UMA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO DE RIESZ.

JOÃO CESAR GUIRADO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência de Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi.

Este Trabalho foi realizado com o auxílio financeiro do Conselho Nacional de Pesquisa - CNP_q.

Campinas, junho de 1979.

A meus pais,

Jacira e Batista.

" A gratidão não é somente a maior das virtudes;
é também mãe de todas as outras."- *Cícero*.

A Jacira e Batista,
meus diletos pais, pelos esforços, incentivos, confiança e apoio nos momentos difíceis...

A Rodney C. Bassanezi,
professor-orientador, pela proposição deste trabalho e segura e valiosa orientação;

A Ricardo A. Bacci,
pelas sugestões oportunas e enriquecidas discussões;

Ao Conselho Nacional de Pesquisa- CNP_q,
pelo apoio financeiro que me tornou possível a realização deste trabalho;

A Deus
e a todos os que contribuíram para que eu aqui chegasse, o testemunho de meu agradecimento.

João Cesar Guirado.

INDICE

INTRODUÇÃO

A integral de Stieltjes e suas generalizações são de grande importância em muitos problemas e conceitos de análise, mecânica, física-matemática e teoria das probabilidades. Stieltjes usou-as em 1894 nos estudos da continuidade de frações, no problema dos momentos.

Mais tarde, em 1944, Riesz se interessou pela questão e estabeleceu uma conexão fechada entre esta integral e uma - classe de funções lineares, que são definidas no campo das funções contínuas sobre um intervalo finito. Mais precisamente, demonstrou um teorema de grande importância na análise matemática, conhecido como o teorema de Riesz [17], que é enunciado de maneira clássica da seguinte forma:

" A integral de Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\ d\alpha(x),$$

onde α é uma função fixada de variação limitada, define um funcional linear sobre o espaço das funções reais contínuas definidas sobre o intervalo $[a,b]$, e, reciprocamente, qualquer funcional linear (limitado) pode ser escrito nesta forma integral."

Na presente dissertação chegamos a uma generalização deste teorema, e seguindo o trabalho de Giorgi e Letta [7], primeiramente, consideramos para uma dada classe $\mathcal{U}$ de partes de um conjunto abstrato X, o conjunto Λ constituído por todas as funções de conjunto λ, positivas, definidas em $\mathcal{U}$, crescentes, e satisfazendo a condição $\lambda(\emptyset) = 0$. Se λ é um elemento de Λ, de finimos

$$\int f\, d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\, dt.$$

para toda função f definida em X, positiva e tal que o conjunto $\{f > t\}$ pertence à $\mathcal{U}$, para todo número real t estritamente positivo.

Em seguida, damos uma nova classe suplementar $\mathcal{K}$, de partes de X, e associamos a todo elemento λ de Λ a função λ_-, também pertencente à Λ, definida por

$$\Lambda_-(U) = \sup\{\lambda^*(K) : K \subset U,\ K \in \mathcal{K}\}$$

onde

$$\lambda^*(K) = \inf\{\lambda(V) : K \subset V,\ V \in \mathcal{U}\}$$

Encontramos condições suficientes para que uma função λ da classe Λ seja a restrição à $\mathcal{U}$ de uma medida, e nos ocupamos com o problema da existência de um prolongamento de λ, que seja aditivo, no sentido finito, no anel gerado por $\mathcal{U}$.

Mostramos que várias propriedades de uma função de conjunto da classe Λ se traduzem por propriedades da integral correspondente, considerada como um funcional sobre a classe $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ ou sobre uma parte densa desta classe.

Finalmente atingimos nosso objetivo que foi provar uma generalização do teorema de Riesz, a saber:

" Seja $\mathcal{C}$ uma parte densa de $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$, possuindo as seguintes propriedades:

(a) toda função pertencente à $\mathcal{C}$ é nula sobre o complementar de um elemento de $\mathcal{K}$.

(b) para todo elemento f de $\mathcal{C}$ e para todo número real c positivo, as funções cf, $f \wedge c$, $f - f \wedge c = (f - c)^+$ pertencem à $\mathcal{C}$.

Seja J uma aplicação crescente de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}_+$, tal que, para todo elemento f de $\mathcal{C}$ e para todo número real c positivo, tem-se

(1) $J(cf) = c\, J(f)$;

(2) $J(f) = J(f \wedge c) + J(f - f \wedge c)$;

(3) $J(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} J(f \wedge n)$.

Então existe uma função λ da classe Λ, tal que

$$J(f) = \int f\, d\lambda \quad \forall\, f \in \mathcal{C}.$$

O mesmo resultado é válido para uma função λ pertencente à Λ- ; ela é então univocamente determinada.

As idéias deste trabalho motivaram o estudo desenvolvido por Gabriele Greco (1977), a respeito das Integrais Monótonas com aplicações nos diferentes ramos da matemática e, mais especificamente no estudo da " Estatística Robusta" que utiliza como requisito essencial a teoria das capacidades de Choquet [10].

Procuramos tornar o trabalho o mais simples possível, demonstrando todas as proposições, para aqueles que desejarem - pesquisar neste campo da matemática.

1. A CLASSE DOS CONJUNTOS $\mathcal{U}$ E A CLASSE DAS FUNÇÕES $\mathcal{J}$.

Durante toda a explanação, X designará um conjunto não vazio e $\mathcal{U}$ uma classe de partes de X, com as seguintes propriedades:

(1.1) $\emptyset \in \mathcal{U}$

(1.2) A união e a intersecção de dois elementos de $\mathcal{U}$ pertencem à $\mathcal{U}$

(1.3) A união de uma seqüência de elementos de $\mathcal{U}$ contidos num mesmo elemento de $\mathcal{U}$ pertence à $\mathcal{U}$.

Para todo A de X designaremos por A^c seu complementar $X \setminus A$ e por 1_A sua função característica. O termo função designará (salvo menção expressa em contrário) uma função numérica (podendo assumir seus valores em $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{ \infty \}$). Conforme as convenções adotadas em teoria de integração, temos $0.(+\infty) = (+\infty).0$. Se f é uma função definida em X e se t é um número real, designaremos por $\{ f > t \}$ o conjunto constituído pelos elementos x de X que verificam a relação $f(x) > t$. De maneira análoga para os conjuntos $\{ f \geq t \}$, $\{ f < t \}$, $\{ f \leq t \}$.

Denotaremos por $\mathcal{J}(\mathcal{U})$, ou simplesmente $\mathcal{J}$, a classe constituída pelas funções positivas f, definidas em X e tais que o conjunto $\{ f > t \}$ pertence à $\mathcal{U}$ para todo número real t, estritamente positivo.

(1.4) <u>PROPOSIÇÃO</u>: *Para todo par f, g de funções da classe $\mathcal{J}$ e para todo número real c positivo, as funções cf, $f+g$, $f\vee g$ $f\wedge g$, $f\wedge c$ e $f-f\wedge c = (f-c)^+$ pertencem à classe $\mathcal{J}$.*

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Queremos provar que cf é um elemento de $\mathcal{J}$; para isto devemos provar que $\{cf > t\}$ pertence à $\mathcal{U}$ para todo número real t estritamente positivo.

Como c é um número real estritamente positivo, podemos escrever:

$$\{cf > t\} = \{f > \tfrac{t}{c}\}$$

O conjunto acima pertence à $\mathcal{U}$ pois $\frac{t}{c}$ é um número real estritamente positivo.

Para provarmos que f+g pertence à $\mathcal{J}$, observemos que $\{f+g > t\}$ está contido em $\{f > \frac{t}{2}\} \cup \{g > \frac{t}{2}\}$.

Como f e g pertencem à classe $\mathcal{J}$, os conjuntos $\{f > \frac{t}{2}\}$ e $\{g > \frac{t}{2}\}$ pertencem à $\mathcal{U}$, e por (1.2) $\{f > \frac{t}{2}\} \cup \{g > \frac{t}{2}\}$ pertence à $\mathcal{U}$. Por outro lado, o conjunto $\{f+g > t\}$ é idêntico ao conjunto $\{f > t\} \cup \{g > t\} \cup \left[\bigcup_{\substack{0<r<t \\ r\in Q}} (\{f > r\} \cup \{g > t-r\}) \right]$,
e por (1.2) e (1.3) decorre que o conjunto $\{f+g > t\}$ é um elemento de $\mathcal{U}$.

Temos que

$$(f\vee g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \geqslant g \\ g(x) & \text{se } f \leqslant g \end{cases}$$

Assim, podemos escrever

$\{f \vee g > t\} = \{f > t;\ f \geqslant g\} \cup \{g > t;\ g \geqslant f\}$

Mas, os conjuntos

$\{f > t;\ f \geqslant g\}$ e $\{g > t;\ g \geqslant f\}$

estão contidos, respectivamente, nos conjuntos

$\{f > t\}$ e $\{g > t\}$, e como f, g pertencem ã classe $\mathcal{J}$ temos que

$\{f > t\}$ e $\{g > t\}$ pertencem ã $\mathcal{U}$. Assim,

$\{f > t;\ f \geqslant g\}$ e $\{g > t; g \geqslant f\}$ pertencem ã $\mathcal{U}$. Agora por (1.2),

$\{f \vee g > t\}$ pertence ã $\mathcal{U}$.

Por definição,

$$(f \wedge g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \leqslant g(x) \\ g(x) & \text{se } f(x) \geqslant g(x) \end{cases}$$

Assim, podemos escrever

$\{f \wedge g > t\} = \{f > t;\ f \leqslant g\} \cup \{g > t;\ f \geqslant g\}$

Mas os conjuntos

$\{f > t;\ f \leqslant g\}$ e $\{g > t;\ f \geqslant g\}$

estão contidos, respectivamente, nos conjuntos

$\{f > t\}$ e $\{g > t\}$, e como f, g pertencem ã classe $\mathcal{J}$ temos que

$\{f > t\}$ e $\{g > t\}$ pertencem ã $\mathcal{U}$. Assim,

$\{g > t;\ f \geqslant g\}$ e $\{f > t;\ g \geqslant f\}$ pertencem ã $\mathcal{U}$. Portanto, por (1.2), $\{f \wedge g > t\}$ pertence ã $\mathcal{U}$.

Para provarmos que $(f \wedge c)$ pertence ã classe $\mathcal{J}$, basta considerarmos no caso anterior a função g como sendo a função - constante c.

Sabemos que

$$(f - f \wedge c)(x) = \begin{cases} f - c & \text{se } f \geqslant c \\ 0 & \text{se } f \leqslant c \end{cases}$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned}\{(f - f \wedge c) > t\} &= \{(f - c) > t;\ f \geqslant c\} \cup \{0 > t;\ f \leqslant c\} \\ &= \{(f - c) > t;\ f \geqslant c\} \cup \emptyset \\ &= \{(f - c) > t;\ f \geqslant c\} \\ &= \{f > t + c\ ;\ f \geqslant c\} \subset \{f > t + c\}\end{aligned}$$

e como $t + c$ é um número real estritamente positivo, temos que $\{f > t + c\}$ é um elemento de $\mathcal{U}$, donde $\{(f - f \wedge c) > t\}$ pertence à $\mathcal{U}$. ∎

(1.5) PROPOSIÇÃO: *A envoltória superior de uma sequência* $\{f_n\}$ *de elementos de* $\mathcal{J}$ *majorada por um mesmo elemento* g *de* $\mathcal{J}$ *pertence à* $\mathcal{J}$.

DEMOSTRAÇÃO:

Queremos provar que $\{\sup_n f_n > t\}$ pertence à $\mathcal{U}$. Mas, $\{\sup_n f_n > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f_n > t\} \subset \{g > t\}$.

Como g é um elemento de $\mathcal{J}$ temos que $\{g > t\}$ pertence à $\mathcal{U}$ e então, por (1.3) segue-se que $\{\sup_n f_n > t\}$ pertence à $\mathcal{U}$. ∎

Diremos que uma <u>função é simples</u> se o conjunto de seus valores é uma parte finita de $\mathbb{R}$.

(1.6) PROPOSIÇÃO: *As funções simples da classe* $\mathcal{J}$ *são as funções* f *que admitem uma representação da forma* $f = \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{U_i}$ *onde* $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *é uma sequência finita decrescente de elementos* *de $\mathcal{U}$ e c_i são coeficientes reais positivos.*

DEMONSTRAÇÃO:

Consideremos $\mathcal{C} = \{(c_i)_{1 \leq i \leq n} \,/\, c_1 < c_2 < \ldots < c_n\}$ e definamos os seguintes conjuntos:

$$U_i = \{ x \,/\, f(x) > c_i \}$$

Segue-se da própria construção dos conjuntos acima - que $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ é uma sequência finita, decrescente, de elementos de $\mathcal{U}$.

Como f é simples, f assume um número finito de valores, digamos, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Definamos os seguintes conjuntos:

$$V_i = U_i - U_{i+1}$$

e coloquemos

$$f(x) = \lambda_i \quad \text{se x pertence a } V_i.$$

Chamando

$$\lambda_1 = c_1$$
$$\lambda_2 = c_1 + c_2$$
$$\vdots$$
$$\lambda_n = \Sigma_{i=1}^{n} c_i$$

temos

$$f(x) = \Sigma_{i=1}^{n} c_i 1_{U_i} \blacksquare$$

2. <u>INTEGRAÇÃO EM RELAÇÃO A UMA FUNÇÃO CRESCENTE SOBRE $\mathcal{U}$</u>.

Designaremos por $\Lambda(\mathcal{U})$, ou simplesmente por Λ, o conjunto constituído pelas funções <u>positivas</u> λ definidas em $\mathcal{U}$, crescentes (isto é, tais que para $U \subset V$ tem-se $\lambda(U) \leqslant \lambda(V)$) e satisfazendo $\lambda(\emptyset)=0$.

Para todo elemento λ de Λ, e para toda função f pertencente à classe $\mathcal{J}$, definimos <u>integral de f em relação à λ</u> por:

(2.1) $$\int f\, d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda\{f > t\}\, dt$$

Observemos que o segundo membro da igualdade é a integral, no sentido ordinário, da função u (positiva e decrescente) definida sobre o intervalo $(0,+\infty)$:

(2.2) $$u(t) = \lambda(\{f > t\}).$$

(2.3) <u>PROPOSIÇÃO</u>: *Seja λ um elemento de Λ. Sejam f,g duas funções da classe $\mathcal{J}$, e c um número real positivo. Então,*

(a) $$\int f\, d\lambda \leqslant \int g\, d\lambda \quad \text{se} \quad f \leqslant g;$$

(b) $$\int (cf)\, d\lambda = c \int f\, d\lambda \ ;$$

(c) $$\int f\, d\lambda = \int (f \wedge c)\, d\lambda + \int (f - f\wedge c)\, d\lambda \ ;$$

(d) $$\int f\, d\lambda = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int (f\wedge n)\, d\lambda .$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

(a) Por hipótese $f \leqslant g$, logo

$$\{f > t\} \subseteq \{g > t\},$$

e assim,

$$\lambda(\{f > t\}) \leq \lambda(\{g > t\})$$

Integrando ambos os membros da desigualdade acima temos:

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\ dt \leq \int_0^{+\infty} \lambda(\{g > t\})\ dt\ ,$$

ou seja,

$$\int f\ d\lambda \leq \int g\ d\lambda$$

(b) $$\int (cf)\ d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{cf > t\})\ dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > \frac{t}{c}\})\ dt$$

Chamando $\frac{t}{c} = s$ temos:

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\{f > \frac{t}{c}\})\ dt = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > s\})c\ ds$$

$$= c\int_0^{+\infty} \lambda\{f > s\}\ ds$$

$$= c\int f\ d\lambda .$$

Portanto,

$$\int (cf)\ d\lambda = c\int f\ d\lambda$$

(c) Por (2.1) temos

$$\int (f \wedge c)\ d\lambda + \int (f - f \wedge c)\ d\lambda =$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda(\{f \wedge c > t\})\ dt + \int_0^{+\infty} \lambda(\{f - f \wedge c > t\})\ dt$$

Analisemos primeiramente o caso em que $f \leq c$.

$$\int_0^{+\infty}\lambda(\{f \wedge c > t\})\ dt + \int_0^{+\infty}\lambda(\{(f - f \wedge c) > t\})\ dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\lambda(\{f > t\})\ dt + \int_0^{+\infty}\lambda(\emptyset)\ dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\lambda(\ f > t\})\ dt$$

$$= \int f\ d\lambda\ ,$$

ou seja,

(2.3.1) $\int (f \wedge c)\ d\lambda + \int (f - f \wedge c)\ d\lambda = \int f\ d\lambda$ para $f \leq c$

Para o caso em que $f > c$, teremos:

$$\int_0^{+\infty}\lambda(\{f \wedge c) > t\})\ dt + \int_0^{+\infty}\lambda(\{(f - f \wedge c) > t\})dt =$$

$$= \int_0^{c}\lambda(\{f > t\}\ dt + \int_0^{+\infty}\lambda(\{(f - c) > t\})\ dt$$

$$= \int_0^{c}\lambda(\{f > t\}\ dt + \int_0^{+\infty}\lambda(\{f > t + c\})\ dt$$

$$= \int_0^{c}\lambda(\{f > t\}\ dt + \int_c^{+\infty}\lambda(\{f > s\})\ ds,$$

tomando $t+c = s$

Assim,

(2.3.2) $\int (f \wedge c)\ d\lambda + \int (f - f \wedge c)\ d\lambda = \int f\ d\lambda$ para $f > c$

De (2.3.1) e (2.3.2) temos:

$$\int f\ d\lambda = \int (f \wedge c)\ d\lambda + \int (f - f \wedge c)\ d\lambda$$

(d) Pela monotonicidade da integral, segue-se que

$$\sup_{n \in N}\int (f \wedge n)\ d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int\ (f \wedge n)\ d\lambda$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \int (f \wedge n)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \lambda\{f \wedge n > t\}\, dt.$$

Agora, $(f \wedge n)$ é uma sequência monótona crescente que converge - para f e como λ é crescente, $\lambda(\{f \wedge n > t\})$ decresce com n.

