2 = (ab)^2$ . Por simplicidade, denotaremos  $(a, 1)$ ,  $(b, 1)$  e  $(1, c)$  por  $a$ ,  $b$  e  $c$  respectivamente. Seja  $H = \{a, b, c, ab, abc\}$ . Consideremos o subgrafo  $Y$  de  $X_{G,H}$  gerado por  $H$  (Figura 5).

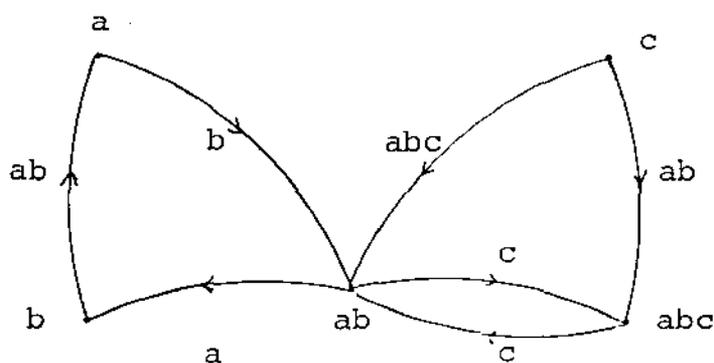


FIGURA 5: O subgrafo  $Y$  de  $X_{G,H}$  gerado por  $H$ , onde

$$G \cong \langle a, b \rangle \times \langle c \rangle \quad e$$

$$H = \{a, b, c, ab, abc\}.$$

Seja  $\varphi$  um automorfismo de  $X_{G,H}$  que fixa  $1$ . Então,  $\varphi(H) = H$ . Mais ainda,  $c$ ,  $ab$  e  $abc$  estão fixos pois  $c$  é a única fonte de  $Y$  e  $ab$  é o único vértice incidente a 5 arestas,  $abc$  o único a 3 arestas. Segue que  $a$  e  $b$  também estão fixos. De fato,  $\text{Aut } Y = \{1\}$ . Pelo teorema da condição suficiente para RRG,  $X_{G,H}$  é uma RRG de  $Q \times Z_2$ .  $\blacktriangle$

Com os Teoremas 2 e 3 demonstrados, atingimos o objetivo desta seção, a saber

COROLÁRIO: Todo grupo gerado por seus elementos de ordem maior do que 2 e distinto de  $Z_3^2$  e de  $Q$  tem uma RRG0.

## 7. REPRESENTAÇÕES REGULARES GRÁFICAS ORIENTADAS PARA OS GRUPOS DIEDRAIS GENERALIZADOS NÃO ABELIANOS

Na Seção 5, demonstramos o Teorema 5.1. Para qualquer grupo  $G$  de ordem maior do que 2, precisamente uma das seguintes afirmações ocorre:

- (i)  $G$  é gerado por seus elementos de ordem maior do que 2;
- (ii)  $G$  é o grupo diedral generalizado cujo núcleo é gerado por seus elementos de ordem maior do que 2;
- (iii)  $G$  é um  $Z_2^n$ .

Na Seção 6, demonstramos que todo grupo não diedral generalizado, distinto de  $Z_3^2$  e  $Q$ , admite uma RRG0.

Nesta Seção demonstraremos o seguinte resultado:

TEOREMA: Seja  $G$  um grupo diedral generalizado (de ordem maior do que 2) cujo núcleo  $A$  é gerado por seus elementos de ordem maior do que 2. Então  $G$  admite uma RRG0.

A demonstração está dividida em três Lemas:

LEMA 1: Se  $A$  admite uma RRG0  $X_{A,H}$  com  $H \setminus H^{-1}$  gerador de  $A$  então  $G$  admite uma RRG0.

LEMA 2: Se  $A \cong Z_3^2$  então  $G$  admite uma RRG0.

LEMA 3: Se  $A \cong Z_m \times Z_2$  ( $m > 2$ ) então  $G$  admite uma RRG0.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA:

1º CASO:  $A$  é distinto de  $Z_3^2$ , de  $Q$ , de  $Z_n$ , de  $Z_n \times Z_2$  e de  $Q \times Z_2$ .

Pelos Teoremas 6.1 e 6.2,  $A$  tem um gerador  $H$  livre de involuções tal que  $X_{A,H}$  representa  $A$ . Pelo Lema 1,  $G$  tem uma RRG0.

2º CASO:  $A$  é  $Z_n$  ( $n > 2$ ).

Pela demonstração do Teorema 6.3 (caso  $G \cong Z_n$ ),  $X_{\langle a \rangle, \{a\}}$  representa  $Z_n$ , e  $\{a\}$  não é involutivo. Novamente pelo Lema 1,  $G$  tem uma RRG0.

3º CASO: Nenhum dos anteriores.

Pela definição de núcleo,  $A$  é abeliano, logo  $A$  não é nem  $Q$  nem  $Q \times Z_2$ . Logo, ou  $A$  é  $Z_3^2$  ou  $Z_n \times Z_2$  e, em ambos os casos,  $G$  tem uma RRG0, pelos Lemas 2 ou 3.

A demonstraçãõ do teorema de fato se reduz à demonstraçãõ dos Lemas 1, 2 e 3.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 1: Suponhamos que  $A$  admite uma RRG0  $X_{A,H}$  com  $H \setminus H^{-1}$  gerador de  $A$ . Sejam  $b \in G \setminus A$  e  $S = H \cup \{b\}$ . Entãõ  $S \setminus S^{-1} = H \setminus H^{-1}$ , pois  $b^2 = 1$ . Mostremos que  $Y = X_{G,S}$  é uma RRG0 de  $G$ .

Sendo  $G$  diedral generalizado, o índice de  $A$  em  $G$  é 2 e portanto  $G \setminus A = bA = Ab$ . Ainda, os elementos de  $A$  sãõ ligados a elementos de  $Ab$  somente atravẽs de arestas da cor em  $S \cap Ab = S \cap bA$ , isto é, arestas da cor  $b$ . Como  $b^2 = 1$ , tais arestas aparecem em pares de arestas antiparalelas, isto é pares da forma  $\{(x,y), (y,x)\}$ .

Seja  $\varphi$  um automorfismo de  $Y$  que fixa 1.

