TOPOLOGIAS MISTAS DE ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS
E ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS

Maria Lúcia Bontorim de Queiroz

Orientador: *Prof. Dr. João Bosco Prolla*

Tese apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

ERRATA

Pag.	Linha	Onde se Lê:	Leia:
2	-8	F-convexo fechado	F-convexo, equilibrado e fechado
2	-4	EVT não arquimediano	EVT
3	4	B também é	B_1 também é
3	8	EVT normado não arquimediano	EVT normado
6	3	Se $g \in B$,	Se $g \in V$,
7	6	$\varepsilon/K+1$	$\varepsilon/k+1$
9	9	$i = 1,\ldots,n$	$i = 1,\ldots,n-1$
9	10	Tomemos $f_{n+1} = g_{k_{n+1}}$ sobre K e consideremos	Consideremos
15	-6	$\xi \in \mathfrak{S}$	$\xi \in \mathfrak{S}_1$
18	-1	(ver Prolla [17])	(ver Prolla [16])
19	3	(ver Prolla [17])	(ver Prolla [16])
27	7	$\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau])$	$\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau])$ (ver Prop. 1.22)
41	4	$\mu \in \mathfrak{S}_{sc}$	$\sigma \in \mathfrak{S}_{sc}$
43	3	$x \in T^{-1}(x) \in T^{-1}(\lambda V) = T^{-1}(V)$	$x \in T^{-1}(\lambda V) = \lambda T^{-1}(V)$
47	-5	localmente F-convexo	normado não arquimediano
49	-7	$\gamma(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{n} (U_k \cap B_k)$	$\gamma(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (U_k \cap B_k)$
51	-6	$x \in \sum_{k=1}^{p} (V_k \cap B_k) + \sum_{k+1}^{m} \ldots$	$x \in \sum_{k=1}^{p} (V_k \cap B_k) + \sum_{k=1}^{m} \ldots$
63	-5	Seja (E,τ) um espaço normado. Se existir ...	Se existir ...
64	6	$\mathcal{U} = \{U_n ; n \in 0,1,\ldots\}$	$\mathcal{U} = \{U_n ; n = 0,1,\ldots\}$
64	9	página 46	página 48
69	3	$V_n + V_n \subset U_{n+2}$	$V_n + V_n \subset U_{n+2} \cap V_{n-1}$
70	8	$+(U_{n_o} \cap B_{n_o}) + \ldots + (U_{n_o+2} \cap B_{n_o+2})$	$\ldots + (U_{n_o+2} \cap U_{n_o+2})$
74	-9	Portanto, se $\Vert\cdot\Vert$ for n.a., então $(E;\eta,\tau)$...	Portanto $(E;\eta,\tau)$ ...
76	-1	2.5(iii)	2.4(iii)
77	3	$\tilde{p}_n(x)$	$\tilde{p}(x)$
80	6	k=1	k=0

Pag.	Linha	Onde se Lê:	Leia:
96	2	$B_n B_{n+1}$	$B_k B_{n+1}$
96	5	$(V_k \cap B_k) \cap (V_{n+1} \cap B_{n+1})$	$(V_k \cap B_k) \cdot (V_{n+1} \cap B_{n+1})$
96	-7	$\bigcup_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (V_j \cap B_j)$	$\bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} (V_j \cap B_j)$
98	-2	a_n	λ_n
98	-3	a_n	λ_n
99	2	$p_n(x,y) \leq p_{j_n}(x) p_n(y)$	$p_n(x\ y) \leq p_{j_n}(x) p_{j_n}(y)$
101	9	$p(xy) \leq p(x)q(x)$	$p(xy) \leq p(x)q(y)$
101	-4	$b \in \mathbb{L}(\tau)$	$B \in \mathbb{L}(\tau)$
101	-7	Definição 4.8	Definição 4.3
102	10	U_n	V_n
103	-2	$x \in E$	$x \in U$
104	5	localmente m-bornívora	topológica
104	6	4.18	4.18; e portanto é localmente m-bornívora
110	-7	$US \cup SU$.	$US \cup SU$ onde S é a bola unitária de (E,η)
112	-1	$p(g_1, g_2)$	$p(g_1 \cdot g_2)$
122	1	Se $x_1 \neq x_2$	Se $x_1 = x_2$

Para Gilberto

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos ao Prof. Dr. João Bosco Prolla, pela orientação e incentivo recebidos.

Agradeço também a todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

TOPOLOGIAS MISTAS DE ESPAÇOS VETORIAIS TOPOLÓGICOS

E ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS

INTRODUÇÃO

Se E é um espaço vetorial munido de duas topologias de espaço vetorial topológico, digamos η e τ, a noção de γ-convergência é introduzida da seguinte maneira: diz-se que a rede $\{x_\alpha\}$ γ-converge para $x \in E$, e escreve-se $x_\alpha \xrightarrow{\gamma} x$, se $\{x_\alpha\}$ é τ-limitado e $x_\alpha \to x$ na topologia η. Surge então o problema de caracterizar a γ-convergência por meio de uma topologia de EVT sobre E, isto é, obter uma topologia de EVT sobre E de tal maneira que $x_\alpha \xrightarrow{\gamma} x$ se e somente se $x_\alpha \to x$ nessa topologia.

A noção de γ-convergência no caso real ou complexo foi introduzida e estudada por Fichtenholz, Alexiewicz e Semadeni no caso em que as topologias η e τ provêm de normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|^*$, respectivamente (Ver [1], [2], [3], e [8]). A solução do problema acima citado foi obtida por Wiweger [20] e [21] e Persson [15], que batizaram a mais fina das topologias de EVT que fornece a γ-convergência de "topologia mista". Tanto Wiweger como Persson consideraram topologias η e τ localmente convexas (E real ou complexo). O caso real ou complexo não localmente convexo foi estudado por Iyahen [10].

A utilização de uma noção de "limite-indutivo" foi introduzida por Garling [9].

Nesta tese estendemos o estudo das topologias mistas para o contexto dos espaços vetoriais topológicos sobre um anel de divisão não trivialmente valorizado $(F,|.|)$.

No § 1 caracterizamos a topologia mista $\gamma[\eta,\tau]$ como um exemplo de limite indutivo generalizado e estudamos alguns casos particulares, como por exemplo aquele em que (E,η) e (E,τ) são espaços localmente F-convexos no sentido de Monna [11], Van Tiel [19].

No § 2 caracterizamos sistemas fundamentais de vizinhanças da origem para a topologia mista $\gamma[\eta,\tau]$.

Os espaços de Saks reais ou complexos foram originariamente estudados por Orlicz [12] e [13] e Orlicz e Pták [14]. Neste caso τ é induzida por uma pseudo-norma ou F-norma (isto é, a condição de homogeneidade é substituída por outra mais fraca mas que garante continuidade da multiplicação por escalares), e portanto a topologia mista associada não é localmente convexa. Em sua monografia [7], Cooper adota em sua definição de espaços de Saks o ponto de vista localmente convexo: um espaço de Saks é uma terna $(E;\eta,\|.\|)$ onde E é um espaço vetorial (real ou complexo), η é uma topologia localmente convexa em E, e $\|.\|$ é uma verdadeira norma sobre E tal que a bola unitária $\{x \in E; \|x\| \leq 1\}$ é fechada e limitada na topologia η. No § 3 fazemos um breve estudo no presente contexto, e caracterizamos um sistema fundamental de seminormas que define a sua topologia mista $\gamma[\eta,\|.\|]$. Um dos principais exemplos é o de $C_b(X;E)$, espaço de todas as funções contínuas e limitadas, definidas num espaço localmente compacto e 0-dimensional X e com valores num espaço normado E, η é a topologia compacto-aberta e $\|.\|$ é a norma do supremo. Mostramos que nestas circunstâncias $\gamma[\eta,\|.\|]$ coincide com a topologia estrita

β definida em Soares [18] por meio de pesos induzidos por funções nulas no infinito.

Uma questão que naturalmente se põe é a seguinte: se E é uma álgebra sobre $(F,|.|)$ e η e τ são topologias de álgebras topológicas, em que circunstâncias a topologia mista $\gamma[\eta,\tau]$ é uma topologia de álgebra topológica. Esta questão e outras correlatas são estudadas no § 4 .

Finalmente no § 5 estudamos o espectro da topologia mista de $C_b(X;E)$ mencionada acima, quando E é uma álgebra normada sobre $(F,|.|)$. O caso real ou complexo foi estudado por Prolla [17] no contexto das álgebras de Nachbin.

§ 0 - PRELIMINARES

Em todo este trabalho, consideraremos espaços vetoriais sobre um anel de divisão não trivialmente valorizado $(F, |\cdot|)$.

DEFINIÇÃO 0.1: Um subconjunto A de um espaço vetorial E é dito *F-convexo* se para quaisquer x, y e z em A e para quaisquer α, β e γ em F com $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| \leq 1$ e $|\gamma| \leq 1$, ocorrer $\alpha x + \beta y + \gamma z \in A$. Se (E,τ) é um EVT que possui uma base de vizinhanças F-convexas de origem, então (E,τ) é chamado um EVT *localmente F-convexo.*

DEFINIÇÃO 0.2: Um subconjunto A de um espaço vetorial E é dito *semiconvexo* se existir um escalar $\lambda \in F^*$ tal que $A + A \subset \lambda A$. Se (E,τ) é um EVT que possui um sistema fundamental de vizinhanças semiconvexas da origem, dizemos que (E,τ) é um EVT *localmente semiconvexo.*

PROPOSIÇÃO 0.3: *Se* (E,τ) *é um* EVT *localmente* F-*convexo, então* (E,τ) *é localmente semiconvexo.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{U}$ uma base de vizinhanças F-convexas da origem em E e seja $U \in \mathcal{U}$. Vamos mostrar que U é semiconvexa. Como $0 \in U$, se x e y então em U, temos $x + y = 1\cdot x + 1\cdot y - 1\cdot 0 \in U$. Logo $U + U \subset U$ e portanto (E,τ) é localmente semiconvexo.

DEFINIÇÃO 0.4: Dizemos que um EVT (E,τ) é *quase-convexo* se existir um conjunto $\mathcal{F}$ de partes equilibradas, semiconvexas e τ-limitadas de E formando um sistema fundamental de subconjuntos τ-limitados de E.