Como λ é positiva e monótona crescente, segue-se que λ é contínua em quase todo ponto. Portanto, λ é integrável,o que implica a mensurabilidade da sequência $\lambda(\{f \wedge n > t\})$. Assim, podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona, que nos dá

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \lambda(\{f \wedge n > t\})\, dt = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\, dt = \int f\, d\lambda. \quad \blacksquare$$

(2.3.3) <u>OBSERVAÇÃO</u>: $\int 1_U\, d\lambda = \lambda(U)$ para todo elemento U de $\mathcal{U}$.

De fato:

$$\int 1_U\, d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{1_U > t\})\, dt.$$

Se $t > 1$ teremos

$$\{ x: 1_U(x) > t \} = \emptyset$$

e assim,

$$\lambda(\{ 1_U > t \}) = \lambda(\emptyset) = 0$$

Se $0<t\leq 1$ teremos

$$\{ x: 1_U(x) > t \} = U,$$

e assim

$$\lambda(\{ 1_U > t \}) = \lambda(U).$$

Desta forma,

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\{ 1_U > t\})\ dt = \int_0^1 \lambda(\{ 1_U > t\})\ dt + \int_1^{+\infty} \lambda(\{ 1_U > t\})\ dt$$

$$= \lambda(U)\int_0^1 dt + \int_1^{\infty} 0.dt$$

$$= \lambda(U) \qquad \blacksquare$$

Mais geralmente:

(2.4) PROPOSIÇÃO: *Seja* $f = \Sigma_{i=1}^{n} c_i\ 1_{U_i}$, *onde* $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *é uma seqüência finita decrescente de elementos de* $\mathcal{U}$ *e* c_i *são coeficientes reais positivos. Então, para todo elemento* λ *de* Λ

$$\int f\ d\lambda = \Sigma_{i=1}^{n}\ c_i\ \lambda(U_i)$$

DEMONSTRAÇÃO:

Observemos que a função u definida por (2.2) assume o valor $\lambda(U_i)$ para todo t que verifica a relação

$$\Sigma_{j=1}^{i-1}\ c_j \leqslant t < \Sigma_{j=1}^{i}\ c_j$$

No caso de t satisfazer a relação $t \geqslant \Sigma_{j=1}^{n}\ c_j$ teremos $\lambda(\{f>t\})=0$

Consideremos

$$\alpha_1 = c_1$$
$$\alpha_2 = c_1 + c_2$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n = \Sigma_{j=1}^{n}\ c_j$$

Desta forma, como para $t \geqslant \Sigma_{j=1}^{n} c_j$ temos $\lambda(\{f > t\}) = 0$, segue-se que $\int_{\alpha_n}^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\, dt = 0$, e assim podemos escrever:

$$\int f\, d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\, dt$$

$$= \int_0^{\alpha_1} \lambda(\{f > t\})\, dt + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \lambda(\{f > t\})\, dt + \ldots + \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} \lambda(\{f > t\})\, dt$$

$$= c_1\, \lambda(U_1) + \ldots + c_n\, \lambda(U_n)$$

$$= \Sigma_{i=1}^{n} c_i\, \lambda(U_i) \quad \blacksquare$$

(2.5) <u>PROPOSIÇÃO</u>: *Seja λ um elemento de Λ. Para toda função* f *da classe $\mathcal{J}$,*

$$\int f\, d\lambda = \limsup \int g\, d\lambda$$

onde g pertence ao conjunto das funções simples de classe $\mathcal{J}$ que minoram f.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Seja A o conjunto das funções simples de classe $\mathcal{J}$ que minoram f.

Por (2.2) temos que

$u(t) = \lambda(\{f > t\}) = \lambda(U)$,

e $u(t)$ é função positiva e decrescente em $(0, +\infty)$.

Com efeito, $u(t)$ é função positiva pois λ é função positiva e $u(t)$ é decrescente pois se $t_1 < t_2$ temos $\{f > t_1\} \supset \{f > t_2\}$, e assim, $\lambda(U_1) \geqslant \lambda(U_2)$.

Seja $\mathcal{S} = \{(t_i)$ seqüências finitas de reais$/ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n\}$ e seja $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ uma destas seqüências do conjunto $\mathcal{S}$.

Sabemos que

(2.5.1) $$\int f\, d\lambda = \int_0^{+\infty} u(t)\, dt = \lim_n \sup \Sigma_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}).u(t_i)$$

Definimos $U_i = \{f > t_i\}$ para $1 \leq i \leq n$ e construímos a seguinte função:

$$g = \Sigma_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})1_{U_i}$$

A função g acima construída é simples de classe $\mathcal{J}$ e minora f, pois se $x \in (U_i - U_{i-1})$ temos $f(x) > t_i$ e $g(x) < f(x)$ pois

$$g(x) = \Sigma_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})1_{U_i}(x) = t_i - t_o = t_i$$

Portanto,

(2.5.2) g é um elemento de A.

Por outro lado, por (2.4), temos

(2.5.3) $$\int g\, d\lambda = \Sigma_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})\, \lambda(U_i) = \Sigma_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})u(t_i)$$

Combinando (2.5.1), (2.5.2) e (2.5.3) temos:

$$\int f\, d\lambda = \lim \sup \int g\, d\lambda \quad \blacksquare$$

(2.6) PROPOSIÇÃO: *Seja* λ *um elemento de* Λ, f *uma função da classe* $\mathcal{J}$ *limitada e que se anula fora de um elemento* U *de* $\mathcal{U}$ *tal que* $\lambda(U)$ *seja finito. Então,*

$$\int f\, d\lambda = \lim \inf \int g\, d\lambda,$$

onde g *pertence ao conjunto das funções simples de classe* $\mathcal{J}$ *que majoram* f.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja B o conjunto das funções simples de classe $\mathcal{J}$ que ma joram f.

Novamente por (2.2) temos que

$u(t) = \lambda(\{f > t\}) = \lambda(U)$

é uma função positiva, e decrescente em $(0,+\infty)$ (ver demonstração da proposição (2.5)).

Seja $\mathcal{S}=\{(t_i)$ sequências finitas de reais$/0<t_0<t_1<..t_n\}$ e seja $(t_i)_{1\leq i\leq n}$ uma destas sequências do conjunto $\mathcal{S}$.

Sabemos que

(2.6.1) $$\int f\, d\lambda = \int_0^{+\infty} u(t)\, dt = \liminf_n \Sigma_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)u(t_i)$$

Definimos $U_i=\{f > t_i\}$ para $1 \leq i \leq n$ e construímos a seguinte função:

$$g = \Sigma_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}-t_i) 1_{U_i} .$$

A função g acima construída é simples de classe $\mathcal{J}$ e majora a função f, pois se $x \in (U_i - U_{i+1})$ temos $t_i<f(x)<t_{i+1}$ e $g(x) = t_{i+1}$. Portanto,

(2.6.2) g é um elemento de B.

Por outro lado, por (2.4), temos

(2.6.3) $$\int g\, d\lambda = \Sigma_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)\lambda(U_i) = \Sigma_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)u(t_i)$$

Combinando (2.6.1), (2.6.2) e (2.6.3) temos

$$\int f\, d\lambda = \liminf_n \int g\, d\lambda , \quad \blacksquare$$

Para que a integral definida acima em relação à função crescente λ possua a propriedade de Beppo-Levi (concernente à passagem ao limite sobre sequências crescentes), é necessário e e suficiente que uma propriedade análoga ocorra para a função de conjuntos λ.

(2.7) PROPOSIÇÃO: *Para todo elemento λ de Λ as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\int f\, d\lambda = \sup_n \int f_n\, d\lambda,$

para todo elemento f *de* $\mathcal{J}$ *e para toda seqüência crescente* (f_n) *de elementos de* $\mathcal{J}$ *tais que* $f = \sup f_n$.

(b) $\lambda(U) = \sup_n \lambda(U_n)$

para todo elemento U *de* $\mathcal{U}$ *e para toda seqüência crescente* (U_n) *de elementos de* $\mathcal{U}$ *tais que* $U = \bigcup_n U_n$.

(Em outras palavras, λ é "contínua sobre seqüências crescentes.")

DEMONSTRAÇÃO:

(a) $\Longrightarrow$ *(b)*

A condição *(b)* é um caso particular de *(a)* quando se faz $f_n = 1_{U_n}$, onde para todo elemento U de $\mathcal{U}$, $U = \bigcup_n U_n$, sendo (U_n) uma sequência crescente de elementos de $\mathcal{U}$. Logo, $1_U = \sup 1_{U_n}$ e 1_U é um elemento da classe $\mathcal{J}$, pois 1_U é função positiva e $\{1_U > t\}$ é um elemento da classe $\mathcal{U}$.

Como $(1_{U_i})_{1\leq i\leq n}$ é uma sequência crescente de elementos de $\mathcal{J}$, pela condição *(a)*

$$\int 1_U\, d\lambda = \sup_n \int 1_{U_n}\, d\lambda ,$$

e assim por (2.3.3) temos $\lambda(U) = \sup \lambda(U_n)$.

(b) $\Longrightarrow$ *(a)*

Seja f um elemento de $\mathcal{J}$ e (f_n) uma seqüência crescente de elementos de $\mathcal{J}$ tal que $f = \sup_n f_n$.

Para cada real t estritamente positivo, $\{f_n > t\}$ formam uma seqüência crescente de elementos de $\mathcal{U}$ e $\bigcup\{f_n > t\} = \{f > t\}$.

Como (f_n) é uma seqüência crescente de elementos de $\mathcal{J}$, $\{f_n > t\} \in \mathcal{U}$ e também $\{f > t\} \in \mathcal{U}$ pois f é um elemento de $\mathcal{J}$.

Por *(b)* temos

$$\lambda(\{f > t\}) = \sup_n \lambda(\{f_n > t\})$$

Aplicando o teorema da Convergência Monótona, temos

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\, dt = \sup_n \int_0^{+\infty} \lambda(\{f_n > t\})\, dt ,$$

ou seja,

$$\int f\, d\lambda = \sup_n \int f_n\, d\lambda \qquad \blacksquare$$

Contrariamente à precedente a propriedade que se segue é válida sem que se coloquem hipóteses suplementares sobre a função de conjunto λ. ■

(2.8) <u>PROPOSIÇÃO</u>: *Seja* H *um conjunto de índices,* $\mathcal{F}$ *um filtro sobre* H, $(f_h)_{h\in H}$ *uma família de funções da classe* $\mathcal{J}$, $(c_h)_{h\in H}$ *uma família de números reais positivos, tendendo a zero segundo o filtro* $\mathcal{F}$, f *uma função da classe* $\mathcal{J}$ *, tal que para todo* h, $f \leq f_h + c_h$. *Então, para todo elemento* λ *de* Λ

$$\int f\, d\lambda \leq \liminf_{h\ \mathcal{F}} \int f_h\, d\lambda .$$

DEMONSTRAÇÃO:

Como $f \leq f_h + c_h$ temos

$\{f > t\} \subseteq \{f_h + c_h > t\}$

e assim,

$\lambda(\{f > t\}) \leq \lambda(\{f_h + c_h > t\})$, para todo h.

Segue-se que

$$\int_{c_h}^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\, dt \leq \int_{c_h}^{+\infty} \lambda(\{f_h > t - c_h\})\, dt$$
$$\leq \int_0^{+\infty} \lambda(\{f_h > s\})\, ds\,,$$

fazendo a mudança de variável $s = t - c_h$.

Passando ao limite quando $h \to +\infty$ temos

$$\liminf_{\substack{h\to\infty \\ \mathcal{F}}} \int_{c_h}^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\, dt \leq \liminf_{\substack{h\to\infty \\ \mathcal{F}}} \int_0^{+\infty} \lambda(\{f_h > s\})\, ds\,,$$

ou seja,

$$\int f\, d\lambda < \liminf_{\substack{h \\ \mathcal{F}}} \int_0^{+\infty} f_h\, d\lambda \qquad \blacksquare$$

(2.9) COROLÁRIO: *Com as mesmas hipóteses da proposição* (2.8)

$$\int f\, d\lambda = \lim_{\substack{h \\ \mathcal{F}}} \int f_h\, d\lambda$$

se alguma das funções f_h *é majorada por* f.

DEMONSTRAÇÃO:

Temos por hipótese que $f_{h^*} \leq f$ para algum h^*, assim

$$\{f_{h^*} > t\} \subseteq \{f > t\}\,,$$

e portanto

$$\lambda(\{f_{h^*} > t\}) \leq \lambda(\{f > t\}).$$

Segue-se que

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\{f_{h^*} > t\})\, dt \leq \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\, dt$$

ou seja,

$$\int f_{h^*}\, d\lambda \leq \int f\, d\lambda \leq \liminf_{h,\mathcal{F}} \int f_h\, d\lambda \leq \int f_{h^*}\, d\lambda.$$

Portanto,

$$\int f\, d\lambda = \lim_h \int f_h\, d\lambda \qquad \blacksquare$$

(2.10) <u>LEMA:</u> *Seja* $\mathcal{U}_\circ$ *um conjunto não vazio de partes de* X *satisfazendo a seguinte condição:" Para todo par de conjuntos* M,N *pertencentes à* $\mathcal{U}_\circ$, *os conjuntos* $M \cup N$ *e* $M \cap N^c$ *pertencem à* $\mathcal{U}_\circ$*". Então dada uma família finita* $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$ *de conjuntos de* $\mathcal{U}_\circ$, *existe uma família finita* $(N_j)_{1 \leq j \leq m}$ *de conjuntos de* $\mathcal{U}_\circ$, *dois a dois disjuntos, tais que cada um dos* M_i *é reunião de um certo número de* N_j.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>: Ver [3],pág 159.

(2.11) <u>DEFINIÇÃO</u>: *Dizemos que um conjunto não vazio* Φ *de partes de* X *é um CLAN se existe uma álgebra* $\mathcal{A}$ *(sobre* $\mathbb{R}$*) formada de funções numéricas finitas, definidas em* X, *tais que as relações* $M \in \Phi$ *e* $\psi_M \in \mathcal{A}$ *são equivalentes.*

(2.12) <u>PROPOSIÇÃO</u>: *Seja* $\mathcal{L}_\circ$ *o espaço vetorial das funções numéricas finitas tais que:* $\psi \in \mathcal{L}_\circ \Rightarrow \psi = \Sigma c_i\, 1_{M_i}$ *onde* $M_i \in \mathcal{U}_\circ$ *e* c_i *são* *coeficientes reais positivos. Se λ é uma função de conjunto, definida em um clan $\mathfrak{U}_o$, então existe uma única forma linear(denotada também por λ) sobre $\mathcal{L}$ tal que $\lambda(\psi_M)=\lambda(M)$ para todo elemento M de $\mathfrak{U}_o$.*

DEMONSTRAÇÃO:

A unicidade da forma linear λ é evidente, pois as funções características de conjuntos de $\mathfrak{U}_o$ geram o espaço vetorial $\mathcal{L}$.

