

EFICIÊNCIA RELATIVA ASSINTÓTICA:

DEFINIÇÕES E COMPARAÇÕES

HELENA HARUMI OTANI SAKAMOTO

Orientador

JOSÉ NORBERTO W. DACHS

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Estatística.

OUTUBRO 1981

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

CAPÍTULO I

1. Introdução	01
1.1. Eficiência relativa	02
2. Comparações Assintóticas	02
2.1. Sequências de testes	02
2.2. Comparações assintóticas	03
2.3. Exemplo de comparação de testes	04
3. Eficiência relativa assintótica	09
3.1. Definição de Pitman	09
3.2. Definição de Bahadur	10
4. Comparação entre a eficiência relativa de Pitman e a eficiência relativa de Bahadur	18
4.1. Lema	18
4.2. Lema	19
4.3. Teorema	21
4.4. Relação entre a eficiência de Pitman e a de Ba hadur	24
4.5. Exemplo	25

CAPÍTULO II

1. Comparação do teste de Kruskal-Wallis com o teste F, para um caso finito	32
2. Procedimento	33
3. Tabelas	38
4. Gráficos	46
5. Análise dos resultados e conclusão	55

APÊNDICE

1. Programa para o cálculo do poder por Monte Carlo	57
2. Fluxograma	61

Para Eduardo, Lie e Jun

AGRADECIMENTOS

Ao Norberto pela orientação segura e pelas palavras de incentivo nos momentos difíceis do trabalho;

à Junko, ao Márcio e à Elia pela paciência com que me ensinaram o uso do terminal;

à minha sogra, D. Massayo, a quem devo a tranquilidade de minhas viagens;

aos colegas do IMECC que me socorreram quando dúvidas surgiram nos programas;

à desenhista, Akemi, pelas figuras;

à Denize pelo serviço de datilografia;

ao Instituto de Planejamento e Estudos Ambientais de Presidente Prudente e

a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

Este trabalho tem como finalidade apresentar definições de eficiência relativa assintótica devidas a Pitman e a Bahadur ; estabelecer as relações existentes entre elas e procurar, através da análise da razão entre o poder do teste F e o poder do teste de Kruskal-Wallis, verificar se os resultados assintóticos dessas eficiências são aplicáveis também a casos finitos.

No Capítulo I é feita uma revisão bibliográfica sobre o assunto. No Capítulo II é feita uma aplicação ao caso dos testes de Kruskal-Wallis e F em amostras simuladas e através do método de Monte Carlo são calculadas as estimativas do poder.

SUMMARY

This work aims at the presentation of definitions of Pitman's and Bahadur's relative asymptotic efficiency, establishing the existing relations between them and attempting to verify, by analysing the ratio between the powers of F test and Kruskal-Wallis test, if asymptotic results of these efficiencies are also applicable to finite cases.

In chapter I a literature survey on the subject has been made. In chapter II an application of Kruskal-Wallis test and F test in simulated samples has been made and the estimates for the powers are calculated by Monte Carlo Methods.

CAPITULO I

1. INTRODUÇÃO

Para testar uma hipótese contra uma alternativa dada e existem, em geral, vários testes possíveis com diferentes propriedades. Procura-se em cada caso um teste "ótimo", isto é, aquele que apresenta as melhores propriedades em cada situação, onde "melhor" significa o controle pelo teste de uma propriedade desejável. Quase sempre essas propriedades são definidas em termos de função poder do teste que geralmente é muito difícil de determinar, ou, possível numericamente, apenas para alguns poucos casos específicos.

Uma maneira alternativa para comparar dois ou mais testes é fazer um estudo sobre suas eficiências relativas, cuja definição será dada mais adiante, que permite avaliar a perda de eficiência, decorrente do uso de outro teste que não seja o "ótimo". Pode acontecer, por exemplo, que o teste uniformemente mais poderoso seja apenas um pouco mais poderoso que um outro muito mais simples de computar. Em tais circunstâncias pode-se decidir pelo uso do teste menos eficiente mas, antes de se tomar tal decisão é preciso fazer uma comparação quantitativa entre os testes.

A necessidade de medir a eficiência dos testes surgiu como consequência do interesse dos estatísticos pelos testes computacionalmente simples, o que aconteceu na década de 1930. Portanto, somente quando os testes "ineficientes" tornaram-se de interesse 'prático é que foi necessário investigar suas propriedades mais fracas.

1.1. Eficiência Relativa

Se um teste de tamanho α requer n observações para alcançar um poder β e um 2φ teste, de mesmo tamanho α necessita de m observações para alcançar o mesmo poder contra a mesma alternativa, define-se a eficiência relativa do primeiro teste em relação ao segundo como sendo a razão $\frac{m}{n}$.

Aumentando infinitamente o valor de n obtém-se o limite da razão $\frac{m}{n}$.

Esse limite é a eficiência relativa assintótica da sequência de testes $\{T_n^{(1)}\}$ em relação à sequência $\{T_n^{(2)}\}$.

2. COMPARAÇÕES ASSINTÓTICAS

2.1. Sequências de Testes.

Num espaço amostral S tem-se os pontos $s = (x_1, x_2, \dots, \dots)$ com $x \in \mathbb{R}$,

Seja $\theta \in \Omega$ o parâmetro de interesse e Ω o conjunto de hipóteses admissíveis. Se estatísticas $T_n(s)$ são usadas para testar a hipótese.

$$H_0 : \theta \in \Omega_0$$

contra

$$H_a : \theta \in \Omega - \Omega_0 ,$$

pode-se definir para cada tamanho amostral n , um teste ϕ_n , tal que

$$\phi_n = \begin{cases} 0 & , \text{ se } T_n < k \\ \chi_n & , \text{ se } T_n = k \\ 1 & , \text{ se } T_n > k \end{cases} ,$$

e conseqüentemente haverá uma seqüência de testes $\{\phi_n\}$ que pode ser identificada com $\{T_n\}$.

Se existem duas seqüências de testes, $\{T_n^{(1)}\}$ e $\{T_n^{(2)}\}$, para um mesmo problema, pode ser necessário estudar o comportamento assintótico das mesmas para poder compará-las.

O objetivo desse trabalho é apresentar duas definições ' sobre eficiência relativa assintótica: a de Pitman (1948) e a de Bahadur (1960); comparar os resultados e fazer algumas comparações para pequenas amostras, através de um estudo de Monte Carlo.

2.2. Comparações Assintóticas

Para cada par de testes tem-se a eficiência relativa definida em 1.1. Ao se tratar de comparação de duas seqüências de testes, é preciso uma única medida através da qual se possa dizer qual é a mais eficiente, e isto pode ser obtido através de um processo limite. Uma maneira seria fazer os tamanhos amostrais n e m

tenderem ao infinito e tomar a razão dos poderes dos testes. Esse processo apresenta uma outra inconveniência além dos já citados; se os testes considerados forem ambos de tamanho $\bar{\alpha}$ e consistentes, a função poder de cada teste tenderá a 1 quando n crescer.

Wald, em 1941, definiu um teste assintoticamente mais poderoso, como sendo aquele cuja função poder não pode ser melhorada, quando o tamanho da amostra tender ao infinito, ou seja, aquele que é assintoticamente uniformemente mais poderoso, mas o exemplo a seguir (Kendall and Stuart - The Advanced Theory of Statistics), mostra que esse critério nem sempre é conveniente.

2.3. Exemplo de Comparação de testes

Para testar a média de uma distribuição normal com variância conhecida, igual a 1, sejam $H_0 : \theta = \theta_0$ e

$$H_a : \theta = \theta_1 > \theta_0 ,$$

respectivamente, as hipóteses nula e alternativa. O teste UMP (uniformemente mais poderoso), $T_n^{(1)}$, de H_0 contra H_a é dado pela região crítica

$$\{ \bar{X} : \bar{X} \geq \theta_0 + K_\alpha \sqrt{n} \} ,$$

e a sua função poder é

$$\beta_n^{(1)}(\theta_1) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 + K_\alpha - \theta_1}{\sigma_{11}}\right)$$

onde

$$\sigma_{10} = \text{Var} (T_n^{(1)} | \theta_0)$$

$$\sigma_{11} = \text{Var} (T_n^{(1)} | \theta_1)$$

$\beta_n^{(1)}(\theta_1)$ pode ser escrita como:

$$\beta_n^{(1)}(\theta_1) = \Phi((\theta_1 - \theta_0) \sqrt{n} - K_{\alpha}) \quad (2.1.)$$

Seja $T_n^{(2)}$ outro teste que rejeita H_0 se

$$\bar{X} \in \{ \bar{X} : \bar{X} \leq \theta_0 - K_{\alpha_1} \sqrt{n} \text{ ou } \bar{X} \geq \theta_0 + K_{\alpha_2} \sqrt{n} \} \quad \text{onde } K_{\alpha_1} \text{ e}$$

K_{α_2} são funções de n escolhidas arbitrariamente, de modo que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \quad .$$

Usando a notação σ_{20}^2 e σ_{21}^2 para $\text{Var} (T_n^{(2)} | \theta_0)$ e $\text{Var} (T_n^{(2)} | \theta_1)$, respectivamente, tem-se a seguinte função poder:

$$\beta_n^{(2)}(\theta_1) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0 + K_{\alpha_2} \sigma_{20} - \theta_1}{\sigma_{21}}\right) + \Phi\left(\frac{\theta_0 - K_{\alpha_1} \sigma_{20} - \theta_1}{\sigma_{21}}\right)$$

ou melhor,

$$\beta_n^{(2)}(\theta_1) = \Phi((\theta_1 - \theta_0) \sqrt{n} - K_{\alpha_2}) + \Phi((\theta_0 - \theta_1) \sqrt{n} - K_{\alpha_1}) \quad (2.2.)$$

Como $\phi(x)$ é sempre positivo $\forall x \in \mathbb{R}$ tem-se a seguinte desigualdade:

$$\beta_n^{(2)}(\theta_1) > \Phi((\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n} - K_{\alpha_2}) . \quad (2.3.)$$

O primeiro teste sendo UMP, o seu poder será sempre maior que o de $T_n^{(2)}$, ou seja,

$$\beta_n^{(1)}(\theta_1) - \beta_n^{(2)}(\theta_1) \geq 0 \quad (2.4.)$$

De (2.1.), (2.3.) e (2.4.) obtem-se

$$\Phi((\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n} - K_{\alpha}) - \Phi((\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n} - K_{\alpha_2}) \geq 0 \quad (2.5.)$$

Para $(x - y)$ fixo

$$\Phi(x) - \Phi(y) \leq \Phi\left(\frac{x - y}{2}\right) - \Phi\left(\frac{y - x}{2}\right) \quad (2.6.)$$

Aplicando (2.6.) em (2.5.) obtem-se

$$\Phi\left(\frac{K_{\alpha} - K_{\alpha_2}}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{(K_{\alpha} - K_{\alpha_2})}{2}\right) \geq 0 \quad (2.7.)$$

Se for escolhido para cada n um K_{α_2} tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{\alpha_2} = K_{\alpha} \quad (2.8.)$$

A diferença $\beta_n^{(1)}(\theta_1) - \beta_n^{(2)}(\theta_1)$ tenderá para zero e o teste $T_n^{(2)}$ será assintoticamente UMP.

Tomando a razão de erros de tipo II dos testes, de (2.1.)

e (2.2.) tem-se

$$\frac{1 - \beta_n^{(2)}(\theta_1)}{1 - \beta_n^{(1)}(\theta_1)} = \frac{\Phi(K_{\alpha_2} - (\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n}) - \Phi(-K_{\alpha_1} - (\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n})}{\Phi(K_{\alpha} - (\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n})} \quad (2.9.)$$

Fazendo $\sqrt{n} \rightarrow \infty$, o numerador e o denominador de (2.9.) tendem a zero. Usando a regra de L'Hôpital se obtém:

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{n} \rightarrow \infty} \frac{1 - \beta_n^{(2)}(\theta_1)}{1 - \beta_n^{(1)}(\theta_1)} &= \lim_{\sqrt{n} \rightarrow \infty} \frac{(K'_{\alpha_2} - (\theta_1 - \theta_0)) \varphi(K_{\alpha_2} - (\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n})}{-(\theta_1 - \theta_0) \varphi(K_{\alpha} - (\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n})} + \\ &+ \frac{(K'_{\alpha_1} + (\theta_1 - \theta_0)) \varphi(-K_{\alpha_1} - (\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n})}{-(\theta_1 - \theta_0) \varphi(K_{\alpha} - (\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n})} \end{aligned} \quad (2.10.)$$

O limite (2.8.) implica que $K_{\alpha_1} \rightarrow \infty$ com n e portanto o segundo termo do segundo membro de (2.10.) tende para zero.

