# OS FATORES INVARIANTES DE MÓDULOS SOBRE ANÉIS DE DEDEKIND

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. Cláudia Helena Dezotti e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 19 de agosto de 1988

Prof. Dr. Paulo Roberto Brumatti

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

"O matemático não estuda a matematica pura porque ela seja útil; ele a estuda porque deleita-se com ela, e deleita-se com ela porque ela é bela."

*Poincarè*

A meus pais

*Agradecimentos*

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todos que de alguma forma colaboraram para a conclusão deste trabalho e, mesmo correndo o risco do esquecimento, gostaria de agradecer a algumas pessoas que me foram de particular importância.

Em primeiro lugar, ao Prof. Paulo Brumatti que muito mais que orientador me serve como exemplo de pessoa e de profissional.

Ao Prof. Antônio Paques pelo seu apoio e orientação no início de meu mestrado.

Ao Prof. Francisco Thayne pelo incentivo.

Aos amigos Jamil Ferreira, Maria Conceição Peres Young e Paulo César Bezerra pela força neste tempo.

Aos meus pais que souberam suportar e compreender minha ausência e muitas vezes meu desleixo em relação a eles.

A Carlos M. Diniz Jr., cuja presença foi imprescindível para a realização deste trabalho.

Aos professores do IMECC que de alguma maneira colaboraram na minha formação profissional.

Aos funcionários da secretaria de pós-graduação, Luis, Isabel e Aparecida e, da biblioteca do IMECC, em especial, a Marilda, pela assistência fornecida no decorrer desses anos.

Finalmente, à UNICAMP, pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível a realização deste trabalho.

Campinas, Agosto de 1988

*Cláudia*

# ÍNDICE

# INTRODUÇÃO

À semelhança de módulos sobre domínios principais , temos por objetivo classificar os módulos livres de torção finitamemte gerados sobre domínios de Dedekind. Assim provaremos que se R é domínio de Dedekind e M e N são R - módulos livres de torção finitamente gerados de mesmo rank, $N \subset KM$, temos que existem ideais fracionários I $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_k$ , k = rank de M = rank de N , tais que

$$M \simeq R \dot{+} \ldots \dot{+} R \dot{+} I$$

(k-1) R somandos e

$$N \simeq E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{k-1} \dot{+} E_k I.$$

Mais que isso, se $N \subset M$ submódulo cujo rank é $1 \leq k$ então $N = E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{l-1} \dot{+} N'$ onde cada $E_i \subset R$. Aos ideais $E_i$ chamaremos de fatores invariantes de N em M, pois eles são unicamente determinados pelo par (M,N).

Para tanto desenvolveremos no Capítulo I o conceito de domínio de Dedekind e suas propriedades. Isso será feito tendo como base o artigo clássico de Cohen [5]. Vários resultados acerca de ideais fracionários e anéis de valorização serão considerados de conhecimento do leitor (uma boa referência para isso são [13] e [4]).

No Capítulo II estudaremos o Teorema dos Fatores Invariantes propriamente dito e teremos por base bibliográfica Curtis e Reiner [6].

Finalmente no Capítulo III desenvolveremos algumas aplicações bem interessantes do citado teorema além de utilizá-lo para obter alguns resultados envolvendo objetos clássicos da álgebra

comutativa.

Um desses resultados é o que afirma que todo anel de Dedekind é um BCS-anel. A definição de BCS-anel é dada por Vasconcelos e Weibel [12] e foi motivada por sua aplicação à teoria de controle (para maiores referências vide [7], um pequeno histórico do problema pode ser mostrado em [11]).

# CAPÍTULO I

## ANÉIS DE DEDEKIND

Por anel entenderemos sempre um anel comutativo com identidade . Dado I $\subset$ R um ideal diremos ser *ideal próprio* se distinto de (0) e de R .

Denotaremos por Spec (R) ao conjunto constituído de todos os ideais primos de R e por Max (R) ao conjunto de todos os ideais maximais de R .

Neste capítulo temos por objetivo definir domínio de Dedekind e caracterizá-lo da forma mais completa possível .

Para tanto serão necessários alguns resultados fundamentais acerca de anéis Noetherianos e principalmente RM-aneis .

Estudaremos condições necessárias , e algumas vezes suficientes , para que um dado anel R seja um RM-anel e , também , verificaremos quando uma extensão integral de R herda tal propriedade.

Daremos condições suficientes para que um domínio seja de Dedekind e provaremos algumas equivalências acerca desta propriedade . Mais que isso , forneceremos condições para que uma dada extensão de um domínio de Dedekind verifique ser ela também um domínio de Dedekind .

**Proposição (1.1):** Dado um anel R, as seguintes afirmações são equivalentes:

i) R satisfaz a *condição da cadeia ascendente* (ccа)

ii) R satisfaz a *condição máxima*

iii) todo ideal de R é finitamente gerado

Um anel satisfazendo a uma das afirmações anteriores ( e consequentemnete a todas ) será dito *anel Noetheriano* .

Se R satisfaz a *condição da cadeia descendente* (ccd) (equivalentemente a *condição mínima* ) diremos ser um *anel de Artin* ou *Artiniano* .

Se para todo $I \subset R$, $I \neq (0)$ e $I \neq R$, $R/I$ satisfaz a condição mínima , diremos ser R um anel com a *condição mínima restrita* ou um *RM-anel* .

Facilmente se verifica que se para todo ideal $I \subset R$, $I \neq (0)$ e $I \neq R$, $R/I$ é Noetheriano então R é Noetheriano .

**Lema (1.2):** Seja R um anel tal que $(0)=P_1 \ldots P_n$ onde cada $P_i \in \text{Max}(R)$ e para todo i, $(P_1 \ldots P_{i-1})/(P_1 \ldots P_{i-1}P_i)$ é um $R/P_i$-espaço vetorial de dimensão finita então R tem uma composição em série de ideais.

**Demonstração:**

Dado que $(P_1 \ldots P_{i-1})/(P_1 \ldots P_{i-1}P_i)$ é um $R/P_i$-espaço vetorial de dimensão finita temos que existe uma composição em série entre $(P_1 \ldots P_{i-1})$ e $(P_1 \ldots P_i)$.

Como

$$R \supset P_1 \supset \ldots \supset (P_1 \ldots P_{i-1}) \supset (P_1 \ldots P_{i-1}P_i) \supset \ldots \supset (0) = P_1 \ldots P_n$$

temos que R possui uma composição em série .

■

**Teorema (1.3):** Dado R um anel temos que R é Artiniano se e só se R Noetheriano e todo ideal primo é maximal.

**Demonstração:**

Suponhamos que R Noetheriano e que todo primo é maximal . Afirmamos ser (0) um produto de ideais maximais . De fato , seja $\Sigma$ o conjunto de todos os ideais de R que não contém um produto finito de primos . Suponhamos que $\Sigma \neq \phi$ , sendo R Noetheriano tomemos $I \in \Sigma$ maximal . Desde que I não é primo temos que existem ideais de R , A , B tais que $I \subset A$, $I \subset B$ , $I \neq A$, $I \neq B$ e $AB \subset I$.

Da maximalidade de I temos que A e B contém ambos um produto finito de primos e assim também I o que é absurdo .

Logo $(0) = P_1 \ldots P_n$ e sendo cada primo maximal a afirmação está verificada.

Além disso $(P_1 \ldots P_{i-1})/(P_1 \ldots P_{i-1} P_i)$ é um $R/P_i$- espaço vetorial satisfazendo a condição da cadeia ascendente logo de dimensão finita e portanto, pelo lema (1.2), R é Artiniano .

Reciprocamente , suponhamos que R satisfaz a condição mínima e seja $P \in Spec(R)$ então R/P satisfaz a condição mínima e não tem divisores de zero . Seja $x \in R/P$ então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\bar{x}^{n}) = (\bar{x}^{n+1}) = \ldots$$

então

$$\bar{x}^{n} = b\,\bar{x}^{n+1} \ , \ \bar{b} \in R/P$$

logo x inversível o que implica R/P corpo e consequentemente P maximal

De maneira análoga a anterior queremos provar que (0) é produto de

primos .

Primeiramente notemos que sendo R de Artin ele possui um número finito de ideais maximais . Logo se denotarmos por $N$ o nilradical de R temos

$$N = M_1 \cap \ldots \cap M_k \supset M_1 M_2 \ldots M_k$$

onde os $M_i$ são todos maximais .

Além disso , existe $h \in \mathbb{N}$ tal que

$$N^h = (0)$$

donde segue o desejado. Então do mesmo modo que anteriormente cada $(P_1 \ldots P_{i-1})/(P_1 \ldots P_{i-1} P_i)$ é um $R/P_i$- espaço vetorial que satisfaz a condição minima, logo de dimensão finita e pelo lema (1.2) temos R Noetheriano .

■

**Corolário (1.4):** Para que um anel R seja um RM-anel é necessário e suficiente que R seja Noetheriano e que todo primo próprio seja maximal .

**Demonstração:**

Suponhamos R um RM-anel então para qualquer $I \subset R$ ideal, $I \neq (0)$ e $I \neq R$ temos R/I Artiniano e pelo teorema (1.3) R/I Artiniano consequentemente R Noetheriano.

Seja $P \in \mathrm{Spec}(R)$ e consideremos $0 \neq x \in P$ . Seja

$$\phi : R \longrightarrow R/(x)$$

projeção canônica . Então P/(x) ideal primo de R/(x) e portanto P/(x) é um ideal maximal de R/(x) e consequentemente P é maximal.
Reciprocamente seja R Noetheriano e tal que todo ideal primo próprio é maximal então dado I ⊂ R ideal, I≠(0), R/I é Noetheriano e todo seu primo é maximal logo pelo teorema (1.3) R/I é Artiniano .

■

**Corolário (1.5):** Um anel é Artiniano se e só se R é um RM-anel e R tem divisores de zero ou é um corpo.

**Demonstração:**

Se R satisfaz a condição minima então é também um RM-anel e além disso todo primo é maximal . Suponhamos que R não tenha divisores de zero então (0) é primo e portanto maximal , consequentemente R é corpo .
Para a suficiência basta observar que se R não é corpo então (0) não é primo e pelas condições do corolário (1.4) R é Noetheriano e todo primo é maximal . Basta agora aplicar (1.3) .

■

**Teorema (1.6):** Seja R um anel e suponhamos que todo ideal primo tem um número finito de geradores então R é Noetheriano .

**Demonstração:**

Seja

$$\mathcal{P} = \{ I \subset R \text{ ideal} ; I \text{ não possui número finito de geradores} \}$$

Suponhamos $\mathcal{P} \neq \phi$ , então pelo Lema de Zorn $\mathcal{P}$ possui um elemento maximal , a saber $\mathcal{M}$ . Como $\mathcal{M}$ não é primo , existem ideais de R , B e C , tais que $\mathcal{M} \subset B$, $\mathcal{M} \subset C$, $\mathcal{M} \neq B$, $\mathcal{M} \neq C$ e $BC \subset \mathcal{M}$ . Da maximalidade de $\mathcal{M}$ temos que B e C possuem um número finito de geradores. Afirmamos ser R/C Noetheriano , de fato , a cada ideal de R/C corresponde um ideal de R que contém propriamente $\mathcal{M}$. logo é um R-módulo finitamente gerado. Desde que B/BC é um R/C- módulo finitamente gerado temos que $\mathcal{M}$/BC como submódulo de B/BC tambem é um R/C - módulo finitamente gerado e consequentemente $\mathcal{M}$/BC é um R-módulo finitamente gerado e desde que BC tem um numero finito de geradores também o tem $\mathcal{M}$ , absurdo .

■

Diremos que um anel é um *RM-domínio* se além de ser um RM-anel ele é também um domínio .

Consideraremos agora o efeito da condição mínima restrita em uma *extensão integral* de R ( ou seja , todo elemento do sobreanel é integral sobre R ) ; os teoremas aqui abordados darão condições para que a condição mínima restrita de R implique na mesma para o sobreanel .

Adotaremos a convenção de que as expressões " fecho integral de R " e " R integralmente fechado " significam respectivamente " fecho integral de R em seu corpo de frações " e " R é integralmente fechado em seu corpo de frações " .

**Teorema (1.7):** Seja R um RM-domínio e T um domínio que é extensão integral de R . Consideremos U o corpo de frações de T e K o

corpo de frações de R . Se U é uma extensão finita de K então T é um RM-domínio. Na verdade, se I é um ideal próprio de T então T/I é um R-módulo com composição em série.

**Demonstração:**

Notemos primeiramente a seguinte equivalência: T é um RM-domínio se e só se T/I tem composição em série para todo I ⊂ T um ideal próprio. Logo é suficiente verificar somente a segunda conclusão . Para tanto basta mostrar que T/I é um R-módulo finitamente gerado . De fato , se tal acontecesse , considerando $A = I \cap R$ , temos T/I R/A - módulo finitamente gerado . Como T integral sobre R temos $A \neq (0)$ . Pelas hipóteses e pelo teorema (1.3) temos que R/A satisfaz a ambas as condições da cadeia e consequentemente também o faz T/I.
Como U é extensão finita K temos que existem $\alpha_1 , \ldots , \alpha_m \in T$ tal que

$$U = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) .$$

Se $R' = R[\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ , desde que $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ são integrais sobre R então R' é um R-módulo finitamente gerado. Consequentemente para provar que T/I é um R-módulo finitamente gerado basta mostrar que é um R'-módulo finitamente gerado.
Como o corpo de frações de R' é igual ao corpo de frações T para provar o teorema basta considerar o caso especial em que R e T tem o mesmo corpo de frações .

□

**Definição (1.8):** Dado R anel e M e N R-módulos definiremos

$$(M : N) = (x \in R ; xN \subset M)$$

**Teorema (1.9):** Sejam R um RM-domínio , T um anel contendo R e contido no corpo de frações de R, K. Então T é também um RM-domínio, mais que isso , se I é ideal próprio de T então T/I é R-módulo finitamente gerado.