Para provarmos a existência de λ, é suficiente mostrar que a relação $\sum_i c_i \psi_{M_i}= 0$, onde os M_i são conjuntos não vazios pertencentes à $\mathfrak{U}_o$, implica a relação $\sum_i c_i \lambda(M_i) = 0$.

Em virtude do lema anterior, existe uma família finita (N_j) de conjuntos não vazios de $\mathfrak{U}_o$, dois a dois disjuntos, tais que para cada índice i tem-se $\psi_{M_i} = \sum_j a_{ij}\psi_{N_j}$, com $a_{ij}=0$ ou $a_{ij}=1$.

A relação $\sum_i c_i \psi_{M_i} = 0$ é também escrita por $\sum_j(\sum_i c_i a_{ij})\psi_{N_j}=0$, donde $\sum_i c_i a_{ij} = 0$ para todo índice j. Em virtude da aditividade de λ temos $\sum_i c_i\lambda(M_i) = \sum_j(\sum_i c_i a_{ij})\lambda(N_j) = 0$, o que demonstra a existência de λ. ■

A proposição seguinte fornece uma condição suficiente para que a integral em relação à λ possua a propriedade aditiva.

(2.13) PROPOSIÇÃO: *Seja λ um elemento de Λ. Suponhamos que exista uma função aditiva de conjuntos, prolongando λ e definida no anel* (1) *gerado por $\mathfrak{U}$. Então*

$$\int (f + g)\, d\lambda = \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda$$

para todo par f,g de elementos de $\mathcal{J}$.

(1) Para as noções de anel e de função aditiva sobre um anel, ver [3], cap.4, §4, nº8.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos que cada um dos números $\int f\,d\lambda$, $\int g\,d\lambda$ sejam finitos. Designaremos por $\mathcal{U}_0$ o conjunto constituído pelos elementos U de $\mathcal{U}$ tais que $\lambda(U)$ seja finito, e por $\mathcal{L}$ o espaço vetorial gerado pelas funções características dos elementos de $\mathcal{U}_0$.

Por (2.12) existe uma forma linear L sobre $\mathcal{L}$, satisfazendo a condição $L(1_U) = \lambda(U)$ para todo elemento U de $\mathcal{U}_0$.

Para que uma função simples f de classe $\mathcal{J}$ pertença à $\mathcal{L}$ é necessário e suficiente que sua integral seja finita, e então por (1.6) e (2.4) temos $\int f\,d\lambda = L(f)$.

De fato, (1.6) diz que as funções simples de classe $\mathcal{J}$ são aquelas que admitem uma representação da forma $f = \Sigma c_i\, 1_{U_i}$, onde $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ é uma sequência finita decrescente de elementos de $\mathcal{U}$ e c_i são coeficientes reais positivos; (2.4) diz que nas mesmas condições da proposição (1.6) $\int f\,d\lambda = \Sigma_{i=1}^{n} c_i\lambda(U_i)$. Assim,

$$L(f) = L(\Sigma c_i 1_{U_i}) = \Sigma c_i L(1_{U_i}) = \Sigma c_i \lambda(U_i) = \int f\,d\lambda$$

A linearidade de L mostra que a relação a demonstrar é válida se as funções f,g são simples. Com efeito,

$$\int (f+g)\,d\lambda = L(f+g) = L(f) + L(g) = \int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda$$

Passemos ao caso geral

$$\int f\,d\lambda + \int g\,d\lambda = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t\})\,dt + \int_0^{+\infty} \lambda(\{g > t\})\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \left[\lambda(\{f > t\}) + \lambda(\{g > t\})\right] dt.$$

Agora, o conjunto $\{f + g > t\}$ contém o conjunto $(\{f > t\} \cup \{g > t\})$ e como λ é crescente e aditiva, segue-se que

$$\lambda(\{f + g > t\}) \geq \lambda(\{f > t\}) + \lambda(\{g > t\}).$$

Assim,

$$\int_0^{+\infty}[\lambda(\{f > t\}) + \lambda(\{g > t\})]\ dt \leq \int_0^{+\infty}\lambda(\{f + g > t\})\ dt = \int(f + g)\ d\lambda$$

ou seja,

(2.13.1) $$\int f\ d\lambda + \int g\ d\lambda \leq \int (f + g)\ d\lambda.$$

Para demonstrar a desigualdade oposta, suponhamos primeiramente f,g limitadas e coloquemos, para todo inteiro n,

$$f_n = 2^{-n}\ \Sigma_{\kappa\geq 1}\ 1_{\{f>\kappa 2^{-n}\}},\quad g_n = 2^{-n}\ \Sigma_{\kappa\geq 1}\ 1_{\{g>\kappa 2^{-n}\}}$$

Então,

$$f_n \leq f \leq f_n + 2^{-n}\quad ,\quad g_n \leq g \leq g_n + 2^{-n}$$

e f_n, g_n são funções simples de classe $\mathcal{J}$. (Assumiremos que para todo n fixo, os conjuntos $\{f > k2^{-n}\}$ e $\{g > k2^{-n}\}$ são vazios para k suficientemente grande).

Resulta, portanto

$$\int (f_n + g_n)\ d\lambda = \int f_n\ d\lambda + \int g_n\ d\lambda$$

Como $f \leq f_n + 2^{-n}$, $g \leq g_n + 2^{-n}$ temos $f + g \leq f_n + g_n + 2^{-n+1}$ e aplicando a proposição (2.8) concluímos que

$$\int (f + g)\ d\lambda \leq \liminf_{n}{}_{\mathcal{F}} \int (f_n + g_n)\ d\lambda.$$

Mas,

$$\liminf_{n}{}_{\mathcal{F}} \int (f_n + g_n)\ d\lambda = \liminf_{n}{}_{\mathcal{F}} \left(\int f_n\ d\lambda + \int g_n\ d\lambda\right)$$

$$= \liminf_{n}{}_{\mathcal{F}} \int f_n\ d\lambda + \liminf_{n}{}_{\mathcal{F}} \int g_n\ d\lambda$$

Portanto,

$$\int (f + g)\ d\lambda \leq \liminf_{n}{}_{\mathcal{F}} \int f_n\ d\lambda + \liminf_{n}{}_{\mathcal{F}} \int g_n\ d\lambda.$$

Como $f_n \leq f$ e $g_n \leq g$, aplicando (2.9) temos:

$$\liminf_{n\ \mathcal{F}} \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda \quad \text{e} \quad \liminf_{n\ \mathcal{F}} \int g_n \, d\lambda = \int g \, d\lambda$$

e obtemos assim a desigualdade

$$(2.13.2) \qquad \int (f + g) \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda$$

Combinando as relações (2.13.1) e (2.13.2) temos a igualdade desejada.

Façamos a demonstração de (2.13.2) para f,g quaisquer.

Para todo n, temos

$$(f + g) \wedge n \leq (f \wedge n) + (g \wedge n).$$

Segue-se que

$$\int [(f + g) \wedge n] d\lambda \leq \int [(f \wedge n) + (g \wedge n)] d\lambda$$

Pelo fato de $(f \wedge n)$ e $(g \wedge n)$ serem limitadas temos

$$\int [(f \wedge n) + (g \wedge n)] d\lambda = \int (f \wedge n) \, d\lambda + \int (g \wedge n) \, d\lambda$$

e assim

$$\int [(f + g) \wedge n] d\lambda \leq \int (f \wedge n) \, d\lambda + \int (g \wedge n) \, d\lambda.$$

Consequentemente,

$$\sup_n \int [(f + g) \wedge n] d\lambda \leq \sup_n \left[\int (f \wedge n) \, d\lambda + \int (g \wedge n) \, d\lambda \right]$$

$$\leq \sup_n \int (f \wedge n) \, d\lambda + \sup_n \int (g \wedge n) \, d\lambda.$$

Decorre de (2.3)(d) que

$$(2.13.3) \qquad \int (f + g) \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda$$

Combinando as relações (2.13.1) e (2.13.3) obtemos a igualdade desejada e concluímos a demonstração do teorema. ∎

3. A CLASSE DOS CONJUNTOS $\mathcal{K}$ E A CLASSE DAS FUNÇÕES $\mathcal{S}$.

Além das hipóteses fixadas em 1, introduziremos agora outras suplementares. Suponhamos precisamente que $\mathcal{K}$ é uma classe de partes de X, possuindo as seguintes propriedades:

(3.1) $\emptyset \in \mathcal{K}$

(3.2) A reunião e a intersecção de dois elementos de $\mathcal{K}$ pertence à $\mathcal{K}$.

(3.3) A intersecção de uma sequência de elementos de $\mathcal{K}$ pertence à $\mathcal{K}$.

Suponhamos ainda que a classe $\mathcal{K}$ esteja ligada à classe $\mathcal{U}$ pelos seguintes axiomas:

(3.4) Para todo elemento K de $\mathcal{K}$ e para todo elemento U de $\mathcal{U}$, temos $K \cap U^c \in \mathcal{K}$ e $U \cap K^c \in \mathcal{U}$

(3.5) Para todo elemento K de $\mathcal{K}$, existe um elemento U de $\mathcal{U}$, tal que $K \subset U$.

(3.6) Para todo par (K,U) tal que $K \in \mathcal{K}$, $U \in \mathcal{U}$, $K \subset U$ existe um par (K',U') tal que $K' \in \mathcal{K}$, $U' \in \mathcal{U}$, $K \subset U' \subset K' \subset U$.

(3.7) Exemplos: Os axiomas impostos pelas classes $\mathcal{K}$, $\mathcal{U}$ são verificados nos seguintes casos particulares:

(i) Seja X um espaço topológico separável, localmente compacto; $\mathcal{K}$ a classe dos conjuntos compactos de X; $\mathcal{U}$ a classe dos conjuntos abertos de X, ou de modo mais geral, uma classe de conjuntos abertos no qual a reunião finita ainda pertence à classe $\mathcal{U}$, formando uma base para a topologia de X e tais que todo conjunto aberto contido num conjunto de $\mathcal{U}$ pertence à $\mathcal{U}$.

(ii) Seja X um espaço metrizável (ou, mais geralmente, normal); $\mathcal{U}$ como no caso precedente; $\mathcal{K}$ a classe constituída pelos conjuntos fechados F tal que existe um aberto U de $\mathcal{U}$ com $U \supset F$.

A verificação das condições (3.1) a (3.6) são imediatas.

(3.8) PROPOSIÇÃO: *Para todo par* K_1, K_2 *de conjuntos disjuntos pertencentes à* $\mathcal{K}$, *existe um par* U_1, U_2 *de conjuntos disjuntos pertencentes à* $\mathcal{U}$, *tal que* $K_1 \subset U_1$, $K_2 \subset U_2$.

DEMONSTRAÇÃO:

Pela condição (3.5) existe um elemento V_1 pertencente à $\mathcal{U}$ tal que $K_1 \subset V_1$ e existe um elemento V_2 pertencente à $\mathcal{U}$ tal que $K_2 \subset V_2$.

Vamos substituir V_1 por $V_1 \cap K_2^c$, onde podemos supor que a intersecção entre V_1 e K_2 é vazia.

Em virtude de (3.6) existe um elemento U_1 pertencente à $\mathcal{U}$ e um elemento H_1 pertencente à $\mathcal{K}$ tal que

$$K_1 \subset U_1 \subset H_1 \subset V_1.$$

Agora, suponhamos $U_2 = V_2 \cap H_1^c$ e daí temos a existência do par U_1, U_2 satisfazendo $U_1 \supset K_1$, $U_2 \supset K_2$. ∎

(3.9) PROPOSIÇÃO: *Sejam* U_1, U_2 *elementos de* $\mathcal{U}$ *e seja* K *um elemento de* $\mathcal{K}$ *tal que* $K \subset U_1 \cup U_2$. *Então existe um par* K_1, K_2 *de elementos de* $\mathcal{K}$ *tal que*

$$K \subset K_1 \cup K_2, \quad K_1 \subset U_1, \quad K_2 \subset U_2.$$

DEMONSTRAÇÃO:

Os conjuntos $H_1 = K \cap U_2^c$, $H_2 = K \cap U_1^c$ são disjuntos - e pertencem à $\mathcal{K}$ por (3.4). Agora, por (3.8) existe um par V_1, V_2 de elementos de $\mathcal{U}$ com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tal que $H_1 \subset V_1$ e $H_2 \subset V_2$.

Agora é suficiente supor

$$K_1 = K \cap V_2^c \quad , \quad K_2 = K \cap V_1^c .$$

Segue-se daí que

$$\begin{aligned} K_1 \cup K_2 &= (K \cap V_2^c) \cup (K \cap V_1^c) \\ &= K \cap (V_1^c \cup V_2^c) \\ &= K \cap (V_1 \cap V_2)^c \\ &= K \cap \emptyset^c \\ &= K \cap X \\ &= K. \end{aligned}$$

Portanto $K \subset K_1 \cup K_2$.

Resta provar que $K_1 \subset U_1$ e $K_2 \subset U_2$.

Como $K = K_1 \cap V_2^c$ segue-se que $K_1 \subset K$ e $K_1 \subset V_2^c$. Sabemos que $H_2 \subset V_2$, logo $H_2^c \supset V_2^c$ e daí temos

$$K_1 \subset V_2^c \subset H_2^c .$$

Por outro lado,

$$H_2^c = (K \cap U_1^c)^c = K^c \cup U_1 .$$

Assim,

$$K_1 \subset K^c \cup U_1 .$$

Mas como $K_1 \subset K$ temos $K_1 \not\subset K^c$, e portanto $K_1 \subset U_1$.

Analogamente demonstra-se que $K_2 \subset U_2$. ∎

Designaremos por $\mathcal{S}(\mathcal{K})$, ou simplesmente por $\mathcal{S}$, a classe constituída pelas funções positivas f definidas em X e tais que o conjunto $\{f \geq t\}$ pertence à $\mathcal{K}$ para todo número real estritamente positivo.

(3.10) PROPOSIÇÃO: *Para todo par* f, g *de funções da classe* $\mathcal{S}$, *e para todo número real positivo* c, *as funções* cf, $f + g$, $f \vee g$, $f \wedge g$, $f \wedge c$ e $f - f \wedge c = (f - c)^+$ *pertencem à classe* $\mathcal{S}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Queremos provar que (cf) é um elemento de $\mathcal{S}$; para isto devemos provar que $\{cf \geq t\}$ pertence à $\mathcal{K}$ para todo número real t estritamente positivo.

Como c é um número real positivo, podemos escrever

$$\{cf \geq t\} = \{f \geq \tfrac{t}{c}\}$$

O conjunto acima pertence à $\mathcal{K}$ pois $\frac{t}{c}$ é um número real estritamente positivo.

Para provarmos que $(f + g)$ pertence à $\mathcal{S}$, observemos que

$$\{(f + g) \geq t\} = \bigcap_{\substack{0<r<t \\ r \in \mathbb{Q}}} (\{f \geq r\} \cup \{g \geq t-r\})$$

onde $\{f \geqslant r\}$ e $\{g \geqslant t-r\}$ pertencem à $\mathcal{K}$ pois f, g são funções - da classe $\mathcal{S}$; assim por (3.2) $(\{f \geqslant r\} \cup \{g \geqslant t-r\})$ pertence à $\mathcal{K}$.

Portanto $\{f + g \geqslant r\}$ pertence à $\mathcal{K}$ pois a intersecção enumerável de elementos de $\mathcal{K}$ é ainda um elemento de $\mathcal{K}$.

Sabemos que

$$f \vee g = \begin{cases} f & \text{se} \quad f \geqslant g \\ g & \text{se} \quad f < g \end{cases}$$

Assim,

$$\{(f \vee g) \geqslant t\} = \{f \geqslant t\colon f \geqslant g\} \cup \{g \geqslant t\colon f < g\}$$

Como $\{f \geqslant t\colon f \geqslant g\} \subset \{f \geqslant t\}$ e $\{g \geqslant t\colon f < g\} \subset \{g > t\}$ temos - que $\{f \geqslant t\colon f \geqslant g\}$ e $\{g \geqslant t\colon f < g\}$ são elementos de $\mathcal{K}$. Agora, por (3.2) temos que $\{(f \vee g) \geqslant t\}$ é um elemento de $\mathcal{K}$.