A expressão (2.10.) passa a ser :

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{n} \rightarrow \infty} \frac{1 - \beta_n^{(2)}(\theta_1)}{1 - \beta_n^{(1)}(\theta_1)} &= \lim_{\sqrt{n} \rightarrow \infty} \frac{-K'_{\alpha_2} \varphi(K_{\alpha_2} - (\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n})}{(\theta_1 - \theta_0) \varphi(K_{\alpha} - (\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n})} + \\ &+ \frac{\varphi(K_{\alpha_2} - (\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n})}{\varphi(K_{\alpha} - (\theta_1 - \theta_0)\sqrt{n})} \end{aligned} \quad (2.11.)$$

Por (2.8.) o segundo termo de (2.11.) tende a 1 e o primeiro termo pode ser escrito como

$$\lim_{\sqrt{n} \rightarrow \infty} \frac{-K'_{\alpha_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[K_{\alpha_2} - (\theta_1 - \theta_0) \sqrt{n} \right]^2 \right\}}{(\theta_1 - \theta_0) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[K_{\alpha} - (\theta_1 - \theta_0) \sqrt{n} \right]^2 \right\}} =$$

$$= \lim_{\sqrt{n} \rightarrow \infty} \frac{-K'_{\alpha_2}}{(\theta_1 - \theta_0)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[K_{\alpha_2}^2 - K_{\alpha}^2 \right] + (\theta_1 - \theta_0) \sqrt{n} \left[K_{\alpha_2} - K_{\alpha} \right] \right\}$$

(2.12.)

Por (2.8.) o 1º termo do expoente da direita de (2.12.) tenderá a zero. Por outro lado se se fizer:

$K_{\alpha_2} = K_{\alpha} + n^{-\delta}$, $0 < \delta < 1/2$, (2.8.) será verificado e (2.12.) tenderá para o infinito com n e conseqüentemente (2.10.) tenderá também para o infinito.

Embora ambos os testes sejam assintoticamente UMP, a razão de erros de tipo II tende para infinito quando $n \rightarrow \infty$. Portanto a propriedade "assintoticamente UMP" não é conveniente nesse caso, para a comparação de testes.

Como já foi dito, duas seqüências de testes podem ser comparadas através de suas eficiências relativas assintóticas. Existem diferentes maneiras de definir a eficiência relativa. A definição

mais conhecida é a de Pitman que será apresentada logo a seguir. Será apresentada também a definição de Bahadur e mais adiante será feito um estudo que procura relacionar uma definição com a outra.

3. EFICIÊNCIA RELATIVA ASSINTÓTICA

3.1. Definição de Pitman

Sejam $\{T_n^{(1)}\}$ e $\{T_n^{(2)}\}$ duas seqüências de testes com o mesmo nível assintótico α . Sejam $\beta_n^{(1)}$ e $\beta_n^{(2)}$, respectivamente, as funções poder dos testes citados e a alternativa tendendo à hipótese nula, isto é, $\theta \rightarrow \theta_0$.

Supondo que existem duas seqüências crescentes de números naturais $\{n_j\}$ e $\{m_j\}$ para os quais os limites das funções poder são iguais, não nulos e diferentes de 1, ou seja,

$$0 \neq \lim_{n_j \rightarrow \infty} \beta_{n_j}^{(1)}(\theta) = \lim_{m_j \rightarrow \infty} \beta_{m_j}^{(2)}(\theta) \neq 1 \quad \text{e se}$$

o $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m_j}{n_j}$ existir para toda possível escolha das seqüências $\{m_j\}$

e $\{n_j\}$ e tiver o mesmo valor, esse limite será definido como a Eficiência Relativa Assintótica de Pitman, de $\{T_n^{(1)}\}$ em relação a $\{T_n^{(2)}\}$.

Pitman fixa o nível assintótico α e o poder assintótico β e faz a alternativa convergir para a hipótese nula.

3.2. Definição de Bahadur

Bahadur prefere fixar a alternativa θ_a e o poder β e comparar as sequências de níveis de significância. Sua definição de eficiência relativa assintótica baseada em nível exato de $T_n^{(1)}$ e $T_n^{(2)}$ é então:

$$e_{\beta}(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} -2 n^{-1} \log \alpha_n^{(1)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} -2 n^{-1} \log \alpha_n^{(2)}} \quad (3.1.)$$

onde os níveis $\alpha_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, tendem a 0 quando n cresce.

Na prática, na maioria das vezes, somente níveis aproximados são usados porque a distribuição exata de T_n para um $\theta \in \Omega_0$ às vezes, não é tabulada, ou, então, é difícil para computar, ou, ainda, porque o nível exato de T_n não existe, por exemplo, quando a distribuição é discreta e não se deseja aleatorizar. Mesmo quando existem níveis exatos espera-se que conclusões baseadas em comparações de níveis aproximados dêem pelo menos uma indicação do que esperar em comparações de níveis exatos.

3.2.1. Sequência Padrão

Para definir a eficiência relativa de testes baseados em níveis inexatos, Bahadur define, primeiramente, uma sequência padrão (Bahadur, 1960).

Seja S um espaço amostral com uma probabilidade P_θ pertencente a uma família indexada por θ , sendo θ um parâmetro que assume valores em Ω . Seja H_0 a hipótese de que $\theta \in \Omega_0 \subset \Omega$.

Para cada natural não nulo n , seja T_n uma estatística de valores reais. Diremos que $\{T_n\}$ é uma sequência padrão se as seguintes condições forem satisfeitas:

I) Para cada $\theta \in \Omega_0$ existe uma função distribuição contínua F tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta (T_n < x) = F_\theta(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.3.)$$

II) \exists uma constante a , $0 < a < \infty$ tal que

$$\log [1 - F(x)] = -a \frac{x^2}{2} |1 + o(1)| \quad \text{para } x \rightarrow \infty \quad (3.4.)$$

III) \exists uma função sobre $\Omega - \Omega_0$ com $0 < b < \infty$, tal que para cada $\theta \in \Omega - \Omega_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left(\left| \frac{T_n}{\sqrt{n}} - b(\theta) \right| > x \right) = 0 \quad , \quad \forall x > 0 \quad , \quad (3.5.)$$

ou seja, $\frac{T_n}{\sqrt{n}}$ tende em probabilidade para $b(\theta)$.

Exemplo: Sejam X_1, X_2, \dots, X_n , variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídos com função de distribuição F , com média u e variância σ^2 . Sejam $H: u = 0$ a hipótese a ser testada e T_n a estatística t baseada nas n primeiras observações aleatórias, isto é,

$$T_n = \frac{\frac{\sum X_i}{n} - u}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad (3.6.)$$

A sequência $\{T_n\}$ é uma sequência padrão pois:

existe $F(x) = \int_{-\infty}^x (2\pi)^{-1/2} \exp(-\frac{t^2}{2}) dt$

tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(T_n < x) = F(x)$ e que, portanto, satisfaz I).

Para $x \rightarrow \infty$ $1 - F(x) \sim (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$ e conseqüentemente

$\log(1 - F(x)) = -\frac{x^2}{2}$, e a condição II é satisfeita com $a = 1$.

Além disso, $\frac{T_n}{\sqrt{n}}$ tende em probabilidade para $\frac{\mu}{\sigma}$.

Pode-se definir o nível alcançado por T_n por $1 - F(T_n)$ embora esse seja apenas um nível aproximado.

O nível alcançado por T_n é uma variável aleatória definida sobre $S = \{(x_1, x_2, \dots)\}$ onde cada x_i é um possível va

lor de X_i . O comportamento dessa variável para $n \rightarrow \infty$ pode ser escrita em termos de K_n , onde

$$K_n(\theta) = -2 \log (1 - F_\theta(T_n)) \quad (3.9.)$$

Para cada $\theta \in \Omega_0$, K_n é tal que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(K_n < v) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left[-2 \log (1 - F_\theta(T_n)) < v \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left[1 - F_\theta(T_n) > e^{-\frac{v}{2}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta \left[F_\theta(T_n) < 1 - e^{-\frac{v}{2}} \right] \end{aligned}$$

A expressão acima se resumirá em:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\theta(K_n < v) = 1 - e^{-\frac{v}{2}} = P(x^2 < v), \quad (3.10.)$$

ou seja, K_n tem assintoticamente uma distribuição x^2 com 2 graus de liberdade.

De acordo com (3.9.), (3.10) $K_{n/n} = \varepsilon_n$, onde $\varepsilon_n \rightarrow 0$ em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$. Para $\theta \in \Omega - \Omega_0$,

$$\frac{K_n}{n} = a \left[b(\theta) \right]^2 + \varepsilon_n$$

como consequência de (3.4.) e (3.5.).

Portanto, se se definir

$$C(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{para } \theta \in \Omega_0 \\ a[b(\theta)]^2 & \text{para } \theta \in \Omega - \Omega_0 \end{cases}$$

então,

$$\frac{K_n}{n} = C + \varepsilon_n \quad (3.11.)$$

onde $\varepsilon_n \rightarrow 0$ em probabilidade quando $n \rightarrow \infty$

3.2.2. Comparações de Sequências Padrões.

Sejam $\{T_n^{(1)}\}$ e $\{T_n^{(2)}\}$ duas sequências padrões e sejam $F^{(i)}(x)$, $a^{(i)}$ e $b^{(i)}(\theta)$ as funções e constantes para as quais a sequência i , $i = 1, 2$, satisfaz as condições I), II) e III). Fixando $\theta \in \Omega - \Omega_0$ define-se a eficiência relativa as sintótica da sequência 1, em relação à sequência 2 como sendo a ra zão:

$$e_{\beta}(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) = \frac{C_1(\theta)}{C_2(\theta)} \quad (3.12.)$$

Diz-se que um teste baseado em $T_n^{(i)}$ não é tão bom quanto aquele baseado em $T_n^{(j)}$, se o nível alcançado pelo primeiro for maior que o alcançado pelo segundo, ou seja, se

$$K_n^{(i)}(\theta) < K_n^{(j)}(\theta)$$

De (3.11.) e (3.12.) segue-se que

$$\frac{K_n^{(1)}}{K_n^{(2)}} \xrightarrow{P} e_{\beta}(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) \quad (3.13.)$$

quando n tende ao infinito.

Se $e_{\beta}(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) < 1$, $T_n^{(1)}$ é menos eficiente que $T_n^{(2)}$.

Se $e_{\beta}(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) > 1$, então $T_n^{(1)}$ é mais eficiente que $T_n^{(2)}$.

Se $e_{\beta}(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) = 1$, os dois são igualmente eficientes.

Sejam $\{n_j\}$ e $\{m_j\}$ as seqüências crescentes de números inteiros, tais que para cada amostra de tamanho n_j para o primeiro teste corresponde outro de tamanho m_j , que fará o segundo teste alcançar o mesmo nível do primeiro.

Se $\frac{K_{n_j}^{(1)}}{K_{m_j}^{(2)}}$ tende em probabilidade para 1, quando n tende

para infinito, diz-se que n_j e m_j são tamanhos amostrais asintoticamente equivalentes para as seqüências $\{T_n^{(1)}\}$ e $\{T_n^{(2)}\}$.

Os tamanhos n_j e m_j são assintoticamente equivalentes -

tes se, e somente se,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j}{m_j} = e_{\beta}(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) \quad (3.14.)$$

De fato, se $\{n_j\}$ e $\{m_j\}$ forem as sequências crescentes de números inteiros positivos acima mencionadas, de (3.11.) e (3.12.) tem-se que

$$e_{\beta}(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) = \frac{C_1}{C_2} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{K_{n_j}^{(1)}}{n_j} \cdot \frac{m_j}{K_{m_j}^{(2)}} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j}{m_j} \quad (3.15.)$$

3.2.3. Exemplo de aplicação da eficiência relativa assintótica de Bahadur.

Sejam X_1, X_2, X_3, \dots variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo a normal padronizada $\phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$, onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$ são desconhecidos. Sejam $\theta = (\mu, \sigma)$ e $H_0 : \mu = 0$ a hipótese de interesse.

Para cada $n = 1, 2, \dots$, seja U_n o número de x_j 's positivos no conjunto $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Definindo

$$T_n^{(1)} = \frac{|2 U_n - n|}{\sqrt{n}} \quad e$$

$T_n^{(2)}$ como a estatística t baseada nas n primeiras observações, tem-se que

$$\frac{T_n^{(1)}}{\sqrt{n}} = \frac{2 U_n}{n} - 1 = 2 P(U_n > 0) - 1 \quad (3.17.)$$

A expressão (3.17.) tende em probabilidade para $2 \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - 1$ e além disso $\frac{T_n^{(2)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} \frac{\mu}{\sigma}$ (3.18.)

De acordo com a definição de Bahadur, para cada $\theta = (\mu, \sigma)$ com $\mu \neq 0$, a eficiência relativa assintótica de $T_n^{(1)}$ em relação a $T_n^{(2)}$ é:

$$e(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) = (2 \phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) - 1)^2 / \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \quad (3.19.)$$

A função $\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)$ pode ser escrita como:

$$\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \left(-1 + \frac{\mu}{2!\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{\mu^2}{3!\sigma^2\sqrt{2\pi}} + \dots \right)$$

e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} e_{\beta}(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\frac{-2\mu}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{\sigma^2}} \right) / \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} e^{-\frac{\mu^4}{4\sigma^2}} = \frac{2}{\pi} \end{aligned} \quad (3.20.)$$

que é o valor da eficiência relativa assintótica de Pitman de $T_n^{(1)}$ em relação a $T_n^{(2)}$.

Nesse exemplo, o limite da eficiência de Bahadur resultou na eficiência de Pitman. Para verificar se esse resultado pode ser generalizado será feita em seguida, uma comparação entre as duas definições, procurando estabelecer uma relação entre as duas.

4. COMPARAÇÃO ENTRE A EFICIÊNCIA RELATIVA DE PITMAN E A EFICIÊNCIA RELATIVA DE BAHADUR.

Primeiramente, serão enunciados e demonstrados alguns lemas e teoremas (Schmetterer, 1974), que fundamentarão conclusões interessantes.