**Demonstração:**

Por raciocínio análogo ao feito anteriormente é suficiente verificar a segunda asserção da conclusão , isto é , que dado I ideal próprio de T , T/I é um R-módulo finitamente gerado .
Seja $a/b \in I \subset T \subset K$ onde $a \in R$, $b \in R-(0)$ e $a \in I \cap R$. É suficiente mostrar que T/Ta é um R-módulo finitamente gerado (de fato, do teorema do isomorfismo para módulos temos que $(T/I) \cong (T/Ta)/(I/Ta)$.
Definamos

$$A_i = Ta^i \cap R \quad , \; i = 1,2,\ldots$$

Desde que $A_i \supset A_{i+1}$ e R/Ra é Artiniano temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que .

$$A_{n+1} + Ra = A_{n+2} + Ra = \ldots$$

Agora $A_n(a^{-n})$ é um R-módulo finitamente gerado e o mesmo será verdade para T/Ta se pudermos mostrar que T/Ta é imagem de $A_n(a^{-n})$ pelo

homomorfismo canônico

$$\pi : T \longrightarrow T/Ta$$

$$x \longrightarrow x + Ta$$

Seja $\beta$ um elemento qualquer de $T/Ta$. Ele provém de um elemento $\alpha = b/c \in T$, $b \in R$, $c \in R-\{0\}$, isto é, $\beta = \alpha + Ta$ .

Sendo R Noetheriano, existe $0 < k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$( Rc : Ra^k ) = ( Rc : Ra^{k+1} ) = ( Rc : Ra^k ) : Ra$$

donde temos que Ra não esta contido em nenhum primo de $( Rc : Ra^k )$ e desde que todo primo proprio de R é maximal

$$( Rc : Ra^k ) + Ra = R \quad .$$

Assim

$$1 = xa + y \quad , \quad x \in R \quad , \quad y \in ( Rc : Ra^k )$$

Portanto

$$a^k = xa^{k+1} + ya^k \in Ra^{k+1} + Rc$$

donde

$$a^k = ra^{k+1} + tc \quad , \quad r \, , \, t \in R$$

consequentemente

$$\alpha a^k = \alpha r a^{k+1} + tb$$

portanto

$$\alpha + Ta = tb/(a^k) + Ta$$

Então podemos assumir que $\alpha = e/(a^k)$, $e \in R$ .

Mais que isso podemos assumir que $k = n$ . De fato , se $k < n$ tome $\alpha = (ea^{n-k})/(a^n)$. Se $k > n$ então

$$e = \alpha a^k \in Ta^k \cap R = A_k \subset A_{k+1} + Ra$$

assim

$$e + Ta^{k+1} = fa + Ta^{k+1} \quad , \quad f \in R$$

ou seja

$$e = fa + sa^{k+1} \quad , \; s \in T$$

portanto

$$\alpha = e/(a^k) = (f/(a^{k-1})) + sa$$

logo

$$\alpha + Ta = f/(a^{k-1}) + Ta$$

Se $k-1 = n$ acabou senão refaço o raciocínio . Consequentemente $\alpha = g/(a^n)$, $g \in R$, e assim $g \in A_n$ completando a prova.

■

Um RM-domínio integralmente fechado será dito um *domínio de Dedekind* .

Seja R um domínio e K o corpo de frações de R , dado $I \subset R$ ele será dito um *R-ideal fracionário em K* se é um R-módulo tal que existe $a \in R-\{0\}$ com $aI \subset R$ . Se I é um ideal de R dizemos que I é um *R-ideal integral*.

Dado I R-ideal fracionário definiremos

$$I^{-1} = \{ x \in K ; xI \subset R \}$$

e diremos que I é *inversível* se $II^{-1} = R$ . De modo mais explícito I R-ideal fracionário é inversível se e só se existem $a_1 , \ldots , a_n \in I$ e $b_1 , \ldots , b_n \in K$ tal que

i) $b_i I \subset R$ , $i = 1 , \ldots , n$

ii) $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = 1$ , $i \in R$ .

Observemos que se $I \subset K$ é um R-módulo finitamente gerado então I e um ideal fracionário .

**Lema (1.10):** Seja R um domínio e K seu corpo de frações. Se todo ideal integral proprio de R é inversível então R é integralmente fechado .

**Demonstração:**

Seja $\alpha \in K$ integral sobre R (ou seja existe $0 < n \in \mathbb{Z}$ e $r_0 , \ldots , r_{n-1}$ elementos de R tal que $r_0 + r_1\alpha + \ldots + r_{n-1}\alpha^{n-1} + \alpha^n = 0$ ).

Consideremos $I = R[\alpha]$ , sabemos que I é um R-módulo finitamente gerado contido em K , portanto é um R-ideal fracionário.

Logo existe $c \in R-\{0\}$ tal que $cI \subset R$ .

Portanto por hipótese cI inversível, ou seja, existe J R-ideal fracionário com $(cI)J = R$. Como $I = c^{-1}(cI)$ temos que I é inversível e desde que $I^2 = I$ temos $I \subset R$ donde $\alpha \in R$ .

■

**Lema (1.11):** Se R é um domínio de Dedekind local e $\mathcal{M}$ é seu ideal maximal então R é principal e todo ideal integral próprio I é da forma $I = \mathcal{M}^n$ ( isto é , R é um *anel de valorizacao discreta* ) .

**Demonstração:**

Provemos que $\mathcal{M}$ é principal . Notemos primeiramente que Spec (R) = ($\mathcal{M}$) Seja $a \in \mathcal{M} - (0)$ então $\sqrt{Ra} = \mathcal{M}$. Sendo R Noetheriano temos que existe um número natural n tal que $\mathcal{M}^n \subset Ra$. Seja n escolhido de tal modo que $\mathcal{M}^n \subset Ra$ e $\mathcal{M}^{n+1} \subset Ra$.

Logo existe $b \in \mathcal{M}^{n-1}$ e $b \notin Ra$.
Considere $x = a/b \in K = cfr(R)$ . Então $x^{-1} \notin R \rightarrow x^{-1}$ não é integral sobre R $\rightarrow x^{-1}\mathcal{M} \not\subset \mathcal{M}$ ( se isso ocorresse como $\mathcal{M} = Ra_1 + \ldots + \ldots + Ra_k$ , $a_i \in \mathcal{M}$ , teríamos $x^{-1}a_i = r_{i1}a_1 + \ldots + r_{ik}a_k$ , $1 \leq i \leq k$

donde $\sum_{j=1}^{n} (r_{ij} - \delta_{ij}x^{-1})a_j = 0$. Se $C = (r_{ij} - \delta_{ij}x^{-1})$ , matriz kxk,

temos $\det(C)\mathcal{M} = 0 \rightarrow \det(C) = 0 \rightarrow x^{-1}$ integral sobre R ) .
Mas $(b/a)\mathcal{M} = (b\mathcal{M})/a \subset \mathcal{M}^n/a \subset R \rightarrow x^{-1}\mathcal{M} = R \rightarrow \mathcal{M} = Rx$.
Tome agora $I \subset \mathcal{M}$, $I \neq (0)$, seja $n' \in \mathbb{N}$ tal que $I \subset \mathcal{M}^{n'}$ e $I \not\subset \mathcal{M}^{n'+1}$
(se isso não fosse possivel teríamos $I \subset \bigcap \mathcal{M}^n = (0)$ , absurdo ).
Seja $0 \neq y \in I$ então $y = ax^{n'}$ e $a \notin \mathcal{M}$, como R local então $a \in U(R) \rightarrow x^{n'} \in I \rightarrow \mathcal{M}^{n'} \subset I$ .

■

**Proposição (1.12):** Seja R domínio de Dedekind e $(0) \neq I$ R-ideal fracionário . Então I é inversível .

**Demonstração:**

Provaremos primeiro que se I' é um R-ideal integral e R é Dedekind então I' é produto de primos . De fato , temos que

$$I' = \bigcap_{i=1}^{m} Q_i \text{ onde } Q_i \text{ é } P_i\text{-primário}$$

decomposição primária minimal . Como os $P_i$ são dois a dois comaximais também o são os $Q_i$ , consequentemente

$$I' = Q_1 \ldots Q_n$$

Além disso , se A é integralmente fechado também o é cada $A_{P_i}$ .Para cada i temos então $A_{P_i}$ dominio local Noetheriano de dimensão 1 integralmente fechado , consequentemente , pelo lema (1.11) é anel de valorização discreta , assim

$$Q_i A_{P_i} = ( P_i A_{P_i} )^{n_i} = P_i A_{P_i}$$

e como $Q_i$ e $P_i^{n_i}$ são $P_i$-primários temos $Q_i = P_i^{n_i}$ . Assim

$$I' = P_1^{n_1} \ldots P_m^{n_m}$$

Seja I um R-ideal fracionário então existe $a \in R-\{0\}$ tal que aI é um R-ideal integral e portanto

$$aI = P_1^{n_1} \ldots P_k^{n_k} .$$

Portanto se mostrarmos que cada ideal integral maximal é inversivel teremos que aI e inversivel e portanto também I (pois $I=a^{-1}aI$). Seja $P \in Max(R)$ e $0 \neq b \in P$ então

$$Rb = P_1^{a1} \ldots P_k^{ak} \ , \ P_i \in Spec\ (R) \ , \ a_i \in \mathbb{N} - \{0\}$$

Como $P \supset Rb$ temos $P = P_i$ para algum i e sendo Rb inversível obviamente também o é P.

■

Corolário (1.13): Seja R um domínio de Dedekind então todo anel entre R e seu corpo de frações é também um domínio de Dedekind .

**Demonstração:**

Seja $K = cfr\ (R)$ e S o anel com $R \subset S \subset K$ . Pelo teorema (1.9) temos que S é RM-domínio , falta pois verificar que S é integralmente fechado . Mas pelo lema (1.10) é suficiente provar que todo S-ideal integral próprio é inversível . Seja I S-ideal integral . Como S é Noetheriano temos

$$I = Sa_1 + \ldots Sa_m \ , \ a_i \in I \ , \ i = 1 \ , \ \ldots \ , \ m$$

Consideremos $J = Ra_1 + \ldots + Ra_m$ que é R-ideal fracionário , logo como $I = SJ$ e J inversível temos $I\ (J^{-1}S) = SJ\ (J^{-1}S) = SR = S$ , ou seja , I inversível .

■

**Teorema (1.14):** Seja R um domínio onde todo ideal próprio é produto de ideais primos então R é domínio de Dedekind.

**Demonstração:**

Observemos que qualquer fatorização em ideais primos inversíveis é única . De fato , suponhamos

$$P_1 \ldots P_r = P_1' \ldots P_s'$$

onde os $P_i$ , $P_j'$ são primos e inversíveis . Podemos supor que $P_1$ é minimal no conjunto $\{ P_1, \ldots, P_r, P_1', \ldots, P_s' \}$. Então $P_1$ é igual a um $P_j'$ desde que necessariamente contém algum $P_j'$ .

Sendo $P_1$ inversível podemos cancelar este fator de ambos os lados e então procedemos por indução .

Provaremos agora que todo ideal primo próprio P é inversível e maximal .

Seja $0 \neq x \in P$ e consideremos a fatorização em primos do ideal Rx

$$P \supset Rx = P_1 \ldots P_m$$

Logo P contém algum fator de Rx , digamos $P_1$ . Desde que todo ideal principal é claramente inversível e $P_1$ é um fator de Rx temos $P_1$ inversível . Portanto é suficiente provar que $P_1$ é maximal .

Se $P_1$ não o fosse , existiria $c \in R-\langle 0 \rangle$, $c \notin P_1$ tal que

$$Rc + P_1 \subset R \quad e \quad Rc + P_1 \neq R$$

consequentemente

$$Rc + P_1 = P_1' \ldots P_r'$$

com $P_i' \in Spec(R)$ . Assim também

$$Rc^2 + P_1 = Q_1 \ldots Q_t \ , \ Q_j \in Spec(R) \ .$$

Consideremos $R' = R/P_1$ e denotando por x a classe residual de x em $R/P_1$ temos

$$\overline{Rc} = \overline{Rc^2} = \overline{Q}_1 \ldots \overline{Q}_t \ .$$

Logo

$$\overline{P_1'}^2 \ldots \overline{P_r'}^2 = \overline{Q}_1 \ldots \overline{Q}_t \ .$$

Sendo os $\overline{P_i'}$ e $\overline{Q}_j$ fatores de um ideal principal e portanto , inversíveis , esta fatorização é única e os ideais $\overline{Q}_1$ , ... , $\overline{Q}_t$ constituem-se nos ideais $\overline{P_1'}$ , ... , $\overline{P_r'}$ cada um contado duas vezes .

Portanto

$$Rc^2 + P_1 = (Rc + P_1)^2$$

o que implica que

$$P_1 \subset Rc + P_1^2$$

Então , se $b \in P_1$ temos $b - dc \in P_1^2$ , para algum $d \in R$, o que implica $dc \in P_1$ e como $c \notin P_1$ temos $d \in P_1$ .

Assim $b \in P_1c + P_1^2 \rightarrow P_1 = P_1(Rc + P_1)$ .

Da inversibilidade de $P_1$ temos $Rc + P_1 = R$ , absurdo .

Portanto $P_1$ é maximal .

Assim todo ideal próprio fatora-se em ideais maximais inversíveis ,

consequentemente , todo ideal próprio de R é inversível e pelo lema (1.10) R é integralmente fechado.
Para que R seja Dedekind resta apenas verificar que R Noetheriano , mas isto é consequência imediata do fato que todo primo próprio inversível é finitamente gerado e portanto usando da hipótese podemos concluir que R e Noetheriano .