Por definição,

$$f \wedge g = \begin{cases} f & \text{se} \quad f < g \\ g & \text{se} \quad f \geqslant g \end{cases}$$

Assim, podemos escrever

$$\{(f \wedge g) \geqslant t\} = \{f \geqslant t\colon f < g\} \cup \{g \geqslant t\colon f \geqslant g\}$$

Como $\{f \geqslant t\colon f < g\} \subset \{f \geqslant t\}$ e $\{g \geqslant t\colon f \geqslant g\} \subset \{g \geqslant t\}$,os conjuntos $\{f \geqslant t\colon f < g\}$ e $\{g \geqslant t\colon f \geqslant g\}$ são elementos de $\mathcal{K}$. Por (3.2) decorre que $\{(f \wedge g) \geqslant t\}$ é um elemento de $\mathcal{K}$.

Para a prova de que $(f \wedge c)$ pertence à classe $\mathcal{S}$,basta considerarmos no caso anterior a função g como sendo a função - constante c.

Sabemos que

$$(f - f \wedge c) = \begin{cases} f - c & \text{se} \quad f \geqslant c \\ 0 & \text{se} \quad f \leqslant c \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \{(f - f \wedge c) \geqslant t\} &= \{f - c \geqslant t\colon f \leqslant c\} \cup \{0 \geqslant t\colon f \leqslant c\} \\ &= \{f \geqslant t + c\colon f \leqslant c\} \cup \emptyset \\ &= \{f \geqslant t + c\colon f \leqslant c\} \subset \{f \geqslant t + c\}, \end{aligned}$$

logo $\{f \geqslant t + c\} \in \mathcal{K}$ e assim $(f - f \wedge c)$ é um elemento da classe $\mathcal{S}$. ■

(3.11) PROPOSIÇÃO: *Seja* f *uma função finita da classe* $\mathcal{S}$ *e* g *uma função finita da classe* $\mathcal{J}$ *.Então*

$$(g - f)^+ \in \mathcal{J} \quad \text{e} \quad (f - g)^+ \in \mathcal{S}.$$

DEMONSTRAÇÃO:

Devemos provar que para todo número real t estritamente - positivo o conjunto $\{(g - f)^+ > t\}$ pertence ã $\mathcal{U}$. Como

$$(g - f)^+ = \begin{cases} g - f & \text{se} \quad g > f \\ 0 & \text{se} \quad g \leqslant f \end{cases}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \{(g - f)^+ > t\} &= \{(g - f) > t\colon g > f\} \cup \{0 > t\colon g \leqslant f\} \\ &= \{(g - f) > t\colon g > f\} \cup \emptyset \\ &= \{(g - f) > t\colon g > f\} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\{(g - f) > t\} = \{g > f + t\}$$

Chamando $t + f = t' > t$, pois f é uma função da classe $\mathcal{S}$,temos $\{(g - f) > t\} = \{g > t'\} \subset \{g > t\} \in \mathcal{U}$ pois g pertence ã $\mathcal{J}$.

Afirmamos que

$$\{(g - f)^{+} > t\} = \bigcup_{\substack{r>t \\ r\epsilon Q}} (\{g > r\} \cap \{f \geqslant r-t\}^{c})$$

ou seja,

$$\{g - f > t\} = \bigcup_{\substack{r>t \\ r\epsilon Q}} S_r ,$$

onde

$$S_r = \{g > r\} \cap \{f \geqslant r - t\}^{c}$$

De fato:

Se $x \in \{g - f > t\}$ então $g(x) > t + f(x)$.

Portanto, pelo corolário do Axioma de Arquimedes, existe $r \in Q$ - tal que $g(x) > r$ e $f(x) < r - t$, ou seja, $x \in \{g(x) > r\}$ e - $x \in \{f(x) < r - t\} = \{f(x) \geqslant r - t\}^{c}$. Assim, x é um elemento do conjunto $\{g(x) > r\} \cap \{f(x) \geqslant r - t\}^{c}$. Logo,

$$\{g - f > t\} = \bigcup_{\substack{r>t \\ r\epsilon Q}} S_r$$

Como g é um elmento de $\mathcal{J}$ e f é um elemento de $\mathcal{S}$ os - conjuntos $\{g > r\}$ e $\{f \geqslant r - t\}$ pertencem respectivamente à - $\mathcal{U}$ e $\mathcal{K}$. Assim, por (3.4), S_r pertence à $\mathcal{U}$.

Finalmente, por (1.3), $\{(g - f)^{+} > t\} \in \mathcal{U}$ por ser a união de uma sequência de elementos de $\mathcal{U}$ contidos em $\{g > t\}$.

Para provarmos que $(f - g)^{+}$ é um elemento de $\mathcal{S}$, devemos provar que $\{(f - g)^{+} \geqslant t\}$ pertence à $\mathcal{K}$ para todo número real t estritamente positivo.

Sabemos que

$$(f - g)^{+} = \begin{cases} f - g & \text{se} \quad f > g \\ 0 & \text{se} \quad f \leqslant g \end{cases}$$

Assim,

$$\{(f-g)^{+} \geqslant t\} = \{(f-g) \geqslant t: f > g\} \cup \{0 > t: f \leqslant g\}$$
$$= \{(f-g) \geqslant t: f > g\} \cup \emptyset$$
$$= \{(f-g) \geqslant t: f > g\}$$
$$= \{f \geqslant t + g: f > g\}$$

Tomemos o seguinte conjunto: $\{f - g < t\}$. Assim, $f < t+g$. Pelo corolário do Axioma de Arquimedes, existe um elemento r de Q tal que

$$f < r < t + g.$$

Portanto podemos escrever

$$\{f - g < t\} = \bigcup_{\substack{r>t \\ r \in Q}} (\{f < r\} \cap \{g > r - t\})$$

$$= \bigcup_{\substack{r>t \\ r \in Q}} (\{f \geqslant r\}^{c} \cap \{g > r - t\})$$

Tomando o complementar deste conjunto, resulta:

$$\{f - g \geqslant t\} = \bigcap_{\substack{r>t \\ r \in Q}} (\{f \geqslant r\} \cup \{g > r - t\}^{c})$$

Por outro lado,

$$\{f - g \geqslant t\} \subset \{f \geqslant t\}$$

Como g é um elemento de $\mathcal{J}$ e f é um elemento de $\mathcal{S}$ os conjuntos $\{f \geqslant r\}$ e $\{g > r - t\}$ pertencem respectivamente à $\mathcal{K}$ e $\mathcal{U}$. Assim, chamemos

$$\{f \geqslant r\} = K_r \;, \quad \{g > r - t\} = U_r \text{ e } \{f \geqslant t\} = K.$$

Ficamos com a seguinte relação

$$\{f - g \geqslant t\} = \bigcap_{\substack{r>t \\ r \in Q}} (K_r \cup U_r^{c})$$

Logo

$$K \cap \{f - g \geqslant t\} = K \cap \left(\bigcap_{\substack{r>t \\ r\varepsilon Q}} (K_r \cup U_r^c)\right)$$

$$\{f - g > t\} = \bigcap_{\substack{r>t \\ r\varepsilon Q}} (K \cap (K_r \cup U_r^c))$$

$$= \bigcap_{\substack{r>t \\ r\varepsilon Q}} ((K \cap K_r) \cup (K \cap U_r^c))$$

Por (3.3) e (3.4) segue-se que $\{f - g \geqslant t\}$ é um elemento de $\mathcal{K}$. ■

(3.12) <u>DEFINIÇÃO</u>: *Dizemos que uma classe* $\mathcal{H}$ *de partes de* X *é densa* (em *relação ao par* $\mathcal{K}, \mathcal{U}$) *se para todo par* K,U *com* $K \in \mathcal{K}$, $U \in \mathcal{U}$, $K \subset U$, *existe um elemento* $H \in \mathcal{H}$ *tal que*

$$K \subset H \subset U.$$

Mais geralmente, dizemos que uma classe $\mathcal{H}$ de funções definidas em X é densa (em relação ao par $\mathcal{K}, \mathcal{U}$) se para todo par K, U com $K \in \mathcal{K}$, $U \in \mathcal{U}$, $K \subset U$, existe um elemento $h \in \mathcal{H}$ tal que -

$$1_K < h < 1_U .$$

(3.13) <u>PROPOSIÇÃO</u>: *A classe* $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ *é densa.* (2)

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Dados um par K, U com $K \in \mathcal{K}$, $U \in \mathcal{U}$, $K \subset U$, podemos construir através da hipótese (3.6) uma família $(U_r, K_r)_{r \varepsilon D}$ de pares de conjuntos, tendo por conjunto de índices o conjunto D dos núme-

(2) Para esta demonstração adaptamos o raciocínio clássico que permite demonstrar o teorema de Urysohn em um espaço normal. (ver [2], §4, nº1, Teorema 1 e [11], pág. 130)

ros racionais diádicos (3) no intervalo $[0,1]$, e possuindo as seguintes propriedades:

(a) $U_0 = U$, $K_0 = X$; $U_1 = \emptyset$, $K_1 = K$;

(b) $U_r \subset K_r \subset U_s$ para $r > s$;

(c) $U_r \in \mathcal{U}$ para todo r ; $K_r \in \mathcal{K}$ para $r \neq 0$.

Coloquemos

$$f = \sup_{r \in D} r 1_{K_r}$$

Então, $0 \leq f \leq 1$. Por outro lado, a função f, que é igual a 1 sobre o conjunto $K_1 = K$ e igual a zero sobre o complementar do conjunto $U_0 = U$, pertence à $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ em virtude das seguintes relações:

$$\{f > t\} = \begin{cases} \emptyset & \text{para } t \geq 1 \\ \bigcup_{r>t} K_r = \bigcup_{r>t} U_r & \text{para } 0 < t < 1 \end{cases}$$

$$\{f \geq t\} = \begin{cases} \emptyset & \text{para } t > 1 \\ \bigcap_{r<t} K_r & \text{para } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Portanto, existe f pertencente à classe $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ tal que - $1_K \leq f \leq 1_U$, provando que a classe $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ é densa. ■

(3) Número diádico é um número da forma $k2^{-n}$, onde $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. A VERSÃO INTERIORMENTE REGULAR DE UMA FUNÇÃO CRESCENTE SOBRE $\mathcal{U}$.

Seja λ um elemento de Λ. Definimos, para toda parte E de X,

(4.1) $$\lambda^*(E) = \inf\{\lambda(V) : E \subset V,\ V \in \mathcal{U}\}$$

(com a condição habitual: $\inf \emptyset = +\infty$).

Designaremos, além disso, por λ_-, λ_+ os elementos de Λ assim definidos:

(4.2) $$\lambda_+(U) = \inf\{\lambda^*(K) : U \subset K,\ K \in \mathcal{K}_0\}$$

(4.3) $$\lambda_-(U) = \sup\{\lambda^*(K) : K \subset U,\ K \in \mathcal{K}_0\}$$

(4.4) DEFINIÇÃO: *Dados* $U, V \in \mathcal{U}$, *dizemos que* U *está* *fortemente contido* *em* V *(em relação à classe* $\mathcal{K}_0$*) se existe um elemento* $K \in \mathcal{K}_0$ *tal que* $U \subset K \subset V$.

NOTAÇÃO: $U \subset\subset V$

Com a notação acima, e sendo válida a hipótese (3.6), as expressões para λ_- e λ_+ se escrevem

$$\lambda_-(U) = \sup\{\lambda(V) : V \subset\subset U,\ V \in \mathcal{U}\}$$

$$\lambda_+(U) = \inf\{\lambda(V) : U \subset\subset V,\ V \in \mathcal{U}\}$$

e assim

(4.5) $$\lambda_- \leq \lambda \leq \lambda_+$$

De fato:

$$\lambda_-(U) = \sup \{\lambda^*(K) : K \subset U,\ K \in \mathcal{K}\}$$

$$\lambda^*(K) = \inf \{\lambda(V) : K \subset V,\ V \in \mathcal{U}\}$$

logo para todo $V \in \mathcal{U}$, $V \supset K$ tem-se

(4.5.1) $$\lambda^*(K) \leq \lambda(V)$$

Como $\lambda_-(U) = \sup \{\lambda^*(K) : K \subset U,\ K \in \mathcal{K}\}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathcal{K}$, $K \subset U$ tal que

(4.5.2) $$\lambda_-(U) - \varepsilon < \lambda^*(K)$$

Combinando (4.5.1) e (4.5.2), dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathcal{K}$ $K \subset U$ tal que para todo $V \in \mathcal{U}$, $V \supset K$ vale a relação:

$$\lambda_-(U) - \varepsilon < \lambda(V)$$

Como $K \subset U$, aplicando a condição (3.6), existe $K' \in \mathcal{K}$, $U' \in \mathcal{U}$ tal que $K \subset U' \subset K' \subset U$, isto é, $U' \subset\subset U$.

Tomando $V = U'$, temos $V \subset\subset U$ e assim existe $V \in \mathcal{U}$, $V \subset\subset U$ tal que

$$\lambda_-(U) < \lambda(V) + \varepsilon$$

Portanto,

$$\lambda_-(U) = \sup\{\lambda(V) : V \subset\subset U,\ V \in \mathcal{U}\}$$

Vamos agora provar que $\lambda_+(U) = \inf\{\lambda(V) : U \subset\subset V, V \in \mathcal{U}\}$

Sabemos que $\lambda_+(U) = \inf\{\lambda^*(K) : U \subset K,\ K \in \mathcal{K}\}$, logo, dado

$\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathcal{K}$, $K \supset U$ tal que

$$(4.5.3) \qquad \lambda_+(U) + \varepsilon > \lambda^*(K)$$

Agora, $\lambda^*(K) = \inf\{\lambda(V) : K \subset V,\ V \in \mathcal{U}\}$, assim, dado $\varepsilon' > 0$, existe $V \in \mathcal{U}$, $V \supset K$ tal que

$$(4.5.4) \qquad \lambda^*(K) + \varepsilon > \lambda(V)$$

Combinando (4.5.3) e (4.5.4), dado $\varepsilon > 0$, existem $K \in \mathcal{K}$, $V \in \mathcal{U}$, $U \subset K \subset V$, tal que

$$\lambda(V) - \varepsilon' < \lambda^*(K) < \lambda_+(U) + \varepsilon$$

Portanto, dado $\varepsilon'' > 0$ existe $V \in \mathcal{U}$, $U \subset\subset V$ tal que

$$\lambda_+(U) + \varepsilon'' > \lambda(V)$$

Provamos assim que

$$\lambda_+(U) = \inf\{\lambda(V) : U \subset\subset V,\ V \in \mathcal{U}\}. \quad \blacksquare$$

(4.6) <u>DEFINIÇÃO</u>: *Se para um certo elemento* U *de* $\mathcal{U}$, $\lambda_-(U) = \lambda(U)$ *(respectivamente,* $\lambda_+(U) = \lambda(U)$*), dizemos que a função* λ *é* *<u>interiormente</u> (respectivamente, <u>exteriormente</u>) <u>regular</u> sobre* $\mathcal{U}$ *(em relação à classe* $\mathcal{K}$*).*

(4.7) <u>DEFINIÇÃO</u>: *Dizemos que* λ *é <u>regular</u> sobre* U *se* λ *é ao mesmo tempo interiormente regular e exteriormente regular sobre* U *, ou seja,* $\lambda_-(U) = \lambda_+(U)$. *Neste caso dizemos que* U *é um conjunto de regularidade para* λ.

(4.8) <u>DEFINIÇÃO</u>: *Dizemos que a função* λ *é* <u>*interiormente*</u>*(respecti vamente,* <u>*exteriormente*</u>*)* <u>*regular*</u> *se ela é interiormente(res pectivamente, exteriormente) regular sobre todo elemento de* $\mathcal{U}$.

Vemos facilmente que

$$\lambda_{--} = \lambda_- \; ; \; \lambda_{++} = \lambda_+$$

Em outras palavras: λ_- é interiormente regular e λ_+ é exteriormente regular.

Chamamos λ_- a <u>versão interiormente regular</u>, e λ_+ a <u>versão exteriormente regular</u>, da função λ.

Designaremos por $\Lambda_-(\mathcal{U},\mathcal{K})$, ou simplesmente por Λ_-, o conjunto constituído pelas funções pertencentes à $\lambda(\mathcal{U})$ e interiormente regulares em relação à classe $\mathcal{K}$. Em outras palavras, Λ_- é constituído pelas funções da forma λ_-, onde λ percorre Λ.