Seja $\{T_n\}$ uma sequência de testes para testar $H_0 : \theta = \theta_0$. Para simplificar, será considerado $\theta_0 = 0$.

4.1. Lema.

Seja F uma função estritamente monótona, $\{\sigma_n\}$ uma sequência de números positivos, $\{\mu_n\}$ uma sequência de funções sobre Ω , tais que para $\theta_n \rightarrow 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{T_n - \mu_n(\theta_n)}{\sigma_n} \leq x \right) = F(x) \quad (4.1.)$$

para $-\infty < x < \infty$

Representando $\frac{T_n - \mu_n(0)}{\sigma_n}$ por h_n ; se a região crítica $\{h_n > k_n\}$ tem um nível de significância α_n ; se

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k$, e se β_n é a função poder para um

determinado n , então, $\beta_n(\theta_n) \rightarrow \beta = 1 - F(k - \ell)$, $\ell \in \mathbb{R}$, se, e

somente se, $\frac{\mu_n(\theta_n) - \mu_n(0)}{\sigma_n} \rightarrow \ell$

De fato, $\beta_n(\theta_n) = 1 - P_{\theta_n}(h_n \leq k_n) =$

$$= 1 - P_{\theta_n} \left(\frac{T_n - \mu_n(\theta_n)}{\sigma_n} \leq k_n - \frac{\mu_n(\theta_n) - \mu_n(0)}{\sigma_n} \right), \text{ e}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n(\theta_n) = 1 - F(k - \ell) \leftrightarrow \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n(\theta_n) - \mu_n(0)}{\sigma_n} \quad (4.2.)$$

4.2. Lema

Sejam $\{T_n^{(1)}\}$ e $\{T_n^{(2)}\}$ duas sequências que satisfazem as condições do lema anterior para um mesmo nível assintótico α ,

juntamente com as sequências $\{\sigma_n^{(i)}\}$ e $\{u_n^{(i)}\}$, $i = 1, 2$.

Seja $\{\theta_n\}$ uma sequência de alternativas que tendem a $H_0 : \theta = 0$

$$\text{e tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(2)}(\theta_n) = \beta = 1 - F(k - \ell) \quad (4.3.)$$

$$0 < \beta < 1 \quad \text{e} \quad \ell > 0.$$

Para cada n associa-se um número natural $r_n > n$ tal que

$$\text{para a região crítica } \left\{ \frac{T_{r_n}^{(1)} - \mu_{r_n}(\theta_n)}{\sigma_{r_n}} > k_{r_n} \right\} \quad \text{o limite}$$

$$\text{da função poder é } \beta, \text{ ou seja } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n^{(1)}(\theta_n) = \beta \quad (4.4.)$$

Nestas condições

$$\frac{\mu_n^{(2)}(\theta_n) - \mu_n^{(2)}(0)}{\mu_{r_n}^{(1)}(\theta_n) - \mu_{r_n}^{(1)}(0)} \cdot \frac{\sigma_{r_n}^{(1)}}{\sigma_n^{(2)}} \rightarrow 1 \quad (4.5.)$$

Demonstração:

$$\text{De } \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0 \quad \text{tem-se que } \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{r_n} = 0$$

De (4.4.) e pelo lema anterior:

$$\frac{\mu_{r_n}^{(1)}(\theta_{r_n}) - \mu_{r_n}^{(1)}(0)}{\sigma_{r_n}^{(1)}} \rightarrow \ell \quad (4.6.)$$

De forma semelhante, a partir de (4.3.)

$$\frac{\mu_n^{(2)}(\theta_n) - \mu_n^{(2)}(0)}{\sigma_n^{(2)}} \rightarrow \ell \quad (4.7.)$$

Consequentemente, verifica-se (4.5.).

4.3. Teorema.

Supondo satisfeitas todas as condições de 4.2.; sejam Ω um intervalo aberto contendo $\theta_0 = 0$; $u_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, funções m vezes continuamente diferenciáveis que tem as derivadas de ordem menor que m , todas nulas no ponto 0 e cuja primeira derivada não nula, nesse ponto, é a de ordem m . Se existir um $\delta > 0$ tal que

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^m u_n^{(i)} \Big|_0}{d \theta^m} \Big/ n^\delta \sigma_n^{(i)} < \infty \quad (4.8.)$$

e se para cada sequência $\{\theta_n\}$, $\theta_n \in \Omega$, o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^m u_n^{(i)} \Big|_{\theta_n}}{d \theta^m} \Big/ \frac{d^m u_n^{(i)} \Big|_0}{d \theta^m} = 1, \quad (4.9.)$$

$\forall i, (i = 1, 2)$ então,

$$e_p(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{d^m u_n^{(1)} \Big|_{\theta_n}}{d \theta^m}}{\frac{d^m u_n^{(2)} \Big|_0}{d \theta^m}} \cdot \frac{\sigma_n^{(2)}}{\sigma_n^{(1)}} \right]^{1/\delta} \quad (4.10.)$$

Demonstração:

Seja $\theta_n \rightarrow 0$. Então, pelo fato de $u_n(\theta)$ ter as derivadas de ordem menor que m nulas, em $\theta_0 = 0$ e pelo teorema do valor médio, existe uma sequência $\{\theta_j\}$, $0 < \theta_j < \theta_n$ e $1 \leq j \leq m$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{(2)}(\theta_n) - u_n^{(2)}(0)}{u_{r_n}^{(1)}(\theta_n) - u_{r_n}^{(1)}(0)} &= \frac{\frac{d u_n^{(2)}}{d \theta} \Big|_{\theta_1}}{\frac{d u_{r_n}^{(1)}}{d \theta} \Big|_{\theta_1}} = \frac{\frac{d u_n^{(2)}}{d \theta} \Big|_{\theta_1} - \frac{d u_n^{(2)}}{d \theta} \Big|_0}{\frac{d u_{r_n}^{(1)}}{d \theta} \Big|_{\theta_1} - \frac{d u_{r_n}^{(1)}}{d \theta} \Big|_0} = \\ &= \frac{\frac{d^2 u_n^{(2)}}{d \theta^2} \Big|_{\theta_2}}{\frac{d^2 u_{r_n}^{(1)}}{d \theta^2} \Big|_{\theta_2}} = \frac{\frac{d^2 u_n^{(2)}}{d \theta^2} \Big|_{\theta_2} - \frac{d^2 u_n^{(2)}}{d \theta^2} \Big|_0}{\frac{d^2 u_{r_n}^{(1)}}{d \theta^2} \Big|_{\theta_2} - \frac{d^2 u_{r_n}^{(1)}}{d \theta^2} \Big|_0} = \dots = \frac{\frac{d^m u_n^{(2)}}{d \theta^m} \Big|_{\theta_m}}{\frac{d^m u_{r_n}^{(1)}}{d \theta^m} \Big|_{\theta_m}} \end{aligned} \quad (4.11.)$$

Pelo lema 4.2. e por (4.7.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d^m u_n^{(2)}}{d \theta^m} \Big|_{\theta_m}}{\frac{d^m u_{r_n}^{(1)}}{d \theta^m} \Big|_{\theta_m}} \cdot \frac{\sigma_{r_n}^{(1)}}{\sigma_n^{(2)}} = 1 \quad (4.12.)$$

O membro esquerdo da expressão (4.12.) pode ser escrito

como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d^m \mu_n^{(2)}}{d \theta^m} \Big|_{\theta_m}}{\frac{d^m \mu_{r_n}^{(1)}}{d \theta^m} \Big|_{\theta_m}} \cdot \frac{\sigma_{r_n}^{(1)}}{\sigma_n^{(2)}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d^m \mu_{r_n}^{(1)}}{d \theta^m} \Big|_{\theta_m}}{\frac{d^m \mu_{r_n}^{(1)}}{d \theta^m} \Big|_0} \Big/ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d^m \mu_n^{(2)}}{d \theta^m} \Big|_{\theta_m}}{\frac{d^m \mu_n^{(2)}}{d \theta^m} \Big|_0} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{r_n}\right)^\delta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d^m \mu_n^{(2)}}{d \theta^m} \Big|_0}{n^\delta \sigma_n^{(2)}} \Big/ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d^m \mu_{r_n}^{(1)}}{d \theta^m} \Big|_0}{r_n^\delta \sigma_{r_n}^{(1)}}$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{r_n}\right)^\delta \frac{\frac{d^m \mu_n^{(2)}}{d \theta^m} \Big|_0}{n^\delta \sigma_n^{(2)}} \Big/ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d^m \mu_{r_n}^{(1)}}{d \theta^m} \Big|_0}{n^\delta \sigma_{r_n}^{(1)}} = 1 \quad (4.13.)$$

e conseqüentemente, verifica-se (4.10.).

4.4. Relação entre a eficiência de Pitman e a de Bahadur.

$$\text{Seja } h_n^{(i)} = \frac{T_n^{(i)} - \mu_n^{(i)}(0)}{\sigma_n^{(i)}}, \quad \text{para } n \geq 1 \text{ e}$$

$i = 1, 2$, cuja função distribuição é

$$\phi(h) = \int_{-\infty}^h \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Se

$$\frac{h_n^{(i)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} b_i(\theta) = \frac{\mu_n^{(i)}(\theta) - \mu_n^{(i)}(0)}{\sigma_n^{(i)} \sqrt{n}} \quad (4.14.)$$

e se as condições do teorema 4.3. estiverem satisfeitas para $\delta = \frac{1}{2}$, então a eficiência relativa assintótica de Pitman será o limite da eficiência de Bahadur quando θ tender a zero, como será verificado (Schmetterer, 1974).

Pelo teorema 4.3.

$$e_p(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\left. \frac{d \mu_n^{(1)}}{d \theta} \right|_0 \sigma_n^{(2)}}{\left. \frac{d \mu_n^{(2)}}{d \theta} \right|_0 \sigma_n^{(1)}} \right]^2 =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\mu_n^{(1)}(\theta) - \mu_n^{(1)}(0)}{\mu_n^{(2)}(\theta) - \mu_n^{(1)}(0)} \cdot \frac{\sigma_n^{(2)}}{\sigma_n^{(1)}} \right]^2 =$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n^{(1)}(\theta) - \mu_n^{(1)}(0)}{\mu_n^{(2)}(\theta) - \mu_n^{(1)}(0)} \cdot \frac{\sigma_n^{(2)}}{\sigma_n^{(1)}} \right]^2$$

Conforme (4.14.) e a definição da eficiência de Bahadur:

$$e_p (T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{b_1(\theta)}{b_2(\theta)} \right]^2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} e_\beta (T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) \quad (4.15.)$$

Só a eficiência de Pitman pode não ser suficiente para verificar o comportamento de um teste em relação a outro, como pode se ver no exemplo a seguir, estudado por Bahadur (1960).

4.5. Exemplo.

Sejam $\{X_{1m}\}$, $\{X_{2m}\}$, $\{X_{km}\}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, k sequências independentes de variáveis aleatórias independentes $X_j^{(i)}$, com $j = 1, 2, 3, \dots$ e $i = 1, 2, \dots, k$, $F(x)$ uma função distribuição contínua com média zero e variância igual a 1.

Supondo que cada sequência $\{X_{ij}\}$, $i = 1, \dots, k$, tenha pelo menos uma observação, que m_i é esse número de observações, o total será

$$n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$$

Para cada, $i = 1, 2, \dots, k$ seja p_i , $0 < p_i < 1$, o limite de $\frac{m_i}{n}$ para $n \rightarrow \infty$.

As sequências em questão são as seguintes

$$\begin{array}{cccc} X_{11} & X_{12} & X_{13} \dots & X_{1m_1} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \dots & X_{2m_2} \\ X_{k1} & X_{k2} & X_{k3} \dots & X_{km_k} \end{array}$$

Representando por μ_i a média de $\{X_{ij}\}$ e por σ^2 a variância comum a todas as sequências e supondo que

$$P(X_{ij} < x) = F\left(\frac{x - \mu_i}{\sigma}\right)$$

Seja $\theta = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ e $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ a hipótese a ser testada através dos testes $T_n^{(1)}$ e $T_n^{(2)}$. Em outras palavras, a hipótese H_0 será testada baseada nas observações x_{ij} tais que $x_{ij} = \mu_i + e_{ij}$, onde e_{ij} é a varia

ção devida ao acaso.