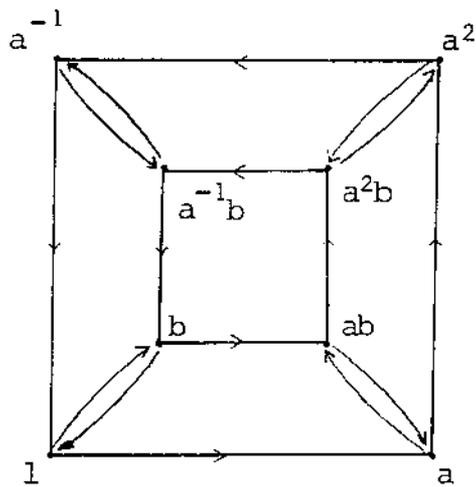
Seja  $Z$  o grafo  $X_{G,S \setminus S^{-1}} = X_{H,H \setminus H^{-1}}$ . Assim,  $Z$  pode ser obtido a partir de  $Y$  pela remoçãõ de todos os pares de arestas antiparalelas, inclusive todas as arestas de cor  $b$ . Logo  $Z$  é desconexo: nenhum vẽrtice de  $A$  é ligado a vẽrtice de  $Ab$ . Mais ainda, pelo Lema 2.3.5 o subgrafo  $X_{A,H \setminus H^{-1}}$  de  $Z$  é fortemente conexo, pois  $H \setminus H^{-1}$  gera  $A$ . Logo,  $X_{A,H \setminus H^{-1}}$  é uma das componentes de  $Z$ , é a componente que contẽm o vẽrtice 1.

Por outro lado, da hipõtese sobre  $\varphi$  e da definiçãõ de  $Z$  segue que  $\varphi$  é um automorfismo de  $Z$  que fixa 1. Logo,  $\varphi(A) = A$ .

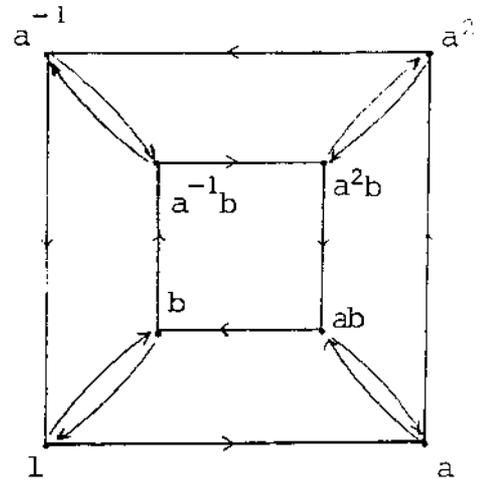
Consideremos a restrição  $\varphi|_A$  de  $\varphi$  a  $A$ . Como  $\varphi(A) = A$  e  $\varphi$  é um automorfismo de  $Y$ , então  $\varphi|_A$  é um automorfismo do subgrafo de  $Y$  gerado por  $A$ , a saber,  $X_{A,H}$ . Mais ainda,  $\varphi|_A$  fixa  $1$ . Sendo  $X_{A,H}$  uma RRG0 de  $A$ , pela definição de grupo f.l.p.f.,  $\varphi|_A = 1$ .

Assim,  $\varphi$  fixa cada elemento de  $A$ ; em particular, fixa cada vértice de  $A$  adjacente a  $1$  em  $Y$ . Como  $b$  é o único vértice adjacente a  $1$  que não pertence a  $A$ ,  $\varphi$  fixa  $b$  também. Logo,  $\varphi$  fixa cada elemento de  $S$ . Como esta conclusão vale para cada  $\varphi$  em  $\text{Aut}_1 Y$  e como  $G = \langle S \rangle$ , então  $Y$ , isto é,  $X_{G,S}$ , é uma RRG0 de  $G$ .  $\blacktriangle$

É interessante observar (ainda na notação do Lema 1) que se  $(a_1, a_2) \in AX_{A,H}$  então  $(a_2b, a_1b) \in AY$ . De fato, se  $(a_1, a_2) \in AX_{A,H}$ , existe  $h \in H$  tal que  $a_1h = a_2$ . Logo,  $a_2bh = a_2h^{-1}b = a_1b$ , ou seja,  $(a_2b, a_1b) \in AY$ . Este fato, fica evidenciado nos exemplos da Figura 1 que nos permitem comparar a RRG0 de  $Z_4 \times Z_2$  com a do diedral generalizado do núcleo  $Z_4$ .



RRGO de  $Z_4 \times Z_2$   
 $X_{G,\{a,b\}}$



RRGO do diedral gene  
ralizado de núcleo  $Z_4$   
 $X_{G,\{a,b\}}$

FIGURA 1: Uma comparação entre as representações de  $Z_4 \times Z_2$  e do diedral de núcleo  $Z_4$ .

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2: Sejam  $A = \langle a, b \rangle \cong Z_3^2$  e  $c \in G \setminus A$ . Seja  $H = \{ca, ca^{-1}, cb, ab\}$ . Consideremos o subgrafo  $Y$  de  $X = X_{G,H}$  gerado por  $H$ .

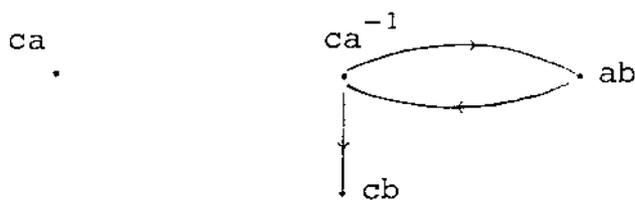


FIGURA 1: O subgrafo  $Y$  de  $X$  gerado por  $H$ .

Seja  $\varphi \in \text{Aut}_1 X$ . Então  $\varphi(H) = H$ . Mais ainda,  $ca, ca^{-1}, cb$  e  $ab$  estão fixos, pois  $ca$  é o único vértice isolado de  $Y$ ,  $ca^{-1}$  é o único adjacente a três arestas, enquanto  $ab$ , a duas arestas e  $cb$  a uma aresta (Figura 1). Portanto  $\text{Aut} Y = \{1\}$ . Pelo teorema da condição suficiente para RRG0,  $X_{G,H}$  é uma RRG0 de  $G$ .  $\blacktriangle$

**DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 3:** Sejam  $A = \langle a, b \rangle \cong Z_m \times Z_2$ , onde  $\langle a \rangle = Z_m$ ,  $\langle b \rangle = Z_2$  e  $c \in G \setminus A$ . Consideremos  $H = \{a, b, c\}$ . Observe mos que  $b$  e  $c$  possuem ordem 2,  $a$ , ordem par:  $m > 2$ .

Formemos  $X_{G,H}$  e seja  $\varphi \in \text{Aut}_1 X_{G,H}$ . Então  $\varphi(H) = H$ .