(4.9) <u>PROPOSIÇÃO</u>: *Seja* λ, μ *elementos de* Λ. *Então*

$$(\lambda + \mu)_- = \lambda_- + \mu_- \; ; \; (\lambda + \mu)_+ = \lambda_+ + \mu_+$$

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

$$(\lambda + \mu)_-(U) = \sup\{(\lambda + \mu)(V) : V \subset\subset U, \; V \in \mathcal{U}\}$$

$$= \sup\{\lambda(V) + \mu(V) : V \subset\subset U, \; V \in \mathcal{U}\}$$

$$= \sup\{\lambda(V) : V \subset\subset U, V \in \mathcal{U}\} + \sup\{\mu(V) : V \subset\subset U, \; V \in \mathcal{U}\}$$

A última igualdade decorre do fato das funções λ, μ serem monótonas crescentes.

Portanto,

$$(\lambda + \mu)_-(U) = \lambda_-(U) + \mu_-(U).$$

Vamos agora provar que

$$(\lambda + \mu)_+ = \lambda_+ + \mu_+$$

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)_+(U) &= \inf\{(\lambda + \mu)_+(V) : U \subset\subset V,\ V \in \mathcal{U}\} \\ &= \inf\{\lambda(V) + \mu(V) : U \subset\subset V,\ V \in \mathcal{U}\} \\ &= \inf\{\lambda(V) : U \subset\subset V,\ V \in \mathcal{U}\} + \inf\{\mu(V) : U \subset\subset V,\ V \in \mathcal{U}\}\end{aligned}$$

A última igualdade decorre do fato das funções λ e μ - serem monótonas crescentes.

Portanto,

$$(\lambda + \mu)_+(U) = \lambda_+(U) + \mu_+(U).$$

Por conseguinte, para que a função $\lambda + \mu$ seja finita e interiormente(exteriormente) regular sobre um elemento dado de é necessário e suficiente que estas condições sejam verificadas para cada uma das duas funções λ, μ. ■

(4.10) <u>PROPOSIÇÃO</u>: *Seja λ um elemento de Λ e seja $\mathcal{V}$ uma parte - densa de $\mathcal{U}$. Então, para todo elemento U de $\mathcal{U}$*

$$\lambda_-(U) = \sup\{\lambda(V) : V \subset\subset U,\ V \in \mathcal{V}\}$$

$$\lambda_+(U) = \inf\{\lambda(V) : U \subset\subset V,\ V \in \mathcal{V}\}$$

DEMONSTRAÇÃO:

$\mathcal{V}$ é parte densa de $\mathcal{U}$, logo para todo par K, U com - $K \in \mathcal{K}$, $U \in \mathcal{U}$, $K \subset U$, existe um elemento $V_o \in \mathcal{V}$ tal que $K \subset V_o \subset U$

Sabemos que

$$\lambda_-(U) = \sup\{\lambda(V) : V \subset\subset U, V \in \mathcal{U}\}$$

logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $V \in \mathcal{U}$, $V \subset\subset U$, tal que

$$\lambda_-(U) - \varepsilon < \lambda(V)$$

Como $V \subset\subset U$, existe $K_o \in \mathcal{K}$, tal que $V \subset K_o \subset U$. Agora, pelo fato de $K_o \subset U$, como $\mathcal{V}$ é parte densa de $\mathcal{U}$, existe $V_o \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset K_o \subset V_o \subset U$; isto é, $V \subset\subset V_o$. Assim, $V \in \mathcal{V}$.

Portanto, existe $V \in \mathcal{V}$, $V \subset\subset U$ tal que

$$\lambda_-(U) = \sup\{\lambda(V) : V \subset\subset U, V \in \mathcal{V}\}$$

Resta provarmos que

$$\lambda_+(U) = \inf\{\lambda(V) : U \subset\subset V, V \in \mathcal{V}\}$$

Sabemos que

$$\lambda_+(U) = \inf\{\lambda(V) : U \subset\subset V, V \in \mathcal{U}\},$$

logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $V \in \mathcal{U}$, $U \subset\subset V$ tal que

$$\lambda_+(U) + \varepsilon > \lambda(V)$$

Como $U \subset\subset V$, existe $K_o \in \mathcal{K}$ tal que $U \subset K_o \subset V$; $\mathcal{V}$ é parte densa - de $\mathcal{U}$, logo existe $V_o \in \mathcal{V}$ tal que $U \subset K_o \subset V_o \subset V$, ou seja, $U \subset\subset V_o$

Como $V_o \subset V$ e $V \in \mathcal{U}$ temos que V_o também pertence à $\mathcal{U}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $V_o \in \mathcal{V}$, $U \subset\subset V_o$, tal que -

$$\lambda_+(U) + \varepsilon > \lambda(V_o)$$

Segue-se que $\lambda_+(U) = \inf\{\lambda(V_o) : U \subset\subset V_o, V_o \in \mathcal{V}\}$ ■

(4.11) <u>DEFINIÇÃO</u>: *Dizemos que uma parte* $\mathcal{V}$ *de* $\mathcal{U}$ *é* <u>*rica*</u>*(em relação à classe* $\mathcal{K}$ *) se para toda função* f *da classe* $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ *, os números reais* t *estritamente positivos para os quais o conjunto* $\{f > t\}$ *não pertence à* $\mathcal{V}$ *formam um conjunto no máximo enumerável.*

<u>EXEMPLO</u>: $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}_\sigma$ (onde $\mathcal{K}_\sigma$ designa o conjunto constituído pelas uniões enumeráveis de elementos de $\mathcal{K}$) é uma parte rica de $\mathcal{U}$.

De fato:

Seja $D = \{t \in R_+^* : \{f > t\} \not\in \mathcal{U} \cap \mathcal{K}_\sigma\}$

Queremos provar que para toda função f da classe $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ o conjunto D é no máximo enumerável.

Para todo número real t estritamente positivo, consideremos a sequência (t_i) convergindo para t e consideremos a sequência (K_n) de elementos de $\mathcal{K}$ tal que $K_i \subset K_j$ para $i > j$ onde

$$K_i = \{f \geq t_i\} \quad e \quad K_j = \{f \geq t_j\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = \lim_{i \to \infty} K_i = \lim_{i \to \infty}(\{f \geq t_i\}) = \{f > t\}$$

Assim, o conjunto $\{f > t\}$ é um elemento de $\mathcal{U} \cap \mathcal{K}_\sigma$ para todo número real t estritamente positivo. Logo D é vazio sendo portanto enumerável. ∎

(4.12) <u>PROPOSIÇÃO</u>: *A intersecção de uma família enumerável de partes ricas de* $\mathcal{U}$ *é ainda uma parte rica de* $\mathcal{U}$.

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Seja $(\mathcal{V}_n)$ uma família enumerável de partes ricas de $\mathcal{U}$.

Queremos mostrar que $\bigcap_n \mathcal{V}_n$ é uma parte rica de $\mathcal{U}$, isto é, queremos mostrar que para toda função f da classe $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$, os - números reais t estritamente positivos para os quais o conjunto $\{f > t\}$ não pertence à $\bigcap_n \mathcal{V}_n$, formam um conjunto no máximo enumerável.

Como $(\mathcal{V}_n)$ é uma família enumerável de partes ricas de $\mathcal{U}$, o conjunto

$$\{t \in R_+^* \;/\; \{f > t\} \notin \mathcal{V}_k \;\forall\, k, \forall\, f \in \mathcal{J} \cap \mathcal{S}\;\}$$

é no máximo enumerável.

Por outro lado,

$\{f > t\} \notin \mathcal{V}_k \;\; \forall\, k,$

logo,

$\{f > t\} \notin \bigcap \mathcal{V}_n,$

pois $\bigcap \mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}_k$ para todo k.

Portanto, para toda função f da classe $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$, os números reais estritamente positivos para os quais o conjunto $\{f > t\}$ não pertence à $\bigcap \mathcal{V}_n$ formam um conjunto no máximo enumerável. ■

(4.13) <u>PROPOSIÇÃO</u>: *Toda parte rica de $\mathcal{U}$ é densa em $\mathcal{U}$.*

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Seja $\mathcal{V}$ uma parte rica de $\mathcal{U}$. Então, dado um par de conjuntos K, U com $K \in \mathcal{K}$, $U \in \mathcal{U}$, $K \subset U$, existe por (3.13) um elemento $f \in \mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ verificando a relação $1_K \leq f \leq 1_U$. Para todo - elemento t do intervalo (0,1), o conjunto

$$U_t = \{f > t\}$$

é um elemento de $\mathcal{U}$ compreendido entre K e U. Por outro lado U_t é um elemento de $\mathcal{V}$, a menos de um conjunto enumerável de valores de t. Isto mostra que a classe $\mathcal{V}$ é densa. ∎

(4.14) PROPOSIÇÃO: *Seja λ um elemento de Λ. Os elementos de $\mathcal{U}$ para os quais λ é regular formam uma parte rica de $\mathcal{U}$.*

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} : \lambda_-(U) = \lambda_+(U)\}$

Dado $f \in \mathcal{T} \cap \mathcal{S}$ consideremos as funções decrescentes $t \mapsto \lambda(U)$ definidas no intervalo $(0,+\infty)$, sendo $U = \{f > t\}$.

Se t_o é um ponto de continuidade para esta função, $\{f > t_o\}$ é um conjunto de regularidade para λ. De fato:

$$\lambda_-(U_o) = \sup\{\lambda(V) : V \subset\subset U_o \ , \ V \in \mathcal{U}\}$$

$$\geqslant \sup\{\lambda(\{f > t\}) : \{f > t\} \subset\subset U_o \ , \ \{f > t\} \in \mathcal{U}\}$$

$$= \lambda(U_o) \text{ pois } t_o \text{ é um ponto de continuidade.}$$

Por outro lado,

$$\lambda_+(U_o) = \inf\{\lambda(V) : U_o \subset\subset V \ , \ V \in \mathcal{U}\}$$

$$\leqslant \inf\{\lambda(\{f > t\}) : U_o \subset\subset \{f > t\}, \ \{f > t\} \in \mathcal{U}\}$$

$$= \lambda(U_o) \text{ pois } t_o \text{ é um ponto de continuidade.}$$

Assim, $\lambda_+ \leqslant \lambda \leqslant \lambda_-$

Por (4.5) temos que $\lambda_- \leqslant \lambda \leqslant \lambda_+$

Das duas relações acima, decorre finalmente que $\{f > t_o\}$ é um conjunto de regularidade para λ. ∎

(4.15) PROPOSIÇÃO: *Para todo par λ,μ de elementos de Λ, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) *λ e μ admitem os mesmos conjuntos de regularidade, e coincidem em cada um deles.*

(2) *λ coincide com μ em todo conjunto que é um conjunto de regularidade por μ.*

(3) *λ e μ coincidem sobre uma parte rica de $\mathcal{U}$.*

(4) *λ e μ coincidem sobre uma parte densa de $\mathcal{U}$.*

(5) $\lambda_- = \mu_-$

(6) $\lambda_+ = \mu_+$

DEMONSTRAÇÃO:

(1) $\Rightarrow$ (2): implicação evidente.

(2) $\Rightarrow$ (3): Com efeito, os conjuntos sobre os quais μ é regular formam uma parte rica de $\mathcal{U}$ (ver (4.14)).

(3) $\Rightarrow$ (4): implicação imediata, pois toda parte rica é - densa (ver(4.13)).

(4) $\Rightarrow$ ((5) e (6)): $\lambda(A) = \mu(A)$ para todo elemento A de $\mathcal{V}$, onde $\mathcal{V}$ é uma parte densa de $\mathcal{U}$. Por (4.10), temos:

$$\begin{aligned}\lambda_-(A) &= \sup\{\lambda(V): V \subset\subset A,\ V \in \mathcal{V}\}\\ &= \sup\{\mu(V): V \subset\subset A,\ V \in \mathcal{V}\}\\ &= \mu_-(A).\end{aligned}$$

e também

$$\lambda_+(A) = \inf\{\lambda(V): A \subset\subset V;\ V \in \mathcal{V}\}$$

$$= \inf\{\mu(V): A \subset\subset V;\ V \in \mathcal{V}\}$$

$$= \mu_+(A).$$

((5) e (6)) $\Longrightarrow$ (1): Seja $\mathcal{M}_1 = \{U: \lambda_-(U) = \lambda_+(U)\}$ um conjunto de regularidade para λ e $\mathcal{M}_2 = \{U: \mu_-(U) = \mu_+(U)\}$ um conjunto de regularidade para μ. Consequentemente como são válidas as condições (5) e (6), as funções λ e μ admitem os mesmos conjuntos de regularidade, ou seja, $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$. Assim, se U é um elemento - deste conjunto, $\lambda(U) = \lambda_-(U)$, $\mu(U) = \mu_-(U)$, e pela condição (5) , $\lambda(U) = \mu(U)$.

(5) $\Longrightarrow$ (3): Sejam
$$\mathcal{V}_1 = \{U: \lambda_-(U) = \lambda_+(U)\},$$
$$\mathcal{V}_2 = \{U: \mu_-(U) = \mu_+(U)\},$$
$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$$

Por (4.14) $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ são partes ricas de $\mathcal{U}$ e por (4.12) $\mathcal{V}$ é - uma parte rica de $\mathcal{U}$. Por outro lado, para todo elemento U de $\mathcal{U}$, temos

$$\lambda(U) = \lambda_-(U)\ ,\ \mu(U) = \mu_-(U),$$

donde pela condição (5),

$$\lambda(U) = \mu(U).$$

(6) $\Longrightarrow$ (3): Esta implicação é demonstrada como a precedente. ■

(4.16) <u>DEFINIÇÃO</u>: *Dizemos que dois elementos* λ, μ *de* Λ *são equivalentes (em relação à classe* $\mathcal{K}$*) se verificam as condições equivalentes (1)-(6) da proposição precedente.*

Por exemplo, todo elemento λ de Λ é equivalente, ao mesmo tempo, à sua versão interiormente regular λ_- e à sua versão exteriormente regular λ_+.

(4.17) <u>DEFINIÇÃO</u>: *Seja* $\mathcal{H}$ *um conjunto de partes de* X, *verificando a condição* $\emptyset \in \mathcal{H}$ *(mas não necessariamente estável pela reunião finita), e seja* α *uma função definida em* $\mathcal{H}$, *crescente, com* $\alpha(\emptyset) = 0$. *Dizemos que* α *é* <u>*sub-aditiva*</u> *se para quaisquer que sejam* A_1, A_2, A *elementos de* $\mathcal{H}$ *verificando a relação* $A \subset (A_1 \cup A_2)$, *tem-se* $\alpha(A) \leq \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$.

Dizemos que α *é* <u>*aditiva*</u> *se, para quaisquer que sejam* A_1, A_2, A *elementos de* $\mathcal{H}$ *verificando as relações*

$A \subset A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (resp. $A \supset A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$)

tem-se

$\alpha(A) \leq \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$ (resp. $\alpha(A) \geq \alpha(A_1) + \alpha(A_2)$)

As definições precedentes se reduzem evidentemente às definições habituais de aditividade e sub-aditividade no caso particular onde a classe $\mathcal{H}$ é estável pela reunião finita.

(4.18) <u>PROPOSIÇÃO</u>: *Para toda função* λ *pertencente à* Λ, *as seguintes condições são equivalentes:*

(a) λ_- *é sub-aditiva (resp. aditiva)*

(b) *Existe uma parte rica $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, tal que a restrição de λ à $\mathcal{V}$ é sub-aditiva(resp. aditiva).*

(c) *Existe uma parte densa $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, tal que a restrição de λ à $\mathcal{V}$ é sub-aditiva (resp. aditiva).*

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Trataremos a demonstração para o caso de sub-aditividade.

(a) $\Longrightarrow$ (b):

É suficiente escrever $\mathcal{V} = \{U: \lambda(U) = \lambda_{-}(U)\}$.

Por (4.14) $\mathcal{V}$ é uma parte rica de $\mathcal{U}$. Como λ_{-} é sub-aditiva e coincide com λ, segue-se que $\lambda|_{\mathcal{V}}$ é sub-aditiva.

(b) $\Longrightarrow$ (c):

Esta implicação é imediata pois toda parte rica de $\mathcal{U}$ é densa (ver (4.13)).

