

ANÉIS DE HILBERT

MATIAS JOSÉ QUADROS NETO

ORIENTADOR

PROF. DR. HU SHENG

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro da CAPES e da Fundação Universidade Estadual de Londrina.

Julho de 1.979

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

À Miriam

Alexandre

e Cesar

Agradeço:

Ao Prof. Dr. HU SHENG pela proposta do presente trabalho, por sua atenção e disponibilidade, pela orientação segura e pelo estímulo e encorajamento;

Aos amigos e professores por seus estímulos e ensinamentos;

À CAPES e FUEL que me apoiaram financeiramente na realização deste trabalho.

# ÍNDICE

INTRODUÇÃO . . . . .	i a iii
CAPÍTULO 1 - PRELIMINARES	
§1.1 Anéis e Ideais . . . . .	1 a 5
§1.2 Anéis de Polinômios e Séries Formais . . . . .	6 a 10
§1.3 Dependência Integral . . . . .	11 a 12
§1.4 Corpos - Extensões de Corpos . . . . .	13 a 15
§1.5 Anéis e Módulos Noetherianos . . . . .	16 a 17
CAPÍTULO 2 - G-DOMÍNIOS e G-IDEAIS	
§2.1 G-domínios . . . . .	18 a 29
§2.2 G-ideais . . . . .	30 a 35
CAPÍTULO 3 - ANÉIS de HILBERT	
§3.1 Anéis de Hilbert . . . . .	36 a 42
§3.2 Anéis de Hilbert Noetherianos. . . . .	43 a 50
§3.3 Hilbert Nullstellensatz . . . . .	51 a 55
APÊNDICE . . . . .	56 a 61
BIBLIOGRAFIA . . . . .	62

## I N T R O D U Ç Ã O

A forma original do Teorema do número de zeros, o HILBERT NULLSTELLENSATZ é que se a polinomial  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se anula em todos os zeros de um ideal  $I \subset K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  ( $K$  corpo) então alguma potência de  $f$  está em  $I$ . Com base nesse resultado pode se estabelecer uma correspondência biunívoca entre ideais maximais de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  e pontos do espaço afim  $n$ -dimensional sôbre o fêcho algébrico de  $K$ . (A.10)

Usando essa correspondência o HILBERT NULLSTELLENSATZ pode ser reenunciado do seguinte modo: "A intersecção de todos os ideais maximais que contem  $I$  é o radical de  $I$ ". Se considerarmos o anel quociente  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$  então é evidente que coincidem os conceitos de radical de Jacobson e de nilradical <sup>1</sup>. Assim  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  é um exemplo de uma classe de aneis  $A$  tal que em  $A/I$  ( $I$  um ideal qualquer) as duas noções de radical coincidem. Como veremos posteriormente (secção 3.3) este fato implica no HILBERT NULLSTELLENSATZ <sup>2</sup>. Se  $A$  é um anel arbitrário desta classe, e desde que o radical dum ideal  $I$  de  $A$  é a intersecção dos ideais primos que o contem, é evidente que todo ideal primo de  $A$  é uma intersecção de ideais maximais de  $A$ .

(1) Por esse motivo alguns autores [2] denominam os anéis no qual essa propriedade vale de ANEL DE JACOBSON.

(2) Por esta razão tais anéis são chamados ANÉIS DE HILBERT.

Passamos agora a fazer rápidos comentários a respeito do conteúdo de cada capítulo deste trabalho:

CAPÍTULO 1: Foram colocados neste capítulo quase todos os resultados necessários ao desenvolvimento do texto. Entre eles constam resultados referentes a anéis e ideais, anéis de polinômios e séries formais, dependência integral, corpos e anéis noetherianos.

CAPÍTULO 2: Consiste de dois parágrafos.

G-DOMÍNIOS: Observando que um ideal maximal de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  ( $K$  corpo) tem contração nula em  $K$ , isto é,  $M \cap K = (0)$  se  $M$  é o ideal maximal em questão, consideraremos todos os domínios  $A$  tal que vale igual resultado (2.1.15). Em honra a OSCAR GOLDMAN tais domínios são chamados G-DOMÍNIOS. São apresentados vários exemplos de G-domínios, bem como várias condições equivalentes. São estudadas as extensões de G-domínios bem como as relações com os anéis de polinômios correspondentes.

G-IDEAIS: São estudados os ideais dum anel  $A$  que são contrações de ideais maximais de  $A[x]$ . Esses ideais são chamados G-IDEAIS e observamos que o quociente  $A/I$  é um G-domínio. À luz do novo conceito reformulamos o teorema de Krull sobre o nilradical.

CAPÍTULO 3: Consiste de 3 parágrafos.

ANÉIS DE HILBERT: Neste trabalho definimos anel de HILBERT como aquele em que todo G-IDEAL é maximal. Provamos no decorrer da secção a equivalência entre nossa definição e a original de Goldman. Encerramos o parágrafo com a demonstração de que o anel das séries formais não é um anel de Hilbert.

ANÉIS DE HILBERT NOETHERIANOS: Examinamos quando um anel noetheriano é um anel de Hilbert. A ferramenta básica é o Teorema do Ideal Principal de Krull.

HILBERT NULLSTELLENSATZ: Este parágrafo é dedicado a este problema tradicional.

APÊNDICE: Tratamos de alguns temas elementares da Geometria Algébrica, fundamentalmente as versões geométricas do HILBERT NULLSTELLENSATZ e o corolário A.10 sobre a correspondência entre ideais maximais de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  onde  $K$  é um corpo algebricamente fechado, e pontos de  $K^n$ .

# CAPÍTULO I

## PRELIMINARES

Muito embora neste trabalho suponhamos um conhecimento da teoria dos ANÉIS, CORPOS, MÓDULOS e ALGEBRAS, daremos neste capítulo algumas definições e enunciaremos alguns resultados necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes, cujas demonstrações são encontradas segundo as referências indicadas.

### 1.1 ANÉIS E IDEAIS

#### 1.1.1 DEFINIÇÃO

Sob a designação ANEL entenderemos um anel comutativo com elemento unidade, isto é,  $(A, +, \cdot)$  é um anel se:

- i)  $(A, +)$  é um grupo abeliano;
- ii)  $(A, \cdot)$  é um semi-grupo comutativo com elemento unidade; e
- iii)  $a(b + c) = ab + ac$  para todo  $a, b, c \in A$ .

#### 1.1.2 DEFINIÇÃO

O anel  $A$  é um DOMÍNIO ( ou anel de integridade) se, e somente se, vale a seguinte regra:

$$\forall a, b, c \in A, ab = ac \Leftrightarrow b = c$$

#### 1.1.3 DEFINIÇÃO

Um subconjunto  $I$  do anel  $A$  é um IDEAL de  $A$  se, e somente se :

- i)  $\forall a, b \in I, a - b \in I$
- ii)  $\forall a \in I, \forall b \in A, ab \in I$

#### 1.1.4 DEFINIÇÃO

Um ideal  $P$  do anel  $A$  é PRIMO se, e somente se:

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ ou } b \in P$$



### 1.1.5 DEFINIÇÃO

Um ideal  $M$  do anel  $A$  é MAXIMAL se, e somente se para  $P$  primo,  $M \subset P \subset A \Rightarrow M = P$  ou  $M = A$  isto é, não existe nenhum ideal próprio entre  $M$  e  $A$ .

### 1.1.6 PROPOSIÇÃO [ 1 ]

- i) Todo anel não nulo possui ao menos um ideal maximal;
- ii) Se  $I$  é um ideal próprio do anel  $A$  então existe um ideal maximal  $M$  que contém  $I$ .

### 1.1.7 PROPOSIÇÃO [ 1 ]

i) Sejam  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ideais primos e  $I$  um ideal tal que  $I \subset \cup P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Então  $I \subset P_i$ , para algum  $i$ ;

ii) Sejam  $I_1, I_2, \dots, I_n$  ideais de  $A$  e  $P$  um ideal primo de  $A$  tal que  $P \supset \cap I_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) então  $P \supset I_j$  para algum  $j$ .

### 1.1.8 DEFINIÇÃO

Seja  $A$  um anel. O NILRADICAL de  $A$  é o conjunto

$$N(A) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ com } x^n = 0\}$$

### 1.1.9 PROPOSIÇÃO [ 1 ]

Se  $A$  é um anel então  $N(A)$  é um ideal de  $A$  igual a intersecção de todos os ideais primos de  $A$ .

### 1.1.10 DEFINIÇÃO

Seja  $A$  um anel. O RADICAL de JACOBSON de  $A$  ( $J(A)$ ) é a intersecção de todos os ideais maximais de  $A$ .

### 1.1.11 PROPOSIÇÃO [ 1 ]

$x \in J(A)$  se, e somente se  $1 - xy$  é unidade de  $A$  para todo  $y \in A$ .

### 1.1.12 DEFINIÇÃO

Seja  $I$  um ideal de  $A$ . O RADICAL de  $I$  é o conjunto

$$r(I) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ com } x^n \in I\}$$

### 1.1.13 COROLÁRIO

Se  $A$  é um anel,  $I$  um ideal de  $A$  então:

$$r(I) = N(A/I) = \bigcap P_i$$

onde cada  $P_i$  é primo e contém  $I$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Imediata se considerarmos (1.1.8) e (1.1.12).

### 1.1.14 DEFINIÇÃO

Sejam  $A$  e  $B$  anéis. Uma função  $\phi: A \rightarrow B$  tal que

- i)  $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ ,  $\forall a, b \in A$
- ii)  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ ,  $\forall a, b \in A$  e
- iii)  $\phi(1) = 1$

é chamada um HOMOMORFISMO de anéis.

### 1.1.15 PROPOSIÇÃO [6]

Sejam  $A$  e  $B$  anéis e  $\phi: A \rightarrow B$  um homomorfismo sobrejetor com núcleo  $N$ . Então existe uma correspondência biunívoca que preserva a ordem entre ideais de  $B$  e ideais de  $A$  que contem  $N$ . Tal correspondência associa ideais primos a ideais primos e ideais maximais a ideais maximais.

### 1.1.16 DEFINIÇÃO

Um subconjunto  $S$  do anel  $A$  é um SISTEMA MULTIPLICATIVO FECHADO se,  $\forall s, t \in S \Rightarrow st \in S$ . ( $0 \notin S$ ,  $1 \in S$ )

Exemplos:

- 1) Se  $P$  é um ideal primo de  $A$ , então  $S = A - P$  é um sistema multiplicativo fechado:
- 2) Se  $x \in A$  não é nilpotente então  $\{x^n: n \geq 0\}$  é um sistema multiplicativo fechado.

### 1.1.17 PROPOSIÇÃO [7]

Seja  $A$  um anel e  $S \subset A$  um sistema multiplicativo fechado. Se  $P$  é um ideal de  $A$ , maximal com respeito a exclusão de  $S$ , (isto é,  $P \cap S = \emptyset$  e se  $Q \supset P$  então  $Q \cap S \neq \emptyset$ ) então  $P$  é primo.

Observação: Se  $S \subset A$  é um sistema multiplicativo fechado e  $I$  é um ideal de  $A$  tal que  $I \cap S = \emptyset$  então uma aplicação do lema de Zorn nos possibilita "extender"  $I$  a um ideal  $P$  maximal com respeito a exclusão de  $S$ , e conseqüentemente a um ideal primo.

### 1.1.18 PROPOSIÇÃO [7]

Seja  $A$  um anel,  $I$  um ideal de  $A$  e  $I \subset P$  um ideal primo de  $A$ . Então  $P$  pode ser "reduzido" a um primo minimal entre todos os ideais primos contendo  $I$ .

### 1.1.19 LEMA

Seja  $A$  um anel,  $P = (p)$  um ideal primo principal e  $J = \bigcap_1^\infty P^n$ . Se  $J = (0)$  então  $P$  é minimal.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $Q$  um ideal primo tal que  $Q \not\subset P$ . Então  $p \notin Q$ .

Afirmamos que  $Q \subset J = (0)$ . Realmente, se  $q \in Q \subset P$  temos  $q = pq_1 \in Q$  o que acarreta  $q_1 \in Q$ , já que  $p \notin Q$ . Novamente,  $q_1 = pq_2$  com  $q_2 \in Q$  e assim sucessivamente.

Mas então,

$$q = pq_1 = p^2q_2 = p^3q_3 = \dots = p^nq_n = \dots$$

e portanto  $q \in \bigcap_1^\infty P^n = (0)$

### 1.1.20 DEFINIÇÃO

Sejam:  $A$  um anel e  $S \subset A$  um sistema multiplicativo fechado. O ANEL DE FRAÇÕES de  $A$  por  $S$  é o conjunto

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s}, a \in A, s \in S \right\}$$

munido das operações:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

e

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$$

e onde

vale a seguinte relação:

$$\frac{a}{s} = \frac{b}{t} \Leftrightarrow \exists s' \in S \text{ com } s'(at - bs) = 0$$

Com as definições acima pode-se provar que  $(S^{-1}A, +, \cdot)$  é um anel comutativo com elemento unidade. Ver [1]

#### 1.1.21 OBSERVAÇÕES

i) Se  $P$  é um ideal primo de  $A$  e  $S = A - P$  então escrevemos  $A_P$  ao invés de  $S^{-1}A$ ;

ii) Se  $A$  é um domínio e  $S = A - \{0\}$  então  $S^{-1}A$  é o CORPO de FRAÇÕES de  $A$ .

#### 1.1.22 DEFINIÇÃO

O anel  $A$  é um ANEL LOCAL se  $A$  tem um único ideal maximal.

#### 1.1.23 LEMA

Se  $P$  é um ideal primo de  $A$  então o anel  $A_P$  é local.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $P_P = \{\frac{a}{s}, a \in P \text{ e } s \notin P\}$ . Facilmente se verifica que  $P_P$  é um ideal de  $A_P$ . Se um elemento de  $A_P$  não é elemento de  $P_P$  então é uma unidade de  $A_P$ .

Assim  $P_P$  é o único ideal maximal de  $A_P$ .

#### 1.1.24 PROPOSIÇÃO

Seja  $A$  um anel local com ideal maximal  $M$ . Então  $a \in A$  é uma unidade de  $A$  se, e somente se  $a \notin M$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Imediata, considerando (1.1.22) e (1.1.11)

#### 1.1.25 PROPOSIÇÃO [1]

Seja  $A$  um anel e  $S$  um sistema multiplicativo fechado de  $A$ . Então existe uma correspondência biunívoca entre ideais primos de  $S^{-1}A$  e ideais primos de  $A$  que não interceptam  $S$ .

## 1.2 ANÉIS DE POLINÔMIOS e o ANEL DAS SÉRIES FORMAIS.

### 1.2.1 DEFINIÇÃO

Um ideal  $I$  do anel  $A$  é chamado PRINCIPAL se, e somente se, existe  $a \in A$  com

$$I = aA = \{ax \mid x \in A\}$$

Um domínio  $A$  chama-se DOMÍNIO PRINCIPAL (P.I.D.) se, e somente se todo ideal de  $A$  é principal.

### 1.2.2 DEFINIÇÃO

Um domínio  $A$  é um DOMÍNIO de FATORIZAÇÃO ÚNICA (UFD) (ou também ANEL FATORIAL) se, todo elemento não nulo de  $A$ , ou é unidade ou pode ser escrito como um produto finito de elementos irreduzíveis de  $A$ , de modo único.

### 1.2.3 PROPOSIÇÃO [10]

Se  $A$  é um P.I.D. então  $A$  é um U.F.D.