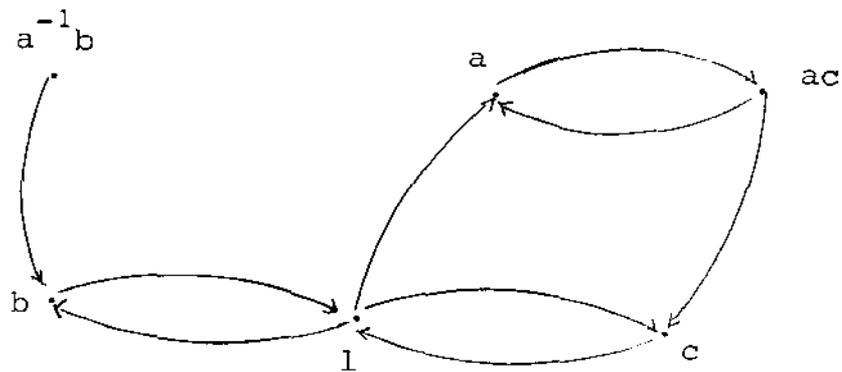


FIGURA 2: Alguns vértices adjacentes aos geradores  $a, b$  e  $c$ .

Suponhamos que  $\varphi|_H$  não é a identidade. Então  $b$  e  $c$  permutam e  $a$  está fixo. Se  $b$  e  $c$  permutam então  $a^{-1}b$  e  $ac$  também, pois são vértices adjacentes a  $b$  e a  $c$  respectivamente

com incidência de mesmo sentido. Mas,  $a^{-1}b$  não é adjacente a  $a$  e  $ac$  o é. De fato, pois caso contrário  $a^{-1}bx = a$  ou  $ax = a^{-1}b$ , então,  $x = a^{\pm 2}b$ ; como  $m > 2$ ,  $x \notin H$ .

Logo,  $\varphi|_H = 1$ . Como  $\langle H \rangle = G$  então  $X_{G,H}$  é uma RRG0 de  $G$ .  $\blacktriangle$

## 8. RESULTADOS NEGATIVOS: $Z_3^2$ e $Q$ .

Nesta Seção analisaremos os grupos gerados pelos seus elementos de ordem maior do que 2 e que não têm uma RRG0, a saber,  $Z_3^2$  e  $Q$ .

Do teorema da condição necessária para RRG0, temos que se para todo conjunto gerador  $H$  de um grupo  $G$ , existir  $\varphi \in \text{Aut } G - 1$  tal que  $\varphi(H) = H$  então  $G$  não possui uma RRG0.

Provaremos, tanto para  $G = Z_3^2$  como para  $G = Q$ , que para todo subconjunto  $H$  de  $G$ , gerador ou não de  $G$ , existe um automorfismo  $\varphi$  de  $G$  não idêntico e que fixa  $H$ . Removida a restrição de  $H$  ser gerador, podemos supor que  $0 < \# H \leq \# G / 2$ , complementando  $H$ , se necessário. Ainda, como todo automorfismo  $\varphi$  fixa a identidade, podemos supor que  $1 \notin H$ . Assim, podemos supor que  $0 < \# H < \# G / 2$ , pois se  $\# G$  for par e  $\# H = \# G / 2$  podemos complementar  $H$  e/ou remover o elemento 1.

**TEOREMA:** Sejam  $G$  um dos grupos  $Z_3^2$  ou  $Q$ ,  $H$  um subconjunto de  $G$  tal que  $1 \notin H$  e  $0 < \# H < \# G / 2$ . Então existe um automorfismo  $\varphi$  de  $G$  tal que  $\varphi \neq 1$  e  $\varphi(H) = H$ .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $G = Z_3^2$ . Neste caso,  $1 \leq \# H \leq 4$ .

Listaremos abaixo os possíveis  $H$ , a menos de automorfismos, e os automorfismos de  $G$  correspondentes, onde  $Z_3^2 = \langle a, b \rangle$ , com  $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle \cong Z_3$ .

O CONJUNTO H	AUTOMORFISMO CORRESPONDENTE
<u># H = 4</u> $a, b, a^{-1}, b^{-1}$	$\varphi(a) = b, \varphi(b) = a$
$a, b, a^{-1}, ab$	$\varphi(a) = a^{-1}, \varphi(b) = ab$
$a, b, a^{-1}, ab^{-1}$	$\varphi(a) = a, \varphi(b) = ab^{-1}$
$a, b, ab, a^{-1}b$	$\varphi(a) = a, \varphi(b) = ab$
<u># H = 3</u> $a, b, a^{-1}$	$\varphi(a) = a^{-1}, \varphi(b) = b$
$a, b, ab$	$\varphi(a) = b, \varphi(b) = a$
$a, b, a^{-1}b^{-1}$	$\varphi(a) = b, \varphi(b) = a$
<u># H = 2</u> $a, b$	$\varphi(a) = b, \varphi(b) = a$
$a, a^{-1}$	$\varphi(a) = a^{-1}, \varphi(b) = b$
<u># H = 1</u> $a$	$\varphi(a) = a, \varphi(b) = b^{-1}$

Em todos os casos, existe  $\varphi$  em  $\text{Aut } G - 1$  que fixa  $H$ .

Vamos agora analisar  $G = Q = \langle a, b \rangle$ , com  $a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1$  e  $a^4 = 1$ . Podemos então supor que  $1 \leq \# H \leq 3$ . Podemos ainda supor que  $a^2 \notin H$ , pois  $\varphi(a^2) = a^2$  para todo  $\varphi \in \text{Aut } G$ , uma vez que  $a^2$  é o único elemento de  $Q$  de ordem 2.

Listamos abaixo os possíveis  $H$  a menos de automorfismos, e os respectivos automorfismos  $\varphi$ :

O CONJUNTO H	AUTOMORFISMO CORRESPONDENTE
<u># H = 3</u> a, b, ab	$\varphi(a) = b, \varphi(b) = a$
a, b, a <sup>-1</sup>	$\varphi(a) = a^{-1}, \varphi(b) = b$
<u># H = 2</u> a, b	$\varphi(a) = b, \varphi(b) = a$
a, a <sup>-1</sup>	$\varphi(a) = a^{-1}, \varphi(b) = b$
<u># H = 1</u> a	$\varphi(a) = a, \varphi(b) = b^{-1}$

De fato, nem  $Z_3^2$  nem  $Q$  admitem uma RRG. ▲

Com a demonstração do teorema fica demonstrado:

**COROLÁRIO:** Se  $G \not\cong Z_2^n$  então  $G$  tem uma RRG se, e somente se  $G \not\cong Z_3^2$  e  $G \not\cong Q$ .

No próximo Capítulo estudaremos os grupos  $Z_2^n$ .

## CAPÍTULO 4

### OS GRUPOS $Z_2^n$

#### 1. INTRODUÇÃO

Neste Capítulo concluiremos o estudo das representações regulares gráficas orientadas. No Capítulo 3 mostramos que todos os grupos não isomorfos a  $Z_2^n$  admitem uma RRG, exceto o  $Z_3^2$  e o quaterniônico. Neste Capítulo mostraremos que todos os  $Z_2^n$  admitem representações regulares gráficas orientadas exceto  $Z_2^2$ ,  $Z_2^3$  e  $Z_2^4$ .