(c) $\Longrightarrow$ (a):

Seja $\mathcal{V}$ uma parte densa de $\mathcal{U}$ tal que a restrição de λ à $\mathcal{V}$ seja sub-aditiva; sejam U_1, U_2 quaisquer elementos de $\mathcal{U}$. Para todo elemento V de $\mathcal{V}$ fortemente contido em $U_1 \cup U_2$, existe em virtude de (3.9), um par V_1, V_2 de elementos de $\mathcal{V}$ tal que

$$V \subset V_1 \cup V_2 \ , \ V_1 \subset\subset U_1 \ , \ V_2 \subset\subset U_2 \ .$$

Assim, como λ é sub-aditiva,

(4.18.1) $$\lambda(V) \leq \lambda(V_1) + \lambda(V_2).$$

Por outro lado,

$$\lambda_-(U_i) = \sup\{\lambda(V): V \subset\subset U_i \ , \ V \in \mathcal{V}\} \quad i = 1,2$$

e assim, existe $V_i \in \mathcal{V}$, $i = 1,2$, tal que

$$\lambda(V_i) \leqslant \lambda_-(U_i) \ , \ i = 1,2 \ .$$

Substituindo este resultado em (4.18.1) vem:

(4.18.2) $$\lambda(V) \leqslant \lambda_-(U_1) + \lambda_-(U_2)$$

Por outro lado,

$$\lambda_-(U_1 \cup U_2) = \sup\{\lambda(V): V \subset\subset (U_1 \cup U_2), \ V \in \mathcal{V}\}$$

logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $V_o \in \mathcal{V}$ tal que

(4.18.3) $$\lambda_-(U_1 \cup U_2) \leqslant \lambda(V_o) + \varepsilon$$

Por (3.9) existe V_1', V_2' elementos de $\mathcal{V}$ tal que

$$V_o \subset\subset V_1' \cup V_2' \ , \ V_1' \subset\subset U_1 \ , \ V_2' \subset\subset U_2$$

e assim como λ é sub-aditiva,

$$\lambda(V_o) \leqslant \lambda(V_1') + \lambda(V_2')$$

Substituindo o resultado acima em (4.18.3) temos

$$\lambda_-(U_1 \cup U_2) \leqslant \lambda(V_1') + \lambda(V_2') + \varepsilon$$

e por (4.18.2)

$$\lambda_-(U_1 \cup U_2) \leqslant \lambda_-(U_1) + \lambda_-(U_2) + \varepsilon$$

Em virtude da arbitrariedade de ε, temos finalmente

$$\lambda_-(U_1 \cup U_2) \leqslant \lambda_-(U_1) + \lambda_-(U_2) \ ,$$

provando a sub-aditividade de λ_-. ∎

5. CONDIÇÕES PARA QUE UMA FUNÇÃO CRESCENTE SOBRE $\mathcal{U}$ POSSA SER PROLONGADA A UMA MEDIDA.

Nosso propósito agora é alcançar condições suficientes para que uma função λ da classe Λ seja a restrição à $\mathcal{U}$ de uma - medida, ou seja, de uma função enumeravelmente aditiva definida em um anel de conjuntos. Vamos nos preocupar com o problema da existência de um prolongamento de λ que seja aditivo, no sentido finito, em um anel gerado por $\mathcal{U}$.

(5.1) TEOREMA: *Seja λ uma função da classe Λ_- (isto é, uma função pertencente à classe Λ e interiormente regular). Designaremos por λ^* a função definida por (4.1) no conjunto de todas as partes de X, e por $\mathcal{A}$ o anel gerado por $\mathcal{U}$. As seguintes condições são equivalentes* (4):

(1) *Existe uma função definida em $\mathcal{A}$ prolongando λ.*

(2) *Para todo par U,V de elementos de $\mathcal{U}$, temos*
$\lambda(U \cup V) + \lambda(U \cap V) = \lambda(U) + \lambda(V)$.

(3) *λ é aditiva e sub-aditiva.*

(4) *Para todo par U,V de elementos de $\mathcal{U}$, com $U \subset V$, temos*
$\lambda(V) = \lambda(U) + \lambda^*(V \setminus U)$

(5) *Todo elemento U de $\mathcal{U}$ é mensurável, no sentido de Carathéodory, com respeito à λ^*, isto é, verifica a -*

(4) Para a equivalência entre (1) e (2) ver [15], Teorema 1.2 (onde λ é suposta finita) e [9], Teorema 1.9 e 1.22 (onde é suposto $X \in \mathcal{U}$ e $\lambda(X) = 1$). Para a equivalência entre (4) e (5), ver[12], Prop.2.2. Para a implicação (3)$\Rightarrow$(4), ver[12] prop.4.3.

relação

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c)$$

para todo subconjunto E *de* X.

(6) *A restrição de* λ^* *ao anel* $\mathcal{A}$ *é aditiva.*

DEMONSTRAÇÃO:

(1) $\Longrightarrow$ (2)

Dados dois conjuntos U, V pertencentes à $\mathcal{U}$, as seguintes igualdades são válidas:

$$U = (U \cap V) \cup (U \setminus V) \ ; \ V = (U \cap V) \cup (V \setminus U)$$

Como por (1) existe uma função aditiva definida em $\mathcal{A}$ prolongando λ, temos

$$\lambda(U) = \lambda(U \cap V) + \lambda(U \setminus V) \ ; \ \lambda(V) = \lambda(U \cap V) + \lambda(V \setminus U)$$

Somando as duas igualdades acima, resulta

(5.1.1) $\lambda(U) + \lambda(V) = \lambda(U \cap V) + \lambda(U \cap V) + \lambda(U \setminus V) + \lambda(V \setminus U).$

Por outro lado,

$$U \cup V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U) \cup (U \cap V)$$

Novamente pela aditividade de λ temos

(5.1.2) $\lambda(U \cup V) = \lambda(U \setminus V) + \lambda(V \setminus U) + \lambda(U \cap V)$

Substituindo (5.1.2) em (5.1.1) vem

$$\lambda(U) + \lambda(V) = \lambda(U \cap V) + \lambda(U \cup V).$$

(2) $\Longrightarrow$ (3)

Por (2) temos que

$$\lambda(U \cap V) + \lambda(U \cup V) = \lambda(U) + \lambda(V)$$

Podem ocorrer dois casos:

$$U \cap V = \emptyset \quad \text{ou} \quad U \cap V \neq \emptyset .$$

No primeiro caso $\lambda(U \cap V) = 0$, e assim

$$\lambda(U \cup V) = \lambda(U) + \lambda(V)$$

provando a aditividade.

No segundo caso $\lambda(U \cap V) > 0$, e assim

$$\lambda(U \cup V) \leq \lambda(U) + \lambda(V) ,$$

provando a sub-aditividade de λ em $\mathcal{U}$.

(3) $\Longrightarrow$ (4)

Devemos provar que para todo par U, V de elementos de $\mathcal{U}$, com $U \subset V$,

$$\lambda(V) = \lambda(U) + \lambda^*(V \setminus U)$$

Como $U \subset V$, podemos escrever

$$V = U \cup (V \setminus U)$$

Aplicando λ^* à igualdade acima, vem

$$\lambda^*(V) = \lambda^*(U \cup (V \setminus U))$$

De acordo com a definição (4.1), segue-se que

$$\lambda^*(U \cup (V\smallsetminus U)) = \inf\{\lambda(H) : U \cup (V\smallsetminus U) \subset H,\ H \in \mathcal{U}\}$$

Tomando $H = U \cup H'$ onde $H' \in \mathcal{U}$, $H' \supset V\smallsetminus U$ temos

$$\lambda(V) = \lambda^*(V) = \lambda^*(U \cup (V\smallsetminus U))$$

$$= \inf\{\lambda(U \cup H') : U \cup (V\smallsetminus U) \subset U \cup H'\ ;\ H' \in \mathcal{U}\}$$

$$= \inf\{\lambda(U) + \lambda(H') : U \cup (V\smallsetminus U) \subset U \cup H'\ ;\ H' \in \mathcal{U}\}$$

$$\leqslant \lambda(U) + \inf\{\lambda(H') : H' \supset (V\smallsetminus U)\ ;\ H' \in \mathcal{U}\}$$

Como $\inf\{\lambda(H') : H' \supset (V\smallsetminus U)\ ;\ H' \in \mathcal{U}\} = \lambda^*(V\smallsetminus U)$, segue-se que

$$\lambda(V) \leqslant \lambda(U) + \lambda^*(V\smallsetminus U).$$

Pelo fato de λ ser interiormente regular, para demonstrarmos a desigualdade oposta, é suficiente verificar a desigualdade

$$\lambda(V) \geqslant \lambda(T) + \lambda^*(V\smallsetminus U)$$

para todo elemento T de $\mathcal{U}$ fortemente contido em $\mathcal{U}$.

Como $T \subset\subset U$, existe um elemento K de $\mathcal{K}$, tal que

$$T \subset K \subset U.$$

Agora, $V\smallsetminus K = V \cap K^c$ é um elemento de $\mathcal{U}$ por (3.4), e $T \cap (V\smallsetminus K) = \emptyset$.

Como

$$T \subset K \subset U \subset V$$

segue-se que

$$V \setminus K \subset V$$

e assim

$$T \cup (V \setminus K) \subset V.$$

Logo, pela aditividade de λ, obtemos

$$\lambda(T) + \lambda(V \setminus K) \leqslant \lambda(V).$$

Por outro lado,

$$\lambda^*(V \setminus U) = \inf\{\lambda(H) : V \setminus U \subset H, \ H \in \mathcal{U}\}.$$

Tomando $H = V \setminus K \supset V \setminus U$ segue-se pela definição de ínfimo que

$$\lambda^*(V \setminus U) \leqslant \lambda(V \setminus K).$$

Assim,

$$\lambda(V) \geqslant \lambda(T) + \lambda^*(V \setminus U),$$

como queríamos.

(4) $\Rightarrow$ (5)

Dado um par de conjuntos U, V de elementos de $\mathcal{U}$ com $U \subset V$, podemos afirmar que $V \cap U \subset V$. Assim, por (4), temos

$$\lambda(V) = \lambda(V \cap U) + \lambda^*(V \cap U^c). \tag{5.1.3}$$

Seja $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \supset E$, logo

$$V \cap U \supset E \cap U,$$

e pela definição de λ^* podemos escrever

$$\lambda^*(E \cap U) = \inf\{\lambda(H) : E \cap U \subset H, \ H \in \mathcal{U}\}.$$

Tomando $H = V \cap U$, segue-se pela definição de ínfimo que

$$\lambda^*(E \cap U) \leq \lambda(V \cap U)$$

Substituindo-se o resultado acima em (5.1.3) temos

(5.1.4) $$\lambda(V) \geq \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(V \cap U^c)$$

Novamente, pela definição de λ^*,

$$\lambda^*(E \cap U^c) = \inf\{\lambda(H): E \cap U^c \subset H,\ H \in \mathcal{U}\}$$

Considerando $H = V \cap U^c \supset E \cap U^c$, segue-se pela definição de ínfimo que

$$\lambda^*(E \cap U^c) \leq \lambda^*(V \cap U^c)$$

Substituindo-se a relação acima em (5.1.4), obtemos

(5.1.5) $$\lambda(V) \geq \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c).$$

Agora, pela definição de λ^*, temos

$$\lambda^*(E) = \inf\{\lambda(H): H \supset E,\ H \in \mathcal{U}\}$$

logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que

(5.1.6) $$\lambda^*(E) + \varepsilon \geq \lambda(V)$$

Resulta das desigualdades dadas por (5.1.5) e (5.1.6) e da arbitrariedade de ε, que

(5.1.7) $$\lambda^*(E) \geq \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c).$$

Resta provar que

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c)$$

Consideremos V' , V'' elementos de $\mathcal{U}$ tais que

$$V' \supset E \cap U \ , \ V'' \supset E \cap U^c .$$

Logo,

$$V' \cup V'' \supset (E \cap U) \cup (E \cap U^c) = E .$$

Pela definição de λ^*

$$\lambda^*(E) = \inf\{\lambda(V) : (E \cap U) \cup (E \cap U^c) \subset V,\ V \in \mathcal{U}\}$$

$$\leq \inf\{\lambda(V' \cup V'') : V' \supset E \cap U,\ V'' \supset E \cap U^c \ ;\ V' \ ,\ V'' \in \mathcal{U}\}$$

$$\leq \inf\{\lambda(V') + \lambda(V'') : V' \supset E \cap U,\ V'' \supset E \cap U^c ; V' \ ,\ V'' \in \mathcal{U}\}$$

A última desigualdade decorre do fato de λ ser sub-aditiva.

Assim,

$$\lambda^*(E) \leq \inf\{\lambda(V') : V' \supset E \cap U,\ V' \in \mathcal{U}\} + \inf\{\lambda(V'') : V'' \supset E \cap U^c, V'' \in \mathcal{U}\}$$

ou seja,

(5.1.8) $$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(E \cap U) + \lambda^*(E \cap U^c) .$$

Finalmente, combinando as desigualdades dadas por (5.1.7) e (5.1.8), fica demonstrada a igualdade.

(5) $\Longrightarrow$ (6)

Designemos por $\mathcal{M}$ a classe constituída pelos conjuntos mensuráveis com respeito à λ^* . $\mathcal{M}$ é um anel e a restrição de λ^* a $\mathcal{M}$ é aditiva; se $\mathcal{U}$ está contido em $\mathcal{M}$, também está em $\mathcal{A}$, e a restrição de λ^* a $\mathcal{A}$ é aditiva.

(6) $\Longrightarrow$ (1)

Esta implicação é evidente. ■

(5.2) COROLÁRIO: *Seja λ uma função da classe Λ. Suponhamos λ aditiva e sub-aditiva, e designemos por $\mathcal{V}$ o conjunto - constituído pelos elementos de $\mathcal{U}$ para os quais λ é finita e regular. Se V_1, V_2 são elementos de $\mathcal{V}$, então*

$$V_1 \cap V_2 \quad e \quad V_1 \cup V_2$$

são elementos de $\mathcal{V}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Para a demonstração, trocaremos λ por λ_-, pois estamos - supondo λ interiormente regular. O teorema anterior mostra então que λ é a restrição à $\mathcal{U}$ de uma função aditiva μ, definida no anel gerado por $\mathcal{U}$. Então, dados os elementos V_1, V_2 de $\mathcal{V}$ existem elementos U_1, U_2 de $\mathcal{U}$ tais que

$$V_i \subset\subset U_i \quad \text{para} \quad i = 1,2.$$

Agora, por (4.14) $\mathcal{V}$ é uma parte rica de $\mathcal{U}$ e daí - é densa (ver (4.13)), donde por (4.10)

$$\lambda_-(U_i) = \sup\{\lambda(V_i) : V_i \subset\subset U_i,\ V_i \in \mathcal{V},\ i = 1,2\}$$

Pela definição de supremo, dado $\varepsilon > 0$, existe $V_i \in \mathcal{V}$ tal que

$$\lambda_-(U_i) \leqslant \lambda(V_i) + \varepsilon$$

ou seja,

$$\lambda(U_i) - \lambda(V_i) \leqslant \varepsilon \quad \text{para} \quad i = 1,2.$$

Pela parte (4) do teorema anterior

$$\lambda(U_i) = \lambda(V_i) + \mu(U_i \setminus V_i) \quad , \; i = 1,2.$$

Assim,

(5.2.1) $$\mu(U_i \setminus V_i) = \lambda(U_i) - \lambda(V_i) \leq \varepsilon$$

Como $V_i \subset\subset U_i$ para $i = 1,2$, é válida a relação

$$V_1 \cup V_2 \subset\subset U_1 \cup U_2 .$$

Aplicando novamente a parte (4) do teorema anterior obtemos

$$\lambda(U_1 \cup U_2) = \lambda(V_1 \cup V_2) + \mu((U_1 \cup U_2) \setminus (V_1 \cup V_2)),$$

e assim

$$\lambda(U_1 \cup U_2) - \lambda(V_1 \cup V_2) = \mu((U_1 \cup U_2) \setminus (V_1 \cup V_2))$$

Como $(U_1 \cup U_2) \setminus (V_1 \cup V_2) \subset (U_1 \setminus V_1) \cup (U_2 \setminus V_2)$ e μ é aditiva, decorre que

$$\mu((U_1 \cup U_2) \setminus (V_1 \cup V_2)) \leq \mu(U_1 \setminus V_1) + \mu(U_2 \setminus V_2),$$

e por (5.2.1) concluimos que

$$\lambda(U_1 \cup U_2) - \lambda(V_1 \cup V_2) \leq 2\varepsilon$$

ou seja,

$$\lambda(V_1 \cup V_2) + 2\varepsilon \geq \lambda(U_1 \cup U_2).$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ e $V_1 \cup V_2$, existe $U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}$, $U_1 \cup U_2 \supset\supset V_1 \cup V_2$ tal que

$$\lambda(V_1 \cup V_2) = \inf\{\lambda(U_1 \cup U_2) : (U_1 \cup U_2) \subset\subset (V_1 \cup V_2),\ U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}\}$$

$$= \lambda_+(V_1 \cup V_2)$$

Provamos assim que $(V_1 \cup V_2)$ pertence à $\mathcal{V}$.