■

**Teorema (1.15):** Se R é um domínio tal que todo ideal primo é inversível então R é um domínio de Dedekind .

**Demonstração:**

Afirmamos inicialmente que todo ideal primo próprio é maximal . De fato , se dado $P \in Spec(R)$, $P \neq (0)$, ele não fosse maximal, existiria um ideal primo $Q \neq (0)$ com

$$(0) \subset P \subset Q \subset R$$

onde $P \neq (0)$ e $Q \neq R$.
Agora $PQ^{-1} \subset R$ e $(PQ^{-1})Q = P$ logo $PQ = P$ o que implica $R = Q$ , absurdo .
Como todo primo próprio e inversível , cada um deles é um R-módulo finitamente gerado e pelo teorema (1.6) Temos R Noetheriano .
Consequentemente , dado I ideal próprio de R temos $P_1$ , ... , $P_r$ primos (não necessariamente distintos) tal que

$$P_1 \ldots P_r \subset I \quad e \quad I \subset P_i \text{ para cada } i$$

logo

$$P_1 \subset I(P_2)^{-1} \ldots (P_r)^{-1} \subset R$$

Se $I(P_2)^{-1}\ldots(P_r)^{-1} = R$ temos $I = P_2 \ldots P_r$ e acabou, senão podemos supor que

$$P_1 = I(P_2)^{-1} \ldots (P_r)^{-1}$$

e portanto pelo teorema (1.14) R domínio de Dedekind .

■

**Teorema (1.16):** Se R e um domínio Noetheriano, as seguintes condições são equivalentes :

I . R e um domínio de Dedekind

II . para todo $P \in Max(R)$ , $R_P$ é anel de valorização discreta

III . se $P \in Max(R)$ , não existe ideal primário entre P e $P^2$ (e consequentemente nenhum ideal já que todo ideal entre P e $P^2$ é P-primário )

IV . um ideal primário pertencente a um ideal maximal é um produto de ideais primos

V . os ideais primários pertencentes a um ideal maximal são totalmente ordenados com respeito a inclusão

VI . para quaisquer três ideais de R temos

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$$

VII . para quaisquer três ideais de R temos

$$A : (B \cap C) = (A : B) + (A : C)$$

**Demonstração:**

Suponhamos (I) válida . Mostraremos que ela implica as restantes :

I $\rightarrow$ II

Utilizando diretamente os lemas (1.11) e (1.13).

I $\rightarrow$ III

Verifiquemos inicialmente a afirmação que todo ideal entre P e $P^2$ é P-primário .

Se $I \subset R$ é um ideal tal que $P^2 \subset I \subset P$ temos que $\sqrt{I} = P$ e $P \in Max(R)$ logo I é P-primário.

Seja Q P'-primário tal que $P^2 \subset Q \subset P$. Mas existe $0 < n \in \mathbb{Z}$ tal que $Q = (P')^n$ logo $P^2 \subset (P')^n \subset P \rightarrow P' = P \rightarrow Q = P$ ou $Q = P^2$ .

I $\rightarrow$ IV

Sejam R domínio de Dedekind , $\mathcal{M} \in$ Max (R) e Q $\mathcal{M}$ - primário . Então existe $0 < n \in \mathbb{Z}$ tal que $Q = \mathcal{M}^n$ .

I $\rightarrow$ V

Segue diretamente de IV

I $\rightarrow$ VI e VII

Se provarmos que dado A ideal próprio de R temos que

$$A = \bigcap \left\{ AR_P \; ; \; P \in Max(R) \right\}$$

e desde que a operação de localização preserva as operações básicas de ideais é suficiente verificar essas identidades em cada $R_P$ , mais aí elas são triviais desde que os ideais formam um conjunto totalmente ordenado .

Provemos inicialmente que

$$R = \bigcap \left\{ R_P \ ; \ P \in Max(R) \right\}$$

Obviamente temos que $R \subset \bigcap \left\{ R_P \ ; \ P \in Max(R) \right\}$.

Suponhamos $x \in \bigcap \left\{ R_P \ ; \ P \in Max(R) \right\}$, logo $x = a/b$.

Para mostrar que $x \in R$ é suficiente mostrar que $a \in Rb$ .

Seja $I = \{ y \in R \ ; \ ya \in Rb \}$ . Se $I = R$ então acabou . Senão , seja $\mathcal{M} \in Max(R)$ tal que $I \subset \mathcal{M} \subset R$, $\mathcal{M} \neq R$. Como $x \in \bigcap \left\{ R_P \ ; \ P \in Max(R) \right\}$ temos

$$a/b = x = a'/b' \ , \ b' \in \mathcal{M}$$

logo existe $s \notin \mathcal{M}$ tal que $sab' = sba' \in Rb \rightarrow sb' \in I \subseteq \mathcal{M}$, absurdo já que $s \notin \mathcal{M}$ e $b' \notin \mathcal{M}$ .

Seja $A \subset R$ ideal . Queremos provar que $A = \bigcap \left\{ AR_P \ ; \ P \in Max(R) \right\}$.

Consideremos $I = \bigcap \left\{ AR_P \ ; \ P \in Max(R) \right\}$, portanto $I \subset R$ ideal .

Se provarmos que $AR_M = IR_M$ para todo $M \in Max(R)$ então $A = I$ .

Obviamente $A \subset I$ e então $AR_M \subset IR_M$ para todo $M \in Max(R)$ .

Seja $M \in Max(R)$ e suponhamos $x \in IR_M$, logo $x = a/s$ onde $a \in I$ e $s \notin M$.

Mas $I = \bigcap \left\{ AR_P \ ; \ P \in Max(R) \right\}$, em particular $a \in AR_M$ logo $a = b/s$ com $b \in A$ e $s' \notin M$ .

Então $x = a/s = (a/1)(1/s) = (b/s')(1/s) = b/(ss')$, ou seja, $x \in AR_M$, conclui a demonstração .

Reciprocamente , mostraremos que II , III , IV , V , VI e VII implicam

em I .

II → I

Suponhamos que II valida então dado P ∈ Max (R) além de ser o único maximal de $R_P$ também é minimal aí , consequentemente é minimal em R . Daí todo ideal primo próprio é maximal .

Além disso sendo cada $R_P$ integralmente fechado também o é R, donde segue-se I .

III → I

Seja P ∈ Max (R) e consideremos R' = $R_P$ . Tomando P' = $PR_P$ , não existe J ⊂ R' ideal tal que $P'^2 \subset J \subset P'$ . Consequentemente se a ∈ P' e a ∉ $P'^2$ temos R'a + $P'^2$ = P' e pelo lema de Nakayama P' = R'a então R' anel de valorização discreto seguindo-se então I .

IV → I

Seja Q P-primário onde P ∈ Max (R) . Logo temos

$$P_1^{h_1} \ldots P_n^{h_n} = Q \subset P \quad , \quad P_i \in \text{Spec } (R) \text{ todos distintos}$$

Temos que existe i tal que $P_i \subset P$ .

Sendo R Noetheriano temos que existe 0 < n ∈ ℤ tal que

$$P^n \subset Q = (P_1)^{h_1} \ldots (P_n)^{h_n} \subset P_j \quad , \text{ para cada } j .$$

Logo $P = P_i$ e sendo que os $P_j$ são todos distintos temos $P \subset P_j$ e $P \neq P_j$, $i \neq j$.
Consequentemente $P_j = R$ , $j \neq i$ . E assim $Q = P^{h_1}$ .

Seja Q' tal que $P^2 \subset Q' \subset P$ , Q' P-primário . Então $\sqrt{Q'} = P' = P$ e portanto ou $Q' = P^2$ ou Q' = P e como III → I segue-se o desejado .

V → I

Afirmamos que III se verifica . Seja $P \in Max(R)$ , por hipótese temos todos os ideais primos pertencentes a P totalmente ordenados. Logo sabemos que $P/P^2$ é $R/P$ - espaço vetorial no qual os subespaços são totalmente ordenados. Então necessariamente $dim(P/P^2)=1$ o que implica III.

VI $\Rightarrow$ I

Assumamos VI verdadeira. Então $P/P^2$ é $R/P$ - espaço vetorial cujos subespaços satisfazem a lei distributiva então necessariamente $dim(P/P^2)=1$, pois se não o fosse, teríamos elementos $e_1$, $e_2$ distintos pertencentes a base de $P/P^2$ sobre $R/P$. Seja $K = R/P$

$$V = Ke_1 \oplus Ke_2$$

$$W = Ke_1$$

$$T = Ke_2$$

teríamos então $V \cap (W + T) = V$ e $V \cap W = V \cap T = (0)$.

VII $\Rightarrow$ I

Afirmamos que V se verifica . De fato , se tal não ocorresse , existiria $Q_1$ e $Q_2$ P-primários , $P \in Max(R)$ , nenhum contido no outro .

Seja $A = Q_1 \cap Q_2$ então

$$(A : Q_1) , (A : Q_2) \subset P \quad .$$

Logo $(A : Q_1) + (A : Q_2) \subset P \subset R$, $P \neq R$ e $A : (Q_1 : Q_2)=R$, absurdo.

■

# CAPÍTULO II

## MÓDULOS SOBRE DOMÍNIOS DE DEDEKIND (O TEOREMA DOS FATORES INVARIANTES)

Neste capitulo, a menos que explicitado, R será sempre um domínio de Dedekind (isto é, R é noetheriano, todo ideal primo não nulo é maximal e e integralmente fechado).

Os R - módulos M serão sempre unitários, isto é, 1m=m qualquer que seja $m \in M$.

Um R - modulo M é livre de torção se satisfaz: $am=0$, $a \in R$ e $m \in M$, então $a=0$ ou $m=0$. Daqui em diante, a menos que digamos o contrário, todo R - módulo será livre de torção.

Nosso objetivo será classificar todos os R - módulos finitamente gerados e desenvolver uma teoria de fatores invariantes semelhantes a que já conhecemos no caso de módulos sobre domínios principais (vide [2]). Os ideais fracionários serão de grande importância e os resultados básicos sobre eles consideraremos de conhecimento de todos.

**Teorema (2.1):** Seja M um R - módulo e K o corpo de frações de R. Então M pode ser mergulhado em um K - espaço vetorial KM.

**Demonstração:**

O espaço vetorial KM será definido através de uma contrução semelhante a usada para se obter o corpo de frações de um domínio integral.

Consideremos

$$S = \left\{ (m,\alpha) \ ; \ m \in M, \ \alpha \in R, \ \alpha \neq 0 \right\}$$

e definamos a seguinte relação sobre S

$$(m_1,\alpha_1) \sim (m_2,\alpha_2) \quad \leftrightarrow \quad \alpha_1 m_2 = \alpha_2 m_1 .$$

Obviamente ~ é reflexiva e simétrica. Verifiquemos a transitividade. Suponhamos $(m_1,\alpha_1) \sim (m_2,\alpha_2)$ e $(m_2,\alpha_2) \sim (m_3,\alpha_3)$ então $\alpha_1 m_2 = \alpha_2 m_1$ e $\alpha_2 m_3 = \alpha_3 m_2$.

Consequentemente

$$\alpha_3(\alpha_2 m_1) = \alpha_3(\alpha_1 m_2) = \alpha_1(\alpha_3 m_2) = \alpha_1 \alpha_2 m_3 .$$

Logo

$$\alpha_2(\alpha_3 m_1 - \alpha_1 m_3) = 0$$

e sendo M livre de torção e $\alpha_2 \neq 0$ temos $\alpha_3 m_1 = \alpha_1 m_3$.

Denotemos por $M_S$ o conjunto das classes de equivalência de S por ~ e, denotemos

$$m/\alpha = \text{a classe de equivalência de } (m,\alpha)$$

Definamos em $M_S$ uma operação de adição por

$$m_1/\alpha_1 + m_2/\alpha_2 = \left( \alpha_2 m_1 + \alpha_1 m_2 \right) / \alpha_1 \alpha_2$$

facilmente se verifica a boa definição da operação e que ela satisfaz as condições para que $(M_S,+)$ seja grupo abeliano aditivo com elemento nulo $0/1$.

Definamos agora uma ação de $K = cfr(R)$ sobre o grupo $(M_S, +)$ dada

por

$$\begin{array}{ccc} K \times M_S & \longrightarrow & M_S \\ (\beta/\gamma,\ m/\alpha) & \longrightarrow & (\beta m)/(\gamma\alpha) \end{array}$$

com $\beta,\ \gamma,\ \alpha \in R,\ \gamma \neq 0,\ \alpha \neq 0,$ e $m \in M$ .

De modo quase imediato podemos verificar que essa definição independe da escolha de representantes e que satisfaz as condições para que $M_S$ seja K - espaço vetorial. Daqui em diante denotaremos $M_S$ por KM .

A aplicação

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & KM \\ m & \longrightarrow & m/1 \end{array}$$

é obviamente um homomorfismo injetor de R - módulo. Desta maneira, podemos considerar M como R - submódulo de KM e denotaremos $m/1$ simplesmente por m.

■

Algumas observações:

1) Temos $m/\alpha = (1/\alpha)(m/1) = \alpha^{-1}m$ e deste modo os elementos de KM podem ser vistos como K - múltiplos de elementos de M, logo, para $m_1$ e $m_2 \in M$ temos

$$(\alpha/\beta)m_1 + (\gamma/\delta)m_2 = (\beta\delta)^{-1}(\alpha\delta m_1 + \beta\gamma m_2)$$

Consequentemente, se $M = \sum_{i=1}^{k} Rm_i$, $m_i \in M$, então $KM = \sum_{i=1}^{k} Km_i$, mais além,

se $M = \bigoplus_{i=1}^{k} Rm_i$ então $KM = \bigoplus_{i=1}^{k} Km_i$ . Portanto se M é R - módulo finitamente gerado então KM é um K - espaço vetorial de dimensão finita e mais ainda, se $(m_1, \ldots, m_k)$ é base de M (isto é, no caso em que M é livre) então $\{ m_1 \otimes 1, \ldots, m_2 \otimes 1 \}$ é base de KM.

2) Uma maneira mais sofisticada de fabricar o K - espaço vetorial desejado seria considerar o produto tensorial $K \otimes_R M$ que é K - espaço vetorial e facilmente pode-se comprovar que

$$K \otimes_R M \longrightarrow KM$$

$$\sum \alpha_i \otimes m_i \longrightarrow \sum \alpha_i (m_i \otimes 1)$$

é um K - isomorfismo entre $K \otimes_R M$ e KM .

**Definição (2.2):** Seja M um R - módulo, por *R - rank de M* entenderemos a dimensão de KM como K - espaço vetorial e denotaremos por rank(M) = (KM:K), onde (KM:K) = dimensão de KM como K-espaço vetorial. Algumas vezes nos referiremos a rank(M) por (M:R).