Terminaremos o trabalho demonstrando inicialmente que  $Z_2^n$   $n \geq 6$  admite uma RRG. Analisaremos em seguida o caso especial do grupo  $Z_2^5$ . Finalmente, demonstramos que nem  $Z_2^2$ , nem  $Z_2^3$ , nem  $Z_2^4$  admitem RRG. Os grupos  $Z_2^0$  e  $Z_2^1$ , cíclicos, admitem RRG (Teorema 3.6.3).

Cabem aqui duas observações importantes:

(i) a toda RRG corresponde uma RRG, (simplesmente substituindo cada aresta não orientada por um par de arestas antiparalelas),

(ii) para os grupos  $G = Z_2^n$  todo subconjunto  $H$  de  $G$  satisfaz  $H = H \cup H^{-1}$ . Assim, a toda RRG de  $G$  corresponde uma RRG de  $G$ , simplesmente substituindo cada par de arestas antiparalelas

por uma aresta não orientada.

COROLÁRIO: Seja  $G$  um grupo  $Z_2^n$ . Então  $G$  admite uma RRG, se, e somente se  $G$  admite uma RRG0.

COROLÁRIO: Seja  $G$  um grupo  $Z_2^n$ . Então  $G$  admite uma RRG0 se, e somente se  $n \leq 1$  ou  $n \geq 5$ .

## 2. OS GRUPOS $Z_2^n$ , $n \geq 6$

TEOREMA: Sejam  $n \geq 6$ ,  $h_1, h_2, \dots, h_n$  geradores de  $Z_2^n$  e

$$H = \{h_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{h_k h_{k+1} \mid 1 \leq k < n\} \cup \\ \{h_1 h_2 h_{n-2} h_{n-1}, h_1 h_2 h_{n-1} h_n\}.$$

Então  $X = X_{Z_2^n, H}$  é uma RRG para  $Z_2^n$ .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $X_H$  o subgrafo de  $X$ ,  $n \geq 6$ , gerado por  $H$ . Seja  $\varphi \in \text{Aut}_1 X$ . Então  $\varphi(H) = H$ . Mostremos que  $\varphi = 1$ .

Observando as adjacências de cada vértice de  $X_H$ , temos que:

(i)  $h_1 h_2$  é o único vértice de grau 6,

(ii)  $h_{n-2}h_{n-1}$  é o único vértice cujos adjacentes têm graus 6, 4, 4 e 2. Logo  $\varphi$  fixa  $h_1h_2$  e  $h_{n-2}h_{n-1}$ . Consequentemente fixa também  $h_1h_2h_{n-2}h_{n-1}$ , o único adjacente comum a  $h_1h_2$  e a  $h_{n-2}h_{n-1}$ .

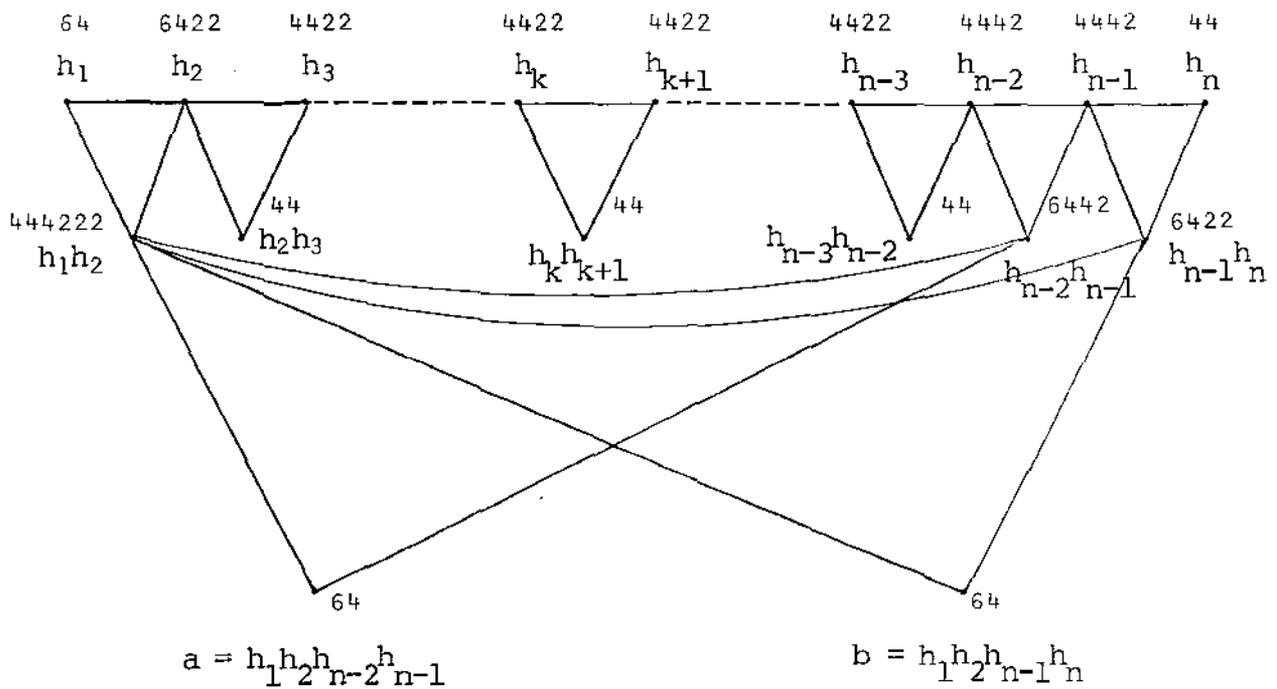


FIGURA 1: O subgrafo  $X_H$  de  $X_{\mathbb{Z}_2, H}^n$  gerado por  $H$ ,  
 (os números ao lado de cada vértice indicam os graus dos adjacentes).

