

MODELOS DISCRETOS EM ECOLOGIA MATEMÁTICA

SÍLVIA MARTORANO RAIMUNDO

*Este exemplar corresponde a redação final do Tese devidamente corrigida e defendida pela Seta Sílvia Martorano Raimundo e aprovada pela Comissão Julgadora.*

  
Orientador: Prof. Dr. ALEJANDRO B. ENGEL

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

dezembro/86

**UNICAMP**  
**BIBLIOTECA CENTRAL**

T  
R133m  
BC/7655

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

a Ivo e Gilda, meus pais  
a Américo e Ângela, meus avós

Agradeço:

Ao prof. dr. Alejandro B. Engel por sua amizade e segura orientação na elaboração deste trabalho.

A Maria Adélia por sua ajuda sempre presente.

Ao Ivo e aos amigos que comigo estiveram no decorrer destes anos.

A FAPESP e à CAPES que possibilitaram a realização deste trabalho com apoio financeiro.

## INTRODUÇÃO

A proposta de estudo deste trabalho, é a de analisar Modelos Matemáticos em Ecologia. Nesta análise, o enfoque matemático terá uma certa prioridade sobre o ecológico, pois num estudo de modelos de população o nível da análise que se atinge, ao considerar-se todas as variáveis para descrever as situações reais pode, muitas vezes, ser complexo.

O que se pode fazer para contornar tal complexidade, é elaborar certas simplificações que, em geral, não expressam a realidade com exatidão, mas com toda certeza, fornecem instrumentos para se compreender o que ocorre na natureza. Desta forma, através das simplificações, cria-se uma imagem deformada da realidade que denominamos modelo. Simultaneamente, um impasse também está criado, pois quanto maior for a semelhança destes modelos com a realidade, maior é a chance de torná-los incompreensíveis, e quanto maior forem as suas simplificações, maior será a probabilidade de distorção em suas análises.

Surge daí, a necessidade de sistematizar estes modelos, a fim que se obtenha deles, uma coerência entre os seus resultados e a realidade que se observa. E neste contexto é que a matemática surge, e com suas "leis" impõe uma harmonia entre os seus modelos e a natureza

que estes descrevem; tornando-se portanto, um instrumento dinâmico e necessário para descrever as situações reais que envolvem a dimensão de "tempo".

Por outro lado, o fator tempo, por ordenar os fatos e dar então a idéia de que, a todo instante existe um tempo que antecede e outro que sucede, torna-se também um parâmetro importante para se entender o significado dos modelos matemáticos. Embora uma das tendências do ser humano seja a de sentir o tempo como um parâmetro contínuo, em se tratando da realidade ecológica, os modelos mais adequados parecem ser os modelos discretos.

Os modelos de população existem nestas duas formas: aqueles que usam o tempo como uma variável contínua, e os que usam o tempo como uma variável discreta. Apesar de ambos os tipos terem suas vantagens, o comportamento real de uma população ecológica parece ser em tempo discreto, e portanto, o nosso estudo será apresentado enfatizando-se este tempo. E se supormos então que as variáveis variam discretamente e não continuamente, as equações de diferenças, ao invés das equações diferenciais, é que são apropriadas para expressar as relações entre as mudanças que ocorrem no tempo.

Dentro deste contexto, o estudo a seguir concentrar-se-á numa análise teórica dos mecanismos matemáticos envolvidos na dinâmica de modelos populacionais em tempo discreto. Tais mecanismos estão relacionados com o comportamento de uma população no tempo e que, quando algum parâmetro do modelo é variado, o sistema muda de comportamento.

Historicamente, pode-se dizer que a Ecologia Matemática teve sua origem em 1798, com a publicação de "An Essay on the Principle of Population", escrito por Thomas Robert Malthus. Nesta ocasião, a pro-

dução capitalista deslanchava através do trabalho assalariado e da mecanização fabril. Deste avanço, gerava-se a pauperização de grandes massas que, não sendo imediatamente incorporadas no proletariado em formação, apareceram para Malthus como um excedente populacional.

Diante deste quadro, Malthus não se manteve neutro, e certo da inevitável pobreza, defendeu a plena formação do mercado de trabalho com base em suas elaborações teóricas. A concepção biológica da fecundidade ocupa lugar de destaque em sua teoria. A partir dela, ele pôde deduzir a tendência de crescimento geométrico da população em contra-partida ao ritmo aritmético da produção de alimentos, gerando desta forma, a superpopulação. A solução proposta por Malthus, apesar de reconhecida por ele como impraticável, era a de controlar a natalidade, inclusive referindo-se ao aborto, como uma das formas de se atingir tal controle. O teor político e social contido em sua teoria refletiu-se, não só na época que elas surgiram através das críticas feitas por Marx e Engels e na teoria de Darwin, como reflete-se também nos dias atuais. Isto, porque a natureza do ser humano continua a mesma e a população continua ainda crescendo em níveis mais elevados do que o crescimento da produção agrícola.

Assim, se no seu modelo, Malthus previa uma explosão exponencial da população, sem ao menos considerar nele os obstáculos que impediam tal crescimento, Verhulst (1845) por sua vez, através de um estudo a pedido do governo belga, descobre que estes fatores existem e no seu modelo, mostra que o crescimento populacional está inevitavelmente limitado por eles.

Enquanto Malthus e Verhulst consideraram em seus modelos a espécie única com o parâmetro tempo variando de forma contínua, o tra-

balho de seus sucessores, Alfred Lotka e Vito Volterra, foi a primeira tentativa que surgiu para representar e analisar as interações ecológicas entre duas espécies em tempo contínuo. Seus trabalhos enfatizaram a importância dos modelos matemáticos, e serviram para estimular novos caminhos para a teoria determinística da dinâmica populacional. Nesta teoria, a característica é que, dado o tamanho populacional em qualquer momento e os parâmetros do sistema, é possível determinar precisamente o comportamento subsequente do sistema.

Iniciando então seu estudo, através das questões biológicas com respeito a flutuações da população dos peixes no Mar Adriático, Volterra (1925) desenvolveu o que ainda se constitui a maior parte da teoria determinística da dinâmica de populações. Por outro lado, Lotka (1924), nos EUA, também já havia investigado um problema análogo, embora sob um contexto teórico diferente, pois tal problema era proposto na agricultura. E sem saber de Lotka, Volterra usa em seu modelo as mesmas equações diferenciais quadráticas para o predador e a presa que Lotka também já havia considerado, e estende tal tratamento de interações predador-presa para o caso de qualquer número de espécies.

Assim, surge o primeiro modelo contínuo onde se considera as formas de iterações entre duas espécies.

No que diz respeito a modelos discretos em Ecologia Matemática, os quais parecem descrever com maior exatidão o processo de crescimento ecológico pelas equações de diferenças, Robert May (1976), fez um estudo através de uma das formas de discretização, do modelo contínuo de Verhulst.

Neste seu modelo, a suposição básica é que a reprodução da espécie é sazonal e que as diversas gerações, que aparecem no tempo, não se superpõem. Achando as soluções de equilíbrio do modelo e conduzindo sua análise pelo caminho da linearização, May, através de seus estudos, mostra que uma simples equação de diferenças não linear pode possuir um extraordinário comportamento que vai de pontos estáveis, à uma hierarquia de bifurcações de ciclos estáveis, chegando então a um comportamento que, mesmo sendo determinístico possui uma infinidade de órbitas com diferentes períodos.

Li e Yorke (1975), caracterizaram tal região, denominando-a como uma região caótica. Seguindo o caminho de May, Feigenbaum (1980) formalizou que para todos os sistemas representados por equações de diferenças não lineares onde existe esta hierarquia de bifurcações através da dobra de período, o valor para o qual os períodos dobram pela  $n$ -ésima vez devem convergir para um certo valor  $\hat{\delta} = 4,669\dots$ . Tal constante  $\hat{\delta}$ , é universal e denominada como constante de Feigenbaum.

Assim, se algumas populações de espécie únicas não crescem continuamente no tempo, mas têm ciclos sincronizados de reprodução sazonal, é útil um modelo discreto onde as equações diferenciais do caso contínuo são transformadas em equações de diferenças. O mesmo pode também ser feito, para se construir um modelo que descreva a dinâmica de interações entre duas espécies.

J. Guckenheimer et alii [GOI], (1976), usando o modelo de Leslie (1945) para o caso de duas espécies, fizeram uma análise bastante elegante com respeito a tais formas de interação, considerando em seu modelo discreto o caso de uma única espécie com duas classes etárias.



Dentro de todo este contexto, e dando maior ênfase ao aspecto matemático do que ao ecológico, o estudo que será feito a seguir é uma análise das propriedades das equações de diferenças em uma variável, ou uma espécie (CAP.I) e em duas variáveis (CAP.III) passando por um estágio intermediário (CAP.II), onde será feita uma análise do modelo contínuo de Lotka-Volterra discretizado de forma análoga à que se encontra na literatura. Numa última análise, um estudo crítico das discretizações feitas no modelo contínuo de Verhulst (CAP.IV), mostra que a forma de discretização deste modelo comumente usada na literatura, não parece ser a mais apropriada.

## PARTE I

O estudo realizado neste capítulo tem como objetivo, além de analisar a forma contínua, também analisar a forma discreta de um modelo matemático da dinâmica de populações, proposto em 1845 pelo matemático belga Verhulst [VE]. Este modelo tem como base a evolução de uma espécie que, no sistema ecológico onde está inserida, não tem inimigos naturais, nenhuma outra espécie a usa como alimento e nem consegue competir com ela seja pelas fontes de alimento ou pelo espaço físico habitável. Em outras palavras, a espécie que estudaremos está "isolada" no sistema ecológico.

Dentro deste contexto, é especialmente significativo se ressaltar que, dificilmente uma espécie assim caracterizada faz parte dos sistemas ecológicos reais e, se por um lado as considerações acima são somente para fins de estudo, descrevendo apenas uma simplificação da realidade, um caso "ideal"; por outro, elas são o ponto de partida para o tipo de estudo que estamos pretendendo realizar. Mesmo que populações como a humana, por exemplo, não se encaixem dentro desta situação "ideal", elas estão bem perto de cumprirem tais condições; e neste sentido, os modelos "tipo Verhulst", têm tido bastante aplicações concretas.

Um outro ponto a ser comentado, é que sabemos que o tipo de realidade apresentado por toda população é a de ser composta por indivíduos que percorrem uma trajetória de comportamento bem determinístico, iniciando com o nascimento, passando por fases diversas de transformações biológicas e culminando com a morte; e que qualquer que seja essa trajetória, a população mantém-se por um processo de substituição de indivíduos pela sua reprodução biológica. Entretanto, para que todo esse processo ocorra, é necessário que a população saiba enfrentar e preservar-se dos inimigos que naturalmente existem, e que são obstáculos às suas necessidades biológicas de sobrevivência.

Diante disso, embora estejamos considerando nossa espécie como "isolada", a competição de indivíduos de outra espécie com indivíduos da espécie em estudo, a migração e todo tipo de interação estão na realidade acontecendo, o que de certa forma, é incorporado nas taxas de natalidade, mortalidade e competição intra-específica da espécie em questão. Caso tal fato não ocorresse, nosso estudo não teria nenhuma aplicação prática.

## CAPÍTULO I

O ponto de partida do estudo formal sobre a população data de 1798, ocasião em que se deu a publicação do primeiro ensaio de Thomas Robert Malthus [ML]. O princípio geral desta teoria, é que embora o crescimento da população seja limitado pelos meios de subsistência, ele é dotado de maior dinamismo do que o crescimento de tais meios ou, como dizia Malthus numa frase que se tornaria famosa: "enquanto os meios de subsistência crescem numa proporção aritmética, a população tende a multiplicar-se numa progressão geométrica". Isto levaria à duplicação da população em cerca de 25 anos, e à impossibilidade de obtenção, de forma contínua, de uma produção de alimentos equivalentemente ampliada. O corolário disso, consistia na necessidade de se reduzir o ritmo de crescimento da população através do controle da natalidade.

As idéias econômico-demográficas de Malthus tiveram, de imediato, uma enorme repercussão, principalmente por causa do teor político e pelo "alarme" quanto a uma suposta e posterior "explosão populacional". Neste sentido, sua maior contribuição não residiu tanto no conteúdo de sua teoria - visto por muitos como pouco original e tecnicamente discutível - mas na imensa polêmica que ela suscitou. Graças a

esta polémica, Malthus pode ser considerado um verdadeiro divisor de águas na história dos estudos demográficos. Infelizmente, o seu grande erro, foi o de não incorporar as limitações de recursos no seu modelo e somente considerá-las nas suas conclusões. Esta saturação populacional derivada da limitação dos recursos, foi estudada pelo matemático belga Verhulst, em 1845 [op. cit.], a pedido do governo da Bélgica que, preocupado com o crescimento populacional, solicitou-lhe uma previsão deste crescimento. Este modelo será desenvolvido a seguir, tanto na sua forma contínua, como na sua forma discreta.

### 1 - Modelo de Verhulst contínuo

No primeiro modelo da dinâmica de populações proposto por T. Malthus, admite-se que o crescimento de uma população está unicamente relacionado com a sua taxa de nascimento e morte; a variação populacional depende apenas do número de indivíduos da população. Dentro desta perspectiva, a equação que rege o crescimento de uma população de espécie única em função do tempo, segundo Malthus é:

$$\frac{dy}{dt} = B(y) - D(y) \quad (1.1)$$

onde  $B(y)$  é a taxa de nascimento,  $D(y)$  é a taxa de morte,  $y(t)$  é o tamanho da população. Entretanto,  $B(y)$  e  $D(y)$  dependem da distribuição de idades dentro da população, isto é, uma população com uma alta percentagem de idosos terá uma taxa maior de mortalidade e, consequentemente uma taxa de natalidade menor do que uma população de mesmo tamanho, com uma baixa percentagem de idosos. Assim sendo, é válido su-

por-se que, tanto a taxa de nascimento quanto a de morte, são proporcionais ao tamanho da população. Com isto, na expressão matemática do modelo de Malthus, tem-se:

$$B(y) = b y \quad , \quad D(y) = d y \quad (1.2)$$

onde  $b$  e  $d$  são constantes. Substituindo (1.2) em (1.1), obtemos a seguinte equação:

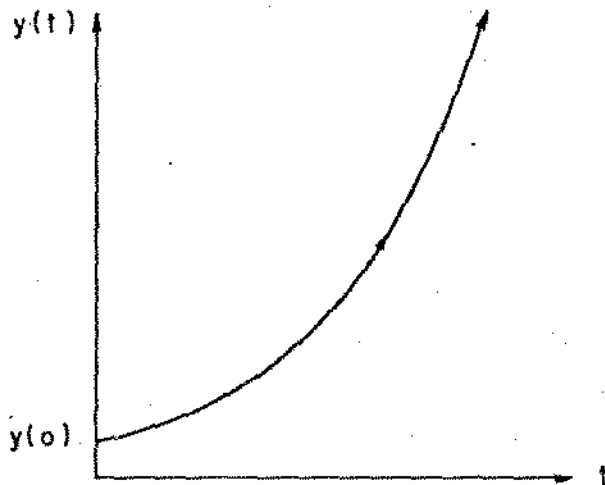
$$\frac{dy}{dt} = c y \quad (1.1)'$$

onde  $a = b - d$ , é a taxa de crescimento populacional.

O modelo (1.1)' tem como solução:

$$y(t) = y(0) \exp(ct) \quad (1.3)$$

Graficamente:



Neste modelo não se considera a geração espontânea da espécie, assim se para algum  $t(0)$ , tivermos  $y(t(0)) = 0$  (não existe indivíduos na espécie) então  $y(t) = 0$ , para todo  $t > t(0)$  (nunca existirá indivíduos na espécie).

A constante "c" sendo definida como a taxa de crescimento da espécie, não pode assumir valores negativos. Se isto ocorresse, então a taxa de morte seria maior que a de nascimento, e a população tenderia à extinção. Por outro lado, "c" não pode ser zero, pois isto implicaria numa taxa de nascimento igual a de morte, e embora esse caso seja o "ideal" para qualquer população já formada, na realidade ele não ocorre. Sendo assim, é interessante se analisar o modelo (1.1) apenas quando a constante "c" for positiva. Entretanto, uma população não pode variar exponencialmente para sempre; se a sua taxa de crescimento for positiva, a população tornar-se-ia tão grande que o meio ambiente não a suportaria. O erro de Malthus foi não considerar no seu modelo as limitações de recursos naturais, e devido a este erro, o modelo prevê uma explosão exponencial da população. Esta sobresimplificação da realidade foi corrigida por Verhulst, que incluiu um efeito inibidor na população evitando dessa forma, a superpopulação. A equação do crescimento populacional introduzida por Verhulst, é a seguinte:

$$\frac{dy}{dt} = A y - B y^2 \quad (1.4)$$

onde as constantes  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $A, B > 0$  significam:

$A$  = taxa de crescimento

$B$  = taxa de competição intra-específica

O termo  $-B y^2$  regula o crescimento populacional, que por sua vez atinge a saturação quando  $y = A/B$ , ou seja,  $A/B$  é a capacidade de suporte do meio ambiente.

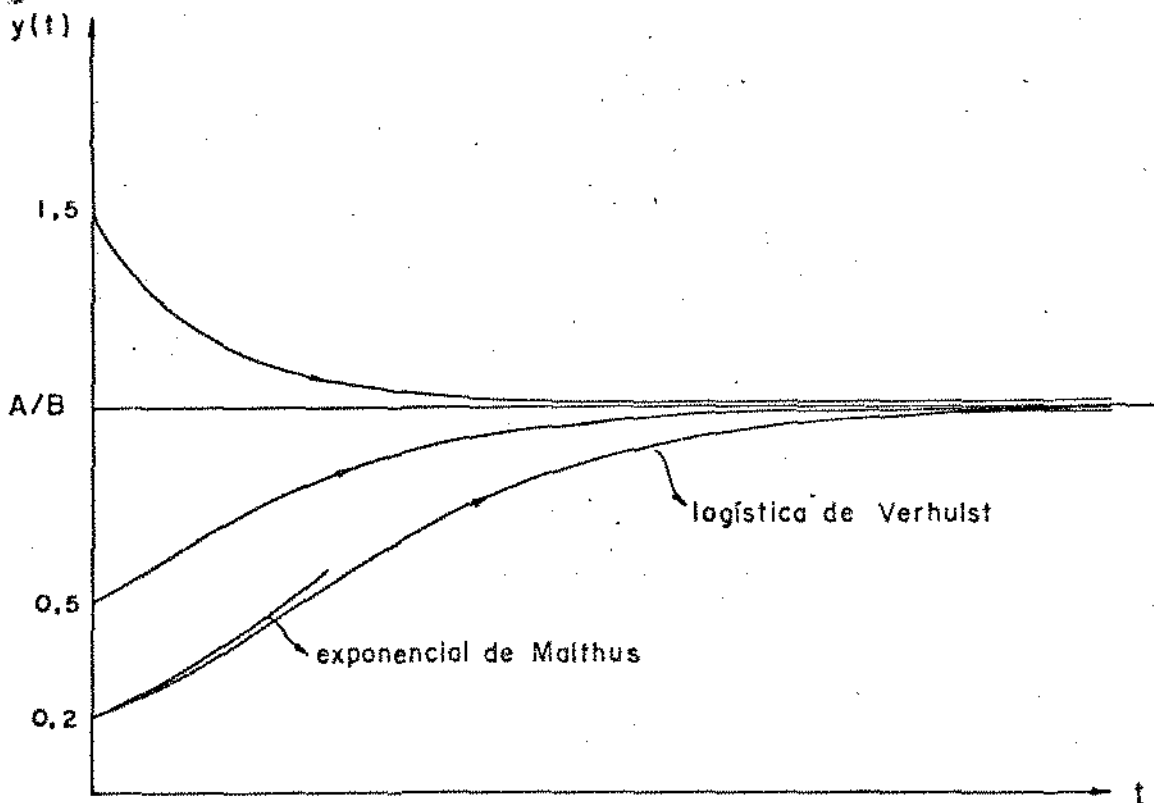
O modelo (1.4) tem como solução:

$$y(t) = \frac{A/B}{1 - \frac{e^{-At}}{C}}$$

(1.5)

$$C = \frac{y(0)}{y(0) - A/B}$$

que têm  $y = 0$  e  $y = A/B$  como assíntotas. Toda população inicial  $y(0)$  tende a  $A/B$  com  $t$  crescendo. Quando  $t > 0$ , é pequeno, e  $y(0) \ll A/2B$ , a logfstica praticamente coincide com a exponencial  $y(0)\exp(at)$ . Graficamente:





## 2 - Modelo de Verhusit discreto

Em geral, nos estudos populacionais a noção de tempo é de grande importância. Os coeficientes utilizados nestes estudos buscam medir a "velocidade" (com relação ao tempo), dos fenômenos que ocorrem numa população. A unidade de tempo (ano, mês, semana, etc.) considerada para tais fenômenos está de tal forma relacionada com a acentuada sazonalidade com que esses fenômenos ocorrem, que não é adequado fazer a análise de uma população onde essa sazonalidade se faz presente através de um modelo contínuo. Uma equação de diferenças será mais apropriada para tal caso.

Sendo assim, para o estudo que estamos pretendendo agora iniciar, será necessário se supor que as diversas gerações apareçam em intervalos regulares de tempo. Devemos considerar que a reprodução da espécie em questão, é a sazonal, onde as diversas gerações praticamente não se superpõem no tempo. Em geral, isso ocorre com insetos e certos tipos de viroses. A geração que deu origem as larvas, morre antes das mesmas eclodirem; sendo que estas eclodem num intervalo de tempo muito pequeno, quase sempre simultaneamente.

Portanto, supondo-se que as gerações apareçam em intervalos regulares no tempo, pode-se então discretizá-lo, já que entre um intervalo e o próximo seguinte, o crescimento da população fica estático. Neste sentido, queremos entender como o tamanho da população  $y(n+1)$ , na geração  $(n+1)$  está relacionada com o tamanho da população  $y(n)$ , na precedente geração  $(n)$ .

A discretização da equação contínua de Verhulst (1.4) pode ser feita de uma forma aproximada pela própria definição de derivada;

conhecida também na solução numérica de equações diferenciais, como o Método de Euler [CN]:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(n+1) - y(n)}{t(n+1) - t(n)} = Ay(n) - By^2(n) \quad (1.6)$$

Esta equação pode ser "normalizada" fazendo-se  $\Delta t = 1$ . Isto significa que a unidade de tempo do modelo, é o intervalo que separa uma geração da outra, no tempo. Assim, tem-se que:

$$y(n+1) - y(n) = A y(n) - B y^2(n)$$

$$y(n+1) = (A+1) y(n) - B y^2(n) \quad (1.7A)$$

A equação (1.7A) é uma equação de diferenças que relaciona a população no tempo "n" com a população no tempo "n+1" e pode ser levada a uma "forma padrão", como abaixo desenvolvido:

$$y(n+1) = y(n) [(A+1) - B y(n)]$$

$$y(n+1) = (A+1) y(n) \left[ 1 - \frac{B}{(A+1)} y(n) \right] \quad (1.7B)$$

Fazendo-se:

$$x(n) = \frac{B}{(A+1)} y(n)$$

Então

$$x(n+1) = \frac{B}{(A+1)} y(n+1) \quad (1.8A)$$

ou

$$y(n) = \frac{(A+1)}{B} x(n) \quad (1.8B)$$

$$y(n+1) = \frac{(A+1)}{B} x(n+1)$$

Substituindo (1.8B) em (1.7B) temos:

$$x(n+1) = (A+1) x(n) [1 - x(n)]$$

Tomando  $(A+1) = a$ , obtemos:

$$x(n+1) = a x(n) [1 - x(n)] = F(x(n)) \quad (1.9)$$

que é a forma padrão da equação discreta de Verhulst [FE, MY, GOI]. Note que "y" denota a população, e que "x" é apenas a "população normalizada" por (1.8A). Mesmo assim, e por abuso de linguagem chamaremos "x" de população.

Assim, a equação (1.9) é uma equação que, a partir de uma dada população inicial nos permite calcular recursivamente as populações que se sucedem: dado um valor conhecido de  $x(0)$ , por recursividade, calcula-se todos e cada um dos  $x(n)$ ,  $n > 0$ . Assim, com  $F(x)$  e com um valor inicial  $x(0)$ , tem-se  $x(1), x(2), \dots, x(n), \dots$  onde

$$x(1) = F(x(0))$$

$$x(2) = F(x(1))$$

$$x(3) = F(x(2))$$

.

.

.

$$x(n+1) = F(x(n))$$

.

.

A sequência de números gerados por este processo, deve ser necessariamente não negativa, pois pretende-se usar esse modelo representando o crescimento de uma população.

Mas, como podemos garantir então essa não negatividade dos  $x(i)$ 's ?

Para respondermos esta questão, vejamos quais as restrições que devemos impor a  $x(0)$ , para que  $x(1)$  seja não negativo.

Sabemos que  $A = a - 1$  é a taxa de crescimento da espécie, e por estar assim definida, deve ser positiva. Por outro lado, impondo-se  $x(1) \geq 0$ , tem-se de (1.9) :

$$0 \leq x(1) = a x(0) (1 - x(0))$$

e essa condição só é satisfeita quando  $a \geq 0$  e  $x(0) \leq 1$ . Entretanto, "a" deve ser maior que um, para a taxa de crescimento "A" ser positiva. Logo  $0 \leq x(0) \leq 1$  e  $a > 1$ .

Tem-se, por enquanto, que se  $0 \leq x(0) \leq 1$ , então  $x(1) \geq 0$ . De maneira análoga ao que foi feito para  $x(0)$ , se tivermos  $x(1) > 1$ ,  $x(2)$  será negativo. Logo, é necessário que  $0 \leq x(1) \leq 1$ . Assim também,  $x(3)$  só será não negativo se  $0 \leq x(2) \leq 1$ , e por sua vez cada  $x(n+1)$  só será não negativo se  $0 \leq x(n) \leq 1$ .

Neste contexto, a sequência de números gerados  $x(i)$ 's é não negativa se e somente se cada  $x(i)$  assumir valores em  $[0,1]$ . É necessário portanto, que  $F(x) = a x (1 - x)$  seja uma função definida no intervalo  $[0,1]$ , assumindo valores em  $[0,1]$ . E se  $F(x)$  é assim definida, então  $F^n(x) = F(F(\dots(F(x))\dots))$  será também uma função cujo domínio e contra-domínio são o intervalo  $[0,1]$ .

Portanto, como  $F(x) = a x (1 - x)$  é uma função contínua de  $[0,1]$  em  $[0,1]$  e como  $F(x)$  é diferenciável em  $(0,1)$ , tem-se as seguintes propriedades de  $F(x)$ :

1 ) Devido ao fato que  $F(0) = F(1) = 0$  então existe  $c \in (0,1)$  tal que  $F'(c) = 0$ .

Note que  $c = 1/2$ , pois sendo:

$$F(c) = a c (1 - c),$$

então,

$$F'(c) = a (1 - 2c)$$

donde

$$c = 1/2$$

Este ponto poderá ser de mínimo ou de máximo. Vejamos então a que ele corresponde, olhando-se para a derivada segunda de  $F(x)$ . Como  $F''(c) = -2a < 0$ , pois  $a > 1$ , temos que  $c = x(m) = 1/2$  é um ponto de máximo de  $F(x)$ .

E desde que em  $x(m) = 1/2$ ,  $F(x) : [0,1] \rightarrow [0,1]$ , atinge o valor máximo de  $a/4$ , será de nosso interesse analisar a equação (1.9) somente se  $a \leq 4$ .

Por outro lado, se  $a \in [0,1]$ , então  $A = a - 1 \leq 0$ , e biologicamente teríamos uma extinção populacional, pois todas as trajetórias seriam atraídas para  $x = 0$ . Portanto, para que essa extinção seja contornada é necessário fazer  $1 < a \leq 4$ .

ii ) A explicação sob o ponto de vista biológico, da necessidade de na equação (1.9) restringir-se os valores da variável  $x(n)$  ao intervalo  $[0,1]$ , é dada pelo fato de que caso  $x(n)$  seja maior que um,  $x(n+1)$  será negativo, todas as iterações subsequentes convergirão para  $-\infty$ , e a extinção populacional também será observada.

iii) Como  $F(0) = F(1) = 0$  e  $x(m) = 1/2$  é o único ponto de máximo de  $F(x) = a x (1 - x)$ , então  $F(x)$  cresce monotonicamente em  $(0, x(m))$  e decresce monotonicamente em  $(x(m), 1)$ .

iv ) Se  $1 < a \leq 4$ , então existe  $x^* \in (0,1)$  tal que  $F(x^*) = x^*$ .

Vejamos a demonstração desse fato.

Seja

$$G(x) = F(x) - x$$

Devemos mostrar que  $G(x) = 0$ , para algum  $x$  em  $(0,1)$ .

$$1^{\circ} : F(x(m)) \geq x(m) \quad , \quad 2 \leq a \leq 4$$

Como,

$$F(1) = 0$$

e

$$F(1/2) \geq 1/2$$

Isto, respectivamente, implica em:

$$G(1) = -1$$

e

$$G(1/2) \geq 0$$

Temos assim, uma função  $G(x)$  contínua no intervalo fechado  $[1/2, 1]$ , negativa para  $x = 1$ , e positiva ou nula para  $x = 1/2$ . Então,  $G(x)$  deve admitir o valor zero ao menos uma vez nesse intervalo. Portanto, deve existir um ponto  $x' \in [1/2, 1)$ , com

$$G(x') = F(x') - x' = 0$$

ou

$$F(x') = x'$$

$$2^{\circ} : F(x(m)) < x(m) \quad , \quad 1 < a < 2$$

Seja  $F(x)$  definida no intervalo fechado  $[0, x(n)]$ , com  $x(n)$  próximo de  $x = 0$ . Então existe  $x'(n) \in (0, x(n))$  tal que

$$\left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x'(n)} = \frac{F(x(n)) - F(0)}{x(n) - 0} = \frac{F(x(n))}{x(n)} > 1$$

pols  $\left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=0} = a > 1.$

Portanto  $F(x(n)) > x(n)$ , com  $x(n)$  próximo de  $x = 0$ .

Como

$$F(1/2) < 1/2 \Rightarrow G(1/2) < 0$$

e

$$F(x(n)) > x(n) \Rightarrow G(x(n)) > 0$$

então deve existir um ponto  $x'' \in (0, 1/2)$  com  $F(x'') = x''$ .

Concluimos assim, que existe  $x^* \in (0, 1)$  tal que  $F(x^*) = x^*$ . Em outras palavras,  $F(x)$  tem pelo menos um ponto fixo  $x^*$  em  $(0, 1)$ , que é um dos valores mais interessantes da variável  $x$ , pois é o ponto no qual a população atinge o equilíbrio; é o ponto que define um estado estacionário para o crescimento populacional.

Os pontos fixos (ou valores de equilíbrio) do modelo (1.9) podem ser determinados algebricamente ou graficamente. No primeiro caso faz-se:

$$x(n+1) = x(n) = x^*$$

e resolve-se a equação resultante:

$$x^* = F(x^*) = ax^*(1 - x^*) \quad (1.10)$$

No segundo caso, acha-se os pontos onde a curva  $F(x)$ , que leva  $x(n)$  em  $x(n+1)$ , intercepta a função identidade. Isto corresponde a idéia de crescimento populacional nulo.



De uma forma ou de outra, obtém-se que:

$$x^*(0) = 0$$

e

$$x^*(1) = 1 - 1/a$$

são os pontos fixos da equação (1.9).

Se  $0 < a \leq 1$ , tem-se que  $F(x) \leq x$ , e somente o ponto fixo  $x^*(0) = 0$  está no intervalo  $[0,1]$ , já que  $x^*(1) < 0$ , ao passo que para  $1 < a \leq 4$ , ambos os pontos fixos  $x^*(0) = 0$  e  $x^*(1) = 1 - 1/a$  estão nesse intervalo.

O gráfico da função  $F(x)$  para os vários valores de "a" é mostrado na FIG.1

Já foi visto que com  $F(x)$  e um valor inicial  $x(0)$ , analiticamente tem-se a sequência de números gerados:  $x(1)$ ,  $x(2)$ ,  $x(3)$ , ...,  $x(n)$ ... onde

$$x(1) = F(x(0))$$

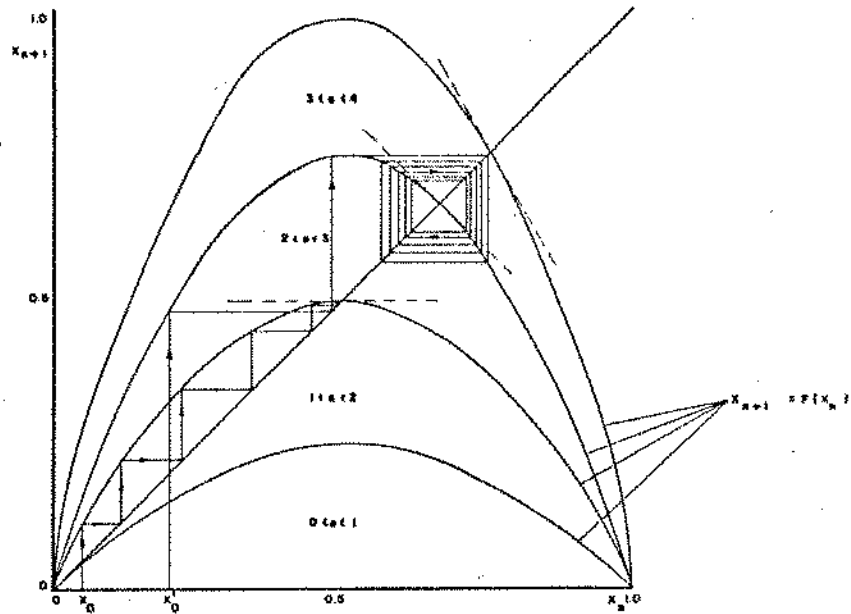
$$x(2) = F(x(1)) = F(F(x(0))) = F^2(x(0))$$

$$x(3) = F(x(2)) = F(F(x(1))) = F(F(F(x(0)))) = F^3(x(0))$$

Assim, o n-ésimo elemento na sequência é:

$$x(n) = F(F(\dots F(x(0)) \dots)) = F^n(x(0)),$$

(onde  $n$  é o número de aplicações de  $F$  e não a n-ésima potência de  $F$ )



$$F(x_n) = a \cdot x_n (1 - x_n)$$

$$x_0^n = 0$$

$$x_1^n = 1 - 1/a$$

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = a - 2ax$$

$$F'(x_1^n) = 2 - a$$

$$a = 1$$

$$x_0^n = x_1^n = 0$$

$$F'(x_1^n) = 1$$

$$a = 2$$

$$x_0^n = 0$$

$$x_1^n = 1/2$$

$$F'(x_1^n) = 0$$

$$a = 3$$

$$x_0^n = 0$$

$$x_1^n = 2/3$$

$$F'(x_1^n) = -1$$

$$a = 4$$

$$x_0^n = 0$$

$$x_1^n = 3/4$$

$$F'(x_1^n) = -2$$

FIG - 1

Seria interessante então determinarmos graficamente essa sequência.

Vejamos um exemplo, tomando  $a = 2$ .

Se iniciarmos o processo iterativo em  $x(0) = x^*(1) = 1/2$ , então  $x(1) = x(2) = \dots = 1/2$ . Similarmente, se  $x(0) = x^*(0) = 0$ , então  $x(1) = x(2) = \dots = 0$ , e o problema de calcularmos graficamente a  $n$ -ésima iteração é obviamente trivial.

Agora resta sabermos o que acontece, se  $x(0)$  não for ponto fixo. Analisar o gráfico de  $F(x)$  juntamente com a função identidade, é o caminho mais fácil. Escolhendo-se um  $x(0)$  que não é ponto fixo, a ordenada de  $F(x)$  em  $x(0)$  é  $x(1)$ . Para obtermos  $x(2)$ , o processo é análogo, ou seja, uma reflexão na função identidade é precisamente a operação usada. Desta forma, partindo-se de  $x(0)$ , sucessivamente, devemos: (1) mover verticalmente até o gráfico de  $F(x)$ , (2) mover horizontalmente até o gráfico da função identidade, (3) obter o valor de  $x(1)$ ,  $i=1,2,3,\dots,n,\dots$  movendo verticalmente até o eixo dos  $x$  (4) repetir os passos (1), (2) e (3).

A (FIG.2) descreve o processo para  $a = 2$ ,  $a = 3$  e as primeiras iterações de um  $x(0)$  escolhido arbitrariamente.

Para  $a = 2$ , se iniciarmos as iterações de qualquer  $x(0)$  no intervalo  $[0,1]$ ,  $x(n)$  convergirá para o ponto fixo  $x^*(1) = 1/2$ . Assim, para qualquer  $x(0)$  em  $[0,1]$  as iterações sempre convergem para  $x = x^*(1) = 1/2$  e sempre divergem de  $x^*(0) = 0$ . Neste contexto, o ponto fixo  $x^*(1)$  será denominado "atrator" ou "estável" e o ponto fixo  $x^*(0)$  será denominado "repulsor" ou "instável".