Como já vimos, se M R - módulo finitamente gerado então rank(M) $< \infty$ . Contudo a recíproca não é válida, bastando para tanto considerar M = K onde K é o corpo de frações de R.

**Proposição (2.3):** Seja M um R - módulo finitamente gerado então rank(M) é igual ao número máximo de elementos R - livres de M.

**Demonstração:**

Um conjunto $\{ m_i \}_{i \in A}$ é dito *R - livre* se sempre que

$$r_{i1} m_{i1} + \ldots + r_{it} m_{it} = 0$$

com $r_{ik} \in R$. então $r_{ik} = 0$, $1 \leq k \leq t$ .

Seja n o número máximo de elementos de M R - livres. Consideremos $\langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ um conjunto de elementos R - livres de M . Então se

$$(r_1/s_1)(m_1/1) + \ldots + (r_n/s_n)(m_n/1) = 0$$

com $s_i \neq 0$, $r_i \in R$, temos

$$r_1 s_2 \ldots s_n m_1 + \ldots + r_i s_1 \ldots \hat{s_i} \ldots s_n m_i + \ldots + r_n s_1 \ldots s_{n-1} m_n = 0$$

como $s_1 \ldots \hat{s_i} \ldots s_n \neq 0$ para cada i e desde que $\langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ é R - livre temos $r_i = 0$ para cada i e consequentemente $\langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ é conjunto linearmente independente sobre K . Portanto rank(M) $\geq$ n .

Provaremos que se $\{ p_1/\alpha_1, \ldots, p_t/\alpha_t \} \subset KM$ é tal que t > n então conjunto é linearmente dependente sobre K .

Seja

$$(\beta_1/\gamma_1)(p_1/\alpha_1) + \ldots + (\beta_t/\gamma_t)(p_t/\alpha_t) = 0$$

então

$$\beta_1(\gamma_1 \ldots \gamma_t)(\alpha_2 \ldots \alpha_t)p_1 + \ldots + \beta_t(\gamma_1 \ldots \hat{\gamma_i} \ldots \gamma_t)(\alpha_1 \ldots \hat{\alpha_i} \ldots \alpha_t)p_t + \ldots +$$

$$+ \ldots + \beta_t(\gamma_1 \ldots \gamma_{t-1})(\alpha_1 \ldots \alpha_{t-1})p_t = 0.$$

Da maximalidade de n, segue que existe $1 \leq j \leq t$ tal que

$$\beta_j(\gamma_1 \ldots \hat{\gamma}_j \ldots \gamma_t)(\alpha_1 \ldots \hat{\alpha}_j \ldots \alpha_t) \neq 0$$

logo $\beta_j \neq 0$ e portanto $\left\{ p_1/\alpha_1, \ldots, p_t/\alpha_t \right\}$ é linearmente dependente,

que implica $\text{rank}(M) \leq n$.

■

Sejam M e N dois R - módulos e $\theta : M \longrightarrow N$ um R - isomorfismo entre eles. Então $\theta$ pode ser extendido a um K - isomorfismo $\theta^* : KM \longrightarrow KN$ dado por $\theta^*(m/s) = \theta(m)/s$, onde $m \in M$ e $s \in R-\{0\}$. Observe que se $m \in M$ e $\xi \in K$ então $\theta^*(\xi m) = \xi\, \theta^*(m) = \xi\, \theta(m)$. Consequentemente se $m \in M$ e $\xi \in K$ são tais que $\xi m \in M$ então

$$\theta(\xi m) = \xi \theta(m) \qquad (A)$$

**Definição (2.4):** Sejam dados A e B ideais fracionários. Diremos que eles são *R - ideais equivalentes*, e denotaremos $A \equiv B$, se existe $\gamma \in K$, $\gamma \neq 0$, tal que $A = \gamma B$.

Facilmente vemos ser esta uma relação de equivalência. Assim se denotarmos

$\mathbb{F}$=conjunto de todos os R - ideais fracionários de K

podemos considerar $\mathbb{F}/\equiv$ e por *classe de ideal de A* entenderemos a classe de equivalência de A, denotada por $\bar{A}$ . Ou seja

$$\bar{A} = \left\{ B \in \mathbb{F};\ B = \gamma A \text{ para algum } \gamma \in K,\ \gamma \neq 0 \right\}$$

Note que se $A_i \equiv B_i$ , $i = 1,2$ , então $A_1A_2 \equiv B_1B_2$ .

Podemos assim definir uma multiplicação sobre $\mathbb{F}$ dada por

$$\bar{A}\ \bar{B} = \overline{AB}$$

Tal multiplicação satisfaz :

i) comutatividade

ii) $\bar{R}$ (classe dos ideais principais ) é o elemento identidade

iii) $\bar{A}\ \overline{A^{-1}} = \bar{R}$ , isto é $\overline{A^{-1}} = (\bar{A})^{-1}$

Portanto $\mathbb{F}/\equiv$ é um grupo multiplicativo abeliano . Tal grupo é chamado o *classe grupo de R* e denotado por $\mathcal{cl}(R)$ .

**Lema (2.5):** Os R-ideais fracionários A, B são R-isomorfos se e só se pertencem a mesma classe de ideal.

**Demonstração:**

Obviamente se $A \equiv B$, ou seja, existe $\gamma \in K$, $\gamma \neq 0$ tal que $A = \gamma B$ basta considerar

$$\begin{array}{rccc} \phi : & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longrightarrow & \gamma x \end{array}$$

Reciprocamente, suponhamos $\theta : A \longrightarrow B$ R - isomorfismo e

estenda-mo-lo a $\theta'$ : KA $\longrightarrow$ KB K - isomorfismo . Temos então

$$\theta'(\xi m) = \xi\theta'(m) \quad , \; m \in KA \; , \; \xi \in K$$

Em particular, se m=1 e $\xi \in A$ temos

$$\theta(\xi) = \theta'(\xi) = \xi\theta'(1)$$

logo dado $n \in B$, existe $\xi \in A$ tal que

$$n = \theta(\xi) = \xi\theta'(1)$$

ou seja $B = \theta'(1)A$ .

■

Daremos agora um primeiro passo na classificação dos R - modulos finitamente gerados considerando o caso em que seu rank é 1 .

**Lema (2.6):** Seja M um R - módulo finitamente gerado cujo rank é 1 . Então M é R - isomorfo a um R - ideal fracionário em K .

**Demonstração:**

Seja K = cfr(R). Por hipótese, existe $m/s \in KM$ tal que KM = K(m/s), $m \in M$, $m \neq 0$.

Consideremos

$$I = \left\{ \alpha \in K;\ \alpha m \in M \right\}$$

que é um R - submodulo de K .

Definamos $\phi$ : I $\longrightarrow$ M um R-homomorfismo onde $\phi(\alpha) = \alpha m$. Podemos

facilmente verificar que $\phi$ é injetora e sobrejetora. Agora, desde que $\phi$ é R - isomorfismo e M é R - módulo finitamente gerado, também o é I . Assim I e um ideal fracionário.

■

**Lema (2.7):** Seja M um R - módulo finitamente gerado. Se $\alpha \in K$ é tal que $\alpha M \subset M$ então $\alpha \in R$.

**Demonstração:**

Seja $m \in M$, $m \neq 0$ e consideremos $I = \left\{ \beta \in K;\ \beta m \in M \right\}$. Já vimos ser I um R-ideal fracionário e obviamente $I \supset R$.

Suponhamos que $\alpha \in K$ é tal que $\alpha M \subset M$ . Assim $\alpha \in I$ . o que implica $R[\alpha] \subset I$.

Desde que I é R - módulo finitamente gerado e R domínio de Dedekind segue que $R[\alpha]$ é R - módulo finitamente gerado e consequentemente $\alpha$ é integral sobre R. Sendo R integralmente fechado, temos $\alpha \in R$.

■

**Definição (2.8):** Sejam R um anel comutativo com identidade, M um R - módulo (não necessariamente livre de torção) e N um R - submodulo de M. Diremos que N é *submodulo puro de M*, se dado $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, $\alpha N = N \cap \alpha M$.

Desde que a inclusão $\alpha N \subset \left( N \cap \alpha M \right)$ é óbvia temos : N é

puro se e so se dado $m \in M$ e $\alpha \in R$ tal que $\alpha m \in N$ então existe $n \in N$ tal que $\alpha m = \alpha n$.

Algumas consequências imediatas desta observação:

1)Se N é um somando direto de M então N é puro.

2)Se M é um R - módulo livre de torção ,N é puro se e só se para todo $m \in M$ e $\alpha \in R$ com $\alpha m \in N$ tivermos que $m \in N$.

3)Se M/N é livre de torção então N é puro . Se M é livre de torção e N é puro então M/N é livre de torção.

4)Seja $K = cfr(R)$ e $\{v_1,\ldots,v_n\}$ uma K - base de um K-espaço vetorial $V_o$ . Consideremos $M = Rv_1 \oplus \ldots \oplus Rv_n$ e $W_o$ um K-subespaço vetorial de $V_o$ , então $W_o \cap M$ é submódulo puro de M . Mas que isso,se tomarmos S um subconjunto arbitrário de M e considerarmos KS o K - espaço de $V_o$ gerado por S, $KS \cap M$ é o único submódulo puro minimal de M contendo S.

Dados $M_1,\ldots,M_k$ R - módulos definimos como *soma direta externa*, e denotamos por

$$M* = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} \ldots \dot{+} M_k$$

o conjunto de todas as k-uplas $(m_1,\ldots,m_k)$ , $m_i \in M_i$, $1 \leq i \leq k$, com a adição dada por

$$(m_1 , \ldots , m_k) + (n_1 , \ldots , n_k) = (m_1+n_1 , \ldots , m_k+n_k)$$

e produto por um elemento de R dado por

$$r(m_1 , \ldots , m_k) = (rm_1 , \ldots , rm_k) .$$

Deste modo M* é um R - módulo.

Sejam $I_1, \ldots, I_n$ R-ideais fracionários em K, então $I_1 \dotplus \ldots \dotplus I_n$ é um R-módulo , livre de torção, finitamente gerado e de rank igual a n.

Queremos saber se a reciproca é verdadeira. isto é, se dado M um R - módulo livre de torção finitamente gerado cujo rank é n, então este é isomorfo a uma soma direta externa de n R - ideais fracionários. A resposta é afirmativa e o resultado segue como um teorema:

**Teorema (2.9):** Todo M R - módulo finitamente gerado de rank igual a n é isomorfo a uma soma direta externa de n R - ideais fracionários.

**Demonstração:**

Faremos por indução sobre o rank de M . Para o caso rank(M) = 1 é exatamente o lema (2.6).Consideremos $n \geq 2$ e suponhamos válido o resultado para rank igual a n-1.

Consideremos M mergulhado em KM e escolhamos $m \in M$, $m \neq 0$ .

Seja $N = Km \cap M$ o submódulo puro gerado por m . Então M/N é livre de torção, finitamente gerado e rank(M/N) = n-1 (para tanto facilmente se verifica que $K(M/N) \cong KM/KN$ como K - espaço vetorial).

Segue então da hipótese de indução que existem n-1 R - ideais fracionários tais que

$$M/N \cong I_1 \dotplus \ldots \dotplus I_{n-1} \qquad (\mathbb{B})$$

deste modo para se concluir a demonstração é suficiente verificar que N é um somando direto de M .

Realmente se mostrarmos que $M = N \oplus T$ para algum $R$ - submódulo $T$ teremos

$$T \cong M/N \cong I_1 \dot{+} \ldots \dot{+} I_{n-1}$$

Por outro lado, $N$ $R$ - modulo finitamente gerado de rank 1 e portanto, novamente do lema (2.6) temos $N \cong I$, $I$ $R$ - ideal fracionário, seguindo-se daí o desejado.

Segue de (B) que existe

$$\varphi : M \longrightarrow I_1 \dot{+} \ldots \dot{+} I_{n-1} \qquad R \text{ - homomorfismo sobrejetor}$$

tal que $\ker \varphi = N$. Para cada $j$, seja $M_j = \varphi^{-1}(I_j)$ e $\varphi_j = \varphi|_{M_j}$.
Então $\varphi_j : M_j \longrightarrow I_j$ é um $R$ - homomorfismo sobrejetor cujo kernel é $N$. Afirmamos ser $N$ um somando direto para cada $M_j$.

Desde que $I_j I_j^{-1} = R$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in I_j^{-1}$ e $\beta_1, \ldots, \beta_t$ elementos de $I_j$ tal que

$$\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_t\beta_t = 1$$

Escolhamos $x_1, \ldots, x_t \in M_j$ tal que $\varphi_j(x_i) = \beta_i$, $1 \leq i \leq t$.

Além disso para $\gamma \in I_j$, $\gamma \neq 0$, $\gamma\alpha_i \in R$.

Consideremos

$$z = (\gamma\alpha_1)x_1 + \ldots + (\gamma\alpha_t)x_t \in M_j$$

então

$$\varphi(z) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{t} (\gamma\alpha_i)x_i\right) = \gamma$$

Seja $T_j = Kz \cap M_j$ submódulo puro de $M_j$ gerado por z. Afirmamos que

$M_j = T_j \oplus N$ . De fato:

i) $T_j \cap N = (0)$

Se $x \in T_j \cap N$ temos $x = \xi z$ onde $\xi \in K$ , mas

$$0 = \varphi(x) = \varphi(\xi z) = \xi\varphi(z) = \xi\gamma$$

e desde que $\gamma \neq 0$ temos $\xi = 0$, ou seja, $x = 0$

ii) $M_j = T_j + N$

Seja $x \in M_j$ . Seja $\rho = \varphi_j(x) \in I_j$ então desde que $\rho a_i \in R$ ,

$1 \leq i \leq t$. consideremos o seguinte elemento de $M_j$

$$\omega = \rho a_1 x_1 + \ldots + \rho a_t x_t$$

então

$$\omega = \gamma\gamma^{-1}\rho a_1 x_1 + \ldots + \gamma\gamma^{-1}\rho a_t x_t = \gamma^{-1}\rho z$$

Ou seja $\omega \in M_j \cap Kz = T_j$ .