Sejam $T_n^{(1)}$ a raiz quadrada da estatística de Kruskal-Wallis,

$$T_n^{(1)} = \sqrt{\frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^k m_i \left(\bar{R}_{i.} - \frac{n+1}{2} \right)^2} \quad (4.16.)$$

onde $\bar{R}_{i.} = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} R_{ij}$ e R_{ij} é o posto de X_{ij} , e $T_n^{(2)}$

a raiz quadrada da estatística F usual de análise de variância

$$T_n^{(2)} = \sqrt{\frac{(k-1)^{-1} \sum_{i=1}^k m_i \sum_{i=1}^k (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2}{(n-k)^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} (X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2}} \quad (4.17.)$$

$\{T_n^{(1)}\}$ é uma sequência padrão (Kruskal, W.H., 1952), com tendência

$$b_1(\theta) = \sqrt{12 \sum_{i=1}^k p_i \rho_i^2}, \quad (4.18.)$$

onde $\rho_i = \sum_{r=1}^k p_r \int_{-\infty}^{\infty} \left[F\left(x + \frac{\mu_i - \mu_r}{\sigma}\right) - F(x) \right] dF. \quad (4.19.)$

$\{T_n^{(2)}\}$, também é uma sequência padrão, com tendência

$$b_2(\theta) = \sqrt{\sum_{i=1}^k p_i \gamma_i^2} \quad , \quad (4.20.)$$

$$\text{onde } \gamma_i = \sum_{r=1}^k p_r \left(\frac{\mu_i - \mu_r}{\sigma} \right) \quad (4.21.)$$

De acordo com (3.12.)

$$e_{\beta}(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) = 12 \frac{\sum_{i=1}^k p_i \gamma_i^2}{\sum_{i=1}^k p_i \gamma_i^2} \quad (4.22.)$$

Com $\theta \rightarrow \theta_0 = (u, u, \dots, u)$ tem-se $\Delta = \frac{u_j - u_r}{\sigma} \rightarrow 0$
e conseqüentemente,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta) - F(x)}{\Delta} = f(x) \quad (4.23.)$$

que é função densidade de X.

De (4.23.) segue-se que

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} e_{\beta}(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) = \\ & = 12 \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{\sum_{i=1}^k p_i \rho_i^2}{\sum_{i=1}^k p_i \gamma_i^2} = 12 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF \right)^2 \quad , \end{aligned}$$

e de acordo com a conclusão (4.15.)

$$e_p(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) = 12 \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx \right]^2 \quad (4.24.)$$

A expressão (4.24.) é limitada inferiormente por 0,864 (Lehman, 1975), o que pode ser verificado minimizando

$\int f^2(x) dx$ sob as condições:

$$\int f(x) dx = 1, \quad (4.25.)$$

$$\int xf(x) dx = 0, \quad (4.26.)$$

$$\int x^2 f(x) dx = 1, \quad (4.27.)$$

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x. \quad (4.28.)$$

De acordo com o método de multiplicadores de Lagrange é suficiente minimizar

$$\int f^2(x) + 2ax^2 f(x) + 2b f(x) + 2cx f(x) dx \quad (4.29.)$$

Pela condição (4.26.) esta última expressão passa a ser

$$\int [f^2(x) + 2ax^2 f(x) + 2b f(x)] dx, \quad \text{ou}$$

$$\int [f^2(x) + 2(ax^2 + b) f(x)] dx \quad (4.30.)$$

O ponto de mínimo da função quadrática

$$y = f^2(x) + 2(ax^2 + b) f(x) \quad (4.31.)$$

é

$$f(x) = -(ax^2 + b) \quad (4.32.)$$

Dependendo do valor de x esta função pode ser positiva ou negativa. Portanto, a função que minimiza (4.31.) será

$$f(x) = \begin{cases} -(ax^2 + b) & , \text{ se } ax^2 + b < 0 \\ 0 & , \text{ se } ax^2 + b > 0 \end{cases} \quad (4.33.)$$

Fazendo uma mudança de variável a função (4.33.) pode ser escrita como

$$f(x) = \begin{cases} A(B^2 - x^2) & , \text{ se } |x| < B \\ 0 & , \text{ se } |x| \geq B \end{cases} \quad (4.34.)$$

Os valores de A e B que satisfazem as condições (4.25.)- (4.28.) são:

$$B = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad A = \frac{3}{20\sqrt{5}}$$

Sendo assim, $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx$ é igual a $\frac{3\sqrt{5}}{25}$ e, con

sequentemente, o mínimo de (4.24.) será igual a 0,864, ou seja,

$$e_p(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) \geq 0,864.$$

Por outro lado, desde que

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F(x + \Delta) - F(x) dF \right| \leq 1, \text{ se tem}$$

$$|\rho_i| \leq 1 \text{ e, por conseguinte,}$$

$$e_\beta(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) \leq \frac{12}{\sum_{i=1}^k p_i \gamma_i^2}$$

Por isso, a afirmação anterior de que a eficiência relativa assintótica de $T_n^{(1)}$ em relação a $T_n^{(2)}$ é maior, quando muito igual a 0,864, não é válida para a eficiência de Bahadur quando a média de uma das seqüências $\{X_{ij}\}$ for muito diferente das demais, pois em tais circunstâncias $\max\{|\gamma_i|\}$ tende a ∞ e conseqüentemente $e(T_n^{(1)}, T_n^{(2)})$ tenderá a zero (Bahadur, 1960).

Vale a pena, portanto, estudar o comportamento de testes não apenas através da eficiência de Pitman, mas também sob o ponto de vista da definição de Bahadur.

Será feito no estágio seguinte um estudo de Monte Carlo, para amostras finitas, como verificação do resultado deste último exemplo.

CAPITULO II

1. COMPARAÇÃO DO TESTE DE KRUSKAL-WALLIS COM O TESTE F, PARA UM CASO FINITO.

Foi demonstrado no exemplo 4.5. que a eficiência relativa assintótica de Bahadur do teste de Kruskal-Wallis em relação ao teste F tende a zero (ou que a eficiência relativa assintótica do teste F em relação ao de Kruskal-Wallis tende ao infinito) quando uma das médias se afasta indefinidamente das demais. Em outras palavras, foi provado que o teste F é melhor que o de Kruskal-Wallis à medida que a alternativa θ se afasta da hipótese nula, para amostras muito grandes, se este afastamento é do tipo mencionado acima. Questiona-se se o mesmo acontecerá para amostras finitas. Para tal verificação tomou-se uma amostra de tamanho 12 que consiste em 3 subamostras de tamanho 4 cada uma, ou melhor, de 3 populações com médias μ_1 , μ_2 e μ_3 , respectivamente extraiu-se uma amostra de cada uma delas.

Considerando $\theta_0 = (0,0,0)$ e as alternativas θ com μ_1 fixo e igual a zero, foram obtidas as estimativas do poder de $T_n^{(1)}(P_{k_W})$ e de $T_n^{(2)}(P_F)$, através de Monte Carlo* e posteri-

(*) O programa se encontra no Apêndice.

ormente foi calculado o quociente P_F / P_{K_W} para verificar a eficiência de $T_n^{(2)}$ (teste F) em relação a $T_n^{(1)}$ (teste de Kruskal-Wallis), para várias alternativas e para oito distribuições: normal padrão; normais contaminadas: 5N3, 10N3 e 25N3; Cauchy; logística; dupla-exponencial e a normal/uniforme.

A normal contaminada $\alpha N\sigma$ refere-se a uma distribuição com $(1 - \alpha)\%$ dos dados com distribuição normal $(0,1)$ e $\alpha\%$ com distribuição normal com média zero e desvio padrão σ .

2. PROCEDIMENTO

Para se obter as amostras de valores de variáveis com diferentes distribuições foi gerada uma sequência de números aleatórios (com distribuição uniforme $(0,1)$) sendo transformadas então em uma sequência de 12 valores: 4 com média μ_1 , 4 com média μ_2 e 4 com μ_3 , com distribuição K , $K = 1, 2, \dots, 8$.

As distribuições foram assim enumeradas:

k	distribuição
1	Normal $(0,1)$
2	Normal 5N3
3	Normal 10N3
4	Normal 25N3
5	Cauchy
6	Logística

7 Dupla Exponencial (Laplace)

8 Normal/Uniforme

Para gerar os valores da variável com distribuição de Cauchy, logística e dupla-exponencial foi usada a inversa da função distribuição, ou seja, o teorema da transformação da Integral de Probabilidade.

Se X tem distribuição de Cauchy então:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

é a sua função densidade. A função distribuição é:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \frac{\arctan(x)}{\pi}$$

cuja função inversa será:

$$F^{-1}(u) = \tan \left[\pi \left(u - \frac{1}{2} \right) \right]$$

Se X tem distribuição logística a função densidade é:

$$f(x) = \frac{1}{4} \left[\operatorname{sech} \left(\frac{x}{2} \right) \right]^2, \quad -\infty < x < \infty$$

de modo que

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

e conseqüentemente,

$$F^{-1}(u) = \log \left(\frac{1-u}{u} \right)$$

Para a variável aleatória X com distribuição dupla exponencial a função densidade será:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$$

e a função distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & , \text{ se } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^x & , \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Portanto, a inversa será:

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} \log 2u & \text{ se } u \leq 1/2 \\ -\log 2(1-u) & \text{ se } u > 1/2 \end{cases}$$

Para a geração de variáveis com distribuição normal(0,1) foi usado o método desenvolvido por Box e Muller (1958). Segundo este método para cada par de variáveis aleatórias uniformes independentes (U_1, U_2) se obtém um par (X_1, X_2) de variáveis aleatórias independentes de uma distribuição normal (0, 1) da seguinte forma:

$$x_1 = (-2 \log u_1)^{1/2} \cos 2 \pi u_2$$

$$x_2 = (-2 \log u_1)^{1/2} \text{ sen } 2 \pi u_2$$

Para a geração de valores de variáveis normais contaminadas foram usados mais dois números aleatórios para cada par de normal (0, 1) os quais decidiram a contaminação. Por exemplo, na normal 5N3 decidia-se pela distribuição contaminada com variância 9 se o valor do número aleatório u fosse maior que 0,95. Em 10N3 se u fosse maior que 0,90 e na normal 25N3 se fosse maior que 0,75.

Para a geração de valores da normal/uniforme foram tomados os quocientes entre os valores da distribuição normal (0, 1) e os valores da distribuição uniforme usados para decidir a contaminação nas distribuições 2, 3 e 4. Não foram usados os valores da primeira sequência de uniformes, pois aqueles foram usados no cálculo dos valores do numerador e sendo assim as duas distribuições, a normal e a uniforme, deixariam de ser independentes.

Com as amostras geradas da maneira como foi exposta foram calculadas as estatísticas $T_n^{(1)}$ e $T_n^{(2)}$ para cada uma das 8 distribuições.

Esse processo foi repetido 2.500 vezes para cada alternativa $\theta = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ e em cada uma delas foi verificado se cada um dos testes aceitava ou rejeitava a hipótese ao nível de 10%, calculando-se os quocientes número de rejeições os quais foram tomados como estimativas dos poderes.

2.500

Os resultados obtidos encontram-se nas tabelas I, II, ..., VIII que seguem.

3. TABELAS

μ_1	μ_2	μ_3	$P_{kw} = \text{Poder de } T_n^{(1)}$	$P_F = \text{Poder de } T_n^{(2)}$	P_F / P_{kw}
0	2	4	0,997	0,998	1,001
0	1	4	0,998	0,998	1,000
0	0,5	4	0,999	0,999	1,000
0	0,25	4	1,000	1,000	1,000
0	0,1	4	1,000	1,000	1,000
0	1	2	0,655	0,701	1,070
0	0,5	2	0,698	0,733	1,050
0	0,25	2	0,740	0,768	1,038
0	0,1	2	0,763	0,796	1,043
0	0,5	1	0,266	0,278	1,045
0	0,25	1	0,272	0,284	1,044
0	0,125	1	0,290	0,302	1,041
0	0,0625	1	0,298	0,313	1,050
0	0,25	0,5	0,147	0,154	1,048
0	0,125	0,5	0,150	0,158	1,053
0	0,0625	0,5	0,155	0,161	1,039
0	0,03725	0,5	0,157	0,160	1,019
0	0,5	3,0	0,964	0,978	1,015
0	0,25	2,25	0,825	0,964	1,047
0	0,125	1,6875	0,614	0,652	1,062

TABELA I - Estimativas dos poderes para a distribuição Normal(0,1)

μ_1	μ_2	μ_3	$P_{kw} = \text{Poder de } T_n^{(1)}$	$P_F = \text{Poder de } T_n^{(2)}$	P_F / P_{kw}
0	2	4	0,965	0,973	1,008
0	1	4	0,969	0,978	1,009
0	0,5	4	0,971	0,982	1,011
0	0,25	4	0,972	0,984	1,012
0	0,1	4	0,972	0,986	1,014
0	1	2	0,604	0,618	1,023
0	0,5	2	0,641	0,651	1,016
0	0,25	2	0,675	0,680	1,007
0	0,1	2	0,697	0,708	1,016
0	0,5	1	0,251	0,248	0,988
0	0,25	1	0,257	0,254	0,988
0	0,125	1	0,270	0,271	1,004
0	0,0625	1	0,275	0,278	1,011
0	0,25	0,5	0,142	0,140	0,986
0	0,125	0,5	0,147	0,140	0,952
0	0,0625	0,5	0,150	0,146	0,973
0	0,03725	0,5	0,152	0,145	0,954
0	0,5	3,0	0,906	0,919	1,014
0	0,25	2,25	0,760	0,772	1,016
0	0,125	1,6875	0,563	0,580	1,030

TABELA II - Estimativas dos poderes para a distribuição Normal Contaminada 5 N 3

μ_1	μ_2	μ_3	$P_{kw} = \text{Poder de } T_n^{(1)}$	$P_F = \text{Poder de } T_n^{(2)}$	P_{kw} / P_F
0	2	4	0,934	0,941	1,007
0	1	4	0,939	0,952	1,014
0	0,5	4	0,944	0,957	1,014
0	0,25	4	0,947	0,962	1,016
0	0,1	4	0,946	0,965	1,020
0	1	2	0,555	0,552	0,995
0	0,5	2	0,588	0,583	0,991
0	0,25	2	0,617	0,612	0,992
0	0,1	2	0,638	0,638	1,000
0	0,5	1	0,241	0,229	0,950
0	0,25	1	0,241	0,229	0,950
0	0,125	1	0,251	0,242	0,964
0	0,0625	1	0,254	0,250	0,984
0	0,25	0,5	0,135	0,128	0,948
0	0,125	0,5	0,137	0,128	0,934
0	0,0625	0,5	0,142	0,133	0,937
0	0,03725	0,5	0,144	0,131	0,910
0	0,5	3,0	0,857	0,868	1,013
0	0,25	2,25	0,702	0,706	1,006
0	0,125	1,6875	0,512	0,516	1,008

TABELA III - Estimativas dos poderes para a distribuição Normal Contaminada 10 N 3.