Surge então uma questão: o que faz  $x^*(0) = 0$  ser instável e  $x^*(1) = 1/2$  ser estável, quando  $a = 2$ ? De uma forma geral, a questão é sabermos o que faz um ponto fixo ser estável ou instável.

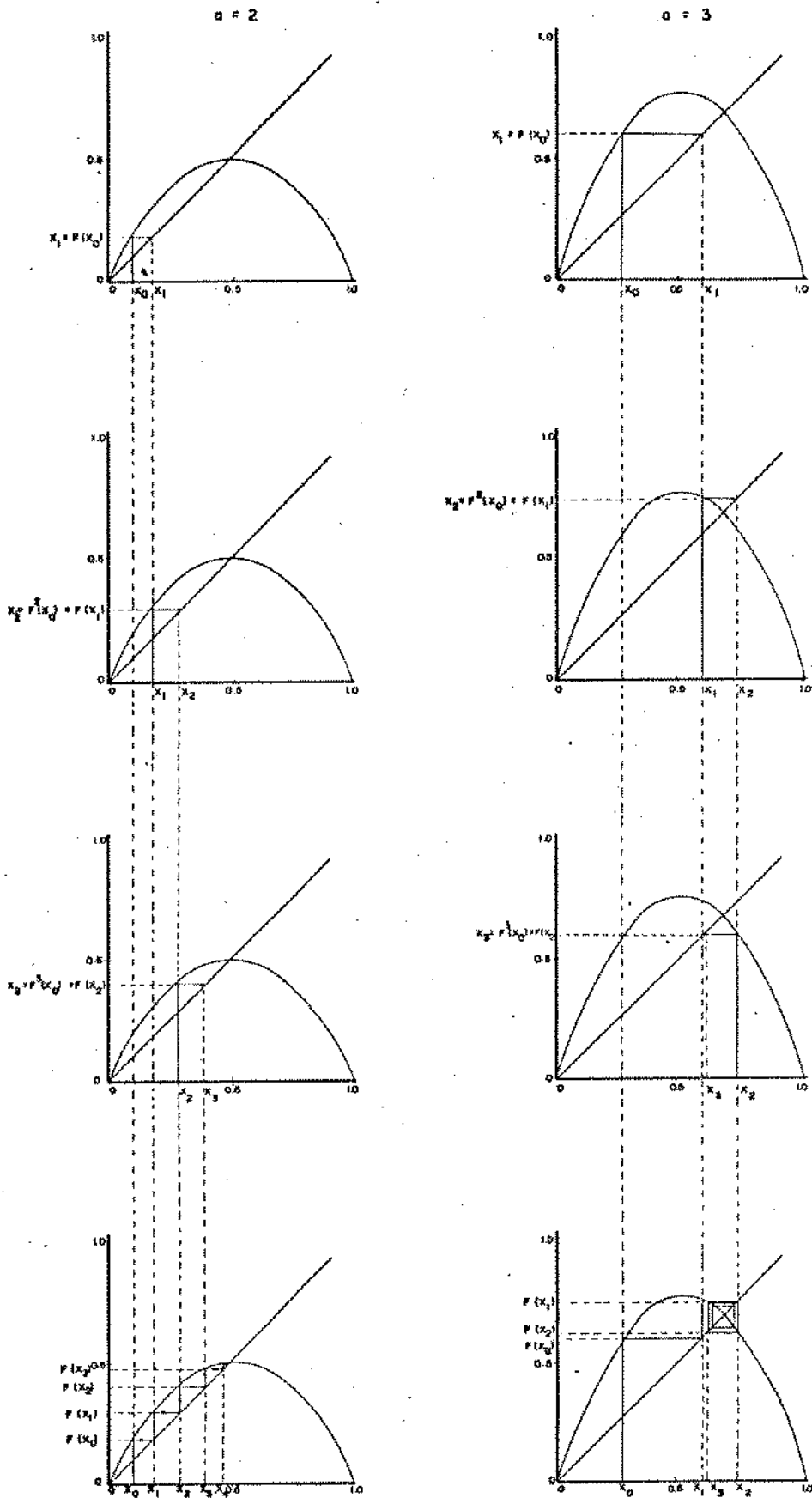


FIG - 2

A resposta será obtida, se olharmos para a derivada da função  $F(x)$  em torno de seus pontos fixos.

Como  $F(x)$  é uma função definida no intervalo fechado  $[0,1]$ , infinitamente diferenciável, com derivadas contínuas nesse intervalo; seja  $x^*$  um ponto fixo qualquer em  $[0,1]$ . Para qualquer  $x \in [0,1]$ ,  $x \neq x^*$ ,  $x$  próximo de  $x^*$ , a série de Taylor da função  $F(x)$ , relativamente a  $x^*$ , é definida por:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) (x - x^*)^n$$

com

$$a(n) = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n F(x)}{dx^n} \right|_{x=x^*}$$

Assim, numa vizinhança de  $x^*$ , em primeira aproximação, tem-se que :

$$F(x) \approx a(0) + a(1) (x - x^*) \quad (L)$$

onde

$$a(0) = F(x^*) = x^*$$

$$a(1) = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x^*}$$

Portanto

$$F(x) - x^* \approx a(1) (x - x^*)$$

$$F^2(x) - x^* \approx a(1) (F(x) - x^*) \approx a(1) [a(1)(x - x^*)] = a^2(1)(x - x^*)$$

$$F^n(x) - x^* \approx a^n(1) (x - x^*)$$

Sendo assim, se  $|a(1)| < 1$ ,  $a^n(1)$  faz-se cada vez menor e  $F^n(x)$  converge para  $x^*$ . Caso contrário,  $a^n(1)$  faz-se cada vez maior, e  $F^n(x)$  afasta-se de  $x^*$ . Esta análise é válida apenas numa vizinhança de  $x^*$ , e sendo assim o leitor não deve se deixar levar pela idéia errada de que quando  $|a(1)| > 1$ ,  $F^n(x)$  afasta-se "infinitamente" de  $x^*$ . Na verdade,  $F^n(x)$  afasta-se o suficiente de  $x^*$ , até o ponto onde a aproximação linear (L) não seja mais válida. A partir daí, o comportamento das iterações não pode mais ser estudado "localmente" em  $x^*$ , já que  $F^m(x)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , deixou a vizinhança de  $x^*$  em que se podia falar da localidade de  $x^*$ . Portanto, a função  $F^n(x)$  para  $m > n$ , deve ser estudada sob algum outro ponto de vista.

Note que  $a(1) = \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x^*}$ ; assim se  $x^*$  é um ponto fixo de  $F(x)$ , e a derivada de  $F(x)$  em  $x^*$ ,  $F'(x^*)$ , é em valor absoluto menor que um, então  $x^*$  é um "atrator" ou um "ponto estável". Por outro lado, se  $|F'(x^*)| > 1$ , então  $x^*$  é um "repulsor" ou um "ponto instável".

Olhemos agora para a derivada de  $F(x)$  na equação (1.9):

$$\frac{dF(x)}{dx} = a(1 - 2x)$$

Nos pontos fixos  $x^*(0) = 0$  e  $x^*(1) = 1 - 1/a$ :

$$\left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x^*(0)} = a$$

e

$$\left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x^*(1)} = 2 - a$$

Analisemos  $F'(x)$  para os valores possíveis de "a", isto é,  $1 < a \leq 4$  (FIG.1).

i) Para  $1 < a < 3$ , os dois pontos fixos da equação (1.9),  $x^*(0) = 0$  e  $x^*(1) = 1 - 1/a$ , estão em  $[0,1]$ , e:

$$1 < \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x^*(0)} < 3$$

e

$$-1 < \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x^*(1)} < 1$$

Assim, se  $1 < a < 3$ , o ponto fixo  $x^*(1) = 1 - 1/a$  é estável, pois  $|F'(x^*(1))| < 1$ , e o ponto fixo  $x^*(0) = 0$  é instável.

ii) Para  $3 < a \leq 4$ ,

$$-2 \leq \left. \frac{dF(x)}{dx} \right|_{x=x^*(1)} < -1$$

Ou seja, para  $3 < a \leq 4$ ,  $|F'(x^*(1))| > 1$  e desta forma  $x^*(1)$  é instável.

iii) O ponto  $a = 3$  é um ponto que separa o comportamento estável de  $x^*$ , do seu comportamento instável.

Graficamente, a derivada de  $F(x)$  no ponto fixo  $x^*(1) = 1 - 1/a$  ser em valor absoluto menor (maior) que um, significa que o ângulo que ela faz com a horizontal é menor (maior) que  $45^\circ$  FIG.1.1a-(FIG.1.1b)

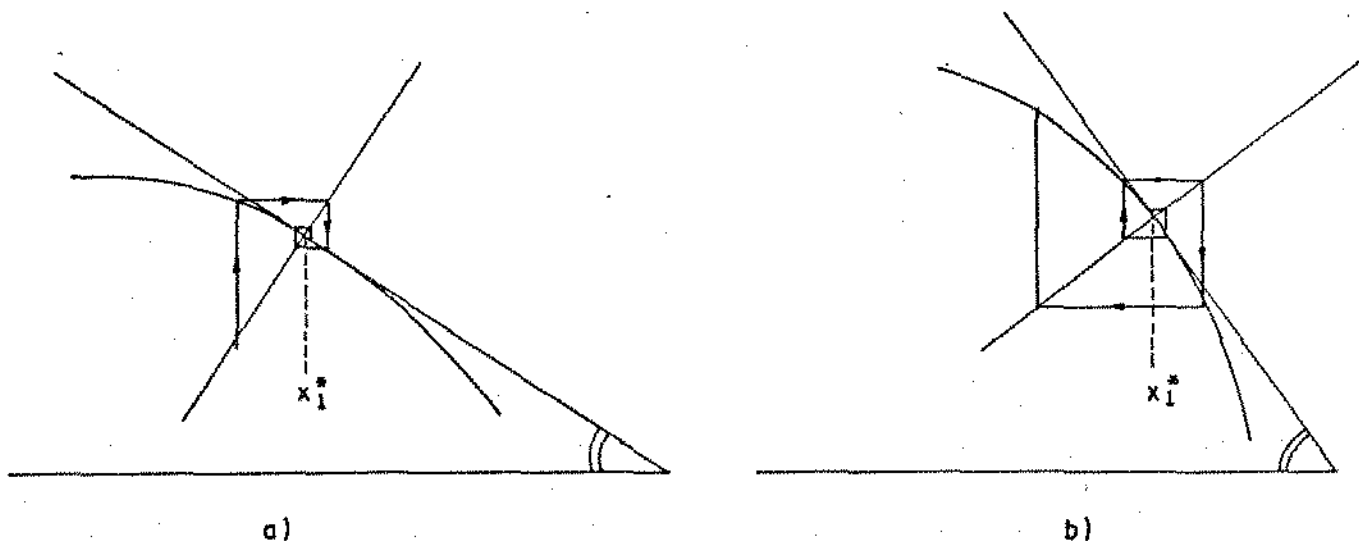


FIG - 1.1



Até aqui, analisando o comportamento do sistema (1.9) vimos que, para:

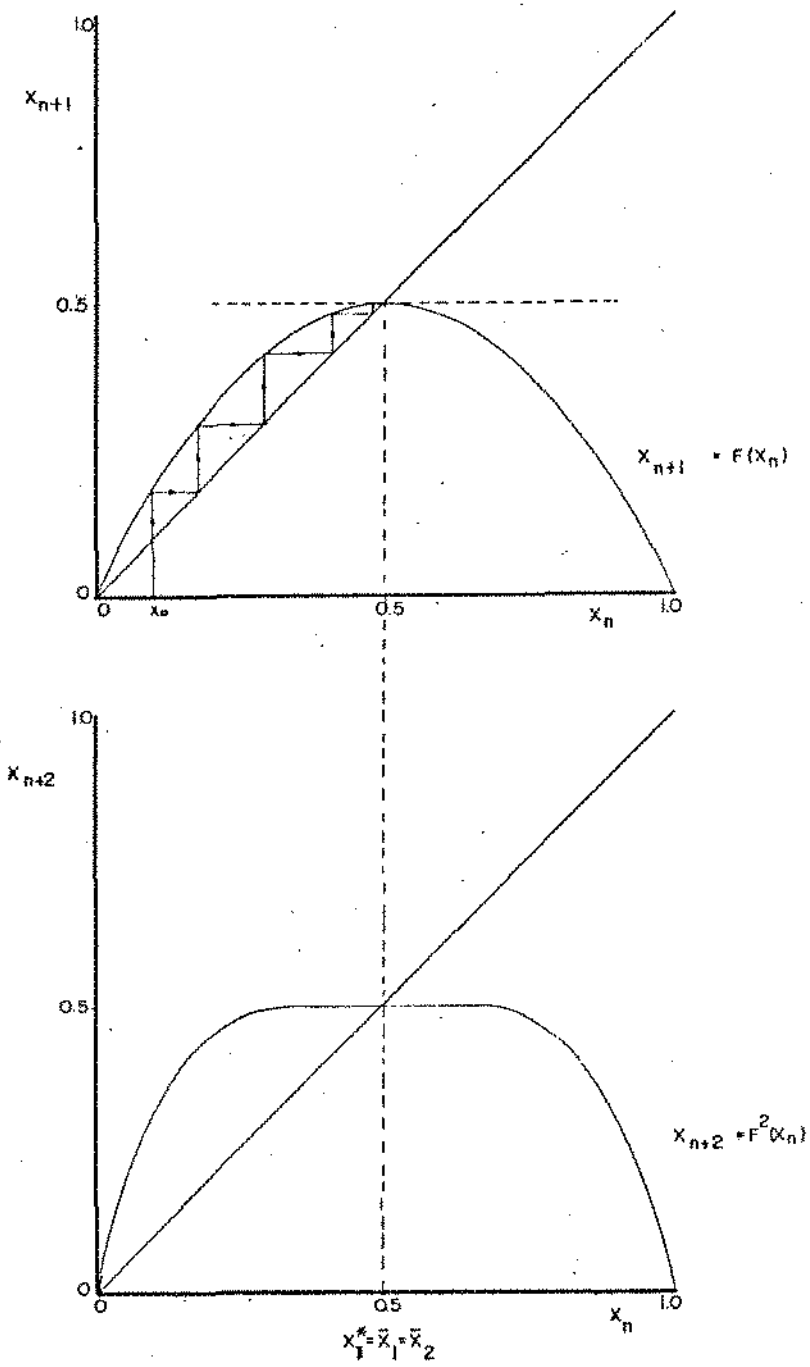
- a)  $1 < a \leq 3$ ,  $x^*(1) = 1 - 1/a$  é estável e  $x^*(0) = 0$  é instável.
- b)  $3 < a \leq 4$ ,  $x^*(0) = 0$  é instável e  $x^*(1) = 1 - 1/a$  torna-se também instável.

Assim, quando  $a \in (1,3]$ , as iterações convergem para  $x^*(1)$  e divergem de  $x^*(0)$ . Agora, quando  $a \in (3,4]$ , tanto  $x^*(0) = 0$  como  $x^*(1) = 1 - 1/a$ , são instáveis. Isso significa que as iterações não convergem nem para  $x^*(0)$ , nem para  $x^*(1)$ . Resta sabermos então, o que acontece com as iterações quando  $a \in (3,4]$ , se os únicos dois pontos fixos de  $F(x)$  tornaram-se repulsores?

Por outro lado, também já sabemos que se  $x(0) \in [0,1]$ , então  $F^n(x(0)) \in [0,1]$ ,  $n = 1,2,\dots$ . Ainda, como  $F(x(m))$  é o máximo valor que  $F(x)$  assume em  $[0,1]$ , as iterações necessariamente devem ficar limitadas em  $[0, F(x(m))]$ . E desde que estão limitadas, será que o comportamento delas dentro deste intervalo, é aleatório?

Enfim, a questão é : o que acontece com a sequência  $(F^n(x(0)))_{n \in \mathbb{N}}$  se os únicos dois pontos fixos de  $F(x)$  tornaram-se instáveis, e  $F^n(x(0)) \in [0, F(x(m))]$ ?

Para respondermos esta questão, vejamos primeiramente a FIG.3 e a FIG.4 ; onde  $a = 2$  e  $a = 3$ , respectivamente. Nos dois casos,  $x^*(1)$  é estável e graficamente podemos ver a convergência das iterações para ele.

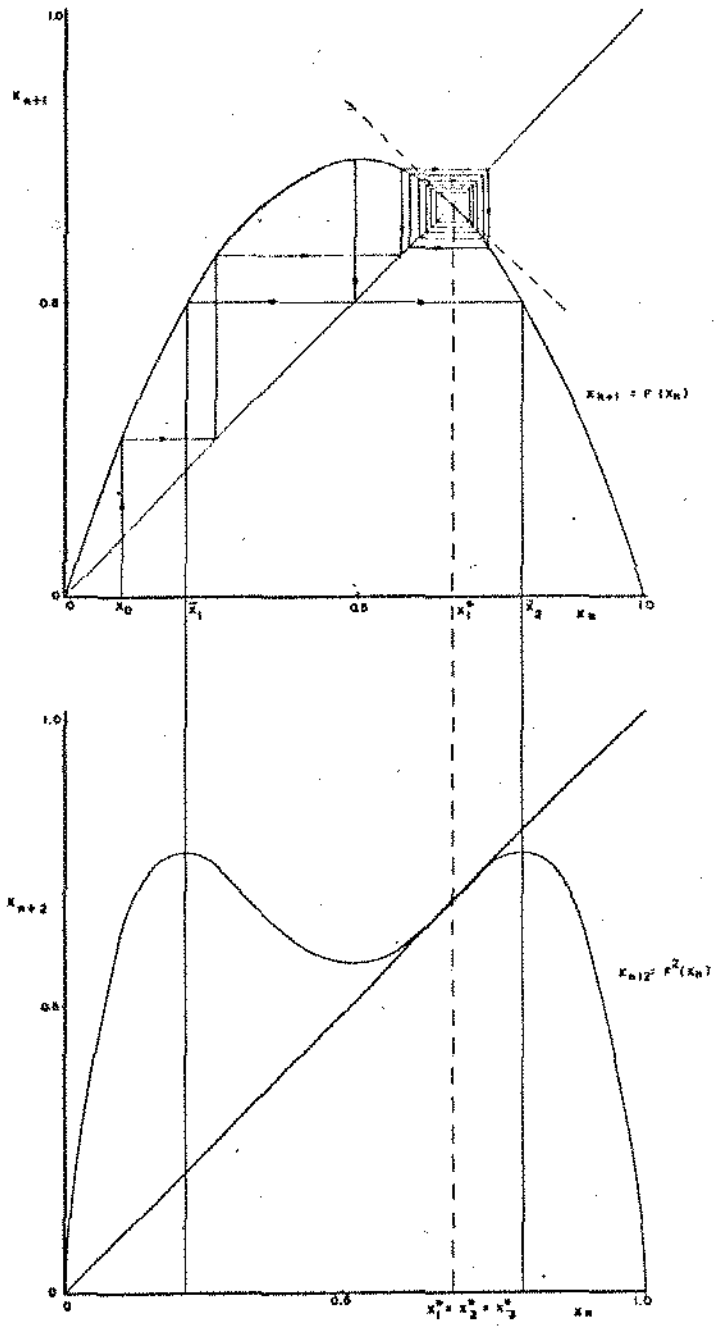


$a = 2.0$   
 $x_0^* = 0$   
 $x_1^* = 0.5$   
 $x_2^* x_3^* \in \epsilon$   
 $\bar{x}_1 = 0.5$   
 $\bar{x}_2 = 0.5$

$$F'(x_1^*) = 0$$

$$F^2(x_1^*) - [F'(x_1^*)]^2 = 0$$

FIG. 3



$a = 3$   
 $x_0^* = 0$   
 $x_1^* = 2/3$   
 $x_2^* = 2/3$   
 $x_3^* = 2/3$   
 $\bar{x}_1 = 0.22$   
 $\bar{x}_2 = 0.79$

$F^*(x_1^*) = -1$   
 $F^*(x_2^*) = -1$   
 $F^*(x_3^*) = -1$   
 $F^2(x_1^*) = [F^*(x_1^*)]^2 = 1$   
 $F^2(x_1^*) = F^*(x_2^*) \cdot F^*(x_3^*) = 1 \quad i = 2, 3$

FIG - 4

Quando  $a = 2$ , dado  $x(0) \in (0, 1)$ ,  $x(1) = F(x(0)) < x(m) = 1/2$ . Assim, a sequência  $(F^n(x(0)))_{n \in \mathbb{N}}$  a partir de  $x(1)$ , é monótona crescente limitada. Como  $x(m) = x^*(1)$  é o supremo do conjunto  $(F^n(x(0)))_{n \in \mathbb{N}}$  temos que a sequência converge, sendo seu limite o ponto fixo  $x^*(1)$ .

Essas considerações também são válidas quando  $1 < a < 2$ , exceto o caso onde  $x(0) \in (x^*(1), x(n))$ , e  $F(x(n)) = x^*(1)$ . Neste caso, a sequência  $(F^n(x(0)))_{n \in \mathbb{N}}$  é monótona decrescente limitada, e sendo  $x^*(1)$  o ínfimo do conjunto, a sequência  $(F^n(x(0)))_{n \in \mathbb{N}}$  converge para  $x^*(1)$ .

Para  $a = 3$ , a sequência  $(F^n(x(0)))_{n \in \mathbb{N}}$ , a partir de um certo  $n$ , torna-se uma sequência estritamente oscilante e limitada, contendo uma subsequência crescente, à esquerda de  $x^*(1)$ , e outra subsequência decrescente, à direita de  $x^*(1)$ , isto é:

$$F^n < F^{n+2} \Rightarrow F^{n+1} > F^{n+3}$$

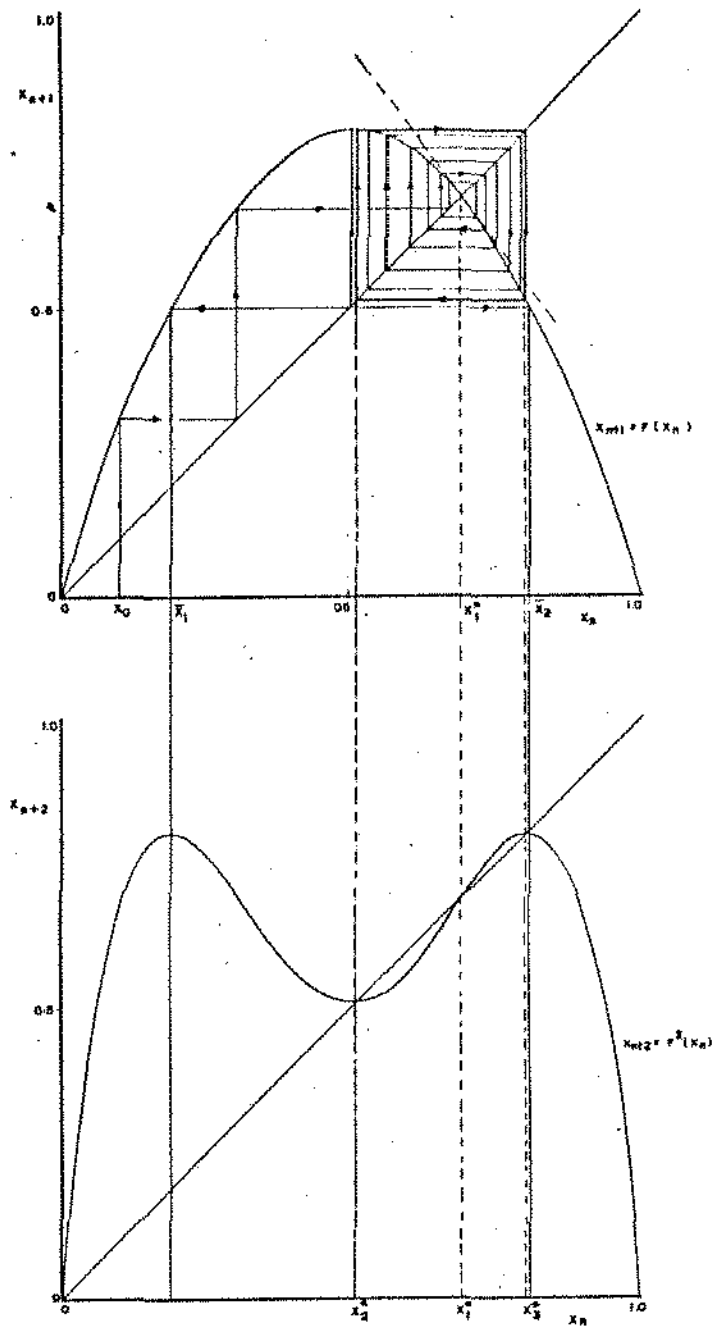
Agora, se toda sequência limitada contém subsequência convergente, então  $x^*(1)$ , sendo respectivamente o supremo e o ínfimo das subsequências, necessariamente é o limite delas.

Como  $(F^n(x(0)))_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência formada por duas subsequências que convergem para o mesmo limite  $x^*(1)$ , temos então que  $(F^n(x(0)))_{n \in \mathbb{N}}$  também converge para  $x^*(1)$ .

O mesmo acontece quando  $2 < a < 3$ .

Olhemos agora para a FIG. 5, quando  $a = 3,2$ .

A primeira vista, parece haver uma convergência para  $x^*(1)$ , pois a sequência  $(F^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  é em princípio monótona crescente. En-



$a = 3.20$   
 $x_0^* = 0$   
 $x_1^* = 0.690$   
 $x_2^* = 0.513$   
 $x_3^* = 0.799$   
 $\bar{x}_1 = 0.19$   
 $\bar{x}_2 = 0.81$

$F'(x_0^*) = -1.216$   
 $F'(x_2^*) = -0.0832$   
 $F'(x_3^*) = -1.9136$   
 $F''(x_1^*) = [F'(x_1^*)]^2 = 1.4787$   
 $F''(x_1^*) = F'(x_2^*), F'(x_3^*) = 0.1592, i=2,3$

FIG-5

Portanto,  $x^*(1)$  é repulsor e  $(F^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ , a partir de um certo  $n$ , torna-se uma sequência estritamente oscilante e limitada, contendo uma subsequência decrescente à esquerda de  $x^*(1)$ , e outra subsequência crescente à direita de  $x^*(1)$ , cada uma delas convergente.

Assim, as iterações começam a divergir de  $x^*(1)$  e ficam oscilando em torno dele, para então convergirem para outros dois pontos,  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$ , onde:

$$1/2 < x^*(2) < x^*(1)$$

e

$$x^*(1) < x^*(3) < F(x(m))$$

E sendo esses pontos respectivamente, o ínfimo e o supremo das subsequências, são portanto, o limite delas. Isto quer dizer que a sequência  $x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), \dots$ , aproxima-se da sequência  $x^*(2), x^*(3), x^*(2), x^*(3), x^*(2), x^*(3), \dots$ . Esses pontos que não são os pontos fixos de  $F(x)$ , formam exatamente um quadrado invariante, de tal forma que o comportamento das iterações no intervalo  $[0, 1]$ , fica bem determinado.

Esse quadrado invariante dá origem a um ciclo, e por conter os dois pontos,  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$ , é denominado ciclo de período dois. Na verdade, eles são os pontos fixos de  $F^2(x)$ , isto é,  $F^2(x) = x$ .

Desta forma, embora o único ponto fixo de  $F(x)$ ,  $x^*(1)$ , tenha se tornado instável repelindo por isso as iterações, essas por sua vez continuam convergindo, e o fazem para os pontos  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$ , formando assim um ciclo de período dois.

Portanto, para  $a \in (3, 4]$ , não é necessário olharmos a função que relaciona a população de uma geração para a geração sucessiva, mas sim a função que relaciona a população em intervalos sucessivos de

duas gerações separadas, isto é, a função que relaciona  $x(n+2)$  com  $x(n)$  :

$$x(n+2) = F(F(x(n))) = F^2(x(n)) \quad (1.11)$$

Diante disso, façamos então a partir de agora algumas considerações sobre  $F^2(x)$ .

Primeiramente temos que, se  $x^*$  é um ponto fixo de  $F(x)$ , então  $x^*$  também é ponto fixo de  $F^2(x)$  pois,

$$F^2(x^*) = F(F(x^*)) = F(x^*) = x^* \quad (1.12)$$

Portanto, desde que  $x^*(0) = 0$  e  $x^*(1) = 1 - 1/a$  são pontos fixos de  $F(x)$ , então também são pontos fixos de  $F^2(x)$ . Agora, se algum outro ponto  $x^*(2)$ , com  $x^*(2) \neq 0$  e  $x^*(2) \neq 1 - 1/a$ , for ponto fixo de  $F^2(x)$ , então necessariamente deverá existir um  $x^*(3) \neq x^*(2)$ ,  $x^*(3) \neq 0$  e  $x^*(3) \neq 1 - 1/a$ , também ponto fixo de  $F^2(x)$ .

Para vermos este fato, suponhamos que exista  $x^*(2)$ , de tal forma que:

$$F^2(x^*(2)) = x^*(2)$$

e

$$F(x^*(2)) \neq x^*(2)$$

pois  $x^*(0) = 0$  e  $x^*(1) = 1 - 1/a$  são os únicos pontos fixos de  $F(x)$ .

Seja então

$$x^*(3) = F(x^*(2))$$

Logo

$$F(x^*(3)) = F(F(x^*(2))) = F^2(x^*(2)) = x^*(2)$$

e

$$F^2(x^*(3)) = F(F(x^*(3))) = F(x^*(2)) = x^*(3)$$

Assim  $x^*(3)$  também é ponto fixo de  $F^2(x)$ ;  $x^*(3)$  é diferente de  $x^*(0) = 0$ , de  $x^*(1) = 1 - 1/a$  e de  $x^*(2)$ . Consequentemente, os pontos fixos de  $F^2(x)$  que não são pontos fixos de  $F(x)$ , devem existir em pares. Isto quer dizer que, quando  $a > 3$ , o ponto fixo instável  $x^*(1)$  de  $F(x)$ , desdobrou-se (ou bifurcou-se) em dois pontos fixos inicialmente estáveis,  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$ , de  $F^2(x)$ , formando assim, o ciclo de período-2.

A determinação desses pontos é análoga ao processo usado na determinação dos pontos fixos de  $F(x)$ , isto é, determinar os pontos fixos de :

$$F^2(x) = a(ax - ax^2)(1 - ax + ax^2) \quad (1.13)$$

é determinar as soluções da equação (1.12) :

$$a(ax^* - ax^{*2})(1 - ax^* + ax^{*2}) = x^*$$

$$(a^2x^* - a^2x^{*2})(1 - ax^* + ax^{*2}) - x^* = 0$$

$$x^*(a^2 - a^3x^* + 2a^3x^{*2} - a^2x^* - a^3x^{*3} - 1) = 0$$

Tanto  $x^*(0) = 0$  como  $x^*(1) = 1 - 1/a$  são soluções de (1.12). Dessa forma, dividindo-se



$$a^2 - a^3x^* + 2a^3x^{*2} - a^2x^{*3} - a^3x^{*3} - 1 = 0$$

por  $[x^* - (1 - 1/a)]$ , teremos uma equação algébrica de 2º grau :

$$a^3x^{*2} - (a^3 + a^2)x^* + (a^2 + a) = 0$$

com soluções:

$$x^{*(2)} = \frac{(1+a) - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$

(1.14)

$$x^{*(3)} = \frac{(1+a) + \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}$$

Os pontos fixos  $x^{*(2)}$  e  $x^{*(3)}$  que inicialmente são estáveis, aparecem somente para  $a \geq 3$ , de tal forma que, para  $1 < a < 3$   $x^{*(2)}$  e  $x^{*(3)}$  são complexos. Note que, para  $a = 3$ ,  $x^{*(1)} = x^{*(2)} = x^{*(3)} = 2/3$ . Neste ponto,  $F'(x^{*(1)}) = -1$ , e  $x^{*(1)}$  ainda é estável, pois como as iterações devem convergir para algum ponto, não podendo sair do intervalo  $(0,1)$ , elas só podem convergir para  $x^{*(1)} = x^{*(2)} = x^{*(3)}$  (FIG.4).

E o que podemos dizer da derivada de  $F^2(x)$  nestes dois pontos  $x^{*(2)}$  e  $x^{*(3)}$ ? Primeiro, vejamos o que acontece com a função  $F(x)$  nesses pontos.

Sabemos que, se  $x^*(2)$  é ponto fixo de  $F^2(x)$ , então necessariamente de existir  $x^*(3) \neq x^*(2)$ , que também é ponto fixo de  $F^2(x)$  e se

$$F(x^*(2)) = x^*(3)$$

então

$$F(x^*(3)) = x^*(2)$$

Mas como

$$F^{2^{-1}}(x^*(2)) = F'(F(x^*(2))) \quad F'(x^*(2)) = F'(x^*(3)) \quad F'(x^*(2))$$

e

$$F^{2^{-1}}(x^*(3)) = F'(F(x^*(3))) \quad F'(x^*(3)) = F'(x^*(2)) \quad F'(x^*(3))$$

tem-se que:

$$F^{2^{-1}}(x^*(2)) = F^{2^{-1}}(x^*(3)) \quad (1.15)$$

ou seja, a derivada de  $F^2(x)$  é a mesma em ambos os pontos  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$ .

Um outro ponto a ser abordado, é verificarmos que como  $F(x)$  é simétrica com relação ao seu máximo ( $x(m) = 1/2$ ), isto é, como

$$F(x(m) + \Delta x) = F(x(m) - \Delta x)$$

então,  $F^2(x)$  :

$$F^2(x(m) + \Delta x) = F(F(x(m) + \Delta x)) = F(F(x(m) - \Delta x)) = F^2(x(m) - \Delta x)$$

também é simétrica com relação a  $x(m) = 1/2$ .

Agora, será que  $x(m) = 1/2$ , ainda continua sendo um máximo de  $F^2(x)$ ? A resposta é não. Veremos que o ponto  $x(m) = 1/2$ , que é um máximo de  $F(x)$ , será um mínimo de  $F^2(x)$  analisando as derivadas de  $F^2(x)$  neste ponto.

Sabemos que  $F^2(x(m)) = F(F(x(m)))$ , e que pela regra da cadeia:

$$F^{2'}(x(m)) = F'(F(x(m))) F'(x(m)) = 0,$$

pois  $x(m) = 1/2$  sendo um ponto de máximo de  $F(x)$ , tem-se que  $F'(x(m)) = 0$ .

Assim,  $x(m)$  também é um ponto crítico de  $F^2(x)$ . Mostremos que é um mínimo, analisando a derivada segunda de  $F^2(x(m))$ :

$$F^{2''}(x(m)) = F''(F(x(m))) F'(x(m)) F'(x(m)) + F'(F(x(m))) F''(x(m))$$

$$F^{2''}(x(m)) = F''(F(x(m))) [F'(x(m))]^2 + F'(F(x(m))) F''(x(m))$$

$$F^{2''}(x(m)) = F'(F(x(m))) F''(x(m))$$

Agora,  $F(x(m)) = F(1/2) = a/4$ . E sendo  $F'(x) = a - 2a x$ , então  $F'(a/4) = a - a^2/2$ . E para  $a > 2$ , tem-se que  $F'(F(x(m))) < 0$ .

Por outro lado, sendo  $F''(x(m)) = -2a$ , como  $a > 1$ , então  $F''(x(m)) < 0$ .

Logo,  $F^{2''}(x(m)) > 0$ , implicando que  $x(m)$  é um mínimo de  $F^2(x)$ .

Vejamos agora, onde  $F^2(x)$  assume seu máximo. Temos que sendo  $F^2(x) = F(F(x))$ , então

$$F^{2'}(x) = F'(F(x)) F'(x) = 0$$

donde  $F'(x) = 0$  ou  $F'(F(x)) = 0$

Mas  $F'(x)$  não pode ser igual a zero, pois se isto ocorresse, o ponto procurado seria  $x(m) = 1/2$ , e esse ponto é um mínimo de  $F^2(x)$ .

Portanto  $F'(x) \neq 0$  e  $F'(F(x)) = 0$ .

Mas  $F'(F(x)) = 0$  implica em  $F(x) = x(m)$ , donde  $x = F^{-1}(x(m))$

Como  $F(x)$  é crescente a esquerda de  $x(m)$ , decrescente a direita de  $x(m)$ , simétrica com relação a  $x(m)$ , devem existir dois pontos  $\bar{x}(1) < x(m)$  e  $\bar{x}(2) > x(m)$  em  $[0,1]$  tais que:

$$F(\bar{x}(1)) = F(\bar{x}(2)) = x(m)$$

e

$$\left. \frac{dF^2(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}(1)} = \left. \frac{dF^2(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}(2)} = 0$$

Determinemos esses pontos. Temos que:

$$F(x) = x(m) = 1/2$$

donde

$$x = F^{-1}(x(m)) = F^{-1}(1/2)$$

Como

$$F(x) = a x (1 - x)$$

temos a equação:

$$-a x^2 + ax - 1/2 = 0$$

com soluções:

$$\bar{x}(1) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2a}}{-2a}$$

(1.16)

$$\bar{x}(2) = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 2a}}{-2a}$$

Esses pontos,  $\bar{x}(1)$  e  $\bar{x}(2)$ , são encontrados graficamente indo verticalmente para baixo, ao longo de  $x(m) = 1/2$  até o gráfico da função identidade, e então horizontalmente até o gráfico da função  $F(x)$ . Desde que  $F(x)$  tem um máximo e é simétrica com relação a esse máximo, então devem existir duas intersecções horizontais com gráfico de  $F(x)$ :  $\bar{x}(1)$  e  $\bar{x}(2)$ .