Além disso

$$\varphi(\omega) = \varphi(\gamma^{-1}\rho z) = \gamma^{-1}\rho\varphi(z) = \rho = \varphi(x)$$

consequentemente $(\omega - x) \in N$. Assim $x = \omega + (x - \omega)$ .

Para cada $M_j$ encontramos $T_j$ submódulo puro de $M_j$ tal que $M_j = T_j \oplus N$

e $\varphi(T_j) = \varphi(M_j) = I_j$. Afirmamos que $M = (T_1 + \ldots + T_{n-1}) \oplus N$.

Desde que

$$\varphi(T_1 \dot{+} \ldots \dot{+} T_{n-1}) = I_1 \dot{+} \ldots \dot{+} I_{n-1}$$

temos $M = T_1 + \ldots + T_{n-1} + N$.

Se $t_1 + \ldots + t_{n-1} \in N$ onde cada $t_i \in T_i$ então temos que $\varphi(t_1) + \ldots + \varphi(t_n) = 0$, mas cada $\varphi(t_i) \in I_i$ donde $\varphi(t_i) = 0$. Consequentemente cada $t_i = 0$ , o que completa a prova.

■

Uma outra prova muito interessante do mesmo teorema é dada por Rotman em [10] utilizando-se de módulos projetivos.

Outra observação referente a esta demonstração é que em nenhum momento o fato de $N = Km \cap M$ influiu na prova de ser N um somando direto de M . A informação relevante foi a de ser N um submódulo puro de M . Portanto, seguindo a mesma demonstração podemos enunciar o seguinte resultado :

**Proposição (2.10):** Sejam M R - módulo finitamente gerado e $N \subset M$ R - submódulo , então

N puro $\leftrightarrow$ N somando direto de M

Suponhamos agora

$$M \cong I_1 \dot{+} \ldots \dot{+} I_n \qquad (\mathbb{C})$$

onde os $I_j$ são R - ideais fracionários não nulos em K . Podemos encontrar elementos não nulos $\alpha_1$ , ... , $\alpha_n$ em K tal que $\alpha_j I_j \supset R$ .

Além disso, desde que $I_j \cong \alpha_j I_j$ temos

$$M \cong \alpha_1 I_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \alpha_n I_n$$

Consequentemente, multiplicando $(I_j)$ por elementos não nulos convenientes de K podemos considerar em $(\mathbb{C})$ que cada $I_j \supset R$.

Seja

$$\psi : M \longrightarrow I_1 \dot{+} \ldots \dot{+} I_n$$

o isomorfismo assumido em $(\mathbb{C})$.

Tomemos agora $m_j \in M$ tal que

$$\psi(m_j) = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$$

onde 1 aparece na j-ésima posição , então

$$\psi(m) = (a_1, \ldots, a_n) = a_1(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + a_n(0, \ldots, 0, 1)$$

com $a_j \in I_j$ , donde

$$m = \psi^{-1}(a_1(1, 0, \ldots, 0)) + \ldots + \psi^{-1}(a_n(0, \ldots, 0, 1))$$

por $(\mathbb{A})$ temos

$$m = a_1 m_1 + \ldots + a_n m_n$$

Desde que $\psi$ injetora , segue a unicidade de representação , ou seja ,

$$M = I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus I_n m_n \qquad (\mathbb{D}) \ .$$

De certa maneira temos que $\langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ constituem-se uma uma ''base'' de M .

O próximo teorema dá uma condição, em termos dos $I_j$, necenecessária e suficiente para que dois módulos sejam isomorfos.

**Teorema (2.11):** Sejam $M \cong I_1 \dotplus \ldots \dotplus I_m$ e $N \cong J_1 \dotplus \ldots \dotplus J_n$ onde os $I_i$ e $J_j$ são R - ideais fracionários . Então $M \cong N$ se e só se $m = n$ e os produtos $I_1 \ldots I_m$, $J_1 \ldots J_m$ são da mesma classe de ideal.

Antes de demonstrarmos tal teorema vamos apresentar alguns resultados auxiliares que usaremos na sua prova .

**Lema (2.12):** Sejam R domínio de Dedekind e A e B R - ideais integrais. Então existe C um R - ideal integral tal que AC é principal e C e B são co - primos .

**Demonstração:**

Desde que R domínio de Dedekind , podemos expressar

$$A = P_1^{a1} \ldots P_n^{an}$$

e

$$B = Q_1^{b1} \ldots Q_m^{bm}$$

com $P_i$, $Q_j \in \mathrm{Spec}(R)$, $a_i, b_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Seja $\alpha_i \in P_i^{a_i} - P_i^{a_i+1}$ e $\alpha_i \notin Q_i$. Pelo teorema do Resto Chinês existe $\alpha$ em R tal que $\alpha \equiv \alpha_i \mod (P_i^{a_i+1})$.

Então $\alpha \in P_i^{a_i} - P_i^{a_i+1}$ e $\alpha \notin Q_i$. Consequentemente

$$\alpha \in \cap P_i^{a_i} = P_1^{a_1} \ldots P_n^{a_n} = A$$

Consideremos o R - modulo $R\alpha + AB \subset A$. Temos então que $R\alpha + AB = A$. Como $R\alpha \subset A$, existe C R - ideal tal que $\alpha R = AC$ (R Dedekind), logo,

$$AC + AB = A$$

e sendo A inversível temos

$$C + B = R$$

■

**Corolário (2.13):** Sejam I e J R-ideais fracionários próprios. Então existem $\alpha, \beta \in K$ tais que $\alpha I$ e $\beta J$ são R-ideais integrais e co-primos.

**Demonstração:**

Consideremos os R-ideais fracionários J e $I^{-1}$. Então existem $\beta$ e $\gamma$ em K tais que $\beta J$ e $\gamma I^{-1}$ são integrais. Pelo lema (2.12) existe F integral tal que $F\gamma I^{-1} = R\alpha$ e $F + \beta J = R$, o que conclui a prova.

■

**Corolário (2.14):** Sejam $I_1$, $I_2$ R-ideais fracionários e $E_1$, $E_2$ ideais integrais tais que $E_2 \subset E_1$, $E_2 \neq (0)$. Então existe

$$\phi : I_1 \dot{+} I_2 \longrightarrow R \dot{+} I_1 I_2$$

um R - isomorfismo tal que $\phi(E_1 I_1 \dot{+} E_2 I_2) = E_1 \dot{+} E_2 I_1 I_2$.

**Demonstração:**

Pelo corolário (2.13) podemos assumir $I_1$, $I_2$ integrais e $I_1 + E_2 I_2 = R$. Sejam $\alpha_1 \in I_1$ e $\alpha_2 \in E_2 I_2$ tais que $\alpha_1 - \alpha_2 = 1$.

Definamos

$$\phi : I_1 \dot{+} I_2 \longrightarrow R \dot{+} I_1 I_2$$

onde $\phi(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1 + \beta_2, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$.

Facilmente vemos ser $\phi$ injetora. Verifiquemos pois a sobrejeção. Seja $(r, x) \in R \dot{+} I_1 I_2$ então ele é imagem de $(r\alpha_1 - x, x - \alpha_2 r)$ por $\phi$.

Agora, se $(r, x) \in E_1 \dot{+} E_2 I_1 I_2$ então

$$r\alpha_1 - x \in I_1 E_1 + E_2 I_1 I_2 \subset E_1 I_1$$

$$x - \alpha_2 r \in E_2 I_1 I_2 + E_2 I_1 I_2 \subset E_2 I_2$$

Por outro lado, se $(\beta_1, \beta_2) \in E_1 I_1 + E_2 I_2$ temos que

$$\beta_1 + \beta_2 \in E_1 I_1 + E_2 I_1 \subset E_1$$

$$\beta_1\alpha_2 + \beta_2\alpha_1 \in E_1 E_2 I_1 I_2 + E_2 I_1 I_2 \subset E_2 I_1 I_2$$

ou seja

$$\phi\,(E_1 I_1 \dotplus E_2 I_2) \subset E_1 \dotplus E_2 I_1 I_2 .$$

■

Corolário (2.15): Dados $I_1, \ldots, I_n$ R - ideais fracionários temos então que

$$I_1 \dotplus \ldots \dotplus I_n \cong R \dotplus \ldots \dotplus R \dotplus (I_1 \ldots I_n)$$

onde existem (n - 1) somandos para R .

Demonstração do teorema (2.11):

Assumamos inicialmente que $M \cong N$ então $m = (M : R) = (N : R) = n$. Podemos supor que cada $I_k$, $J_k$ contém R, desde que é sempre possivel considerar ao invés deles alguém de sua classe de ideal.

Seja $\theta : M \longrightarrow N$ o R - isomorfismo considerado e suponhamos que para $1 \in I_k$ .

$$\theta\,(0, \ldots, 1, \ldots, 0) = (\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{km})$$

onde temos 1 na k-ésima posição e zeros nas restantes e cada $\alpha_{kl} \in J_l$.

Então

$$M = I_1(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + I_m(0, 0, \ldots, 1)$$

donde

$$\theta\,(M) = I_1(\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1m}) + \ldots + I_m(\alpha_{m1}, \ldots, \alpha_{mn})$$

assim

$$\theta(M) = \left( \sum_k \alpha_{k1} I_k, \ \ldots, \ \sum_k \alpha_{km} I_k \right)$$

consequentemente

$$J_l = \alpha_{1l} I_1 + \ldots + \alpha_{ml} I_m, \quad l = 1, \ \ldots, \ m.$$

Assim $J_1 \ldots J_m \supset \left(\alpha_{i_1 1} \ \ldots \ \alpha_{i_m m}\right)\left(I_1 \ldots I_m\right)$ onde $(i_1, \ \ldots, \ i_m)$ é qualquer permutação de $(1, \ \ldots, \ m)$.

Se $\delta = \det \left( \alpha_{ij} \right)_{1 \leq i,j \leq m}$ vemos que $J_1 \ldots J_m \supset \delta\left(I_1 \ldots I_m\right)$.

De maneira análoga, podemos encontrar $\beta_{lk} \in I_k$ tal que

$$\theta(\beta_{l1}, \ \ldots, \ \beta_{lm}) = (0, \ \ldots, \ 1, \ \ldots, \ 0)$$

onde 1 aparece na l-esima posição e zero nas restantes .

Então $(\beta_{ij})(\alpha_{ij}) = Id$ e consequentemente $\det(\beta_{ij}) = \delta^{-1}$.

Do mesmo modo podemos ver que $I_1 \ldots I_m \supset \delta^{-1}\left(J_1 \ldots J_m\right)$.

Ou seja

$$\delta\left(I_1 \ldots I_m\right) = J_1 \ldots J_m$$

Provemos a reciproca . Para tanto é suficiente que dados $I_1$ , $I_2$ ideais fracionários tenhamos $I_1 \dot{+} I_2 \cong R \dot{+} I_1 I_2$ o que segue imediatamente do corolário (2.14) tomando $E_1 = E_2 = R$ .

■

Para a demonstração do teorema do fator invariante

desenvolveremos alguns resultados preliminares que serão de muita utilidade na prova do teorema, outros, como no caso do teorema de Krull-Schmidt, serão apenas mencionados já que suas demonstrações fogem do objetivo deste capítulo .

Seja R um anel comutativo e M um R - módulo, então M é um *módulo indecomponível* se M $\neq$ ( 0 ) e se não é possível expressar M como soma direta de dois submódulos não triviais, ou seja, se M = N $\oplus$ N' com N e N' submódulos de M então ou N = (0) ou N' = (0) .

**Teorema (2.16)(Teorema de Krull-Schmidt):** Seja R um anel comutativo com identidade . Seja M um R - módulo satisfazendo a ambas as condições da cadeia . Suponhamos que

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k = N_1 \oplus \ldots \oplus N_h$$

sejam duas decomposições de M em somas diretas de submódulos não nulos indecomponíveis . Então h = k e $M_i \cong N_i$ , i = 1 , ... , h .

**Proposição (2.17):** Sejam $\{P_1, \ldots, P_n\} \subset Spec(R)$ um conjunto de primos distintos e $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ um conjunto de inteiros não negativos. Então existem $\alpha \in R$ e B um R - ideal integral relativamente primo a cada $P_i$ tais que

$$\alpha R = \left( P_1^{a1} \ldots P_n^{an} \right) B$$

**Demonstração:**

Para cada i, existe $C_i$ integral tal que $C_i$ é co-primo a $P_1 \ldots P_n$ e

$C_i P_i^{a_i} = R\alpha_i$ com $\alpha_i \in R$ . Então seja $B = \prod C_i$ e $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_n$.

■

**Corolário (2.18):** Sejam $\{ P_1, \ldots, P_n \} \subset Spec(R)$ onde os os $P_i$ são todos distintos e $(a_1, \ldots, a_n)$ números inteiros (não necessariamente positivos). Então existem $\alpha \in K$ e B R - ideal integral relativamente primo a cada $P_i$ tais que

$$R\alpha = \left( P_1^{a_1} \ldots P_n^{a_n} \right) B$$

**Demonstração:**

Suponhamos que $a_1, \ldots, a_m$ com $m \leq n$ sejam negativos e $a_{m+1}, \ldots, a_n$ sejam não negativos. Então $-a_1, \ldots, -a_m$ são positivos e pela proposição (2.17) existem $\alpha' \in R$ e B' integral tais que

$$B' \left( P_1^{-a_1} \ldots P_m^{-a_m} \right) = R\alpha'$$

e

$$P_1^{a_1} \ldots P_m^{a_m} = (\alpha')^{-1} B'$$

Mas sendo R Dedekind temos $B' = Q_1^{b_1} \ldots Q_h^{b_h}$, como B' relativamente primo a cada $P_i$ temos que $P_1, \ldots, P_m, Q_1, \ldots, Q_h$ são todos distintos. Novamente utilizando da proposição (2.17) temos que existem $\gamma \in R$ e C integral tais que $CB' = R\gamma$ e C co-primo com os $P_j$ e $Q_i$, $i = 1, \ldots, h$, $j = 1, \ldots, m$.