Observamos que existindo $\mathcal{F}$ como acima, é possível ser encontrada uma família $\mathcal{F}'$ cujos elementos são também τ-fechados.

PROPOSIÇÃO 0.5: *Se* (E,τ) *é um* EVT *localmente* F-*convexo, então* (E,τ) *é quase-convexo.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B \in \mathbb{L}(\tau)$ e seja $B_1 \subset E$ sua envoltória F-convexa e equilibrada. Seja V uma vizinhança fechada e F-convexa da origem em (E,τ).

Então existe $\delta > 0$ tal que $B \subset \lambda V$ sempre que $\lambda \in F^*$ com $|\lambda| \geq \delta$.

Como λV é F-convexo, fechado e contém B, temos $B_1 \subset \lambda V$. Portanto $B_1 \in \mathbb{L}(\tau)$.

Além disso, como B_1 é F-convexo, é também semiconvexo. Concluimos então que (E,τ) é quase convexo.

PROPOSIÇÃO 0.6: *Se* (E,τ) *é um* EVT *não arquimediano localmente limitado, então* (E,τ) *é quase convexo.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $B \in \mathbb{L}(\tau)$ e V uma vizinhança limitada, fechada e equilibrada da origem em (E,τ). Então existe $\delta > 0$ tal que $B \subset \lambda V$ sempre que $|\lambda| \geq \delta$, $\lambda \in F^*$. Seja $\lambda_o \in F^*$ com essa propriedade e seja $B_1 = \lambda_o V$. Temos $B \subset B_1$, $B_1 \subset \mathbb{L}(\tau)$, pois V é τ-limitada, e B_1 é fechado e equilibrado.

Como V é uma vizinhança da origem em (E,τ), B também é, e $B_1 + B_1 \in \mathbb{L}(\tau)$. Logo existe $\delta_1 > 0$ tal que para qualquer $\mu \in F^*$ com $|\mu| \geq \delta_1$, $B_1 + B_1 \subset \mu B_1$. Portanto B_1 é semiconvexo. Assim, (E,τ) é um EVT quase-convexo.

COROLÁRIO 0.7: *Se* (E,τ) *é um* EVT *normado não arquimediano então* (E,τ) *é quase-convexo.*

DEFINIÇÃO 0.8: Uma sequência $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos não vazios de um espaço vetorial E é uma *corda* em E se:

a) para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n é equilibrado;

b) para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n é absorvente;

c) $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

d) para algum $\lambda \in F$, com $0 < |\lambda| < 1$ (e portanto para todo $\lambda \in F^*$), dado $U_n \in \mathcal{U}$, existe $U_m \in \mathcal{U}$, $m > n$, tal que $U_m \subset \lambda U_n$.

U_n é chamado o *n-ésimo nó* de $\mathcal{U}$.

DEFINIÇÃO 0.9: Uma corda $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em um EVT (E,τ) é dita τ-*topológica* se para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n é uma τ-vizinhança da origem em E.

DEFINIÇÃO 0.10: Uma corda $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um EVT (E,τ) é dita τ-*bornívora* se, para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n é um subconjunto τ-bornívoro de E.

DEFINIÇÃO 0.11: Seja E um espaço vetorial e sejam τ e μ duas topologias de EVT sobre E. Dizemos que a topologia μ é τ-*fechada* se μ admite um sistema fundamental de vizinhanças τ-fechadas da origem.

DEFINIÇÃO 0.12: Um espaço topológico (X,τ) é chamado 0-*dimensional* se cada ponto de X possui uma base de τ-vizinhanças abertas e fechadas.

DEFINIÇÃO 0.13: Seja X um espaço localmente compacto e 0-dimensional. Denotaremos por $C_b(X;F)$ o espaço das funções contínuas e limitadas definidas em X com valores em F. Definiremos sobre $C_b(X;F)$ as seguintes topologias, que serão eventualmente abordadas no decorrer deste trabalho:

1) a *topologia da convergência uniforme sobre* X, definida pela norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$ e denotada por σ;

2) a *topologia da convergência uniforme sobre as partes compactas de* X, definida pelas seminormas $\|f\|_{K,\infty}$ ou seja, $p_K(f) = \sup\limits_{x\in K} |f(x)|$ onde K percorre a família de todos os subconjuntos compactos de X, denotada por κ;

3) a *topologia estrita*, denotada por β, definida pelas seminormas $p_\phi(f) = \sup\limits_{x\in X} |\phi(x)f(x)|$, onde ϕ percorre o espaço $C_o(X;F)$ das funções de $C_b(X;F)$ nulas no infinito.

As topologias κ, β e σ satisfazem: (a) $\kappa \subset \beta \subset \sigma$.

Para mostrarmos que $\kappa \subset \beta$, consideremos a κ-vizinhança da origem. $W = \{f \in C_b(X;F);\ \sup\limits_{x\in K} |f(x)| < \varepsilon\}$. Mas dado o compacto K de X, existe um compacto-aberto V tal que $K \subset V$. A função característica φ de V pertence a $C_o(X;F)$ e é tal que $\varphi(x) = 1$, se $x \in K$ e $\varphi(x) = 0$ se $x \notin V$. Seja $\Phi = \{\varphi\}$. Considerando a β-vizinhança da origem dada por

$$U_{\Phi,\varepsilon} = \{f \in C_b(X;F) : p_\varphi(f) < \varepsilon\},$$

temos que se $g \in U_{\Phi,\varepsilon}$, então

$$\sup_{x\in K} |\varphi(x)g(x)| < \varepsilon.$$

Portanto, se $x \in K$,

$$|g(x)| = |\varphi(x)g(x)| < \varepsilon,$$

do que segue que $g \in W$.

Vamos mostrar agora que $\beta \subset \sigma$. Seja

$$\Phi = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\} \subset C_o(X;F).$$

Consideremos a β-vizinhança da origem dada por

$$U_{\Phi,\varepsilon} = \{f \in C_b(X;F) : \max_{1\le i\le n} \sup_{x\in X} |\varphi_i(x)f(x)| < \varepsilon\}$$

e consideremos a σ-vizinhança da origem dada por

$$V = \{f \in C_b(X;F) : \|f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{M}\},$$

onde

$$M = \max\{\|\varphi_1\|_\infty, \ldots, \|\varphi_n\|_\infty\}.$$

Se $g \in B$, temos, para todo $x \in X$,

$$|\varphi_i(x)g(x)| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Logo $g \in U_{\Phi,\varepsilon}$

(b) β *e* κ *coincidem sobre os conjuntos* σ-*limitados.*

Com efeito, seja

$$B = \{f \in C_b(X;F) : \|f\|_\infty \leq M\} \in \mathbb{L}(\sigma).$$

Por (a), temos $\kappa \subset \beta$ sobre B. Falta mostrar que sobre B, $\beta \subset \kappa$. Seja $A \subset B$ um conjunto $\hat{\beta}$-aberto não vazio e seja $f \in A$. Então existe uma β-vizinhança $U_{\Phi,\varepsilon}$ da origem tal que

$$(f + U_{\Phi,\varepsilon}) \cap B \subset A \subset B,$$

onde

$$\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset C_o(X;F).$$

Seja $k \geq 1$ tal que $\|\varphi_i\| \leq k$, $i = 1, \ldots, n$.

Para cada $i = 1,\dots,n$, consideremos o conjunto compacto

$$K_i = \{x \in X : |\varphi_i(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2M+k}\}.$$

Seja $K = K_1 \cap \dots \cap K_n$, que é um conjunto compacto, onde temos, para todo $x \in K$, $|\varphi_i(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2M+k}$, para todo $i = 1,\dots,n$.

Seja

$$V = \{f \in C_b(X;F) : \sup_{x \in K} |f(x)| < \frac{\varepsilon}{K+1}\}.$$

Se $h \in (f + V) \cap B$, temos

$$g = h - f \in V \quad \text{e} \quad \|g\|_\infty = \|h - f\|_\infty \leq 2M,$$

pois h e f pertencem a B.

Vamos mostrar que $g \in U_{\Phi,\varepsilon}$. Seja $x \in X$. Para todo $i = 1,\dots,n$, temos

$$|\varphi_i(x) g(x)| \leq k \cdot \frac{\varepsilon}{k+1} < \varepsilon, \quad \text{se} \quad x \in K;$$

e

$$|\varphi_i(x) g(x)| < \frac{\varepsilon}{2M+k} \cdot 2M < \varepsilon, \quad \text{se} \quad x \notin K.$$

Logo, $h \in (f + U_{\Phi,\varepsilon}) \cap B$, o que completa a prova.

DEFINIÇÃO 0.14: Se um corpo não arquimediano não trivialmente valorizado $(F, |\cdot|)$ for um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff, então será chamado um *corpo local*.

TEOREMA 0.15: *Seja* $(F, |\cdot|)$ *um anel de divisão não trivialmente valorizado não arquimediano. Seja* $(E, \|\cdot\|)$ *um espaço de Banach sobre* $(F, |\cdot|)$. *Sejam* X *um espaço* T_1 *0-dimensional e* K *um subconjunto compacto de* X. *Então, para toda função contínua* $f : K \to E$, *existe uma função* $\tilde{f} \in C_b(X;E)$ *tal que* $\tilde{f}/K = f$ *e* $\|f\|_\infty = \|f\|_{K,\infty}$.

Para uma demonstração deste teorema, precisaremos dos seguintes lemas:

LEMA 0.16: *Sejam* F, E, X *e* K *como no Teorema 0.15. Então* $C_b(X;E)/K$ *é fechado em* $C(K;E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja g uma função de $C_b(K;E)$ pertencente ao fecho uniforme de $C_b(X;E)/K$ e seja $\{g_n ; n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de funções em $C_b(X;E)/K$ que converge uniformemente para g sobre K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos a função $\tilde{g}_n \in C_b(X;E)$ tal que $\tilde{g}_n/K = g_n$. Queremos mostrar que existe $f \in C_b(X;E)$ tal que $f/K = g$.