μ_1	μ_2	μ_3	$P_{kw} = \text{Poder de } T_n^{(1)}$	$P_F = \text{Poder de } T_n^{(2)}$	P_F / P_{kw}
0	2	4	0,827	0,832	1,006
0	1	4	0,834	0,848	1,016
0	0,5	4	0,839	0,863	1,029
0	0,25	4	0,850	0,874	1,028
0	0,1	4	0,852	0,881	1,034
0	1	2	0,440	0,406	0,923
0	0,5	2	0,458	0,417	0,910
0	0,25	2	0,478	0,444	0,929
0	0,1	2	0,500	0,464	0,928
0	0,5	1	0,198	0,170	0,859
0	0,25	1	0,201	0,176	0,876
0	0,125	1	0,207	0,185	0,894
0	0,0625	1	0,211	0,191	0,905
0	0,25	0,5	0,126	0,113	0,897
0	0,125	0,5	0,127	0,115	0,906
0	0,0625	0,5	0,129	0,114	0,884
0	0,03725	0,5	0,132	0,114	0,864
0	0,5	3,0	0,700	0,705	1,007
0	0,25	2,25	0,555	0,530	0,955
0	0,125	1,6875	0,395	0,362	0,916

TABELA IV - Estimativas dos poderes para a distribuição Normal Contaminada 25 N 3.

μ_1	μ_2	μ_3	$P_{kw} = \text{Poder de } T_n^{(1)}$	$P_F = \text{Poder de } T_n^{(2)}$	P_F / P_{kw}
0	2	4	0,528	0,345	0,653
0	1	4	0,531	0,362	0,682
0	0,5	4	0,534	0,380	0,712
0	0,25	4	0,538	0,393	0,730
0	0,1	4	0,545	0,400	0,734
0	1	2	0,280	0,154	0,550
0	0,5	2	0,293	0,155	0,530
0	0,25	2	0,310	0,162	0,523
0	0,1	2	0,317	0,170	0,536
0	0,5	1	0,142	0,072	0,507
0	0,25	1	0,148	0,072	0,486
0	0,125	1	0,153	0,076	0,497
0	0,0625	1	0,157	0,078	0,497
0	0,25	0,5	0,096	0,051	0,531
0	0,125	0,5	0,096	0,051	0,531
0	0,0625	0,5	0,100	0,052	0,520
0	0,03725	0,5	0,100	0,053	0,540
0	0,5	3,0	0,433	0,270	0,624
0	0,25	2,25	0,342	0,192	0,561
0	0,125	1,6875	0,262	0,136	0,519

TABELA V - Estimativas dos poderes para a distribuição de Cauchy.

μ_1	μ_2	μ_3	$P_{kw} = \text{Poder de } T_n^{(1)}$	$P_F = \text{Poder de } T_n^{(2)}$	P_F / P_{kw}
0	2	4	0,759	0,788	1,038
0	1	4	0,785	0,814	1,037
0	0,5	4	0,808	0,842	1,042
0	0,25	4	0,821	0,859	1,046
0	0,1	4	0,837	0,870	1,039
0	1	2	0,325	0,340	1,046
0	0,5	2	0,345	0,355	1,029
0	0,25	2	0,366	0,376	1,027
0	0,1	2	0,380	0,396	1,042
0	0,5	1	0,152	0,157	1,033
0	0,25	1	0,158	0,162	1,025
0	0,125	1	0,166	0,169	1,018
0	0,0625	1	0,170	0,173	1,018
0	0,25	0,5	0,106	0,109	1,028
0	0,125	0,5	0,107	0,110	1,028
0	0,0625	0,5	0,111	0,114	1,027
0	0,03725	0,5	0,114	0,114	1,000
0	0,5	3,0	0,596	0,628	1,054
0	0,25	2,25	0,429	0,452	1,054
0	0,125	1,6875	0,303	0,318	1,050

TABELA VI - Estimativas dos poderes para a distribuição Logística.

μ_1	μ_2	μ_3	$P_{kw} = \text{Poder de } T_n^{(1)}$	$P_F = \text{Poder de } T_n^{(2)}$	P_F / P_{kw}
0	2	4	0,974	0,980	1,006
0	1	4	0,966	0,982	1,017
0	0,5	4	0,965	0,984	1,020
0	0,25	4	0,965	0,984	1,020
0	0,1	4	0,964	0,986	1,023
0	1	2	0,754	0,747	0,991
0	0,5	2	0,754	0,764	1,013
0	0,25	2	0,767	0,790	1,030
0	0,1	2	0,776	0,808	1,041
0	0,5	1	0,396	0,344	0,869
0	0,25	1	0,405	0,369	0,911
0	0,125	1	0,422	0,392	0,929
0	0,0625	1	0,432	0,406	0,940
0	0,25	0,5	0,185	0,158	0,854
0	0,125	0,5	0,194	0,165	0,951
0	0,0625	0,5	0,203	0,175	0,862
0	0,03725	0,5	0,206	0,180	0,874
0	0,5	3,0	0,909	0,941	1,035
0	0,25	2,25	0,813	0,852	1,048
0	0,125	1,6875	0,694	0,714	1,029

TABELA VII - Estimativas dos poderes para a distribuição Dupla-Exponencial.

μ_1	μ_2	μ_3	$P_{kw} = \text{Poder de } T_n^{(1)}$	$P_F = \text{Poder de } T_n^{(2)}$	P_F / P_{kw}
0	2	4	0,413	0,260	0,630
0	1	4	0,416	0,264	0,635
0	0,5	4	0,428	0,280	0,654
0	0,25	4	0,437	0,287	0,657
0	0,1	4	0,445	0,292	0,656
0	1	2	0,205	0,116	0,566
0	0,5	2	0,206	0,120	0,583
0	0,25	2	0,210	0,123	0,586
0	0,1	2	0,221	0,130	0,588
0	0,5	1	0,129	0,075	0,581
0	0,25	1	0,127	0,074	0,583
0	0,125	1	0,129	0,074	0,574
0	0,0625	1	0,132	0,074	0,561
0	0,25	0,5	0,108	0,067	0,620
0	0,125	0,5	0,108	0,066	0,611
0	0,0625	0,5	0,108	0,064	0,593
0	0,03725	0,5	0,106	0,064	0,604
0	0,5	3,0	0,318	0,196	0,616
0	0,25	2,25	0,243	0,147	0,605
0	0,125	1,6875	0,185	0,107	0,578

TABELA VIII - Estimativas dos poderes para a distribuição Normal/Uniforme.

4. GRÁFICOS

Nos gráficos estão representados os valores do quociente P_F / P_{k_w} iniciando-se a escala em diferentes valores, em cada caso para destacar melhor a variação do referido quociente. Assim, no caso da tabela V foram tomados os valores de P_F / P_{k_w} menos 0,4, da tabela VIII os valores de P_F / P_{k_w} menos 0,5 e das demais foram subtraídas 0,8 do quociente dos poderes.