Como  $\text{Adj } h_{n-2}h_{n-1} = \{h_1h_2, h_1h_2h_{n-2}h_{n-1}, h_{n-2}, h_{n-1}\}$   
 (Figura 2) e  $\varphi$  fixa  $h_{n-2}h_{n-1}$  e seus adjacentes  $h_1h_2$  e  
 $h_1h_2h_{n-2}h_{n-1}$ , temos: ou

$$(1) \quad \varphi(h_{n-1}) = h_{n-2} \quad \text{e} \quad \varphi(h_{n-2}) = h_{n-1} \quad \text{ou}$$

$$(2) \quad \varphi(h_{n-1}) = h_{n-1} \quad \text{e} \quad \varphi(h_{n-2}) = h_{n-2}.$$

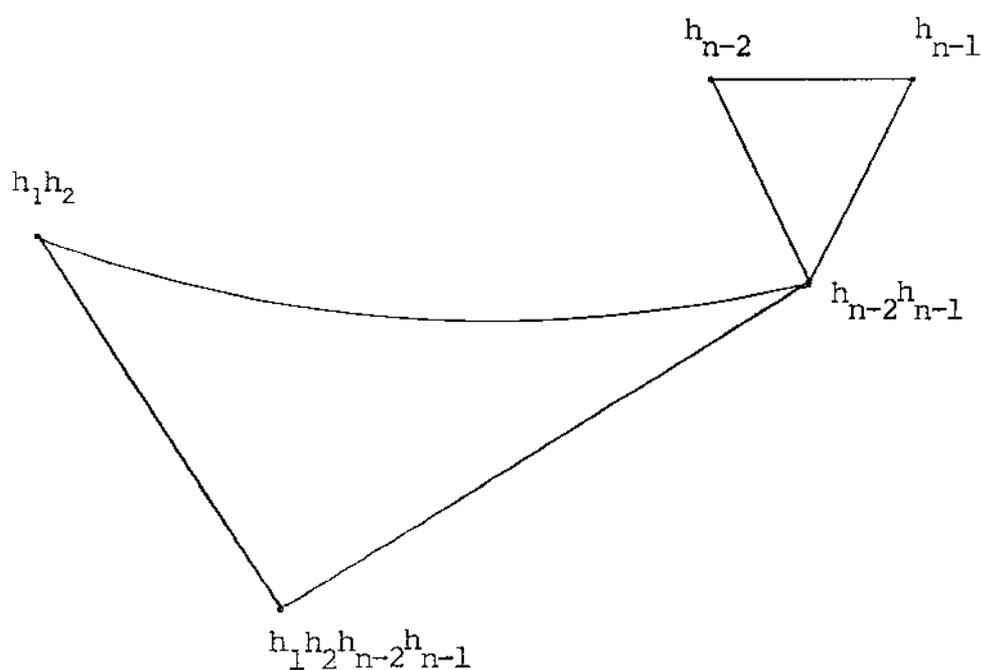


FIGURA 2: O vértice  $h_{n-2}h_{n-1}$  e seus adjacentes.

Vamos mostrar que (1) é impossível. Se  $\varphi$  permutar  $h_{n-1}$  com  $h_{n-2}$ ,  $\varphi$  permutará  $h_n$  com  $h_{n-3}h_{n-2}$  e  $h_{n-1}h_n$  com  $h_{n-3}$ . Absurdo, pois os adjacentes de  $h_{n-1}h_n$  e  $h_{n-3}$  possuem graus diferentes: 6, 4, 2, 2 e 4, 4, 2, 2 respectivamente. Logo ocorre (2).

Agora, os outros dois adjacentes de  $h_{n-2}$ , a saber  $h_{n-3}$  e  $h_{n-3}h_{n-2}$ , têm graus distintos, logo,  $\varphi$  os fixa. Usando este argumento para  $h_{n-1}, h_{n-3}, h_{n-4}, \dots, h_2$  temos que  $\varphi$  fixa  $h_n, h_{n-4}, h_{n-5}, \dots, h_1$  e também  $h_{n-1}h_n, h_{n-4}h_{n-3}, h_{n-5}h_{n-4}, \dots, h_2h_3$ . Finalmente,  $b$ , o último vértice de  $X_H$  também está fixo. Portanto,  $\varphi$  fixa cada elemento de  $H$ . Como esta conclusão vale para cada  $\varphi$  em  $\text{Aut}_1 X$ , então, pelo teorema da condição suficiente para RRG,  $X$  é uma RRG para  $Z_2^n$ ,  $n \geq 6$ . ▲

### 3. O GRUPO $Z_2^5$

Vamos agora mostrar que se aplicarmos a demonstração do teorema da Seção anterior para  $Z_2^5$  o subgrafo  $X_H$  gerado por  $H$  não é totalmente assimétrico. De fato, observando a Figura 1 vemos que

$$\varphi = (h_3 h_4)(h_5 h_2 h_3)(h_2 h_4 h_5)(h_1 h_1 h_2 h_4 h_5)$$

é um automorfismo de  $X_H$ .