Mostremos então que  $\bar{x}(1)$  e  $\bar{x}(2)$  são pontos de máximo de  $F^2(x)$ .

Vamos denotar  $\sqrt{a^2 - 2a} = \Delta$ ,  $\Delta > 0$ .

Primeiramente vejamos se  $\bar{x}(1)$  e  $\bar{x}(2)$  são pontos críticos de  $F^2(x)$ , analisando a derivada dessa função nesses pontos:

$$F^{2'}(\bar{x}(1)) = F'(F(\bar{x}(1))) F'(\bar{x}(1)) = F'(x(m)) F'(\bar{x}(1)) = 0$$

$$F^{2'}(\bar{x}(2)) = F'(F(\bar{x}(2))) F'(\bar{x}(2)) = F'(x(m)) F'(\bar{x}(2)) = 0,$$

pois  $x(m)$  é um ponto crítico de  $F(x)$ , donde  $F'(x(m)) = 0$ . Assim,  $\bar{x}(1)$  e  $\bar{x}(2)$  são realmente pontos críticos de  $F^2(x)$ .

Olhando agora para  $F^{2''}(x)$ , ainda nesses pontos, teremos:

$$\begin{aligned}
F^{2''}(\bar{x}(1)) &= F''(F(\bar{x}(1))) F'(\bar{x}(1)) F'(\bar{x}(1)) + F'(F(\bar{x}(1))) F''(\bar{x}(1)) = \\
&= F''(x(m)) [F'(\bar{x}(1))]^2 + F'(x(m)) F''(\bar{x}(1)) = \\
&= F''(x(m)) [F'(\bar{x}(1))]^2 < 0
\end{aligned}$$

e

$$F^{2''}(\bar{x}(2)) = F''(x(m)) [F'(\bar{x}(2))]^2 < 0$$

pois  $F''(x(m)) < 0$ .

Logo,  $F^2(x)$  tem um máximo em  $\bar{x}(1)$  e outro máximo em  $\bar{x}(2)$ .

Dessa forma,  $F^2(x)$  tem três pontos críticos em  $[0,1]$ :  $x(m)$ ,  $\bar{x}(1)$  e  $\bar{x}(2)$ . Em  $x(m)$ ,  $F^2(x)$  tem um mínimo e nos outros dois,  $F^2(x)$  tem um máximo.

Já vimos o que acontece com o comportamento do sistema para  $1 < a \leq 3$  e com o comportamento do sistema para  $3 < a \leq 4$  quando  $x^*(1)$ , bifurcando-se em  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$ , torna-se instável. Entretanto, com a variação crescente do parâmetro "a", da mesma forma que  $x^*(1)$  tornou-se instável,  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$  que são inicialmente estáveis, também tornar-se-ão instáveis. E a nossa nova questão é: o que faz  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$  tornarem-se instáveis?

Antes porém, é necessário deixar clara a impossibilidade de se fazer para  $F^2(x)$ , a mesma análise feita para  $F(x)$ , já que  $F(x)$  tem um máximo e  $F^2(x)$  tem dois máximos em  $[0,1]$ . O que podemos dizer da análise feita em  $F(x)$ , é que ela é válida para qualquer função que tenha um único ponto de máximo, onde o domínio e contra-domínio são os mesmos.

Voltando ao nosso problema:  $x^*(1)$ , ponto fixo de  $F(x)$  e de  $F^2(x)$ , bifurcou-se em  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$ , pontos fixos de  $F^2(x)$ , inicialmente estáveis. Mas se  $x^*(1)$  é ponto fixo de  $F(x)$  e de  $F^2(x)$ , então alguma relação deve existir em consequência disso. E de fato, existe uma relação entre a derivada de  $F(x)$  e a derivada de  $F^2(x)$ , no ponto  $x^*(1)$ . Vejamos.

Primeiro temos que, se  $x^*(1)$  é ponto fixo de  $F(x)$  e  $F^2(x)$ , então:

$$F(x^*(1)) = x^*(1)$$

e

$$F^2(x^*(1)) = x^*(1)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F^{2'}(x^*(1)) &= F'(F(x^*(1))) F'(x^*(1)) = \\ &= F'(x^*(1)) F'(x^*(1)) = \quad (1.17) \\ &= [F'(x^*(1))]^2 \end{aligned}$$

ou seja, a derivada da função  $F^2(x)$  em  $x^*(1)$  é o quadrado da derivada de  $F(x)$  nesse mesmo ponto.

Assim, se a derivada de  $F(x)$  em  $x^*(1)$ , em valor absoluto, for menor que 1,  $|F'(x^*(1))| < 1$ , então  $x^*(1)$  é estável, com as iterações convergindo para ele. Pela equação (1.17), segue que  $0 < F^{2'}(x^*(1)) < 1$ . Isto quer dizer que  $x^*(1)$  é tanto ponto fixo estável de  $F(x)$  quanto de  $F^2(x)$ , pois o ângulo que a derivada de  $F(x)$  e de  $F^2(x)$  em  $x^*(1)$ , faz com a horizontal, é menor que  $45^\circ$ .

Quando a derivada de  $F(x)$  no ponto  $x^*(1)$  é igual a  $-1$ , temos que  $F^2'(x^*(1)) = 1$ , com  $x^*(1)$  estável. Isto significa que as iterações ainda convergem para  $x^*(1)$ , embora ocorra uma bifurcação para  $F(x)$ . Este tipo de bifurcação, que é denominada bifurcação "garfo", dobra o período da órbita periódica. Assim, a órbita periódica que até esse ponto tinha período um, devido a existência de um único ponto fixo estável,  $x^*(1)$ ; a partir de agora passará a ter período dois, devido ao desdobramento de  $x^*(1)$ , em  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$ , inicialmente estáveis.

O que acontece nesse caso, é que os pontos fixos de  $F^2(x)$  são tais que  $x^*(1) = x^*(2) = x^*(3)$ , donde  $F(x^*(1)) = F(x^*(2)) = F(x^*(3))$ .

Assim, quando a derivada de  $F(x)$  no ponto  $x^*(1)$  é, em valor absoluto, maior que um (isto é,  $|F'(x^*(1))| > 1$ ), pela equação (1.17),  $F^2'(x^*(1)) > 1$ , correspondendo que a derivada de  $F^2(x)$ , em  $x^*(1)$ , faz um ângulo maior que  $45^\circ$  com a horizontal. Isto quer dizer que  $x^*(1)$  já não é mais ponto fixo estável de  $F(x)$ , nem de  $F^2(x)$ ; e se isso acontece, as iterações em  $F(x)$  divergem dele, para então convergirem para  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$ , onde

$$x^*(2) = F(x^*(3))$$

e

$$x^*(3) = F(x^*(2)),$$

iniciando-se então o ciclo de período-2.

Como antes, a estabilidade deste ciclo de período dois depende da derivada da curva  $F^2(x)$  nestes dois pontos, que como já sabemos, é a mesma em valor absoluto, em ambos os pontos, isto é:



$$F^{2'}(x^*(2)) = F'(F(x^*(2))) F'(x^*(2)) = F'(x^*(3)) F'(x^*(2))$$

e

$$F^{2'}(x^*(3)) = F'(F(x^*(3))) F'(x^*(3)) = F'(x^*(2)) F'(x^*(3))$$

Olhando para os gráficos vemos que, enquanto para alguns valores do parâmetro "a",  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$  são tais que  $F'(x^*(2)) < 0$  e  $F'(x^*(3)) < 0$ , isto é,  $F(x)$  é decrescente em  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$ ; para outros valores do parâmetro "a",  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$  são tais que  $F'(x^*(2)) > 0$  e  $F'(x^*(3)) < 0$ , ou seja,  $F(x)$  é crescente em  $x^*(2)$  e decrescente em  $x^*(3)$ .

Assim,

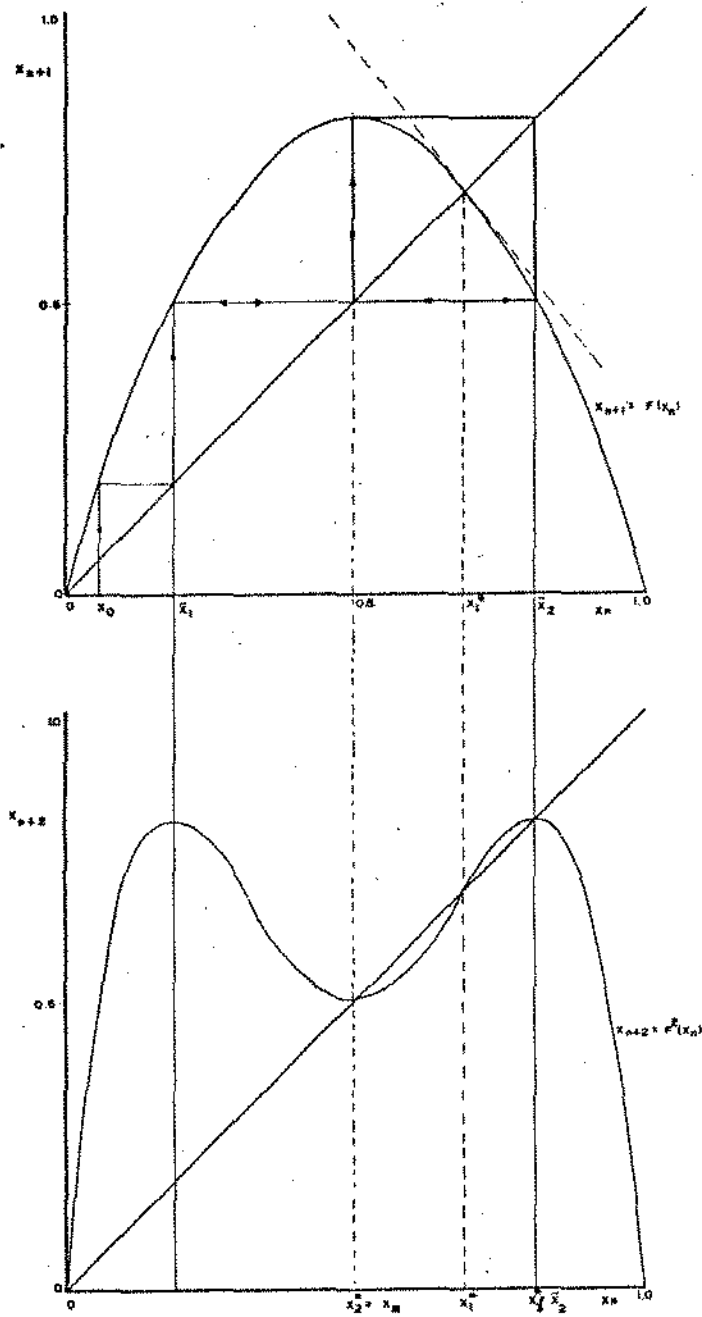
$$F^{2'}(x^*(1)) = \pm [ F'(x^*(2)) F'(x^*(3)) ], \quad i = 2, 3$$

E o critério para o ciclo de período-2 ser estável é:

$$| F^{2'}(x^*(1)) | < 1, \quad i=2,3 \quad (1.18)$$

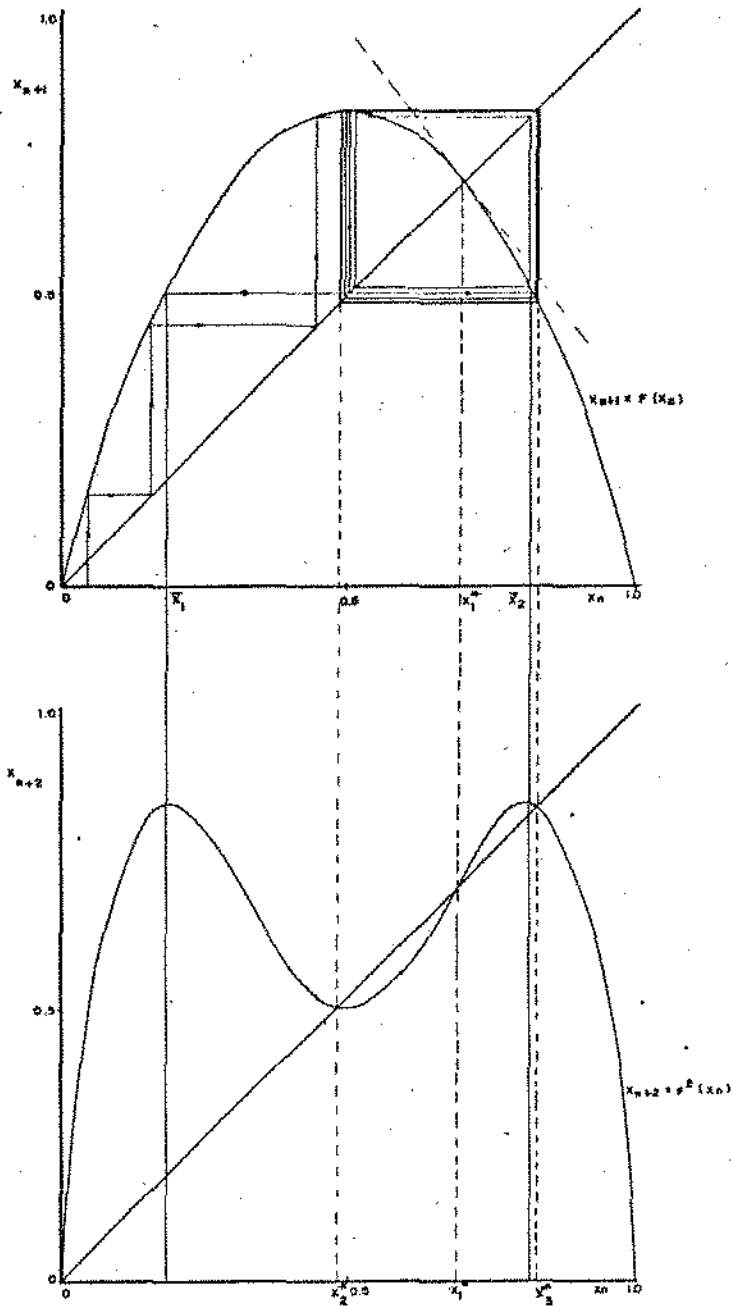
Isto é, a órbita periódica  $(x^*(2), x^*(3))$  é estável enquanto o produto das derivadas de  $F(x)$  em  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$  tem um valor absoluto menor que um.

Como em  $F(x)$ , com a variação crescente do valor do parâmetro "a" ( $a > 3$ ), a derivada de  $F^2(x)$  em  $x^*(1)$  ( $i = 2, 3$ ), passa do valor  $+1$  (FIG.4), quando ocorre a bifurcação garfo para  $F(x)$ , e aparece o ciclo de período-2; para então decrescer, passando pelo zero (FIG.6), até o valor  $-1$ , (FIG.8). O que torna  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$  instáveis, é o fato da derivada de  $F^2(x)$  ter nesses pontos o valor



$q = 3.236068$	$F'(x_1^*) = -1.2362$
$x_0^* = 0$	$F'(x_2^*) = 0$
$x_1^* = 0.691$	$F'(x_3^*) = -2.0064$
$x_2^* = 0.5$	$F''(x_1^*) = [F'(x_1^*)] = 1.5282$
$x_3^* = 0.81$	$F''(x_1^*) = F''(x_2^*), F''(x_3^*) = 0, l=2,3$
$\bar{x}_1 = 0.19$	
$\bar{x}_2 = 0.81$	

FIG - 6



$$a = 3.3$$

$$x_0^* = 0$$

$$x_1^* = 0.6969$$

$$x_2^* = 0.48$$

$$x_3^* = 0.82$$

$$\bar{x}_1 = 0.19$$

$$\bar{x}_2 = 0.81$$

$$F'(x_1^*) = -1.3$$

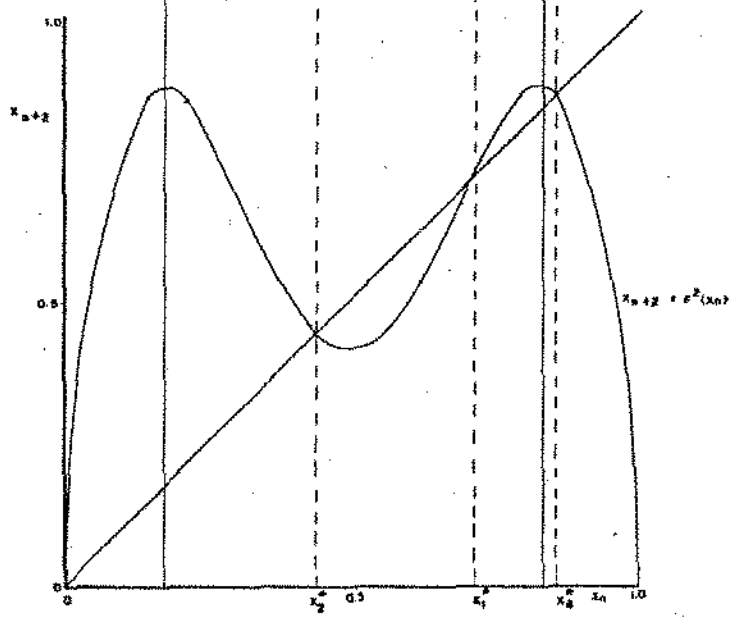
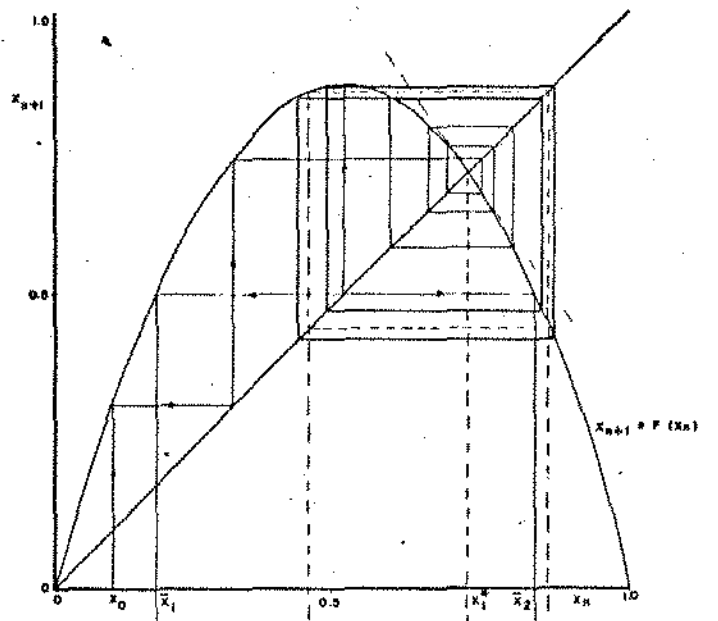
$$F'(x_2^*) = 0.132$$

$$F'(x_3^*) = -2.112$$

$$F^2(x_1^*) = [F'(x_1^*)]^2 = 1.69$$

$$F^2(x_1^*) = F'(x_1^*), F^2(x_2^*) = -0.2788, \quad i = 2, 3$$

FIG-7



$a = 3.4494897$   
 $x_0^* = 0$   
 $x_1^* = 0.71$   
 $x_2^* = 0.4399602$   
 $x_3^* = 0.8499378$   
 $\bar{x}_1 = 0.175$   
 $\bar{x}_2 = 0.824$

$F'(x_1^*) = -1.449$   
 $F'(x_2^*) = 0.4142135$   
 $F'(x_3^*) = -2.4142135$   
 $F^2(x_1^*) = [F'(x_1^*)]^2 = 2.099$   
 $F^2(x_1^*) = F'(x_2^*) \cdot F'(x_3^*) = -1 \cdot (-1) = 1$

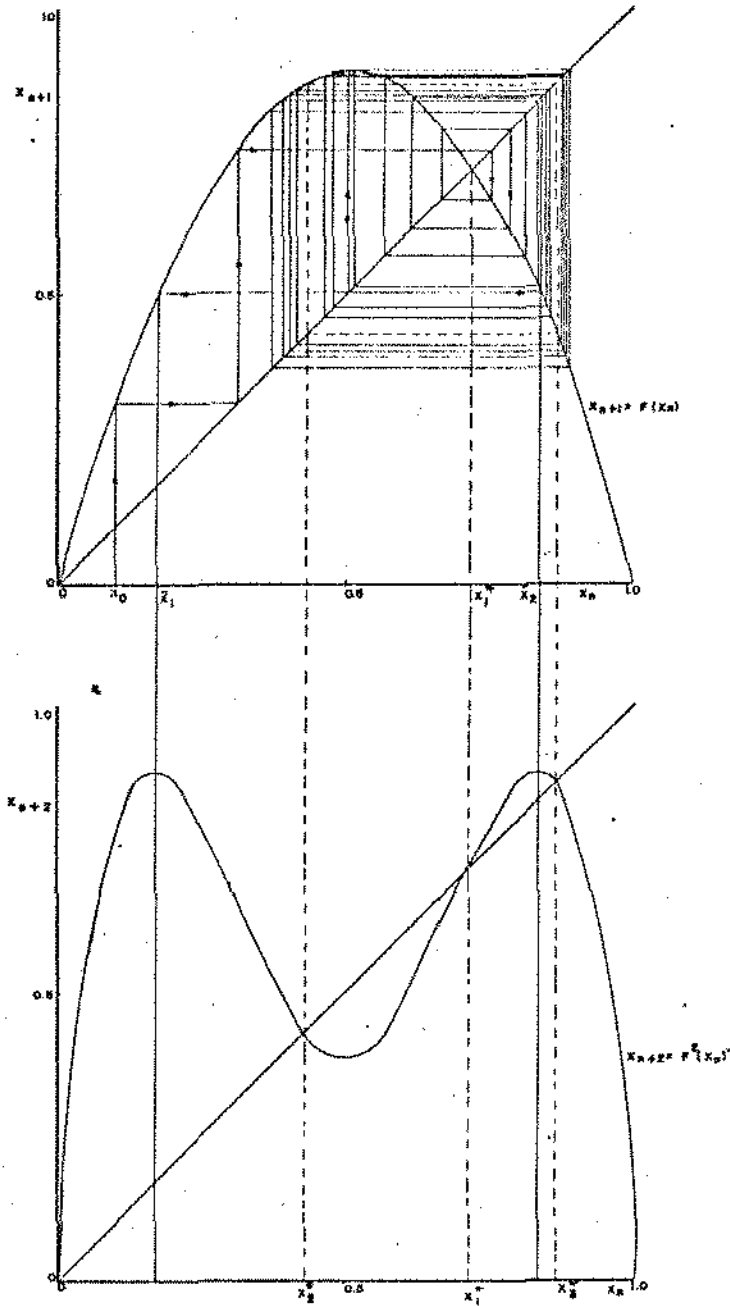
FIG - 8

maior que  $-1$ , a partir de um certo valor do parâmetro "a". Assim, quando  $F^{2^i}(x^*(1)) = -1$ ,  $i = 2, 3$ , os dois pontos de período dois, sofrem a bifurcação garfo, e cada um deles desdobra-se (ou bifurca-se) em dois outros pontos, tornando-se instável.

Além desse valor, os quatro pontos gerados por  $x^*(2)$  e  $x^*(3)$  pela bifurcação garfo, são inicialmente estáveis e correspondem a um ciclo de período quatro, ou seja, são os pontos fixos de  $F^4(x)$ . Estes pontos, por sua vez, com o crescimento do parâmetro "a" pela bifurcação garfo, também tornam-se instáveis; cada um deles dá origem a dois pontos, diferentes dos pontos fixos de  $F^4(x)$ , e formam um ciclo estável de  $F^8(x)$ . Assim por diante, as bifurcações continuam multiplicando-se rapidamente com pequenas variações do parâmetro "a", em ciclos estáveis de período  $16, 32, \dots, 2^n$ .

Embora esse processo produza uma infinita sequência de ciclos estáveis com períodos  $2^n$  ( $n \rightarrow \infty$ ), a "janela" de valores no qual estes ciclos são estáveis diminui progressivamente, de tal forma que o processo é convergente, sendo limitado superiormente por algum valor do parâmetro "a". Este valor crítico do parâmetro é um ponto de acumulação dos ciclos de período- $2^n$  [MY], e para a equação (1.9) tem o valor  $a(c) = 3,5700$  (FIG.10a).

Além desse ponto de acumulação (isto é, para  $a > a(c)$ ), existe um número infinito de pontos fixos com periodicidades diferentes, e um infinito número de diferentes ciclos periódicos. Existe também um incontável número de pontos iniciais  $x(0)$ , que dão trajetórias totalmente aperiódicas, embora limitadas. Tal situação, onde um número infinito de órbitas diferentes pode ocorrer, é caracterizada como "caótica" [L-Y]. Mas com o valor crescente do parâmetro "a",



$a = 3.5$   
 $x_0^* = 0$   
 $x_1^* = 5/7$   
 $x_2^* = 0.43$   
 $x_3^* = 0.86$   
 $\bar{x}_1 = 0.17$   
 $\bar{x}_2 = 0.83$

$F'(x_1^*) = -1.5$   
 $F'(x_2^*) = 0.49$   
 $F'(x_3^*) = -2.52$   
 $F^2(x_1^*) = [F'(x_1^*)]^2 = 2.25$   
 $F^2(x_1^*) = F(x_2^*) \cdot F(x_3^*) = -1.2348, \quad |F^2(x_1^*)| > 1$

FIG - 9

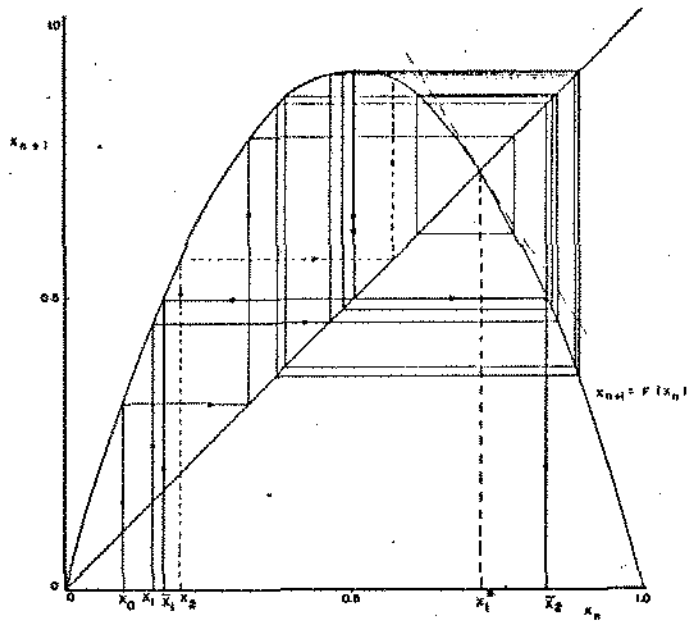


FIG - 10a

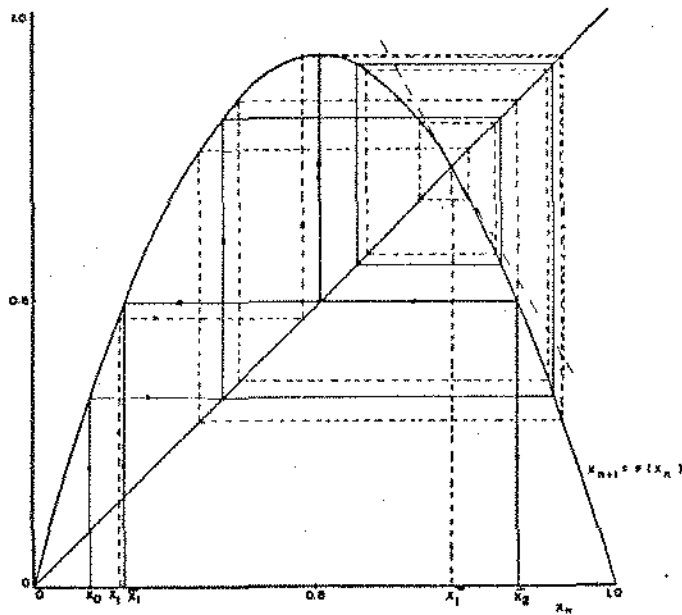


FIG - 10b

FIG - 10a

- $a = 3.57$
- $x_0^* = 0$
- $x_1^* = 0.72$
- $\bar{x}_1 = 0.17$
- $\bar{x}_2 = 0.83$

$$F'(x_1^*) = -1.5708$$

FIG - 10b

- $a = 3.6786$
- $x_0^* = 0$
- $x_1^* = 0.7282$
- $\bar{x}_1 = 0.16$
- $\bar{x}_2 = 0.84$

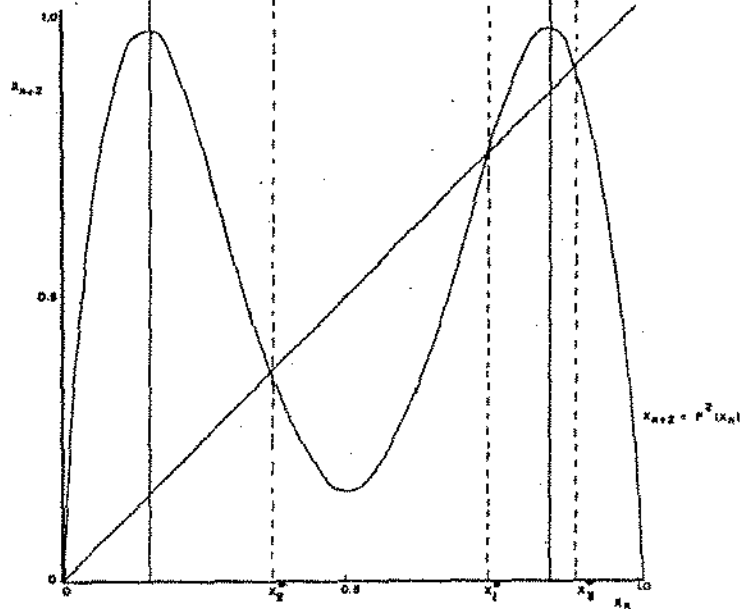
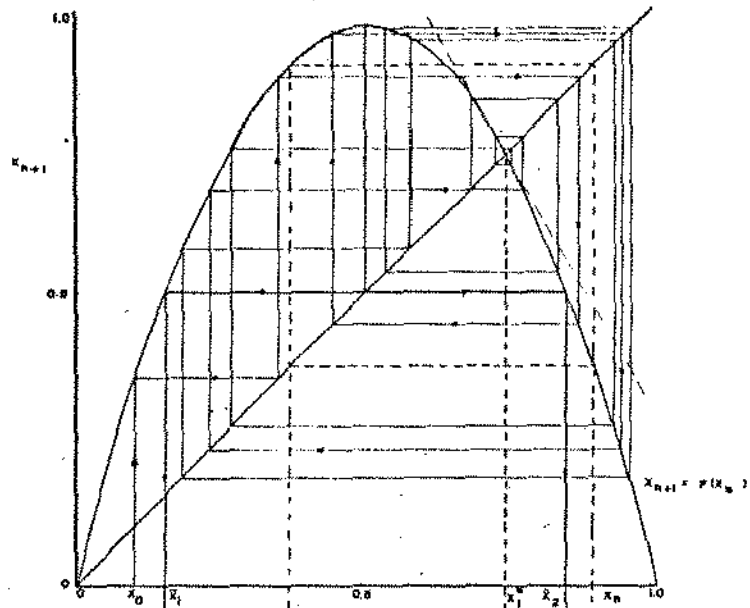
$$F'(x_1^*) = -1.6789$$

existe um valor (em  $a = 3,6786$  - FIG.10b), no qual o primeiro ciclo de período ímpar aparece. Em princípio, estes ciclos têm períodos muito longos, mas como o valor do parâmetro "a" continua a crescer, ciclos com período cada vez menores vão surgindo, até que o ciclo de período três aparece. Isto ocorre quando  $a = 3,8284$  (FIG.11). Após este valor, ciclos de período  $3 \cdot 2^n$ ,  $n=1,2,3,\dots$ , surgem por bifurcação garfo, até que se atinja novamente o caos.

Assim, o que podemos dizer é que no caso de  $F(x)$ , a bifurcação somente ocorre quando  $F'(x^*) = -1$ . Para  $F^n(x)$ , isto não é mais verdadeiro [EN]. Podem ocorrer bifurcações em pontos fixos de  $F^n(x)$  onde  $F^n'(x^*) = -1$  ou onde  $F^n'(x^*) = +1$ . Quando  $F^n'(x^*) = -1$ , as bifurcações são chamadas tipo "garfo" e quando  $F^n'(x^*) = +1$  são as bifurcações "tangenciais" que ocorrem. As bifurcações tangenciais têm um período que não é potência de 2, enquanto que as bifurcações tipo garfo têm período potência de dois quando decorrem das bifurcações de um ponto fixo. As vezes, podem ser geradas por pontos de bifurcação tangente de período K, e tem-se períodos  $K \cdot 2^n$ . As bifurcações tangenciais ocorrem somente após um caos. Em nossa análise, aumentou-se "a" até o ponto de não se ter mais órbitas periódicas; mas como "a" continuou a crescer, obteve-se um ponto ( $a = 3,8284$ ) onde o comportamento do sistema admitiu novamente órbitas periódicas; porém desta vez começando com período 3, logo bifurcando-se em  $3 \cdot 2^n$ ,  $n = 1,2,3,\dots$ , até o novo caos. Mas o valor do parâmetro "a" continuou a aumentar, até que para um determinado valor, o sistema admitiu novamente órbitas periódicas de período 4, e assim por diante.

Esse fenômeno de bifurcação, que é mostrado na (FIG.12), possui um comportamento muito elegante na sua construção. Agora, a si-

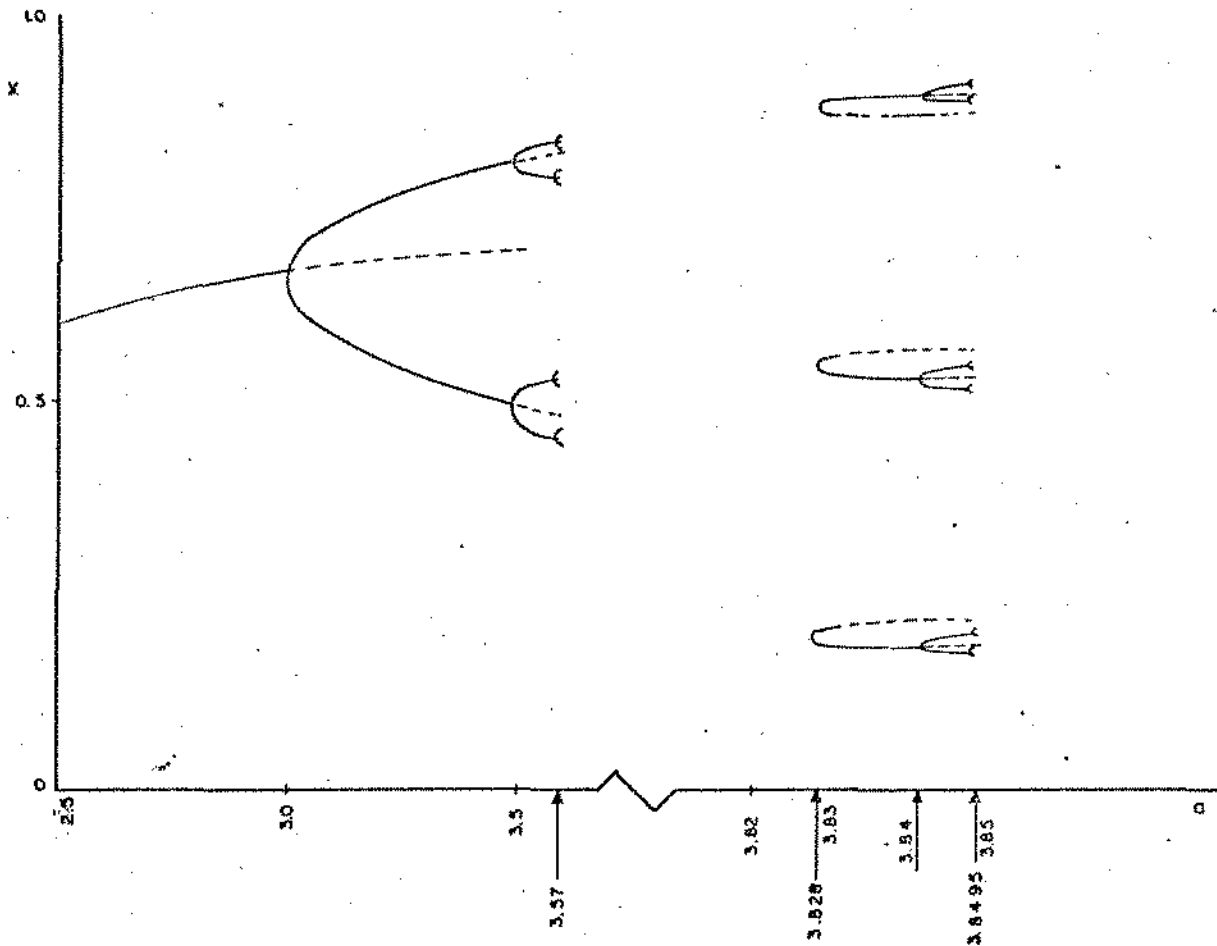




$a = 3.8284$   
 $x_0^* = 0$   
 $x_1^* = 0.74$   
 $x_2^* = 0.37$   
 $x_3^* = 0.8917706$   
 $\bar{x}_1 = 0.154$   
 $\bar{x}_2 = 0.845$

$F'(x_1^*) = -1.84$   
 $F'(x_2^*) = 0.995$   
 $F'(x_3^*) = -2.99$   
 $F^2(x_1^*) = [F'(x_1^*)]^2 = 3.39$   
 $F^2(x_1^*) = F'(x_2^*) \cdot F'(x_3^*) = -2.88, i=2,3$

FIG - 11



Esta figura, ilustra alguns dos pontos fixos estáveis (—) e instáveis (---) de vários períodos que podem surgir pelo processo de bifurcação na eq. (1.9)

À esquerda, o ponto fixo estável torna-se instável e por bifurcação tipo garfo dá origem a ciclos estáveis de período  $2^n$ . Além de  $a = 3.57$  nenhum desses ciclos é estável.