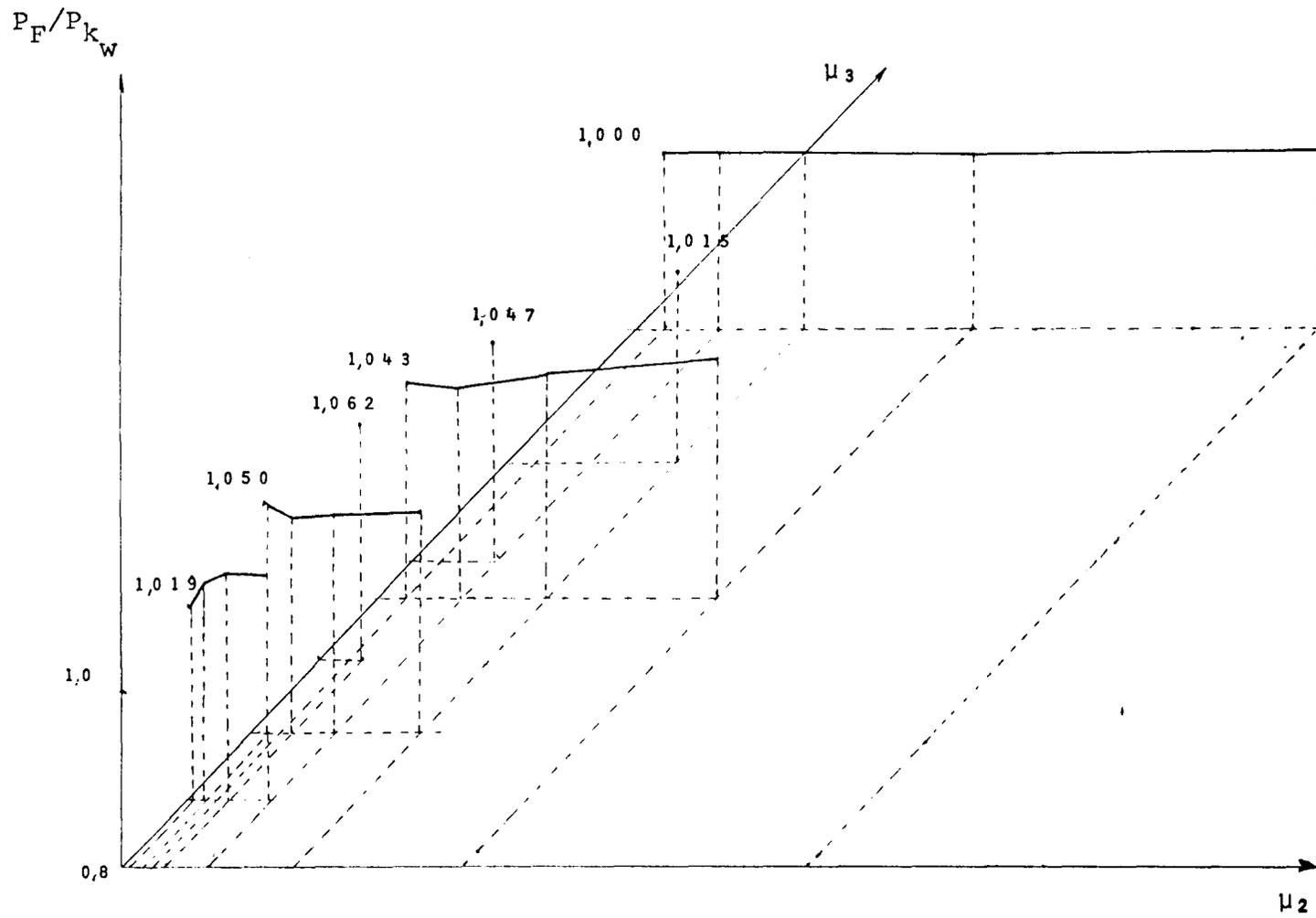


Fig. 1 - Gráfico de P_F / P_{K_W} para distribuição $N(0,1)$

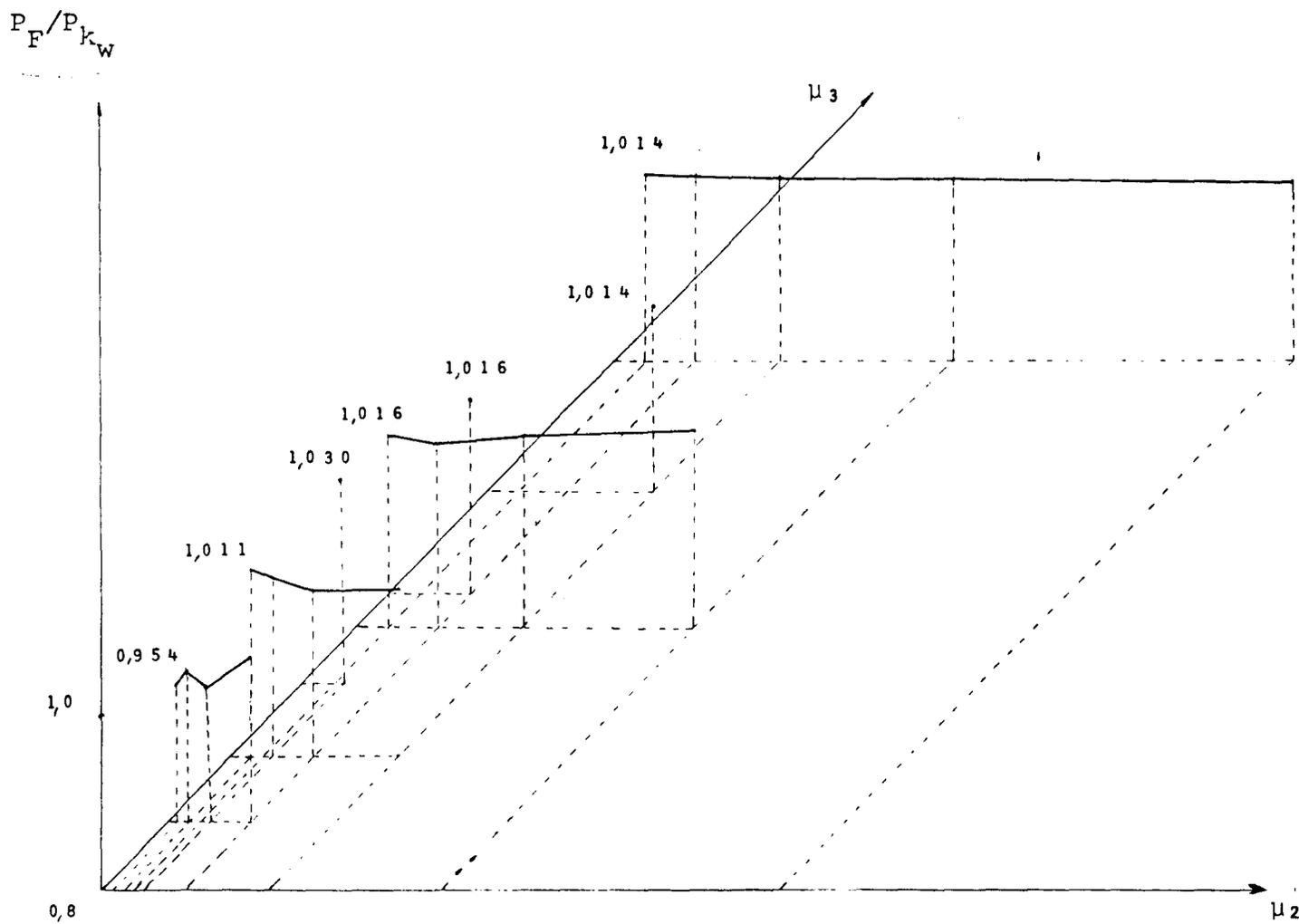


Fig. 2 - Gráfico de P_F / P_{k_W} para distribuição normal contaminada 5N3

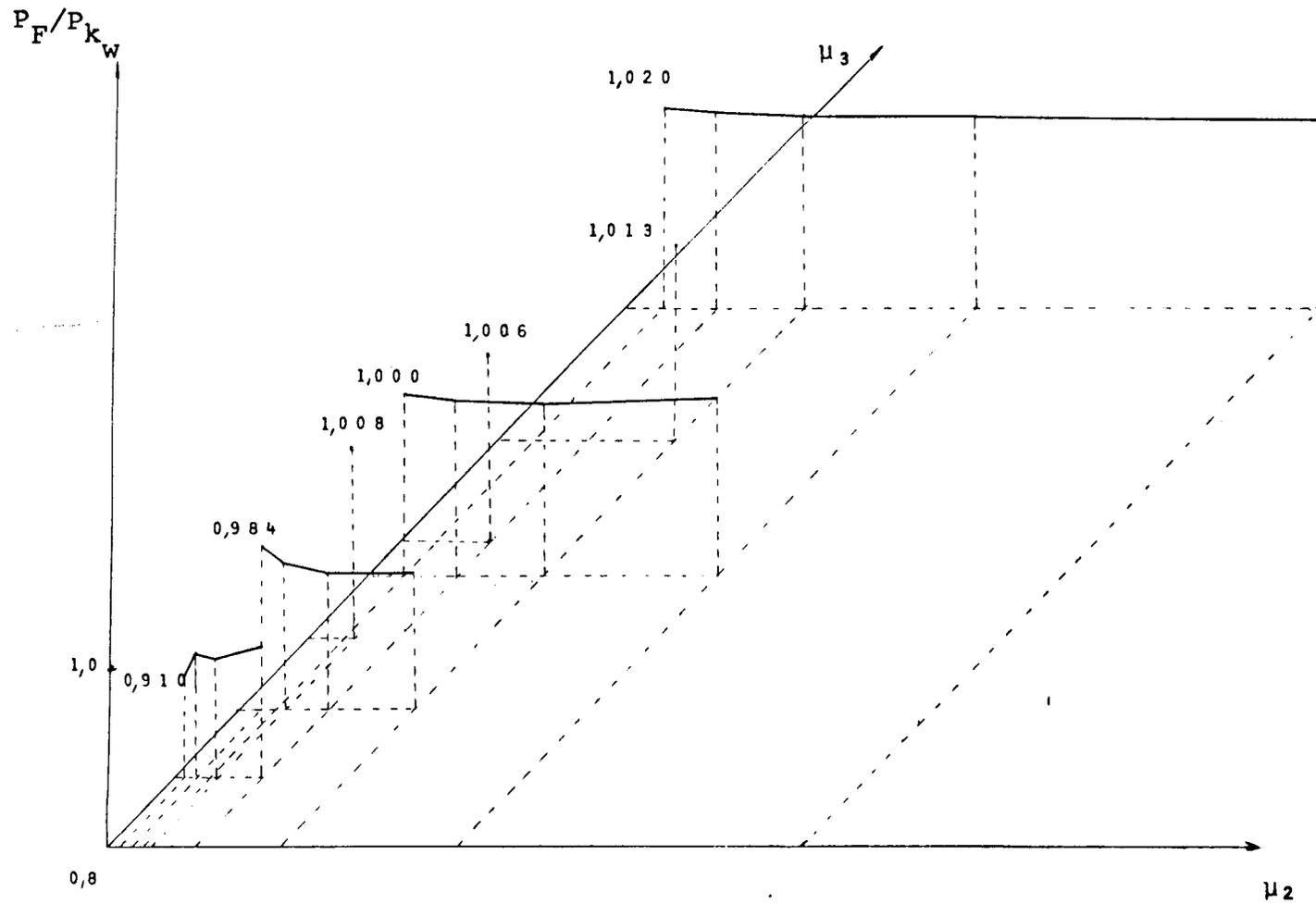


Fig. 3 - Gráfico de P_F / P_{k_W} para distribuição normal contaminada 10N3.

4226/BC

UNICAMP
RIBICION CENTRAL

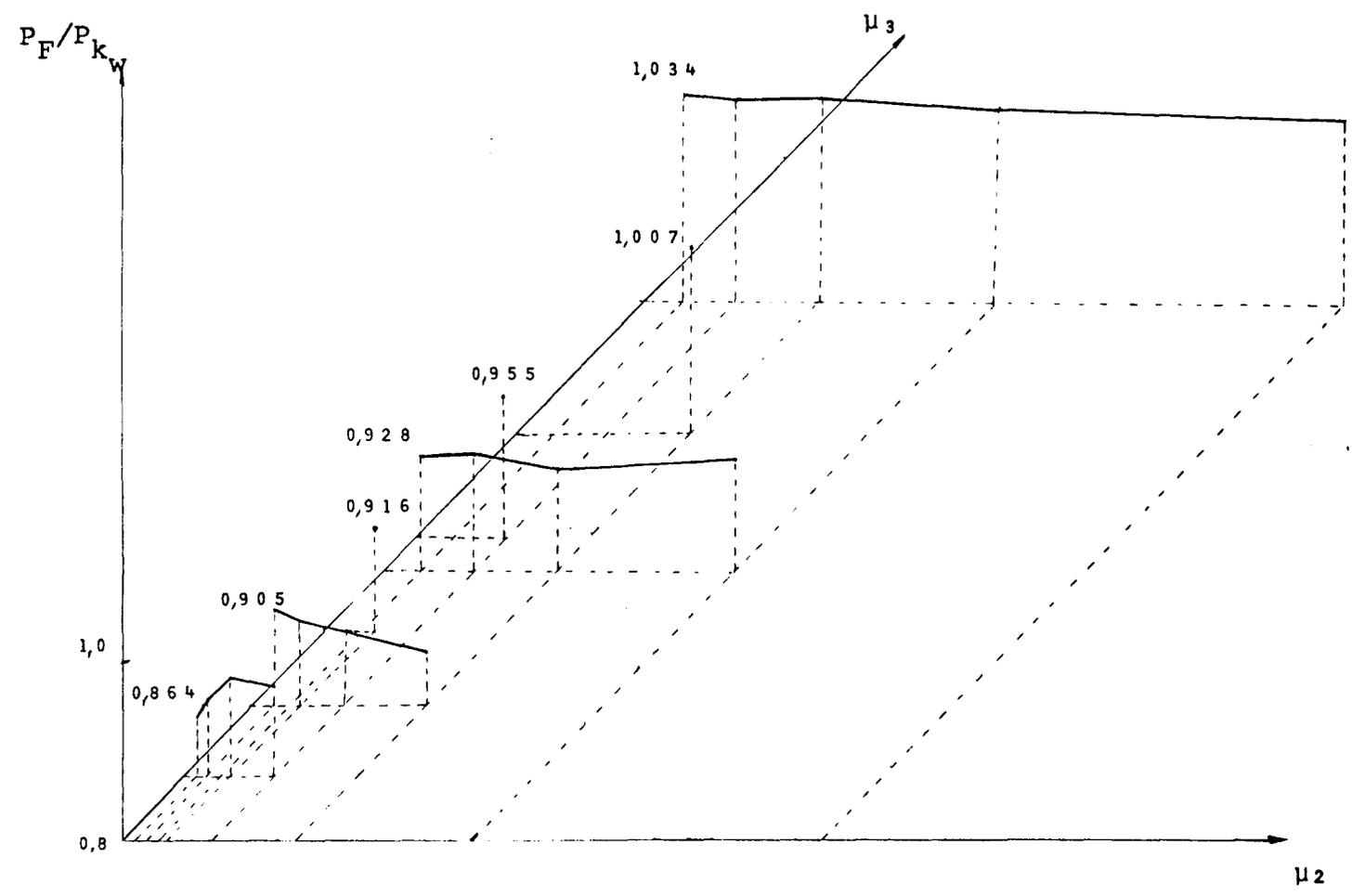


Fig. 4 - Gráfico de P_F / P_{k_W} para distribuição normal contaminada 25N3

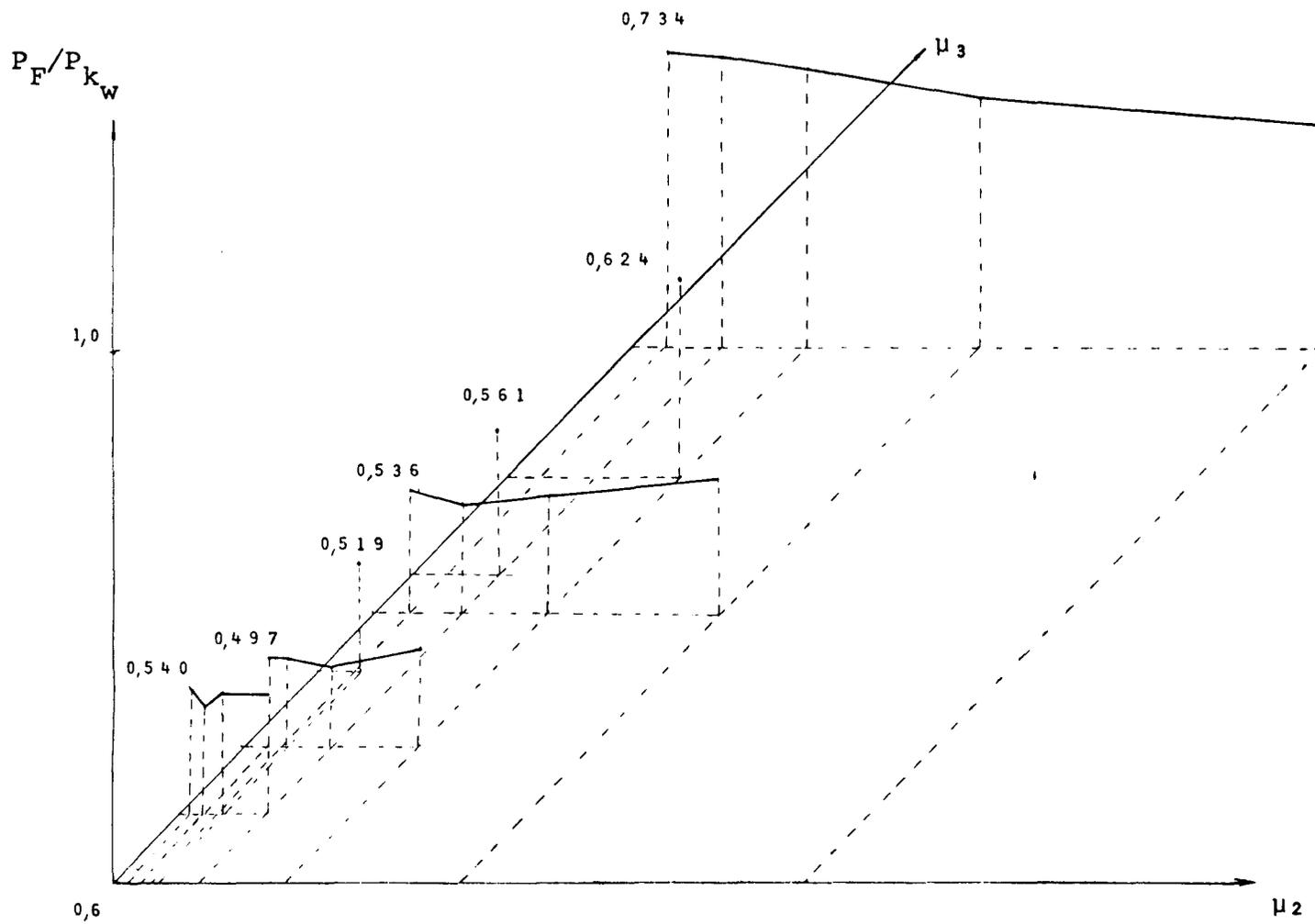


Fig. 5 - Gráfico de P_F / P_{k_W} para distribuição de Cauchy.