### 1.2.4 PROPOSIÇÃO [6]

Seja  $A$  um P.I.D. e  $I \neq (0)$  um ideal de  $A$ . As seguintes alternativas são equivalentes:

- i)  $I$  é um ideal primo;
- ii)  $I$  é um ideal maximal;
- iii)  $I = pA$ ,  $p$  um elemento irreduzível de  $A$ .

### 1.2.5 COROLÁRIO

Seja  $A$  um P.I.D. e  $L = \{p \in A, p \text{ irreduzível}\}$ . Se  $L$  é infinito então  $\bigcap_{p \in L} pA = (0)$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Como  $A$  é um P.I.D. temos que  $A$  é um U.F.D. Se  $x \neq 0$ ,  $x \neq 1$  é elemento de

$$\bigcap_{p \in L} pA$$

então, por um lado  $x$  tem um número finito de fatores irreduzíveis e por outro todo elemento de  $L$  é fator de  $x$ , uma contradição

### 1.2.6 PROPOSIÇÃO [6]

Se  $K$  é um corpo então  $K[x]$ , o anel dos polinômios com coeficientes em  $K$ , é um P.I.D.

### 1.2.7 PROPOSIÇÃO

Se  $K$  é um corpo então  $K[x]$  tem uma infinidade de ideais primos.

DEMONSTRAÇÃO:

$K[x]$  é um P.I.D. (1.2.6) portanto é um U.F.D. (1.2.3)

Suponha que  $p_1K[x], p_2K[x], \dots, p_nK[x]$  sejam todos os ideais primos de  $K[x]$ . Então  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são irredutíveis em  $K[x]$  (1.2.4).

Considere  $p = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ . Concluimos que  $p$  é irredutível e conseqüentemente  $pK[x]$  é um ideal primo, distinto dos acima citados, uma contradição.

### 1.2.8 DEFINIÇÃO

Seja  $A$  um anel. O ANEL das SÉRIES FÓRMAIS com coeficiente em  $A$  é o conjunto:

$$A[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, a_i \in A \right\}$$

Por questão de conveniência, se

$$f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

é um elemento de  $A[[x]]$ , escreveremos (ver [11])

$$f = a_f + x f_1 \quad \text{onde}$$

$$a_f = a_0 \in A \quad \text{e} \quad f_1 = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} + \dots \in A[[x]]$$

### 1.2.9 PROPOSIÇÃO

Um elemento  $f = a_f + x f_1$  de  $A[[x]]$  é uma unidade de  $A[[x]]$  se, e somente se,  $a_f$  é uma unidade de  $A$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Se  $f$  é uma unidade de  $A[[x]]$  então existe  $g = a_g + x g_1$  em  $A[[x]]$  tal que  $fg = a_f a_g + x(a_g f_1 + a_f g_1 + x f_1 g_1) = 1$  donde  $a_f a_g = 1$  e  $a_f$  é uma unidade de  $A$ .

Por outro lado, suponha que  $f = a_f + x f_1$  onde  $a_f$  é uma unidade de  $A$ . Sem perda de generalidade podemos supor que  $a_f = 1$ . Assim,  $f = 1 + x f_1$ .

Seja  $b = -xf_1$ , isto é,  $f = 1 - b$

Como  $\sum_0^{\infty} b^i \in A[x]$  temos  $\sum_0^{\infty} b^i = \sum_0^{\infty} c_i x^i$  com  $c_i \in A$ .

Para um  $n \in \mathbb{N}$  arbitrário, seja:

$$\begin{aligned} f \cdot \sum_0^n c_i x^i &= f \cdot \left[ \sum_0^{\infty} c_i x^i - \sum_{n+1}^{\infty} c_i x^i \right] \\ &= f \cdot \left[ \sum_0^{\infty} b^i - \sum_{n+1}^{\infty} c_i x^i \right] \\ &= f \cdot \left[ \sum_0^n b^i + \sum_{n+1}^{\infty} b^i - \sum_{n+1}^{\infty} c_i x^i \right] \\ &= f \cdot \sum_0^n b^i + f \cdot \left[ \sum_{n+1}^{\infty} b^i - \sum_{n+1}^{\infty} c_i x^i \right] \\ &= (1 - b) \sum_0^n b^i + f \cdot \left[ \sum_{n+1}^{\infty} b^i - \sum_{n+1}^{\infty} c_i x^i \right] \\ &= 1 - b^{n+1} + f \cdot \left[ \sum_{n+1}^{\infty} b^i - \sum_{n+1}^{\infty} c_i x^i \right]. \end{aligned}$$

Claramente, o menor expoente de  $x$  nesta última expressão é maior que  $n$ .

Então, existe  $\sum_0^{\infty} c_i x^i \in A[x]$  tal que  $f \cdot \sum_0^{\infty} c_i x^i = 1$  e portanto  $f$  é uma unidade de  $A[x]$ .

#### 1.2.10 LEMA

Se  $P$  é um ideal primo de  $A$  então

$$P^* = \left\{ \sum_0^{\infty} a_i x^i \in A[x], a_i \in P \right\}$$

é um ideal primo de  $A[x]$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Claramente,  $P^*$  é um ideal de  $A[x]$ . Se  $f, g \in A[x]$  tal que  $fg \in P^*$  e  $f \notin P^*$  e  $g \notin P^*$ . Então existem  $j, k \in \mathbb{N}$  tal que se  $f = \sum_0^{\infty} a_i x^i$  então  $a_j \notin P$  mas,  $a_i \in P$  para  $i < j$  e

se  $g = \sum_0^{\infty} b_i x^i$  então  $b_k \notin P$  mas,  $b_i \in P$  para  $i < k$ .

Mas então:

$$\begin{aligned} fg &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + \dots + (a_0 b_{j+k} + \dots + a_j b_k + \dots) x^{j+k} \\ &+ \dots \in P^* \text{ e portanto} \end{aligned}$$

$a_0 b_{j+k} + \dots + a_{j-1} b_{k+1} + a_j b_k + a_{j+1} b_{k-1} + \dots + a_{j+k} b_0 \in P$  e como  $a_0, a_1, \dots, a_{j-1}, b_{j-1}, \dots, b_0 \in P$  segue que  $a_j b_k \in P$  o que é absurdo pois  $a_j \notin P$  e  $b_k \notin P$ .

### 1.2.11 PROPOSIÇÃO

Existe uma correspondência biunívoca entre ideais maximais  $\underline{M}$  de  $A$  e ideais maximais  $M$  de  $A[x]$  tal que  $\underline{M} \leftrightarrow M$  se, e somente se,  $M = \langle \underline{M}, x \rangle$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $\underline{M}$  um ideal maximal de  $A$ . Então

$$A[x] / \langle \underline{M}, x \rangle \cong A/\underline{M}$$

donde  $\langle \underline{M}, x \rangle$  é um ideal maximal de  $A[x]$ .

Seja  $M$  um ideal maximal de  $A[x]$  e considere

$$\underline{M} = \{a \in A : a + xf \in M, \text{ onde } f \in A[x]\}$$

É facil ver que  $\underline{M}$  é um ideal de  $A$ . Provemos que é maximal. Se  $\underline{M} \neq A$ , então  $M \subset \langle \underline{M}, x \rangle$  e daí  $M = \langle \underline{M}, x \rangle$  pois  $M$  é maximal; Se  $\underline{M} = A$  segue que  $1 + xf \in M$ . Como  $1 + xf$  é unidade de  $A[x]$ , deveria ser  $M = A[x]$ , uma contradição.

### 1.2.12 DEFINIÇÃO

O COMPRIMENTO de uma CADEIA de ideais primos de um anel  $A$  é  $n$  se:

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n \quad (\text{inclusão estrita})$$

onde  $n$  é finito e  $P_i$  é um ideal primo de  $A$ .

### 1.2.13 DEFINIÇÃO

A DIMENSÃO de KRULL do anel  $A$ , que denotaremos por  $\dim A$ , é o supremo dos comprimentos das cadeias de ideais primos de  $A$ .

A dimensão de um anel não nulo é um inteiro não negativo ou infinita.

Observações: i)  $\dim A = 0$  se, e somente se, todo ideal primo



de  $A$  é maximal;

ii) Se  $\dim A = 0$  e  $A$  é um domínio, então  $A$  é um corpo.

#### 1.2.14 COROLÁRIO

Se  $K$  é um corpo então  $K[[x]]$  é um anel local cujo ideal maximal é  $(x)$ . Além disso  $\dim K[[x]] = 1$ .

### 1.3 DEPENDÊNCIA INTEGRAL

#### 1.3.1 DEFINIÇÃO

Seja  $A$  um anel,  $S$  uma  $A$ -álgebra e  $x \in S$ . Dizemos que  $x$  é integral sobre  $A$  se, e somente se, existem elementos  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  tal que

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

#### 1.3.2 DEFINIÇÃO

Seja  $A$  um anel e  $S$  uma  $A$ -álgebra. Dizemos que  $S$  é integral sobre  $A$  se todo elemento de  $S$  é integral sobre  $A$ .

#### 1.3.3 PROPOSIÇÃO [7]

Seja  $S$  uma álgebra comutativa sobre o anel  $A$ . Então os elementos de  $S$  integrais sobre  $A$  constituem um subanel de  $S$ .

#### 1.3.4 COROLÁRIO

Se  $T$  é um subanel de  $S$ , integral sobre  $A$  e  $u \in S$  é integral sobre  $A$ , então  $T[u]$  é integral sobre  $A$ .

#### 1.3.5 PROPOSIÇÃO [1]

Sejam  $A \subset B$  domínios, com  $B$  integral sobre  $A$ . Então  $B$  é um corpo se, e somente se,  $A$  é um corpo.

#### 1.3.6 PROPOSIÇÃO

Sejam  $A \subset B$  domínios, com  $B$  integral sobre  $A$ . Se  $P$  é um ideal de  $B$  e  $P' = P \cap A$  então  $B/P$  é integral sobre  $A/P'$ .

#### DEMONSTRAÇÃO

Seja  $\bar{b} = b + P \in B/P$ . Como  $b$  é integral sobre  $A$  temos

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

com  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ , e portanto,

$$b^n + a_1 b^{n-1} + \dots + a_n + P = P$$

isto é,

$$\bar{b}^n + (a_1 + P')\bar{b}^{n-1} + \dots + (a_n + P') = \bar{0} .$$

Assim,  $\bar{b}$  é integral sobre  $A/P'$ .

### 1.3.7 DEFINIÇÃO

Sejam  $A \subset B$  anéis.

Dizemos que vale a propriedade LO (Lying Over) se para todo ideal primo  $P$  de  $A$  existe um ideal primo  $Q$  de  $B$  tal que  $P = Q \cap A$ .

Dizemos que vale a propriedade GU (Going Up) se dados ideais primos  $P_1 \subset P_2$  em  $A$  e  $Q_1$  ideal primo de  $B$  com  $Q_1 \cap A = P_1$ , existe  $Q_2$  ideal primo de  $B$  tal que  $Q_1 \subset Q_2$  e  $Q_2 \cap A = P_2$ .

Dizemos que vale a propriedade GD (Going Down) se dados ideais primos  $P_1 \supset P_2$  em  $A$  e  $Q_1$  ideal primo de  $B$  com  $Q_1 \cap A = P_1$  existe  $Q_2$  ideal primo de  $B$  tal que  $Q_1 \supset Q_2$  e  $Q_2 \cap A = P_2$ .

Dizemos que vale a propriedade INC (Incomparabilidade) se dados  $P_1, P_2$  ideais primos de  $B$  com

$$P_1 \cap A = P_2 \cap A$$

$P_1$  e  $P_2$  não podem ser comparados por  $\subset$ , isto é,  $P_1 \not\subset P_2$  e  $P_2 \not\subset P_1$ .

### 1.3.8 PROPOSIÇÃO [7]

Sejam  $A \subset B$  anéis,  $B$  integral sobre  $A$ . Então valiam as propriedades INC, GU e LO.

## 1.4 CORPOS - EXTENSÕES DE CORPOS

### 1.4.1 DEFINIÇÃO

Um domínio  $K$  chama-se CORPO se todo elemento não nulo de  $K$  é uma unidade.

### 1.4.2 DEFINIÇÃO

Seja  $A$  um domínio. O CORPO QUOCIENTE de  $A$  é o conjunto

$$K = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in A, b \neq 0 \right\}$$

onde

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

e

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

### 1.4.3 PROPOSIÇÃO [6]

Seja  $A$  um anel e  $M$  um ideal de  $A$ .  $M$  é um ideal maximal de  $A$  se, e somente se,  $A/M$  é um corpo.

### 1.4.4 PROPOSIÇÃO [1]

Seja  $A$  um anel não nulo. As seguintes alternativas são equivalentes:

- i)  $A$  é um corpo;
- ii) Os únicos ideais de  $A$  são  $(0)$  e  $A$ ;
- iii) Todo homomorfismo não nulo de  $A$  num anel  $S$  não nulo, é injetor.

### 1.4.5 DEFINIÇÃO

Sejam  $K \subset L$  corpos e  $a \in L$ . Dizemos que  $a$  é ALGÉBRICO sobre  $K$  se, e somente se, existe  $f(x) \in K[x]$   $f(x) \neq 0$  tal que  $f(a) = 0$ .

De um modo geral, se  $A \subset B$  são anéis, então um elemento  $a \in B$  é dito algébrico sobre  $A$  se existe um polinômio não nulo  $f(x) \in A[x]$  tal que  $f(a) = 0$ .

Se todo elemento de  $B$  é algébrico sobre  $A$ , dizemos que  $B$  é algébrico sobre  $A$ .

#### 1.4.6 LEMA [9]

Se  $u$  é algébrico sobre o corpo  $K$  então  $K[u]$  é um corpo.

#### 1.4.7 PROPOSIÇÃO [9]

Sejam  $A \subset B$  domínios,  $B$  algébrico sobre  $A$ ,  $K$  e  $L$  os corpos quocientes de  $A$  e  $B$  respectivamente. Então  $L$  é algébrico sobre  $K$ .

#### 1.4.8 DEFINIÇÃO

Um corpo  $K$  é dito ALGEBRICAMENTE FECHADO se cada  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in K[x]$  com  $a_n \neq 0$  tem uma raiz  $r$  em  $K$ , isto é, existe  $r \in K$  tal que  $f(r) = 0$ .

#### 1.4.9 PROPOSIÇÃO [9]

As seguintes alternativas são equivalentes:

- i)  $K$  é um corpo algebricamente fechado;
- ii) Todo polinômio irreduzível de  $K[x]$  é linear;
- iii) Qualquer polinômio de  $K[x]$  pode ser escrito como produto finito de polinômios lineares.

#### 1.4.10 TEOREMA [9]

Seja  $K$  um corpo. Então existe um único (a menos de isomorfismo) corpo  $\bar{K}$ , extensão de  $K$  tal que  $\bar{K}$  é algebricamente fechado. ( $\bar{K}$  chama-se o FÉCHO ALGÉBRICO de  $K$ ).

#### 1.4.11 LEMA

Seja  $K$  um corpo algebricamente fechado. Então  $M$  é um ideal maximal de  $K[x]$  se, e somente se,  $M = (x-a)$  com  $a \in K$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Como  $K[x]/(x-a) \cong K$ , segue-se que  $M = (x-a)$  é um ideal maximal de  $K[x]$ .

Por outro lado, (1.2.4)  $M$  é gerado por um polinômio irreduzível  $f$ . Mas então, (1.4.9)  $f$  deve ser linear.