À direita, ciclos de período 3 aparecem por bifurcação tangente: um é inicialmente instável; o outro é inicialmente estável e torna-se instável dando origem a ciclos estáveis de período  $3 \cdot 2^n$ , que tem um ponto limite em  $a = 3.8495$ .

A mudança de escala no eixo  $a$ , foi necessária para se colocar os dois exemplos numa mesma figura.

FIG. 12

tução é bem diferente quando encontramos o fenômeno todo já formado. Descobrir nestas situações qual o comportamento do sistema, é uma tarefa difícil, porém não impossível !

A bifurcação que depende de um parâmetro, isto é, quando um ponto estável torna-se instável, ao mudar-se um parâmetro, dando lugar a dois novos pontos estáveis de ordem superior na hierarquia das iterações, denomina-se dobra de período. No nosso caso, isto acontece ao mudar-se o parâmetro "a". Nossa primeira dobra de período aconteceu em  $a(1) = 3$ , logo para algum  $a(2) > 3$ , veio a segunda dobra de período, e assim por diante. Como temos a restrição de que  $a \leq 4$ , os  $a(n)$  valores do parâmetro "a", para os quais os períodos dobram-se, ou seja, os valores de "a" para os quais os pontos estáveis estão para tornar-se instáveis, devem convergir para um certo  $a_\infty$ , onde o processo torna-se aperiódico. Se  $a(n)$  é o valor de "a" para o qual os períodos dobram pela n-ésima vez, Feigenbaum [FE], observou que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n+1) - a(n)}{a(n+2) - a(n+1)} = 4,6692016 \dots = \delta \quad (1.19)$$

Este número  $\delta$ , a constante de Feigenbaum, é universal. Assim, todos os sistemas que dependem de um parâmetro e que apresentam bifurcações que dobram o período da órbita periódica, cumprem (1.19). Existem ainda, muitas questões sem resposta nesta área, e muitos fenômenos matemáticos que não são bem explicados.

O interesse na apresentação destes tipos de modelos, é a sua aplicação em dinâmica de populações. O modelo em uma dimensão, é matematicamente o mais simples, em dimensões maiores, os fenômenos são mais complexos. Mesmo assim, a característica marcante destes modelos, são as flutuações periódicas da população que é um fenômeno que observado na natureza com quase todos os tipos de populações. O fato de que essas flutuações acontecem no modelo discreto em uma dimensão, e não acontecem no análogo contínuo, é uma boa indicação de que as equações discretas são bem mais apropriadas como modelos populacionais. Porém, não deixa de ser bastante estranho que o análogo discreto de um modelo contínuo e o modelo contínuo, tenham comportamentos um pouco diferentes. Esta aparente "patologia matemática" será considerada mais adiante.

## PARTE II

A análise feita no capítulo anterior, teve como pressuposto, o crescimento de uma espécie "isolada" no sistema ecológico, onde as gerações apareciam em intervalos regulares no tempo, ou seja, a reprodução da espécie era a sazonal. A discretização do modelo contínuo de Verhulst, resultou num modelo expresso por uma equação de diferenças, onde os parâmetros básicos eram a taxa de crescimento da espécie e a taxa de competição inter-específica. No entanto, dificilmente a realidade pode ser reduzida a apenas uma espécie. Os inimigos naturais existem, e a competição pela sobrevivência entre espécies diferentes é assim, inevitável.

Desta forma, os capítulos que seguem dedicam-se ao estudo das formas de interação entre espécies. A situação agora, é a de duas espécies distintas compartilhando um certo sistema ecológico que pode ir, desde a independência total entre elas, que é o caso anteriormente estudado, até a dependência total de uma espécie na outra.

Convém entretanto sublinhar-se que, para esta análise continuar sendo realizada em tempo discreto, é necessário se supor uma certa simultaneidade de reprodução entre as duas espécies. Isto é devido ao fato de que se considerando  $\Delta t$  e  $\Delta t'$ , o intervalo de tempo

que as duas espécies  $E(1)$  e  $E(2)$  reproduzem-se, se não existem inteiros  $n_1$  e  $n_2$ , tais que  $n_1 \Delta t = n_2 \Delta t'$ , então não é possível discretizar o tempo. De fato, se  $\Delta t = 1$  e, por exemplo,  $\Delta t' = \pi$ , não existirá transitividade na equação de diferenças, isto é, se

$$x(n+1) = F_1(x(n))$$

$$y(n+1) = F_2(y(n))$$

não será possível a discretização onde:

$$x(n+2) = F_1(F_1(x(n))) \quad , e$$

$$y(n+2) = F_2(F_2(y(n)))$$

já que, sendo  $\frac{\Delta t'}{\Delta t}$  não racional, nunca existirá uma sincronização nas reproduções.

Uma outra forma de interpretação de modelos discretos de duas espécies ou duas variáveis é admitir-se espécies únicas. Neste sentido, necessariamente, leva-se em conta as mudanças que ocorrem nas mesmas, podendo uma das variáveis representar a fase "jovem", e a outra variável, a fase "adulta" da espécie após a metamorfose.

O que será feito nestes capítulos, pode ser traduzido num estudo de equações de diferenças em duas variáveis. Inicialmente, consideraremos duas espécies compartilhando o mesmo sistema ecológico e as formas de interação entre elas (CAP.II). Em seguida, consideraremos um modelo que é uma variação do primeiro, pois a espécie em questão é única, com duas classes etárias: os jovens e os adultos. Este último, é uma simplificação do modelo Leslie (CAP.III).

Na análise do capítulo-III consideraremos que toda população jovem de uma determinada geração consegue sobreviver até a geração precedente, tornando-se adulta. Entretanto, indiscutível e inevitavelmente, existem fatores que impedem que a total sobrevivência da popu-

lação após uma unidade de tempo, seja uma realidade observável. Apesar disto, estes fatores não poderão fazer parte desta análise pois certas simplificações são necessárias, e devem ser feitas para obtermos um modelo, cuja análise matemática esteja de acordo com os nossos propósitos. Isto limita a aplicação do mesmo em processos ecológicos reais, existindo portanto nesse estudo a desvantagem sob o ponto de vista ecológico.

Faz-se necessário entretanto sublinharmos que, se por um lado existe essa limitação, por outro lado, o comportamento real dos processos ecológicos aparenta ser em tempo discreto. Sem dúvida, isto indica que as equações discretas são mais apropriadas como modelos populacionais, sendo o tempo contínuo uma simplificação menos fiel da realidade; porém historicamente adotado na análise matemática de modelos ecológicos.

## CAPÍTULO II

Neste capítulo, faremos uma análise das equações de diferenças em duas variáveis, onde cada variável representará o número de indivíduos de uma espécie.

Suponhamos então que, num certo sistema ecológico existam duas espécies  $E(1)$  e  $E(2)$ , sendo respectivamente,  $x(t)$  e  $y(t)$  o número de indivíduos de cada espécie no instante  $t$ ; e  $x(0)$  e  $y(0)$  o número inicial de indivíduos de cada espécie no instante  $t = 0$ . A dinâmica de interação entre as espécies depende somente dos valores das variáveis  $x(0)$  e  $y(0)$ , que inicialmente devem ser não nulos, pois não se considera nesse modelo a geração espontânea das espécies. A partir disso, o que ocorre no sistema, é consequência das duas espécies compartilharem o mesmo sistema ecológico. Certamente, as competições intra e inter-específicas existirão, sejam elas benéficas ou não, desde que ambas as espécies dependam das mesmas fontes de alimento, ou do mesmo espaço físico habitável no sistema.

Neste contexto, existirão  $n_1 x(t)$  nascimentos para a espécie  $E(1)$  e  $n_2 y(t)$  nascimentos para a espécie  $E(2)$ , ou seja,  $n_i$  é a taxa de reprodução de cada espécie  $E(i)$  ( $i = 1, 2$ ). Por outro lado, existirão também  $m_1 x(t)$  indivíduos de  $E(1)$ , e  $m_2 y(t)$  indivíduos



de E(2), que não sobreviverão devido a competição intra ou inter-específica, isto é,  $m_i$  é a taxa de morte de cada espécie E(1), ( $i = 1, 2$ ). Disto, segue que:  $a_1 = n_1 - m_1$  e  $a_2 = n_2 - m_2$  são, respectivamente, as taxas de crescimento de E(1) e E(2). A forma mais simples de se representar este modelo, é através de equações diferenciais:

$$\frac{dx}{dt} = x G_1(x, y) \tag{2.1}$$

$$\frac{dy}{dt} = y G_2(x, y)$$

com

$$G_1(x, y) = a_1 + b_1 x + c_1 y \tag{2.2}$$

$$G_2(x, y) = a_2 + c_2 x + b_2 y$$

funções lineares. Esta é a forma geral do modelo linear de Lotka-Volterra [LO, VOI]; o primeiro modelo onde se analisou as formas de interação entre duas espécies em tempo contínuo.

O significado ecológico dos parâmetros de  $G_1(x, y)$  é análogo ao de  $G_2(x, y)$ . Assim,  $a_1$  é a taxa de crescimento da espécie representada por  $x$ , E(1);  $b_1 < 0$  é a taxa de competição intra-específica; e  $c_1 < 0$  é a taxa de competição inter-específica. Agora, se  $b_1 > 0$ , então  $b_1$  é a taxa de cooperação intra-específica de E(1), e se  $c_1 > 0$ , então  $c_1$  é a taxa de cooperação inter-específica entre

$E(1)$  e  $E(2)$ . Os casos particulares, onde alguns dos parâmetros  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$  ( $i = 1, 2$ ) são nulos, devem ser interpretados como acima. Por exemplo, no modelo clássico de predador-presa de Volterra, tem-se  $b_1 = b_2 = 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 < 0$ ,  $c_1 < 0$  e  $c_2 > 0$ . Isto significa que não existe competição intra-específica, e que a espécie representada por "y", é predadora da espécie representada por "x".

Podemos notar também que  $G_1(x,y)$  não é, em geral, uma transformação linear já que,  $G_1(0,0) = a_1$  nem sempre é nulo. Aliás, nos casos mais interessantes,  $a_1$  é sempre não nulo.

Apesar da aparente simplicidade das equações diferenciais do modelo (2.1), devido a linearidade da restrição (2.2), as suas soluções podem ser obtidas em situações muito particulares. Mesmo se fazendo a simplificação (2.2), o modelo (2.1) nem sempre tem solução explícita, isto é, nem sempre é possível se obter  $x(t)$  e  $y(t)$  que verifiquem as equações diferenciais de (2.1).

As variáveis, "x" e "y" deste modelo, devem ficar restritas ao primeiro quadrante, já que, qualquer valor negativo que elas possam assumir, certamente não terá sentido, pois estamos lidando com crescimento populacional.

O estudo deste modelo em tempo contínuo não é o objetivo deste trabalho. Queremos sim, analisar esses modelos em tempo discreto, já que o comportamento real dos sistemas ecológicos aparentemente acontece nesta forma. Fazendo-se então, a discretização do modelo contínuo de Lotka-Volterra pelo Método de Euler, e normalizando o passo da discretização no tempo  $\Delta t = 1$ , obtém-se:

$$x(n+1) = x(n) [G_1(x(n), y(n)) + 1] = F_1(x(n), y(n)) \quad (2.3)$$

$$y(n+1) = y(n) [G_2(x(n), y(n)) + 1] = F_2(x(n), y(n))$$

O significado ecológico dos parâmetros de  $G_i(x(n), y(n))$ ,  $i=1,2$ , é análogo ao modelo contínuo; com  $x(i), y(i)$  ( $i=1,2,\dots,n,\dots$ ) denotando o tamanho da população na geração ( $i$ ) da espécie  $E(1)$  e  $E(2)$ , respectivamente.

Sabemos que o objetivo de qualquer população se reflete na tentativa de atingir um estágio onde exista um equilíbrio populacional não nulo, e que, nesta tentativa, vários tipos de comportamentos podem ocorrer. Considerando-se que no modelo (2.3), duas espécies compartilham o mesmo sistema ecológico, poderão existir então situações, onde apenas uma espécie sobrevive; outras situações em que ambas as espécies ficam extintas, e a mais interessante delas, quando existe uma interação entre as espécies, levando-as a uma convivência estável no tempo, sem que haja a extinção de nenhuma delas. De uma forma ou de outra, a população certamente tenderá ao equilíbrio.

Neste contexto, o nosso objetivo será o de analisar o sistema (2.3) em torno dos seus pontos de equilíbrio. Estes pontos, são os pontos fixos do modelo (2.3).

Primeiramente tem-se que  $(x^*, y^*) = (0, 0)$  é sempre um ponto fixo de (2.3). Agora, num ponto fixo qualquer,  $P_F = (x^*, y^*)$ , deve-se ter que:

$$G_1(x^*, y^*) = 0 \quad (2.4)$$

$$G_2(x^*, y^*) = 0$$

Já que os pontos fixos de (2.3) são obtidos, fazendo-se:

$$\dot{x}(n+1) = x(n) = x^* \tag{2.5}$$

$$y(n+1) = y(n) = y^*$$

Estes pontos fixos ou pontos de equilíbrio poderão ser, tanto estáveis, quanto instáveis. Portanto, o estudo que faremos estará baseado na análise da estabilidade ou instabilidade do sistema (2.3). Para isto, basta analisarmos o comportamento local do modelo, através da sua linearização em torno destes pontos.

A função:  $F(x(n), y(n)) = (F_1(x(n), y(n)), F_2(x(n), y(n))) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , é uma função diferenciável com funções coordenadas  $F_i(x(n), y(n))$ ,  $i = 1, 2$ , cada uma delas diferenciável; fazendo-se a linearização de  $F(x(n), y(n))$  em torno dos seus pontos fixos pelo desenvolvimento de Taylor e, não se considerando os termos de ordem maior ou igual a dois, obtém-se:

$$F_1(x(n), y(n)) \approx F_1(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|_{PF} (x - x^*) + \left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_{PF} (y - y^*)$$

$$F_2(x(n), y(n)) \approx F_2(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial F_2}{\partial x} \right|_{PF} (x - x^*) + \left. \frac{\partial F_2}{\partial y} \right|_{PF} (y - y^*)$$

donde

$$F_1(x(n), y(n)) \approx x^* [G_1(x^*, y^*) + 1] + \left. \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|_{PF} (x - x^*) + \left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_{PF} (y - y^*) \tag{2.6}$$

$$F_2(x(n), y(n)) \approx y^* [G_2(x^*, y^*) + 1] + \left. \frac{\partial F_2}{\partial x} \right|_{PF} (x - x^*) + \left. \frac{\partial F_2}{\partial y} \right|_{PF} (y - y^*)$$

Tomando-se:

$$\alpha_i = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x} \right|_{P_F}, \quad i = 1, 2$$

(2.7)

$$\beta_i = \left. \frac{\partial F_i}{\partial y} \right|_{P_F}, \quad i = 1, 2$$

tem-se

$$F_1(x(n), y(n)) - x^* \approx x^* G_1(x^*, y^*) + \alpha_1 (x(n) - x^*) + \beta_1 (y(n) - y^*) \quad (2.8)$$

$$F_2(x(n), y(n)) - y^* \approx y^* G_2(x^*, y^*) + \alpha_2 (x(n) - x^*) + \beta_2 (y(n) - y^*)$$

De (2.4) tem-se  $G_1(x^*, y^*) = G_2(x^*, y^*) = 0$ , portanto,

$$F_1(x(n), y(n)) - x^* \approx \alpha_1 (x(n) - x^*) + \beta_1 (y(n) - y^*) \quad (2.9)$$

$$F_2(x(n), y(n)) - y^* \approx \alpha_2 (x(n) - x^*) + \beta_2 (y(n) - y^*)$$

Podemos representar (2.9) na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} F_1(x(n), y(n)) - x^* \\ F_2(x(n), y(n)) - y^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) - x^* \\ y(n) - y^* \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$\text{onde } J(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

é a matriz jacobiana de  $F(x(n), y(n))$  no ponto fixo  $P_f = (x^*, y^*)$ .

Quando a matriz  $J(x^*, y^*)$  tem dois autovalores distintos,  $\lambda(1) \neq \lambda(2)$ , então  $J(x^*, y^*)$  pode ser reduzida a uma matriz diagonal  $\Lambda$ , isto é, leva-se a matriz (2.11) a sua base de autovetores. Para tal, basta multiplicar a matriz  $J(x^*, y^*)$  por uma matriz  $P$ , de mudança de base, não singular, tal que:

$$P^{-1} J P = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda(1) & 0 \\ 0 & \lambda(2) \end{pmatrix}$$

Isto transforma a matriz  $J(x^*, y^*)$  numa matriz similar a

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda(1) & 0 \\ 0 & \lambda(2) \end{pmatrix}, \text{ onde } \lambda(1) \neq \lambda(2)$$

Neste contexto, tem-se que o sistema (2.10) tem um comportamento local, dentro de uma vizinhança de  $(x^*, y^*)$ , análogo ao sistema:

$$\begin{pmatrix} F_1(x(n), y(n)) - x^* \\ F_2(x(n), y(n)) - y^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \lambda(1) & 0 \\ 0 & \lambda(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) - x^* \\ y(n) - y^* \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

E conseqüentemente, a equação original (2.3) tem um comportamento local numa vizinhança de  $(x^*, y^*)$  análogo a:

$$x(n+1) - x^* \approx \lambda(1) (x(n) - x^*)$$

(2.13)

$$y(n+1) - y^* \approx \lambda(2) (y(n) - y^*)$$

para  $(x(n), y(n))$  suficientemente perto do  $P_F = (x^*, y^*)$ .

Portanto

$$x(1) - x^* \approx \lambda(1) (x(0) - x^*)$$

$$x(2) - x^* \approx \lambda(1) (x(1) - x^*) = \lambda^2(1) (x(0) - x^*)$$

"

"

"

$$x(n+1) - x^* \approx \lambda^{n+1}(1) (x(0) - x^*)$$

Analogamente,

$$y(1) - y^* \approx \lambda(2) (y(0) - y^*)$$

$$y(2) - y^* \approx \lambda^2(2) (y(0) - y^*)$$

"

"

"

$$y(n+1) - y^* \approx \lambda^{n+1}(2) (y(0) - y^*)$$

Logo, se  $|\lambda(1)| < 1$   $\lambda^{n+1}(1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , faz-se cada vez menor e  $x(n+1)$  converge para  $x^*$ . De forma análoga, se  $|\lambda(2)| < 1$   $\lambda^{n+1}(2)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , faz-se cada vez menor e  $y(n+1) \rightarrow y^*$ .

Assim, se  $|\lambda(1)|$  e  $|\lambda(2)|$  são menores que um, a distância de  $(x(n), y(n))$  ao ponto fixo  $(x^*, y^*)$  é menor que a distância de  $(x(0), y(0))$  ao ponto fixo  $(x^*, y^*)$ . De fato, essa distância diminui, a medida que  $n$  cresce, e a cada iteração ficamos mais e mais próximos do ponto fixo.

Portanto, se  $|\lambda(1)|, |\lambda(2)| < 1$ , o ponto fixo  $(x^*, y^*)$  é um ponto "estável" ou "atrator", com as iterações convergindo para ele. Da mesma forma, pode-se discernir para ver que, se  $|\lambda(1)| > 1$  ou se  $|\lambda(2)| > 1$  o ponto fixo  $P_f = (x^*, y^*)$  é um ponto "instável" ou "repulsor", com as iterações afastando-se dele na componente onde o seu correspondente autovalor é maior que um.

Resumindo, tem-se que se os autovalores são em valores absolutos menores que um, então o ponto fixo  $P_f = (x^*, y^*)$  é estável ou atrator, e  $F(x(n), y(n))$  converge para ele. No caso de, ao menos um dos autovalores ser maior que +1 ou menor que -1, o ponto fixo é instável ou repulsor e  $F(x(n), y(n))$  diverge dele.

Para obter-se os autovalores, note que de (2.10) e de (2.12) tem-se:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) - x^* \\ y(n) - y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(1) & 0 \\ 0 & \lambda(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n) - x^* \\ y(n) - y^* \end{pmatrix}$$



Este sistema tem solução não nula somente se o

$$\det \begin{bmatrix} \alpha_1 - \lambda(1) & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \lambda(2) \end{bmatrix} = 0$$

ou seja, a condição necessária e suficiente para  $\lambda$  ser um autovalor de  $J(x^*, y^*)$  é que  $\det [J - \lambda I] = 0$

Agora, se  $P_F = (x^*, y^*)$  é um ponto fixo de (2.3), então a equação característica da matriz jacobiana de (2.3) é:

$$\det \begin{bmatrix} G_1(x^*, y^*) + x^* \frac{\partial G_1}{\partial x} \Big|_{P_F} + 1 - \lambda & x^* \frac{\partial G_1}{\partial y} \Big|_{P_F} \\ y^* \frac{\partial G_2}{\partial x} \Big|_{P_F} & G_2(x^*, y^*) + y^* \frac{\partial G_2}{\partial y} \Big|_{P_F} + 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Vejamos primeiramente a estabilidade do sistema no ponto  $P_F = (0,0)$ , onde temos a seguinte equação característica da matriz jacobiana:

$$\det \begin{bmatrix} G_1(0,0) + 1 - \lambda & 0 \\ 0 & G_2(0,0) + 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Resolvendo-se o determinante, obtemos:

$$\lambda^2 - \lambda[G_1(0,0) + G_2(0,0) + 2] + G_1(0,0)G_2(0,0) + G_1(0,0) + G_2(0,0) + 1 = 0$$

donde

$$\lambda_{1,2} = \frac{[G_1(0,0) + G_2(0,0) + 2] \pm [G_1(0,0) - G_2(0,0)]}{2}$$

E os autovalores obtidos são:

$$\lambda(1) = 1 + G_1(0,0) = 1 + a_1$$

$$\lambda(2) = 1 + G_2(0,0) = 1 + a_2$$

O ponto fixo  $P_F = (0,0)$  é estável quando os autovalores  $\lambda(1)$  e  $\lambda(2)$  são em valor absoluto, menores que um, isto é, quando  $|\lambda(1)| < 1$  e  $|\lambda(2)| < 1$ . Nesse caso, isso acontece somente quando a taxa de crescimento  $a_1$  da espécie  $E(1)$  (representada por  $x$ ) e a taxa de crescimento  $a_2$  de  $E(2)$  (representada por  $y$ ) estiverem no intervalo  $(-2,0)$ . Biologicamente, isto significa que as duas espécies irão a extinção, já que  $(0,0)$  é um atrator, ficando portanto um caso desinteressante.

Vejamos então as condições gerais de estabilidade num ponto fixo qualquer  $P_F = (x^*, y^*)$ .

Como  $G_1(x^*, y^*) = G_2(x^*, y^*) = 0$ , a equação característica da matriz jacobiana em  $(x^*, y^*)$  é:

$$\det \begin{bmatrix} x^* b_1 + 1 - \lambda & x^* c_1 \\ y^* c_2 & y^* b_2 + 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Já que

$$\left. \frac{\partial G_1}{\partial x} \right|_{P_F} = b_1$$

$$\left. \frac{\partial G_1}{\partial y} \right|_{P_F} = c_1$$

$$\left. \frac{\partial G_2}{\partial x} \right|_{P_F} = c_2$$

$$\left. \frac{\partial G_2}{\partial y} \right|_{P_F} = b_2$$

Resolvendo-se então o determinante, obtemos:

$$\lambda^2 - \lambda(x^* b_1 + y^* b_2 + 2) + x^* y^* b_1 b_2 + x^* b_1 + y^* b_2 + 1 - x^* y^* c_1 c_2 = 0$$

(2.14)

donde

$$\Delta = (x^* b_1 - y^* b_2)^2 + 4 x^* y^* c_1 c_2$$

(2.15)

O primeiro termo de (2.15) é sempre positivo, e desta forma temos dois casos a serem analisados. O primeiro, acontece quando  $c_1$  e  $c_2$  têm o mesmo sinal; e o segundo quando têm sinais contrários.

No caso de  $c_1$  e  $c_2$  terem o mesmo sinal, poderá existir uma competição ou uma cooperação inter-específica, dependendo de ambas serem negativas ou ambas positivas, respectivamente. Esse é o caso onde os autovalores são reais.

Quando  $c_1$  e  $c_2$  têm sinais contrários, existe simultaneamente uma cooperação e uma competição entre as espécies  $E(1)$  e  $E(2)$ . Um exemplo disso seria considerarmos  $E(2)$  como todas as fontes de alimento de  $E(1)$ , que é uma situação clássica do modelo predador-presa de Lotka-Volterra. Na ausência de  $E(1)$ , a espécie  $E(2)$  cresce sem limite e na ausência de  $E(2)$ , a espécie  $E(1)$  morre de fome. Assim, enquanto  $E(2)$  colabora com  $E(1)$  servindo de alimento;  $E(1)$  preda em  $E(2)$ . Neste caso, os autovalores podem chegar a ser complexos conjugados.

Facilitemos a notação denotando por:

$$\Omega = - ( x^* b_1 + y^* b_2 )$$

(2.16)

$$K = ( x^* b_1 + y^* b_2 )$$

1º CASO:  $c_1 c_2 > 0$  (mesmo sinal)

De (2.15) e (2.16) tem-se que:

$$\Delta = K^2 + 4 x^* y^* c_1 c_2$$

Como  $x^* > 0$ ,  $y^* > 0$ , temos  $\Delta$  positivo e os autovalores são reais.

Então,

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \Omega \pm \sqrt{\Delta}}{2} = 1 - \frac{(\Omega \pm \sqrt{\Delta})}{2} \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

Analisemos agora o que acontece com  $\lambda(1)$  e  $\lambda(2)$  quando  $\sqrt{\Delta} > \Omega$ , e  $\sqrt{\Delta} < \Omega$ . Para ambos os casos,  $\Omega$  pode ser tanto negativo quanto positivo.

1º) Quando  $\sqrt{\Delta} > |\Omega|$ , tem-se que  $\Omega - \sqrt{\Delta} < 0$ . Isto quer dizer que uma das raízes de (2.14), é sempre maior que um. Portanto, o ponto fixo é instável sempre que  $\sqrt{\Delta} > |\Omega|$

2º) Para o caso onde  $\sqrt{\Delta} < \Omega$  e  $\Omega < 0$ , tem-se que:  $\Omega - \sqrt{\Delta} < 0$  e  $\Omega + \sqrt{\Delta} < 0$ . Logo as raízes  $\lambda(1)$  e  $\lambda(2)$  são sempre maiores que um e o ponto fixo também é instável.

3º) Quando  $\sqrt{\Delta} < \Omega$  e  $\Omega > 0$ , tem-se que  $\Omega - \sqrt{\Delta} > 0$  e  $\Omega + \sqrt{\Delta} > 0$ . Assim,  $\lambda(1) < 1$  e  $\lambda(2) < 1$  e dessa forma o ponto fixo é estável. Neste caso, entretanto,  $\lambda(1)$  ou  $\lambda(2)$  podem assumir o valor menor que  $-1$ , e o ponto fixo torna-se instável. Quando, por exemplo,  $|\lambda(1)| < 1$  e  $\lambda(2) = -1$ , ocorre a bifurcação garfo. Assim,

$$-1 = \lambda(2) < \lambda(1) < 1 \quad (2.17)$$

$$-1 = 1 - \frac{(\Omega + \sqrt{\Delta})}{2} < 1 - \frac{(\Omega - \sqrt{\Delta})}{2} < 1$$

E a bifurcação garfo acontece se, em (2.17),  $\Omega + \sqrt{\Delta} = 4$ .  
 Portanto, se  $\Omega + \sqrt{\Delta} < 4$ , então  $\lambda(2)$  é sempre maior que  $-1$ . E sendo  $-1 < \lambda(2) < \lambda(1) < 1$ , temos que o ponto fixo,  $P_F$ , é estável sempre que  $\Omega + \sqrt{\Delta} < 4$ . Caso  $\Omega + \sqrt{\Delta} > 4$ , o ponto fixo  $P_F$  é instável.

Resumindo temos:

$$i) \sqrt{\Delta} > |\Omega| \implies P_F \text{ é instável}$$

$$ii) \sqrt{\Delta} < \Omega, \Omega < 0 \implies P_F \text{ é instável.}$$

$$iii) \sqrt{\Delta} < \Omega, \Omega > 0 \text{ e } \Omega + \sqrt{\Delta} > 4 \implies P_F \text{ é instável}$$

$$iv) \sqrt{\Delta} < \Omega, \Omega > 0 \text{ e } \Omega + \sqrt{\Delta} < 4 \implies P_F \text{ é estável.}$$

**2º CASO:**  $c_1 c_2 < 0$  (sinais contrários)

De (2.15) e (2.16) tem-se que:

$$\Delta = K^2 + 4 x^* y^* c_1 c_2$$

e para  $K^2 > 4 x^* y^* c_1 c_2$  as raízes de (2.14) são reais. Caso contrário, as raízes serão complexas.

Analiseemos os dois sub-casos:

### 2a) Raízes reais

Para isto,  $\Delta$  deve ser positivo. Então deve acontecer:

$$K^2 > 4 x^* y^* c_1 c_2 \quad (2.18)$$

Este caso é análogo ao primeiro, com a condição (2.18) inclusive.

### 2b) Raízes complexas

Neste caso,  $\Delta$  é negativo e

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{(\Omega \pm i \sqrt{\Delta})}{2}$$

são raízes complexas conjugadas.

O módulo de cada uma das raízes, nada mais é do que  $\lambda(1) \lambda(2)$ , ou seja, é o termo independente de (2.14). Assim, se o termo de (2.14) que não tem  $\lambda^2$  ou  $\lambda$ , for menor que um; ou seja, se

$$0 < x^* y^* b_1 b_2 + x^* b_1 + y^* b_2 + 1 - x^* y^* c_1 c_2 < 1$$

ou

$$-1 < x^* y^* (b_1 b_2 - c_1 c_2) + x^* b_1 + y^* b_2 < 0$$

então o ponto fixo,  $P_F$ , é estável. Caso contrário,  $P_F$  é instável.

Quando este termo vale exatamente um, isto é, quando

$$x^* y^* (b_1 b_2 - c_1 c_2) + x^* b_1 + y^* b_2 = 0$$

ou quando

$$-b_1 b_2 + c_1 c_2 = \frac{b_1}{y^*} + \frac{b_2}{x^*}$$

acontece a bifurcação Hopf.



Portanto, podemos resumir as condições de estabilidade do ponto fixo,  $P_F$ , da seguinte forma:

**Raízes reais:**

Se  $\Delta > 0$ , o ponto fixo  $P_F$  é estável somente se:

a)  $\Omega > 0$

b)  $\sqrt{\Delta} < \Omega$

c)  $\Omega + \sqrt{\Delta} < 4$

Com

$$\Omega = - (x^* b_1 + y^* b_2)$$

$$\Delta = (x^* b_1 + y^* b_2)^2 + 4 x^* y^* c_1 c_2$$

**Raízes complexas:**

Se  $\Delta < 0$ , o ponto fixo  $P_F$  é estável somente se:

$$0 < (1 + x^* b_1) (1 + y^* b_2) - x^* y^* c_1 c_2 < 1 \quad (2.19)$$

No caso de se ter (2.19) igual a um, tem-se a bifurcação de Hopf.

### CAPÍTULO III

A proposta de estudo deste capítulo será baseada na análise de um modelo simplificado do modelo de Leslie, que descreve o crescimento de uma única espécie dividida em duas faixas etárias.

Sendo tal espécie assim definida, consideremos então  $E_x$ , a espécie representada pelos indivíduos "jovens", e  $E_y$  a espécie que denota a segunda classe etária, os "adultos".

O modelo que analisaremos, será restrito a equações de diferenças da seguinte forma:

$$\begin{aligned}x(n+1) &= F(x(n), y(n)) \\ y(n+1) &= x(n) G(x(n), y(n))\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $F(x(n), y(n))$  é uma função que depende da densidade populacional, ou seja, o tamanho da população "jovem" após decorrer uma unidade de tempo,  $x(n+1)$ , depende do tamanho da população "jovem" existente na geração precedente,  $x(n)$ , e do número de "jovens" que nesta geração se tornaram "adultos",  $y(n)$ . Por outro lado tem-se que, apenas uma parcela de indivíduos da primeira classe etária sobrevive ao decorrer uma

unidade de tempo, tornando-se "adulta". Define-se então,  $G(x(n),y(n))$  como sendo tal parcela de indivíduos "jovens" que sobrevivem para a segunda classe etária, de tal forma que o tamanho da população "adulta" após decorrer uma unidade de tempo,  $y(n+1)$ , é diretamente proporcional ao número de jovens existentes na geração precedente.

Neste estudo,  $G(x(n),y(n))$  será considerada uma constante:

$$G(x(n),y(n)) = S$$

e  $F(x(n),y(n))$ , sendo a função clássica de Leslie é da seguinte forma:

$$F(x(n),y(n)) = b(\alpha x(n) + \beta y(n)) \exp[-a(\alpha x(n) + \beta y(n))] \quad (3.2)$$

O modelo (3.1) é analisado por J.Guckenheimer, G.Oster e A.Ipaktchi [GOI] sob certas restrições; e, sob estas mesmas restrições, o nosso estudo será desenvolvido, embora saibamos ser muito pouco provável encontrarmos uma situação ecológica real, governada por um sistema de equações do tipo (3.1); este modelo é interessante pelo seu comportamento perto dos pontos fixos.

As restrições sob as quais este modelo (3.1) será estudado, são:

- 1)  $\alpha = \beta$  , significando que a taxa de reprodução da espécie  $E_x$  e a de  $E_y$  , são iguais.
- 11)  $a\alpha = a\beta = \text{constante} = 0,1$  , é a taxa de competição inter-específica, pelos recursos disponíveis.

iii)  $G(x(n), y(n)) = S = 1$ , implicando que toda espécie jovem consegue sobreviver após uma unidade de tempo, tornando-se adulta.

Com isto, obtemos um modelo simplificado de Leslie, da forma:

$$x(n+1) = r [x(n)+y(n)] \exp(-0,1 [x(n)+y(n)]) = F_1 [x(n), y(n)] \quad (3.3)$$

$$y(n+1) = x(n) = F_2 [x(n), y(n)]$$

O nosso objetivo será o de examinar a natureza das trajetórias geradas por (3.3) quando o parâmetro "r" é variado, ou seja, quando a taxa de reprodução é variada. Na verdade, queremos saber "quando" podemos considerar que um equilíbrio populacional é atingido. Mais ainda, quais os parâmetros que devem e podem ser controlados, a fim de evitarmos uma superpopulação ou uma extinção da espécie; ou para fins de controle biológico, quais os parâmetros que permitiriam extinguir ou manter a espécie em níveis mínimos. Esses parâmetros podem referir-se, tanto as condições climáticas e aos inimigos naturais que a espécie enfrenta para conseguir manter a sua sobrevivência, quanto as fontes de recursos naturais disponíveis para sua alimentação.