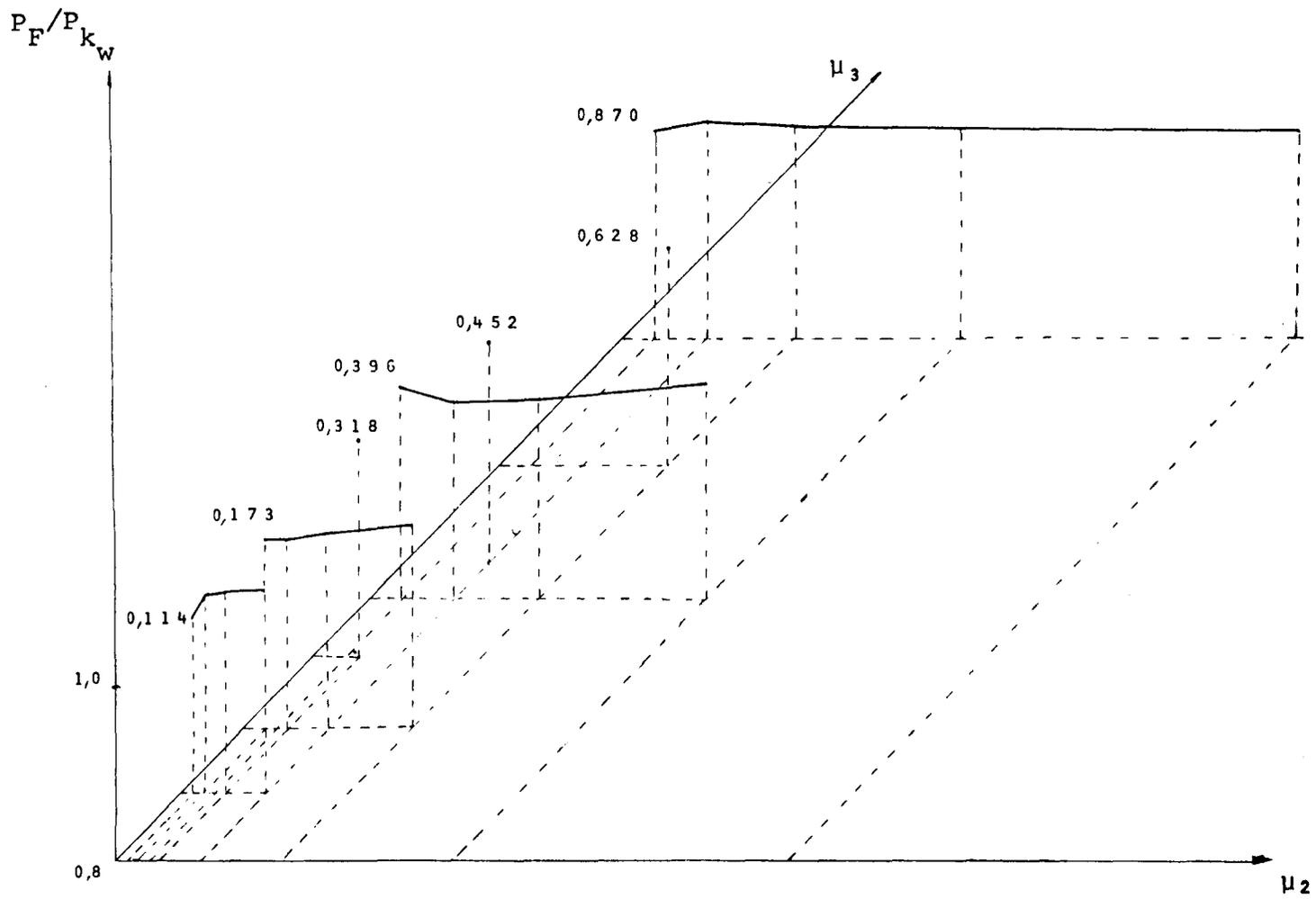


Fig. 6 - Gráfico de P_F/P_{K_W} para distribuição Logística.

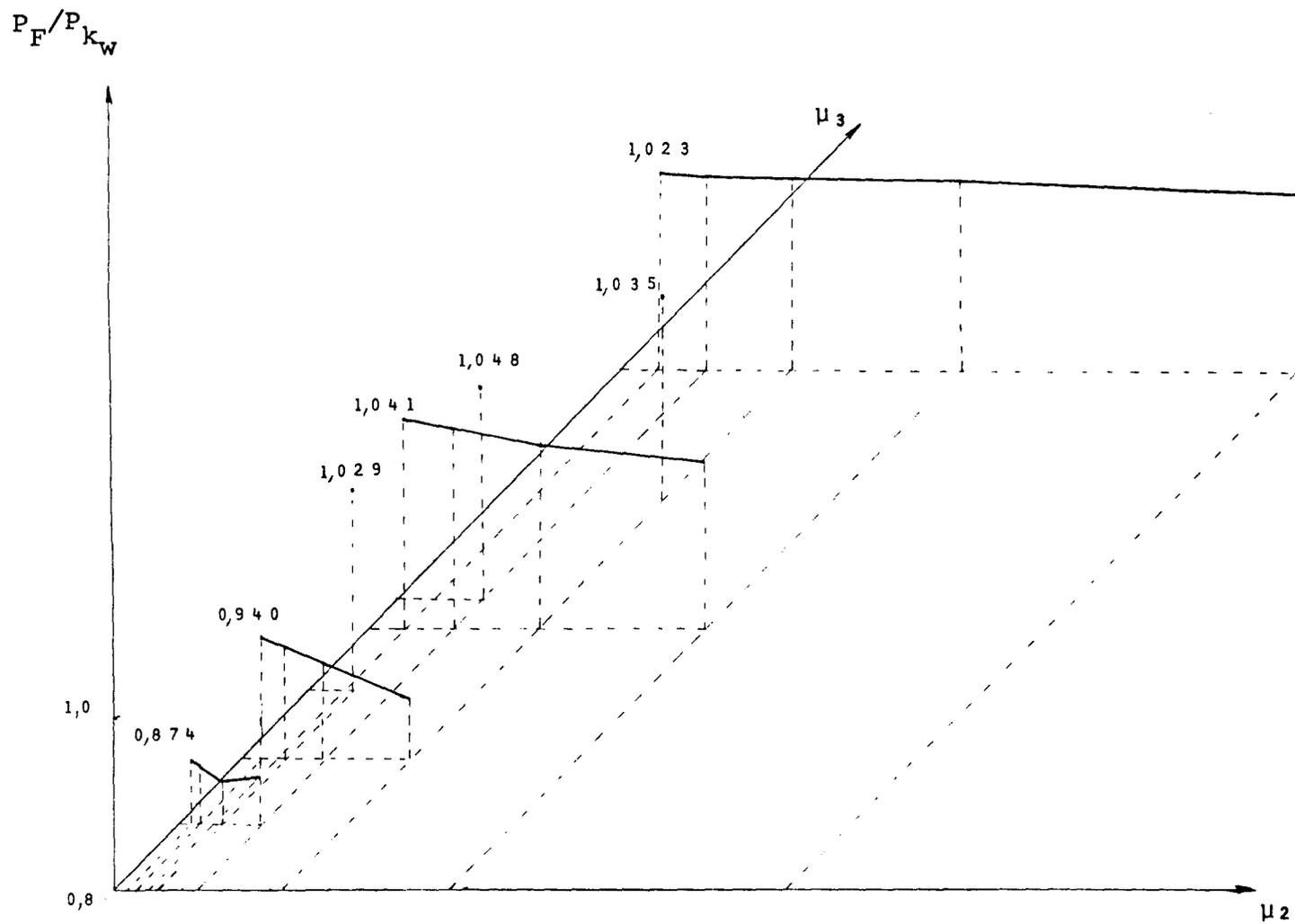


Fig. 7 - Gráfico de P_F/P_{K_W} para distribuição Dupla Exponencial.

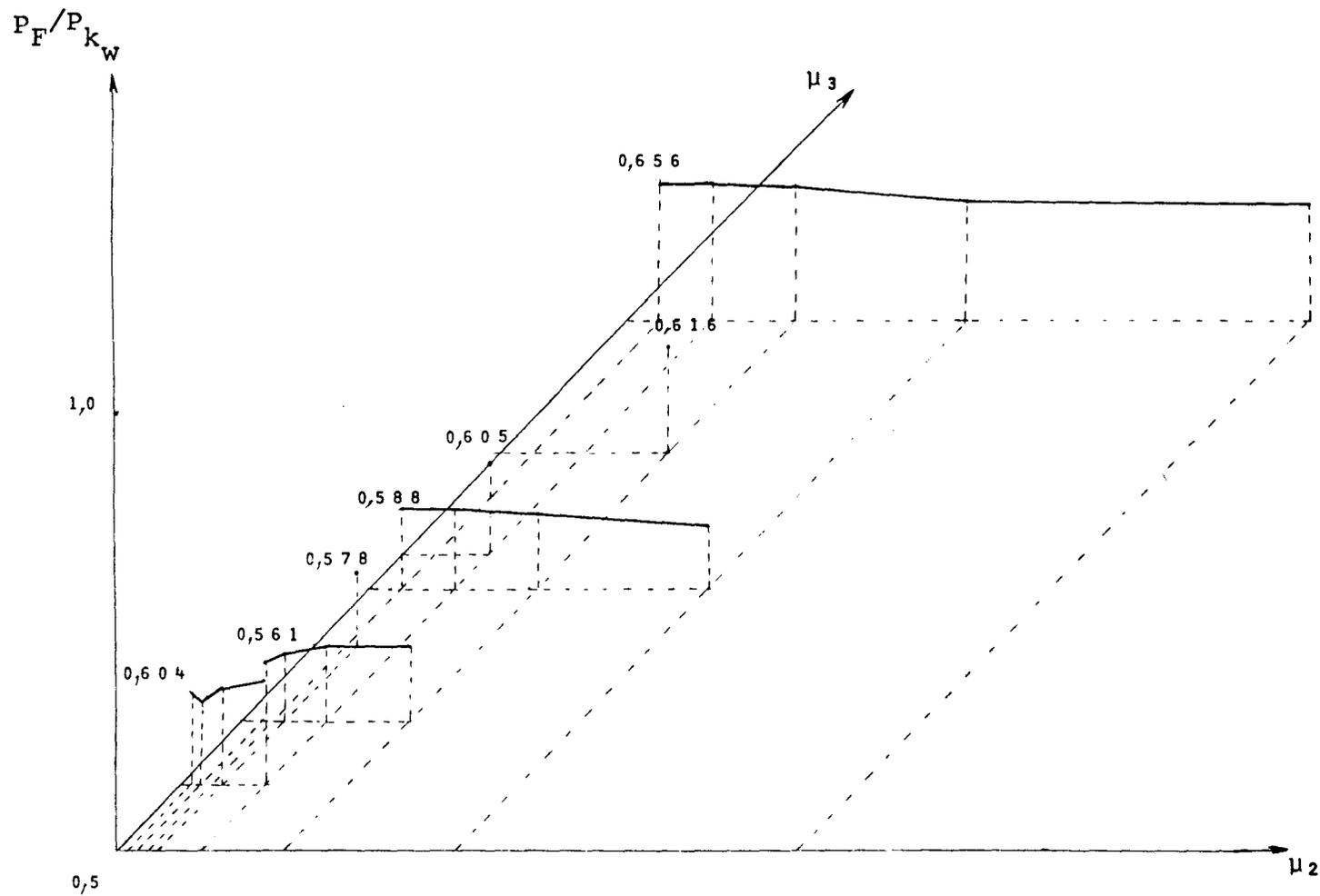


Fig. 8 - Gráfico de P_F/P_{k_W} para distribuição Normal/Uniforme.

5. ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÃO

Fixando duas médias: μ_1 e μ_3 , à medida que μ_2 cresce, de acordo com o Bahadur, o quociente P_F / P_{K_W} deveria crescer, mas, não é isso que se verifica com a análise das tabelas e dos gráficos. Há casos como na distribuição de Cauchy e na normal/uniforme que se verifica até um pequeno decréscimo na razão entre os poderes, quando μ_2 cresce. De um modo geral, com exceção das duas distribuições citadas, a razão P_F / P_{K_W} se mantém quase constante, aproximadamente igual a 1 com pequenas variações, o que significa que $T_n^{(2)}$ é tão bom quanto $T_n^{(1)}$.

Nas distribuições de Cauchy e na normal/uniforme, embora o quociente seja pequeno, não se pode afirmar que $T_n^{(1)}$ seja melhor que $T_n^{(2)}$, pois nessas distribuições o poder do teste F deveria ser o próprio $\alpha = 0,10$. Analisando os poderes nessas distribuições nota-se que próximo da hipótese eles são muito baixos e longe da hipótese são significativos.