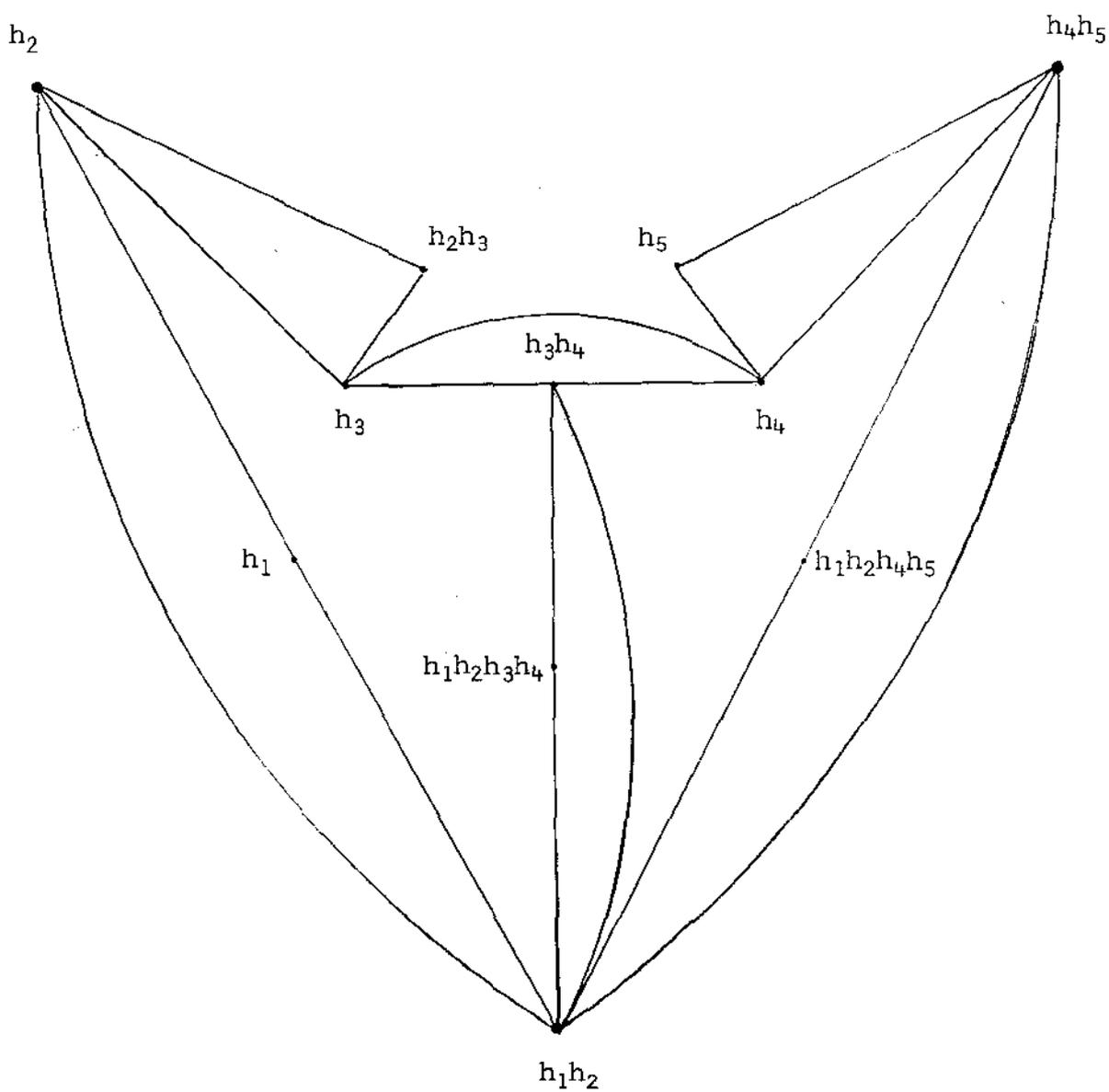


FIGURA 1: O subgrafo  $X_H$ , gerado por  $H$ , do grafo  $X$  que seria obtido na seção anterior, para o grupo  $Z_2^5$ .

Mas,  $Z_2^5$  admite uma RRG, pois é possível encontrar um conjunto  $H$  gerador de  $Z_2^5$  tal que  $X = X_{Z_2^5, H}$  é uma RRG para  $Z_2^5$ . O seguinte teorema demonstra este fato.

TEOREMA: Sejam  $h_1, h_2, \dots, h_5$  geradores de  $Z_2^5$  e

$$H = \{h_1, h_2, \dots, h_5, h_1h_2, h_1h_3, h_1h_5, h_2h_4, h_4h_5, h_1h_2h_3, h_2h_3h_4\}.$$

Então  $X_{Z_2^5, H}$  é uma RRG para  $Z_2^5$ .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $X_H$  o subgrafo de  $X_{Z_2^5, H}$  gerado por  $H$  (Figura 2). Seja  $\varphi \in \text{Aut}_1 X_{Z_2^5, H}$ . Então  $\varphi(H) = H$ .

Observando as adjacências dos vértices de  $X_H$ , vemos que certamente estão fixos os vértices distintos de  $h_1h_5, h_2h_3h_4, h_1h_3$  e  $h_1h_2$ . Mais ainda, o vértice  $h_1h_5$  também está fixo, pois os outros três adjacentes de  $h_5$  (fixo) então fixos. Logo, está fixo também  $h_2h_3h_4$ . Portanto, se  $\varphi \neq 1$  então  $\varphi(h_1h_2) = h_1h_3$  e  $\varphi(h_1h_3) = h_1h_2$ .

Mais,  $a = h_1h_3h_4h_5$  é adjacente somente aos vértices  $h_1h_3$  e  $h_4h_5$  de  $H$  e nenhum vértice de  $X$  é adjacente somente aos vértices  $h_1h_2$  e  $h_4h_5$  de  $H$ . De fato, seja  $z = \varphi(a)$ . Então  $z$  é adjacente a  $h_1h_2$  e  $h_4h_5$ ;  $z \notin \{1\} \cup H$  ( $\varphi \in \text{Aut}_1 X_{G, H}$ ) e  $z$  possui apenas dois adjacentes em  $X_H$  pois  $\varphi$  é um automorfismo de  $X_{G, H}$ .

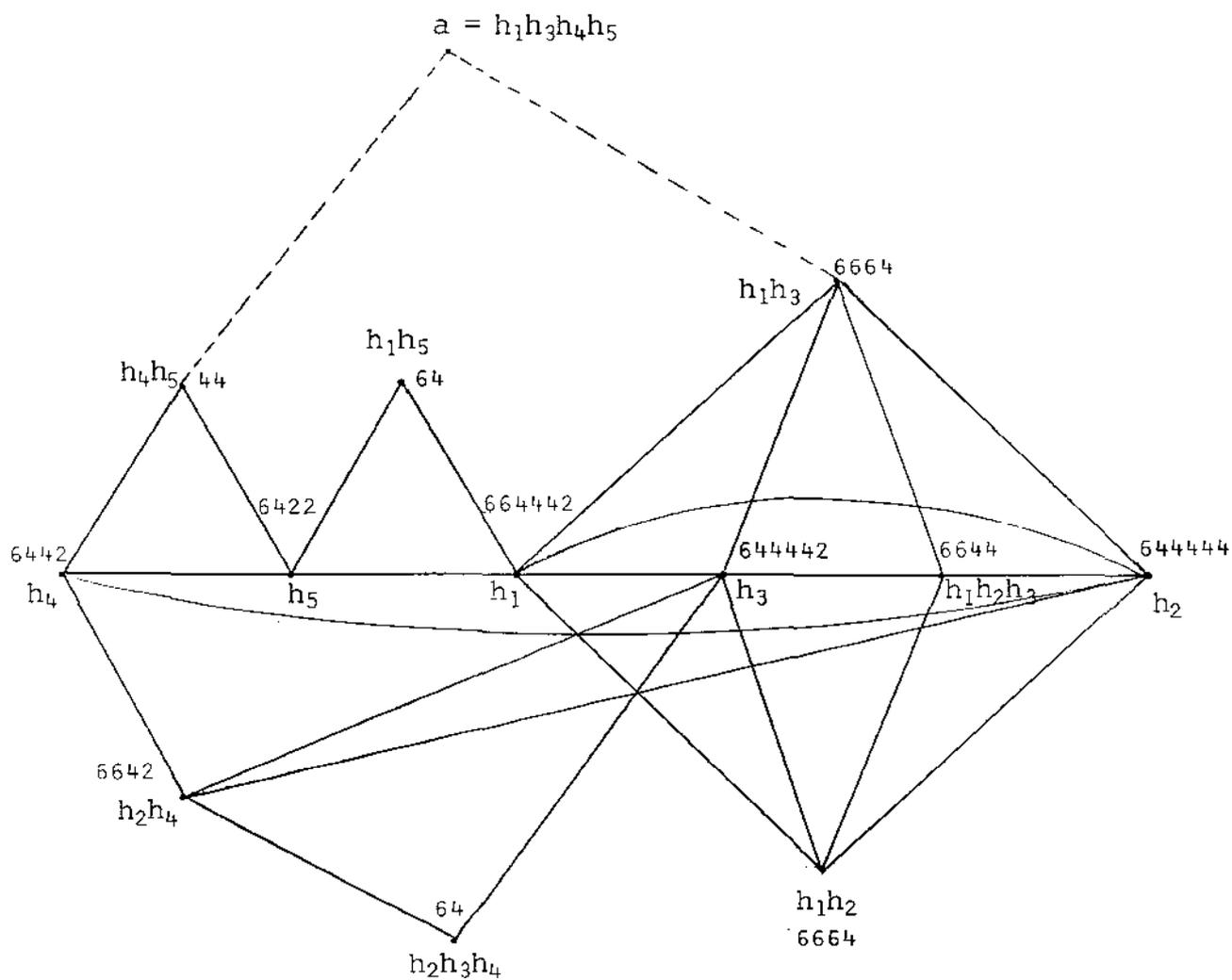


FIGURA 2: O subgrafo  $X_H$  de  $X_{Z_2^5, H}$  gerado por  $H$  (os números ao lado de cada vértice indicam os graus dos adjacentes; a linha pontilhada, as adjacências de vértices de  $X_H$  com o vértice  $a$  não pertencente a  $X_H$ ).