Começemos então determinando o ponto de equilíbrio (ou ponto fixo) do modelo, que é o ponto onde o crescimento populacional é estacionário, fazendo-se:

$$x(n+1) = x(n) = x^*$$

$$y(n+1) = y(n) = y^*$$

Como de (3.3) tem-se:

$$y(n+1) = x(n),$$

No ponto fixo  $P_F = (x^*, y^*)$  deve-se cumprir:

$$x(n+1) = x(n) = x^*$$

$$y(n+1) = y(n) = y^*$$

$$y(n+1) = x(n)$$

E o ponto fixo,  $P_F$ , fica caracterizado por:  $x^* = y^*$

Assim,

$$x^* = r(2x^*) \exp(-0.2 x^*)$$

ou

$$x^* = y^* = \frac{\ln(2r)}{0,2} \quad (3.4)$$

Como nos modelos anteriores, aqui também será feita uma análise a respeito da estabilidade do sistema (3.3), através da linearização em torno do seu ponto fixo. Conseqüentemente, podemos assim ter uma idéia do comportamento do sistema numa vizinhança deste ponto. Para isto, calculemos então as derivadas parciais de (3.3).

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = r \exp[-0,1(x+y)] - 0,1r(x+y) \exp[-0,1(x+y)]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = 0$$

No ponto fixo  $P_F$ , o valor de  $\frac{\partial F_1}{\partial x}$  e  $\frac{\partial F_1}{\partial y}$  é:

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|_{P_F} = \left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_{P_F} = \frac{1}{2} [1 - \ln(2r)] = D \quad (3.5)$$

e a equação característica da matriz jacobiana é:

$$\det \begin{bmatrix} D - \lambda & D \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Resolvendo-se o determinante, obtemos o seguinte polinômio característico:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda D - D = 0 \quad (3.6)$$

As raízes de (3.6) são reais se o seu discriminante for positivo, isto é, se  $D^2 + 4D \geq 0$ . Em outras palavras, se  $D \geq 0$  ou  $D \leq -4$ .

Agora, se  $D \leq -4$ , então um dos autovalores próprios é sempre menor ou igual a  $-2$ , significando que o ponto fixo  $P_F$  de (3.3) é sempre instável. Se  $D \geq 0$ , o ponto fixo  $P_F$  é estável para  $0 \leq D < 1/2$ . No caso onde  $D = 1/2$ , temos  $\lambda(1) = +1$  e  $\lambda(2) = -1/2$ , e pode-se ter uma bifurcação tangente. Finalmente, se  $D > 1/2$  o ponto fixo  $P_F$  é instável, pois um dos autovalores é sempre maior que um.

Dessa forma, o ponto fixo deverá ser estável quando  $-4 < D < 1/2$ . Agora, para  $-4 < D < 0$ , os autovalores são complexos e

quando  $0 \leq D < 1/2$ , os autovalores são reais. Desde que para  $0 \leq D < 1/2$  ou  $1/2 < r \leq e/2$  os autovalores reais, são menores que um e portanto o ponto fixo é estável, estudemos então o caso onde os autovalores são complexos. Isto restringe o parâmetro "r" no intervalo  $e/2 < r < e^3/2$ .

Quando  $D = -1$ ,  $r = e^3/2$ , as raízes de (3.6) são:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e neste ponto os autovalores complexos têm módulo igual a um. Portanto, o ponto fixo é estável somente quando  $-1 < D < 0$ , ou quando  $e/2 < r < e^3/2$ , pois neste intervalo tem-se os autovalores complexos, em módulo, menores que um.

No caso em que  $D = -1$  ou  $r = e^3/2$ , acontece a bifurcação de Hopf. Este tipo de bifurcação é diferente das anteriormente mencionadas. Quando os autovalores da função são conjugados complexos, e passam de valores menores (maiores) que um, para valores maiores (menores) que um, então a bifurcação de Hopf ocorre; e ocorre justamente no ponto onde estes autovalores complexos têm, em módulo, o valor um. Segundo [G01], quando o parâmetro "r" é aumentado além de  $e^3/2 = 10,042768\dots$ , espera-se encontrar um ciclo estável de período três.

O padrão inicial de bifurcação que produz este ciclo de período três, é interessante. Para o valor do parâmetro "r" menor que 8,95, existe um único ponto de equilíbrio (ou ponto fixo) atrator global. No ponto  $r = 8.95$ , por bifurcação tangente, é gerado um ciclo de período três, de tal forma que entre  $r = 8.95$  e  $r = e^3/2$ , tem-se o ponto fixo estável, atrator, com uma certa vizinhança de atra-

ção, um ciclo de período três também estável e atrator praticamente global, e um ciclo de período três instável. Os pontos fora da região de atração do ponto fixo  $P_f$ , são todos atraídos para o ciclo estável de período três.

Após o valor  $r = e^3/2$ , o ponto fixo torna-se instável e o único atrator é o ciclo de período três, que com o valor crescente do parâmetro "r", sofre uma bifurcação garfo, tornando-se instável e gerando um ciclo de período  $3 \cdot 2 = 6$ , inicialmente estável. Esse ciclo-6 que aparece quando  $r = 14,0$  por sua vez, sofrendo também a bifurcação garfo, torna-se instável, dá origem a um ciclo de período  $3 \cdot 2^2$ , e assim por diante ciclos de períodos  $3 \cdot 2^n$ ,  $n=3,4,5,\dots$  vão surgindo por bifurcação garfo, até que em  $r = 17,0$  os ciclos tornam-se todos aperiódicos. Tal situação já foi caracterizada como sendo uma situação caótica.

Os motivos de aparecimento do ciclo de período três em  $r = 8,95$  justificam-se pela ocorrência da bifurcação tangente, com  $\lambda(2) < 1$  e  $\lambda(1) = +1$

Assim, as bifurcações que ocorrem no sistema (3.3) podem ser classificadas em três tipos:

(a) as bifurcações garfo, que dobram o período da órbita periódica, e acontecem quando um dos autovalores é igual a  $-1$ .

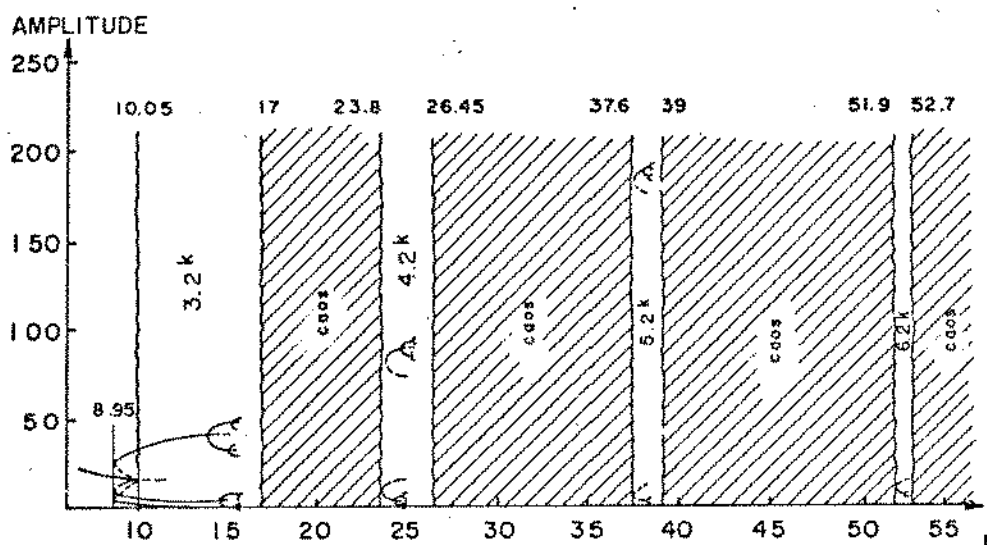
(b) as bifurcações tangenciais que criam novos pontos periódicos. Neste caso um dos autovalores é igual a  $+1$ .

(c) as bifurcações de Hopf, nas quais os autovalores são complexos conjugados e em módulo têm valor  $+1$ .

A sequência que essas bifurcações ocorrem quando o parâmetro "r" é variado, é mostrado na figura abaixo: para  $r = 8,95$  a bifurcação



(b) ocorre dando origem ao ciclo-3 estável e ao ciclo-3 instável. Para  $r > e^{3/2}$  o ciclo-3 estável, pela bifurcação (a) dá origem ao ciclo-6, e assim sucessivamente pela bifurcação (a) ciclos de período  $3 \cdot 2^n$ ,  $n=2,3,\dots$ , vão surgindo, até que se atinja caos. A saída desse caos, ocorre através da bifurcação (b) seguida pela bifurcação (a) e pelo caos. Assim, para  $r > e^{3/2}$ , tem-se regiões caracterizadas por ciclos de período  $K \cdot 2^n$  ( $K=3,4,5,\dots$  e  $n=1,2,3,\dots$ ), e caos. Note que a faixa dos  $K \cdot 2^n$  ciclos decresce na medida que  $K$  cresce.



GOI - FIG-20

FIG.3.1

[GOI] diz que para  $r > e^{3/2}$ , espera-se encontrar um ciclo-3 estável, que por bifurcação garfo, torna-se instável gerando um ciclo-6 inicialmente estável. Mas não se refere ao ciclo-3 instável. Observe que pela FIG.3.1, após  $r = e^{3/2}$  apenas o ponto fixo é mostrado como instável.

Façamos então, a partir de agora, uma análise mais profunda desses fatos acima mencionados. Para isso, antes de mais nada torna-se necessário caracterizarmos o ciclo de período três.

Primeiramente podemos notar que a função  $F_1[x(n),y(n)]$  é simétrica, isto é,  $F_1[x(n),y(n)] = F_1[y(n),x(n)]$ , e se supormos a existência de um ciclo de período três, por (3.3), ele será da forma:

$$(A,B) \longrightarrow (C,A) \longrightarrow (B,C) \longrightarrow (A,B) \quad (3.7)$$

onde

$$\begin{aligned} F_1(A,B) &= F_1(B,A) = C \\ F_1(C,A) &= F_1(A,C) = B \\ F_1(B,C) &= F_1(C,B) = A \end{aligned} \quad (3.7)'$$

Vejamos agora o que ocorre com o ponto  $(B,A)$ . De (3.3) e (3.7)', tem-se:

$$(B,A) \longrightarrow (C,B) \longrightarrow (A,C) \longrightarrow (B,A) \quad (3.8)$$

Portanto, o ponto  $(B,A)$  também gera um ciclo de período três (ciclo-3). Supondo-se que o ciclo-3 gerado por  $(A,B)$  é estável, então o ciclo-3 gerado por  $(B,A)$  também o é. Isto, é devido ao fato que a estabilidade do ciclo-3 gerado por  $(A,B)$ , é da mesma natureza que a estabilidade do ciclo-3 gerado por  $(B,A)$ , pois, tanto um como outro, têm a mesma equação característica, já que  $F_1[x(n),y(n)]$  é simétrica.

Dessa forma, os dois ciclos são estáveis, e existindo porém, apenas um único ciclo-3 estável, então (3.7) e (3.8) devem coincidir-se. Sendo assim, podemos ter  $A = B$ ,  $C = A$  ou  $C = B$ .

Escolhendo-se  $C = B$ , o ciclo deve ser da forma:

$$(A, B) \rightarrow (B, A) \rightarrow (B, B) \rightarrow (A, B) \quad (3.9)$$

Introduzindo-se agora um novo parâmetro  $u = A/B$ , ou  $A = uB$ , temos que:

$$F_1(B, B) = A = uB$$

$$F_1(B, A) = B$$

De (3.3) tem-se que:

$$F_1(B, A) = r(B+uB) \exp[-\alpha(B+uB)] = B$$

$$F_1(B, B) = r(2B) \exp[-\alpha(2B)] = uB$$

ou

$$r(1+u) \exp[-\alpha B(1+u)] = 1 \quad (3.10)$$

$$2r \exp(-2\alpha B) = u \quad (3.11)$$

De (3.10) vem que:

$$r(1+u) = \exp[\alpha B(1+u)]$$

e assim

$$B = \frac{1}{\alpha(u+1)} (\ln r + \ln(1+u)) \quad (3.12)$$

De (3.11)

$$2r = u \exp(2 \alpha B)$$

Logo

$$B = \frac{1}{2\alpha} (\ln 2 + \ln r - \ln u) \quad (3.13)$$

De (3.12) e (3.13) temos que:

$$B = \frac{1}{\alpha(u+1)} (\ln r + \ln (1+u)) = \frac{1}{2\alpha} (\ln 2 + \ln r - \ln u)$$

donde:

$$r = \exp \left\{ \frac{(1+u) \ln u + 2 \ln (1+u) - (1+u) \ln 2}{(u-1)} \right\} \quad (3.14)$$

Por outro lado, dividindo-se (3.11) por (3.10) obtemos:

$$B = \frac{\ln [u (u+1) / 2]}{\alpha(u-1)} \quad (3.15)$$

E como  $A = uB$

$$A = u \left\{ \frac{\ln u [(u+1) / 2]}{\alpha(u-1)} \right\} \quad (3.16)$$

Agora, o mínimo valor que o parâmetro "r" assume para termos um ciclo de período três, é obtido de (3.14), achando o valor de "u" que zera  $\frac{dr}{du}$

$$\frac{dr}{du} = \exp(\dots) \left[ \frac{1}{(u-1)} (\ln u + \frac{(1+u)}{u} + \frac{2}{(u+1)} - \ln 2) \right] +$$

$$+ \left( - \frac{1}{(u-1)^2} [(1+u) \ln u + 2 \ln (1+u) - (1+u) \ln 2] \right)$$

O valor de "u" que zera  $\frac{dr}{du}$  é:

$$u = 2,45200108\dots$$

donde

$$r = 8,943808775\dots$$

O parâmetro "u" biologicamente é interpretado como a capacidade de suporte do meio ambiente, ou seja, ele vai na medida do possível, fazer com que o sistema esteja em torno de seu equilíbrio, evitando dessa forma uma superpopulação ou uma extinção da espécie.

Os gráficos de  $r \times u$ ,  $B \times u$  são mostrados na FIG.3.2

Observe que para cada valor do parâmetro "r", tem-se dois valores do parâmetro "u", um  $u(1) > 2,45200108\dots$  e um  $u(2) < 2,45200108\dots$ , cada um deles representando um ciclo de período três estável e instável, respectivamente.

Assim também, para cada valor de "r" tem-se dois valores de "B":  $B > 9,93\dots$ , representando o ciclo-3 instável e  $B < 9,93\dots$ , representando o ciclo-3 estável, FIG.3.3

O gráfico  $r \times B \times u$  é mostrado na FIG.3.4

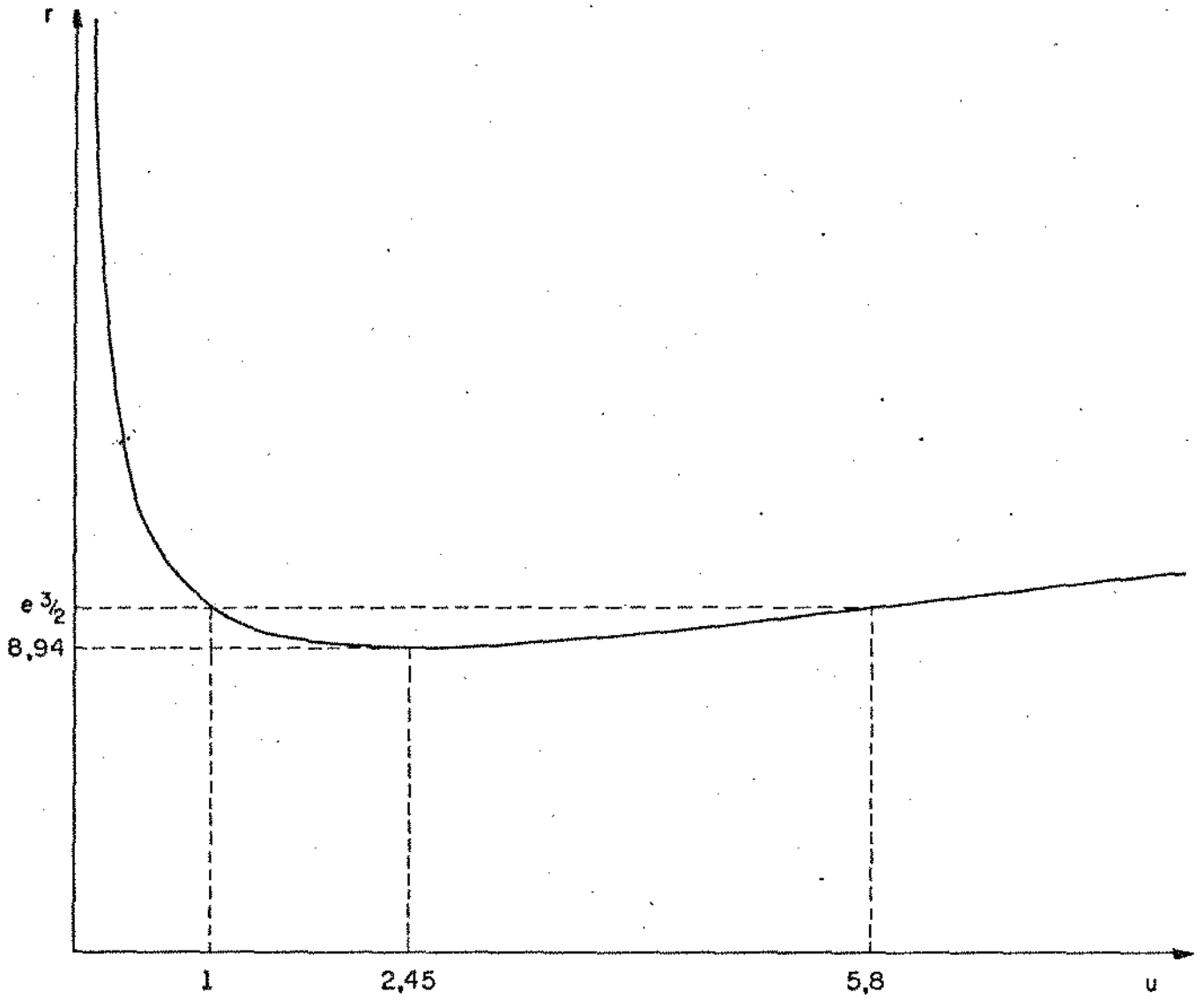


FIG 3.2)

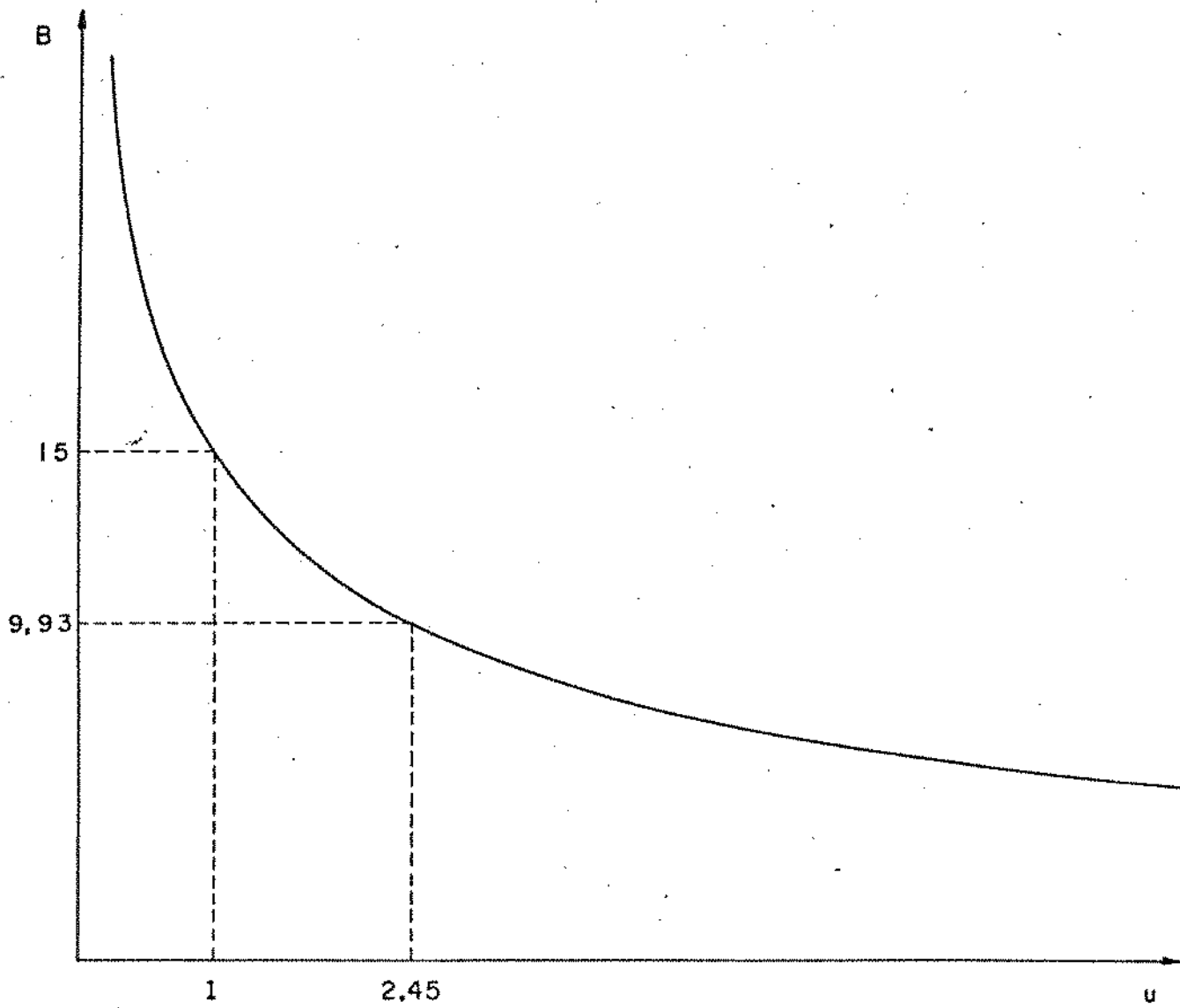


FIG 3.2)

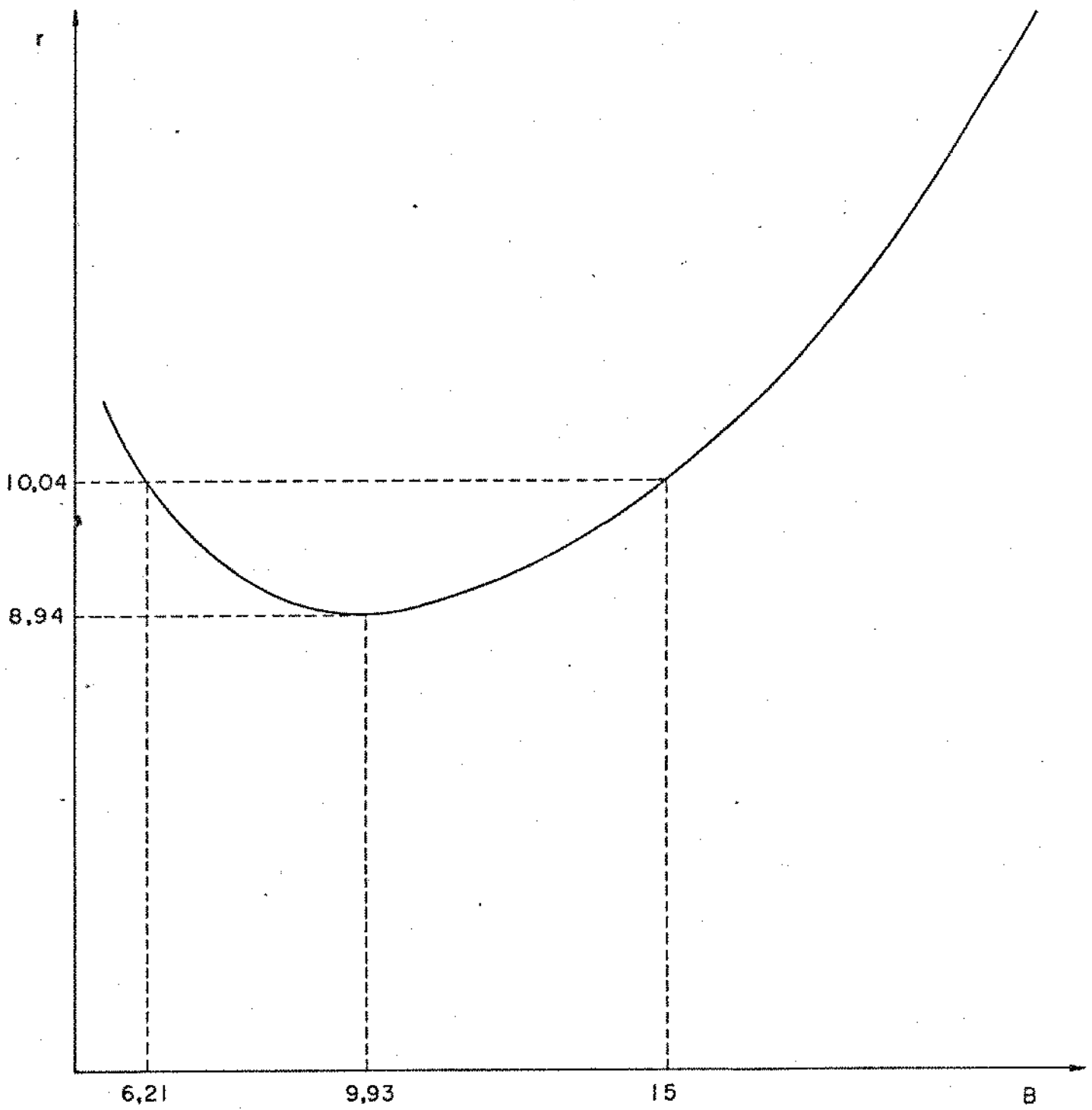


FIG - 3.3



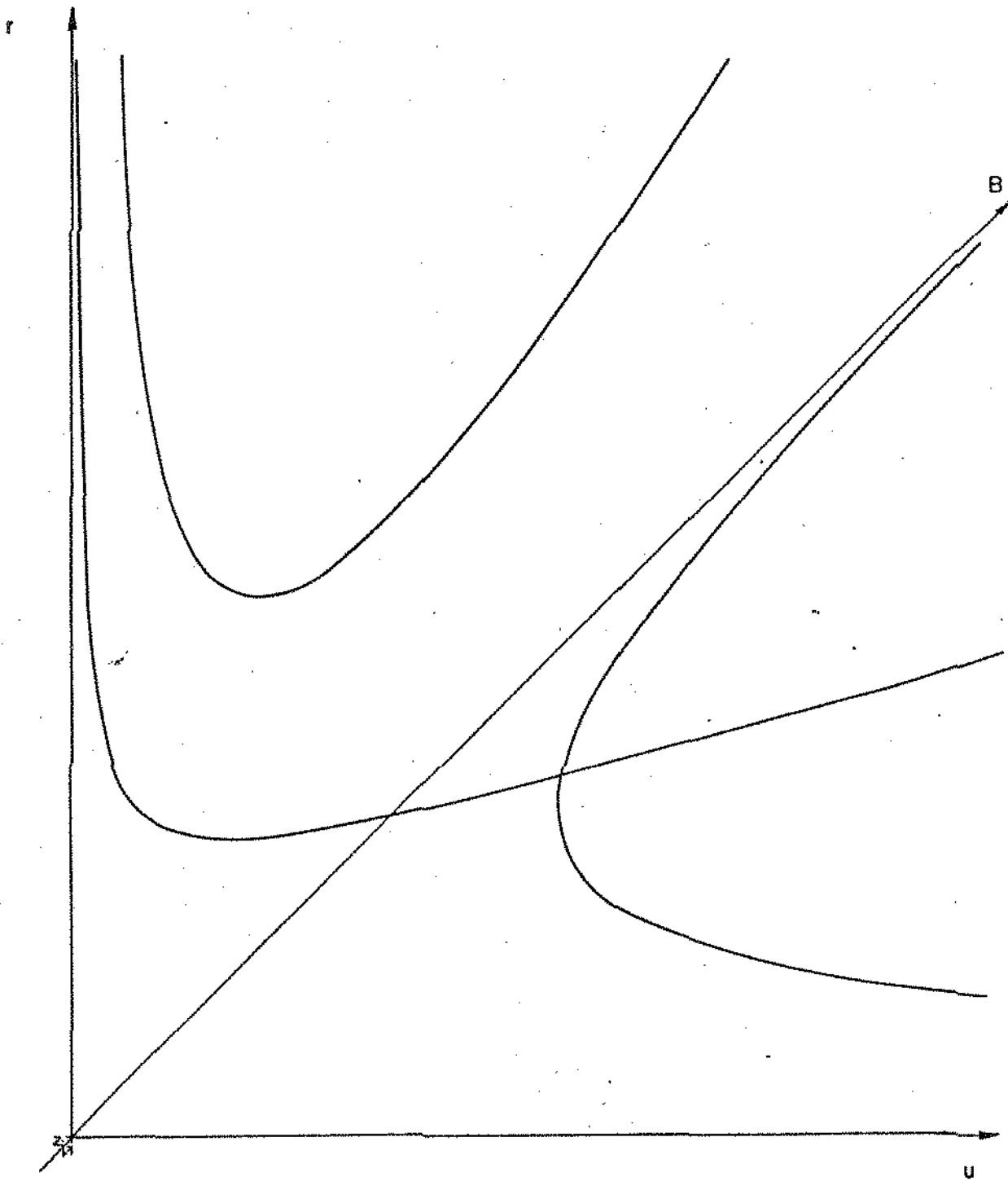


FIG - 3.4

Por [GOI] , sabemos que no ponto  $r = 8,943808775\dots$  um ciclo de período três é gerado por bifurcação tangente. Isto significa que quando  $r > 8,943808775\dots$  devemos olhar para a função que relaciona a população em intervalos sucessivos de três gerações.

Como de (3.3) , temos que:

$$x(n+1) = F_1(x(n), y(n))$$

$$y(n+1) = x(n)$$

Então,

$$x(n+2) = F_1(x(n+1), y(n+1)) = F_1(F_1(x(n), y(n)), x(n))$$

$$y(n+2) = x(n+1) = F_1(x(n), y(n))$$

E assim,

$$x(n+3) = F_1(x(n+2), y(n+2)) = F_1(F_1(F_1(x(n), y(n)), x(n)), F_1(x(n), y(n)))$$

$$y(n+3) = x(n+2) = F_1(F_1(x(n), y(n)), x(n))$$

Apenas por questão de notação, faremos:

$$x(n+2) = F_1^2(x(n), y(n))$$

$$x(n+3) = F_1^3(x(n), y(n))$$

com os índices superiores de  $F_1(x(n), y(n))$  significando que a função relaciona a população em intervalos sucessivos de 2 ou 3 gerações, respectivamente.

Assim,

$$\begin{aligned}x(n+1) &= F_1(x(n), y(n)) \\ y(n+1) &= x(n)\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}x(n+2) &= F_1^2(x(n), y(n)) \\ y(n+2) &= F_1(x(n), y(n))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(n+3) &= F_1^3(x(n), y(n)) \\ y(n+3) &= F_1^2(x(n), y(n))\end{aligned}\tag{3.17}$$

Desta forma, a análise do ciclo-3 será feita através do estudo de (3.17). Para isto, basta linearizar (3.17) em torno do seu ponto fixo,  $(x^*, y^*) = (B, B)$ . E como já sabemos que este ciclo-3 surge quando  $r = 8.943808775\dots$ , por bifurcação tangente, então um dos autovalores de (3.17) deve ser em módulo igual a um. Vejamos tal fato.

Para facilitar a notação, façamos antes  $F_1(x(n), y(n)) = F_1(x, y)$

Calculemos agora as derivadas parciais de  $F_1(x, y)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\partial F_1}{\partial y} = r \exp(\dots) - \alpha r(x+y) \exp(\dots) = \\ &= \frac{F_1(x, y)}{x+y} - \alpha F_1(x, y)\end{aligned}$$

No ponto fixo  $(x^*, y^*) = (B, B)$ , temos  $F_1(B, B) = A$ . Assim:

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|_{PF} = \left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_{PF} = A \left[ \frac{1}{2B} - \alpha \right] = K(2)$$

Por outro lado, temos que:

$$F_1^2(x,y) = F_1 [F_1(x,y), x] =$$

$$= r [F_1(x,y) + x] \exp(-\alpha [F_1(x,y) + x])$$

E assim:

$$\frac{\partial F_1^2}{\partial x} = r \frac{\partial F_1}{\partial x} \exp(\dots) + r \exp(\dots) - \alpha \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + 1 \right) F_1^2(x,y) =$$

$$= \frac{F_1^2(x,y)}{F_1(x,y) + x} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + 1 \right) - \alpha \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + 1 \right) F_1^2(x,y)$$

$$\text{Mas } F_1^2(B,B) = F_1(F_1(B,B), B) = F_1(A,B) = B$$

Portanto:

$$\left. \frac{\partial F_1^2}{\partial x} \right|_{(B,B)} = [K(2) + 1] \left[ \frac{B}{(A+B)} - \alpha B \right]$$

$$\text{Tomando-se } K(1) = \frac{B}{(A+B)} - \alpha B, \text{ temos}$$

$$\left. \frac{\partial F_1^2}{\partial x} \right|_{(B,B)} = K(1) [K(2) + 1]$$

Agora,

$$\frac{\partial F_1^2}{\partial y} = r \frac{\partial F_1}{\partial y} \exp(\dots) - \alpha r [F_1(x,y) + x] \exp(\dots) \frac{\partial F_1}{\partial y} =$$

$$= \frac{F_1^2(x,y)}{F_1(x,y) + x} \frac{\partial F_1}{\partial y} - \alpha F_1^2(x,y) \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

donde,

$$\left. \frac{\partial F_1^2}{\partial y} \right|_{(B,B)} = K(2) \left[ \frac{B}{(A+B)} - \alpha B \right] = K(2) K(1)$$

Calculemos agora as derivadas parciais de  $F(x,y)$ . Temos que:

$$F_1^3(x,y) = F_1[F_1^2(x,y), F_1(x,y)] =$$

$$= r [F_1^2(x,y) + F_1(x,y)] \exp(-\alpha [F_1^2(x,y) + F_1(x,y)])$$

Portanto,

$$\frac{\partial F_1^3}{\partial x} = r \left[ \frac{\partial F_1^2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \right] \exp(\dots) - r \alpha [F_1^2(x,y) + F_1(x,y)] \exp(\dots) \left[ \frac{\partial F_1^2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \right]$$

$$= \left[ \frac{\partial F_1^2}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial x} \right] \left[ \frac{F_1^3(x,y)}{F_1^2(x,y) + F_1(x,y)} - \alpha F_1^3(x,y) \right]$$

$$\text{Mas } F_1^3(B, B) = F_1(F_1^2(B, B), F_1(B, B)) = F_1(B, A) = B$$

Logo

$$\left. \frac{\partial F_1^3}{\partial x} \right|_{(B, B)} = K(1) \left\{ K(1) [K(2) + 1] + K(2) \right\}$$

Veamos agora  $\frac{\partial F_1^3}{\partial y}$

$$\frac{\partial F_1^3}{\partial y} = r \left[ \frac{\partial F_1^2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] \exp(\dots) - r\alpha \left[ F_1^2(x, y) + F_1(x, y) \right] \exp(\dots)$$

$$\left[ \frac{\partial F_1^2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] = \left[ \frac{\partial F_1^2}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] \left[ \frac{F_1^3(x, y)}{F_1^2(x, y) + F_1(x, y)} - \alpha F_1^3(x, y) \right]$$

Assim:

$$\left. \frac{\partial F_1^3}{\partial y} \right|_{(B, B)} = K(1) [K(2) K(1) + K(2)]$$

Em resumo, temos

$$K(1) = \frac{B}{(A+B)} - \alpha B \quad (3.18)$$

$$K(2) = \frac{A}{2B} - \alpha A \quad (3.19)$$

$$\left. \frac{\partial F_1}{\partial x} \right|_{(B,B)} = \left. \frac{\partial F_1}{\partial y} \right|_{(B,B)} = K(2) \quad (3.20)$$

$$\left. \frac{\partial F_1^2}{\partial x} \right|_{(B,B)} = K(1) [K(2) + 1] \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{\partial F_1^2}{\partial y} \right|_{(B,B)} = K(1) K(2) \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{\partial F_1^3}{\partial x} \right|_{(B,B)} = K(1) \left\{ K(1) [K(2) + 1] + K(2) \right\} \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{\partial F_1^3}{\partial y} \right|_{(B,B)} = K(1) [K(2) K(1) + K(2)] \quad (3.24)$$

Assim, a equação característica da matriz jacobiana da terceira geração é:

$$\text{det} \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1^3}{\partial x} \right|_{(B,B)} - \lambda & \left. \frac{\partial F_1^3}{\partial y} \right|_{(B,B)} \\ \left. \frac{\partial F_1^2}{\partial x} \right|_{(B,B)} & \left. \frac{\partial F_1^2}{\partial y} \right|_{(B,B)} - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Resolvendo-se o determinante, obtém-se o seguinte polinômio característico:

$$\lambda^2 - \lambda \left[ \frac{\partial F_1^3}{\partial x} \Big|_{(B,B)} + \frac{\partial F_1^2}{\partial y} \Big|_{(B,B)} \right] + \left[ \frac{\partial F_1^3}{\partial x} \Big|_{(B,B)} \frac{\partial F_1^2}{\partial y} \Big|_{(B,B)} - \frac{\partial F_1^3}{\partial y} \Big|_{(B,B)} \frac{\partial F_1^2}{\partial x} \Big|_{(B,B)} \right] = 0$$

donde

$$\lambda^2 - \lambda K(1) [K(1)K(2) + K(1) + 2K(2)] - K^2(1)K(2) = 0 \quad (3.25)$$

Veamos qual o valor de A e o valor de B quando  $r = 8,943808775\dots$ ,  $u = 2,45200108\dots$  e  $\alpha = 0,1$ , para em seguida calcularmos os autovalores de (3.17). A partir de agora, denotaremos (3.3) por  $F^1(x,y)$  e (3.17) por  $F^3(x,y)$ .