Consideremos uma subsequência de funções g_{k_n} de $\{g_n ; n \in \mathbb{N}\}$ tais que $\|g_{k_{n+1}} - g_{k_n}\| < \|\mu_n\|$, onde $\{\mu_n\}$ é uma sequência em E convergente a zero. Afirmamos que existe sequência $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ em $C_b(X;E)$ satisfazendo:

(1) $f_n/K = g_{k_n}$

(2) $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \|u_n\|$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Vamos supor encontradas $f_1, \ldots, f_n$ em $C_b(X;E)$ satisfazendo (1) e (2), isto é, $f_i/K = g_{k_i}$, $i = 1, \ldots, n$ e

$$\|f_{i+1} - f_i\|_\infty \leq \|\mu_i\|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Tomemos $f_{n+1} = g_{k_{n+1}}$ sobre K e consideremos o conjunto aberto e fechado

$$G_n = (\tilde{g}_{k_{n+1}} - f_n)^{-1}(B(0, \|\mu_n\|))$$

em X.

É claro que $K \subset G_n$, pois, sobre K,

$$\|\tilde{g}_{k_{n+1}} - f_n\| = \|g_{k_{n+1}} - g_{k_n}\| \leq \|\mu_n\|$$

Vamos definir então a função f_{n+1} de X em E por

$$f_{n+1}(x) = \tilde{g}_{k_{n+1}}(x), \quad \text{se} \quad x \in G_n ;$$

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \mu_n, \quad \text{se} \quad x \in X \setminus G_n,$$

que é contínua, porque G_n é aberto e fechado, e é limitada.

Em G_n, temos

$$\|f_{n+1}-f_n\| \leq \|\mu_n\|$$

pela definição.

Em $X \setminus G_n$, temos

$$\|f_{n+1}-f_n\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_n(x)+\mu_n-f_n(x)\| = \|\mu_n\| .$$

Disto e da construção de f_{n+1} decorre que f_{n+1} satisfaz as condições (1) e (2). Como $C_b(X;E)$ é completo, a série

$$f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}-f_n) ,$$

converge uniformemente a uma função $f \in C_b(X;E)$.

Para cada $x \in K$, temos:

$$f(x) = \lim_{x \to +\infty} f_{n+1}(x) = \lim_{x \to +\infty} g_{n+1}(x) = g(x) .$$

Logo $f/K = g/K$, o que mostra que f é a função procurada.

LEMA 0.17: *Sejam* F, E, X *e* K *como no Teorema 0.15. Então* $C_b(X;E)/K$ *é denso em* $C(K,E)$.

DEMONSTRAÇÃO: Chamando $W = C_b(X;E)/K$, temos que $W(x) = E$, para todo $x \in K$, pois W contém as constantes. Além disso, o fato de X ser T_1 e 0-dimensional, implica que a subálgebra W de $C(K;E)$ separa pontos em K. Estamos pois nas condições do Teorema 3.5 [18] de onde segue o resultado.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 0.15: Consideremos uma função $f : K \to E$ contínua. Dos Lemas 0.16 e 0.17 segue que existe uma função $h \in C_b(X;E)$ tal que $h/K = f$.

O conjunto $Y = h^{-1}(B(0, \|f\|_\infty))$ é aberto e fechado, por ser h contínua e $(E, \|\cdot\|)$ não arquimediano e temos claramente $K \subset Y$.

Tomando então

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{se } x \in Y \text{ e} \\ 0, & \text{se } x \in X \setminus Y, \end{cases}$$

temos $\tilde{f} \in C_b(X;E)$, $\tilde{f}/K = f$ e $\|\tilde{f}\|_\infty = \|f\|_{K,\infty}$, como queríamos.

DEFINIÇÃO 0.18: Seja E um espaço vetorial e sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E. A terna $(E;\eta,\tau)$ é *um espaço vetorial bitopológico* (EVBT) se $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\eta)$.

OBSERVAÇÃO: Esta nomenclatura foi introduzida por Iyahen [10].

EXEMPLO 0.19: Se $\eta \subset \tau$ então $(E;\eta,\tau)$ é um EVBT. Em particular, $(C_b(X;F);\kappa,\sigma)$ é um EVBT. Outros exemplos serão vistos nos parágrafos 1 e 2.

§1 - A TOPOLOGIA MISTA $\gamma[\eta,\tau]$

Seja $\{(E_\lambda,\tau_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$ uma família de espaços vetoriais topológicos sobre o mesmo anel de divisão não trivialmente valorizado $(F,|\cdot|)$. Seja E um espaço vetorial sobre $(F,|\cdot|)$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja $i_\lambda : E_\lambda \to E$ uma transformação linear. A *topologia limite indutivo* τ *sobre* E *com respeito à família* $\{(E_\lambda,\tau_\lambda,i_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$, (ver Balbi [4]) é a mais fina topologia de EVT sobre E tal que cada transformação i_λ é contínua. O limite indutivo desta família será denotado por $\underrightarrow{\mathrm{Lim}}\{(E_\lambda,\tau_\lambda,i_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$. Como em Garling [9], generalizando esta definição, temos:

DEFINIÇÃO 1.1: Para cada $\lambda \in \Lambda$, seja M_λ um subconjunto de E_λ. Seja j_λ a restrição de i_λ a M_λ. A *topologia limite indutivo generalizado* induzida sobre E pela família

$$\{(E_\lambda,\tau_\lambda,i_\lambda,M_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$$

é a mais fina das topologias de EVT sobre E para a qual cada uma das transformações j_λ, de $(M_\lambda,\hat{\tau}_\lambda)$ em E, é contínua, onde $\hat{\tau}_\lambda$ denota a topologia induzida sobre M_λ por τ_λ.

Para construir essa topologia, consideremos o conjunto

$$\mathfrak{S} = \{\tau_\alpha\ ;\ \alpha \in I\}$$

de todas as topologias de EVT sobre E para as quais cada transformação j_λ é contínua. Se (E,τ) é o limite indutivo

$$(E,\tau) = \varinjlim\{(E_\lambda,\tau_\lambda,i_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\},$$

então para cada $\lambda \in \Lambda$, i_λ é contínua e portanto $j_\lambda = i_\lambda/M_\lambda$ é contínua também, isto é, $\tau \in \mathfrak{S}$ e portanto $\mathfrak{S} \neq \phi$.

Seja $\xi = \sup\{\tau_\alpha\ ; \alpha \in I\}$. Por Bourbaki [5] ξ é uma topologia de EVT sobre E, já que todas as τ_α o são. Afirmamos que $\xi \in \mathfrak{S}$. Com efeito, seja V um aberto básico em ξ, isto é,

$$V = \cap\ \{V_\alpha;\ \alpha \in J\},$$

onde J é um subconjunto finito de I e para cada $\alpha \in J$, V_α é um τ_α-aberto. Para cada $\lambda \in \Lambda$ temos

$$j_\lambda^{-1}(V) = \bigcap_{\alpha\in J} j_\lambda^{-1}(V_\alpha).$$

Agora, cada conjunto $j_\lambda^{-1}(V_\alpha)$ é $\hat{\tau}_\lambda$-aberto, pois $\tau_\alpha \in \mathfrak{S}$. Então, para cada $\lambda \in \Lambda$, $j_\lambda^{-1}(V)$ é aberto em M_λ na topologia $\hat{\tau}_\lambda$ e portanto j_λ é contínua. Logo $\xi \in \mathfrak{S}$.

OBSERVAÇÃO 1.2: Como já observamos acima, a topologia limite indutivo τ está em $\mathfrak{S}$. Isto mostra que

$$\tau \subset \xi.$$

OBSERVAÇÃO 1.3: Consideremos (G,μ) um EVT e E um espaço vetorial sobre o mesmo anel de divisão $(F,|\cdot|)$. Consideremos a aplicação $f : E \to (G,\mu)$. A topologia imagem inversa de μ pela função f em E, denotada por $f^{-1}(\mu)$ é aquela cujos abertos são os subconjuntos $f^{-1}(A)$, $A \in \mu$. É claro que a topologia $f^{-1}(\mu)$ torna f contínua e é a menos fina das topologias em E para as quais isso acontece.

Considerando agora a transformação

$$j_\lambda : M_\lambda \to (E,\xi),$$

temos, pelo precedente, que

$$j_\lambda : (M_\lambda, j_\lambda^{-1}(\xi)) \to (E,\xi)$$

é contínua e portanto

$$j_\lambda^{-1}(\xi) \subset \hat{\tau}_\lambda.$$

EXEMPLO 1.4: Seja (E,η) um espaço vetorial topológico. Para cada $\lambda \in \Lambda$ seja M_λ um subconjunto de E e seja $\tau_\lambda = \eta$. Consideremos a transformação identidade i_λ em E e j_λ a inclusão de $(M_\lambda,\hat{\eta})$ em E. Neste caso, se ξ é a topologia limite indutivo generalizado sobre E com respeito à família

$$\{(E,\eta,i_\lambda,M_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$$

temos as seguintes propriedades:

(1) $\eta \subset \xi$

DEMONSTRAÇÃO: Esta propriedade é claramente satisfeita, pois ξ é o supremo de $\mathfrak{S}$ e $\eta \in \mathfrak{S}$.

(2) $(M_\lambda, \hat{\xi}) = (M_\lambda, \hat{\eta})$ *para cada* $\lambda \in \Lambda$.

DEMONSTRAÇÃO: Por (1), temos $\hat{\eta} \subset \hat{\xi}$.

Reciprocamente, se A é $\hat{\xi}$-aberto em M_λ, então $A = V \cap M_\lambda$, onde V é um ξ-aberto em E. Então $\hat{\xi} \subset j_\lambda^{-1}(\xi)$ para cada $\lambda \in \Lambda$. De (B), vem que $\hat{\xi} \subset \hat{\eta}$.

(3) ξ *é a mais fina topologia de* EVT *sobre* E *tal que* (2) *é verdadeira.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathfrak{S}_1$ o conjunto de todas as topologias τ de EVT sobre E tais que

$$(M_\lambda, \hat{\tau}) = (M_\lambda, \hat{\eta}), \text{ para todo } \lambda \in \Lambda \quad (*).$$

Por (2), $\xi \in \mathfrak{S}$. Logo $\mathfrak{S}_1 \neq \phi$.

Seja $\xi' = \sup \mathfrak{S}_1$. É claro que $\xi \subset \xi'$.