#### 1.4.12 PROPOSIÇÃO

Seja  $K$  um corpo e  $a_i \in K$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Então  $M = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$  é um ideal maximal de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Consideremos a  $K$ -álgebra homomorfismo

$$\phi : K[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow K$$

definido por  $\phi(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Claramente  $\phi$  é sobrejetora e então temos que

$$K[x_1, x_2, \dots, x_n] / \text{Ker}\phi \cong K$$

Portanto  $\text{Ker}\phi$  é maximal e desde que  $\text{Ker}\phi = M$ , segue o resultado.

## 1.5 ANÉIS E MÓDULOS NOETHERIANOS

### 1.5.1 DEFINIÇÃO

Seja  $M$  um  $A$ -módulo.  $M$  é NOETHERIANO se toda sequência

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n \subset \dots$$

de submódulos de  $M$  for estacionária, isto é, existe  $r$  inteiro positivo tal que  $M_r = M_{r+1} = M_{r+2} = \dots$

Esta condição é chamada CONDIÇÃO DE CADEIA ASCENDENTE (c.c.a.).

### 1.5.2 DEFINIÇÃO

Um anel  $A$  é noetheriano se vale (c.c.a) para ideais, isto é, se

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n \subset \dots$$

então existe  $r$  inteiro positivo tal que

$$P_r = P_{r+1} = P_{r+2} = \dots$$

### 1.5.3 PROPOSIÇÃO [1]

a) Um  $A$ -módulo  $M$  é noetheriano, se, e somente se, todo submódulo de  $M$  é finitamente gerado;

b) Um anel  $A$  é noetheriano se, e somente se, todo ideal de  $A$  é finitamente gerado.

### 1.5.4 PROPOSIÇÃO [1]

Se  $A$  é um anel noetheriano então as imagens homomorfias de  $A$  são anéis noetherianos.

### 1.5.5 PROPOSIÇÃO [1]

Se  $A$  é um anel noetheriano e  $S$  é um sistema multiplicativo fechado de  $A$  então  $S^{-1}A$  é noetheriano.

### 1.5.6 TEOREMA DE BASE DE HILBERT [1]

Se  $A$  é um anel noetheriano então  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  é noetheriano.

### 1.5.7 DEFINIÇÃO

Uma cadeia de submódulos de um módulo  $M$  é uma sequência  $(M_i)$  ( $0 \leq i \leq n$ ) de submódulos de  $M$  tal que

$M = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = 0$  (inclusão estrita).

O COMPRIMENTO da cadeia é o número de "elos" da mesma. O comprimento da cadeia acima é  $n$ .

Uma SÉRIE DE COMPOSIÇÃO de  $M$  é uma cadeia maximal. ( Ver [1] )

### 1.5.8 PROPOSIÇÃO [1]

As seguintes afirmativas são equivalentes:

- i)  $A$  é um anel noetheriano e  $\dim A = 0$ ;
- ii) Qualquer  $A$ -módulo finitamente gerado tem comprimento finito.

### 1.5.9 TEOREMA [7]

Seja  $A$  um anel noetheriano,  $I$  um ideal de  $A$ . Então  $r(I)$  é uma intersecção finita de ideais primos de  $A$ .

### 1.5.10 COROLÁRIO [7]

Seja  $A$  um anel noetheriano e  $I$  um ideal de  $A$ . Então só existe um número finito de ideais primos de  $A$  que são minimais sobre  $I$ .



## CAPÍTULO 2

### G-DOMÍNIOS e G-IDEAIS

#### 2.1 G-DOMÍNIOS

##### 2.1.1 DEFINIÇÃO

Um domínio  $A$  é chamado G-DOMÍNIO se seu corpo quociente  $K$  é um anel finitamente gerado sobre  $A$ , isto é, se

$$K = A[t_1, t_2, \dots, t_n] \quad \text{com } t_i = \frac{a_i}{b_i}, \quad a_i, b_i \in A, b_i \neq 0$$

A proposição a seguir nos dá um critério mais simples para caracterizar um G-domínio.

##### 2.1.2 PROPOSIÇÃO

Seja  $A$  um domínio,  $K$  o corpo de frações de  $A$ . Então  $A$  é um G-domínio se, e somente se,  $K$ , como anel, é gerado sobre  $A$  por um só elemento.

DEMONSTRAÇÃO:

Se  $K$  é um anel gerado sobre  $A$  por um só elemento isto é,  $K = A[u]$ ,  $u \in K$  então  $A$  é um G-domínio, por definição.

Reciprocamente, se  $A$  é um G-domínio, teremos:

$$K = A\left[\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}\right] \quad \text{com } a_i, b_i \in A$$

Tomando  $b = b_1 b_2 \dots b_n$  teremos  $K = A[b^{-1}]$  como queríamos.

A seguir procuramos resultados equivalentes a "  $A$  é um G-domínio". Para tal é interessante estabelecer a seguinte definição.

##### 2.1.3 DEFINIÇÃO

Se  $A$  é um anel então o PSEUDO RADICAL de  $A$ , denotado por  $P(A)$ , é a intersecção de todos os ideais primos não nulos de  $A$ . (Ver [3])

OBSERVAÇÃO: Se  $A$  não é um domínio,  $P(A)$  coincide com  $N(A)$ . No entanto, se  $A$  é um domínio,  $P(A) \neq N(A)$ .

#### 2.1.4 TEOREMA

Seja  $A$  um domínio,  $K$  o corpo quociente de  $A$  e  $u \in A$ ,  $u \neq 0$ . Então são equivalentes:

- i)  $u \in P(A)$ ;
- ii) Todo ideal primo não nulo de  $A$  contém  $u$ ;
- iii) Todo ideal não nulo de  $A$  contém uma potência de  $u$ ;
- iv)  $K = A[u^{-1}]$  e portanto  $A$  é um G-domínio.

DEMONSTRAÇÃO:

i)  $\rightarrow$  ii) Imediata

ii)  $\rightarrow$  iii) Seja  $I$  um ideal não nulo de  $A$  e suponha que

$$I \cap \{u^n, n \geq 0\} = \emptyset$$

Como  $\{u^n, n \geq 0\}$  é um sistema multiplicativo fechado, podemos estender  $I$  a um ideal  $P$ , maximal com respeito a exclusão de  $\{u^n, n \geq 0\}$ . Mas então  $P$  é primo por (1.1.17) e

$$P \cap \{u^n, n \geq 0\} = \emptyset$$

contradiz a hipótese  $u \in P$ .

iii)  $\rightarrow$  iv) Seja  $\frac{1}{b} \in K$ . Se considerarmos o ideal  $bA$  temos, por iii),  $bA \cap \{u^n, n \geq 0\} \neq \emptyset$ . Assim, existe  $k \geq 0$  tal que  $u^k \in bA$  e assim  $u^k = bc$  para algum  $c \in A$ . Tiramos então  $b^{-1} = c \cdot u^{-k}$  e finalmente,

$$K = A[u^{-1}]$$

donde concluímos que  $A$  é um G-domínio.

iv)  $\rightarrow$  i) Seja  $P$  um ideal primo não nulo de  $A$  e considere  $b \in P$ ,  $b \neq 0$ . Temos  $b^{-1} \in K = A[u^{-1}]$  donde temos

$$b^{-1} = \sum_0^n a_i (u^{-1})^i = u^{-n} \sum_0^n a_i u^{n-i}$$

Como  $\sum_0^n a_i u^{n-i} = c \in A$ , temos  $b^{-1} = c \cdot u^{-n}$  e assim  $u^n = bc \in P$  e então  $u \in P$ . Assim,  $u \in P(A)$ .

### 2.1.5 COROLÁRIO

Se  $A$  é um domínio com um número finito de ideais primos, então  $A$  é um G-domínio.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  o conjunto dos ideais primos não nulos de  $A$  e considere  $x_i \in P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) com  $x_i \neq 0$ .

Então  $u = x_1 x_2 \dots x_n$  é não nulo e  $u \in P_i$  para todo  $i$  tal que  $1 \leq i \leq n$  e conseqüentemente  $u \in P(A)$ .

### 2.1.6 PROPOSIÇÃO

Se  $A$  é um PID então  $A$  é um G-domínio se, e somente se,  $A$  tem apenas um número finito de ideais primos.

DEMONSTRAÇÃO:

Se  $A$  é um G-domínio então existe  $u \in A$ ,  $u \neq 0$  tal que  $u$  é elemento de todo ideal primo não nulo de  $A$ . Como  $A$  é um UFD (1.2.3) só podemos ter um número finito de tais ideais primos.

A recíproca é o corolário 2.1.5.

### 2.1.7 EXEMPLOS de G-DOMÍNIOS

a) Todo corpo é um G-domínio;

b)  $K[x]$  é um G-domínio se  $K$  é um corpo (1.2.14)

c) Seja  $A = \mathbb{Z} + x \cdot \mathbb{Q}[x]$  o anel das séries de potências com coeficientes racionais e termo constante inteiro. Então  $A$  é um G-domínio com uma infinidade de ideais máximos (e portanto primos), como veremos:

LEMA I: Se  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $p \neq 0$  então  $pA$  é um ideal maximal de  $A$ , se  $p$  é um inteiro primo.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $f \in A$ . Então

$$f = n + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \text{ onde}$$

$n \in \mathbb{Z}$ ,  $a_i \in \mathbb{Q}$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Mas, dados  $n$  e  $p$  inteiros, existem  $q, r \in \mathbb{Z}$  tal que  $n = pq + r$ ,  $0 \leq r < p$  de modo que

$$\begin{aligned} f &= r + (pq + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots) \\ &= r + p(q + p^{-1} a_1 x + \dots + p^{-1} a_n x^n + \dots) \end{aligned}$$

ou seja,  $\bar{f} = r + pA \in A/pA$ .

Consequentemente  $A/pA \cong \mathbb{Z}_p$  e se  $p$  é primo,  $A/pA$  é corpo e  $pA$  é maximal.

Assim provamos que  $A$  tem um número infinito de ideais maximais.

LEMA II:  $A$  é um G-domínio.

DEMONSTRAÇÃO:

Afirmamos que  $x \in P$ , para todo ideal primo  $P$ , não nulo.

Consideremos o menor inteiro positivo  $r$  tal que

$$r + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots \in P.$$

Claramente  $r \neq 1$  pois senão tal elemento seria uma unidade de  $A$  e  $P = A$ .

Se existe tal inteiro  $r > 1$  então

$$r + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots = r(1 + r^{-1}a_1x + \dots + r^{-1}a_nx^n + \dots) \in P$$

e portanto  $r \in P$  e então  $rA \subset P$ .

Para qualquer  $f \in P$ ,

$$f = n + b_1x + b_2x^2 + \dots = t + rq + b_1x + b_2x^2 + \dots \text{ onde } q, t \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq t < r.$$

Como  $rq \in P$  e  $t < r$  temos  $t = 0$  e então

$$f = r(q + r^{-1}b_1x + r^{-1}b_2x^2 + \dots) \in rA$$

Portanto  $P = rA$  e daí

$$x = r(0 + r^{-1}x + 0x^2 + 0x^3 + \dots) \in rA = P$$

Se não existe o inteiro  $r > 0$  então todo elemento de  $P$  tem a forma:

$$f = a_1x + a_2x^2 + \dots \text{ com } a_i \in \mathbb{Q}.$$

Como  $P \neq (0)$ , existe  $g \in P$ ,

$$g = a_i x^i + a_{i+1} x^{i+1} + \dots \text{ com } a_i \in \mathbb{Q} \text{ e } a_i \neq 0.$$

Então:

$$g = x^i (a_i + a_{i+1}x + \dots) \text{ e como}$$

$a_i + a_{i+1}x + \dots \notin P$  devemos ter  $x^i \in P$  e daí  $x \in P$ .

Portanto,  $P(A) = (x) \neq (0)$

Algumas informações sobre extensões de G-domínios são as seguintes:

### 2.1.8 PROPOSIÇÃO

Seja  $A$  um domínio,  $K$  o corpo quociente de  $A$  e  $T$  um anel tal que  $A \subset T \subset K$ . Se  $A$  é um  $G$ -domínio então  $T$  é um  $G$ -domínio.

DEMONSTRAÇÃO:

Temos  $K = A[u^{-1}]$  para algum  $u \in A$ ,  $u \neq 0$  e portanto  $K \subset T[u^{-1}]$ . Como o corpo de frações de  $T$  é  $K$ ,  $T[u^{-1}] \subset K$  e então  $K = T[u^{-1}]$  e  $T$  é um  $G$ -domínio.

### 2.1.9 PROPOSIÇÃO

Se  $A$  é um domínio e  $x$  uma indeterminada sobre  $A$  então  $A[x]$  não pode ser um  $G$ -domínio.

DEMONSTRAÇÃO:

Se  $K$  é o corpo quociente de  $A$  e  $F$  é o corpo quociente de  $A[x]$ , temos:  $A[x] \subset K[x] \subset F$ .

Se  $A[x]$  é um  $G$ -domínio então  $K[x]$  é um  $G$ -domínio (2.1.8). Mas  $K[x]$  é um PID com um número infinito de ideais primos (1.2.7). Assim  $A[x]$  não pode ser um  $G$ -domínio. (2.1.6)

### 2.1.10 LEMA

Sejam  $R_1$  e  $R_2$  domínios tais que  $1_{R_1} = 1_{R_2}$  e

$R_1 \subset R_2$ . Sejam  $P(R_i)$  o pseudo radical de  $R_i$  e  $J(R_i)$  o radical de Jacobson de  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ). Temos:

i) Se para todo ideal  $I_2 \neq (0)$  de  $R_2$ ,  $I_2 \cap R_1 \neq 0$  então  $P(R_1) \subset P(R_2) \cap R_1$ ;

ii) Se  $R_2$  é integral sobre  $R_1$  então:

$$a) P(R_1) = P(R_2) \cap R_1$$

$$b) J(R_1) = J(R_2) \cap R_1 .$$

DEMONSTRAÇÃO de i)

Se  $P(R_1) = (0)$  então o resultado vale trivialmente.

Se  $x \in P(R_1)$ ,  $x \neq 0$ , seja  $P_2$  um ideal primo de  $R_2$

Por hipótese  $P_2 \cap R_1 \neq (0)$  e  $P_2 \cap R_1$  é primo. Assim o elemento  $x$  pertence a  $P_2 \cap R_1$  para todo  $P_2$  ideal primo não nulo de  $R_2$  e portanto  $x \in P(R_2) \cap R_1$ .

DEMONSTRAÇÃO de ii)

a) Se  $P(R_2) \cap R_1 = (0)$  então, pela parte i) deste lema teríamos  $P(R_1) = (0)$ .

Se  $P(R_2) \cap R_1 \neq (0)$ , seja  $x \neq 0$  um de seus elementos, isto é,  $x \in R_1$  e  $x$  é elemento de todo ideal primo não nulo de  $R_2$ . Como  $R_2$  é integral sobre  $R_1$ , (1.3.8) para cada primo  $P_1$  de  $R_1$  existe um ideal primo  $P_2$  de  $R_2$  tal que  $P_2 \cap R_1 = P_1$ . Logo  $x \in P(R_1)$  e então  $P(R_2) \cap R_1 \subset P(R_1)$  e com a parte i) deste lema, temos a igualdade.

b) Se  $x \notin J(R_1)$  então existe  $M$  ideal maximal de  $R_1$  tal que  $x \notin M$  e por (1.3.8) existe  $M'$  ideal primo de  $R_2$  tal que  $M = M' \cap R_1$ . Assim  $x \notin M'$ , logo  $x \notin J(R_2) \cap R_1$ . Consequentemente,  $J(R_2) \cap R_1 \subset J(R_1)$ .