Temos de (3.15) que:

$$B = 9,936021287\dots$$

e como  $A = uB$ ,

$$A = 24,36313497\dots$$

De (3.18) e (3.19), temos

$$K(1) = -0,7039150815\dots$$

e

$$K(2) = -1,210312953\dots$$



E de (3.25):

$$\lambda^2 - \lambda (1,599705762) + 0,5997057619 = 0$$

com

$$\lambda (1) = +1$$

e

$$\lambda (2) = 0,5997057618\dots$$

Desta forma, em  $r = 8,943808755\dots$ ,  $u = 2,45200108\dots$  é gerado um ciclo de período três, e desde que  $\lambda (1) = +1$ , a bifurcação que ocorre é a bifurcação tangente. Para  $u \rightarrow 1$ , tem-se  $r = e^{3/2}$ ; e sendo  $A = B = 15$ ,  $K(1) = K(2) = -1$ , então  $\lambda (1) = \lambda (2) = +1$ .

Por outro lado, tem-se também o ponto fixo estável para  $r = 8,943808755\dots$ , pois da equação (3.5),  $D = -0,9420543571\dots$ , e de (3.6):

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0,9420543571\dots \pm i 1,697277531\dots}{2}$$

sendo o módulo dos autovalores igual a  $0,9420543571\dots$ . No caso onde  $r = e^{3/2}$ , tem-se  $D = -1$  e os autovalores complexos:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

têm módulo igual a um.

Portanto, para  $8,943808755... < r < e^{3/2}$  tem-se:

(a) O ponto fixo  $x^* = y^* = \frac{\ln(2r)}{0,2}$  de  $F^1(x,y)$  estável quando  $-1 < D < -0,9420543582...$ , pois o módulo dos autovalores complexos é menor que um, ou seja,  $0,9420543582... < |\lambda(j)| < 1$ ,  $j = 1,2$ .

(b) Um ciclo triple instável quando  $u < 2,45200108...$ , pois um dos autovalores de  $F^3(x,y)$  no ponto fixo  $(B,B)$  é, em valor absoluto, sempre maior que um.

(c) Um ciclo triple estável quando  $u > 2,45200108...$ , pois os autovalores de  $F^3(x,y)$  em  $(B,B)$  são em valores absolutos, sempre menores que um.

Quando  $r = e^{3/2}$  tem-se  $u = 1$ , e os valores próprios de  $F^3(x,y)$  em  $(B,B)$ , para o ciclo-3 instável, são iguais a um. Entretanto, como para  $r < e^{3/2}$  um dos autovalores de  $F^3(x,y)$  é sempre maior que um e continua maior que um quando  $r > e^{3/2}$ , pode-se dizer então que nenhum tipo de bifurcação ocorre em  $r = e^{3/2}$ , para o ciclo-3 instável. Além disso, para todo  $r > e^{3/2}$  e  $u < 1$ , o ciclo-3 instável existe e não se bifurca em nenhum ponto.

Na verdade, o que ocorre em  $r = e^{3/2}$  é uma bifurcação Hopf para  $F^1(x,y)$  no ponto fixo  $x^* = y^* = \frac{\ln(2r)}{0,2}$ , isto é, para  $r = e^{3/2}$  ( $D = -1$ ) os autovalores de  $F^1(x,y)$  são complexos e em módulo, iguais a um. Como para  $r > e^{3/2}$  os autovalores de  $F^1(x,y)$  são, em valores absolutos, maiores que um, o ponto fixo torna-se instável e o sistema tem portanto, como atrator único, o ciclo-3 estável de  $F^3(x,y)$ .

Além disso, em  $r = e^{3/2}$  ( $u = 1$ ), há um "colapso" do ciclo-3 instável de  $F^3(x,y)$  em um ponto. O que ocorre numa vizinhança deste ponto não está muito claro. Pode-se ilustrar este fato, fazendo-se uma simulação numérica com precisão dupla, no PDP-10.

Dado qualquer ponto inicial,  $(x(0), y(0))$ , e tomando-se os valores:

$$u(0) = 1 + 1 \cdot 10^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$u(i+1) = u(i) - \Delta u, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\Delta u = 1 \cdot 10^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

observa-se que:

- (a) para  $\Delta u > 10^{-8}$ , o ciclo-3 de  $F^3(x,y)$  é instável, confirmando os resultados teóricos. (tabela 1)
- (b) para  $\Delta u = 10^{-8}$ , o ciclo-3 ora é estável, ora é instável. (tabela 2)
- (c) para  $\Delta u < 10^{-8}$ , "aparentemente" o ciclo-3 é estável. (tabela 3)

Por outro lado, numa outra simulação numérica, tomando-se como  $(x(0), y(0))$  o ponto fixo de  $F^1(x,y)$ , isto é:

$$x(0) = y(0) = \frac{\ln(2r)}{0,2}$$

e fazendo-se

$$x(0) = x(0) (1 + v(0))$$

onde

$$v(0) = 1 \cdot 10^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

com o parâmetro  $r < e^{3/2}$  e próximo de  $e^{3/2}$ , obtém-se como único atrator o ponto fixo  $x(0) = y(0) = \frac{\ln(2r)}{0,2}$ . Isto quer dizer que os pontos próximos de  $(x(0), y(0))$ , estão sendo atraídos por ele, e portanto, o ciclo-3 de  $F^3(x, y)$  é instável nessa região. (tabelas 4, 5, 6)

Diante disso, pode-se dizer então que, para  $r < e^{3/2}$  ( $u < 1$ ) e muito próximo de  $e^{3/2}$ , tem-se uma região em que as simulações numéricas fornecem resultados "estranhos"; o ciclo-3 aparentemente é estável, embora possa existir a possibilidade de erros computacionais devido ao arredondamento e a operações com números muito pequenos.

Nesta perspectiva, para  $r < e^{3/2}$  e muito próximo de  $e^{3/2}$ , deve-se considerar como resultados confiáveis somente aqueles onde  $\Delta u > 10^{-8}$ . Além disso, como fora desta região o sistema apresenta-se dentro do esperado, independente do  $\Delta u$  escolhido, tem-se então que:

- (a) para  $r > e^{3/2}$ , o ponto fixo  $P_F$ , de  $F^1(x, y)$ , pela bifurcação Hopf, torna-se instável.
- (b) para  $r > 8,943808755\dots$  e  $2,45200108\dots < u < \hat{0}$  o ciclo-3 de  $F^3(x, y)$  é estável, até que pela bifurcação garfo, torna-se instável dando origem ao ciclo-6.
- (c) para  $r > 8,943808755\dots$  e  $0 < u < 2,45200108\dots$  o ciclo-3 de  $F^3(x, y)$  é instável, não se bifurcando em nenhum ponto.

Graficamente:

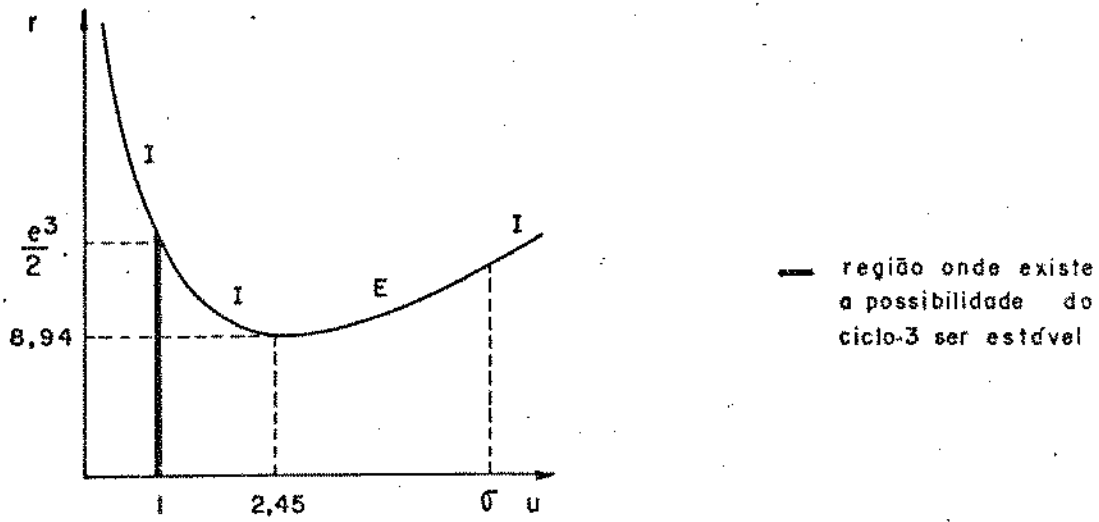


FIG 3.5 a)

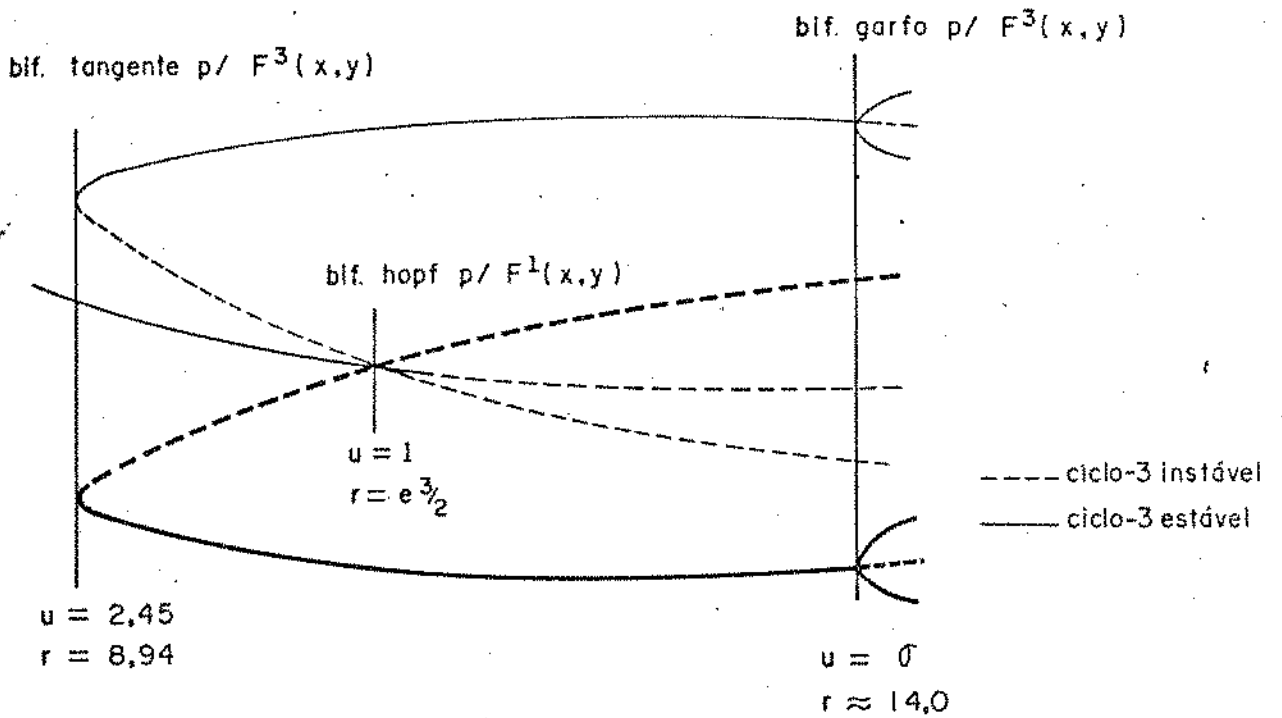


FIG 3.5 -b)

A forma (3.9) do ciclo-3,

$$(A, B) \rightarrow (B, A) \rightarrow (B, B) \rightarrow (A, B)$$

é confirmada fazendo-se uma simulação numérica para os valores do parâmetro  $r > 8.943808755\dots$ . Por exemplo, para  $r = 11$  e  $r = 13$ , obtém-se:

$r = 11$

A  $\sim$  40,4265568733974631

B  $\sim$  5,22619682916804696

B  $\sim$  5,22619682916804696

A  $\sim$  40,4265568733974631

$r = 13$

A  $\sim$  46,8722660976331694

B  $\sim$  4,06317356044371838

B  $\sim$  4,06317356044371838

A  $\sim$  46,8722660976331694

E como sabemos, por [GOI], que este ciclo-3 para  $r = 14$ , sofrendo a bifurcação garfo torna-se instável e gera um ciclo-6 inicialmente estável, será interessante então caracterizarmos tal ciclo.

Se olharmos para a FIG.3.5-b), mais precisamente no seguinte:

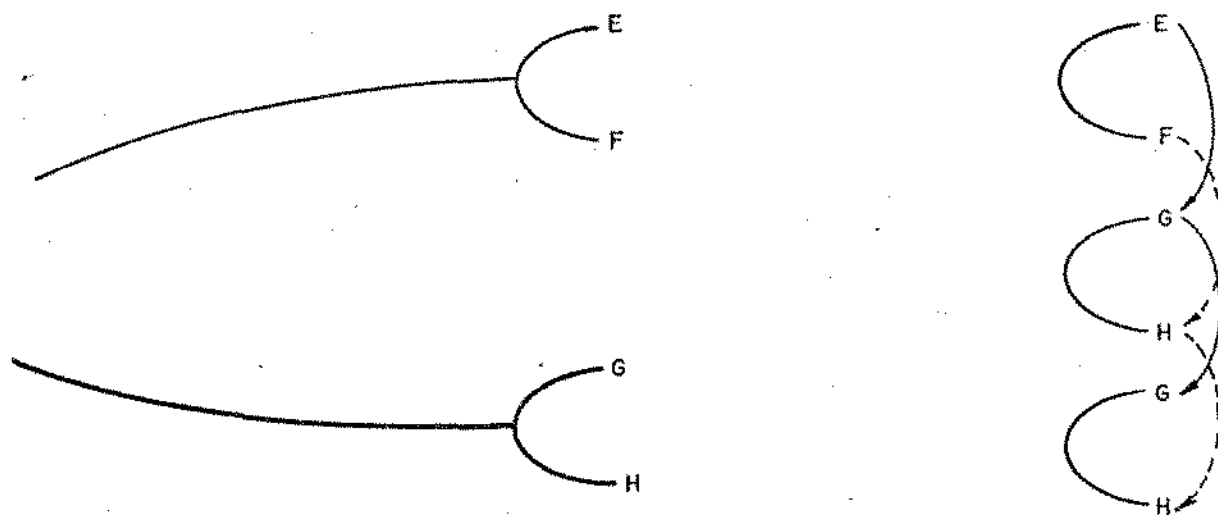


FIG. 3.5 c)

temos a impressão de que o ciclo-6 é da forma:

$$(E,H) \rightarrow (G,E) \rightarrow (G,G) \rightarrow (F,G) \rightarrow (H,F) \rightarrow (H,H) \rightarrow (E,H) \quad (3.26)$$

Entretanto, de acordo com as simulações feitas, esse ciclo-6 não existe.

Por exemplo, para  $r = 14,6$ , tem-se:

$$\begin{aligned} E &\sim 46,5319786971853495 \\ G &\sim 5,11644851234572004 \\ G' &\sim 4,30870998519305815 \\ F &\sim 53,6181821015685172 \\ H' &\sim 2,57928970850107089 \\ H &\sim 2,97470869932182527 \\ E &\sim 46,5319786971853495 \end{aligned}$$

Dessa forma, o ciclo-6 que existe é:

$$(E,H) \rightarrow (G,E) \rightarrow (G',G) \rightarrow (F,G') \rightarrow (H',F) \rightarrow (H,H') \rightarrow (E,H) \quad (3.27)$$

com  $G \neq G'$ ,  $H \neq H'$  mas  $G \approx G'$  e  $H \approx H'$ .

Resta portanto, a pergunta: se da FIG.3.5-b) tinha-se a impressão de que o ciclo-6 era da forma (3.26), o que aconteceu então?

A explicação desse fato está intimamente relacionada com o ciclo-3, e com a maneira que ele dá origem ao ciclo-6. Veremos que o ciclo-6 ocorre na forma (3.27), devido a uma perturbação ou um deslocamento do ponto (B,B) do ciclo-3.

Graficamente, tal deslocamento segundo a forma (3.27), é:

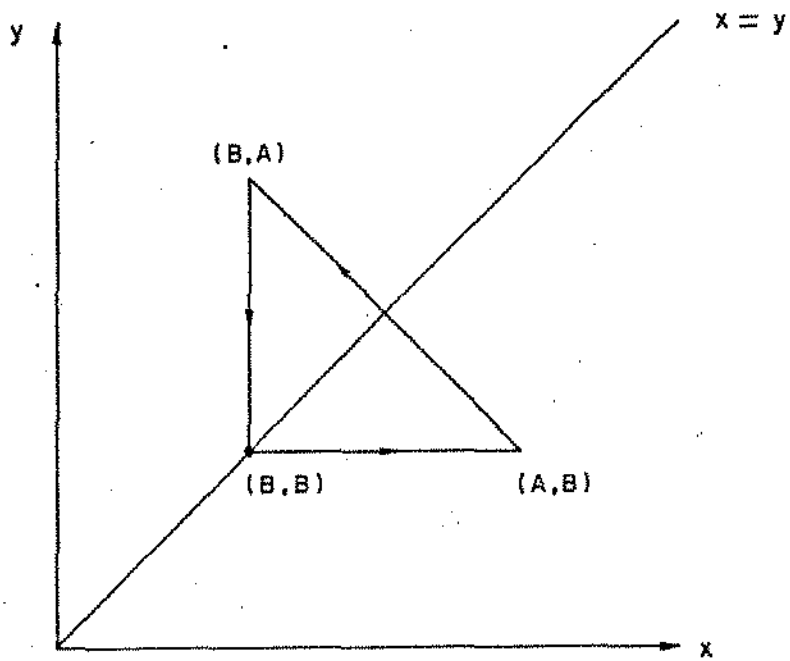


FIG 3.6 a)

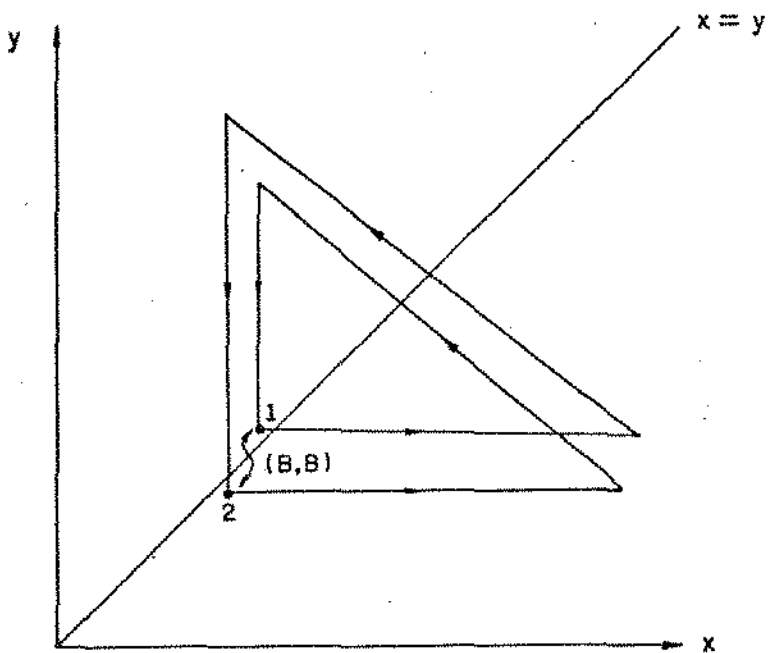


FIG 3.6 b)

O ponto  $(B,B)$  do ciclo-3, bifurca-se em dois outros pontos , dando origem ao ciclo-6.



Olhando para a FIG.3.5-c), tinha-se a impressão que do ponto (B,B) do ciclo-3, surgissem dois novos pontos sobre a diagonal, pois os pontos "G" e "H" estão representando duas vezes o mesmo ciclo. Por isso, esperava-se que o ciclo-6 fosse da forma (3.26). Mas, na realidade, não é isso que ocorre. E diante de tal fato, seria interessante perguntar-se então, como seria um ciclo-6 da forma (3.26), ou seja, da forma:

$$(E,H) \rightarrow (G,E) \rightarrow (G,G) \rightarrow (F,G) \rightarrow (H,F) \rightarrow (H,H) \rightarrow (E,H)$$

Pela FIG.3.5-c) pode-se supor que  $H < G < F < E$  e graficamente teria-se:

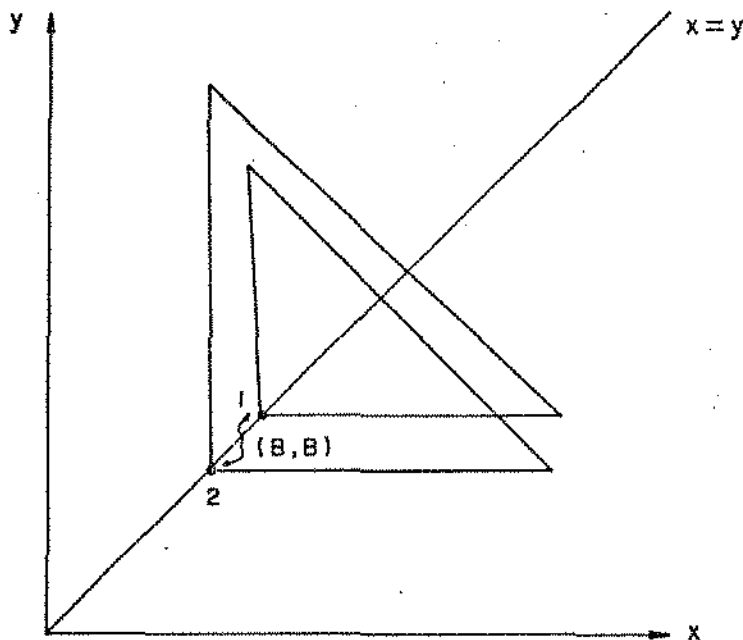


FIG 3.6 c)

Observe que no ciclo-3 tem-se apenas um ponto sobre a reta  $x = y$  (Ver FIG.3.6-a), no ciclo-6 da FIG.3.6-b) não existe nenhum

ponto sobre a diagonal, e no ciclo-6 da FIG.3.6-c) existem dois pontos sobre a diagonal. Note também, que o ponto  $(B,B)$  do ciclo-3 deslocar-se e os dois pontos que surgem, apesar de estarem muito próximos da diagonal, estão fora dela, e não podem dar origem ao ciclo-6 na forma (3.26). Desta forma, através de pequenas perturbações do ponto fixo  $(B,B)$ , o triângulo do ciclo-3 desdobra-se em dois de uma forma muito "suave", de acordo com o crescimento do parâmetro "r", dando origem portanto, ao ciclo-6 na forma (3.27)

Antes de mostrarmos graficamente como esse desdobramento se comporta, vejamos mais sobre o nosso ciclo-3.

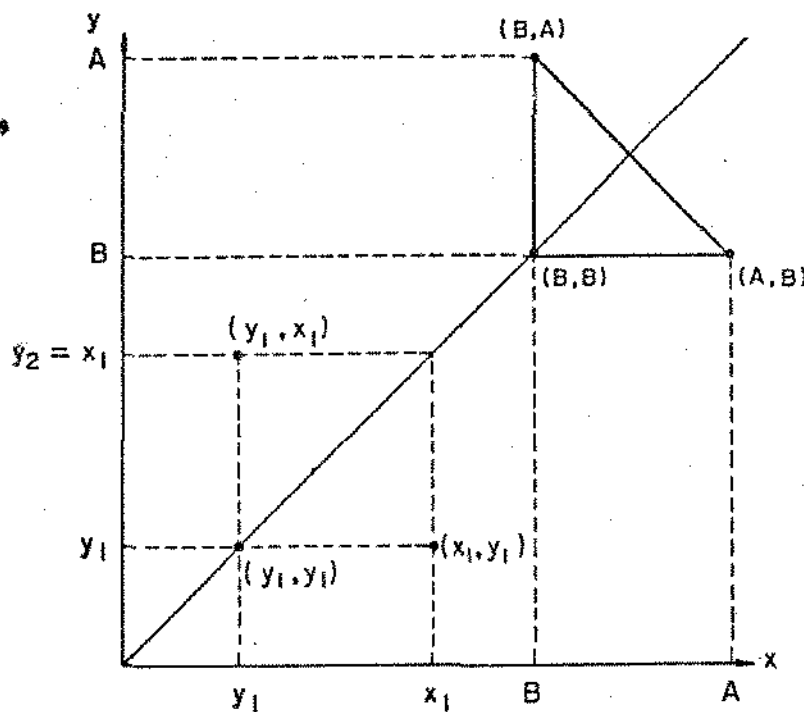


FIG. 3.7)

Os eixos são  $x$  e  $y$ . Um ponto qualquer  $(x(1), y(1))$ , "vai" em  $(r(x(1)+y(1)) \exp[-Q(x(1)+y(1))]1, x(1))$ , que deve estar sobre a reta  $y(2) = x(1)$ . Particularmente, se o ponto  $(x(1), y(1))$  "reflete-

-se" na reta  $y = x$ , isto é, se  $(x(1), y(1))$  "vai" em  $(y(1), x(1))$ , então pode-se ter o ciclo-3, já que  $(y(1), x(1))$  "deve ir" em  $(y(1), y(1))$ .

Isto é sempre verdadeiro, se for possível provar que

$$r[x(1)+y(1)] \exp[-\alpha(x(1)+y(1))] = y(1) \Rightarrow \quad (3.28)$$

$$\Rightarrow 2ry(1) \exp[-2\alpha y(1)] = x(1)$$

ou seja, isto é sempre verdadeiro se for possível provar que  $(y(1), y(1))$  "volta" para  $(x(1), y(1))$ .

A idéia é a seguinte: tendo  $A$  e  $B$ ,  $A \neq B$  e  $A > B$ , se o ponto  $(A, B)$  pela transformação:

$$F(A, B) = (r(A+B) \exp[-\alpha(A+B)], A)$$

"vai" no ponto  $(B, A)$ , isto é,

$$F(A, B) = (B, A)$$

então o ponto  $(B, A)$  pela transformação

$$F(B, A) = (r(B+A) \exp[-\alpha(B+A)], B)$$

"vai" no ponto  $(B, B)$ , isto é,

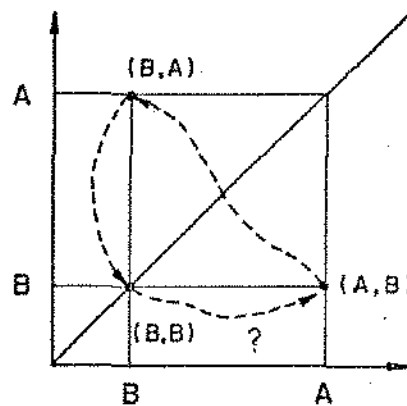
$$F(B, A) = (B, B)$$

Resta agora saber, se o ponto  $(B,B)$  "volta" para o ponto  $(A,B)$ , ou, se o ponto  $(B,B)$ , pela transformação

$$F(B,B) = (2rB \exp[-2\alpha B], B)$$

"volta" para o ponto  $(A,B)$ , donde

$$F(B,B) = (A,B)$$



Em outras palavras, é preciso mostrar que

$$r(A+B) \exp[-\alpha(A+B)] = B. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2rB \exp(-2\alpha B) = A$$

$$\text{Se } F(A,B) = (r(A+B) \exp[-\alpha(A+B)], A) = (B,A)$$

então

$$F(B,A) = (r(B+A) \exp[-\alpha(B+A)], B) =$$

$$= (r(A+B) \exp[-\alpha(A+B)], B) = (B,B)$$

Resta agora mostrar que  $F(B,B) = (A,B)$ .

Os resultados computacionais mostram que o ponto  $(B,B)$ , "volta" para o ponto  $(A,B)$  formando o ciclo-3 para uma série de valores do parâmetro "r" dentro de um intervalo determinado para qualquer que seja o ponto inicial  $(x(0),y(0))$  tomado. Entretanto, não foi encontrada uma justificativa analítica de que qualquer ponto  $(x(1),y(1))$  que tenha um comportamento como o descrito na FIG.3.7, cumpra (3.28), e forme assim, o ciclo-3.

Agora, da mesma forma que o ciclo-3 desdobra-se dando origem ao ciclo-6, este, por sua vez, desdobra-se dando origem ao ciclo-12; e assim por diante, ciclos de período  $3 \cdot 2^n$  ( $n = 3,4,5,\dots$ ) vão surgindo até que se atinja o caos.

Para termos a idéia de como este desdobramento acontece, vejamos alguns valores do parâmetro "r" para os quais temos os ciclos  $3 \cdot 2^n$  e um caos, todos com seus respectivos gráficos.

**Ciclo-3**

<b>r = 11,0</b>	<b>r = 13,0</b>
40,4265568733974631	46,8722660976331694
5,22619682916804696	4,06317356044371838
5,22619682916804696	4,06317356044371838
40,4265568733974631	46,8722660976331694

**Ciclo-3 ou Ciclo-6**

<b>r = 14,0</b>	<b>r = 14,10 (20.000 iterações)</b>
49,3769998103518481	49,6097285083721787
3,68513576704922070	3,65184027300012141
3,68513576704922060	3,65184658861024114
49,3769998103518432	49,6096505040173788
3,68513576704922030	3,65186785300408332
3,68513576704922039	3,65186154552410159
49,3769998103518481	49,6097284073468628

**Ciclo-6**

<b>r = 14,10 (500.000 iterações)</b>	<b>r = 14,20</b>
49,6096894810037341	48,1436578510934926
3,65185407189445296	4,24331050946636261
3,65185407189445563	3,94797580660377857
49,6096894810037012	51,2740244472043712
3,65185407189446459	3,13429217918987061
3,65185407189446194	3,34988937634951707
49,6096894810037341	48,1436578510934926

**Ciclo-6**

**r = 14,30**

47,5656258437039614  
4,52298393050452878  
4,07285758458978123  
52,0369439715039439  
2,93465498590339611  
3,22172300380446371  
47,5656258437039614

**r = 14,60**

46,5319786971853495  
5,11644851234572004  
4,30870998519305815  
53,6181821015685172  
2,57928970850107089  
2,97470869932182527  
46,5319786971853495

**Ciclo-12**

**r = 14,70**

46,2866900145470417  
5,27949256076828166  
4,36708316129704733  
54,0436971871126603  
2,49495308831798163  
2,91219457427819614  
46,2866900145470417  
5,27949256076828164  
4,36708316129704732  
54,0436971871126604  
2,49495308831798162  
2,91219457427819614  
46,2866900145470417

**r = 16,0**

58,7863842492479883  
1,80071840137383679  
2,26587387216877230  
43,3252178731546186  
7,63842850288518272  
4,98950470354192081  
57,1515597999389047  
1,98951184860939840  
2,5559071055720516  
46,1624514907161074  
5,97036936033000295  
4,54079154650706821  
58,7863842492479883

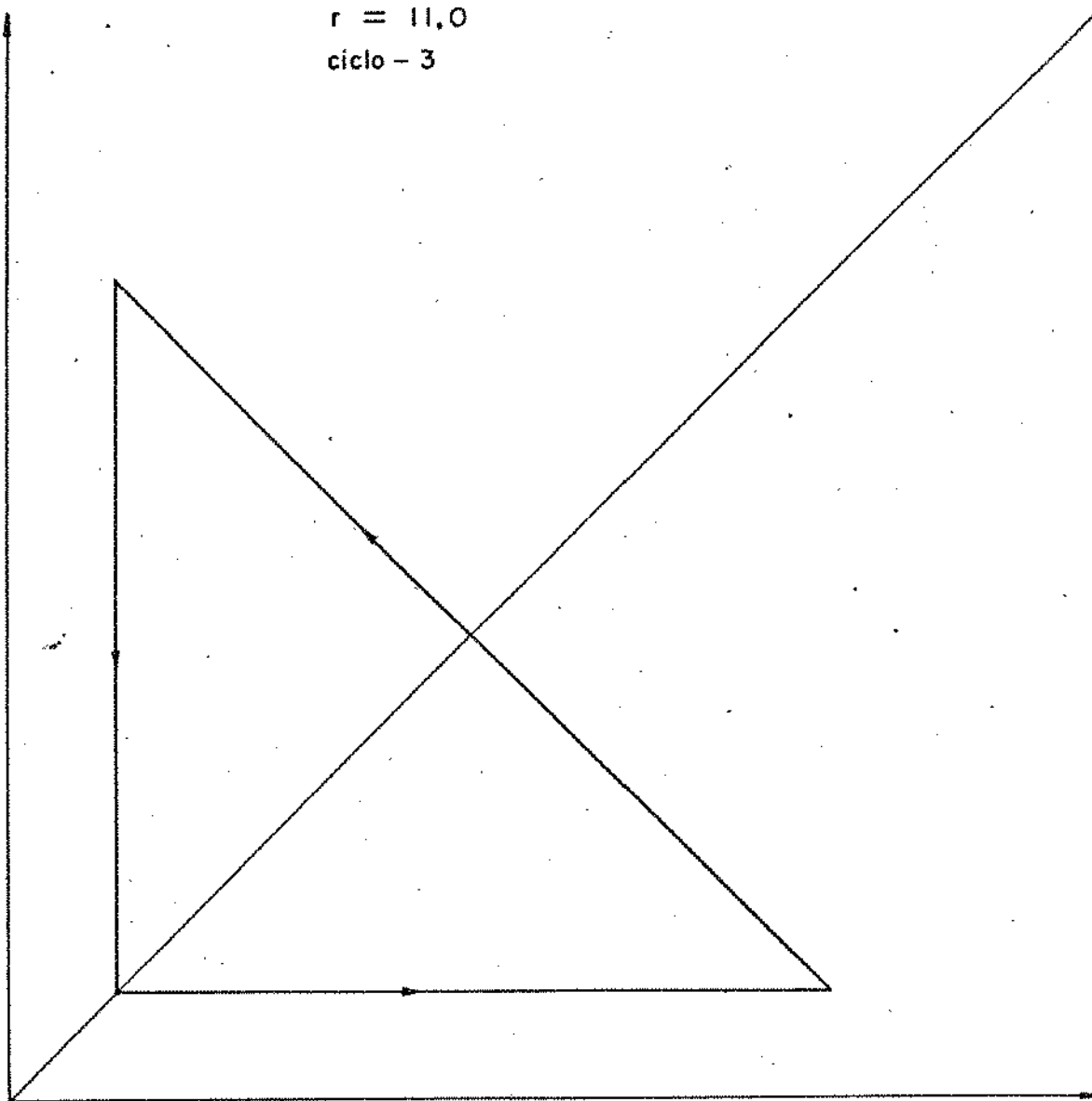
r = 17,0

Caos

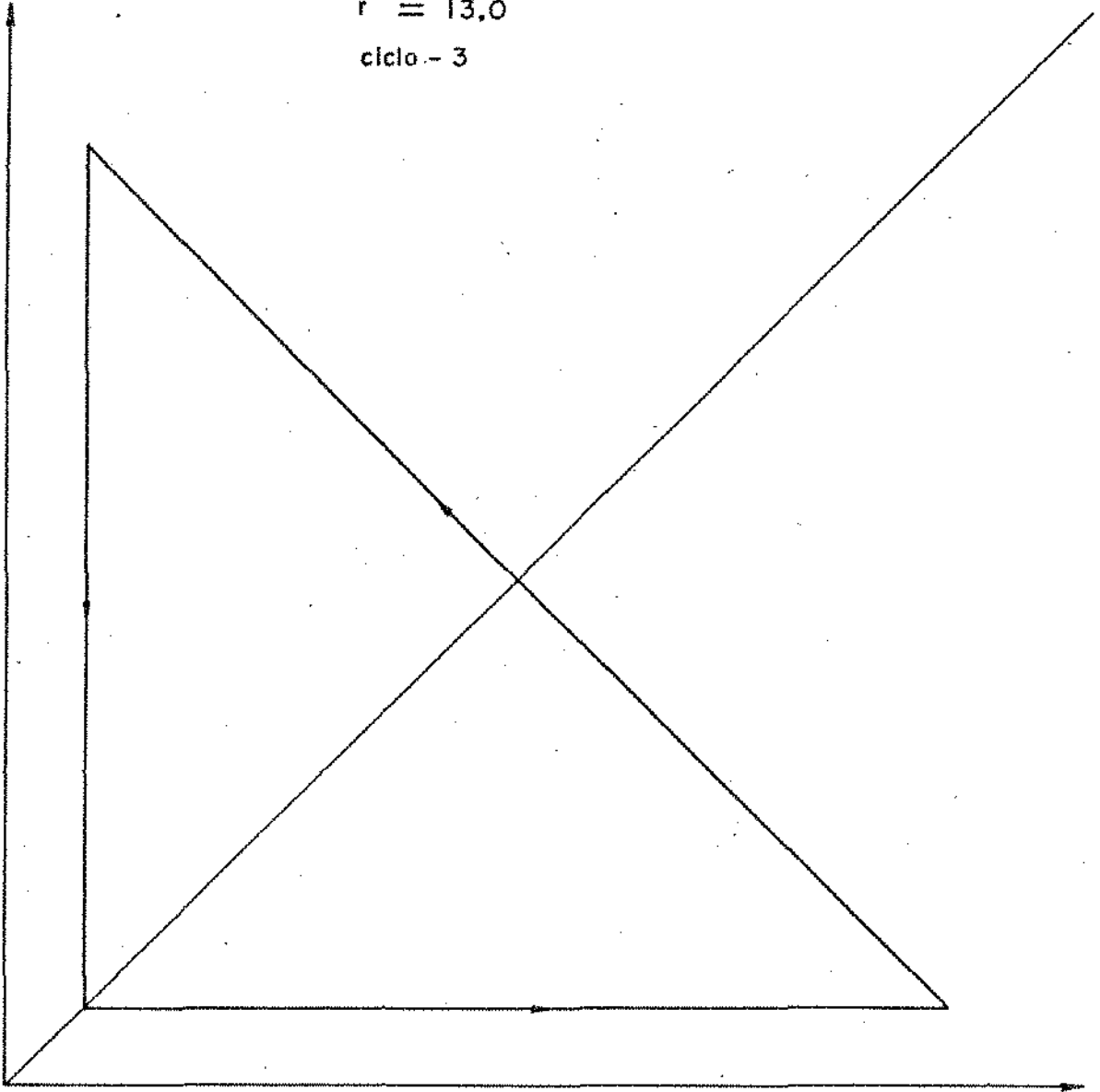
41,0150730995466553	4,73467763734697778
9,96540253971241573	3,99456200018662787
5,29418214399011587	61,9896632092071960
56,3996349047430874	1,52837720867808091
2,19463414295534461	1,88274961382354456
2,84175930299904027	41,2290598957476673
51,7417106826532986	9,83383858830523992
3,95348486745497695	5,25921445315418946
3,60956647976386629	56,7208923354803121
60,3513269848153144	2,14259163457248689
1,81374878363612254	2,77898534953077531
2,10960162520784391	51,1460185172022377
45,0523113048835041	
7,17504252493665699	
4,7876378690479270	
61,4813228096800459	
1,49185411125497629	
1,97112515530100686	
41,6393109437545109	
9,46372639268901055	
5,24226441327017651	
57,4473692954475768	
2,01868452808620643	
2,64326154267231094	
49,7222097575819198	