Então $C\left[P_1^{a_1} \ldots P_m^{a_m}\right] = \alpha^{-1}B'C = R(\alpha^{-1}\gamma)$.

■

**Proposição (2.19):** Sejam A R - ideal integral e B R - ideal fracionário então $R/A \cong B/(AB)$ como grupo aditivo.

**Demonstração:**

Pelo corolário (2.18) existe C R - ideal integral tal que $C + A = R$ e $CB = R\rho$, $\rho \in K$ .

Consideremos o R - homomorfismo definido por

$$\theta : R \longrightarrow B/(AB)$$

$$x \longrightarrow \rho x + AB$$

onde $\rho x + AB$ denota a classe residual de $\rho x$ em AB.

Então desde que $A + C = R$ temos $AB + R\rho = AB + BC = B$.

Dado $b \in B$ temos que existe $x \in AB$ e $y \in R$ tal que $b = x + \rho y$ e consequentemente $b + AB = \rho y + AB$ .

Calculemos o $\ker(\theta)$. Obviamente $A \subset \ker(\theta)$, basta ver que desde que $R\rho = BC \subset B$ temos $\rho \in B$ .

Suponhamos $x \in R$ com $\rho x + AB = 0 + AB$ então $\rho x \in AB$ o que implica $\rho xC \subset ABC = \rho A$ e consequentemente $xC \subset A$.

Como existem $a \in A$ e $c \in C$ tais que $a + c = 1$, temos

$$x = xa + xc \in A$$

donde $\ker(\theta) = A$ .

■

**Teorema (2.20) (Teorema dos fatores invariantes):** Sejam M e N R - módulos finitamente gerados de mesmo rank e tal que $N \subset KM$. Então existem elementos $m_1, \ldots, m_k \in M$ e R - ideais fracionários $I_1, \ldots, I_k$, $E_1, \ldots, E_k$ tais que $E_j \supset E_{j+1}$, $j = 1, \ldots, k-1$ e

$$M = I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus I_k m_k$$

$$N = E_1 I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus E_k I_k m_k$$

Os ideais $E_1, \ldots, E_k$ são unicamente determinados pelo par M, N e serão ditos *fatores invariantes de N em M* .

**Demonstração:**

Desde que $N \subset KM$ e rank N = rank M podemos considerar M e N mergulhados no mesmo K - espaço vetorial KM .

Suponhamos $k = 1$, temos pelo lema (2.6) que existem I e J ideais fracionários tais que $M \cong I$ e $N \cong J$ .

Portanto existem $m \in M$ e $n \in N$ tais que

$$M = Im \quad e \quad N = Jn$$

Como $M \subset KM = KN$ temos $m/1 = n/\alpha$, com $\alpha \in R$, o que implica $n = m\alpha$.

Logo $N = J\alpha m$ .

Como podemos considerar que $R \subset J$ temos $N = Jm = (JI^{-1})\, Im$.

Suponhamos válido o resultado para módulos de rank $\leq (k-1)$.

Sendo M R - módulo finitamente gerado temos

$$M = Rm_1 + \ldots + Rm_r$$

Para cada $m_i$, $i = 1, \ldots, r$, existem $\alpha_i \in R$ e $n_i \in N$ tais que

$$m_i/1 = n_i/\alpha_i .$$

Seja $\gamma = \alpha_1 \ldots \alpha_r$ então $\gamma M \subset N$ .

Consideremos

$$E' = \left\{ \alpha \in R;\ \alpha N \subset M \right\}$$

que já sabemos não nulo ( faça raciocinio idêntico ao utilizado para encontrar $\gamma$ tal que $\gamma M \subset N$ ) . Afirmamos ser E' um R - ideal fracionário . De fato, seja $\alpha \in E'$ então $\alpha N \subset M$ logo $\gamma\alpha N \subset N$ e pelo lema (2.7) temos que $\gamma\alpha \in R$ . Consequentemente $\gamma E' \subset R$ .

Da própria definição de E' temos ser ele o maior ideal tal que $E'N \subset M$.

Seja $E = (E')^{-1}$ então ele é o único ideal minimal tal que $N \subset EM$ .

Desde que $E'N \subset M$ então $EE'N = N \subset EM$ . Suponhamos F R - ideal fracionário com $N \subset FM$ então $F^{-1}N \subset F^{-1}(F\ M) = M$ logo $F^{-1} \subset E' = E^{-1}$.

Assim $E = ER = EFF^{-1} \subset EE^{-1}F \subset F$ donde segue a afirmação.

Sejam $P_1, \ldots, P_s \in$ Spec (R) distintos tais que ou $P_i \supset \gamma R$ ou $P_i$ aparece com expoente negativo na fatorização de E em potências de ideais primos .

Para cada i, $1 \leq i \leq s$, seja $n_i \in N$ tal que $n_i \notin P_iEM$ (como E é o único ideal minimal fracionário tal que $N \subset EM$, qualquer que seja P ideal integral temos $N \not\subset PEM$ ).

Escolhamos agora $\mu_i \in R$, $1 \leq i \leq s$, tal que

$$\mu_i \equiv 0 \bmod \prod_{j \neq i} P_j \qquad \text{e} \qquad \mu_i \not\equiv 0 \bmod P_i$$

(observe que se $\prod_{j\neq i} P_j \subset P_i$ existiria $j \neq i$ tal que $P_j \subset P_i$, logo $P_j = P_i$, absurdo).

Consideremos então

$$n = \sum_{i=1}^{s} \mu_i n_i \in N$$

então $n \notin P_i EM$, $1 \leq i \leq s$. De fato, suponhamos que tal não ocorresse ou seja, existisse um i, suponhamos $i = 1$, tal que $n \in P_1 EM$.

Como para qualquer $i \neq 1$, $\mu_i n_i \in P_1 N \subset P_1 EM$, temos $\mu_1 n_1 \in P_1 EM$.

Sendo $P_1$ maximal temos

$$R\mu_1 + P_1 = R$$

consequentemente $1 = \mu\mu_1 + p$, $p \in P_1$ e $\mu \in R$.

Daí $n_1 = \mu\mu_1 n_1 + pn_1 \notin P_1 EM$, absurdo.

Consideremos $Kn \cap N$ e $Kn \cap M$ submódulos puros de N e M respectivamente, ambos de rank 1.

Assim, pelo lema (2.6) existem R - ideais fracionários A e B, que podemos supor contendo R, tais que $Kn \cap N \cong A$ e $Kn \cap M \cong B$.

Portanto temos

$$Kn \cap N = An \quad e \quad Kn \cap M = Bn$$

Então $E'An \subset E'N \subset M \rightarrow E'An \subset Kn \cap M = Bn \rightarrow E'A \subset B$.

Sabemos que existem $\alpha, \beta \in R - \{0\}$ tais que $\alpha E'A \subset R$ e $\beta B \subset R$.

Então $\alpha\beta E'A \subset \alpha\beta B \subset R \rightarrow$ existe C um R - ideal integral tal que $\alpha\beta E'A = \alpha\beta BC$. Assim $E'A = BC$.

Além disso $\gamma Bn \subset \gamma N \subset N \rightarrow \gamma Bn \subset Kn \cap N = An \rightarrow \gamma B \subset A \rightarrow R\gamma \subset EC$.

Portanto todo ideal primo pertencente a C ou contém $R\gamma$ ou ocorre no "denominador" de E . Consequentemente os ideais primos pertencentes a C se encontram entre os $P_1, \ldots, P_s$.

Por outro lado, se $C \subset P_i$ temos $n \in An = ECBn \subset CEM \subset P_iEM$, absurdo.

Consequentemente $C = R$ e $B = E'A$ .

Sejam $N_1 = An$ e $M_1 = Bn$ $(= E'An)$ que são submódulos puros de rank 1 de N e M respectivamente .

Pela proposição (2.10) existe $M_1'$ submódulo de M tal que $M = M_1 \oplus M_1'$.

Afirmamos que

$$N = N_1 \oplus N_1' \quad \text{onde} \quad N_1' = KM_1' \cap N \qquad (E)$$

Como $KN_1 = KM_1$ e $KN_1' = KM_1'$ temos $N_1 \cap N_1' \subset KM_1 \cap KM_1'$ .

Seja $m/s \in KM_1 \cap KM_1'$ então existem $m_1 \in M_1$, $m_1' \in M_1'$, $s'$, $s'' \in R$, $s, s' \neq 0$, tais que $m/s = m_1/s' = m_1'/s''$.

Mas $M = M_1 \oplus M_1'$ então $m = m_2 + m_2'$, $m_2 \in M$, $m_2' \in M_1'$.

Então $m_2/s + m_2'/s = m_1/s'$ donde $m_2s + m_2's = m_1s$ o que implica $m_2's = 0$ e então $m_2' = 0$.

De maneira analoga temos $m_2 = 0$ e então $KM_1 \cap KM_1' = (0)$, consequentemente $N_1 \cap N_1' = (0)$.

Como $N \subset EM = E(M_1 \oplus M_1') \subset EM_1 + EM_1'$. Se $x \in N$, então $x = an + y$ onde $a \in K$ e $y \in KM_1'$.

Logo

$$E'x = E'an + E'y$$

mas $E'x \subset M$, $E'an \subset KM_1$, $E'y \subset KM_1'$, $KM = KM_1 \oplus KM_1'$ e sendo M livre de torção a inclusão de M em KM é injetora.

Logo $E'an \subset M_1 \Rightarrow an \subset EM_1 = N_1 \Rightarrow y \in N \cap KM_1'$, o que conclui a prova de (E).

Temos então

$$M = Bn \oplus M_1' \quad e \quad N = EBn \oplus N_1'$$

Além disso $KM_1' = KN_1'$ e rank $M_1'$ = rank $N_1'$ = k-1 consequentemente utilizando-nos da hipótese de indução, temos a existência de $m_1, \ldots, m_{k-1} \in M_1'$ e ideais fracionários $A_1, \ldots, A_{k-1}, E_1, \ldots, E_{k-1}$ em K com $E_j \supset E_{j+1}$, $j = 1, \ldots, k-2$, tal que

$$M_1' = A_1 m_1 \oplus \ldots \oplus A_{k-1} m_{k-1}$$

$$N_1' = E_1 A_1 m_1 \oplus \ldots \oplus E_{k-1} A_{k-1} m_{k-1}$$

Portanto, para se concluir a demonstração de existência é suficiente provar que $E \supset E_1$.

É imediato que $EM_1' \supset N_1'$. Mas $E_1$ é o único R - ideal fracionário mínimal tal que $E_1 M_1' \supset N_1'$ logo $E \supset E_1$.

Provaremos agora que $E_1, \ldots, E_k$ estão unicamente determinados por M e N. Se considerarmos $E_1 M$ temos

$$E_1 M = E_1 I_1 m_1 \oplus E_1 I_2 m_2 \oplus \ldots \oplus E_1 I_k m_k$$

$$N = E_1 I_1 m_1 \oplus ( E_1^{-1} E_2 )( E_1 I_2 ) m_2 \oplus \ldots \oplus ( E_1^{-1} E_k )( E_1 I_k ) m_k$$

onde $E_i^{-1}E_j \subset R$, podemos então assumir que os $\{ E_i \}$ são ideais integrais.

Então

$$M/N \cong \left(I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus I_k m_k\right) / \left(E_1 I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus E_k I_k m_k\right) \cong \left(I_1/(E_1 I_1)\right) \dot{+} \ldots \dot{+}$$

$$\dot{+} \ldots \dot{+} \left(I_k/(E_k I_k)\right)$$

mas pela proposição ( 2.19 )

$$M/N \cong R/E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} R/E_k$$

onde cada $R/E_i$ é um R - módulo cíclico com $\mathrm{Ann}(R/E_i) = E_i$, $1 \leq i \leq k$.

Mais que isso, cada $R/E_i$ satisfaz a ambas as condições da cadeia ( já que existe um numero finito de ideais entre R e $E_i$) portanto tambem M/N satisfaz a ambas as condições da cadeia. Agora como $E_1 \supset \ldots \supset E_k$ para cada i

$$E_i = \prod_{j=1}^{h} P_j^{\alpha_{ij}}$$

e mais ainda, se $i < l$, $\alpha_{ij} \leq \alpha_{lj}$, $P_j \in \mathrm{Spec}(R)$ todos distintos.

Pelo teorema do Resto Chinês temos

$$R/E_i \cong R/(P_1^{\alpha_{i1}}) + \ldots + R/(P_h^{\alpha_{ih}})$$

Afirmamos ser cada $R/(P_i^{\alpha_{ij}})$ indecomponivel, de fato, sejam $\bar{I}$ e $\bar{J}$ em $R/(P_i^{\alpha_{ij}})$ onde I e J são ideais de R tais que $I, J \supset P_i^{\alpha_{ij}}$.

Então $I = P_j^r$, $J = P_j^s$ com $0 < r, s < \alpha_{ij}$, e obviamente $\bar{I} \cap \bar{J} \neq (0)$.

Temos então

$M/N \cong R/(P_1^{\alpha_{11}}) + \ldots + R/(P_h^{\alpha_{1h}}) + \ldots + R/(P_1^{\alpha_{k1}}) + \ldots + R/(P_h^{\alpha_{kh}})$

E pelo teorema (2.16) (de Krull-Schmidt) o conjunto $\left\{ P_j^{\alpha_{ij}} \right\}$ está univocamente determinado pelo par M e N. Seja $S_j = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{kj})$ o conjunto das potências do primo $P_j$, então $E_1 = \prod_{j=1}^{h} P_j^{\min(S_j)}$.

Se $\delta_j = \min(S_j)$, $E_2 = \prod_{j=1}^{h} P_j^{\min(S_j - \langle \delta_j \rangle)}$, e assim por diante. Consequentemente os $E_i$ estão univocamente determinados pelo par M e N .

■

Algumas observações imediatas :

1) No teorema se assumirmos que $N \subset M$ então $R \subset E'$ e assim $E \subset R$ .

2) Desde que $m_1, \ldots, m_k \in M$ temos $1 \in I_j$ para cada j, ou seja, temos $R \subset I_j$ .