Por outro lado, seja  $M_2$  ideal maximal de  $R_2$ . Temos  $M_2 \cap R_1$  maximal em  $R_1$ . (Se  $M_2 \cap R_1$  não é maximal, existe  $M'_2$  tal que  $M_2 \cap R_1 \subset M'_2$  e com 1.1.15 chegaríamos a uma contradição).

Assim, se  $x \in J(R_1)$ ,  $x$  é elemento de todo ideal maximal de  $R_1$  e consequentemente elemento de todo ideal maximal de  $R_2$ , e assim,  $x \in J(R_2)$  donde  $J(R_1) \subset J(R_2) \cap R_1$ .

2.1.11 TEOREMA

Sejam  $A \subset B$  domínios, e  $B$  integral sobre  $A$ . Então  $A$  é G-domínio, se, e somente se,  $B$  é G-domínio.

DEMONSTRAÇÃO:

Por (2.1.10) temos  $P(A) = P(B) \cap A$ .

Se  $A$  é G-domínio então  $P(A) \neq (0)$  e portanto  $P(B) \neq (0)$  donde  $B$  é G-domínio.

Se  $B$  é G-domínio, suponha  $P(A) = (0)$ . Assim, existe  $x \in P(B)$ ,  $x \neq 0$  com  $x \notin A$ . Como  $x$  é integral sobre  $A$ , seja  $n$  o menor inteiro positivo tal que:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \text{ onde } a_i \in A.$$

Temos:

$$x(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}) = -a_n \quad (-a_n \in A)$$

$$\text{e } x(x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}) \in P(B).$$

Deste modo,

$$x(x^{n-1} + \dots + a_{n-1}) \in P(B) \cap A = (0)$$

donde  $x(x^{n-1} + \dots + a_{n-1}) = 0$  o que acarreta ( $x \neq 0$ ) que

$$x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0$$

uma contradição com a escolha de  $n$ . Assim  $P(A) \neq (0)$  e  $A$  é um G-domínio.

### 2.1.12 TEOREMA

Sejam  $A \subset T$  domínios,  $T$  algébrico sobre  $A$ . Então

- i) Se  $A$  é G-domínio,  $T$  é G-domínio;
- ii) Se  $T$  é finitamente gerado como anel sobre  $A$  e  $T$  é G-domínio então  $A$  é G-domínio.

DEMONSTRAÇÃO de i):

Sejam  $K$  e  $L$  os corpos de frações de  $A$  e  $T$  respectivamente. Se  $A$  é G-domínio temos  $K = A[u^{-1}]$  com  $0 \neq u \in A$ . Evidentemente temos,  $T[u^{-1}] \subset L$ .

Agora,  $T$  algébrico sobre  $A$  acarreta  $T$  é integral sobre  $K$  donde  $T[u^{-1}]$  é integral sobre  $K$  ( $u^{-1} \in K \subset L$ ) (1.3.4). Mas então  $T[u^{-1}]$  é um corpo (1.3.5) e como  $T[u^{-1}] \subset L$  temos  $L = T[u^{-1}]$  e  $T$  é um G-domínio.

DEMONSTRAÇÃO de ii):

Se  $T$  é um G-domínio temos  $L = T[v^{-1}]$  com  $v \in T$ ,  $v \neq 0$ , e como  $T$  é finitamente gerado sobre  $A$  temos

$$T = A[w_1, w_2, \dots, w_n], \quad w_i \in T$$

Os elementos  $v^{-1}, w_1, w_2, \dots, w_n$  são algébricos sobre  $A$ , logo temos:

$$\begin{cases} a_0 (v^{-1})^n + a_1 (v^{-1})^{n-1} + \dots + a_n = 0 \text{ com } a_i \in A \\ b_{0i} w_i^n + b_{1i} w_i^{n-1} + \dots + b_{ni} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

e  $b_{ji} \in A$

Seja  $A_1$  o anel  $A[a_0^{-1}, b_{01}^{-1}, \dots, b_{0n}^{-1}]$ . Evidentemente  $A \subset A_1 \subset K$ .

Como  $L = T[v^{-1}] = A[w_1, w_2, \dots, w_n][v^{-1}]$  e

$A_1 \subset K \subset L$  é imediato que

$$L = A_1[v^{-1}, w_1, w_2, \dots, w_n].$$

Mas agora,  $v^{-1}, w_1, w_2, \dots, w_n$  são integrais sobre  $A_1$  e portanto  $L$  é integral sobre  $A_1$ . Assim (1.3.5)  $A_1$  é um corpo e necessariamente  $K = A_1 = A[a_0^{-1}, b_{01}^{-1}, \dots, b_{0n}^{-1}]$ . Assim  $A$  é um G-domínio.

### 2.1.13 COROLÁRIO

Sejam  $A \subset T$  domínios e  $u \in T$ .

Se  $A[u]$  é G-domínio então  $u$  é algébrico sobre  $A$  e  $A$  é G-domínio.

DEMONSTRAÇÃO:

Se  $u$  não é algébrico sobre  $A$  então a aplicação

$$\phi : A[x] \rightarrow A[u]$$

definida por  $\phi(f(x)) = f(u)$  é um isomorfismo de anéis. Por (2.1.9)  $A[u]$  não é um G-domínio.

Agora,  $A[u]$  é um anel finitamente gerado sobre  $A$  algébrico sobre  $A$  e portanto por (2.1.12)  $A$  é um G-domínio.

### 2.1.14 PROPOSIÇÃO

Seja  $A$  um domínio,  $K$  o corpo de frações de  $A$  e suponhamos que  $K = A[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$  com  $x_i \in K$ , isto é,  $K$  é enumeravelmente gerado sobre  $A$  como anel. Então  $A$  é um G-domínio, se, e somente se,  $K$  não pode ser escrito como reunião de uma cadeia de subanéis próprios de  $K$ , crescente e contendo  $A$ .



DEMONSTRAÇÃO:

Se  $A$  é um  $G$ -domínio, existe  $u \in A$ ,  $u \neq 0$  tal que  $K = A[u^{-1}]$ . Se

$$A \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$$

é uma cadeia de subanéis próprios de  $K$  e  $K = \bigcup A_i$  então  $u^{-1} \in \bigcup A_i$  e conseqüentemente, existe  $j$  tal que

$$u^{-1} \in A_j$$

Como  $A \subset A_j$  temos  $K = A_j$ , uma contradição.

Reciprocamente, se  $A$  não é um  $G$ -domínio então  $K$  não é finitamente gerado sobre  $A$  como anel (2.1.12).

Seja  $K = A[x_1, x_2, \dots, x_n, \dots]$  tal que  $x_{i+1}$  não é elemento de  $A[x_1, x_2, \dots, x_i]$  para todo  $i$  inteiro positivo, e considere a cadeia:

$$A \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots \quad \text{onde}$$

$A_i = A[x_1, x_2, \dots, x_i]$ . Claramente  $A_i \neq A_{i+1}$  para todo  $i$  e  $K = \bigcup_0 A_i$  como queríamos.

OBSERVAÇÃO:  $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}[1/2, 1/3, \dots, 1/p, \dots]$  ( $p$  primo) e  $\mathbb{Z}$  não é  $G$ -domínio.

Nosso próximo resultado expõe a conexão existente entre um  $G$ -domínio  $A$  e ideais maximais dos anéis  $A[x]$  e  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

2.1.15 TEOREMA

Seja  $A$  um domínio com corpo quociente  $K$ . As seguintes afirmativas são equivalentes:

- i)  $A$  é um  $G$ -domínio;
- ii) Existe um polinômio linear  $f(x) \in A[x]$  tal que o ideal  $(f(x))$  é maximal e minimal em  $A[x]$ ;
- iii) Existe um ideal primo  $M$  de  $A[x]$  que é maximal e minimal em  $A[x]$ ;
- iv) Existe um ideal maximal  $M$  de  $A[x]$  tal que  $M \cap A = (0)$ ;
- v) Existe um ideal maximal  $N$  de  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  tal que  $N \cap A = (0)$ .

DEMONSTRAÇÃO:

i)  $\rightarrow$  ii) Temos  $K = A[u^{-1}]$  com  $u \in A, u \neq 0$ . Seja

$$\phi : A[x] \rightarrow A[u^{-1}] \quad \text{onde}$$

$\phi(f(x)) = f(u^{-1})$ . Podemos verificar que  $\phi$  é um homomorfismo sobrejetor e portanto

$$A[x]/\text{Ker}\phi \cong A[u^{-1}] = K$$

Assim,  $\text{Ker}\phi$  é um ideal maximal de  $A[x]$ .

Provemos que  $\text{Ker}\phi = (ux - 1)$ .

É imediato que  $(ux - 1) \subset \text{Ker}\phi$ . Por outro lado, se  $g(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \text{Ker}\phi$  então  $g(x) + a_0(ux - 1) = (a_1 + a_0u)x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

é um elemento de  $\text{Ker}\phi$ , isto é,

$$x[(a_1 + a_0u) + a_2x + \dots + a_nx^{n-1}] \in \text{Ker}\phi,$$

donde concluímos que

$$(a_1 + a_0u) + a_2x + \dots + a_nx^{n-1} \in \text{Ker}\phi,$$

já que  $x \notin \text{Ker}\phi$ .

Podemos então utilizar indução: Se  $ax + b$  pertence a  $\text{Ker}\phi$  temos  $au^{-1} + b = 0$  ou seja,

$$b = -au^{-1} \in A \quad \text{assim}$$

$ax + b = ax - au^{-1} = au^{-1}(ux - 1) \in (ux - 1)$ . Portanto  $\text{Ker}\phi = (ux - 1)$  como queríamos.

Resta mostrar que  $(ux - 1)$  é minimal o que decorre imediatamente de (1.1.19)

ii)  $\rightarrow$  iii) Basta tomar  $M = (ux - 1)$

iii)  $\rightarrow$  iv) Seja  $M$  ideal maximal e minimal em  $A[x]$ .

Se  $M \cap A = P$  temos  $PA[x] \subset M$ . Como

$$A[x]/PA[x] \cong (A/P)[x] \quad \text{e desde}$$

que  $(A/P)[x]$  não é corpo segue-se  $PA[x] \neq M$ . Como  $P$  e  $PA[x]$  são primos,  $PA[x] \subset M$  acarreta  $P = (0)$  já que  $M$  é minimal.

iv)  $\rightarrow$  v) Utilizando-nos de iii) seja  $M$  um ideal maximal ( e minimal ) de  $A[x_1]$  tal que  $M \cap A = (0)$ .

Temos que  $MA[x_1, x_2, \dots, x_n]$  é um ideal próprio de  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  e portanto existe  $N$  ideal maximal de  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  contendo  $MA[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

Agora,  $N \cap A[x_1] = M$  e assim  $N \cap A = M \cap A = (0)$ , como queríamos.

v)  $\rightarrow$  i) Seja  $M$  ideal maximal de  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Então

$$A[x_1, x_2, \dots, x_n]/M$$

é um corpo e contem  $A$ .

Como  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]/M \cong A[t_1, t_2, \dots, t_n]$  onde  $t_i = x_i + M$ , é um G-domínio, (2.1.13) nos garante que  $A$  é um G-domínio.

Alguns resultados interessantes advem quando investigamos domínios de valorização. Para tal estabeleceremos algumas definições.

#### 2.1.16 DEFINIÇÃO

$A$  é um ANEL de VALORIZAÇÃO se, e somente se,  $P, Q$  são ideais de  $A$  então  $P \subset Q$  ou  $Q \subset P$ .

#### 2.1.17 DEFINIÇÃO

Seja  $P$  um ideal primo do anel  $A$ . Uma cadeia de ideais primos distintos e não nulos do tipo:

$$P = P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_n$$

tem comprimento  $n$ . O PÔSTO de  $P$  é então o supremo dos comprimentos de todas as cadeias decrescentes a partir de  $P$  e formada por ideais primos distintos e não nulos.

### 2.1.18 PROPOSIÇÃO

Seja  $A$  um domínio de valorização.  $A$  é um G-domínio se, e somente se,  $A$  possui um ideal primo de posto 1.

#### DEMONSTRAÇÃO:

Se  $A$  é um G-domínio temos  $P(A) \neq (0)$ . Provaremos que  $P(A)$  é um ideal primo e portanto de posto 1.

Seja  $ab \in P(A)$  e suponha que  $a \notin P(A)$  bem como  $b \notin P(A)$ . Então existe  $P$  ideal primo de  $A$  tal que  $a \notin P$  e existe  $Q$  ideal primo de  $A$  tal que  $b \notin Q$ . Como  $A$  é um domínio de valorização devemos ter

$$P \subset Q \quad \text{ou} \quad Q \subset P$$

Se  $P \subset Q$  segue-se que  $b \notin P$  acarretando que  $ab \notin P$  o que é absurdo, já que  $ab \in P(A)$ .

Por outro lado, seja  $Q$  um ideal de posto 1 de  $A$ . Se  $P$  é um outro ideal primo de  $A$  teremos forçosamente  $Q \subset P$ , já que  $P \subset Q$  acarreta  $P = Q$  ou  $P = (0)$ .

Assim  $Q \subset P(A)$  e portanto  $P(A) \neq (0)$  o que acarreta  $A$  é um G-domínio.

### 2.1.19 PROPOSIÇÃO

Seja  $A$  um G-domínio. Então cada ideal primo não nulo de  $A$  contem um ideal primo de posto 1.

#### DEMONSTRAÇÃO:

É uma aplicação imediata de (1.1.18) onde se tomará  $I = P(A)$ .

## 2.2 G-IDEAIS

Se  $A$  é um anel e  $P$  é um ideal primo de  $A$  então  $A/P$  é um domínio. Nesta seção estudaremos condições sobre o ideal primo  $P$  de tal modo que  $A/P$  seja um G-domínio.

Note que se  $P$  é um ideal maximal então  $A/P$  é um G-domínio, mas veremos que não há necessidade de  $P$  ser maximal. Para tanto estabelecemos a seguinte definição:

### 2.2.1 DEFINIÇÃO

Seja  $A$  um anel comutativo com elemento unidade e  $P$  um ideal primo de  $A$ . Diremos que  $P$  é um G-IDEAL de  $A$  se o anel quociente  $A/P$  é um G-domínio.

### 2.2.2 EXEMPLOS:

a) Se  $K$  é um corpo então o ideal  $(x)$  é um G-ideal de  $K[x]$  pois  $K[x]/(x) \cong K$ .

b) Um ideal maximal  $M$  do anel  $A$  é um G-ideal de  $A$ .

c) Se  $A = K[x, y]$  onde  $K$  é um corpo então o ideal  $(y)$  é primo mas não é um G-ideal de  $A$  (2.1.9).

d) Este exemplo é interessante. Seja

$A = \mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x]$ . Então  $A$  é um G-domínio (2.1.7, (c)) mas  $A/(x) \cong \mathbb{Z}$  não é um G-domínio. (2.1.6)

A noção de G-IDEAL permite reformular o teorema de KRULL sobre o nilradical (1.1.9), que pode ser re-enunciado como segue:

### 2.2.3 TEOREMA (KRULL)

O nilradical do anel  $A$  é a intersecção de todos os G-ideais de  $A$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $N(A)$  o nilradical de  $A$ . Se  $x \in N(A)$  en-

tão  $x \in P$ , para todo  $P$  ideal primo de  $A$ . Como  $G$ -ideais são primos,  $x$  é elemento de todo  $G$ -ideal e temos

$$N(A) \subset \bigcap P_i$$

onde cada  $P_i$  é um  $G$ -ideal de  $A$ .