Suponhamos agora que $\tau \in \mathfrak{S}_1$. Então

$$(M_\lambda, \hat{\tau}) = (M_\lambda, \hat{\eta}),$$

para cada $\lambda \in \Lambda$, donde

$$j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\eta}) \to (E, \tau)$$

é contínua para cada $\lambda \in \Lambda$. De fato, seja A um subconjunto τ-aberto de E. Para cada $\lambda \in \Lambda$, $j_\lambda^{-1}(A) = A \cap M_\lambda$ é um subconjunto $\hat{\tau}$-aberto em M_λ e por (*), $j_\lambda^{-1}(A)$ é $\hat{\eta}$-aberto em M_λ. Assim, $\tau \in \mathfrak{S}$ e portanto $\tau \subset \xi$.

Logo, $\xi' \subset \xi$.

DEFINIÇÃO 1.5: Seja E um espaço vetorial sobre $(F,|\cdot|)$. Sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E. A *topologia mista* definida em E por η e τ, indicada por $\gamma[\eta,\tau]$, é a topologia limite indutivo generalizado induzida sobre E pela família

$$\{(E_B,\tau_B,i_B,M_B);\ B \in \mathbb{L}(\tau)\}$$

onde, para cada $B \in \mathbb{L}(\tau)$, $E_B = E$, $\tau_B = \eta$, i_B é a identidade em E e $M_B = B$.

OBSERVAÇÃO 1.6: Da Definição 1.5 e do Exemplo 1.4 segue-se que a topologia mista $\gamma[\eta,\tau]$ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\eta \subset \gamma[\eta,\tau]$

(b) $\gamma[\eta,\tau]$ e η coincidem nos conjuntos τ-limitados de E.

(c) $\gamma[\eta,\tau]$ é a mais fina das topologias de EVT sobre E que gozam da propriedade (b), isto é, se μ é uma topologia de EVT sobre E que coincide com η nos conjuntos τ-limitados, então $\mu \subset \gamma[\eta,\tau]$.

Seja E um espaço vetorial sobre $(F,|\cdot|)$. Sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E e $\mathcal{B} = \{B_\lambda;\ \lambda \in \Lambda\} \subset \mathbb{L}(\tau)$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, sejam $E_\lambda = E$ e $\tau_\lambda = \eta$. Seja ainda $i_\lambda : E_\lambda \to E$ a aplicação identidade e j_λ a restrição de i_λ a B_λ. Indicaremos por $\gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}]$ a topologia limite indutivo generalizado induzida em E pela família $\{(E_\lambda,\tau_\lambda,i_\lambda,B_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}$. Claramente, temos

$$\gamma[\eta,\tau;\mathbb{L}(\tau)] = \gamma[\eta,\tau].$$

PROPOSIÇÃO 1.7: *Nas notações acima, se* $F = \{L_\delta;\ \delta \in \Delta\}$ *é um sistema fundamental de subconjuntos* τ*-limitados de* E, *então*

$$\gamma[\eta,\tau;F] \subset \gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}].$$

DEMONSTRAÇÃO: Pela definição de $\gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}]$, basta mostrar que $j_\lambda : (B_\lambda,\hat{\eta}) \to (E,\gamma[\eta,\tau;F])$ é contínua para cada $B_\lambda \in \mathcal{B}$. Como F é um sistema fundamental de τ-limitados, dado $B_\lambda \in \mathcal{B}$, existe $L_\delta \in F$ tal que $B_\lambda \subset L_\delta$. Pela definição de $\gamma[\eta,\tau;F]$, a transformação $j_\delta : (L_\delta;\hat{\eta}) \to (E,\gamma[\eta,\tau;F])$ é contínua e portanto $j_\lambda = j_\delta/B$ também é.

Logo $\gamma[\eta,\tau;F] \subset \gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}]$.

COROLÁRIO 1.8: *Se* F *e* F' *são dois sistemas fundamentais de subconjuntos* τ*-limitados de* E, *então*

$$\gamma[\eta,\tau;F] = \gamma[\eta,\tau;F'] = \gamma[\eta,\tau].$$

Em particular, $\gamma[\eta,\tau;F] = \gamma[\eta,\tau]$ *para todo sistema fundamental* F *de* τ*-limitados.*

OBSERVAÇÃO 1.9: Mostramos acima que a topologia mista $\gamma[\eta,\tau]$ está determinada por qualquer sistema fundamental F de subconjuntos τ-limitados de E, no sentido de que $\gamma[\eta,\tau;F] = \gamma[\eta,\tau]$.

PROPOSIÇÃO 1.10: *Seja* E *um espaço vetorial sobre* $(\mathbb{F},|\cdot|)$. *Sejam* η, τ *e* ξ *topologias de* EVT *sobre* E. *Se* $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\xi)$ *então* $\gamma[\eta,\xi] \subset \gamma[\eta,\tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Por definição, a topologia $\gamma[\eta,\xi]$ coincide com η nos elementos de $\mathbb{L}(\xi)$ e portanto nos elementos de $\mathbb{L}(\tau)$. Mas $\gamma[\eta,\tau]$ é a mais fina das topologias de EVT sobre E que coincidem com η nos elementos de $\mathbb{L}(\tau)$. Logo $\gamma[\eta,\xi] \subset \gamma[\eta,\tau]$.

COROLÁRIO 1.11: *Se* $\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{L}(\xi)$ *então* $\gamma[\eta,\tau] = \gamma[\eta,\xi]$.

COROLÁRIO 1.12: *Se* $\xi \subset \tau$, *então* $\gamma[\eta,\xi] \subset \gamma[\eta,\tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Do fato de $\xi \subset \tau$ segue que $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\xi)$, e o resultado segue da Proposição 1.10.

COROLÁRIO 1.13: *Se* τ^t *denota a topologia tonelada associada a* τ *em* E *(ver Prolla* [17]*) então* $\gamma[\eta,\tau] \subset \gamma[\eta,\tau^t]$.

DEMONSTRAÇÃO: O resultado é verdadeiro, pois $\tau \subset \tau^t$.

COROLÁRIO 1.14: *Seja* τ^β *a topologia bornológica associada a* τ *(ver Prolla [17]). Se* σ *é uma topologia de* EVT *sobre* E *tal que* $\tau \subset \sigma \subset \tau^\beta$, *então* $\gamma[\eta,\sigma] = \gamma[\eta,\tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\tau \subset \sigma \subset \tau^\beta$, então $\mathbb{L}(\tau^\beta) \subset \mathbb{L}(\sigma) \subset \mathbb{L}(\tau)$. Mas da construção de τ^β (ver Prolla [16]), $\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{L}(\tau^\beta)$. Logo $\mathbb{L}(\sigma) = \mathbb{L}(\tau)$, e portanto $\gamma[\eta,\sigma] = \gamma[\eta,\tau]$.

COROLÁRIO 1.15: *Se* τ^{q^t} *é a topologia quase-tonelada associada a* τ *em* E *(ver Balbi [4]), então* $\gamma[\eta,\tau^{q^t}] = \gamma[\eta,\tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Da Proposição 6.6 Balbi [4], segue que $\tau \subset \tau^{q^t} \subset \tau^\beta$. O resultado segue então do Corolário 1.14.

PROPOSIÇÃO 1.16: *Nas notações da Definição 1.1, seja* ξ *a topologia limite indutivo generalizado induzida em* E *pela família*

$$\{(E_\lambda,\tau_\lambda,i_\lambda,M_\lambda);\ \lambda \in \Lambda\}.$$

Seja (G,ν) *um* EVT *sobre o mesmo anel de divisão* $(F,|\cdot|)$. *Uma transformação linear* $T: E \to G$ *pertence ao espaço* $\mathcal{L}((E,\xi),(G,\nu))$ *se, e somente se, para cada* $\lambda \in \Lambda$, *a aplicação*

$$T \circ j_\lambda : (M_\lambda,\hat{\tau}_\lambda) \to (G,\nu)$$

é contínua. Mais ainda, entre todas as topologias de EVT *sobre* E, ξ *é a única com essa propriedade.*

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a transformação $T \in \mathcal{L}((E,\xi);\ (G,\nu))$. Para cada $\lambda \in \Lambda$, temos $(M_\lambda,\hat{\tau}_\lambda) = (M_\lambda,\hat{\xi})$, o que torna a aplicação $j_\lambda : (M_\lambda,\hat{\tau}_\lambda) \to (E,\xi)$ contínua. Disto e da continuidade de T, decorre que a aplicação $T \circ j_\lambda : (M_\lambda,\hat{\tau}_\lambda) \to (G,\nu)$ é contínua.

Seja agora $T : E \to G$ uma transformação linear tal que para cada $\lambda \in \Lambda$, a aplicação $T \circ j_\lambda$ é contínua. Como T leva (E,ξ) em (G,ν), T é contínua se, e somente se, tivemos $\mu \subset \xi$, onde $\mu = T^{-1}(\nu)$. Logo basta provarmos que $\mu \in \mathfrak{S}$ isto é, que

$$j_\lambda : (M_\lambda,\hat{\tau}_\lambda) \to (E,\mu)$$

é contínua. Isto segue do fato que todo subconjunto μ-aberto de E é do tipo $T^{-1}(A)$, onde A é ν-aberto em G.

Vamos mostrar a segunda parte. Para isso consideremos o conjunto $\mathfrak{S}$ de todas as topologias τ de EVT sobre E tais que para cada $\lambda \in \Lambda$, a aplicação $j_\lambda : (M_\lambda,\hat{\tau}_\lambda) \to (E,\tau)$ é contínua. Seja $\mathfrak{S}'$ o conjunto de todas as topologias τ' de EVT sobre E tais que para todo EVT (G,ν) e para toda aplicação linear $T : E \to G$, $T \in \mathcal{L}((E,\tau'),(G,\nu))$ se, e somente se, a aplicação

$$T \circ j_\lambda : (M_\lambda,\hat{\tau}_\lambda) \to (G,\nu)$$

é contínua.

Observemos incialmente que $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$. Com efeito, seja $\tau' \in \mathfrak{S}'$. Tomando $G = E$, $\nu = \tau'$ e considerando T a identidade sobre E, T pertence então a $\mathcal{L}((E,\tau'), (G,\nu))$. Resulta que

$$T \circ j_\lambda = j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda) \to (E,\tau')$$

é contínua, para todo $\lambda \in \Lambda$. Logo $\tau' \in \mathfrak{S}$.