**Corolário (2.21):** Sejam M e N R - módulos finitamente gerados tais que $N \subset KM$ e rank M = k. Então existem $m_1, \ldots, m_k \in M$ e ideais fracionários $I_1, \ldots, I_k, E_1, \ldots, E_l$ tais que $E_i \supset E_{i+1}$ para para $i = 1, \ldots, l-1$ e $l$ = rank N e

$$M = I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus I_k m_k$$

$$N = E_1 I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus E_l I_l m_l$$

onde se $N \subset M$ cada $E_i$ é integral .

**Demonstração:**

Como $N \subset KM$ temos que $KN \subset KM$ . Se provarmos que $M = M' \oplus M''$ onde

rank M' = rank N e N ⊂ KM' o resultado segue diretamente de (2.20).

Consideremos M' = KN ∩ M, então dado $\alpha \in R - (0)$

$$\alpha M' = \alpha(KN \cap M) = \alpha(KN) \cap (\alpha M) = \alpha(KN) \cap \alpha M \cap M$$

e desde que $\alpha(KN) = KN$ temos

$$\alpha M' = (KN \cap M) \cap \alpha M = M' \cap \alpha M$$

e assim M' é submódulo puro de M e por (2.10) temos M' somando direto de M.

■

**Corolário (2.22):** Todo R - módulo finitamente gerado é isomorfo a uma soma direta externa de R - ideais fracionários e R - modulos da forma R/I, onde I ideal integral .

**Demonstração:**

Temos $M = Rm_1' + \ldots + Rm_n'$ . Consideremos o R - módulo livre com base $(f_1, \ldots, f_n)$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \theta : F &\longrightarrow M \\ f_i &\longrightarrow m_i' \end{aligned}$$

então

$$M \cong F/\ker\theta \cong \left(I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus I_n m_n\right) / \left(E_1 I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus E_l I_l m_l\right) \cong R/E_1 \dot{+} \ldots \dot{+}$$

$$\dot{+} \ldots \dot{+} R/E_l \dot{+} I_{l+1} \dot{+} \ldots \dot{+} I_m$$

■

# CAPÍTULO III

## APLICAÇÕES DO TEOREMA DOS FATORES INVARIANTES

Neste capítulo, a menos que explicitado, R será sempre um domínio de Dedekind.

Alguns resultados interessantes da álgebra comutativa são aqui apresentados utilizando-se como ferramenta básica, nas demonstrações, os dados acerca dos fatores invariantes obtidos no capítulo anterior.

Os fatos aqui relatados não são inéditos, e diferentes demonstrações podem ser encontradas na literatura clássica em álgebra comutativa . Os motivos que nos levaram a selecioná-los em alguns casos foram de fundo puramente estético ( a elegância da demonstração do teorema do um e meio gerador ) , em outros casos , a atualidade da questão enfocada ( BCS anéis , vide [12] ) .

**Teorema (3.1) (Teorema do um e meio gerador):** Sejam R um domínio de Dedekind e $I \subset R$, $I \neq (0)$, $I \neq R$ um ideal integral.
Dado $a \in I-(0)$ então existe $b \in I$ tal que $I = Ra + Rb$.

**Demonstração:**

Seja $a \in I-(0)$ um elemento arbitrário. Como rank I = rank Ra = 1 temos pelo corolário (2.22) que

$$I/Ra \cong R/E$$

onde $E \subset R$ é um ideal integral.

Como obviamente $R/E$ é um $R$ - modulo principal ( $R/E = R\,\bar{1}$ ) temos que $I/Ra = R\,\bar{b}$ para algum $b \in I$ . Donde $I = Ra + Rb$ .

■

Antes de enunciarmos o resultado acerca de BCS anéis , definiremos alguns objetos e desenvolveremos alguns fatos preliminares .

O primeiro deles versa acerca de um exercicio sugerido por Curtis e Reiner em [6] . Colocaremos a redação original , demonstraremos ser tal versão impossível e apresentaremos uma redação alternativa .

Versão original :

"Seja M um R - módulo livre de torção finitamente gerado de rank n . N um submódulo de M de rank 1 , e $E_1$ , ... , $E_l$ os fatores invariantes de N em M . Mostre que existe um ideal fracionário I e um isomorfismo

$$\theta : M \longrightarrow R \dot{+} \ldots \dot{+} R \dot{+} I \quad (\text{k somandos})$$

tal que

$$\theta(N) = \begin{cases} E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{k-1} \dot{+} E_k\, I & , \; 1 = k \\ \\ E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_l & , \; 1 < k \end{cases} .$$

Tal versão só é verdadeira quando rank M = rank N .

Tome por exemplo um domínio de Dedekind , D , e $I \subset D$ um ideal tal $I^{s-1}$ não é principal . Tomando $M = I \dot{+} \ldots \dot{+} I$ ( s somandos)

e $N = I \dot{+} \ldots \dot{+} I$ ( s-1 somandos ) temos pela versão dada no livro que $N \cong R^{s-1}$, mas já vimos por (2.15) que $N \cong R^{s-2} \oplus I^{s-1}$ e, por (2.11) teríamos então $I^{s-1}$ principal , absurdo .

Aqui damos uma versão correta do exercício :

**Teorema (3.2):** Seja M um R - módulo livre de torção finitamente gerado cujo rank é k . Seja $N \subset M$ um R - submódulo com rank $N = l$ e sejam $E_1 , \ldots , E_l$ os fatores invariantes de N em M . Então existe I um R - ideal fracionário e $\theta : M \longrightarrow R \dot{+} \ldots \dot{+} R \dot{+} I$ ( k somandos ) R - isomorfismo tal que

$$\theta (N) = E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{l-1} \dot{+} N' \quad , \quad E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_{l-1},$$

Além disso , se $k = 1$ então $N' = E_l I$ .

**Demonstração:**

Pelo corolário (2.21) temos que

$$M \cong I_1 \dot{+} \ldots \dot{+} I_k \quad e$$

$$N \cong E_1 I_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_l I_l \qquad , \qquad E_i \supset E_{i+1} \quad , \quad E_i \text{ integral}$$

passo 1 :

Como já vimos , pelo lema (2.14) , existe

$$\phi_1 : I_1 \dot{+} I_2 \longrightarrow R \dot{+} I_1 I_2$$

R - isomorfismo com $\phi_1 ( E_1 I_1 \dot{+} E_2 I_2 ) = E_1 \dot{+} E_2 I_1 I_2$ .

Seja $\theta_1 = ( \phi_1 , id|_{I_3} \dot{+} \ldots \dot{+} I_k ) : I_1 \dot{+} \ldots \dot{+} I_k \longrightarrow R \dot{+} I_1 I_2 \dot{+}$

$\dot{+} I_3 \dot{+} \ldots \dot{+} I_k$ onde $\theta_1 ( E_1 I_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_l I_l ) = E_1 \dot{+} E_2 I_1 I_2 \dot{+} E_3 I_3 \dot{+}$

$\dot{+} \ldots \dot{+} E_l I_l$ .

passo 2 :

Novamente utilizando (2.14) consideremos

Seja $\phi_2 : I_1 I_2 \dot{+} I_3 \longrightarrow R \dot{+} I_1 I_2 I_3$ tal que $\phi_2 ( E_2 I_1 I_2 \dot{+} E_3 I_3 ) =$

$E_2 \dot{+} E_3 I_1 I_2 I_3$ .

Considere $\theta_2 = ( id|_R , \phi_2 , id|_{I_4} \dot{+} \ldots \dot{+} I_k ) : R \dot{+} I_1 I_2 \dot{+} I_3 \dot{+}$

$\ldots \dot{+} I_k \longrightarrow R \dot{+} R \dot{+} I_1 I_2 I_3 \dot{+} I_4 \dot{+} \ldots \dot{+} I_k$ onde $\theta_2 ( E_1 \dot{+} E_2 I_1 I_2 \dot{+}$

$E_3 I_3 \dot{+} \ldots \dot{+} E_l I_l ) = E_1 \dot{+} E_2 \dot{+} E_3 I_1 I_2 I_3 \dot{+} E_4 I_4 \dot{+} \ldots \dot{+} E_l I_l$ .

passo l-1 :

Seja $\phi_{l-1} : I_1 I_2 \ldots I_{l-1} \dot{+} I_l \longrightarrow R \dot{+} I_1 I_2 \ldots I_{l-1} I_l$ onde

$\phi_{l-1} (E_{l-1} I_1 \ldots I_{l-1} \dot{+} E_l I_l ) = E_{l-1} \dot{+} E_l I_1 \ldots I_l$ .

Considere $\theta_{l-1} = ( id|_R \dot{+} \ldots \dot{+} R , \phi_{l-1} , id|_{I_{l+1}} \dot{+} \ldots \dot{+} I_k ) : R \dot{+}$

$\ldots \dot{+} R \dot{+} I_1 \ldots I_{l-1} \dot{+} I_l \dot{+} I_{l+1} \dot{+} \ldots \dot{+} I_k \longrightarrow R \dot{+} \ldots \dot{+} R \dot{+} I_1 \ldots I_l$

$\dot{+} I_{l+1} \dot{+} \ldots \dot{+} I_k$ onde $\theta_l ( E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{l-2} \dot{+} E_{l-1} I_1 \ldots I_{l-1} \dot{+} E_l I_l ) =$

$E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{l-1} \dot{+} E_l I_1 \ldots I_l$ .

passo 1 :

Seja $\phi : I_1 \ldots I_l \dot{+} I_{l+1} \longrightarrow R \dot{+} I_1 \ldots I_l$ onde

$\phi l ( E_l I_1 \ldots I_l ) = N_l$.

Considere $\theta_l = ( id|_R \dot{+} \ldots \dot{+} R \cdot \phi_l \cdot id|_{I_{l+2}} \dot{+} \ldots \dot{+} I_k ) : R \dot{+} \ldots \dot{+}$

$R \dot{+} I_1 \ldots I_l \dot{+} I_{l+1} \dot{+} \ldots \dot{+} I_k \longrightarrow R \dot{+} \ldots \dot{+} R \dot{+} I_1 \ldots I_{l+1} \dot{+} I_{l+2}$

$\dot{+} \ldots \dot{+} I_k$ onde $\theta_l ( E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{l-1} \dot{+} E_l I_1 \ldots I_l ) = E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{l-1} \dot{+}$

$N_l$ .

passo k-1 :

Seja $\phi_{k-1} : I_1 \ldots I_{k-1} \dot{+} I_k \longrightarrow R \dot{+} I_1 \ldots I_k$ . consideremos

$\theta_{k-1} = ( id|_R \dot{+} \ldots \dot{+} R \cdot \phi_{k-1} ) : R \dot{+} \ldots \dot{+} R \dot{+} I_1 \ldots I_{k-1} \dot{+} I_k \longrightarrow$

$\dot{+} R \dot{+} \ldots \dot{+} R \dot{+} I_1 \ldots I_k \quad e \quad \theta_{k-1} ( E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{l-1} \dot{+} N_{k-2} ) =$

$E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{l-1} \dot{+} N'$.

Então seja $I = I_1 \ldots I_k$ e $\theta = \theta_{k-1} \circ \theta_{k-2} \circ \ldots \circ \theta_2 \circ \theta_1$ onde temos

$\theta ( E_1 I_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_l I_l ) = E_1 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{l-1} \dot{+} N'$, com $N' = E_l I$ se $l = k$ .

■

**Definição (3.3):** Sejam R anel comutativo, M um R-módulo e $N \subset M$ submódulo . Diremos que *N é básico em M* se qualquer que seja $P \in Spec(R)$ , $N \not\subset PM$ .

**Definição (3.4):** Dado R anel comutativo e

$$A = \left( a_{ij} \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

matriz m x n , com entradas em R , definiremos o *conteudo de A* , e denotaremos por c(A) , como o ideal de R gerado pelos $a_{ij}$.

Algumas observações :

1) Suponhamos M um somando direto de L e $N \subset M$ um submódulo , então N é básico em M se e só se N é básico em L .

2) Seja R um domínio de Dedekind , M um R - módulo livre de torção finitamente gerado e $N \subset M$ submódulo com rank M = n e rank N = k . Suponhamos ser N básico M . Pelo teorema dos fatores invariantes temos que

$$M = I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus I_n m_n$$

$$N = E_1 I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus E_k I_k m_k$$

com $I_i$ R - ideais fracionários , $E_i \supset E_{i+1}$ e $E_i$ integrais .

Se $E_1 \subset R$, $E_1 \neq R$, existiria um $P \in Spec(R)$ tal que $E_1 \subset P$ donde $N \subset PM$ o que é absurdo . Logo temos $E_1 = R$ e

$$M = I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus I_n m_n$$

$$N = I_1 m_1 \oplus E_2 I_2 m_2 \oplus \ldots \oplus E_k I_k m_k$$

Mais que isso , se rank N = 1 então M = N ⊕ N' .

3) Sejam $M = R^n$ e $A = (a_{ij})$ , matriz n x m com entradas em R . Considere G o R - módulo gerado pelas colunas de A , então G básico em $R^n$ se e só se c(A) = R.

**Definição (3.5):** Seja R um anel comutativo e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ em $R^n$ , então diremos que v é *unimodular* se existirem $r_1 , \ldots , r_n$ em R tal que

$$\sum_{i=1}^{n} r_i v_i = 1 \quad .$$

Caracterizaremos agora os elementos unimodulares de $R^n$ quando R é um domínio de Dedekind .

**Proposição (3.6):** Sejam R um domínio de Dedekind e $v = (v_1, \ldots, v_n) \in R^n$ . Então v é unimodular se e só se

$$R^n = Rv \oplus M$$

**Demonstração:**

Suponhamos v unimodular e consideremos N = Rv , então existem $I_1$ , ... , $I_n$ R - ideais fracionários , E ideal integral e $(m_1, \ldots, m_n)$

subconjunto de M tal que

$$R^n = I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus I_n m_n$$

$$Rv = N = EI_1 m_1$$

Se $E \subset R$, $E \neq R$ então existiria $P \in Spec(R)$ com $E \subset P$ e consequentemente $N \subset PM$. Então $v = \sum_{i=1}^{k} p_i m_i$ . $p_i \in P$ e $m_i = ( m_{i1}, \ldots, m_{in} ) \in M$.