Prova-se de maneira análoga que $(V_1 \cap V_2)$ pertence à $\mathcal{V}$. ■

Designaremos por $\mathcal{K}_\sigma$ (respectivamente $\mathcal{U}_\delta$) a classe constituída pelas reuniões enumeráveis de elementos de $\mathcal{K}$ (respectivamente pelas intersecções enumeráveis de elementos de $\mathcal{U}$).

De acordo com a terminologia de [14], [16], diremos que $\mathcal{K}$ é *Compacta* (*ou enumeravelmente compacta*) se toda família enumerável de elementos de $\mathcal{K}$ cuja intersecção é vazia, admite uma sub-família finita com intersecção vazia.

(5.3) PROPOSIÇÃO: *Seja λ uma função da classe Λ.*

(a) *Se λ é interiormente regular e se a classe $\mathcal{K}$ é compacta, λ é contínua sobre seqüências crescentes.*

(b) *Se λ é contínua sobre seqüências crescentes e se $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_\sigma$, λ é interiormente regular.*

DEMONSTRAÇÃO:

(a) Seja $U \neq \emptyset$ um elemento de $\mathcal{U}$ e seja (U_n) uma sequência crescente de elementos de $\mathcal{U}$ com $\lim\limits_n U_n = U$.

Se V é um elemento de $\mathcal{U}$ fortemente contido em U, temos $V \subset\subset U_{n_o}$ para n_o suficientemente grande, do fato de $\mathcal{K}$ ser compacta, pois consideremos

$$K_1 = K \cap U_1^c$$

$$K_2 = K \cap U_2^c$$

$$\vdots$$

$$K_n = K \cap U_n^c$$

Formamos assim uma sequência de elementos de $\mathcal{K}$. (ver (3.4)).

Observemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, pois

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (K \cap U_n^c) = K \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^c) = K \bigcap_{n=1}^{\infty} (\cup U_n)^c = K \cap U^c \text{ e } K \subset U.$$

Logo, como a classe $\mathcal{K}$ é compacta, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{n=1}^{n_o} K_n = \emptyset$
Assim, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_o} \supset K \supset V$.

Como $U = \lim_n U_n$ com $U_i \subset U_j$ para $i \leqslant j$, segue-se que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $V \subset U_n$ para $n \geqslant n_o$.

Portanto, $\lambda(V) \leqslant \lambda(U_n)$ para $n \geqslant n_o$, e conseqüentemente

(5.3.1) $$\lambda(V) \leqslant \sup_n \lambda(U_n).$$

Mas,

$$\lambda_-(U) = \sup\{\lambda(V) : V \subset\subset U,\ V \in \mathcal{U}\}$$

Portanto, pela definição de supremo, dado $\varepsilon > 0$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que

(5.3.2) $$\lambda_-(U) - \varepsilon \leqslant \lambda(V).$$

Combinando (5.3.1) e (5.3.2) temos

$$\lambda_-(U) - \varepsilon \leqslant \lambda(V) \leqslant \sup_n \lambda(U_n).$$

Como ε é arbitrário e λ é interiormente regular, temos

(5.3.3) $$\lambda(U) \leq \sup_n \lambda(U_n)$$

Cada U_n está contido em U pois (U_n) é sequência crescente de elementos de $\mathcal{U}$, logo $\lambda(U_n) \leq \lambda(U)$ para todo n.

Decorre daí que

(5.3.4) $$\sup \lambda(U_n) \leq \lambda(U).$$

De (5.3.3) e (5.3.4) concluímos que λ é contínua sobre sequências crescentes.

(b) Em virtude da hipótese $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}_\sigma$, podemos dizer que $U \in \mathcal{U}$ é uma união enumerável de elementos de $\mathcal{K}$, isto é, $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.

Seja (K'_n) uma sequência crescente de elementos de $\mathcal{K}$ construída da seguinte maneira:

$$K'_1 = K_1$$

$$K'_2 = K_1 \cup K_2$$

$$\vdots$$

$$K'_n = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

Assim,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} K'_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i = U.$$

Como $K_i \subset U$ para todo i, aplicando (3.6), segue-se que

$$K_i \subset U_i \subset K_i^* \subset U \quad \text{para todo } i,\ i = 1,\dots,n.$$

Tomando

$$U_1' = U_1$$
$$U_2' = U_1 \cup U_2$$
$$\vdots$$
$$U_n' = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

construímos uma sequência crescente (U_n') de elementos de $\mathcal{U}$ satisfazendo, para todo i,

$$K_i' \subset U_i' \subset U \quad ,$$

e portanto,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i' \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i' \subset U \,.$$

Mas, $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i' = U$, donde se conclui que $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i'$.

Por outro lado, $U_n' \subset \bigcup_{i=1}^{n} K_i^* \subset U$. Logo, $U_n' \subset\subset U$.

Assim, para todo $V \subset\subset U$, existe K_n' pertencente à $\mathcal{K}$ tal que $V \subset K_n' \subset U_n' \subset U$. Portanto

$$\lambda\_(U) = \sup\{\lambda(U_n') : U_n' \subset\subset U,\ U_n' \in \mathcal{U}\}$$

Como λ é contínua sobre sequências crescentes, decorre finalmente que $\lambda\_(U) = \lambda(U)$. ■

O teorema seguinte fornece condições para que uma função λ de classe $\Lambda\_$ possa ser prolongada a uma medida.

(5.4) TEOREMA: *Seja* λ *uma função da classe* Λ_- . *Suponhamos* λ *aditiva e sub-aditiva, e designemos por* λ^* *a função definida no conjunto de todas as partes de* X *por*

$$\lambda^*(E) = \inf\{\lambda(V) : E \subset V,\ V \in \mathfrak{U}\}.$$

As seguintes condições são equivalentes (5) :

(1) *Existe uma medida que prolonga* λ.

(2) λ *é contínua sobre seqüências crescentes.*

(3) λ *é enumeravelmente sub-aditiva.*

(4) *A restrição de* λ^* *à classe constituída pelos elementos de* $\mathfrak{U}$ *e por seus subconjuntos é enumeravelmente sub-aditiva.*

(5) *A restrição de* λ^* *ao anel gerado por* $\mathfrak{U}$ *é enumeravelmente aditiva.*

DEMONSTRAÇÃO:

(1) $\Longrightarrow$ (2)

Seja (U_i) uma seqüência crescente de elementos de $\mathfrak{U}$ com $U = \bigcup_i U_i$, $U_0 = \emptyset$.

Consideremos uma seqüência (U_i') construída da seguinte maneira:

$$U_1' = U_1$$
$$U_2' = U_2 \setminus U_1$$
$$\vdots$$
$$U_n' = U_n \setminus U_{n-1}$$

(5) Ver [4] (com a hipótese suplementar $\mathfrak{U} \subset \mathcal{K}_\sigma$ e λ finita); [5], cap.IV (§1,N.4 Teorema 9, §2,N.3 Teorema 5) e [12] prop.4.4.

A seqüência (U_i') é crescente e seus elementos são dois a dois disjuntos, logo $\bigcup_i U_i' = U$.

Por outro lado, pela hipótese (1) temos

$$\begin{aligned}\lambda(U) &= \lambda^*(\bigcup_i U_i')\\ &= \sum_i \lambda^*(U_i'), \text{ pois } \lambda^* \text{ é aditiva.}\\ &= \lim_i \Sigma_{k=1}^{i} \lambda^*(U_k - U_{k-1})\\ &= \lim_i \lambda^*(U_i)\end{aligned}$$

A última igualdade decorre da hipótese(1), provando assim que λ é contínua sobre seqüências crescentes.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Seja (U_i) uma seqüência de elementos de $\mathcal{U}$ tal que - $\bigcup_i U_i = U$, $U \in \mathcal{U}$.

Construamos a seguinte seqüência:

$$\begin{aligned}U_1' &= U_1\\ U_2' &= U_1 \cup U_2\\ &\vdots\\ U_n' &= \bigcup_{i=1}^{n} U_i\\ &\vdots\end{aligned}$$

Desta forma a seqüência (U_i') assim construída é crescente e $\bigcup_i U_i = \bigcup_i U_i' = U$.

Logo,

$$\lambda(U) = \lambda(\bigcup_i U_i) = \lambda(\bigcup_i U_i') = \sup_i \lambda(U_i'),$$

pois λ é contínua sobre seqüências crescentes.

Temos por hipótese que λ é sub-aditiva, logo

$$\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \leq \Sigma_{i=1}^{n} \lambda(U_i)$$

Passando ao limite em ambos os membros da desigualdade acima, resulta

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)) \leq \lim_{n\to\infty} (\Sigma_{i=1}^{n} \lambda(U_i)) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \lambda(U_i)$$

Por outro lado,

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)) = \lim_{n\ \infty} \lambda(\bigcup_{i=1}^{n} U_i') = \sup_i \lambda(U_i')$$

A última igualdade decorre do fato de λ ser contínua sobre seqüências crescentes. Assim,

$$\lambda(\bigcup_i U_i) \leq \Sigma_{i=1}^{\infty} \lambda(U_i).$$

(3) $\Longrightarrow$ (4)

A função λ é suposta enumeravelmente sub-aditiva.

Seja E uma parte de X contida em um elemento V de $\mathcal{U}$ e seja (E_n) uma sequência de partes de E com $\bigcup_n E_n = E$.

Por outro lado, dado $\varepsilon>0$, existe para todo n, um elemento U_n de $\mathcal{U}$ tal que

(5.4.1) $\qquad E_n \subset U_n \ , \ \lambda(U_n) \leq \lambda^*(E_n) + \varepsilon 2^{-n}$

Coloquemos $U = V \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n)$

O conjunto U contém o conjunto E e é um elemento de $\mathcal{U}$, de modo que

$$\lambda^*(E) \leq \lambda^*(U) = \lambda(V \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n))$$

$$= \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} (V \cap U_n))$$

$$\leq \Sigma_{n=1}^{\infty} \lambda(V \cap U_n) \ , \text{ por (3)}.$$

$$\leq \Sigma_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \text{ , pois } (V \cap U_n) \subset U_n.$$

$$\leq \Sigma_{n=1}^{\infty}(\lambda^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon), \text{ por } (5.4.1)$$

$$= \Sigma_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) + \Sigma_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n}$$

$$= \Sigma_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) + \varepsilon.$$

Portanto pela arbitrariedade de ε conclui-se a afirmação.

(4) $\Longrightarrow$ (5)

Em virtude de (5.1) a restrição de λ^* ao anel gerado por $\mathfrak{U}$ é aditiva; se a condição (4) é satisfeita, esta restrição é também enumeravelmente sub-aditiva, donde também enumeravelmente aditiva.

(5) $\Longrightarrow$ (1): esta implicação é imediata. ■

Um outro critério útil, que permite reconhecer se uma dada função pertencente à classe Λ é a restrição a $\mathfrak{U}$ de uma medida, é fornecido pelo teorema seguinte.

(5.5) <u>TEOREMA</u>: *Sejam λ, μ duas funções aditivas da classe Λ. Se a função $\nu = \lambda + \mu$ é finita, interiormente regular e prolongável a uma medida, o mesmo vale para as funções λ e μ.*

<u>DEMONSTRAÇÃO</u>:

Primeiramente, as funções λ e μ são finitas e interiormente regulares, em virtude da conclusão da proposição (4.9). Estas funções são além disso, contínuas sobre seqüências crescentes, visto que no caso contrário teríamos a existência de um elemento U de $\mathcal{U}$ e de uma sequência crescente (U_n) de elementos de $\mathcal{U}$ verificando as relações

$$\bigcup_n U_n = U \ , \ \sup_n \nu(U_n) < \nu(U)$$

Em virtude do teorema (5.4) é suficiente verificar a sub-aditividade de λ e μ. Então, dado um par U, V de elementos de $\mathcal{U}$, podemos escolher (em razão da regularidade interna de λ e μ) duas sequências (U_n), (K_n) de partes de $\mathcal{U}$, tal que

$$U_n \in \mathcal{U}, \ K_n \in \mathcal{K} \ , \ U_n \subset K_n \subset U_{n+1}$$

$$\lambda(U) = \lim_n \lambda(U_n) \ ; \ \mu(U) = \lim_n \mu(U_n) .$$

Coloquemos

$$T = \lim_n U_n = \lim_n K_n$$

Então,

(5.5.1) $$T \subset U \ , \ \nu(T) = \lim_n \nu(U_n) = \nu(U)$$

Por outro lado os conjuntos U_n e $V_n = V \cap K_n^c$ são disjuntos e estão contidos, respectivamente, em U e V, de modo que

$$\lambda(U_n) + \lambda(V_n) = \lambda(U_n \cup V_n) \leq \lambda(U \cup V)$$

e por conseqüência

(5.5.2) $$\lim_n(\lambda(U_n) + \lambda(V_n)) \leq \lambda(U \cup V)$$

A mesma desigualdade é válida, naturalmente, para a -

função μ:

(5.5.3) $$\lim_n (\mu(U_n) + \mu(V_n)) \leqslant \mu(U \cup V)$$

Mas, a sequência (U_n) é crescente e tem T por limite, enquanto que a sequência (V_n) é decrescente e tem por limite o conjunto

$$V \cap \lim_n K_n^c = V \cap T^c$$

Conseqüentemente a sequência $(U_n \cup V_n)$ tem por limite o conjunto $T \cup V$.

Em virtude de ser ν finita e prolongável a uma medida, resulta por (5.5.1) que

(5.5.4) $$\lim_n (\nu(U_n) + \nu(V_n)) = \nu(T \cup V) = \nu(U \cup V)$$

Comparando esta igualdade com (5.5.2) e (5.5.3) vemos que as desigualdades são de fato igualdades. Resulta portanto - que

$$\lambda(U \cup V) = \lim_n (\lambda(U_n) + \lambda(V_n) \leqslant \lambda(U) + \lambda(V)$$

Como a mesma desigualdade é válida para a função μ, segue-se que as funções λ e μ são sub-aditivas, concluindo a demonstração. ∎

6. O TEOREMA DE RIESZ GENERALIZADO

Nos proporemos agora mostrar que algumas propriedades de uma função de conjuntos da classe Λ se traduzem pelas propriedades da integral correspondente, considerada como um funcional sobre a classe $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$ ou sobre uma parte densa desta classe.

(6.1) PROPOSIÇÃO: *Seja λ, μ duas funções da classe Λ, equivalentes no sentido de (4.16). Então*

$$\int f \, d\lambda = \int f \, d\mu$$

para todo elemento f *de* $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Pelo fato de λ, μ serem equivalentes, elas coincidem sobre uma parte rica de $\mathcal{U}$. Isto significa que, para todo elemento f de $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$, o conjunto constituído pelos números reais t estritamente positivos tais que a relação

$$\lambda(\{f > t\}) = \mu(\{f > t\})$$

não seja válida, é no máximo enumerável.