Como $\xi = \sup \mathfrak{S}$, resulta então que

(1) $\tau' \subset \xi$, para todo $\tau' \in \mathfrak{S}'$.

Afirmamos agora que para qualquer $\tau' \in \mathfrak{S}'$ e qualquer $\tau \in \mathfrak{S}$, temos $\tau \subset \tau'$, ou seja $Id : (E,\tau') \to (E,\tau)$ é contínua. Com efeito, seja $\tau' \in \mathfrak{S}'$ e $\tau \in \mathfrak{S}$. Como $\tau \in \mathfrak{S}$, temos que

$$Id \circ j_\lambda = j_\lambda : (M_\lambda, \hat{\tau}_\lambda) \to (E,\tau)$$

é contínua. Mas $\tau' \in \mathfrak{S}'$, logo decorre daí que $Id:(E,\tau') \to (E,\tau)$ é contínua e portanto $\tau \subset \tau'$.

Aplicando a observação anterior à topologia $\xi = \sup \mathfrak{S}$, temos

(2) $\xi \subset \tau'$, para todo $\tau' \in \mathfrak{S}'$.

De (1) e (2) vem que $\mathfrak{S}' = \{\xi\}$, como queríamos.

COROLÁRIO 1.17: *Seja* E *um espaço vetorial sobre* $(F,|\cdot|)$. *Sejam* η *e* τ *duas topologias de* EVT *sobre* E *e* (G,ν) *um* EVT *sobre*

$(F,|\cdot|)$. *Uma transformação linear* $T : E \to G$ *pertence ao espaço* $\mathcal{L}((E, \gamma[\eta,\tau]),(G,\nu))$ *se, e somente se, sua restrição a cada elemento de* $\mathbb{L}(\tau)$ *é contínua. Ainda mais, entre todas as topologias de* EVT *sobre* E, $\gamma[\eta,\tau]$ *é a única com essa propriedade.*

Observamos que, na verdade, o resultado acima continua verdadeiro se tomarmos apenas um sistema fundamental $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(\tau)$.

COROLÁRIO 1.18: *Sejam* (E,τ) *e* (G,ν) *como no Corolário 1.17. Se* $\mathbb{L}(\tau)$ *possue um sistema fundamental de conjuntos* η*-metrizáveis, então* T *é* $\gamma[\eta,\tau]$*-contínua se, e somente se,* T *é* $\gamma[\eta,\tau]$*-sequencialmente contínua.*

DEMONSTRAÇÃO: Se T é $\gamma[\eta,\tau]$-contínua, claramente T é $\gamma[\eta,\tau]$-sequencialmente contínua.

Reciprocamente, suponhamos que T é $\gamma[\eta,\tau]$-sequencialmente contínua. Por hipótese existe sistema fundamental $\mathcal{B}$ de subconjuntos τ-limitados que são η-metrizáveis. Se $B \in \mathcal{B}$, segue qu T/B é $\hat{\eta}$-sequencialmente contínua. Como B é $\hat{\eta}$-metrizável, T/B é $\hat{\eta}$-contínua, o que implica, pelo Corolário 1.17 que T é $\gamma[\eta,\tau]$-contínua.

PROPOSIÇÃO 1.19: *Seja* E *um espaço vetorial sobre* $(F,|\cdot|)$. *Sejam* η *e* τ *duas topologias de* EVT *sobre* E. *Então*

$$\gamma[\eta,\tau] = \gamma[\gamma[\eta,\tau],\tau].$$

DEMONSTRAÇÃO: Por definição, $\gamma[\eta,\tau]$ é a mais fina topologia de EVT sobre E tal que, para cada $B \in \mathbb{L}(\tau)$, $(B, \hat{\gamma}[\eta,\tau]) = (B,\hat{\eta})$. Por outro lado, $\gamma[\gamma[\eta,\tau],\tau]$ é a mais fina topologia de EVT sobre E tal que para cada $B \in \mathbb{L}(\tau)$, $(B, \hat{\gamma}[\gamma[\eta,\tau],\tau]) = (B, \hat{\gamma}[\eta,\tau])$. Então $(B, \hat{\gamma}[\gamma[\eta,\tau],\tau]) = (B,\hat{\eta})$ para cada $B \in \mathbb{L}(\tau)$. Portanto $\gamma[\gamma[\eta,\tau],\tau] \subset \gamma[\eta,\tau]$.

Consideremos agora a aplicação identidade

$$I : (E, \gamma[\gamma[\eta,\tau],\tau]) \to (E, \gamma[\eta,\tau]).$$

Para cada $B \in \mathbb{L}(\tau)$, a restrição

$$I/B : (B, \hat{\gamma}[\eta,\tau]) \to (E, \gamma[\eta,\tau])$$

é claramente contínua. Logo, pelo Corolário 1.17, I é contínua, donde $\gamma[\eta,\tau] \subset \gamma[\gamma[\eta,\tau],\tau]$.

LEMA 1.20: *Sejam* E *e* G *dois espaços vetoriais topológicos sobre* $(F,|\cdot|)$ *e* $T : E \to G$ *uma transformação linear. Seja* M *um subconjunto equilibrado e semiconvexo de* E. *A transformação* $S = T/M$ *é uniformemente contínua em* M *se, e somente se, é contínua na origem em* M.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos supor inicialmente S contínua na origem. Como M é semiconvexo, existe $\lambda \in F^*$ tal que $M + M \subset \lambda M$.

Seja V uma vizinhança equilibrada da origem em G. Da continuidade da aplicação $x \to \lambda x$, segue que existe uma vizinhança equilibrada W da origem em G tal que $\lambda W \subset V$.

Como S é contínua na origem, existe uma vizinhança U da origem em E tal que $S(U \cap M) \subset W$. Consideremos a vizinhança U' da origem em E dada por $U' = \lambda U$ e seja $a \in M$.

Se $x \in (a + U') \cap M$, então

$$(x - a) \in U' \cap (M - M) \subset \lambda U \cap \lambda M \subset \lambda(U \cap M),$$

desde que M é semiconvexo e equilibrado. Então

$$S(x - a) \in S[\lambda(U \cap M)] \subset \lambda W \subset V.$$

Assim $S(x) \in S(a) + V$ e portanto S é uniformemente contínua em M. Claramente temos a recíproca.

PROPOSIÇÃO 1.21: *Seja* E *um espaço vetorial sobre* $(F,|\cdot|)$ *e sejam* η *e* τ *duas topologias de* EVT *sobre* E. *Seja* $\mathcal{B}$ *um sistema fundamental de subconjuntos* τ-*limitados de* E *que são semiconvexos e equilibrados e seja* $\mathcal{F}$ *o conjunto de todas as cordas* $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *em* E *tais que para cada* $B \in \mathcal{B}$ *e para cada* $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap B$ *é uma* $\hat{\eta}$-*vizinhança da origem em* B. *Então o conjunto* A *de todos os nós de todas as cordas de* $\mathcal{F}$ *é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia* $\gamma[\eta,\tau]$ *em* E.

DEMONSTRAÇÃO: $\mathcal{F}$ é um conjunto dirigido. De fato, sejam $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

e $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in \mathbb{N}}$ duas cordas de $\mathcal{F}$. Seja $\mathcal{W} = (W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ corda em E tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $W_n = U_n \cap V_n$. Seja $B \in \mathcal{B}$. Como $U_n \cap B$ e $V_n \cap B$ são $\hat{\eta}$-vizinhanças da origem em B segue que

$$W_n \cap B = (U_n \cap V_n) \cap B = (U_n \cap B) \cap (V_n \cap B)$$

é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B. Logo $\mathcal{W} \in \mathcal{F}$. O conjunto $\mathcal{A}$ é então um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia $\tau_{\mathcal{F}}$ de EVT sobre E.

Afirmamos que $\gamma_{\mathcal{F}} = \gamma[\eta,\tau]$.

Conforme Observação 1.9, a topologia $\gamma[\eta,\tau]$ está determinada pelo sistema fundamental de τ-limitados $\mathcal{B}$, isto é,

$$\gamma[\eta,\tau] = \gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}].$$

1) Vamos provar inicialmente que $\tau_{\mathcal{F}} \subset \gamma[\eta,\tau]$.

Conforme a definição de $\gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}]$, basta provarmos que para cada $B \in \mathcal{B}$, a inclusão $i_B : (B,\hat{\eta}) \to (E,\tau_{\mathcal{F}})$ é contínua. Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap B = i_B^{-1}(U_n)$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B. Assim i_B é contínua na origem. Como B é semiconvexo e equilibrado, segue do Lema 1.20 que i_B é contínua.

2) Para provarmos que $\gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}] \subset \tau_{\mathcal{F}}$, consideremos a aplicação identidade I de $(E,\tau_{\mathcal{F}})$ em $(E,\gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}])$. Seja V uma $\gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}]$-vizinhança da origem.

Seja $\mathcal{W} = (W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma corda $\gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}]$-topológica em E com $W_1 \subset V$. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, W_n é uma $\gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}]$ - vizinhança da origem.

Agora pela definição de $\gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}]$, para cada $B \in \mathcal{B}$ a inclusão $I_B : (B,\hat{\eta}) \to (E, \gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}])$ é contínua. Assim,

$$I_B^{-1}(W_n) = W_n \cap B$$

é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B e portanto $\mathcal{W} \in \mathcal{F}$, ou seja, $\mathcal{W}$ é $\tau_{\mathcal{F}}$-topológica. Mas então W_1 é $\tau_{\mathcal{F}}$-vizinhança da origem e portanto, o mesmo é verdadeiro para V. Logo I é contínua.

COROLÁRIO 1.22: *Sejam* E, η, τ, $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{F}$ *como na Proposição 1.21. Se* $(E;\eta,\tau)$ *for um* EVT *bitopológico e* m *o conjunto formado pelas cordas pertencentes a* $\mathcal{F}$ *que são* τ*-bornívoras, então* $\tau_m = \gamma[\eta,\tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: m é um conjunto dirigido, pois se as cordas $\mathcal{U} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{V} = (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estão em m então a corda

$$\mathcal{W} = (W_n)_{n\in\mathbb{N}} = (U_n \cap V_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

é também τ-bornívora; além disso, se para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \cap B$ e $V_n \cap B$ são $\hat{\eta}$-vizinhanças da origem em B, então

$$W_n \cap B = (U_n \cap B) \cap (V_n \cap B)$$

também o é. Logo $\mathcal{W} \in m$.