Assim $v_j = \sum_{i=1}^{k} p_i m_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$. Agora, existem $r_1, \ldots, r_n$ com

com $\sum_{j=1}^{n} r_j v_j = 1$ donde $1 = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{k} r_j p_i m_{ij} \right)$, ou seja , $1 \in P$ , absurdo .

Consequentemente $E = R$ e $R^n = Rv \oplus M$ .

Suponhamos $R^n = Rv \oplus M$ e tomemos $\{ e_i \}_{i=1}^{n}$ base canônica de $R^n$, temos então $e_i = r_i v + m_i$ e $v = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$ donde

$$v = \left( v_1 r_1 + \ldots r_n v_n \right) v + \left( v_1 m_1 + \ldots + v_n m_n \right)$$

assim , $v_1 r_1 + \ldots + v_n r_n = 1$ , ou seja , v unimodular .

■

**Corolário (3.7):** $v \in R^n$ unimodular $\leftrightarrow$ v é coluna de uma matriz , n x n , inversível .

**Demonstração:**

Suponhamos que v é coluna de uma matriz $A = \left( a_{ij} \right)$, $1 \leq i, j \leq n$.

inversível.

Então $AA^{-1} = Id \rightarrow \det(A) \det(A^{-1}) = \det(Id) = 1$ .

Desenvolvendo o determinante de A pela coluna que é v , temos que v é unimodular.

Reciprocamente , se $v \in R^n$ é unimodular então $R^n = Rv \oplus M$ .Pelo teorema (2.11) temos $M \cong R^{n-1}$. Assim v faz parte de uma base de R e considerando a matriz mudança de base em relação a base canônica temos v coluna de uma matriz inversível.

■

O próximo resultado dará condições suficientes para que um submódulo M de $R^n$ , onde R é Dedekind , contenha um elemento unimodular.

**Proposição (3.8):** Seja $M \subset R^n$ R-submódulo básico de $R^n$ onde R é um domínio de Dedekind, então:

i) se rank M = 1 , M contém um elemento unimodular se e só se M é um R - módulo principal

ii) se rank M > 1 então M contém um elemento unimodular.

**Demonstração:**

i) Se rank M = 1.

Suponhamos que exista $m \in M$ unimodular então N = Rm é básico em M, de fato, se existisse $P \in Spec(R)$ tal que $Rm \subset PM$ então $1 \in P$ o que é absurdo .

Além disso , dado que rank M = rank N = 1, existem E um ideal integral I um R-ideal fracionário tais que $M = Im_1$ e $N = EIm_1$, para algum $m_1$ de M, e pela observação (2) temos E = R , donde M = Rm .

Suponhamos que M é principal . temos que M = Rm para algum $m \in M$ .

Além disso , existem $I_1$ , ... , $I_n$ R-ideais fracionários tal que

$$R^n = I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus I_n m_n$$

e

$$M = I_1 m_1$$

pois M básico em $R^n$, donde $R^n = M \oplus M'$, assim, por (3.6), m é unimodular.

ii) Se rank M > 1.

Sendo M básico em $R^n$ temos

$$R^n = I_1 m_1 \oplus \ldots \oplus I_n m_n \text{ e } M = I_1 m_1 \oplus E_2 I_2 m_2 \oplus \ldots \oplus E_k I_k m_k$$

com k > 1.

Por (3.2) existe $\phi : R^n \longrightarrow R^n$ isomorfismo tal que $\phi(M) = R \oplus M''$.

Assim existe $v = (v_1, \ldots, v_n)$ tal que $\phi(v) = (1, 0, \ldots, 0)$.

Logo

$$(1, 0, \ldots, 0) = \phi(v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i \phi(e_i)$$

onde $\{ e_i \}_{i=1}^{n}$ base canônica de $R^n$, e sendo $\phi(e_i) = (f_{i1}, \ldots, f_{in})$ temos $(1, \ldots, 0) = \left( \sum_{j=1}^{n} v_j f_{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} v_j f_{jn} \right)$ donde $1 = \sum_{j=1}^{n} v_j f_{j1}$, assim v unimodular. ■

**Definição (3.9):** Sejam R um anel comutativo e $A = \left( a_{ij} \right)$, $1 \leq i \leq m$ , $1 \leq j \leq n$ , matriz m x n , com entradas em R . Diremos que *A representa* 1 se existem $u = (u_1, \ldots, u_m) \in R^m$ e $v = (v_1, \ldots, v_n) \in R^n$ tais que $uAv^t = 1$.

Mais algumas observações :

4) A representa 1 se e só se o submódulo de $R^n$ ( respectivamente $R^m$ ) gerado pelas linhas ( respectivamente pelas colunas ) possue um elemento unimodular .

5) A representa 1 se e só se através de operações elementares nas linhas e colunas de A obtemos uma nova matriz com uma das entradas igual a 1 .

O resultado a seguir oferece uma condição necessária e suficiente para que um anel de Dedekind seja principal.

**Teorema (3.10):** Seja R um domínio de Dedekind. R é principal se e só se para toda matriz A com c(A) = R temos que A representa 1 .

**Demonstração:**

Provemos a necessidade . Seja A matriz m x n tal que c(A) = R . Então o R-módulo gerado pelas colunas de A , a saber G , é básico em $R^m$.
Se rank G > 1 , pela proposição (3.8) (ii) temos que G possui elemento unimodular. Se rank G = 1 , dado que R principal temos que G = Ra , $a \in R^m$, e pela proposição (3.8) (i) temos que G possui elemento unimodular .

Por outro lado , suponhamos que c(A) = R implique que A representa 1. Seja $I \subset R$ ideal , então por (3.1) temos que $I = Ra + Rb$ , $a , b \in I$. Além disso , por (2.13) , existe $\xi \in K$ com $\xi I \subset R$ e $I + \xi I = R$ . Consideremos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \xi a & \xi b \end{pmatrix}$$

Então c(A) = R e daí o R-módulo gerado pelas colunas de A , a saber G, possui elemento unimodular . Pela observação (3) temos que tal modulo é basico em $R^2$ .
Como rank G = 1 , segue da proposição (3.8) (i) que G é principal . Mas

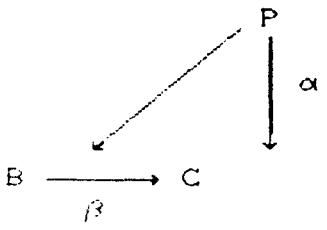
$$G = R(a, \xi a) + R(b, \xi b) = (Ra + Rb)(1, \xi) = I(1, \xi)$$

ou seja, $I \cong G$, portanto I principal.

■

Desenvolveremos agora de modo propriamente dito o resutado referente a BCS anéis . Antes disso porém daremos algumas definições .

**Definição (3.11):** Seja R um anel comutativo. Um R-módulo P é dito *projetivo* se dados C e B R-módulos, $\alpha : P \longrightarrow C$ um R-homorfismo e $\beta : B \longrightarrow C$ R-homomorfismo sobrejetor, então existe um R-homomorfismo $\gamma : P \longrightarrow B$ tal que $\beta \circ \gamma = \alpha$ (o que é equivalente a dizer que o diagrama da página seguinte comuta)(vide [10]).

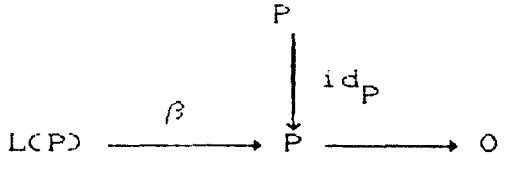



Daremos agora um teorema que caracteriza um módulo projetivo como um somando direto de um módulo livre .

**Teorema (3.12):** Um R-módulo P é projetivo se e só se é um somando direto de um módulo livre. Mais que isso, todo somando direto de um módulo projetivo é projetivo .

**Demonstração:**

Consideremos o R-módulo livre gerado por P , a saber L(P) . Temos então o seguinte diagrama

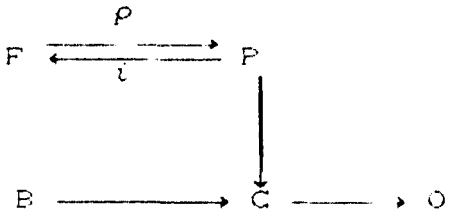



Sendo L(P) um R-módulo livre, existe $\gamma : P \longrightarrow L(P)$ tal que $\gamma \circ \beta = id_P$ logo $L(P) = \ker \beta \oplus \gamma(P)$ , onde $\gamma(P) \cong P$ .

Reciprocamente, sendo F um R-módulo livre temos F projetivo . Suponhamos então P um somando direto de um módulo projetivo F , isto é , $F = P \oplus P'$ .

Consideremos $i : P \longrightarrow F$ a inclusão e $\rho : F \longrightarrow P$ a projeção , donde $\rho \circ i = id_P$ .

Temos então o seguinte diagrama




Logo , existe $\gamma : F \longrightarrow B$ tal que $\beta \circ \gamma = \alpha \circ \rho$ . Seja $g = \gamma \circ i$ então $\beta \circ g = \beta \circ \gamma \circ i = \alpha \circ \rho \circ i = \alpha$ . Donde P projetivo .

■

**Corolário (3.13):** A soma direta de módulos projetivos é um módulo projetivo .

O resultado a seguir será apenas enunciado e desde que sua demonstração foge ao nosso objetivo , aos interessados , remetemos a [9]. O que nos interessa realmente é uma consequência imediata que nos garante que todo módulo livre de torção finitamente gerado sobre um domínio de Dedekind é projetivo.

**Proposição (3.14):** Seja R domínio e $I \subset A$ ideal fracionário $I \neq (0)$. Então

I projetivo (como R-módulo) $\Leftrightarrow$ I inversível.

**Teorema (3.15):** Seja R um domínio de Dedekind e M um R-módulo livre de torção finitamente gerado , então M é projetivo .

**Demonstração:**

Por (2.9) temos que $M \cong I_1 \oplus \ldots \oplus I_n$ , $n = \text{rank } M$ , onde $I_j$ são R-ideais fracionários . Sendo R Dedekind temos que cada $I_j$ é inversível e por (3.14) , projetivo . Por (3.13) segue o desejado.

■

**Proposição (3.16):** Seja R um anel comutativo. As seguintes asserções são equivalentes :

i) todo submódulo básico finitamente gerado de um R-módulo projetivo P finitamente gerado contém um somando de rank 1 de P

ii) para todo n , todo submódulo básico finitamente gerado de $R^n$ contem um somando de rank 1 de $R^n$ .

**Demonstração:**

Que (i) $\Rightarrow$ (ii) é imediato , basta tomar $P = R^n$ .

Suponhamos que (ii) seja verdadeira . Por (3.12) temos que P é um somando direto de algum $R^n$ e pela observação (1) segue que se um submódulo é básico em P também o é em $R^n$ . Segue da hipótese que tal submódulo contem R e como por (3.12) podemos considerar

$$P = R \dot{+} \ldots \dot{+} R \dot{+} I \quad , \; I \text{ R-ideal fracionário}$$

segue a conclusão desejada.

■

**Definição (3.17):** Um anel comutativo satisfazendo uma das asserções da proposição (3.16) é dito um *BCS anel* .

**Teorema (3.18):** Se R é um domínio de Dedekind então R é um BCS anel.

Demonstração:

Seja M um R-módulo projetivo finitamente gerado e G um seu submódulo básico. Sem perda de generalidade por (3.16) podemos assumir $M = R^n$ , n = rank M . Suponhamos rank G ≥ 2 , por (3.2) e mais pela observação (2) temos

$$M = R \dot{+} \ldots \dot{+} R$$

e

$$G = R \dot{+} E_2 \dot{+} \ldots \dot{+} E_{k-1} \dot{+} N'$$

com k = rank G, donde segue o desejado.
Se rank G = 1 , sendo ele básico em M temos pela observação (2) ser ele próprio um somando direto de M .

■

Referências Bibliográficas

[1] - Atiyah.M. F.,MacDonald.I. G.,Introduction al Algebra Comutativa, Barcelona, Editorial Reverté S. A., 1980.

[2] - Azevedo,A., Modulos sobre dominios principais, (VIII Colóquio Brasileiro de matemática), Rio de Janeiro, IMPA, 1971.

[3] - Bass,H., Projective modules and simetric algebras, Rio de Janeiro, IMPA, 1980, (Monografias de Matemática 30).

[4] - Cassels, J. W. S., Frölich, A., Algebraic Number Theory; Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO advanced study institute) with the support of the International Mathematical Union, London, Academic Press, 1967

[5] - Cohen, I. S., "Comutative rings wiyh restricted minimum condition", Duke Math Journal, Vol.7, pp.27-42, 1060.

[6] - Curtis, C. W., Reiner, I., Representation theory of finite groups and associative algebras, New York, John Wiley & Sons, 1962, (Pure and Applied Math., a series of texts and monographs XI).

[7] - Hautus, M. L. J., Sontag, E. D., "New results on pole-shifting for parametrized families of sistems", Journal of Pure and Applied Algegra, Vol. 40, No. 3, pp 229-244, 1986.

[8] - Kunz, E., Introduction to comutative algebra and algebraic geometry, Boston, Birkhauser, 1985.

[9] - Lafon, J. P., Les formalismes foundamentaux de l'algebre comutative, Paris, Hermann, 1974, (Collection enseignement des sciences 20).

[10] - Rotman, J.J., An introduction to homological algebra, New York, Academis Press, 1979.

[11] - Sontag, E. D., "Linear systems over conmutative rings : a survey", Recherche de Automatic, Vol. 7, No. 1, pp 1-7, 1976.

[12] - Vasconcelos, W. V., Weibel, C. A., BCS rings, New Brunswich, Rutgers University, 1988, (to appeal).

[13] - Zariski, O., Samuel, P., Comutative algebra (Vol.1), New York, Springer-Verlag, 1979, (Graduate Texts im Math. 28).