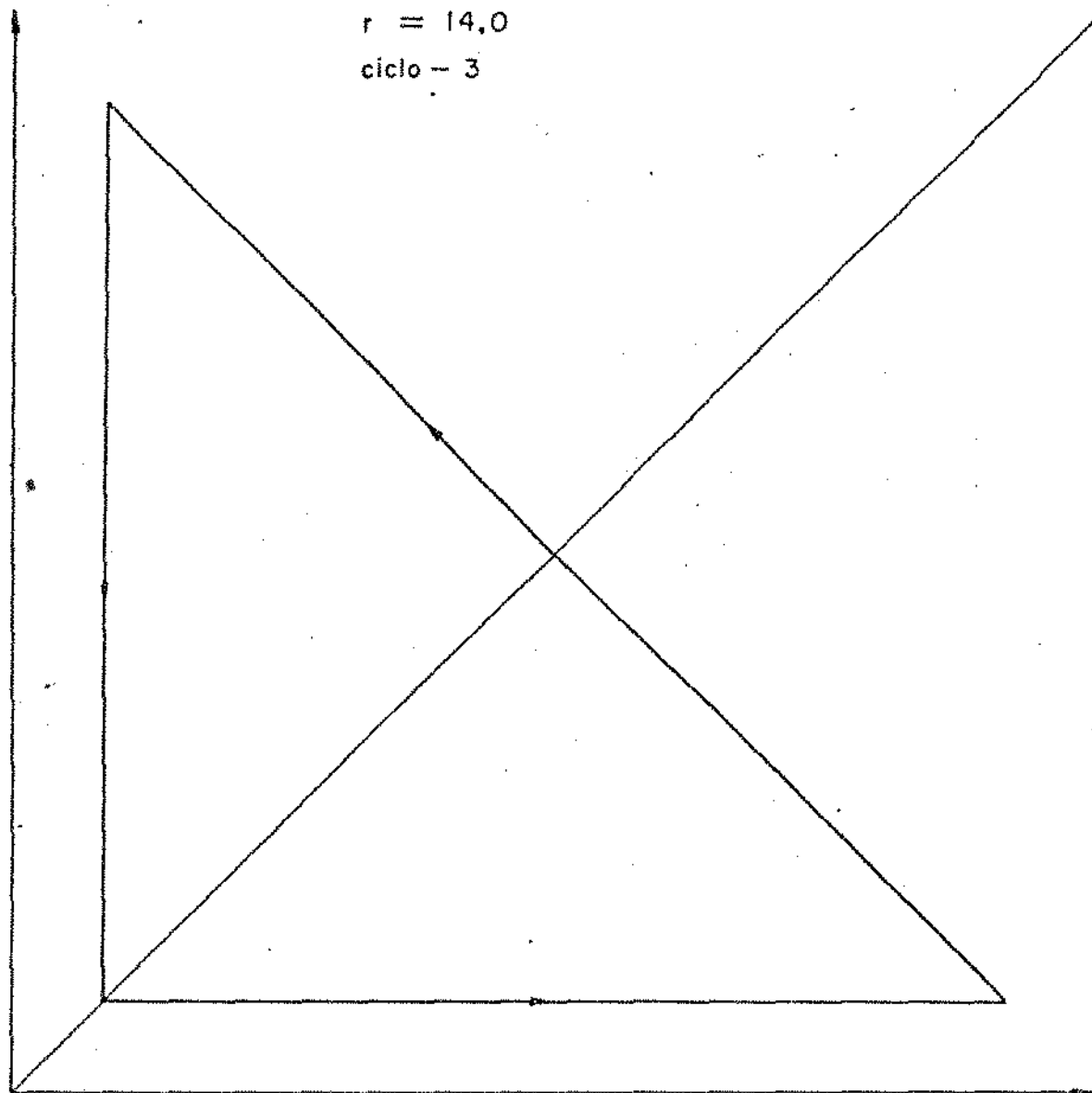
$r = 11,0$   
ciclo - 3



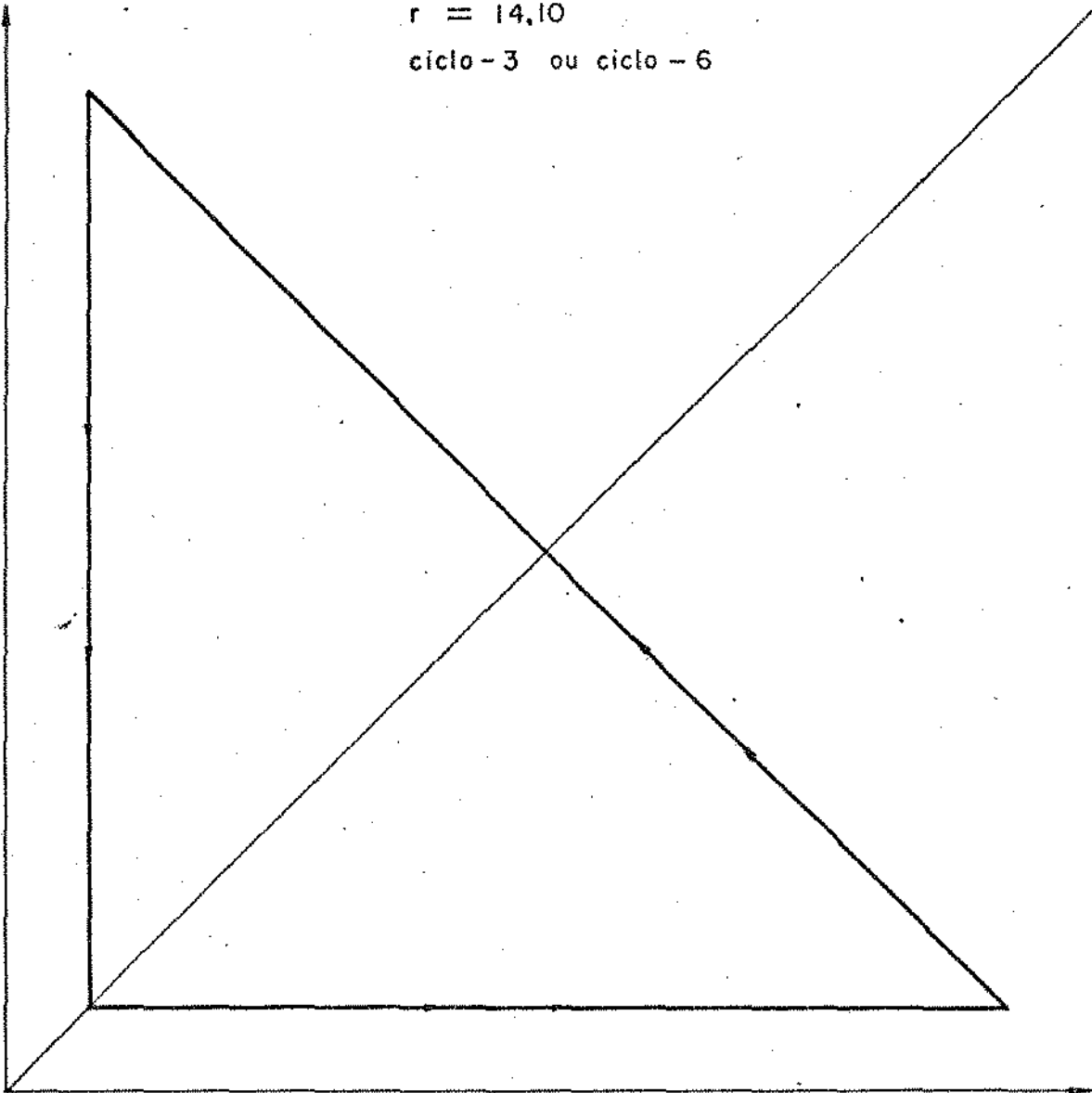
$r = 13,0$   
ciclo - 3



$r = 14,0$   
ciclo - 3

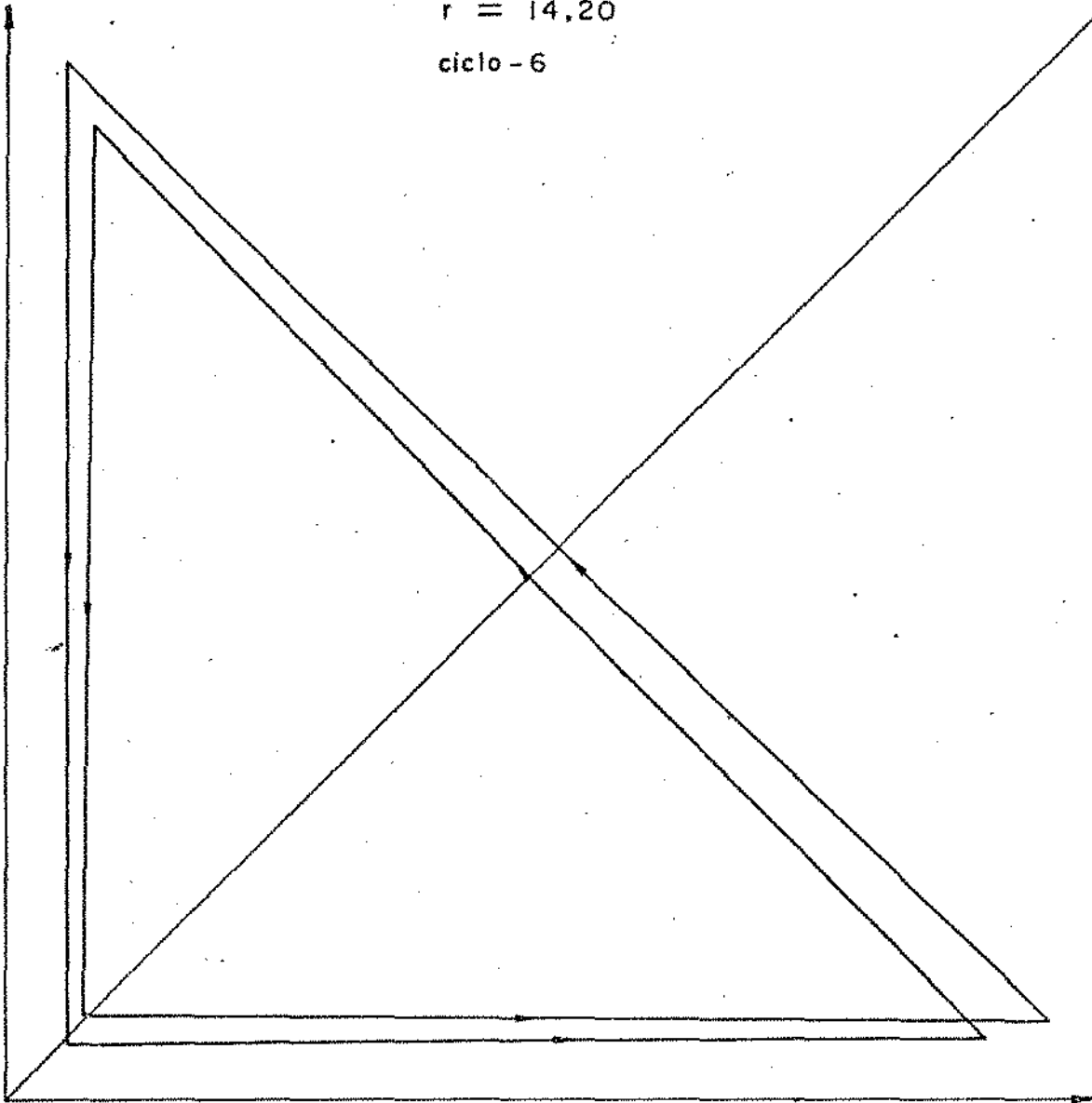


$r = 14,10$   
ciclo-3 ou ciclo-6



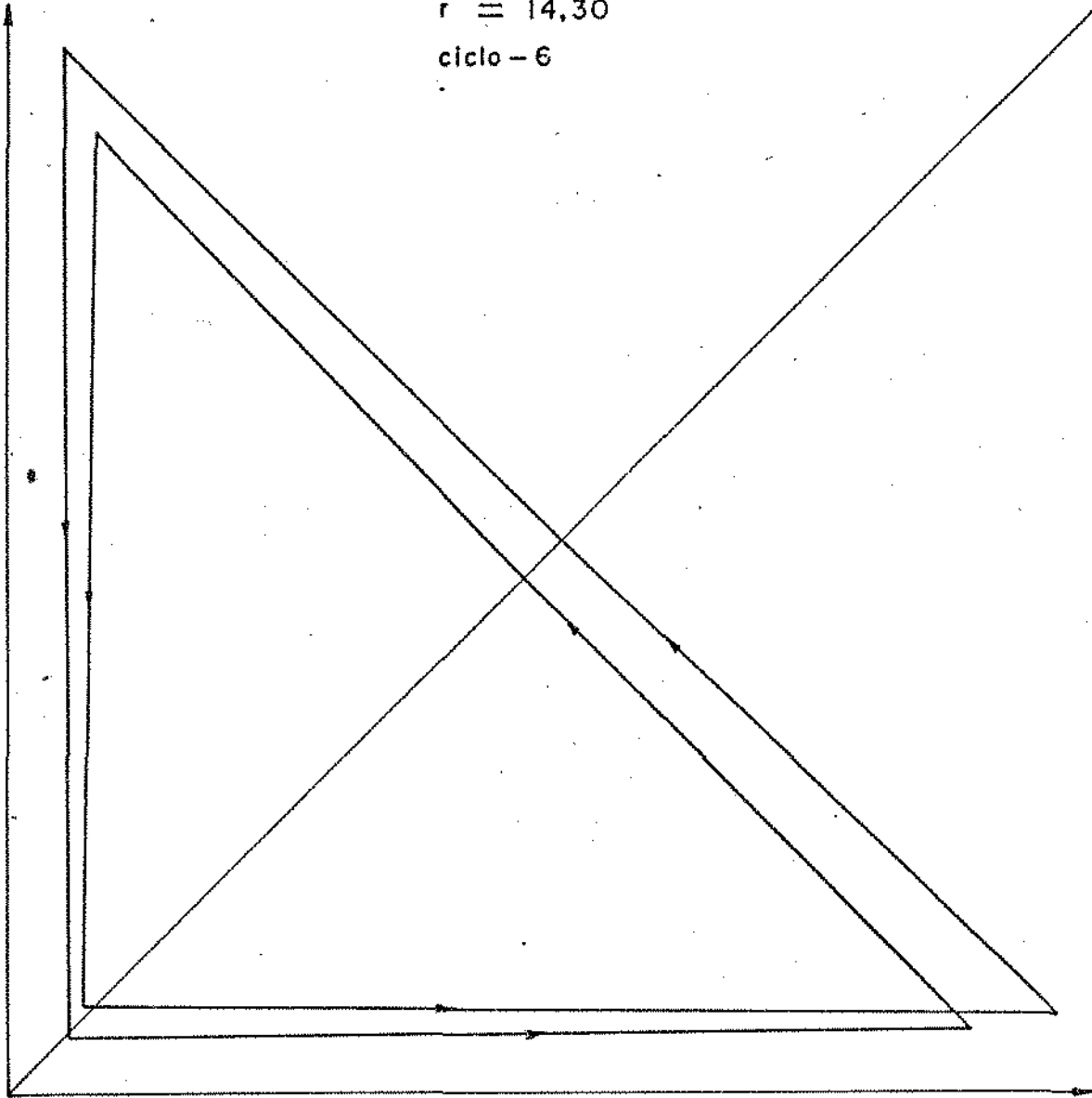
$r = 14,20$

ciclo - 6



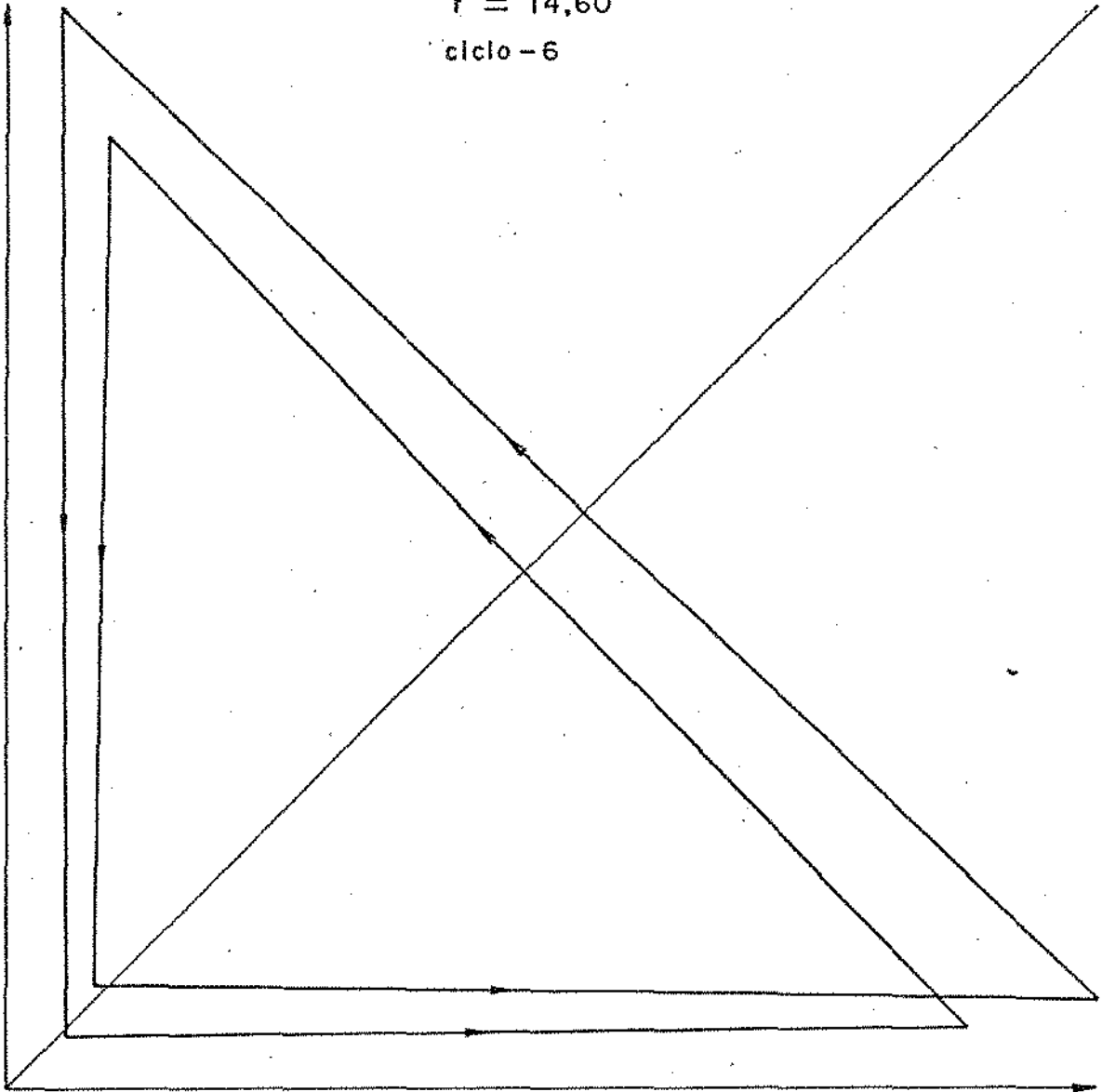
$r = 14,30$

ciclo - 6

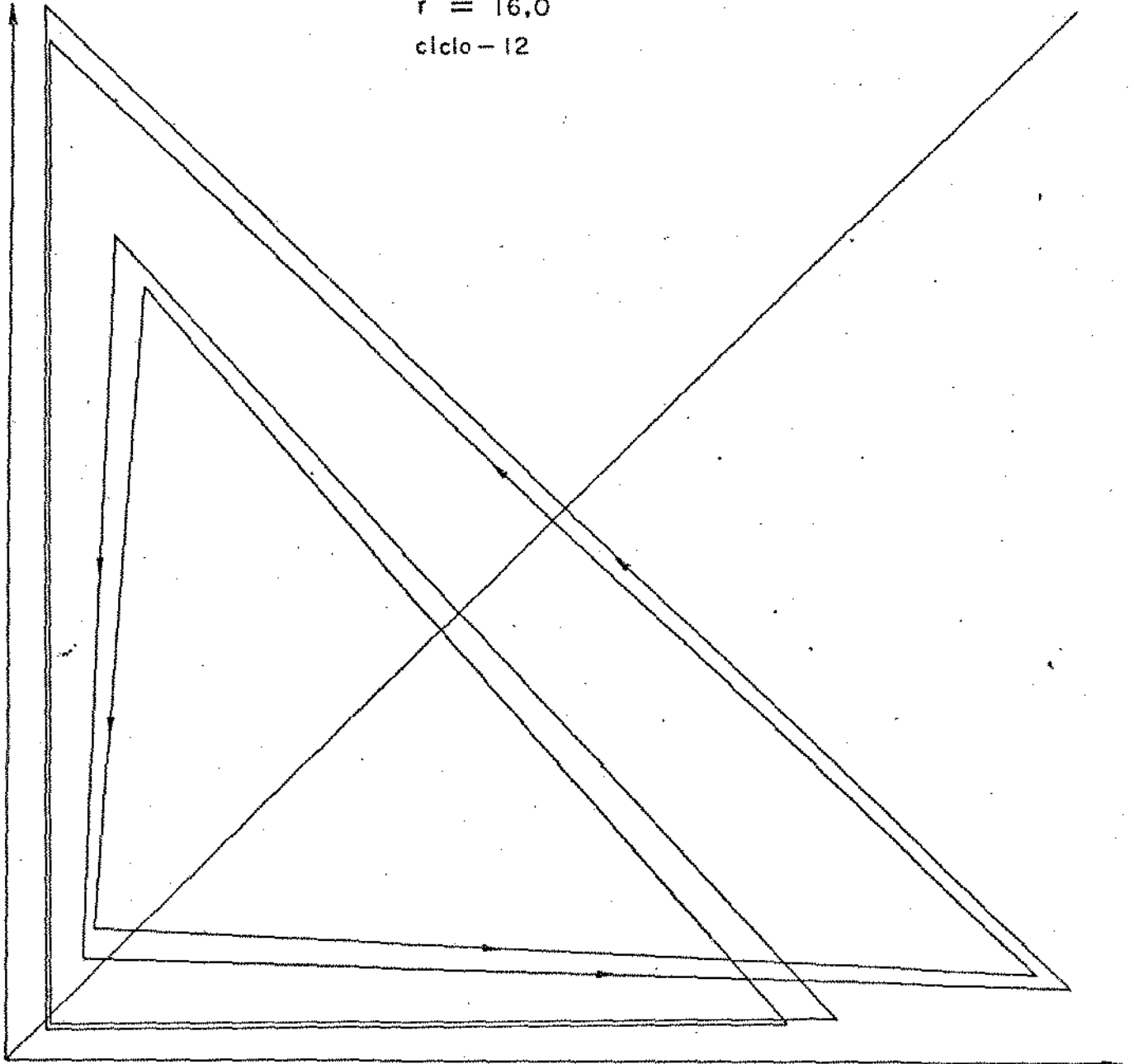


$$r = 14,60$$

ciclo-6

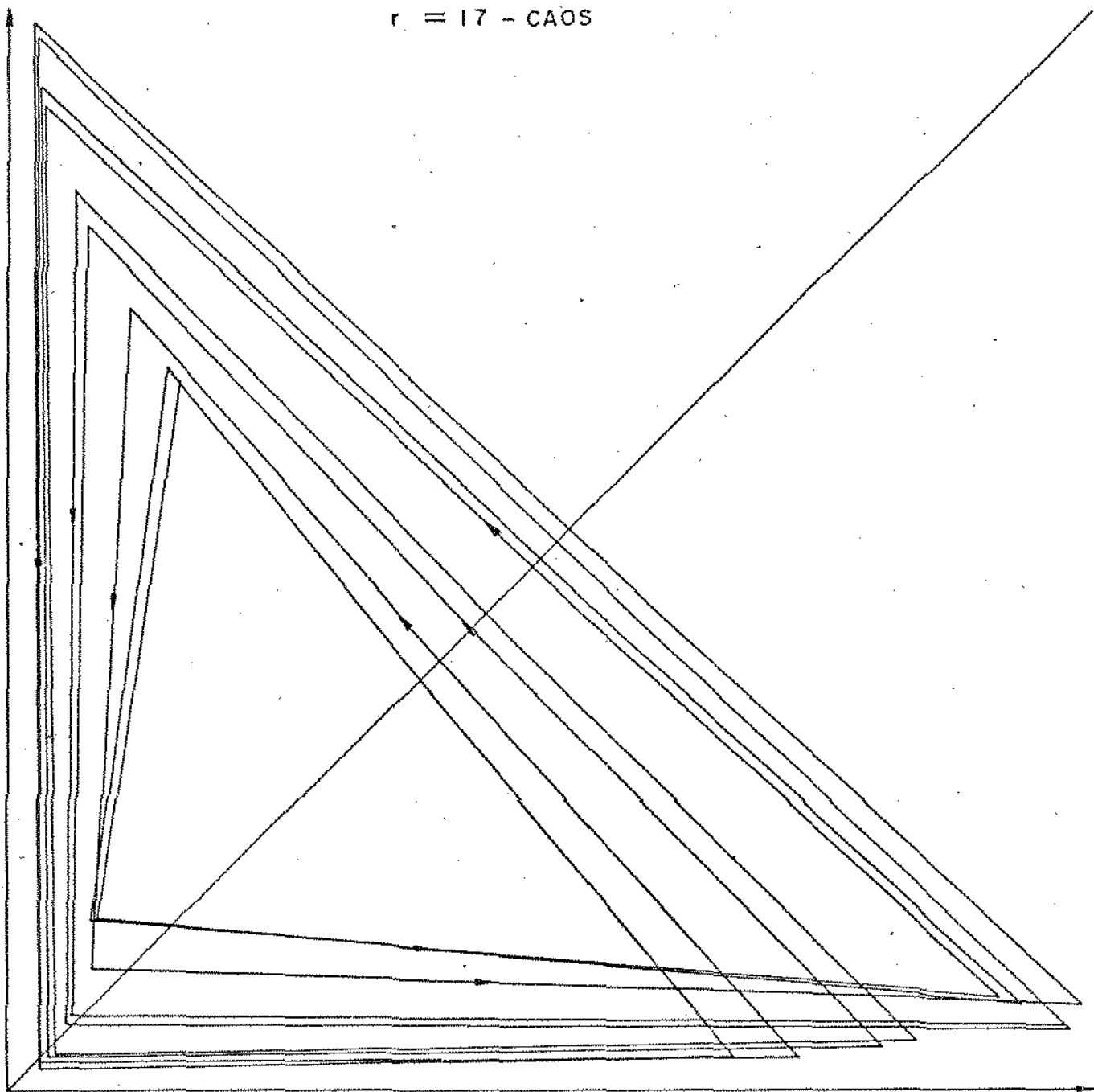


$r = 16,0$   
ciclo - 12



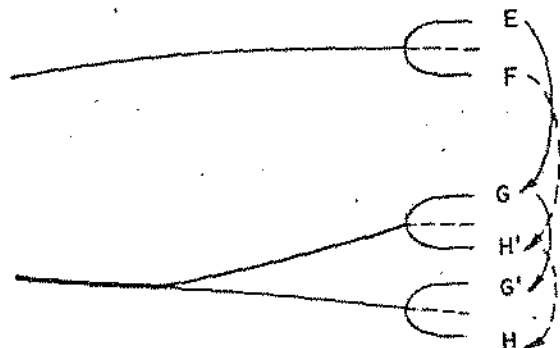


$r = 17 - \text{CAOS}$



Note que, para  $r > 14,0$  já não se sabe mais se é o ciclo-3 ou o ciclo-6 que aparece. Entretanto, olhando-se para os resultados obtidos pela simulação numérica, vê-se que somente a partir desse ponto é que começamos a encontrar o ciclo-6.

Assim, até  $r = 14$  o ponto  $(B,B)$  do ciclo-3 "volta" para o ponto  $(A,B)$ , mas a partir deste valor, isto já não ocorre mais, pois o ponto  $(B,B)$  começa a deslocar-se. Graficamente, tal deslocamento é mostrado na figura abaixo. O ponto  $(B,B)$ , que até  $r = 14$  vinha sendo representado pela linha espessa, ao aproximar-se de  $r = 14,104428\dots$ , começa a bifurcar-se de forma "suave", e para representar esta bifurcação graficamente, foi necessária uma razoável ampliação. Assim, com



fica fácil ver que o ciclo-6 da forma (3.26), não pode ocorrer.

Por outro lado, do polinômio característico de  $F^3(x,y)$ :

$$\lambda^2 - \lambda K(1) [K(1)K(2) + K(1) + 2K(2)] - K^2(1)K(2) = 0$$

temos que para  $r = 14,104428939639101\dots$ , os autovalores próprios de  $F^3(x,y)$  são:

$$\lambda(1) = -1,0$$

$$\lambda(2) = 0,16129168606788392\dots$$

Isto quer dizer que neste ponto ocorre a bifurcação garfo para  $F^3(x,y)$ , pois para valores de  $r < 14,104428939639101\dots$ , temos os valores próprios de  $F^3(x,y)$ :

$$\lambda(1) > -1,0$$

$$0,16129168606788392\dots < \lambda(2) < 1,0$$

e para valores de  $r > 14,104428939639101\dots$ , os valores próprios de  $F^3(x,y)$  são:

$$\lambda(1) < -1,0$$

$$0 < \lambda(2) < 0,16129168606788392\dots$$

Portanto, o ciclo-3 estável torna-se instável após  $r = 14,104428939639101\dots$  e quando  $r = 14,0$  o ciclo-6 começa a surgir de forma muito "suave". E, devido a esse jeito "suave" que o ciclo-3 vai se desdobrando, é que a forma (3.26) do ciclo-6 não existe.

\* Desta forma, o gráfico da FIG.3.5-b), fica:

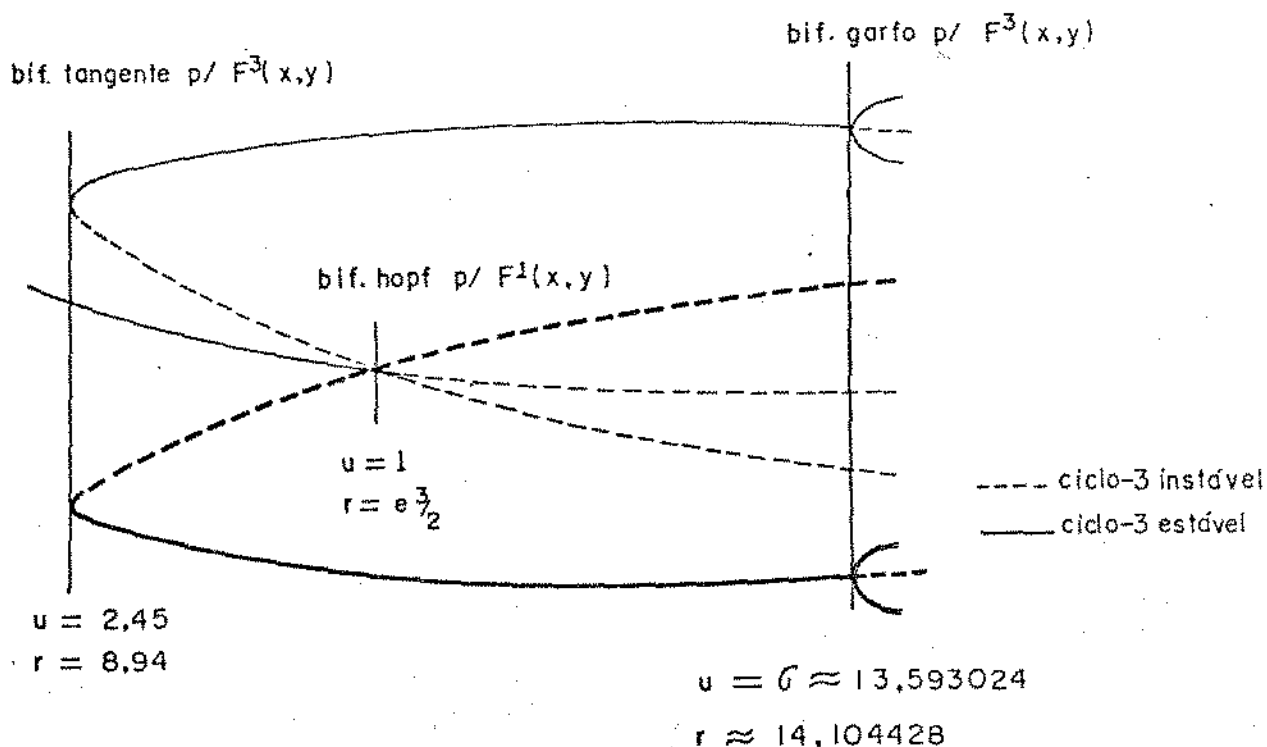


FIG 3.8)

E o ciclo-6, que surge do ciclo-3 estável de  $F^3(x,y)$ , por bifurcação garfo, fica assim caracterizado.

Vejamos agora como se comporta o nosso ciclo-3 instável.

Sabemos que ele existe para todo  $r > e^{3/2}$ ,  $u < 1$ , e não se bifurca em nenhum ponto. Mas será que, em algum ponto dentro do intervalo  $e^{3/2} < r < 14,104428939639101\dots$ , ou talvez no ponto de bifurcação do ciclo-3 estável, o ciclo-3 instável coincidirá com o estável?

Em primeiro lugar, tem-se que, para  $r > 8,943808755\dots$ , o valor de "u" cresce para o ciclo-3 estável ( $u > 2,45200108\dots$ ) e decresce para o ciclo-3 instável ( $u < 2,45200108\dots$ ). Já se sabe também que para  $r = 14,104428939639101\dots$  ( $u = 13,593024166815324\dots$ ) o ciclo-3 estável sofrendo a bifurcação garfo, torna-se instável. Por outro lado, sabe-se também que para um mesmo valor do parâmetro "r", existem dois valores dos parâmetros: "u" e "B". E como  $A = u B$ , tem-se também dois valores de "A", para um mesmo valor de "r".