Vamos mostrar agora que a topologia $\tau_{\mathcal{M}}$ gerada por $\mathcal{M}$ é a topologia mista $\gamma[\eta,\tau] = \gamma[\eta,\tau;\mathcal{B}]$. Pela Proposição 1.21, basta demonstrar que $\tau_{\mathcal{M}} = \tau_{F}$.

A inclusão $\tau_{\mathcal{M}} \subset \tau_{F}$ é evidente, pois $\mathcal{M} \subset F$.

Reciprocamente, seja $\mathcal{U} \in F$. Pela Proposição 1.21, $\mathcal{U}$ é $\gamma[\eta,\tau]$-topológica e portanto $\gamma[\eta,\tau]$-bornívora. Como $(E;\eta,\tau)$ é um EVT bitopológico, temos $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau])$. Assim sendo, $\mathcal{U}$ é τ-bornívora, logo $\mathcal{U} \in \mathcal{M}$.

PROPOSIÇÃO 1.23: *Seja* E *um espaço vetorial sobre* $(F,|\cdot|)$. *Então* $(E;\eta,\tau)$ *é um* EVBT *se, e somente se,* $\eta \subset \tau^{\beta}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $(E;\eta,\tau)$ um EVBT. Então $\mathbb{L}(\tau^{\beta}) = \mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\eta)$. Decorre disto que a aplicação identidade $I : (E,\tau^{\beta}) \to (E,\eta)$ é limitada. Como (E,τ^{β}) é bornológico, I é contínua. Portanto $\eta \subset \tau^{\beta}$.

Reciprocamente, seja $\eta \subset \tau^{\beta}$. Então $\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{L}(\tau^{\beta}) \subset \mathbb{L}(\eta)$ o que mostra que $(E;\eta,\tau)$ é um EVBT.

PROPOSIÇÃO 1.24: *Seja* E *um espaço vetorial sobre* $(F,|\cdot|)$. *Sejam* η *e* τ *duas topologias de* EVT *sobre* E. *Então* $(E;\eta,\tau)$ *é um* EVBT *se, e somente se,* $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta\ \tau])$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos inicialmente que $(E;\eta,\tau)$ é um EVBT. Seja $B \in \mathbb{L}(\tau)$ e consideremos as sequências $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de B e $\{\lambda_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de F^* tal que $|\lambda_n| \to 0$. Como $B \in \mathbb{L}(\tau)$, a sequência $\{\lambda_n x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ é τ-convergente a zero. Segue-se daí que o conjunto

$$L = \{\lambda_n x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$

é τ-limitado. Portanto, pela definição de $\gamma\,[\eta,\tau]$, temos

$$(L,\ \hat{\gamma}\,[\eta,\tau]) = (L,\hat{\eta}) \quad (1).$$

Agora, como $B \in \mathbb{L}(\eta)$ por ser $(E;\eta,\tau)$ um EVBT, a sequência $\{\lambda_n x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero também na topologia η. De (1), a sequência $\{\lambda_n x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia $\gamma[\eta,\tau]$. Logo $B \subset \mathbb{L}(\gamma\,[\eta,\tau])$.

Consideremos agora $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma\,[\eta,\tau])$. Como da definição de $\gamma\,[\eta,\tau]$ temos $\eta \subset \gamma\,[\eta,\tau]$, segue que $\mathbb{L}(\gamma\,[\eta,\tau]) \subset \mathbb{L}(\eta)$.

Logo $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\eta)$ e portanto $(E;\eta,\tau)$ é um EVBT.

COROLÁRIO 1.25: *Se* $(E;\eta,\tau)$ *é um* EVBT, *então* $(E;\gamma\,[\eta,\tau],\tau)$ *também o é.*

COROLÁRIO 1.26: *Se* $(E;\eta,\tau)$ *é um* EVBT, *então temos* $\gamma\,[\eta,\tau] \subset \tau^{\beta}$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 1.24, temos $\mathbb{L}(\tau^{\beta}) = \mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma\,[\eta,\tau])$. Logo a aplicação identidade $I : (E,\tau^{\beta}) \to (E,\ \gamma\,[\eta,\tau])$ é limitada. Como (E,τ^{β}) é bornológico, I é contínua. Portanto $\gamma\,[\eta,\tau] \subset \tau^{\beta}$.

COROLÁRIO 1.27: *Se* $(E;\eta,\tau)$ *é um* EVBT, *então temos*

$$\gamma\,[\eta,\ \gamma\,[\eta,\tau]] \subset \gamma\,[\eta,\ \tau].$$

DEMONSTRAÇÃO: Como $(E;\eta,\tau)$ é EVBT, temos $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma\,[\eta,\tau])$. Então, pela Proposição 1.10, temos $\gamma\,[\eta,\ \gamma\,[\eta,\gamma]] \subset \gamma[\eta,\tau\,]$, como queríamos.

A proposição 1.24 nos mostra que em todo espaço vetorial bi-topológico $(E;\eta,\tau)$ se tem $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma\,[\eta,\tau])$. Gostaríamos de saber sob que condições sobre E, η e τ é válida a igualdade.

Vale o seguinte resultado:

TEOREMA 1.28: *Seja* $(E;\eta,\tau)$ *um* EVBT. *Se* (E,τ) *é um* EVT *quase convexo cuja topologia é* η-*fechada, então* $\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{L}(\gamma\,[\eta,\tau])$.

Para uma demonstração deste teorema precisaremos do seguinte lema:

LEMA 1.29: *Sejam* E, η *e* τ *como no Teorema 1.28. Se uma sequência* $\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ *de elementos de* E *converge a zero na topologia* $\gamma\,[\eta,\tau]$, *então o conjunto* $\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ *é* τ-*limitado.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ sequência $\gamma\,[\eta,\tau]$-convergente a zero em E e seja V uma τ-vizinhança η-fechada da origem em E.

Se o conjunto $\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ não é τ-limitado, então existe uma subsequência $\{x_{k(n)}\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ de $\{x_n\}$ tal que para todo

$n \in \mathbb{N}$, existe $\lambda_n \in F^*$ com $|\lambda_n| \geq n$, mas $x_{k(n)} \notin \lambda_n V$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n V$ é η-fechada, logo existe uma sequência $\{U^n;\ n \in \mathbb{N}\}$ de η-vizinhanças da origem tal que

$$x_{k(n)} \notin \lambda_n V + U^n. \quad (A).$$

Seja $\lambda \in F^*$ fixado com $0 < |\lambda| < 1$. Seja $\mathcal{V} = (V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma corda τ-topológica tal que $V_1 \subset V$ e $V_{m+1} \subset \lambda V_m$ para todo $m \geq 1$. Consideremos também uma corda η-topológica $\mathcal{U}^n=(U^n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $U^n_1 \subset U^n$ e $U^n_{m+1} \subset \lambda U^n_m$ para todo $m \geq 1$. Vamos definir, para cada $m \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$W_m = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n V_m + U^n_m).$$

Afirmamos que $\mathcal{W} = (W_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma corda $\gamma[\eta,\tau]$- topológica em E. Para verificarmos, vamos mostrar incialmente que $\mathcal{W}$ é uma corda:

(1) a) *Para cada* $m \in \mathbb{N}$, W_m *é equilibrado.*

Com efeito, seja $\lambda \in F^*$ com $0 < |\lambda| < 1$ e seja $m \in \mathbb{N}$. Então

$$\lambda W_m \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\lambda_n V_m + U^n_m) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n V_m + U^n_m) = W_m ,$$

porque para todo $n, m \in \mathbb{N}$, $\lambda_n V_m$ e U^n_m são equilibradas. Assim,

W_m é equilibrado.

(1) b) *Para cada* $m \in \mathbb{N}$, W_m *é absorvente.*

Basta observarmos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$W_m \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n V_m \supset V_m ,$$

e V_m é absorvente.

(2) *Para cada* $m \in \mathbb{N}$, $W_{m+1} + W_{m+1} \subset W_m$.

De fato, se $x \in W_{m+1} + W_{m+1}$, então

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n V_{m+1} + U^n_{m+1}) + \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n V_{m+1} + U^n_{m+1}) \subset$$

$$\subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\lambda_n (V_{m+1} + V_{m+1}) + (U^n_{m+1} + U^n_{m+1})] \subset$$

$$\subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n V_m + U^n_m),$$

porque $\mathcal{U}^n$ e $\mathcal{V}$ são cordas.

Portanto $x \in W_m$.

(3) *Para algum* $\lambda \in F$, $0 < |\lambda| < 1$ *(e daí para todo* $\lambda \in F^*$*), dado* $m \in \mathbb{N}$, *existe* $p > m$ *tal que* $W_p \subset \lambda W_m$.

Isto é claro, pois, da construção de $\mathcal{U}^n_m$ e de $\mathcal{V}_m$, dado $m \in \mathbb{N}$, temos $U^n_{m+1} \subset \lambda U^n_m$ e $V_{m+1} \subset \lambda V_m$. Assim, temos

$$W_{m+1} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n V_{m+1} + U^n_{m+1}) \subset$$

$$\subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\lambda\lambda_n V_m + \lambda U^n_m) = \lambda W_m .$$

Portanto $\mathcal{W}$ é uma corda em E.

Consideremos agora um sistema fundamental $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(\tau)$ cujos elementos são semiconvexos e equilibrados. Sejam $B \in \mathcal{B}$ e $m \in \mathbb{N}$. Como B é τ-limitado, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset \lambda V_m$ sempre que $|\lambda| \geq n_o$. Assim,

$$W_m \cap B = \bigcap_{n=1}^{n_o} [(\lambda_n V_m + U^n_m) \cap B]$$

é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem, pois para cada $m \in \mathbb{N}$, $(\lambda_n V_m + U^n_m) \cap B$ contém o conjunto $U^n_m \cap B$, que é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem.