Por outro lado, se  $x \notin N(A)$  então  $x^n \neq 0$  para todo  $n$  inteiro positivo, isto é,  $(0) \cap \{x^n, n \geq 1\} = \emptyset$ . Podemos então "expandir"  $(0)$  até um ideal  $I$ , maximal com respeito a exclusão de  $\{x^n, n \geq 1\}$ . Por (1.1.17)  $I$  é um ideal primo de  $A$ . Para terminar a demonstração provemos que  $I$  é um  $G$ -ideal, ou seja, que  $A/I$  é um  $G$ -domínio.

Seja  $\gamma : A \rightarrow A/I$  o homomorfismo natural e  $\bar{x} = \gamma(x)$ .

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\gamma} & A/I \\ | & & | \\ J & \xrightarrow{\quad} & \bar{J} \\ | & & | \\ I & \xrightarrow{\quad} & (0) \end{array}$$

No diagrama acima, se  $\bar{J}$  é um ideal primo não nulo de  $A/I$  então sua contração  $J$  contém  $I$  e portanto

$$J \cap \{x^n, n \geq 1\} \neq \emptyset$$

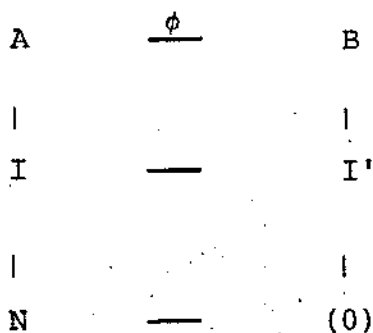
acarretando  $x \in J$ , já que  $J$  é primo. Assim,  $\bar{x} \in \bar{J}$ , para todo  $\bar{J}$  ideal primo não nulo de  $A/I$  e portanto o pseudo-radical de  $A/I$  é não nulo donde  $A/I$  é um  $G$ -domínio, como queríamos.

Nosso próximo objetivo é estudar o comportamento dos  $G$ -ideais frente a homomorfismos.

#### 2.2.4 PROPOSIÇÃO

Sejam  $A$  e  $B$  anéis e  $\phi : A \rightarrow B$  um homomorfismo sobrejetor com  $\text{Ker } \phi = N$ . Então existe uma correspondência biunívoca entre ideais de  $B$  e ideais de  $A$  que contem  $N$ . Nessa correspondência, a  $G$ -ideais estão associados  $G$ -ideais.

Daremos a demonstração só da ultima afirmativa.  
 Considere o diagrama:



Se  $I$  é um G-IDEAL de  $A$  então  $A/I$  é um G-domí -  
 nio e existe  $u \in A$ ,  $u \neq 0$  com  $u \in P$  para todo ideal pri-  
 mo  $P \supset I$  e  $u \notin I$ .

Sejam  $u' = \phi(u)$  e  $I'$  o ideal de  $B$  correspondente  
 te a  $I$  (cuja existência é garantida pela primeira parte  
 desta proposição).

Afirmamos que  $u' \in P'$  para todo ideal primo  $P'$   
 de  $B$  com  $P' \supset I'$ . Se isso não ocorresse existiria  $P'_1$  i-  
 deal primo de  $B$  com  $u' \notin P'_1$  e assim  $u \notin \phi^{-1}(P'_1)$  o que é  
 absurdo pois  $\phi^{-1}(P'_1)$  é um ideal primo de  $A$  e contem  $I$ .

Reciprocamente, se  $I'$  é um G-ideal de  $B$ , existe  
 te  $u' \in B$ ,  $u' \neq 0$ , tal que  $u' \in P'$  para todo  $P'$  ideal  
 primo de  $B$  com  $P' \supset I'$ . Como  $\phi$  é sobrejetor, existe ao  
 menos um  $u \in A$  tal que  $\phi(u) = u'$ . Assim  $u \in \phi^{-1}(P')$  para  
 todo  $P' \supset I'$ . Utilizando-nos da primeira parte desta -  
 proposição concluímos que  $I = \phi^{-1}(I')$  é um G-ideal de  $A$ .

Observação: A imagem homomorfa de um G-ideal  
 sempre é um G-ideal, mesmo que o homomorfismo não seja  
 sobrejetor. O mesmo não ocorre com a imagem inversa, co-  
 mo vemos:

$(0)$  é G-ideal de  $\mathbb{Q}$  e se  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  então  
 $\phi^{-1}((0)) = (0)$  não é um G-ideal de  $\mathbb{Z}$ .

### 2.2.5 PROPOSIÇÃO

Seja  $A$  um anel,  $I$  um ideal de  $A$  e  $r(I)$  o radical de  $I$ . Então  $r(I)$  é a intersecção todos os  $G$ -ideais de  $A$  que contem  $I$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Com base na proposição anterior e (1.1.13) a conclusão sai imediata.

Nosso próximo objetivo é relacionar  $G$ -ideais de  $A$  com a contração de ideais maximais de  $A[x]$ . Com esse objetivo provaremos o seguinte lema.

### 2.2.6 LEMA

Se  $A$  é um domínio,  $I$  um ideal de  $A$ ,  $A^* = A/I$  e  $IA[x] = \{ \sum_0^n a_i x^i : a_i \in I \}$  então

$$A[x]/IA[x] \cong (A/I)[x] = A^*[x]$$

DEMONSTRAÇÃO:

Definamos  $h: A[x] \rightarrow A^*[x]$  por

$$h\left(\sum_0^n a_i x^i\right) = \sum_0^n (a_i + I)x^i$$

Como  $h$  é um homomorfismo sobrejetor e é fácil ver que  $\text{Ker}h = IA[x]$ , segue pelo Teorema do Isomorfismo:

$$A[x]/IA[x] \cong (A/I)[x] = A^*[x].$$

### 2.2.7 TEOREMA

Um ideal  $I$  do anel  $A$  é um  $G$ -ideal de  $A$ , se, e somente se, existe um ideal maximal  $M$  de  $A[x]$  tal que  $M \cap A = I$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Tomando os anéis quocientes  $A^* = A/I$  (2.2.6) podemos fazer a seguinte reformulação do enunciado:

"O ideal  $(0)$  do anel  $A^*$  é um  $G$ -IDEAL de  $A^*$ , se, e somente se, existe um ideal maximal  $M'$  de  $A^*[x]$  tal que  $M' \cap A^* = (0)$ .

Mas então, temos:

Se  $(0)$  é um  $G$ -ideal de  $A^*$ ,  $A^*$  é um  $G$ -domínio e (2.1.15) existe  $M'$  ideal maximal de  $A^*[x]$  tal que  $M' \cap A^* = (0)$ .



Reciprocamente, se existe  $M'$  ideal maximal de  $A^*[x]$  tal que  $M' \cap A^* = (0)$  então  $A^*$  é um G-domínio (2.1.15), donde decorre que  $I$  é um G-ideal de  $A$ .

Faremos a seguir algumas observações a respeito de G-ideais.

OBSERVAÇÃO 1: Por definição um G-ideal é primo. No entanto nem todo primo é um G-ideal. De fato, o ideal  $(0)$  de  $\mathbb{Z}$  é primo mas  $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z}/(0)$  não é um G-domínio e consequentemente  $(0)$  não é um G-ideal;

OBSERVAÇÃO 2: Todo ideal maximal de  $A$  é um G-ideal de  $A$  mas nem todo G-ideal de  $A$  é maximal como vemos: Seja  $A = [\mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x]][y]$ . O ideal  $(y)$  é um G-ideal de  $A$ , mas não é maximal. Ver (2.1.7, c).

A seguir estabeleceremos um resultado muito importante para o desenvolvimento do próximo capítulo.

#### 2.2.8 TEOREMA

Seja  $M$  um ideal maximal de  $A[x]$  tal que temos  $M \cap A = N$  é um ideal maximal de  $A$ . Então  $M$  pode ser gerado por  $N$  e mais um elemento  $f \in A[x]$  tal que a imagem natural de  $f$  em  $(A/N)[x]$  seja um polinômio irreduzível.

#### DEMONSTRAÇÃO:

Tomemos o quociente por  $N$ , e seja  $A^* = A/N$ , um corpo. O enunciado pode ser reformulado para: "Seja  $M'$  ideal maximal de  $A^*[x]$  tal que  $M' \cap A^* = (0)$ . Então  $M'$  pode ser gerado por  $f \in A^*[x]$  com  $f$  irredutível".

Como  $A^*$  é um corpo, temos que  $A^*[x]$  é um PID (1.2.6) e portanto  $M' = (f)$  com  $f$  irredutível sobre  $A^*$  (1.2.4).

Se  $\phi: A[x] \rightarrow A^*[x]$  é o homomorfismo do lema 2.2.6 temos, de acordo com o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 A[x] & \xrightarrow{\phi} & A^*[x] \\
 | & & | \\
 M & \xrightarrow{\quad} & M' = (f) \\
 | & & | \\
 NA[x] & \xrightarrow{\quad} & (0)
 \end{array}$$

$M = (N, f_{\circ})$  onde  $f_{\circ}$  é uma pré-imagem unitária do polinômio  $f$  irredutível sobre  $A/N$ .

OBSERVAÇÃO: Se o corpo  $A/N$  é algebricamente fechado então o polinômio  $f \in A^*[x]$  deve ser do tipo  $x - \bar{a}$  por (1.4.9) com  $\bar{a} \in A^*$  e  $f_{\circ}$  será da forma  $x - a$  com  $\bar{a} = a + N$ . Assim, teríamos,  $M = (N, x - a)$ .

## C A P Í T U L O 3

### ANÉIS de HILBERT

#### 3.1 ANEIS DE HILBERT

Vimos no capítulo precedente que todo ideal maximal do anel  $A$  é um  $G$ -ideal de  $A$ . Neste paragrafo estudaremos os anéis  $A$  onde a recíproca é verdadeira, isto é, - anéis onde todo  $G$ -ideal é maximal.

##### 3.1.1 DEFINIÇÃO:

Um anel  $A$  é chamado ANEL de HILBERT (ou ANEL de JACOBSON [2]) se todo  $G$ -IDEAL de  $A$  é maximal.

##### 3.1.2 EXEMPLOS:

- i) Todo corpo é um anel de Hilbert;
- ii) Se  $A$  é um anel de dimensão 0, todo ideal primo de  $A$  é maximal e conseqüentemente (2.2.1) todo  $G$ -ideal de  $A$  é maximal. Portanto  $A$  é um anel de Hilbert.
- iii)  $A = [\mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x]][y]$  não é anel de Hilbert, mas  $A$  é noetheriano (2.1.7, (c)).

Nosso próximo resultado será estabelecer condições para que um anel  $A$  seja um anel de Hilbert.

##### 3.1.3 PROPOSIÇÃO

As seguintes afirmativas são equivalentes:

- i)  $A$  é um anel de Hilbert;
- ii) Se  $I$  é um ideal de  $A$  então  $r(I)$  é a intersecção dos ideais maximais de  $A$  que contem  $I$ ;
- iii) Se  $P$  é um ideal primo de  $A$  então  $P$  é a intersecção dos ideais maximais de  $A$  que o contem;
- iv) Todo  $G$ -ideal de  $A$  é a intersecção dos ideais maximais de  $A$  que o contem.

DEMONSTRAÇÃO:

i)  $\rightarrow$  ii) De (2.2.5) e (3.1.1) segue o resultado.

ii)  $\rightarrow$  iii) Como  $r(P) = P$ , segue o resultado.

iii)  $\rightarrow$  iv) Se  $Q$  é um G-ideal de  $A$  então  $Q$  é primo e o resultado segue imediato.

iv)  $\rightarrow$  i) Seja  $P$  um G-ideal de  $A$ . Devemos provar que  $P$  é maximal. Se  $P$  não é maximal, seja

$$T = \{M_i : M_i \text{ é maximal em } A \text{ e } P \subset M_i\}$$

Diante do exposto,  $T \neq \emptyset$ . Por iv)  $P = \bigcap M_i$  onde  $M_i \in T$ .

Agora, temos:  $(0) = \bigcap (M_i/P)$  ( $M_i \in T$ )

Por outro lado,  $A/P$  é um G-domínio, logo temos  $P(A/P) \neq (0)$ . Temos então uma contradição, pois:

$$(0) \neq P(A/P) \subset \bigcap (M_i/P) = (0).$$

### 3.1.4 COROLÁRIO

Se  $A$  é um anel de Hilbert com um número finito de ideais maximais então  $\dim A = 0$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Se  $P$  é um ideal primo de  $A$  temos  $P = \bigcap_1^k M_i$  onde cada  $M_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) é maximal em  $A$ .

Se  $\dim A > 0$  existe  $P$  ideal primo de  $A$  tal que  $P \subset M_i$  (inclusão estrita), para todo  $M_i$  ideal maximal de  $A$ .

Assim podemos encontrar  $x_i \in M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) e  $x_i \notin P$ .

$$\text{Mas então } \prod_1^k x_i \in M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_k \subset \bigcap_1^k M_i = P$$

uma contradição. Assim,  $P$  deve ser maximal e  $\dim A = 0$ .

OBSERVAÇÕES:

i)  $K[x]$ , ( $K$  corpo) não é anel de Hilbert pois  $\dim K[x] = 1$ . No entanto  $K[x]$  é local. (1.2.14)

ii)  $\mathbb{Z}$  é um anel de Hilbert (com  $\dim \mathbb{Z} = 1$ ) pois todo ideal primo não nulo de  $\mathbb{Z}$  é maximal. Observe que  $(0)$  é primo mas não é G-ideal.

iii) Se  $K$  é corpo então  $K[x]$  é um anel de Hilbert por (1.2.4) e (1.2.6).

### 3.1.5 PROPOSIÇÃO:

Seja  $A$  um PID e  $L = \{p \in A: p \text{ é irreduzível}\}$ . Então  $A$  é um anel de Hilbert se, e somente se,  $|L| = \infty$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Se  $A$  é um anel de Hilbert e  $L = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  é um conjunto finito então  $p_i A$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) são os únicos ideais primos não nulos de  $A$ .

Como  $(0)$  é um ideal primo de  $A$  e  $A$  é um anel de Hilbert, devemos ter, por (3.1.3, (iii))

$$(0) = \bigcap p_i A$$

Mas  $0 \neq x \in \bigcap p_i A$ , onde  $x = \prod p_i$  o que é absurdo.

Reciprocamente, como  $A$  é um PID qualquer ideal primo não nulo é maximal e portanto verifica (3.1.3, (iii)) Também o ideal primo  $(0)$  é tal que (1.2.5)

$$(0) = \bigcap pA$$

onde  $p \in L$ .

Assim  $A$  é um anel de Hilbert.

### 3.1.6 PROPOSIÇÃO

Seja  $\phi: A \rightarrow B$  um homomorfismo. Se  $A$  é um anel de Hilbert então  $\phi(A) = S \subset B$  é um anel de Hilbert.

DEMONSTRAÇÃO:

Como existe uma correspondência biunívoca entre ideais de  $A$  que contem  $\text{Ker } \phi$  e ideais de  $S$ , correspondência esta que preserva a ordem, segue o resultado uma vez que a  $G$ -ideais correspondem  $G$ -ideais e que a ideais maximais correspondem ideais maximais (2.2.4)

### 3.1.7 COROLÁRIO.

Se  $A$  é um  $G$ -domínio e um anel de Hilbert então  $A$  é um corpo.