Os únicos vértices adjacentes tanto a  $h_1h_2$  quanto a  $h_4h_5$  são  $1$ ,  $h_2h_5$ ,  $h_1h_2h_4h_5$  e  $h_1h_4$  e todos estes são adjacentes a outros vértices de  $H$ . De fato, se  $z$  é adjacente a  $h_1h_2$  e  $h_4h_5$  então  $z = h_1h_2x = h_1h_2y$ ,  $x, y \in H$ . Logo,

$$x \in \{h_2h_4h_5, h_1h_4h_5, h_1h_2h_3h_4h_5, h_1h_2h_5, h_1h_2h_4, h_3h_4h_5, \\ h_2h_3h_4h_5, h_1h_3h_5, h_1h_2, h_4h_5, h_1h_5, h_2h_4\}.$$

Ainda  $x \in H$ , logo  $x$  poderá ser:  $h_1h_2$ ,  $h_1h_5$ ,  $h_4h_5$  ou  $h_2h_4$ .

Se  $x = h_1h_2$ , então  $z = 1$ . Contradição.

Se  $x \in \{h_1h_5, h_4h_5, h_2h_4\}$ , então  $z$  é respectivamente,  $h_2h_5$ ,  $h_1h_2h_4h_5$  e  $h_1h_4$ . Mas cada um desses valores de  $z$  possui mais do que 2 adjacentes em  $X_H$ . Contradição. Portanto,  $\varphi$  fixa cada elemento de  $H$ . Como esta conclusão vale para cada  $\varphi$  em  $\text{Aut}_1 X$ , então, pelo teorema da condição suficiente para RRG,  $X$  é uma RRG para  $Z_2^5$ .  $\blacktriangle$

Para completar a análise dos grupos  $Z_2^n$ , restam agora os resultados negativos sobre  $Z_2^2$ ,  $Z_2^3$  e  $Z_2^4$ . É o que faremos na próxima seção.

#### 4. RESULTADOS NEGATIVOS

Para mostrarmos que nenhum dos grupos  $Z_2^2$ ,  $Z_2^3$  e  $Z_2^4$  possui uma RRG, basta mostrar que para qualquer que seja  $H$  gerador

de um desses grupos, existe um automorfismo não trivial do grupo que fixa  $H$  (teorema da condição necessária). Analogamente ao que foi feito na Seção 3.7, provaremos tal propriedade para todo subconjunto do grupo  $G$ , não necessariamente gerador de  $G$ .

TEOREMA: Seja  $G \cong Z_2^n$   $n = 2, 3$  ou  $4$ . Seja  $H \subseteq G$ . Então existe um automorfismo  $\varphi$  de  $G$ , distinto de  $1$ , e tal que  $\varphi(H) = H$ .

DEMONSTRAÇÃO: Por indução em  $n + \# H$ .

1º CASO:  $1 \in H$

Seja  $H' = H - 1$ . Pela hipótese de indução,  $\text{Aut } G - 1$  contém um automorfismo  $\varphi$  tal que  $\varphi(H') = H'$ . Ora, todo automorfismo fixa  $1$ . Logo,  $\varphi(H) = H$ . Podemos então supor que  $1 \notin H$ .

2º CASO:  $\# H \geq \frac{1}{2} \cdot \# G$

Seja  $H' = G - 1 - H$ . Como  $1 \notin H$ , então  $\# H' < \frac{1}{2} \cdot \# G \leq \# H$ . Pela hipótese de indução,  $\text{Aut } G - 1$  contém um automorfismo  $\varphi$  tal que  $\varphi(H') = H'$ . Então  $\varphi(H) = G - 1 - H' = H$ . Podemos então supor que  $\# H < \frac{1}{2} \cdot \# G$ .

3º CASO:  $n = 2$ .

Sejam  $a$  e  $b$  dois elementos de  $G - 1$ . Pelos dois casos

anteriores  $1 \notin H$  e  $\# H < 2$ . Assim, a menos de automorfismo,  $H = \phi$  ou  $H = \{a\}$ . O automorfismo  $\varphi$  que permuta  $b$  com  $ab$  (e fixa  $1$  e  $a$ ) pertence a  $\text{Aut } G-1$  e fixa  $H$ . Podemos então supor que  $n > 2$ .

4º CASO:  $H$  não gera  $G$

Nesse caso,  $H \subseteq K \subseteq G$ , onde  $K \cong Z_2^{n-1}$ . Pelo 3º caso,  $n > 2$ . Pela hipótese de indução,  $\text{Aut } K-1$  tem um automorfismo  $\varphi$  tal que  $\varphi(H) = H$ . Seja  $a$  um elemento de  $G \setminus K$ ,  $\mu$  a extensão de  $\varphi$  a  $VG$  em  $\text{Aut } G-1$  que fixa  $a$ . Então  $\mu(H) = H$ . Podemos então supor que  $H$  gera  $G$ .

5º CASO:  $\# H = n$

Pelo 4º Caso,  $H$  gera  $G$ . Sejam  $a$  e  $b$  dois elementos distintos de  $H$ . Seja  $\varphi \in \text{Aut } G-1$  o automorfismo que permuta  $a$  e  $b$  e fixa os demais elementos de  $H$ . Então  $\varphi(H) = H$ . Podemos então supor que  $\# H > n$ .

6º CASO: nenhum dos anteriores

Pelo 3º Caso,  $n \geq 3$ ; pelo 4º Caso,  $H$  gera  $G$ ; pelos Casos 2 e 5,  $n < \# H < \frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$ . Assim,  $n = 4$  e  $5 \leq \# H \leq 7$ . A menos de automorfismos, os possíveis  $H$  são os seguintes, com

os respectivos automorfismos  $\varphi$  que os fixa, onde  $G = \langle a, b, c, d \rangle$ .