Logo, pela Proposição 1.21, a corda $\mathcal{W}$ é $\gamma[\eta,\tau]$-topológica.

Agora, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\lambda_n V + U^n$ contém W_1 e de (A) vem que $x_{k(n)} \notin \lambda_n V + U^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $x_{k(n)} \notin W_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como W_1 é $\gamma[\eta,\tau]$-vizinhança da origem, isto contradiz o fato de $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ convergir a zero na topologia $\gamma[\eta,\tau]$.

Logo $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{L}(\tau)$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1.28: Da Proposição 1.24, temos

$$\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau]).$$

Vamos mostrar a segunda inclusão. Para isso consideremos um subconjunto $\gamma[\eta,\tau]$-limitado B de E, uma sequência $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de elementos de B e uma sequência $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}\}$ em F^* com $|\lambda_n| \to 0$.

Seja $\mu \in F^*$ tal que $|\mu| < 1$. Vamos construir uma sequência $\{\mu_n ; n \in \mathbb{N}\}$ em F^* da seguinte maneira: para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um único $k_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\mu^{2k_n-2}| < |\lambda_n| \leq |\mu^{2k_n}|;$$

tomemos então $\mu_n = \mu^{2k_n}$ e vamos provar que $|\mu_n| \to 0$. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $|\lambda_n| \to 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_o$, temos $|\lambda_n| < \varepsilon$. Seja $n \geq n_o$. Como

$$|\mu^{2k_n-2}| < |\lambda_n|,$$

temos

$$|\mu^{2k_n}| \cdot |\mu^{-2}| < \varepsilon.$$

Ou seja,

$$|\mu_n| < \varepsilon|\mu|^2 < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_o$.

Mostramos então que $|\mu_n| \to 0$.

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\nu_n \in F$ tal que $\sqrt{\mu_n} = \nu_n$ e a sequência $\{|\nu_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero.

Como $B \in \mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau])$ e $\{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ é sequência em B, $\{\nu_n x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia $\gamma[\eta,\tau]$. Pelo Lema 1.29, o conjunto $\{\nu_n x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ é τ-limitado. Logo, $\{\mu_n x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia τ e portanto, dada uma τ-vizinhança equilibrada V da origem em E, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_1$, temos $\mu_n x_n \in V$. Da construção da sequência $\{\mu_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ vem que para cada $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda_n| \leq |\mu_n|$, ou seja, $|\lambda_n \mu_n^{-1}| \leq 1$. Logo $\lambda_n x_n = (\lambda_n \mu_n^{-1})\mu_n x_n \in V$ para todo $n \geq n_1$, o que implica que $\{\lambda_n x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia τ.

Isto mostra que B é τ-limitado.

TEOREMA 1.30: *Sejam* E, η *e* τ *como no Teorema 1.28. Uma sequência em* E *é* $\gamma[\eta,\tau]$*-convergente a zero se, e somente se, é* τ*-limitada e* η*-convergente a zero.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência $\gamma[\eta,\tau]$-convergente a zero em E. Pelo Lema 1.29, ela é τ-limitada. Ainda mais, como $\eta \subset \gamma[\eta,\tau]$, segue que $\{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia η.

A recíproca segue imediatamente do fato de η e $\gamma[\eta,\tau]$ coincidirem nos subconjuntos τ-limitados de E.

EXEMPLO 1.31: Seja $(F,|\cdot|)$ um anel de divisão não trivialmente valorizado não arquimediano. Um exemplo de uma terna que satisfaz as hipóteses do Teorema 1.28 pode ser dado por $(C_b(X;F);\kappa,\sigma)$ onde X é um espaço topológico localmente compacto, κ denota a topologia da convergência uniforme sobre as partes compactas de X e σ a topologia da norma sup-$\|\cdot\|_\infty$, onde

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|,$$

para toda função f pertencente ao espaço $C_b(X;F)$ das funções contínuas e limitadas de X em F.

Com efeito, sabemos que $\kappa \subset \sigma$, o que torna a terna

$$(C_b(X;F);\ \kappa,\sigma)$$

um EVBT. Como $(C_b(X;F),\sigma)$ é normado, segue do Corolário 0.7 que é um EVT quase convexo.

Além disso, se S denota a família de seminormas $\{p_K : K \subset X$ compacto$\}$ que define a topologia κ, vale $\|\cdot\|_\infty = \sup S$. Logo a bola unitária B de $(C_b(X;F),\|\cdot\|_\infty)$ é κ-fechada do que segue que a topologia definida pela norma $\|\cdot\|_\infty$ em $(C_b(X;F))$ é κ-fechada.

Do Teorema 1.28 concluimos que σ e $\gamma[\kappa,\sigma]$ possuem os mesmos limitados.

Vamos dar agora uma caracterização de uma topologia relacionada com $\gamma[\eta,\tau]$ no caso em que (E,η) é localmente semiconvexa.

Seja $\mathcal{B}$ um sistema fundamental de subconjuntos τ-limitados de

E que são equilibrados. Consideremos a coleção $\mathcal{W}$ de todos os subconjuntos não vazios, equilibrados, absorventes e semiconvexos W de E tais que para todo $B \in \mathcal{B}$, o conjunto $W \cap B$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B. Vamos mostrar que $\mathcal{W}$ constitue um sistema fundamental de vizinhanças da origem para alguma topologia de EVT sobre E que é localmente semiconvexa. Para isso, temos:

(0) $\mathcal{W} \neq \phi$, pois $E \cap B = B$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B e E é semiconvexo, equilibrado e absorvente. Além disso, $\phi \notin \mathcal{W}$, pois $0 \notin \phi$.

(1) *Dados* W_1 *e* W_2 *em* $\mathcal{W}$, *existe* $W \in \mathcal{W}$ *tal que*

$$W \subset W_1 \cap W_2 .$$

O conjunto $W = W_1 \cap W_2$ é claramente equilibrado, absorvente e não vazio. Vamos mostrar que é também semiconvexo. Como W_1 e W_2 são semiconvexos, existem $\alpha_1 \in F^*$ e $\alpha_2 \in F^*$ tais que

$$W_1 + W_1 \subset \alpha_1 W_1$$

e

$$W_2 + W_2 \subset \alpha_2 W_2 .$$

Sejam x e y elementos de W. Então $x + y \in \alpha_1 W_1$ porque x e y estão em W_1 e $x + y \in \alpha_2 W_2$ porque x e y estão em W_2.

Seja $\alpha_o \in F$ tal que $|\alpha_o| = \max \{ |\alpha_1|, |\alpha_2| \}$. Assim,

$$x + y \in \alpha_o W_1 \cap \alpha_o W_2 = \alpha_o (W_1 \cap W_2) = \alpha_o W,$$

o que mostra que W é semiconvexo.

Além disso, para todo $B \in \mathcal{B}$, temos que

$$(W_1 \cap W_2) \cap B = (W_1 \cap B) \cap (W_2 \cap B)$$

é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B como intersecção de duas delas.

Logo $W \subset \mathcal{W}$.

(2) a) *Todo elemento* $W \in \mathcal{W}$ *é equilibrado e absorvente.*

Isto vem da definição de $\mathcal{W}$.

(2) b) *Dado* $W \in \mathcal{W}$, *existe* $V \in \mathcal{W}$ *tal que* $V + V \subset W$.

Com efeito, como W é semiconvexo, existe $\alpha \in F^*$ tal que $W + W \subseteq \alpha W$. Tomando $V = \alpha^{-1} W$, temos claramente $V + V \subset W$ e V é equilibrado e absorvente. De $W + W \subset \alpha W$ vem que

$$\alpha^{-1} W + \alpha^{-1} W \subset \alpha^{-1} (\alpha W) = \alpha (\alpha^{-1} W),$$

porque W é equilibrado. Logo temos $V + V \subset \alpha V$ e portanto V é semiconvexo.

Resta-nos mostrar que para todo $B \in \mathcal{B}$, o conjunto $V \cap B$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B. Com efeito, se $B \in \mathcal{B}$, então $W \cap \alpha B$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em αB. Logo existe uma η-vizinhança U da origem em E tal que $U \cap (\alpha B) \subset W \cap (\alpha B)$, ou seja,

$(\alpha^{-1}U) \cap B \subset (\alpha^{-1}W) \cap B$, isto é, $V \cap B = (\alpha^{-1}W) \cap B$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B.

Logo $V \in \mathcal{W}$.

(2) c) *Para algum* $\lambda \in F$, *com* $0 < |\lambda| < 1$, *dado* $W \in \mathcal{W}$, *existe* $V \in \mathcal{W}$ *tal que* $V \subset \lambda W$.

Consideremos $\lambda_o \in F$ com $0 < |\lambda_o| < 1$ fixo e tomemos $V = \lambda_o W$. É claro que V é equilibrado, absorvente e não vazio. Além disso, existe $\alpha \in F^*$ tal que $W + W \subset \alpha W$. Logo

$$V + V = \lambda_o W + \lambda_o W = \lambda_o (W + W) \subset \lambda_o (\alpha W) = \alpha(\lambda_o W) = \alpha V$$

porque $|\lambda_o \alpha| = |\alpha \lambda_o|$ e W é equilibrado. Logo V é semiconvexo.

Vamos mostrar que para todo $B \in \mathcal{B}$, $V \cap B$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B. De fato, se $B \in \mathcal{B}$, $W \cap (\lambda_o^{-1}B)$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em $\lambda_o^{-1}B \in \mathcal{B}$. Logo existe uma η-vizinhança U da origem em E tal que $U \cap (\lambda^{-1}B) \subset W \cap (\lambda_o^{-1}B)$, ou seja,

$$(\lambda_o U) \cap B \subset (\lambda_o W) \cap B = V \cap B.$$

Com isso mostramos que $V \cap B$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B.

Logo $V \in \mathcal{W}$.

De (0), (1) e (2) e usando o Teorema 2.15, Prolla [17], concluimos que a família $\mathcal{W}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia de EVT localmente semiconvexa sobre E, a qual denotaremos por $\gamma'[\eta,\tau]$.

PROPOSIÇÃO 1.32: *Se* $B \in \mathcal{B}$ *for semiconvexo, então a inclusão*

$$j_B : (B,\hat{\eta}) \to (E, \gamma'[\eta,\tau])$$

é contínua.