DEMONSTRAÇÃO:

Como  $A = A/(0)$  é um G-domínio, segue-se que  $(0)$  é um G-ideal de  $A$ . Como  $A$  é um anel de Hilbert,  $(0)$  é maximal e portanto,  $A$  é um corpo.

3.1.8 PROPOSIÇÃO

Sejam  $A \subset B$  anéis com  $B$  integral sobre  $A$ . Então  $A$  é um anel de Hilbert, se, e somente se,  $B$  é um anel de Hilbert.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $A$  um anel de Hilbert,  $P$  um G-ideal de  $B$  e  $P' = P \cap A$ .

Como  $B/P$  é integral sobre  $A/P'$  (1.3.6) e  $B/P$  é um G-domínio segue de (2.1.11) que  $A/P'$  é um G-domínio e portanto  $P'$  é maximal. Por (1.3.8)  $P$  é maximal.

Reciprocamente, se  $P'$  é um G-ideal de  $A$ , e como  $B$  é integral sobre  $A$ , existe  $P$  ideal primo de  $B$  tal que  $P \cap A = P'$  (1.3.8). Como  $B/P$  é integral sobre  $A/P'$  e  $A/P'$  é um G-domínio então  $B/P$  é um G-domínio (2.1.11). Como  $B$  é um anel de Hilbert temos  $P$  maximal e por (1.3.8)  $P'$  é maximal.

3.1.9 PROPOSIÇÃO

Seja  $A$  um anel comutativo e  $x$  uma indeterminada sobre  $A$ . Então  $A$  é um anel de Hilbert se, e somente se para todo ideal maximal  $M$  de  $A[x]$ ,  $M \cap A$  é maximal em  $A$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Assuma que  $A$  é um anel de Hilbert e seja  $M$  um ideal maximal de  $A[x]$  com  $N = M \cap A$ . Por (2.2.7)  $N$  é um G-ideal de  $A$  e portanto  $N$  é maximal.

Reciprocamente, seja  $P$  um G-ideal de  $A$ . Utilizando (2.2.7), existe  $M_0$  ideal maximal de  $A[x]$  tal que  $M_0 \cap A = P$ . Por hipótese,  $P$  é maximal e  $A$  é, portanto, um anel de Hilbert.

OBSERVAÇÃO: Temos  $Z \subset Q$  anéis de Hilbert,  $(0)$  ideal maximal de  $Q$  mas  $(0) \cap Z = (0)$  não é um ideal maximal de  $Z$ .

### 3.1.10 PROPOSIÇÃO

Se  $A$  é um anel de Hilbert e todo ideal maximal de  $A$  é finitamente gerado então todo ideal de  $A[x]$  é finitamente gerado.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $M$  um ideal maximal de  $A[x]$ . Por (3.1.9)  $M \cap A$  é maximal e portanto finitamente gerado. Assim, usando (2.2.8) temos que  $M$  pode ser gerado por  $M \cap A$  e mais um elemento  $f$  de  $A[x]$ . Portanto  $M$  é finitamente gerado.

### 3.1.11 PROPOSIÇÃO

Seja  $A$  um domínio e  $x$  uma indeterminada sobre  $A$ . Então  $A[x]$  é um anel de Hilbert se e somente se  $A$  é um anel de Hilbert e  $M \cap A = (0)$  para todo  $G$ -ideal  $M$  de  $A[x]$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $M$  um  $G$ -ideal de  $A[x]$ . Precisamos provar que  $M$  é maximal. Consideremos o homomorfismo natural:

$$\phi : A[x] \rightarrow A[x]/M$$

e seja  $u = \phi(x) = x + M$ . Assim, como  $M \cap A = (0)$

$$A[u] \cong (A/M \cap A)[u] \cong A[x]/M$$

Como  $M$  é um  $G$ -ideal de  $A[x]$ ,  $A[u]$  é um  $G$ -domínio. Por (2.1.13)  $u$  é algébrico sobre  $A$  e  $A$  é um  $G$ -domínio. Como  $A$  é um anel de Hilbert (3.1.7)  $A$  é um corpo.

Assim,  $A[u] \cong A[x]/M$  é um corpo (1.4.6) e portanto  $M$  é maximal.

### 3.1.12 TEOREMA

Seja  $A$  um anel comutativo e  $x$  uma indeterminada sobre  $A$ . Então  $A[x]$  é um anel de Hilbert se, e somente se,  $A$  é um anel de Hilbert.

DEMONSTRAÇÃO:

Se  $A[x]$  é um anel de Hilbert, seja

$$\phi : A[x] \rightarrow A$$

$$p(x) \mapsto p(0)$$

Facilmente se vê que  $\phi$  é um homomorfismo sobrejetor. Assim (3.1.6)  $A$  é um anel de Hilbert.

Reciprocamente, seja  $M$  um  $G$ -ideal de  $A[x]$  e  

$$N = M \cap A$$

Como  $A$  é um anel de Hilbert,  $A/N$  é um anel de Hilbert (3.1.6). Da proposição anterior (3.1.11) temos  $(A/N)[x]$  é um anel de Hilbert, já que  $N$  é primo como contração de um ideal primo.

Consideremos o homomorfismo natural

$$\lambda : A[x] \rightarrow A[x]/NA[x] \cong (A/N)[x]$$

Como  $M$  é um  $G$ -ideal de  $A[x]$  sua imagem  $M/NA[x]$  é um  $G$ -ideal de  $(A/N)[x]$  e portanto maximal. Mas então  $M$  é maximal (2.2.4).

O seguinte corolário segue imediatamente:

### 3.1.13 COROLÁRIO

Seja  $A$  um anel comutativo e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  um conjunto finito de indeterminadas sobre  $A$ . Então  $A$  é um anel de Hilbert se, e somente se,  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  é um anel de Hilbert.

### 3.1.14 PROPOSIÇÃO

$A[x]$  não é um anel de Hilbert.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $M$  um ideal maximal de  $A$  e considere

$$M^* = \left\{ \sum_0^{\infty} a_i x^i : a_i \in M \right\}$$

$M^*$  é um ideal primo de  $A[x]$  (1.2.10) e verificamos que  $M^* \subset (M, x)$  (inclusão estrita) pois  $x \notin M^*$ .

Agora, se  $A[x]$  é um anel de Hilbert então  $A[x]/M^*$  também é um anel de Hilbert (3.1.6).

Ocorre que  $A[x]/M^*$  só tem um ideal maximal, que é  $(M, x)/M^*$ . (Realmente, se  $Q$  é um ideal maximal de



$A[x]/M^*$  então existe um ideal maximal  $Q'$  em  $A[x]$  tal que  $Q'/M^* = Q$ . Mas, por (1.2.11)  $Q' = \langle M, x \rangle$  pois  $Q'$  também corresponde a  $M$  em  $A$ .)

Finalmente, (3.1.4)  $\dim A[x]/M^* = 0$  o que é absurdo pois  $M^*$  é primo,  $M^* \subset \langle M, x \rangle$  donde decorre que  $(\bar{0}) \subset \langle M, x \rangle / M^*$  (inclusão estrita) e portanto  $\dim A[x]/M^* > 0$ .

### 3.2 ANÉIS DE HILBERT NOETHERIANOS

O objetivo deste paragrafo e responder a seguinte questão: "Quando é que um anel noetheriano é um anel de Hilbert?".

Para responder tal pergunta, o resultado básico deste parágrafo é o "Teorema do Ideal Principal" de Krull

Para um bom entendimento do que trataremos agora, é indispensável um conhecimento da Teoria dos Módulos

Se  $A$  é um domínio e  $u, v \in A$ , podemos considerar

$$(u, v)/(u)$$

como um  $A$ -módulo, bem como o faremos com  $(u^2, uv)/(u^2)$   
 $(u)/(u^2)$ ,  $(u^2, v)/(u^2, uv)$  etc.

Após essas observações, temos:

#### 3.2.1 LEMA

Sejam  $u, y$  elementos não nulos do domínio  $A$ . Então:

a) Os  $A$ -módulos  $(u, y)/(u)$  e  $(u^2, uy)/(u^2)$  são isomorfos;

b) Os  $A$ -módulos  $(u)/(u^2)$  e  $(u^2, y)/(u^2, uy)$  são isomorfos se for válida a condição adicional (\*)

$$(*) \quad tu^2 \in (y) \Rightarrow tu \in (y) \quad \text{para } t \in A.$$

DEMONSTRAÇÃO:

a) Seja  $\phi: (u, y) \rightarrow (u^2, uy)/(u^2)$  a aplicação definida por  $\phi(x) = xu + (u^2)$  para todo  $x \in (u, y)$ .

Claramente,  $\phi$  é um homomorfismo sobrejetor pois se  $v \in (u^2, uy)/(u^2)$  então  $v = au^2 + buy + (u^2)$ ; ( $a, b \in A$ )  
 $= (au + by)u + (u^2)$   
 $= \phi(au + by)$

Afirmamos que  $\text{Ker}\phi = (u)$ . Realmente,

$\phi(au) = au^2 + (u^2) = (u^2)$  e se  
 $\phi(au + by) = \bar{0} = (u^2)$  então  $au^2 + buy \in (u^2)$  e daí tiramos  $buy = ru^2$  para algum  $r \in A$ , e portanto,

$$au + by = au + ru = (a + r)u \in (u).$$

Finalmente, pelo Teorema do Isomorfismo:

$$(u, y)/\ker\phi = (u, y)/(u) \cong (u^2, uy)/(u^2)$$

b) Temos, evidentemente,

$$(u)/(u^2) = \{au + (u^2) : a \in A\} = \{\bar{a}u : a \in A\} = \bar{u}A$$

e

$$(u^2, y)/(u^2, uy) = \{ay + (u^2, uy) : a \in A\} = \bar{y}A$$

Definamos  $\phi: \bar{u}A \rightarrow \bar{y}A$  por  $\phi(\bar{a}u) = \bar{a}y$  para todo  $a \in A$ .

É evidente que  $\phi$  é um A-módulo homomorfismo sobrejetor. Se for válida a condição (\*) veremos que  $\phi$  é injetora. Realmente, se  $\phi(\bar{a}u) = \bar{0}$ , isto é,  $ay \in (u^2, uy)$  então existem  $c, d \in A$  tal que:

$$ay = cu^2 + duy \quad \text{e daí}$$

$$(a - du)y = cu^2 \quad \text{donde tiramos}$$

que  $cu^2 \in (y)$ . A condição (\*) nos dá então  $cu \in (y)$ , isto é,  $cu = ey$  para algum  $e \in A$ .

$$\text{Assim, } ay = (cu)u + duy = euy + duy = (e + d)uy.$$

Como  $y \neq 0$  e  $A$  é um domínio, temos:

$$a = (e + d)u \quad \text{e portanto}$$

$$a \in (u)$$

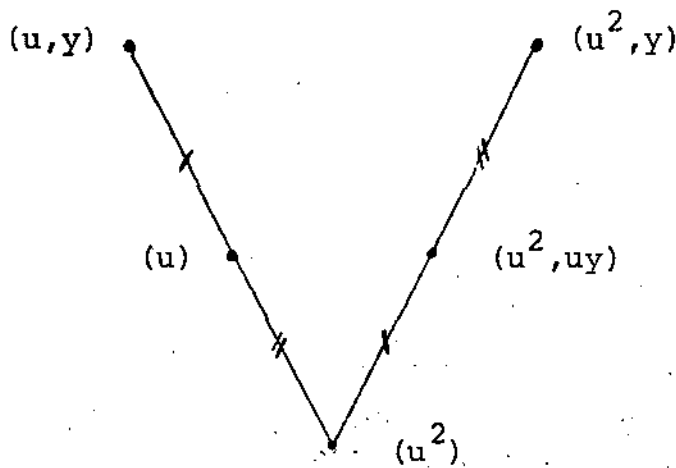
Mas se isto ocorre, isto é,  $a = hu$  para algum  $h \in A$  então:

$$\bar{a}u = (hu)u + (u^2) = (u^2).$$

Portanto, na presença de (\*) temos:

$$(u)/(u^2) \cong (u^2, y)/(u^2, uy).$$

O diagrama da página seguinte esclarece melhor o que foi provado.



Temos então que  $(u, y)/(u^2)$  e  $(u^2, y)/(u^2)$  são isomorfos "por pedaços" na presença de (\*).

### 3.2.2 TEOREMA

Se  $A$  é um domínio noetheriano local com ideal maximal  $M$ , se  $x \in M$  é não nulo e  $M$  é um primo minimal sobre o ideal  $(x)$  então posto  $M \leq 1$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Se assumirmos o contrário, existe  $Q$  primo tal que

$$M \supset Q \supset (0) \quad (\text{inclusão estrita})$$

Escolhamos  $y \in Q$ ,  $y \neq 0$  e consideremos

$$I_k = \{t \in A : tx^k \in (y), k \in \mathbb{N}\}$$

É fácil ver que cada  $I_k$  é um ideal de  $A$  e que

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$$

Como  $A$  é noetheriano, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$I_n = I_{n+1} = \dots \quad \text{e, em}$$

particular

$$I_n = I_{2n}$$

Seja  $u = x^n$ . Então teremos:

$$(*) \quad tu^2 \in (y) \Rightarrow tu \in (y) \quad \text{para todo } t \in I_n.$$

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & A/(u^2) = T \\
 | & & | \\
 M & \longrightarrow & M/(u^2) \\
 | & & | \\
 (u) & \longrightarrow & (u)/(u^2) \\
 | & & | \\
 (u^2) & \longrightarrow & (\bar{0})
 \end{array}$$

No diagrama acima,  $M/(u^2)$  é o único ideal primo não nulo do anel  $T = A/(u^2)$ , pois se houvesse um outro  $N/(u^2)$  deveríamos ter  $N/(u^2) \subset M/(u^2)$  e sua pré-imagem  $N$  (um ideal primo de  $A$ ) deveria conter  $(u^2)$ , isto é,  $u^2 = x^{2n} \in N$  e portanto  $x \in N$ , e assim  $M$  não seria minimal sobre  $(x)$ . Portanto  $\dim T = 0$  e, é claro,  $T$  é noetheriano.

Por (1.5.8) qualquer  $T$ -módulo finitamente gerado tem comprimento finito.

Considere o  $A$ -módulo  $(u, y)/(u^2)$ , cujo anulador é  $(u^2)$ : podemos pensá-lo como um  $A/(u^2)$ -módulo, isto é, como um  $T$ -módulo. O mesmo se passa com  $(u^2, y)/(u^2)$ .

Então, desde que  $(u, y)/(u^2)$  e  $(u^2, y)/(u^2)$  são isomorfos "por pedaços" (3.2.1) devem ter o mesmo comprimento.

Assim, temos:  $(u, y) = (u^2, y)$ , isto é,

$$u \in (u^2, y) \quad \text{e portanto}$$

$u = ru^2 + sy$  para algum  $r, s \in A$ . Donde concluímos que  $(1 - ru)u \in (y)$ , e como  $u = x^n \in M = J(A)$  segue-se que  $1 - ru$  é unidade de  $A$  (1.1.11) e portanto  $u \in (y) \subset Q$ .

Assim,  $u = x^n \in Q = x \in Q$  uma contradição pois  $M$  é minimal sobre  $(x)$ .