O CONJUNTO H	AUTOMORFISMO $\varphi$ CORRESPONDENTE
<p># H = 5</p> <p>a, b, c, d, ab</p> <p>a, b, c, d, abc</p> <p>a, b, c, d, abcd</p>	<p>a <math>\leftrightarrow</math> b</p> <p>a <math>\leftrightarrow</math> b</p> <p>a <math>\leftrightarrow</math> b</p>
<p># H = 6</p> <p>- H possui 0 elementos de comprimento 2:</p> <p>a, b, c, d, abc, bcd</p> <p>- H possui apenas um elemento de comprimento 2:</p> <p>a, b, c, d, ab, abc</p> <p>a, b, c, d, ab, bcd</p> <p>- H possui 2 elementos de comprimento 2:</p> <p>a, b, c, d, ab, cd</p>	<p>b <math>\leftrightarrow</math> c</p> <p>a <math>\leftrightarrow</math> b</p> <p>c <math>\leftrightarrow</math> d</p> <p>a <math>\leftrightarrow</math> b</p>
<p># H = 7</p> <p>- H possui 0 elementos de comprimento 3:</p> <p>a, b, c, d, ab, bc, ac</p> <p>a, b, c, d, ab, ac, ad</p> <p>a, b, c, d, ab, bc, cd</p> <p>a, b, c, d, ab, bc, abcd</p> <p>a, b, c, d, ab, cd, abcd</p>	<p>a <math>\leftrightarrow</math> b</p> <p>b <math>\leftrightarrow</math> c</p> <p>a <math>\leftrightarrow</math> d,      b <math>\leftrightarrow</math> c</p> <p>a <math>\leftrightarrow</math> c</p> <p>a <math>\leftrightarrow</math> b</p>

<p>- H possui um elemento de comprimento 3:</p> <p><math>a, b, c, d, abc, ab, ad</math></p> <p><math>a, b, c, d, abc, ad, bd</math></p> <p><math>a, b, c, d, abc, abcd, ab</math></p> <p><math>a, b, c, d, abc, abcd, ad</math></p>	<p><math>d \leftrightarrow ad</math></p> <p><math>a \leftrightarrow b</math></p> <p><math>a \leftrightarrow b</math></p> <p><math>b \leftrightarrow c</math></p>
<p>- H possui 2 elementos de comprimento 3:</p> <p><math>a, b, c, d, abc, abd, ab</math></p> <p><math>a, b, c, d, abc, abd, cd</math></p> <p><math>a, b, c, d, abc, abd, ac</math></p> <p><math>a, b, c, d, abc, abd, abcd</math></p>	<p><math>a \leftrightarrow b</math></p> <p><math>a \leftrightarrow b</math></p> <p><math>d \leftrightarrow abd</math></p> <p><math>a \leftrightarrow b</math></p>
<p>- H possui 3 elementos de comprimento 3:</p> <p><math>a, b, c, d, abc, abd, acd</math></p>	<p><math>a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a</math></p>

A demonstração completa a análise de grupos com relação a RRG0. ▲

COROLÁRIO: Um grupo finito  $G$  tem uma RRG0 se, e somente se  $G \cong \mathbb{Z}_2^2, \mathbb{Z}_2^3, \mathbb{Z}_2^4, \mathbb{Z}_3^2$  e  $Q$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] L. BABAI, Representation of permutation groups by graphs, *Combinatorial theory and its applications*, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai 4, (1969), 55 - 80.
  
- [ 2 ] L. BABAI, Finite digraphs with given regular automorphism groups, *Periodica Mathematica Hungarica* 11, (1980), 257 - 270.
  
- [ 3 ] E. BANNAI, Examples of groups which have a graphical regular representation, *Discrete Math. Soc. Notice* 19, (1977), 287.
  
- [ 4 ] C. Y. CHAO, On a theorem of Sabidussi, *Proc. Amer. Math. Soc.* 15, (1964), 291 - 292.
  
- [ 5 ] H. S. M. COXETER and W. O. J. MOSER, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer-Verlag, Berlin (1972).
  
- [ 6 ] R. FRUCHT, Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe, *Compositio Math.* 6, (1938), 239 - 250.
  
- [ 7 ] R. FRUCHT, Graphs of degree three with a given abstract group, *Canad. J. Math.* 1, (1949), 365 - 378.
  
- [ 8 ] C. D. GODSIL, Neighbourhoods of transitive graphs and GRR'S, *Journal of Combinatorial Theory*, Ser. B 29, (1980), 116 - 140.
  
- [ 9 ] C. D. GODSIL, Solution of the GRR problem, *Algebraic Methods*

*in Graph Theory* (Proc. Colloq., Szeged, 1978), Bolyai, North-Holland.

- [10] M. HALL, *The Theory of Groups*, The MacMillan Company, New York (1959).
- [11] F. HARARY, *Graph Theory*, Addison - Wesley, Reading Mass., (1969).
- [12] D. HETZEL, *Über Reguläre Graphische Darstellung von auflösbaren Gruppen*, Technische Universität, Berlin, (1976).
- [13] W. IMRICH, Graphs with transitive abelian automorphism group, *Combinatorial Theory and its Applications*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 4, (1969), 651 - 655.
- [14] W. IMRICH, Graphical regular representations of groups of odd order, *Combinatorics*, Bolyai, North - Holland, (1978), 611 - 621.
- [15] D. KÖNIG, *Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*, Leipzig, (1936).
- [16] C. L. LUCCHESI et al., *Aspectos Teóricos da Computação*, Coleção Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).
- [17] C. L. LUCCHESI, *Introdução à Teoria dos Grafos*, 12º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, IMPA, (1979).
- [18] C. L. LUCCHESI, *Comunicação Particular*.

- [19] L. H. J. MONTEIRO, *Elementos de Álgebra*, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, (1974).
- [20] L. A. NOWITZ and M. E. WATKINS, Graphical regular representations of non-abelian groups, I, *Canad. J. Math.* 24, (1972), 993 - 1008.
- [21] L. A. NOWITZ and M. E. WATKINS, Graphical regular representations of non-abelian groups, II, *Canad. J. Math.* 24, (1972), 1009 - 1018.
- [22] G. SABIDUSSI, Graphs with given group and given graph-theoretical properties, *Canad. J. Math.* 9, (1957), 515 - 525.
- [23] G. SABIDUSSI, On a class of fixed-point-free graphs, *Proc. American Math. Society* 9, (1958), 800 - 804.
- [24] M. E. WATKINS, On the action of non-abelian groups on graphs, *J. Combinatorial Theory Ser. B* 11, (1971), 95 - 104.
- [25] M. E. WATKINS, Graphical regular representations of alternating, Symmetric, and Miscellaneous small groups, *Aeqat. Math.* 11, (1974), 40 - 50.