A conclusão resulta diretamente da definição (2.1) de integral. ■

(6.2) PROPOSIÇÃO: *Seja $\mathcal{C}$ uma parte densa de $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$. Para todo elemento λ de Λ e para todo elemento* U *de $\mathcal{U}$, temos:*

$$\lambda_-(U) = \sup\{\int f \, d\lambda : f \leqslant 1_U, \ f \in \mathcal{C}\}$$

$$\lambda_+(U) = \inf\{\int f \, d\lambda : 1_U \leqslant f, \ f \in \mathcal{C}\}.$$

DEMONSTRAÇÃO:

Para todo elemento f de $\mathcal{C}$, sendo válida a relação $f \leqslant 1_U$, aplicando (6.1) segue-se que

$$\int f \, d\lambda = \int f \, d\lambda_- \leqslant \int 1_U \, d\lambda_- = \lambda_-(U)$$

Seja V um elemento de $\mathcal{U}$ fortemente contido em U. Logo existe um elemento K pertencente à $\mathcal{K}$ tal que $V \subset K \subset U$. Como $\mathcal{C}$ é uma parte densa de $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$, existe um elemento f de $\mathcal{C}$ tal que $1_V \leq f \leq 1_U$. Resulta daí que

$$\lambda(V) = \int 1_V \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda.$$

Assim,

(6.2.1) $$\lambda(V) \leq \int f \, d\lambda \leq \lambda_-(U)$$

Por definição temos:

$$\lambda_-(U) = \sup\{\lambda(V) : V \subset\subset U, \; V \in \mathcal{U}\},$$

logo dado $\varepsilon > 0$ e dado $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$, $V \subset\subset U$ tal que

(6.2.2) $$\lambda_-(U) - \varepsilon \leq \lambda(V)$$

Combinando (6.2.1) e (6.2.2) resulta que

$$\lambda_-(U) - \varepsilon \leq \int f \, d\lambda < \lambda_-(U)$$

donde se conclui que

$$\lambda_-(U) = \sup\{\int f \, d\lambda : f \leq 1_U; \; f \in \mathcal{C}\}$$

Procedemos de maneira análoga para concluir que

$$\lambda_+(U) = \inf\{\int f \, d\lambda : 1_U \leq f; \; f \in \mathcal{C}\}. \qquad \blacksquare$$

(6.3) <u>COROLÁRIO</u>: *Seja $\mathcal{C}$ uma parte densa de $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$. Para que dois elementos λ, μ de Λ sejam equivalentes no sentido de* (4.16) *é necessário e suficiente que*

$$\int f\, d\lambda = \int f\, d\mu$$

para todo elemento f *de* $\mathcal{C}$.

DEMONSTRAÇÃO:

Para provarmos a necessidade, basta aplicarmos a proposição (6.1).

Para a suficiência, aplicando a proposição (6.2) resulta:

$$\begin{aligned} \lambda_-(U) &= \sup\{ \int f\, d\lambda : f \leq 1_U ,\ f \in \mathcal{C}\} \\ &= \sup\{ \int f\, d\mu : f \leq 1_U ,\ f \in \mathcal{C}\} \\ &= \mu_-(U). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_+(U) &= \inf\{ \int f\, d\lambda : 1_U \leq f ,\ f \in \mathcal{C}\} \\ &= \inf\{ \int f\, d\mu : 1_U \leq f ,\ f \in \mathcal{C}\} \\ &= \mu_+(U). \end{aligned}$$

Assim, as funções λ e μ verificam as condições (5) e (6) da proposição (4.15), e portanto são equivalentes no sentido de (4.16).

O teorema seguinte trata-se da representação integral de um funcional definido em uma parte densa de $\mathcal{J} \cap \mathcal{S}$. Ele generaliza o teorema clássico de Riesz-Markov.

(6.4) TEOREMA: *Seja $\mathcal{C}$ uma parte densa de $\mathcal{J}\cap\mathcal{S}$, possuindo as seguintes propriedades:*

(a) *toda função pertencente à $\mathcal{C}$ é nula sobre o complementar de um elemento de $\mathcal{K}$.*

(b) *para todo elemento* f *de $\mathcal{C}$ e para todo número real* c *positivo, as funções* cf, $f\wedge c$ e $f - f\wedge c = (f - c)^+$ *pertencem à $\mathcal{C}$.*

Seja J *uma aplicação crescente de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}_+$ tal que, para todo elemento* f *de $\mathcal{C}$ e para todo número real* c *positivo, tem-se*

(1) $J(cf) = cJ(f)$;

(2) $J(f) = J(f\wedge c) + J(f - f\wedge c)$;

(3) $J(f) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} J(f\wedge n)$ (6)

Então existe uma função λ da classe Λ, tal que

$$J(f) = \int f\,d\lambda$$

para todo elemento f *de $\mathcal{C}$.*

O mesmo resultado é válido para uma função λ pertencente à Λ_- ; ela é então univocamente determinada.

DEMONSTRAÇÃO:

Designemos por λ, μ os elementos de Λ assim definidos:

(6) Observemos que esta última condição é automaticamente válida se as funções da classe $\mathcal{C}$ são limitadas.

$$\lambda(U) = \sup\{J(g) : g \leqslant 1_U \ , \ g \in \mathcal{C}\}$$

$$\mu(U) = \inf\{J(g) : 1_U \leqslant g \ , \ g \in \mathcal{C}\}$$

Afirmo que $\lambda \leqslant \mu$. De fato:

Sejam $A = \{g \in \mathcal{C}, \ g \leqslant 1_U\}$ e $B = \{f \in \mathcal{C}, \ 1_U \leqslant f\}$.Logo

$$g \leqslant 1_U \leqslant f.$$

Em virtude de J ser crescente, decorre que

$$J(g) \leqslant J(1_U) \leqslant J(f)$$

donde se conclui que

$$\sup_{g \in A} J(g) \leqslant J(1_U) \quad \text{e} \quad \inf_{f \in B} J(f) \geqslant J(1_U)$$

ou seja, $\lambda \leqslant \mu$.

Mostremos que também $\mu \leqslant \lambda_+$. Com efeito, dado um elemento U de $\mathcal{U}$, se V é um elemento de $\mathcal{U}$ tal que $U \subset\subset V$, existe uma função g da classe $\mathcal{C}$ verificando a relação

$$1_U \leqslant g \leqslant 1_V \ .$$

Decorre daí que

$$\mu(U) \leqslant J(g) \leqslant \lambda(V)$$

provando a asserção.

Observemos agora que a relação $\lambda \leqslant \mu \leqslant \lambda_+$ implica na equivalência de λ e μ (no sentido de (4.16)).

É suficiente agora mostrar que

$$\int f \, d\lambda \leqslant J(f) \leqslant \int f \, d\mu \ . \tag{6.4.1}$$

Resulta de (2.4) e (2.5) que para demonstrar a primeira das desigualdades é suficiente verificar que dada uma seqüência decrescente $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de elementos de $\mathcal{U}$, e coeficientes reais positivos c_i, tais que a função simples

$$g = \Sigma_{i=1}^{n} c_i 1_{U_i}$$

seja majorada por f, tem-se

$$\Sigma_{i=1}^{n} c_i \lambda(U_i) \leqslant J(f)$$

Vamos fazer a demonstração por indução sobre n.

Para n=1 temos

$$c_1 1_{U_1} \leqslant f \ , \ f \in \mathcal{C}$$

logo,

$$1_{U_1} \leqslant \frac{f}{c_1} \ , \ \frac{f}{c_1} \in \mathcal{C} \quad \text{por (b)}.$$

Pela definição de μ, vem

$$\mu(U_1) \leqslant J(\frac{f}{c_1})$$

$$\mu(U_1) \leqslant \frac{1}{c_1} J(f) \quad \text{por (1)}$$

Logo,

$$c_1 \mu(U_1) \leqslant J(f),$$

e como $\lambda \leqslant \mu$, vem

$$c_1 \lambda(U_1) \leqslant J(f).$$

Vamos supor o resultado verdadeiro para $(n - 1) \geq 1$ e demonstrá-lo para n.

Notemos que

$$\begin{cases} c_1 1_{U_1} = g \wedge c_1 \leq f \wedge c_1 \\ \Sigma_{i=1}^{n} c_i 1_{U_i} = (g - c_1)^+ \leq (f - c_1)^+ ; \end{cases}$$

donde aplicando a fórmula de recorrência,

$$\begin{cases} c_1 \lambda(U_1) \leq J(f \wedge c_1) \\ \Sigma_{i=2}^{n} c_i \lambda(U_i) \leq J((f - c_1)^+) \end{cases}$$

Somando as duas desigualdades, temos

$$\Sigma_{i=1}^{n} c_i \lambda(U_i) \leq J(f \wedge c_1) + J((f - c_1)^+)$$

e pela hipótese (2) vem

$$\Sigma_{i=1}^{n} c_i \lambda(U_i) \leq J(f),$$

ou seja,

$$\int g \, d\lambda \leq J(f).$$

Segue-se que o limite superior de $\int g \, d\lambda$ é menor ou igual a $J(f)$ e pela proposição (2.5) temos

$$\int f \, d\lambda \leq J(f).$$

Fica assim demonstrada a primeira das desigualdades de (6.4.1).

Para demonstrar a outra desigualdade vamos supor inicialmente que a função f seja limitada.

De acordo com a hipótese (a) existe um elemento K pertencente à $\mathcal{K}$ tal que f seja nula sobre o complementar de K.

Como $\mathcal{C}$ é densa, podemos determinar um elemento V de $\mathcal{U}$ e um elemento g de $\mathcal{C}$ tal que $K \subset V$, $1_V \leq g$ e por conseqüência $\mu(V) \leq J(g) < +\infty$.

Portanto, podemos aplicar à função f a proposição (2.6).

Consideremos uma sequência finita decrescente $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ de elementos de $\mathcal{U}$, e coeficientes reais positivos c_i tais que a função simples

$$g = \Sigma_{i=1}^{n} c_i 1_{U_i}$$

majore f.

Basta provarmos que

$$\Sigma_{i=1}^{n} c_i \mu(U_i) \geq J(f).$$

A prova será feita por indução sobre n.

Para n = 1, como $g \geq f$, temos

$$c_1 1_{U_1} \geq f \quad , f \in \mathcal{C}$$

logo,

$$1_{U_1} \geq \frac{f}{c_1} \quad , \frac{f}{c_1} \in \mathcal{C} \text{ por (b)}$$

Pela definição de λ, vem

$$\lambda(U_1) \geq J(\frac{f}{c_1})$$

Pela homogeneidade positiva de J resulta que

$$c_1\lambda(U_1) \geqslant J(f).$$

Como $\mu \geqslant \lambda$ e c_1 é um número real positivo, segue-se que

$$c_1\mu(U_1) \geqslant J(f).$$

Suponhamos a conclusão válida para $(n - 1)$, e provemos que vale para n.

Notemos que

$$\begin{cases} f \wedge c_1 \leqslant g \wedge c_1 = c_1 1_{U_1} \\ (f \wedge c_1)^+ \leqslant (g \wedge c_1)^+ = \Sigma_{i=2}^{n} c_i 1_{U_i} , \end{cases}$$

donde aplicando a hipótese de recorrência

$$\begin{cases} J(f \wedge c_1) \leqslant c_1\mu(U_1) \\ J((f \wedge c_1)^+) \leqslant \Sigma_{i=2}^{n} c_i\mu(U_i) \end{cases}$$

Somando as duas desigualdades acima, temos

$$J(f \wedge c_1) + J((f \wedge c_1)^+) \leqslant \Sigma_{i=1}^{n} c_i\mu(U_i) ,$$

e pela hipótese (2), vem

$$J(f) \leqslant \Sigma_{i=1}^{n} c_i\mu(U_i) ,$$

isto é,

$$\int g \, d\mu > J(f).$$

Segue-se que o limite inferior de $\int g\, d\mu$ é maior ou igual a $J(f)$, e pela proposição (2.6) temos

$$\int f\, d\mu \geqslant J(f).$$

Fica assim demonstrada a segunda desigualdade de (6.4.1) para o caso de f ser limitada.

Daremos agora a prova desta desigualdade para uma f qualquer.

Consideremos a sequência $(f \wedge n)_{n \in \mathbb{N}}$. Tal seqüência é limitada para cada $n \in \mathbb{N}$, monótona crescente e converge para f.

Aplicando o raciocínio empregado no caso precedente, temos

$$\int (f \wedge n)\, d\mu \geqslant J(f \wedge n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

donde

$$\sup_n \int (f \wedge n)\, d\mu \geqslant \sup_n J(f \wedge n).$$

Por (2.3)(d) e pela hipótese (3) deste teorema, segue-se que

$$\int f\, d\mu \geqslant J(f).$$

Conclui-se portanto a demonstração do teorema.

Vamos agora provar a unicidade da função λ da classe Λ_-.

Suponhamos que exista uma outra função μ da classe Λ_- tal que $J(f) = \int f\, d\mu$. Logo, $\int f\, d\mu = \int f\, d\lambda$ para toda função f da classe $\mathcal{C}$. Portanto, pelo corolário (6.3), λ e μ são equivalentes no sentido de (4.16). Assim, λ e μ satisfazem as condições equivalentes da proposição (4.15) e então $\lambda_- = \mu_-$. Mas pela regularidade interna das funções λ e μ, segue-se que $\lambda = \mu$, provando a unicidade desejada.

O Trabalho de De Giorgi-Letta [7] que analisamos em nossa dissertação adquire maior importância quando G.Greco [8], usando suas idéias principais, estabelece o conceito de Integral Monótona:

" Seja A um conjunto não vazio e seja $[0,+\infty]^A$ a classe das funções definidas em A e com valores em $[0,+\infty]$.

Dizemos que uma aplicação $T: \mathbb{B} \to [0,+\infty]$ onde $\mathbb{B} \neq \emptyset$, $\mathbb{B} \subset [0,+\infty]^A$ é uma " <u>integral monótona</u> sobre $\mathbb{B}$ " se para todo λ - pertencente ao intervalo $[0,+\infty)$ e para todo $\{f,g\} \subset \mathbb{B}$, valem as - seguintes propriedades:

(i) $\lambda g \in B$, $g \wedge \lambda \in \mathbb{B}$, $g \vee \lambda - \lambda \in \mathbb{B}$

(ii) $T(\lambda g) = \lambda T(g)$

(iii) $g \leq f \Rightarrow T(g) \leq T(f)$

(iv) $T(g) = T(g \wedge \lambda) + T(g \vee \lambda - \lambda)$

(v) $T(g) = \lim\limits_{n\to\infty} T(g \wedge n)$

(vi) $T(g) = \lim\limits_{n\to\infty} T(g \vee \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$.

Neste seu recente trabalho, Greco chega também por outras vias ao Teorema de Representação de Riesz, com a introdução de uma "medida generalizada", que desempenha o papel da medida de Radon na formulação clássica. Acreditamos que, com esses novos conceitos, seja também possível estudar problemas em aberto na Teoria da Estatística Robusta, onde as capacidades de Choquet são atualmente ferramentas fundamentais [10].

BIBLIOGRAFIA

[1] BASSANEZI, R.C —" Teoria da Medida e Integração."— Notas de Aulas — Londrina (1977).

[2] BOURBAKI, N.— *Topologie Génerale*, Cap.9,2º ed., Hermann, Paris (1958).

[3] BOURBAKI, N.— *Integration*, Cap.1-4, Hermann,Paris (1965).

[4] CAFIERO, F.—" Teoremi di prolongamento per le misure in - particolari reticoli di insiemi.", Ric di Mat., 5 (1956), 273-312.

[5] CAFIERO, F.— *Misura e integrazione*, Cremonese,Roma(1959).

[6] DIEUDONNÉ, J.— *Eléments d'analyses*, vol.2,Gauthier-Villars Paris (1968).

[7] DE GIORGI,E — G. LETTA.—" Une notion generale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble." Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, série IV, vol IV, 1, (1977).

[8] GRECO, G.—" Integral Monõtona" (1977) (a aparecer).

[9] HORN, A.— A. TARSKI," Measures in Boolean algebras",Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 467-497.

[10] HUBER, P.J.— *Théorie de L'inference Statistique Robuste*, Les Presses de L'Université de Montréal. (1968).

[11] LETTA, G.—" Il problema di Vitali-Lusin negli spazi perfettamente normali", Ric di Mat.,8 (1959),128-137.

[12] LETTA, G.—" Teoremi di prolongamento per misure in reticoli algebrici", Ric di Mat.,8 (1959), 300-319.

[13] LETTA, G.— *Teoria elementare dell'integrazione*, Boringhieri, Torino (1976).

[14] NEVEU, J.— *Bases mathématiques du calcul des probabilités* Masson, Paris (1964).

[15] PETTIS, B.J.—" On the extension of measures, Ann.of Math, 54 (1951), 187-197.

[16] PFANZAGL, J.— W. PIERLO.—" Compact systems of sets", Springer Lect. Notes, 16, Berlin (1966).

[17] RIESZ, F.— B.Sz. NAGY.— *Functional Analysis*— Frederick Ungar Publishing.— CO: New York, 110.

[18] ROYDEN, H.L.— *Real Analysis*, 2º ed., The Macmillan Company, New York (1968).