### 3.2.3 COROLÁRIO (TEOREMA do IDEAL PRINCIPAL de KRULL)

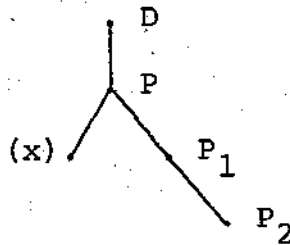
Seja  $D$  um anel noetheriano,  $x \neq 0$  uma não-unidade de  $D$  e  $P$  um ideal primo minimal sobre o ideal  $(x)$ . Então posto  $P \leq 1$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Se supomos o contrário, existem  $P_1$  e  $P_2$  ideais primos de  $D$  tal que :

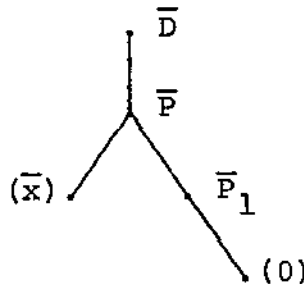
$$P \supset P_1 \supset P_2 \quad (\text{inclusão estrita})$$

e de tal modo que  $x \notin P_2$ , conforme diagrama:



Consideremos o quociente  $D/P_2 = \bar{D}$ . Como  $D$  é noetheriano (1.5.4)  $\bar{D}$  é um domínio noetheriano.

A aplicação de (1.1.15) nos assegura que o ideal  $\bar{P} = P/P_2$  é minimal sobre  $(\bar{x}) = (x)/P_2$ . Ao final teríamos a seguinte situação:



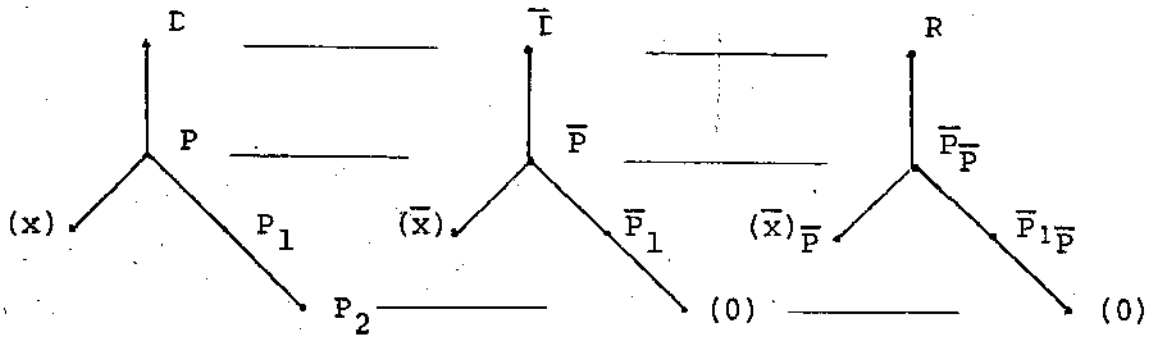
com  $\bar{P}$  minimal sobre  $(\bar{x})$  e  $\bar{D}$  um domínio noetheriano.

Façamos agora uma localização em  $\bar{P}$ , isto é, consideremos

$$R = \bar{D}_{\bar{P}}$$

Por (1.5.5)  $R$  é um domínio noetheriano local com ideal maximal  $\bar{P}_{\bar{P}}$ . Dado que existe uma correspondência (que preserva a ordem) entre ideais primos de  $\bar{D}$  contidos em  $\bar{P}$  e ideais primos de  $R$  (1.1.25) segue que  $\bar{P}_{\bar{P}}$  é minimal sobre  $(\bar{x})_{\bar{P}}$ .

O diagrama a seguir resume o que fizemos:



Mas nesta situação final aplica-se o lema anterior (3.2.2) e não podemos ter

$$\bar{P}_P \supset \bar{P} \supset (0)_{\bar{P}}$$

é conseqüentemente não podemos ter

$$P \supset P_1 \supset P_2$$

donde segue que posto  $P \leq 1$ .

#### 3.2.4 LEMA

Sejam  $P, Q$  ideais primos num anel noetheriano  $A$  com  $P \subset Q$ . Se existe  $I$  ideal primo de  $A$  com  $P \subset I \subset Q$  (inclusão estrita) então existe uma infinidade deles na mesma situação.

DEMONSTRAÇÃO:

A passagem a  $A/P$  (o que mantém todas as hipóteses) permite que consideremos  $P = (0)$ .

Se aceitarmos a existência de um número finito

$$P_1, P_2, \dots, P_n$$

de ideais primos tal que

$$(0) \subset P_i \subset Q \quad (\text{inclusão estrita})$$

então, por (1.1.7) não podemos ter  $Q \subset \bigcup_1 P_i$  de modo que podemos obter  $x \in Q, x \notin P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Mas então  $Q$  é minimal sobre  $(x)$  e a suposição

de que existe  $I$  tal que  $Q \supset I \supset (0)$  nos fornece posto de  $Q \geq 2$ , em contradição ao Teorema do Ideal Principal de Krull.

### 3.2.5 LEMA

Seja  $A$  um domínio noetheriano. Suponhamos que  $A$  tem um número infinito de ideais primos minimais. Então a intersecção deles é o ideal  $(0)$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $\{P_i, i \in A\}$  o conjunto dos ideais primos minimais de  $A$ , com  $|A| = \infty$ .

Se  $0 \neq x \in P_i$  então  $P_i$  é minimal sobre  $(x)$  para todo  $i \in A$  em contradição com (1.5.10).

### 3.2.6 TEOREMA

Um domínio noetheriano  $A$  é um  $G$ -domínio se, e somente se,  $\dim A \leq 1$  e  $A$  tem só um número finito de ideais maximais.

DEMONSTRAÇÃO:

Se  $A$  é um  $G$ -domínio então  $P(A) \neq (0)$  e então  $A$  só pode ter um número finito de ideais primos minimais em conformidade com (3.2.5).

Suponha que exista algum ideal primo  $P$  de posto 2. Então existe  $Q$  tal que  $P \supset Q \supset (0)$  (inclusão estrita). Mas então (3.2.4) nos assegura a existência de uma infinidade de ideais nessa situação (minimais) em contradição com a primeira parte desta demonstração. Assim devemos ter  $\dim A \leq 1$  e todos os ideais minimais são maximais.

Reciprocamente, como  $\dim A \leq 1$  e  $A$  é domínio temos que  $(0)$  é ideal primo e toda cadeia maximal de ideais primos devem ter no máximo dois "elos", isto é, da forma

$$(0) \subset P$$

Assim, todo ideal primo não nulo é maximal e por hipótese,  $A$  só tem um número finito de ideais primos. Assim (2.1.5) nos garante que  $A$  é um  $G$ -domínio.



### 3.2.7 TEOREMA

Uma condição necessária e suficiente para que um anel noetheriano  $A$  seja um anel de Hilbert é: "Para todo ideal primo  $P$  tal que  $\dim(A/P) = 1$  existe uma infinidade de ideais maximais contendo  $P$ ".

#### DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $P$  tal que  $\dim(A/P) = 1$ . Como  $A$  é um anel de Hilbert,  $A/P$  é um anel de Hilbert. Se  $A/P$  tem só um número finito de ideais maximais, segue (3.2.6) que  $A/P$  é um G-domínio e portanto  $P$  é um G-ideal (2.2.1). Assim  $P$  é maximal e  $A/P$  é um corpo, donde  $\dim(A/P) = 0$ , um absurdo.

Reciprocamente, seja  $P$  um G-ideal de  $A$ . Então  $A/P$  é um G-domínio noetheriano e por (3.2.6)  $\dim(A/P) \leq 1$  e existe só um número finito de ideais primos em  $A/P$ . Mas então não pode ser  $\dim(A/P) = 1$  e portanto temos que  $\dim(A/P) = 0$  e  $A/P$  é corpo. Assim  $P$  é maximal e  $A$  é um anel de Hilbert.

### 3.3 HILBERT NULLSTELLENSATZ

Este parágrafo será dedicado ao "TEOREMA do NÚMERO de ZEROS" de Hilbert - o famoso HILBERT NULLSTELLENSATZ (Ver [5],[8])

Na pesquisa bibliográfica que empreendemos encontramos diversos enunciados equivalentes ao HILBERT NULLSTELLENSATZ. No próximo teorema provaremos todas essas formas.

#### 3.3.1 TEOREMA (HILBERT NULLSTELLENSATZ)

Seja  $K$  um corpo,  $L$  seu fecho algébrico e  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  um conjunto finito de indeterminadas sobre  $K$ . Então:

- i)  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  é um anel de Hilbert;
- ii) Se  $M$  é um ideal maximal de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  então

$$T = K[x_1, x_2, \dots, x_n]/M$$

é um corpo algébrico sobre  $K$  de  $\dim_K T = n + 1$ ;

iii) Seja  $B$  uma  $K$ -álgebra finitamente gerada. Se  $B$  é um corpo então  $B$  é uma extensão algébrica finita de  $K$ ;

iv) Os únicos ideais maximais de  $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$  são da forma  $(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$ , com  $a_i \in L$ ;

v) Sejam  $f, g_1, g_2, \dots, g_r \in L[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Se  $f$  se anula em todos os zeros comuns de  $g_1, g_2, \dots, g_r$  então existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n \in (g_1, g_2, \dots, g_r)$ ;

vi) As polinomiais  $f_1, f_2, \dots, f_r \in L[x_1, x_2, \dots, x_n]$  não tem zeros comuns se, e somente se,  $(f_1, f_2, \dots, f_r)$  coincide com  $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

DEMONSTRAÇÃO:

i) Como  $K$  é um corpo, é um anel de Hilbert. Mas então (3.1.13) nos garante que  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  é um anel de Hilbert;

ii) Inicialmente temos  $M \cap K = (0)$  donde segue que  $K/(M \cap K) \cong K$ .

Considere agora

$$K \xrightarrow{i} K[x_1, x_2, \dots, x_n] \xrightarrow{\phi} T = K[x_1, x_2, \dots, x_n]/M$$

onde  $i$  é a inclusão e  $\phi$  é o homomorfismo natural. Se  $h = \phi \circ i$  temos que  $h$  é um homomorfismo injetor (pois  $M \cap K = (0)$ ) o que permite considerar  $K$  como subcorpo de  $T$ .

Agora,

$$\begin{aligned} T = K[x_1, x_2, \dots, x_n]/M &\cong (K/M \cap K)[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n] \\ &\cong K[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n] \end{aligned}$$

onde  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  são os  $M$ -resíduos de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  isto é,  $\bar{x}_i = x_i + M$ .

Assim  $T$  é uma extensão de anéis finitamente gerada de  $K$  e uma aplicação de (2.1.13) fornece  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  algébricos sobre  $K$ .

Como  $\beta = \{1, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$  é uma base para o espaço vetorial  $T$  sobre o corpo  $K$ , temos  $\dim_K T = n + 1$ ;

iii) Como  $B$  é uma  $K$ -álgebra finitamente gerada, por definição, existe  $h : K[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow B$ , um homomorfismo sobrejetor. Como  $B$  é corpo e

$$B \cong K[x_1, x_2, \dots, x_n]/\text{Ker } h$$

segue que  $\text{ker } h$  é maximal. Assim, valem as hipóteses de (ii) e  $B$  é uma extensão algébrica finita de  $K$ ;

iv) Por (1.4.12) os ideais  $(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$  são maximais em  $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Resta mostrar que um ideal maximal  $M$  de  $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$  é da forma em questão.

Utilizaremos indução sobre  $n$ .

Para  $n = 1$  o resultado é imediato (1.4.11).

Admitamos o resultado válido para todo  $k < n$  e seja  $R = L[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ .  $R$  é um anel de Hilbert por (i).

Se  $M$  é um ideal maximal de  $\mathbb{K}[x_n]$  então o ideal  $N = M \cap R$  é maximal (3.1.9). Pela hipótese de indução temos:

$$N = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_{n-1} - a_{n-1})$$

Mas então (2.2.8)  $M$  pode ser gerado por  $N$  e mais um elemento  $f$  de  $R[x_n]$  tal que a imagem de  $f$  em  $(R/N)[x_n] \cong L[x_n]$  por (ii) seja irredutível. Portanto  $f = x_n - a_n$  com  $a_n \in L$  e então

$$M = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$$

v) Se  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in L^n$  é um zero comum de  $g_1, g_2, \dots, g_r$  então  $f, g_1, g_2, \dots, g_r \in (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$  um ideal maximal de  $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$  e portanto  $f$  pertence a todo ideal maximal de  $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$  que contem o ideal  $I = (g_1, g_2, \dots, g_r)$  e conseqüentemente à intersecção desses ideais maximais. Por (2.2.5) a intersecção de todos os ideais maximais (ou de  $G$ -ideais, no caso) é o radical de  $I$ . Assim  $f \in r(I)$  e portanto existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$f^n \in I = (g_1, g_2, \dots, g_r)$$

vi) Se  $(f_1, f_2, \dots, f_r) \neq L[x_1, x_2, \dots, x_n]$  existe um ideal maximal  $M$  de  $L[x_1, x_2, \dots, x_n]$  tal que

$$(f_1, f_2, \dots, f_r) \subset M$$

Como  $M = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$  segue que  $f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, r$  e portanto as polinomiais em questão tem um zero em comum.

### 3.3.2 COROLÁRIO

Seja  $K$  um corpo algebricamente fechado e seja  $R = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Sejam  $f_1, f_2, \dots, f_r \in R$ . As equações  $f_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) tem solução comum se, e somente se, não existem  $g_1, g_2, \dots, g_r$  elementos de  $R$  com

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_r g_r = 1$$

DEMONSTRAÇÃO:

Se as equações  $f_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ )

não tem solução comum então (3.3.1, vi) devemos ter que

$$(f_1, f_2, \dots, f_r) = R$$

e portanto existem  $g_i \in R$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) tal que

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_r g_r = 1$$

Por outro lado, se  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  é uma solução comum de  $f_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) então para todo  $g_i \in R$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) teremos:

$$1 = \sum_{i=1}^n f_i(a_1, a_2, \dots, a_n) g_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

o que é uma contradição.

### 3.3.3 PROPOSIÇÃO

Seja  $K$  um corpo (não necessariamente algebricamente fechado). Então um ideal maximal de  $R = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  pode ser gerado por  $n$  elementos.

DEMONSTRAÇÃO:

Faremos a demonstração por indução sobre  $n$ .

Se  $n = 1$  temos que  $K[x_1]$  é um PID e portanto um ideal maximal é gerado por um elemento.

Assumindo o resultado para todo  $k < n$  temos:

$$R = K[x_1, x_2, \dots, x_n] \cong K[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}][x_n]$$

onde lembramos que  $R$  e  $K[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  são anéis de Hilbert.

Se  $M$  é um ideal maximal de  $R$ , temos:

$$M \cap K[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}] = N$$

é maximal em  $K[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$  (3.1.9) e pela hipótese de indução é gerado por  $n-1$  elementos. Finalmente, por (2.2.8)  $M$  pode ser gerado por  $N$  e mais um elemento  $f \in R$  e portanto  $M$  é gerado por  $n$  elementos.

### 3.3.4 PROPOSIÇÃO

Seja  $A$  um anel de Hilbert tal que todo ideal maximal de  $A$  pode ser gerado por  $k$  elementos. Então qualquer ideal maximal de  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  pode ser gerado por  $k + n$  elementos.

### DEMONSTRAÇÃO:

Faremos a demonstração por indução sobre  $n$ .