Com isso, e pelas simulações numéricas, determina-se em  $r = 14,104428939639101\dots$ , que:

1º) Para o ciclo-3 estável de  $F^3(x,y)$  quando

$$u(1) = 13,593024166815324\dots, \text{ tem-se}$$

$$A(1) = 49,619928222069647\dots$$

$$B(1) = 3,6503965278901566\dots$$

2º) Para o ciclo-3 instável de  $F^3(x,y)$  quando

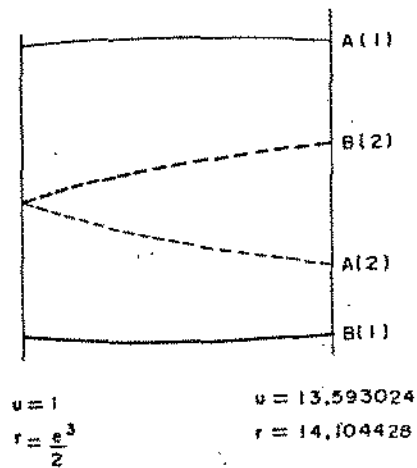
$$u(2) = 0,389095\dots, \text{ tem-se}$$

$$A(2) = 8,3335739409322251\dots$$

$$B(2) = 21,417838679325679\dots$$

Com estes resultados, verifica-se que o ciclo-3 instável não corta o estável no ponto de bifurcação deste último.

De forma gráfica, isso pode ser ilustrado como abaixo:



Agora, sendo  $A = u B$ , será que existe algum valor de "r", com  $r \in (e^3/2, 14,104428\dots)$  no qual os ciclos se coincidem? Isto quer dizer que, se o ciclo-3 estável está definido por  $A_e = u_e B_e$ , e o ciclo-3 instável por  $A_i = u_i B_i$ , então para os ciclos coincidirem-se devemos ter:

$$1) \quad r(u_i) = r(u_e) \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II) } & A_i = A_e \quad \text{ou} \quad A_i = B_e \quad \text{ou} \\
 & B_i = A_e \quad \text{ou} \quad B_i = B_e
 \end{aligned}$$

Entretanto, note que no ciclo-3 estável o menor valor sempre é o duplo  $B_e$  e no instável, após Hopf, o maior valor é o duplo  $B_i$ , e se existe a intersecção dos ciclos quando  $r \in (e^3/2, 14,104428\dots)$  devemos ter que:

$$B_e = A_i \quad \text{ou} \quad B_i = A_e$$

ou seja, se os ciclos se cortam, isto ocorre ou na parte de baixo ou na parte de cima; porém não nas duas (ver FIG.3.8). Assim,

$$B_e = A_i \Rightarrow B_i \neq A_e$$

$$B_i = A_e \Rightarrow B_e \neq A_i$$

Para provarmos este fato, suponhamos que:

$$A_i = B_e \Rightarrow A_e = B_i,$$

sendo,  $A = u B$  então:

$$A_i = u_i B_i$$

$$A_e = u_e B_e$$

Assim,

$$A_i = B_e = u_i B_i \Rightarrow B_i = \frac{1}{u_i} B_e.$$

$$A_e = u_e B_e = B_i = \frac{1}{u_i} B_e \Rightarrow A_e = \frac{1}{u_i} B_e$$

Donde

$$u_e B_e = \frac{1}{u_i} B_e \Rightarrow u_e = \frac{1}{u_i}$$

Dessa forma a condição (3.29) resume-se em:

$$i) r(u_i) = r(u_e)$$

(3.29)

$$ii) u_e = \frac{1}{u_i}$$

E isto acontece se e somente se  $u_i = u_e = 1$ .

Provemos tal fato.

Primeiro tem-se de (3.14), que:

$$r = \exp \left\{ \frac{(1+u) \ln u + 2 \ln (1+u) - (1+u) \ln 2}{(u-1)} \right\}.$$

Tomando-se:

$$C(1) = \ln (r(u)) = \left\{ \frac{(1+u) \ln u + 2 \ln (1+u) - (1+u) \ln 2}{(u-1)} \right\}$$

$$\begin{aligned} C(2) = \ln (r(1/u)) &= \left\{ \frac{(1+1/u) \ln (1/u) + 2 \ln (1+1/u) - (1+1/u) \ln 2}{(1/u-1)} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{-(u+1) \ln u + 2 u \ln (u+1) - 2 u \ln u - (u+1) \ln 2}{(1-u)} \right\} \end{aligned}$$

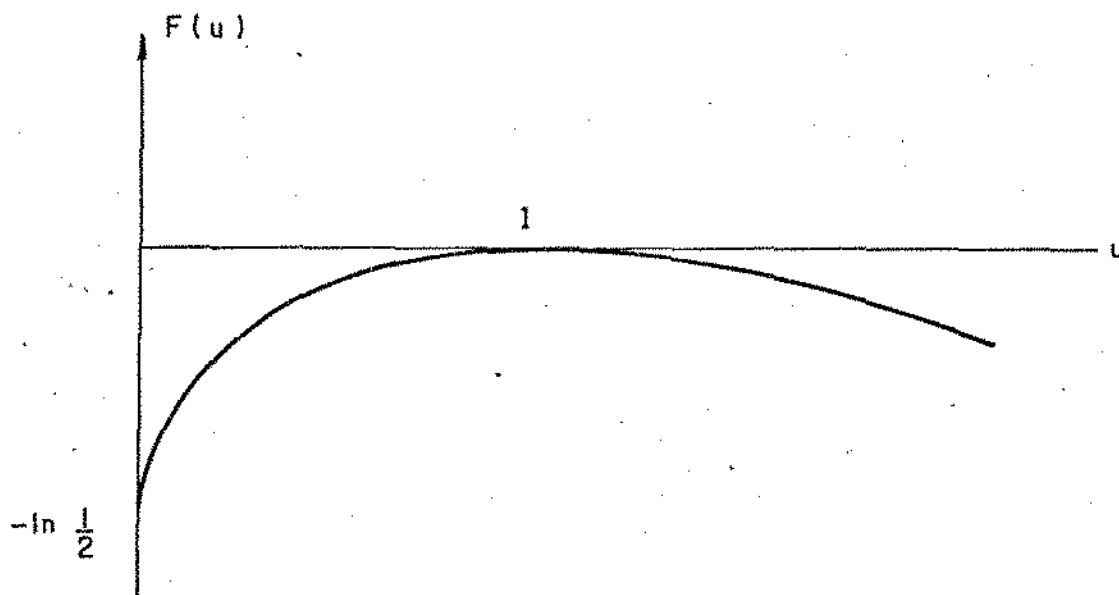
Para que se cumpra (1) de (3.29)', é necessário se fazer  $C(1) = C(2)$ . Obtém-se assim:

$$(1+u) \ln (1+u) - (1+u) \ln 2 - u \ln u = 0$$

Fazendo-se então:

$$F(u) = (1+u) \ln [(1+u)/2] - u \ln u = 0$$

graficamente tem-se:



Portanto, a função  $F(u)$  é tal que:

$$F(u) < 0 \quad , \text{ se } u \neq 1$$

e

$$F(u) = 0 \quad , \text{ se } u = 1$$

$$\text{Assim, } F(u) = 0 \iff u = 1$$

Conclui-se então, que o ciclo instável não intercepta o estável quando  $r \in (e^3/2, 14,1044\dots)$ . Quando  $u = 1$ , tem-se  $A_1 = B_1$ . Isto quer dizer que, se  $u = 1$  ( $r = e^3/2$ ) há um colapso do ciclo-3 instável de  $F^3(x,y)$  em um só ponto.

Por outro lado, o fato acima é parcialmente confirmado na prática, analisando-se todos os valores de "A" e de "B" obtidos pela simulação numérica; verifica-se que o ciclo-3 instável não corta o estável em nenhum ponto quando  $r \in (e^3/2, 14,1044\dots)$ .



Assim, na região  $8,943808755... < r < 14,104428939639101...$ , tanto o ciclo-3 instável como o estável ficam caracterizados.

Agora, para  $r > 14,104428939639101...$ , surge o ciclo-6 que, sendo inicialmente estável, também por bifurcação garfo, tornar-se-á instável dando origem ao ciclo-12. Este, por sua vez, irá surgir de forma "suave", ou seja, pode-se dizer que a partir de  $r = 14,70$  já não se sabe mais se é o ciclo-6 ou o ciclo-12 que ocorre. E esse ciclo-12, que inicialmente é estável, também por bifurcação garfo, tornar-se-á instável dando origem ao ciclo-24. E o fenômeno se repete, embora se note que o intervalo onde os ciclos- $3 \cdot 2^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) existe, vai diminuindo com o crescimento do parâmetro "r" até que, para  $r = 17,0$ , os ciclos são totalmente aperiódicos, e pode-se dizer então, que se tem um caos.

TABELA 1

$$u(0) = 1,000000001$$

$$\Delta u = 0,0000001$$

$u(i)$	$\lambda(1)$	$\lambda(2)$
0,999999901	1,0000000589285518	0,99999997553486849
0,999999801	1,0000001201827401	0,99999995311997944
0,999999701	1,0000001810500938	0,99999993019390234
0,999999601	1,0000002418172224	0,99999990714700275
0,999999501	1,0000003025522045	0,99999988404522667
0,999999401	1,0000003632640764	0,99999986092107675
0,999999301	1,0000004239673247	0,99999983778132506
0,999999201	1,0000004846642061	0,99999981463214255
0,999999101	1,0000005453555097	0,99999979147649108
0,999999001	1,0000006060447279	0,99999976831709528

TABELA 2

$$u(0) = 1,0000000001$$

$$\Delta u = 0,00000001$$

$u(1)$	$\lambda(1)$	$\lambda(2)$
0,9999999901	0,99999997710472722	
0,9999999801	1,0000000055411934	0,99999998869995568
0,9999999701	1,0000000141118330	0,99999998830226477
0,9999999601	1,0000000212658901	0,99999998709764610
0,9999999501	1,0000000279607521	0,99999998546549189
0,9999999401	1,0000000344282395	0,99999998363912840
0,9999999301	1,0000000408008147	0,99999998164899938
0,9999999201	1,0000000470652215	0,99999997959734466
0,9999999101	1,0000000532909760	0,99999997749253170
0,9999999001	1,0000000594885550	0,99999997533903786

TABELA 3

$$u(0) = 1,0000000001$$

$$\Delta u = 0,0000000001$$

$u(i)$	$ \lambda(i)  (i=1,2)$
0,9999999991	0,99999970758692033
0,9999999981	0,99999986222033274
0,9999999971	0,99999991041629015
0,9999999961	0,99999993405496860
0,9999999951	0,99999994816728784
0,9999999941	0,99999995759371371
0,9999999931	0,99999996437453731
0,9999999921	0,99999996967396014
0,9999999911	0,99999997370809818
0,9999999901	0,99999997711704770

TABELA 4

$$r = 10,0$$

$$v(0) = 0,0001$$

P<sub>F</sub> estável

ciclo-3 instável

14,9786613677699

14,9786613677699

14,9786613677699

14,9786613677699

14,9786613677699

TABELA 5

$$r = 10,04$$

$$v(0) = 0,0001$$

P<sub>F</sub> estável

ciclo-3 instável

14,9986214741117

14,9986214741117

14,9986214741117

14,9986214741117

14,9986214741117

TABELA 6

$$r = 11,0$$

$$v(0) = 0,0001$$

P<sub>F</sub> instável

ciclo-3 estável

40,4265568733974631

5,22619682916804696

5,22619682916804696

40,4265568733974631

## PARTE III

### CAPÍTULO IV

No primeiro capítulo, fez-se uma discretização do modelo contínuo de Verhulst cuja análise teve como pressuposto básico o crescimento de uma única espécie isolada no sistema ecológico. Entretanto, mesmo dentro de todas as considerações, os resultados obtidos por esta análise discreta através do Método de Euler, não se assemelham aos resultados esperados baseando-se no modelo contínuo.

Consequentemente, a proposta deste capítulo é uma análise crítica dos modelos populacionais discretos correntemente citados na literatura, propondo alternativa de discretização, cujo comportamento tenha uma semelhança maior ao comportamento do modelo contínuo de Verhulst (Mod.C.V.).

Antes de iniciarmos tal discretização, convém lembrar que o modelo contínuo de Verhulst

$$\frac{dy}{dt} = A y - B y^2 = y (A - B y) \quad (4.1)$$

com  $A, B > 0$ , tem como solução,

$$y(t) = \frac{A/B}{1 - \frac{e^{-At}}{C}}$$

$$C = \frac{y(0)}{y(0) - A/B}$$

onde  $A, B \in \mathbb{R}$  são biologicamente interpretados como:

$A$  = taxa de crescimento da espécie

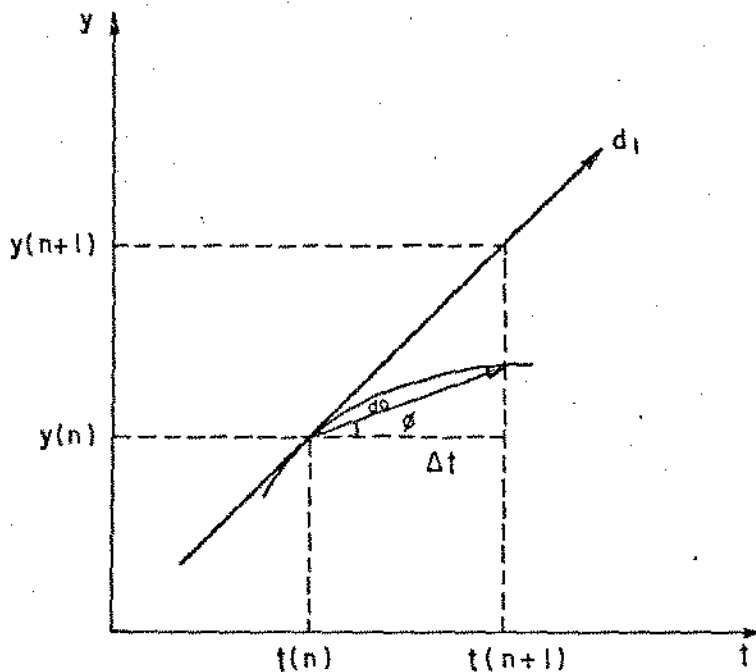
$B$  = taxa de competição intra-específica

$A/B$  = capacidade de suporte do meio

e na sua discretização pelo Método de Euler (Met.E.) , obteve-se:

$$y(n+1) = (A + 1) y(n) \left[ 1 - \frac{B}{(A+1)} y(n) \right] \quad (4.2)$$

Geometricamente, o Met. E. é justificado da seguinte forma:



A discretização pelo Met.E., caracteriza-se em encontrar as soluções por aproximações, através da informação inicial a respeito da solução num único ponto,  $y = y(n)$ , e a partir daí, recursivamente, obter a solução no ponto seguinte  $y = y(n+1)$ .

De uma forma geral, a solução numérica obtida pelo Met.E. é a seguinte: a equação diferencial dá a inclinação da curva em qualquer ponto como função de  $y$  e  $t$ . De início, conhecemos apenas o ponto  $(t(0), y(0))$ . Calcula-se então a inclinação da curva em  $(t(0), y(0))$  e, através de um incremento  $\Delta t$ , prossegue-se ao longo da tangente a curva em  $(t(0), y(0))$ . No novo ponto  $t(1) = t(0) + \Delta t$ , pela inclinação da tangente, obtida da equação diferencial, chega-se a um novo valor de  $y = y(1)$ . Continuando, obtém-se uma sequência de pequenos segmentos de reta que, espera-se, aproxime-se com suficiente precisão da curva, que é a solução.

Supondo-se que a solução da equação diferencial no ponto  $t = t(n)$  seja  $y(n)$ , pode-se traçar a reta com inclinação:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t(n)} = F(t, y)$$

que passa através do ponto  $(t(n), y(n))$ . Esta reta é representada por  $d_1$ .

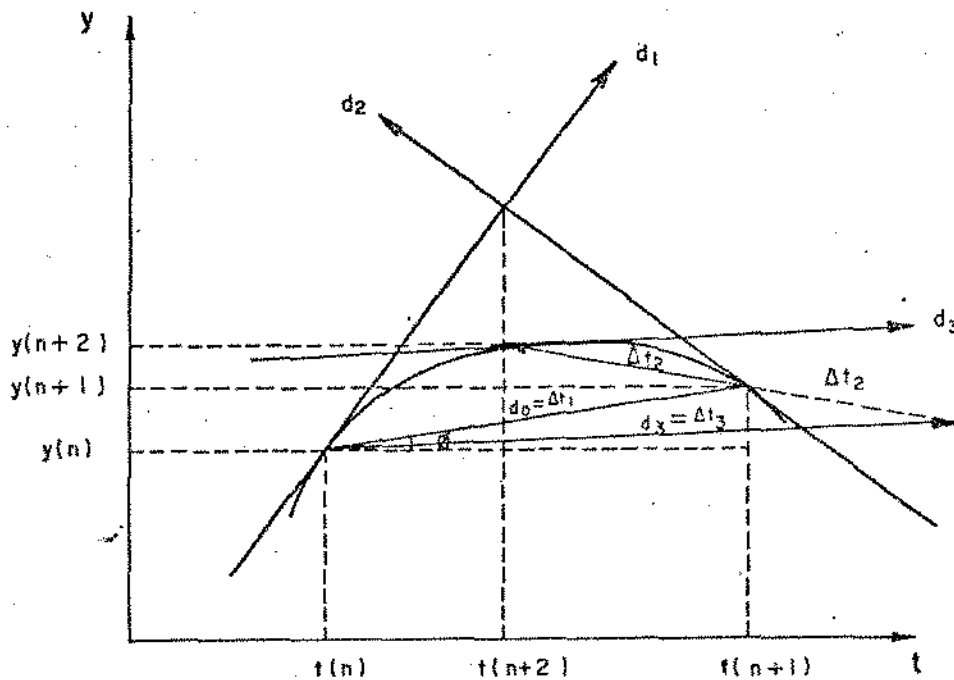
O Met.E., faz:

$$\text{tg } \theta = \frac{y(n+1) - y(n)}{t(n+1) - t(n)} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \approx \frac{dy}{dt} = \text{inclinação de } d_1$$



E faz-se então,  $y(n+1)$  ser o ponto onde a reta  $d_1$  intercepta a ordenada levantada em  $t = t(n+1) = t(n) + \Delta t$ . O Met.E. usa a inclinação no ponto  $(t(n), y(n))$  para obter o valor de  $y(n+1)$ .

Uma outra forma de se fazer a discretização, pode ser ilustrada como na figura abaixo e, que a partir de agora, será denominado Método 2 (Met.2):



Supondo-se que a solução inicial no ponto  $t = t(n)$  seja  $y(n)$ , e que o ponto inicial  $y(n+1)$  seja conhecido, podemos então traçar uma reta  $d_1$ , com a inclinação da tangente através de  $(t(n), y(n))$ , e uma outra reta  $d_2$ , com a inclinação da tangente através de  $(t(n+1), y(n+1))$ . A média destas inclinações ou tangentes, está mais perto da direção  $(t(n), y(n)) \rightarrow (t(n+1), y(n+1))$ , denotada por

$d_0$ , do que a tangente no ponto  $(t(n), y(n))$ , denotada por  $d_1$ . Nesta situação, pode-se esperar soluções mais precisas do que no Met.E., pois este último faz as inclinações de  $d_0$  e de  $d_1$  serem iguais; e graficamente pode-se ver que,  $d_0$  aproxima-se mais de  $d_3$  do que de  $d_1$ .

Neste método, usa-se a média das inclinações das derivadas nos pontos  $(t(n), y(n))$  e  $(t(n+1), y(n+1))$  para aproximar a diferença  $\frac{y(n+1) - y(n)}{t(n+1) - t(n)}$ , à solução, ou seja:

$$\frac{y(n+1) - y(n)}{t(n+1) - t(n)} = \operatorname{tg} \varnothing \approx \frac{d(n+1) - d(n)}{2} = \frac{1}{2} [F(t(n+1), y(n+1)) + F(t(n), y(n))]$$

Analogamente ao Met.E., aqui, a normalização é feita tomando-se  $\Delta t = 1$ . E a discretização de (4.1) pelo Met.2 é:

$$\begin{aligned} y(n+1) - y(n) &= \frac{1}{2} \{F(x(n), y(n)) + F(x(n+1), y(n+1))\} \\ &= \frac{1}{2} \{y(n) [A - B y(n)] + y(n+1) [A - B y(n+1)]\} \\ &= \frac{1}{2} A y(n) - \frac{1}{2} B y^2(n) + \frac{1}{2} A y(n+1) - \frac{1}{2} B y^2(n+1) \end{aligned}$$

donde

$$y^2(n+1) - \frac{(A - 2)}{B} y(n+1) + y^2(n) - \frac{(A + 2)}{B} y(n) = 0 \quad (4.3)$$

Agora, se considerarmos  $\mu(1)$  e  $\mu(2)$  como sendo as raízes de (4.3), então

$$\frac{(A - 2)}{B} = \mu(1) + \mu(2)$$

e

$$y^2(n) - \frac{(A + 2)}{B} y(n) = \mu(1) \mu(2) \quad (4.4)$$

Será conveniente ressaltar-se aqui que, toda nossa análise ainda é realizada dentro de um contexto que envolve o crescimento populacional de uma única espécie "isolada" no sistema ecológico. Sendo assim,  $y(n)$ ,  $y(n+1)$  são o tamanho da população na geração "n", "n+1", respectivamente. Além disso, por tratar-se de um modelo de população onde não se considera a geração espontânea da espécie, não podemos ter  $y(t(0)) = 0$ , pois se isto acontece, a população para todo instante "t" futuro, também será nula. Mais ainda, os tamanhos populacionais devem ser não negativos na geração considerada.

Agora, as soluções de (4.3),  $\mu(1)$ ,  $\mu(2)$ , expressando em princípio o tamanho da população na geração "n+1", devem ser positivas. Entretanto, sob o ponto de vista biológico, não é viável o caso onde  $\mu(1) \neq \mu(2)$ , ambas positivas. Se tal fato ocorresse, então a nossa espécie, que é única, teria dois tamanhos distintos da sua população numa mesma geração, e o nosso modelo não seria portanto, determinístico. Desta forma, o tamanho da população numa geração considerada, deve ser único. Para isto, é necessário que o produto  $\mu(1) \mu(2)$  seja, por sua vez, negativo. Fazendo-se então,  $\mu(1) \mu(2) < 0$ , uma raiz será negativa, e teremos como solução única para as iterações, a raiz positiva.

Impondo-se a condição  $\mu(1) \mu(2) < 0$ , tem-se de (4.4)

que:

$$y(n) < \frac{(A+2)}{B} \quad (4.5)$$

Vejamos primeiro o que acontece com a restrição (4.5).

O discriminante de (4.3) é:

$$\Delta = \frac{(A-2)^2}{B^2} - 4 \left[ y^2(n) - \frac{(A+2)}{B} y(n) \right] \quad (4.6)$$

e, como  $y(n) < \frac{(A+2)}{B}$ , tem-se que:

$$H(y(n)) = \left[ y^2(n) - \frac{(A+2)}{B} y(n) \right] < 0 \quad (4.7)$$

Portanto,

$$\Delta = \frac{(A-2)^2}{B^2} - 4 H(y(n)) > 0$$

E como  $\Delta > 0$ , as raízes de (4.3) são sempre reais, sendo uma negativa, e a outra positiva.

Resumindo, temos que, se:

$$y(n) < \frac{(A+2)}{B}, \text{ então } \mu(1) \mu(2) < 0$$

com ambas as raízes reais. E sendo estas raízes, uma positiva e a outra negativa, pode-se garantir então a unicidade e a positividade da solução  $y(n+1)$ , enquanto seja cumprido  $0 < y(n) < \frac{(A+2)}{B}$ .

Resta agora sabermos se  $y(n) < \frac{(A+2)}{B}$  garante a unicidade e a positividade de todos os  $y(n+1)$ ,  $i > 1$ . Para isto, é necessário que:

$$0 < y(n) < \frac{(A+2)}{B} \Rightarrow 0 < y(n+1) < \frac{(A+2)}{B} \quad (4.8)$$

De (4.3), vem que:

$$y(n+1) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(A-2)}{B} + \sqrt{\frac{(A-2)^2}{B^2} - 4 \left[ y^2(n) - \frac{(A+2)}{B} y(n) \right]} \right\} \quad (4.9)$$

e desde que

$$\left[ y^2(n) - \frac{(A+2)}{B} y(n) \right] < 0,$$

tem-se que:

$$\frac{(A-2)}{B} < \sqrt{\frac{(A-2)^2}{B^2} - 4 \left[ y^2(n) - \frac{(A+2)}{B} y(n) \right]}$$

e portanto  $y(n+1)$  é sempre positivo.

Analisando:

$$G(y(n)) = \frac{(A-2)^2}{B^2} - 4 \left[ y^2(n) - \frac{(A+2)}{B} y(n) \right] \quad (4.10)$$

tem-se que o seu valor máximo está em:

$$G'(y(n)) = -2y(n) + \frac{(A+2)}{B} = 0$$

ou

$$y(n) = \frac{(A+2)}{2B}$$

Agora, o valor que ela assume neste ponto é:

$$G \left[ \frac{(A+2)}{2B} \right] = \frac{2(A^2+4)}{B^2}$$

Disto, tem-se em (4.9) que:

$$y(n+1) < \frac{1}{2} \left\{ \frac{(A-2)}{B} + \frac{1}{B} \sqrt{2(A^2+4)} \right\}$$

Para garantir que  $y(n+1)$  seja menor que  $\frac{(A+2)}{B}$ , devemos

Impor:

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{(A-2)}{B} + \frac{1}{B} \sqrt{2(A^2+4)} \right\} < \frac{(A+2)}{B}$$

ou

$$(A-2) + \sqrt{2(A^2+4)} < (2A+4)$$

Assim, tem-se:

$$2(A^2+4) < (A+6)^2$$

Disto,

$$A^2 - 12A - 28 < 0$$

Finalmente, a condição:

$$A < 2 \quad \text{garante} \quad y(n+1) < \frac{(A+2)}{B}$$

Analogamente aos modelos anteriores, a análise do comportamento local do modelo (4.3) deve ser feita através da linearização deste, em torno dos seus pontos fixos. Tais pontos, como já sabemos, são determinados por:

$$y(n+1) = y(n) = y^*$$

Assim,

$$y^*(0) = 0$$

e

$$y^*(1) = A/B.$$

são os pontos fixos de (4.3) com  $0 < A < 2$  e  $B > 0$ .

Entretanto, linearizar e analisar o modelo (4.3) da mesma forma que analisamos o modelo (4.2), não está dentro dos propósitos deste capítulo. O que podemos mostrar aqui é que, fazendo-se a discretização de (4.3) pelo método descrito (Met.2), não se tem bifurcação. Isto pode ser visto, analisando-se  $\frac{dy(n+1)}{dy(n)}$  nos pontos fixos  $y^*(0)$ , e  $y^*(1)$ :

De (4.3) tem-se:

$$y(n+1) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(A-2)}{B} + \sqrt{\frac{(A-2)^2 - 4y^2(n)}{B^2} + 4 \frac{(A+2)}{B} y(n)} \right\}$$

Assim,

$$\frac{dy(n+1)}{dy(n)} = \frac{1}{4\sqrt{\dots}} \left[ -B y(n) + 4 \frac{(A+2)}{B} \right]$$

E nos pontos fixos  $y^*(0)$  e  $y^*(1)$  tem-se:

$$\left. \frac{dy(n+1)}{dy(n)} \right|_{y(n)=0} = \frac{A+2}{A-2}$$

e

$$\left. \frac{dy(n+1)}{dy(n)} \right|_{y(n)=A/B} = \frac{-A+2}{A+2}$$

Portanto:

$y^*(0) = 0$  é instável para  $0 < A < 2$

$y^*(1) = A/B$  é estável para  $0 < A < 2$

E desde que:

$$0 < \left. \frac{dy(n+1)}{dy(n)} \right|_{y(n)=A/B} < 1$$

não existe nenhum tipo de bifurcação para o modelo de Verhulst discreto, quando a sua discretização é feita pelo Met.2, assim como também não existe nenhum tipo de bifurcação no modelo de Verhuslt contínuo. Por outro, o modelo assim discretizado apresenta uma semelhança maior ao seu análogo contínuo, do que quando esta discretização é feita pelo Met.E.

Isto é mostrado a seguir, fazendo-se uma simulação numérica para os três modelos: (4.1), (4.2) e (4.3).



1e)

$$A = 1,7$$

$$B = 0,001$$

$$y(0) = 0,2$$

	Mod.C.V.	Met.2	Met.E.
t=5,0	622,8739	624,2813	406,5117
t=5,1	691,3559	692,7471	459,0935
t=5,2	762,0404	763,3848	516,0626
t=5,3	833,9756	835,2481	577,1611
t=5,4	906,1421	907,322	641,967
t=5,5	977,5444	978,581	709,889
t=5,6	1047,074	1048,043	780,176

A discretização feita pelo Met.2 pode algumas vezes, levar o sistema a que se está discretizando, a caminhos de complexa resolução.

Como exemplo, consideremos o modelo contínuo de Lotka -  
-Volterra,

$$\frac{dx}{dt} = x G_1(x,y) = x (a_1 + b_1 x + c_1 y) \quad (4.9)$$

$$\frac{dy}{dt} = y G_2(x,y) = y (a_2 + c_2 x + b_2 y)$$

onde

$a_i$  = taxa de crescimento da espécie

$b_i$  = taxa de competição intra-específica (i = 1,2)

$c_i$  = taxa de competição inter-específica

Na discretização pelo Met.E., com  $\Delta t = 1$ , obteve-se:

$$x(n+1) = x(n) [1 + G_1(x(n),y(n))] \quad (4.10)$$

$$y(n+1) = y(n) [1 + G_2(x(n),y(n))]$$

com o significado ecológico de  $G_i$ , (i=1,2), mantendo-se análogo ao do modelo (4.9).

Na discretização pelo Met.2, normalizando-se, com passo  $\Delta t = 1$ , obtém-se:

$$x(n+1) - x(n) = \frac{1}{2} [x(n) G_1(x(n),y(n)) + x(n+1) G_1(x(n+1),y(n+1))] \quad (4.11)$$

$$y(n+1) - y(n) = \frac{1}{2} [y(n) G_2(x(n),y(n)) + y(n+1) G_2(x(n+1),y(n+1))]$$

E assim,

$$x(n+1) - x(n) = \frac{1}{2} x(n) G(x(n), y(n)) + \frac{1}{2} x(n+1) G_1(x(n+1), y(n+1))$$

$$y(n+1) - y(n) = \frac{1}{2} y(n) G(x(n), y(n)) + \frac{1}{2} y(n+1) G_2(x(n+1), y(n+1))$$

donde

$$x(n+1) [2 - G_1(x(n+1), y(n+1))] - x(n) [2 + G_1(x(n), y(n))] = 0 \quad (4.12)$$

$$y(n+1) [2 - G_2(x(n+1), y(n+1))] - y(n) [2 + G_2(x(n), y(n))] = 0$$

com

$$G_1(x, y) = a_1 + b_1 x + c_1 y$$

$$G_2(x, y) = a_2 + c_2 x + b_2 y$$

Dada a sua complexidade, a análise de (4.12), não será desenvolvida nesta dissertação.

Apenas pode-se dizer que, como na discretização do modelo contínuo de Verhust pelo Met.2 obtém-se resultados cuja semelhança é maior aos resultados contínuos, assim também o modelo discreto de Lotka-Volterra obtido pelo Met.2, talvez forneça resultados cujo comportamento é mais semelhante ao comportamento de seu análogo contínuo.

## EPÍLOGO

Os modelos discretos que foram apresentados nesta dissertação são, sem dúvida, interessantes no que diz respeito à matemática neles envolvida. Apesar de não terem sido ajustados com sucesso, a dados reais, existem semelhanças entre eles e os seus protótipos reais. Tais semelhanças devem-se ao fato de que estes protótipos possuem a característica de flutuações populacionais que são expressas, nestes modelos matemáticos discretos, sob a forma das bifurcações que neles ocorrem, perto do que seria o ponto de equilíbrio da população. Pelo fato destas bifurcações acontecerem nos modelos discretos e não nos seus análogos contínuos, parece que o comportamento real das populações ecológicas é em tempo discreto. Dessa forma, é justo dizer então, que a matemática discreta é bem mais apropriada no estudo da Ecologia e as equações de diferenças são portanto, bem mais adequadas como modelos populacionais do que as equações diferenciais.

Por outro lado, não deve ser minimizada a importância de se descrever os sistemas ecológicos na linguagem matemática e, muito embora a Ecologia Matemática venha sendo "esmagada" pelo interesse do sistema há quase duzentos anos, deve-se ressaltar que ela não pode existir independentemente do contexto social, econômico e político do qual deriva e que até hoje se encontra.

Este "esmagamento" é sentido, por exemplo, no controle biológico de pragas da lavoura onde os defensivos agrícolas são os escolhidos, por oferecerem resultados que até certo ponto e a curto prazo, são eficientes, mas que no decorrer do tempo têm se mostrado mais perniciosos que benéficos. Neste trabalho, este problema foi encontrado ao se tentar, com dados populacionais do bicudo do algodão [PI], uma aplicação prática do modelo simplificado de Leslie. Estes dados ficaram inválidos, no momento em que havia neles a interferência de inseticidas, e o modelo proposto não oferecia condições de ajustar adequadamente seus parâmetros com os dados disponíveis. Além disto, é necessário dizer que uma das suposições básicas do modelo, que é a reprodução sazonal da espécie não sendo cumprida no nosso clima tropical ou subtropical, torna a aplicação deste modelo um tanto duvidosa.

Apesar disto, é interessante sublinhar-se que, embora a discretização feita por [GOI] torne o modelo de Leslie inviável a dados populacionais reais submetidos a um clima como o nosso, a análise teórica através da discretização proposta no Met.2, talvez possa oferecer uma alternativa mais coerente com a realidade. Este método parece estar mais de acordo com o modelo contínuo. Isto foi parcialmente mostrado, quando usou-se no modelo contínuo de Verhulst tal discretização e obteve-se resultados, cuja semelhança é maior aos resultados contínuos do que os resultados fornecidos pela discretização usada na literatura corrente. Por outro lado, como foi mostrado através do modelo contínuo de Lotka-Volterra, deve-se levar em consideração que tal método pode, às vezes, conduzir-nos a equações de diferenças de difícil resolução.

Dentro desta perspectiva, como direções de futuros trabalhos aponta-se primeiro, o estudo dos modelos populacionais clássicos discretizados pelo Met.2, e logo seu ajuste a dados reais. Um trabalho neste sentido será, não somente pela sua complexidade mas também por ser um trabalho original onde novos caminhos podem ser trilhados, muito mais ambicioso e abrangente que uma dissertação de mestrado.

## Referências bibliográficas

- [CN] Conte, S., Elementos de análise numérica. Porto Alegre, Globo, 1975.
- [EN] Engel, A., Introdução a biomatemática dos sistemas ecológicos. IV Congresso Nacional de Matemática Aplicada. UNICAMP/IMECC, 1984.
- [FE] Feigenbaum, M. Universal behavior in nonlinear systems. Los Alamos Science, 4-27, 1980.
- [GO] Guckenheimer, J., Oster, G. and Ipaktchi, A. The dynamics of density dependent population models. J. Am. Math. Biol. 4(2):101-147, 1977.
- [LY] Li, T., Yorke, J.A. Period three implies chaos. J. Am. Math. Monthly. 82:985-992, 1975.
- [ML] Malthus, T. An essay on the principle of populations. 1798.

- [MY1] May, R. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature. 261(5560):459-467, 1976.
- [MY1] May, R. Nonlinear problems in ecology and resource management North-Holland, 1983. p.516-560
- [OS1] Oster, G. Internal variables in population dynamics. Providence, AMS, 1976. (Lectures on Mathematics, in the Life Sciences Volume 8)
- [VE1] Verhulst, P. Nouv. Mem. Acad. Roy. Bruxelles, 18, 1845.
- [VO1] Volterra, V. Human Biology 10, 1-11, 1938.
- [VO1] Volterra, V. Human Biology 11, 173-178, 1939.

#### Bibliografias consultadas

- [PE1] Pielou, E. An introduction to mathematical ecology. J. Wiley, 1969.
- [PI1] Pierozz, I., Jr. Ecologia aplicada de *Anthonomus gandis gandis* boheman, 1843 (coleoptera curculionidae) na região de Campinas - SP. (Tese de Mestrado - UNICAMP - Inst. Biologia, 1985).



- [RO] Rosen, R. ed. Foundations of mathematical biology. In:-  
The deterministic theory of population dynamics. New York,  
Academic Press, 1973.
- [RO] Rosen, R. Dynamical systems theory in biology. New York,  
J. Wiley, 1970. V.I
- [SC] Scudo, F. , Ziegler, J. The golden age of theoretical ecology:  
1923 - 1940. New York, Springer - Verlag, 1978.  
(Lectures Notes in Biomathematics,22).