De acordo com a eficiência relativa assintótica de Pitman o teste de Kruskal-Wallis deveria ser mais eficiente que o teste F, mas, segundo Bahadur o teste F deveria ser muito mais eficiente que o de Kruskal-Wallis quando se tem a alternativa longe da hipótese. Em casos finitos, como neste último exemplo, verifica-se que isso não acontece. Um é tão eficiente quanto o outro. De modo que ao deparar com problemas que podem ser resolvidos tanto pelo teste de Kruskal-Wallis como pelo teste F é aconselhável

selhável o uso deste último, pois ele é tão eficiente quanto o outro e tem a vantagem de ser mais simples de usar. O que aliás de certa forma confirma o que ocorre em outras situações, como em Dachs e Migon (1978).

O conceito de eficiência de Bahadur, bem mais complicado que o de Pitman, tem pouca utilidade pois as possíveis discrepâncias da primeira em relação à segunda se verificam apenas em pontos bastante afastados da hipótese, de qualquer forma, em geral, a não ser em casos bastante patológicos (Cauchy e normal/uniforme, por exemplo) os poderes já são praticamente iguais a um.

1. PROGRAMA PARA O CÁLCULO DO PODER POR MONTE CARLO.

```

C      PROGRAMA PRINCIPAL
C      INICIO DO PROGRAMA
      DIMENSION X(3,4,8),ALFA(3),Y(12,8),R(3,4,8),POST(12,8),NKW(8)
      1,NF(8),PKW(8),PF(8)
      READ(48,101)N,(ALFA(I),I=1,3)
      WRITE(58,101)N,(ALFA(I),I=1,3)
101    FORMAT (1G,3F)
      DO 89 K=1,8
      NKW(K)=0
      NF(K)=0
89    CONTINUE
      DO 93 IND=1,N
C      GERACAO DE AMOSTRAS

C      CHAMADA DA SUBROTINA(ALFA,X)
      CALL GERA(ALFA,X)
C      LINEARIZACAO DA MATRIZ (I,J)
      DO 90 K=1,8
      DO 90 I=1,3
      DO 90 J=1,4
      L=4*(I-1)+J
      Y(L,K)=X(I,J,K)
90    CONTINUE
C      ATRIBUICAO DE POSTOS
      DO 87 K=1,8
      CALL POSIO(Y,K,POST)
87    CONTINUE
      DO 92 K=1,8
      DO 92 I=1,3
      DO 92 J=1,4
      L=4*(I-1)+J
      R(I,J,K)=POST(L,K)
92    CONTINUE
C      CALCULO DE TN1(KRUSKAL-WALLIS) E TN2(TESTE F)
      DO 93 K=1,8
C      CALCULO DA ESTATISTICA TN1
      CALL TESTK(R,K,TN1)
C      CALCULO DA ESTATISTICA TN2
      CALL TESTF(X,K,TN2)
      IF(TN1.GE.4.65)NKW(K)=NKW(K)+1
      IF(TN2.GE.3.01)NF(K)=NF(K)+1
93    CONTINUE

```

```

C      CALCULO DO PODER
      DO 95 K=1,8
      PKW(K)=NKW(K)/FLOAT(N)
      PF(K)=NF(K)/FLOAT(N)
95     CONTINUE
C      IMPRESSAO DO PODER
      WRITE(58,96)(PKW(K),PF(K),K=1,8)
96     FORMAT(/,6X,'PODER DE TN1',6X,'PODER DE TN2',/,8(6X,F,10X,F,/))
C      FIM DO PROGRAMA
      STOP
      END

```

```

      SUBROUTINE GERA(ALFA,X)
      DIMENSIONX(3,4,8),ALFA(3),U(12)
C      GERACAO DE UNIFORMES
      DO 100 M=1,12
      U(M)=RAN(125)
100    CONTINUE
C      GERACAO DA DISTRIBUICAO K
      DO 50 I=1,3
      DO 50 J=1,4,2
C      VALORES DA DISTRIBUICAO NORMAL PADRAO
      L=4*(I-1)+J
      V=ALOG(U(L))
      X(I,J,1)=SQRT(-2*V)*COS(2*3.1416*U(L+1))
      X(I,J+1,1)=SQRT(-2*V)*SIN(2*3.1416*U(L+1))
C      VALORES DA DISTRIBUICAO 5N3
      UC1=RAN(037)
      UC2=RAN(341)
      X(I,J,2)=X(I,J,1)
      X(I,J+1,2)=X(I,J+1,1)
      IF(UC1.GE.0.95)X(I,J,2)=X(I,J,2)*3.
      IF(UC2.GE.0.95)X(I,J+1,2)=X(I,J+1,2)*3.
C      VALORES DA DISTRIBUICAO 10N3
      X(I,J,3)=X(I,J,1)
      IF(UC1.GE.0.90)X(I,J,3)=X(I,J,3)*3.
      X(I,J+1,3)=X(I,J+1,1)
      IF(UC2.GE.0.90)X(I,J+1,3)=X(I,J+1,3)*3.
C      VALORES DA DISTRIBUICAO 25N3
      X(I,J,4)=X(I,J,1)
      IF(UC1.GE.0.75)X(I,J,4)=X(I,J,4)*3.
      X(I,J+1,4)=X(I,J+1,1)
      IF(UC2.GE.0.75)X(I,J+1,4)=X(I,J+1,4)*3.
C      VALORES DA DISTRIBUICAO DE CAUCHY
      X(I,J,5)=SIN(3.1416*U(L)-0.5)/COS(3.1416*U(L)-0.5)
      X(I,J+1,5)=SIN(3.1416*U(L+1)-0.5)/COS(3.1416*U(L+1)-0.5)

```

```

C      VALORES DA DISTRIBUICAO LOGISTICA
      X(I,J,6)=ALOG((1-U(L))/U(L))
      X(I,J+1,6)=ALOG((1-U(L+1))/U(L+1))
C      VALORES DA DISTRIBUICAO DE LAPLACE
      IF(U(L)-0.5)40,40,45
40     X(I,J,7)=ALOG(2*U(L))
      GO TO 41
45     Y1=1-U(L)
      X(I,J,7)=-ALOG(2*Y1)
41     IF(U(L+1)-0.5)43,43,46
43     X(I,J+1,7)=ALOG(2*U(L+1))
      GO TO 48
46     Y2=1-U(L+1)
      X(I,J+1,7)=-ALOG(2*Y2)
C      VALORES DA DISTRIB.NORMAL/UNIFORME
48     X(I,J,8)=X(I,J,1)/UC1
      X(I,J+1,8)=X(I,J+1,1)/UC2
50     CONTINUE
      DO 60 I=1,3
      DO 60 J=1,4
      DO 60 K=1,8
      X(I,J,K)=X(I,J,K)+ALFA(I)
60     CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE POSTO(Y,K,POST)
DIMENSION Y(12,8),POST(12,8)
C      ATRIBUICAO DE POSTOS AOS VALORES DE(Y(L),L=1,12)
      DO 15 L=1,12
      ORD=1.
      AUX=Y(L,K)
      DO 20 M=1,12
      IF(AUX-Y(M,K))20,20,18
18     ORD=ORD+1.
20     CONTINUE
      POST(L,K)=ORD
15     CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

SUBROUTINE TESTK(R,K,TN1)
DIMENSION R(3,4,8),SR(3),PM(3)
DO 10 I=1,3
SR(I)=0
DO 11 J=1,4
SR(I)=SR(I)+R(I,J,K)
11 CONTINUE
RM(I)=SR(I)/4
10 CONTINUE
STR=SR(1)+SR(2)+SR(3)
RMG=STR/12
SQD=0
DO 12 I=1,3
SQD=SQD+(RM(I)-RMG)**2
12 CONTINUE
C CALCULO DA ESTATISTICA DE KRUSKAL-WALLIS
TN1=(4./13.*SQD)
RETURN
END

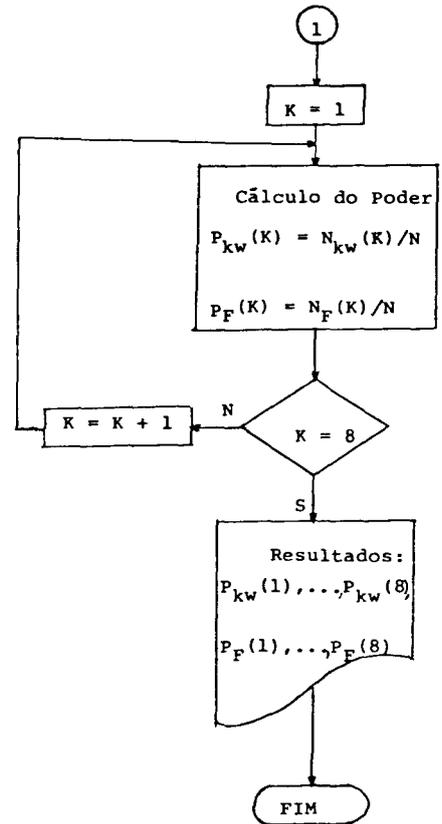
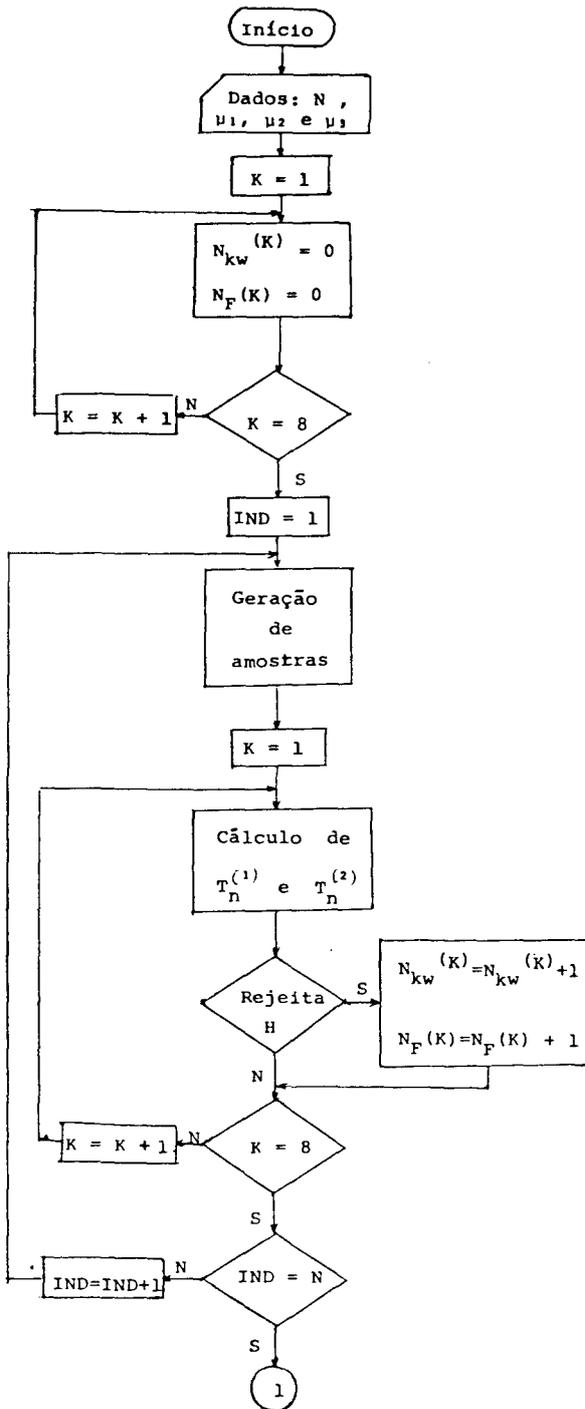
```

```

SUBROUTINE TESTF(X,K,TN2)
DIMENSION X(3,4,8),SOM(3),XM(3)
DO 4 I=1,3
SOM(I)=0
DO 3 J=1,4
SOM(I)=SOM(I)+X(I,J,K)
3 CONTINUE
XM(I)=SOM(I)/4
4 CONTINUE
SOMG=SOM(1)+SOM(2)+SOM(3)
XMG=SOMG/12
SQDE=0
DO 5 I=1,3
SQDE=SQDE+(XM(I)-XMG)**2
5 CONTINUE
SQDT=0
DO 6 I=1,3
DO 6 J=1,4
SQDT=SQDT+(X(I,J,K)-XM(I))**2
6 CONTINUE
C CALCULO DA ESTATISTICA F
TN2=(18*SQDE/SQDT)
RETURN
END

```

2. FLUXOGRAMA



REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- BAHADUR, R.R. (1960) - Stochastic comparison of tests. - Ann. Math. Statist. 31, 276-295.
- BOX and MULLER (1958) - A note on the generation of Normal deviates. - Ann. Math. Statist. 29, 610-611.
- DACHS, J.N. e MIGON, H.S. (1978) - Comparison of tests for the two-way layout. - J. Statist. Comput., Simul. - Vol. 7, 1-11.
- KENDALL, M.G. and STUART, A. (1969) - The advanced theory of Statistics. - Vol. II, 2a. edição, New York, Hafner.
- KNUTH, D.E. (1973) - The art of computer programming. - Addison Wesley, Vol. 1.
- KRUSKALL, W.H. (1952) - A Nonparametric test for the several sample problem. - Ann. Math. Statist. 23, 525-540.
- LEHMAN, E.L. (1975) - Nonparametric Statistical Methods based on ranks. - Holden-Day Inc.
- SCHMETTERER, L. (1974) - Introduction to Mathematical Statistics. - Springer-Verlag.