Se  $n = 1$  então, como  $A$  e  $A[x_1]$  são anéis de Hilbert, a contração de um ideal maximal  $M$  de  $A[x_1]$  em  $A$  é maximal (3.1.9). Assim, (2.2.8) se aplica e  $M$  pode ser gerado por  $k + 1$  elementos.

Assuma-se o resultado para todo  $k < n$  e proceda-se como no lema anterior.

### 3.3.5 PROPOSIÇÃO

Seja  $M$  um ideal maximal em  $T = A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  tal que  $M \cap A = (0)$ . Então  $M$  pode ser gerado por  $n + 1$  elementos.

### DEMONSTRAÇÃO:

Por (2.1.15)  $A$  é um G-domínio e então  $K$ , o corpo quociente de  $A$  é tal que  $K = A[u^{-1}]$  com  $u \in A$ ,  $u \neq 0$ .

Como  $u \in A \subset T$  temos  $\bar{u} \in T/M$  e  $\bar{u} \neq 0$  (pois por hipótese  $M \cap A = (0)$ ). Assim, existe  $\bar{g} \in T/M$  tal que  $\bar{u}\bar{g} = \bar{1}$  o que nos permite considerar  $g \in T$  de modo que  $ug - 1 \in M$ .

Seja  $S = T/(ug-1)$  e  $\phi: K \rightarrow S$  definida por:

$$\phi(r) = \bar{r} = r + (ug-1) \text{ para todo } r \in A \quad \text{e}$$

$$\phi(u^{-1}) = \bar{g} = g + (ug-1), \text{ um homomorfismo não nulo.}$$

Então  $\phi$  é injetor (1.4.4) e portanto  $S$  contém uma cópia de  $K$ . Assim,  $S \cong \phi(K)[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n] \cong K[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]$  onde  $\bar{x}_i = x_i + (ug-1)$ .

Agora, se  $M$  é maximal em  $T$ , sua imagem em  $S$  é  $M/(ug-1)$  que é maximal pois:

$$[T/(ug-1)] / [M/(ug-1)] \cong T/M$$

que é um corpo. Agora, por (3.3.3)  $M/(ug-1)$  pode ser gerado por  $n$  elementos e conseqüentemente  $M$  pode ser gerado por  $n+1$  elementos.

## A P Ê N D I C E

### HILBERT NULLSTELLENSATZ e GEOMETRIA ALGÉBRICA

Neste apêndice provaremos alguns resultados elementares da Geometria Algébrica utilizando-nos dos resultados obtidos nos capítulos anteriores. Um dos objetivos deste apêndice é examinar as versões algebro-geométricas do HILBERT - NULLSTELLENSATZ ( Teorema A-5 e A-6 ).

Sejam:  $K$  um corpo algebricamente fechado,  $K^n$  o  $K$ -espaço vetorial das  $n$ -uplas sobre  $K$  e  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  o anel dos polinômios em  $n$  variáveis sobre  $K$ .

#### A.1 DEFINIÇÃO

Se  $I$  é um ideal de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , seja:

$$V(I) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n : f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0, \forall f \in I\}$$

O conjunto  $V(I)$  será denominado uma VARIEDADE ALGÉBRICA AFIM ou simplesmente VARIEDADE.

OBSERVAÇÕES: i) Se  $I = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  então  $V(I) = \phi$  ;

ii) Se  $I = (0)$  então  $V(I) = K^n$ .

#### A.2 DEFINIÇÃO

Se  $S \subset K^n$ , seja:

$$J(S) = \{f \in K[x_1, x_2, \dots, x_n] : f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \forall (a_1, \dots, a_n) \in S\}$$

O conjunto  $J(S)$  denomina-se IDEAL da variedade  $S$ .

OBSERVAÇÕES: i) Se  $S = K^n$  então  $J(S) = (0)$ ;

ii) Se  $S = \phi$  então  $J(S) = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

#### A.3 LEMA

Com as notações anteriores, temos:

i) Se  $S \subset K^n$  então  $J(S)$  é um ideal de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$

ii) Se  $S \subset T$  então  $J(T) \subset J(S)$ ;

iii) Se  $P \subset Q$  são ideais de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  então vale  $V(Q) \subset V(P)$ ;

iv) Se  $I$  é um ideal de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  então temos  $J(V(I)) \supset I$ ;

v) Se  $S \subset K^n$  então  $V(J(S)) \supset S$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Imediatas, a partir das definições.

A.4 LEMA

Nas notações anteriores, temos:

i)  $V(I) = V(r(I))$ , para todo  $I$  ideal de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ;

ii)  $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$  para todos  $I, J$  ideais de

$K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ;

iii)  $V(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} V(I_\alpha)$  onde  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  é uma família de ideais de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

DEMONSTRAÇÃO:

i) Como  $I \subset r(I)$  temos  $V(I) \supset V(r(I))$  por (A.3 ii).

Por outro lado, se  $P \in V(I)$  então  $f(P) = 0$  para todo  $f \in I$  donde  $g(P) = 0$  para todo  $g \in r(I)$  já que  $g^n \in I$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , e  $g^n(P) = [g(P)]^n = 0$  o que fornece  $g(P) = 0$ .

Assim,  $V(I) \subset V(r(I))$  e temos a igualdade.

ii) Como  $I \cap J \subset I$  e  $I \cap J \subset J$  temos (A.3, iii) que  $V(I \cap J) \supset V(I)$  e  $V(I \cap J) \supset V(J)$  donde  $V(I \cap J) \supset V(I) \cup V(J)$ .

Reciprocamente, se existe  $P \in V(I \cap J) - V(I) \cup V(J)$  então existem  $g \in I$  e  $h \in J$  tal que  $g(P) \neq 0$  e  $h(P) \neq 0$ , mas com  $f = gh \in IJ \subset I \cap J$ . Mas então temos  $f(P) = g(P)h(P) = 0$  o que implica  $g(P) = 0$  ou  $h(P) = 0$ , um absurdo. Assim, temos:

$$V(I \cap J) \subset V(I) \cup V(J).$$

iii) Como  $I_\alpha \subset \sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$ , para todo  $\alpha \in \Lambda$  temos que (A.3)

$$V(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha) \subset \bigcap_{\alpha} V(I_\alpha).$$

Seja  $P \in \bigcap_{\alpha} V(I_\alpha)$ . Se  $g \in \sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$  então  $g = \sum t_\alpha f_\alpha$  onde  $t_\alpha \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  e  $f_\alpha \in I_\alpha$  e todos os  $t_\alpha$  são nulos, exceto um número finito. Mas nessas condições, temos:

$$g(P) = \sum t_\alpha(P) f_\alpha(P) = 0$$

e daí segue que  $P \in V(\sum_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha)$ .

OBSERVAÇÃO: Seja  $T = \{V(I) : I \text{ é um ideal de } K[x_1, x_2, \dots, x_n]\}$ . Então  $(K^n, T)$  é um espaço topológico onde os  $V(I)$  são os fechados de  $K^n$ .



### A.5 TEOREMA ( Forma Fraca do HILBERT NULLSTELLENSATZ)

Seja  $I$  um ideal próprio de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Então  $V(I) \neq \emptyset$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Como  $I \neq K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  existe um ideal maximal  $M$  de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  tal que  $I \subset M$ . É bastante provar que  $V(M) \neq \emptyset$  pois  $V(M) \subset V(I)$ .

Mas (3.3.1, iv)  $M = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$  onde  $a_i \in K$ , e é imediato que  $V(M) = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)\}$ .

### A.6 TEOREMA ( Forma Forte do HILBERT NULLSTELLENSATZ)

Seja  $I$  um ideal próprio de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Então  $J(V(I)) = r(I)$ .

DEMONSTRAÇÃO:

Por (A.3, iv) e (A.4, i) temos:

$$r(I) \subset J(V(r(I))) = J(V(I))$$

Por outro lado observamos que  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  é um anel de Noetheriano (1.5.6) e portanto  $I$  é finitamente gerado (1.5.3), digamos:

$$I = (g_1, g_2, \dots, g_r)$$

onde  $g_i \in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

Se  $f \in J(V(I))$  então  $f(P) = 0$  para todo ponto  $P \in V(I) = V(g_1, g_2, \dots, g_r)$ . Por (3.3.1, v) existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n \in I = (g_1, g_2, \dots, g_r)$  e daí  $f \in r(I)$ .

### A.7 PROPOSIÇÃO

i) A aplicação  $V : I \rightarrow A$  é uma correspondência biunívoca entre o conjunto  $I$  dos ideais radicais  $I$  e o conjunto  $A$  das variedades algébricas afins.

ii)  $V = VJV$  e  $J = JVJ$

DEMONSTRAÇÃO:

ii) Como  $V(J(V(I))) = V(r(I)) = V(I)$  por (A.6) e (A.4, i), para todo ideal  $I$ , temos:

$$VJV = V$$

Tambem, para  $V(I) \in A$ , temos:

$$J(V(I)) = J(VJV(I)) = JVJ(V(I))$$

e então

$$JVJ = J$$

i) Se  $V(I) \in A$  então  $J(V(I))$  é (A.3,i) um ideal de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Dai (A.6) temos que

$$r(J(V(I))) = JV(JV(I)) = JVJ(V(I)) = J(V(I)) \text{ por ii}$$

Daí,  $J(V(I)) \in I$  e  $V(J(V(I))) = V(I)$  e a aplicação é sobre.

Se  $V(I) = V(K)$  onde  $I, K \in I$ , isto é,  $I = r(I)$  e  $K = r(K)$  então:

$$I = r(I) = J(V(I)) = J(V(K)) = r(K) = K$$

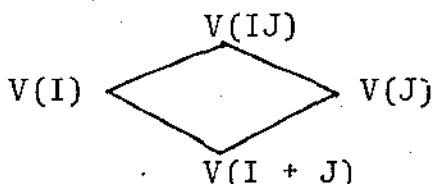
e a aplicação é injetora.

OBSERVAÇÃO: Os conjuntos  $A$  e  $I$  são latice completos, como veremos:

$$\text{Sejam: } V(I) \wedge V(J) = V(I + J) \quad e$$

$$V(I) \vee V(J) = V(IJ)$$

Com isso teremos:

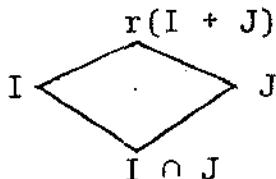


Para ideais radicais sejam:

$$I \wedge J = I \cap J \quad e$$

$$I \vee J = r(I + J)$$

Com isso teremos:



Assim sendo,  $A$  o conjunto das variedades algébricas afins é um latice, bem como o conjunto  $I$  dos ideais radicais.

Tais lattices são completos pois se  $A \subset A$  e  $B \subset I$ , então  $A$  e  $B$  tem ínfimos e supremos, os quais são:

- i) O ínfimo de  $A$  é  $V(\bigcap I_\alpha)$  onde  $V(I_\alpha) \in A$ , para todo  $\alpha$ ;
- ii) O supremo de  $A$  é  $V(\bigcup I_\alpha)$
- iii) O ínfimo de  $B$  é  $\bigcap I_\alpha$ , onde  $I_\alpha \in B$  para todo  $\alpha$ .
- iv) O supremo de  $B$  é  $r(\bigcup I_\alpha)$ .

#### A.8 DEFINIÇÃO

Uma variedade algébrica afim é IRREDUTÍVEL se, e somente se,  $V(I) = V(A) \cup V(B) \Rightarrow V(I) = V(A)$  ou  $V(I) = V(B)$ , onde  $V(A), V(B) \in \mathcal{A}$ .

#### A.9 PROPOSIÇÃO

Seja  $I$  um ideal radical de  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Então  $I$  é primo se, e somente se,  $V(I)$  é irredutível.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja  $I$  um ideal primo e suponha que

$$V(I) = V(A) \cup V(B) = V(A \cap B) \quad (A.4)$$

Por (A.6) temos:

$$I = r(I) = J(V(I)) = J(V(A \cap B)) = r(A \cap B) \supset A \cap B \supset AB.$$

Então  $A \subset I$  ou  $B \subset I$  pois  $I$  é primo. Daí, (A.3)  $V(I) \subset V(A)$  ou  $V(I) \subset V(B)$ . Como devemos ter  $V(I) = V(A) \cup V(B)$  segue que  $V(I) = V(A)$  ou  $V(I) = V(B)$ .

Reciprocamente, se  $I$  não é primo, seja  $fg \in I$  com  $f \notin I$  e  $g \notin I$ . Provaremos que

$$V(I) = [V(I) \cap V(f)] \cup [V(I) \cap V(g)]$$

onde  $V(f) = V((f))$  e  $V(g) = V((g))$ .

A inclusão  $\supset$  vale trivialmente.

Por outro lado, se  $P \in V(I)$  então  $(fg)(P) = 0$  e portanto  $f(P).g(P) = 0$  acarretando  $f(P) = 0$  ou  $g(P) = 0$ .

Assim, temos que  $P \in V(f)$  ou  $P \in V(g)$  e portanto  $P \in V(I) \cap V(f)$  ou  $P \in V(I) \cap V(g)$  e finalmente

$$P \in [V(I) \cap V(f)] \cup [V(I) \cap V(g)]$$

Agora é fácil ver que  $V(I + (f)) \neq V(I)$  e também  $V(I + (g)) \neq V(I)$  pois se tivéssemos  $V(I + (f)) = V(I) \cap V(f) = V(I)$  então  $V(I) \subset V(f)$  e assim  $f \in J(V(I)) = r(I) = I$  o que é um absurdo.

Assim concluimos que  $V(I)$  não é irredutível.

#### A.10 COROLÁRIO

i) A aplicação  $V : \mathcal{P} \rightarrow A_I$  é uma correspondência biunívoca entre o conjunto  $\mathcal{P}$  dos ideais primos de  $I$  e o conjunto  $A_I$  das variedades algébricas afins irredutíveis;

ii) A aplicação  $V : M \rightarrow \mathcal{P}$  é uma correspondência biunívoca entre o conjunto  $M$  de ideais maximais de  $I$  e o conjunto  $\mathcal{P}$  de pontos de  $K^n$ .

DEMONSTRAÇÃO:

i) A.9

ii) (3.3.1, iv)

## B I B L I O G R A F I A

- [ 1 ] ATIYAH, M.F. e MACDONALD, H.G. Introduction to Commutative Algebra. Addison Wesley (1.969) London
- [ 2 ] BOURBAKI, N. Elements of Mathematics, Commutative Algebra. Hermann (1.972) Paris.
- [ 3 ] GILMER, R. The Pseudo-radical of a Commutative ring Pac.J.Math 19 (1.966), 275-284
- [ 4 ] GILMER, R. Multiplicative Ideal Theory. Marcel Dekker. (1.972) New York
- [ 5 ] GOLDMAN, O. Hilbert Rings and the Nullstellensatz. Math. Z. 54 (1.951) 136-140
- [ 6 ] HERSTEIN, I.N. Topics in Algebra. Blaisdell (1.965) New York
- [ 7 ] KAPLANSKY, I. Commutative Rings. Allyn Bacon, Boston Mass.(1.970)
- [ 8 ] KRULL, W. Jacobsonche Ringe; Hilbertscher Nullstellensatz Dimensionstheorie. Math. Z. 54 (1.951) 354-387
- [ 9 ] LANG, S. Algebra. Addison Wesley Reading Mass.(1.967)
- [ 10 ] MONTEIRO, L.H.J. Elementos de Algebra. Livros Técnicos e Científicos Editora S/A. Rio de Janeiro (1.974)
- [ 11 ] NAGATA, M. Local Rings. New York Interscience (1.962)