DEMONSTRAÇÃO: O resultado segue claramente da definição de $\mathcal{W}$ e do Lema 1.20.

Observamos que se (E,τ) for um EVT quase convexo, da Proposição 1.32 e da definição de $\mathfrak{S}$, obtemos $\gamma'[\eta,\tau] \in \mathfrak{S}$, isto é, $\gamma'[\eta,\tau] \subset \gamma[\eta,\tau]$.

Denotemos por $\mathfrak{S}_{sc}$ a família de todas as topologias de EVT localmente semiconvexas μ sobre E tais que para cada $B \in \mathcal{B}$ a inclusão $j_B : (E,\hat{\eta}) \to (E,\mu)$ é contínua.

PROPOSIÇÃO 1.33: *Se* (E,τ) *for um* EVT *quase-convexo então*

$$\gamma'[\eta,\tau] = \sup \mathfrak{S}_{sc}$$

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que os elementos de $\mathcal{B}$ sejam semiconvexos. Da Proposição 1.32 segue que $\gamma'[\eta,\tau] \in \mathfrak{S}_{sc}$. Consideremos agora $\mu \in \mathfrak{S}_{sc}$. Se V é uma μ-vizinhança equilibrada e semiconvexa de origem em E, da definição de $\mathfrak{S}_{sc}$ segue que para todo $B \in \mathcal{B}$, o conjunto $V \cap B = j_B^{-1}(V)$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B. Logo, da definição de $\mathcal{W}$ segue que $V \in \mathcal{W}$ e portanto V é uma $\gamma'[\eta,\tau]$-vizinhança da origem em E. Portanto $\mu \subset \gamma'[\eta,\tau]$. Isto completa a demonstração.

COROLÁRIO 1.34: *Suponhamos que os elementos de $\mathcal{B}$ são semiconvexos e que (E,τ) é um EVT localmente semiconvexo. Então:*

(a) $\eta \subset \gamma'[\eta,\tau]$

(b) η *e* $\gamma'[\eta,\tau]$ *coincidem sobre os conjuntos* τ-*limitados de* E

(c) $\gamma'[\eta,\tau]$ *é a mais fina das topologias de EVT localmente semiconvexas que coincidem com* η *sobre os conjuntos* τ-*limitados de* E.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Segue imediatamente da Proposição 1.32 e da Proposição 1.33.

(b) Seja $B \in \mathbb{L}(\tau)$. Então existe $B_1 \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset B_1$. De (a), temos $\hat{\eta} \subset \hat{\gamma}'[\eta,\tau]$ em B_1, portanto em B.

Para mostrarmos a segunda inclusão, consideremos uma $\gamma'[\eta,\tau]$-vizinhança da origem em $B_1 \in \mathcal{B}$, que é do tipo $V \cap B_1$, onde V é uma $\gamma'[\eta,\tau]$- vizinhança da origem em E. Mas então existe $W \in \mathcal{W}$ tal que $W \subset V$. Logo, $V \cap B_1 \supset W \cap B_1$ e portanto $V \cap B_1$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B_1. Logo $(\gamma'[\eta,\tau])^{\wedge} \subset \hat{\eta}$ em B.

(c) Se σ é outra topologia de EVT localmente semiconvexa sobre E que coincide com η nos elementos de $\mathbb{L}(\tau)$, temos

$$j_B : (B,\hat{\eta}) \to (E,\sigma)$$

contínua para cada $B \in \mathcal{B}$. Logo $\mu \in \mathfrak{S}_{sc}$, o que implica que $\sigma \subset \gamma'[\eta,\tau]$.

Se $\mathcal{B}$ é um sistema fundamental de subconjuntos τ-limitados semiconvexos equilibrados de E da construção de $\gamma'[\eta,\tau]$, indicaremos tal topologia por $\gamma'[\eta,\tau;\mathcal{B}]$ e vamos mostrar que $\gamma'[\eta,\tau]$ independe do sistema fundamental de τ-limitados equilibrados $\mathcal{B}$.

PROPOSIÇÃO 1.35: *Se* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *são dois sistemas fundamentais de subconjuntos semiconvexos equilibrados e* τ-*limitados de* E, *então* $\gamma'[\eta,\tau;\mathcal{B}_1] = \gamma'[\eta,\tau;\mathcal{B}_2] = \gamma'[\eta,\tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B_1 \in \mathcal{B}_1$ e consideremos a inclusão

$$j_{B_1} : (B_1,\hat{\eta}) \to (E,\gamma'[\eta,\tau;\mathcal{B}_2]).$$

Dado $B_1 \in \mathcal{B}_1$ existe $B_2 \in \mathcal{B}_2$ tal que $B_1 \subset B_2$. Da definição de $\gamma'[\eta,\tau;\mathcal{B}_2]$, a inclusão $j_{B_2} : (B_2,\hat{\eta}) \to (E,\gamma'[\eta,\tau;\mathcal{B}_2])$ é contínua. Logo $j_{B_1} = j_{B_2}/B_1$ é contínua, o que implica que

$$\gamma'[\eta,\tau;\mathcal{B}_2] \subset \gamma'[\eta,\tau;\mathcal{B}_1].$$

Analogamente mostramos que

$$\gamma'[\eta,\tau;\mathcal{B}_1] \subset \gamma'[\eta,\tau;\mathcal{B}_2].$$

PROPOSIÇÃO 1.36: *Suponhamos que todo elemento de* $\mathcal{B}$ *é semiconvexo, que* (E,η) *é um* EVT *localmente semiconvexo e seja* (G,ν) *outro* EVT *localmente semiconvexo sobre* $(F,|\cdot|)$. *Uma transformação linear* $T : E \to G$ *é* $\gamma'[\eta,\tau]$*-contínua se e somente se* $T|B$ *é* $\hat{\eta}$*-contínua para todo* $B \in \mathcal{B}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B \in \mathcal{B}$. Se T é uma transformação linear $\gamma'[\eta,\tau]$-contínua, como $\hat{\eta} = \hat{\gamma}'[\eta,\tau]$ sobre B, segue que T/B é $\hat{\eta}$-contínua.

Suponhamos agora que para cada $B \in \mathcal{B}$, T/B é $\hat{\eta}$-contínua. Seja V uma ν-vizinhança equilibrada e semiconvexa da origem em G. Por hipótese existe uma η-vizinhança U da origem em E tal que $U \cap B \subset (T/B)^{-1}(V) = T^{-1}(V) \cap B$, isto é, $T^{-1}(V) \cap B$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B. Pela definição de $\mathcal{W}$, para que $T^{-1}(V)$ seja uma $\gamma'[\eta,\tau]$-vizinhança da origem em E falta mostrar que $T^{-1}(V)$ é equilibrado, absorvente e semiconvexo.

Se $\lambda \in F$ é tal que $0 < |\lambda| < 1$, como V é equilibrada, segue que

$$\lambda T^{-1}(V) = T^{-1}(\lambda V) \subset T^{-1}(V)$$

o que implica que $T^{-1}(V)$ é equilibrado.

Seja $x \in E$. Como V é absorvente, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| > \delta$, $T(x) \in \lambda V$. Logo

$$x \in T^{-1}(x) \subset T^{-1}(\lambda V) = T^{-1}(V).$$

Portanto $T^{-1}(V)$ é absorvente.

Como V é semiconvexa, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\alpha \in F$ com $|\alpha| \geq \delta$, temos $V + V \subset \alpha V$. Seja $x + y \in T^{-1}(V) + T^{-1}(V)$. Fixando um tal $\alpha = \alpha_o$, temos $T(x) + T(y) \in V + V \subset \alpha_o V$ donde $T(x + y) = \alpha_o z$ com $z \in V$, isto é $x + y = T^{-1}(\alpha_o z) = \alpha_o T^{-1}(z)$. Logo, $x + y \in \alpha_o T^{-1}(V)$, o que implica que

$$T^{-1}(V) + T^{-1}(V) \subset \beta T^{-1}(V)$$

para todo $\beta \in F$ com $|\beta| \geq |\alpha_o|$, por ser $T^{-1}(V)$ equilibrado. Portanto $T^{-1}(V)$ é semiconvexo.

Assim, $T^{-1}(V)$ é uma $\gamma'[\eta,\tau]$-vizinhança da origem em E e portanto T é $\gamma'[\eta,\tau]$-contínua.

Suponhamos agora que $(F,|\cdot|)$ é não arquimediano e (E,η) é um EVT localmente F-convexo. Uma análise da construção da topologia $\gamma'[\eta,\tau]$ mostra que, tomando a coleção $\mathcal{W}_o$ de todos os subconjuntos não vazios, equilibrados, absorventes e F-convexos W de E tais que para todo $B \in \mathcal{B}$, $W \cap B$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B, $\mathcal{W}_o$ é um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia de EVT sobre E que naturalmente é localmente F-convexa.

Denotaremos esta topologia por $\gamma_F[\eta,\tau]$.

Claramente temos $\eta \subset \gamma_F[\eta,\tau]$ e ambas coincidem nos elementos de $\mathbb{L}(\tau)$. Mais ainda, $\gamma_F[\eta,\tau]$ é a mais fina das topologias localmente F-convexas sobre E com essa propriedade.

TEOREMA 1.37: *Seja* $(E;\eta,\tau)$ *um* EVBT *tal que* (E,η) *e* (E,τ) *são* EVT's *localmente* F-*convexos e* τ *é* η-*fechada. Então*

$$\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{L}(\gamma_F[\eta,\tau]).$$

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração deste teorema é análoga à do Teorema 1.28, onde é usado o seguinte resultado:

LEMA 1.38: *Sob as hipóteses do Teorema 1.37 se* $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ *é uma sequência em* E *que converge a zero na topologia* $\gamma_F[\eta,\tau]$, *então* $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ *é* τ-*limitada*.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ sequência $\gamma_F[\eta,\tau]$-convergente a zero. Vamos mostrar que ela é τ-limitada. Para isso, consideremos uma τ-vizinhança equilibrada, F-convexa e η-fechada V da origem em E. Se $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ não fosse τ-limitado, existiria uma subsequência $\{x_{k(n)} ; n \in \mathbb{N}\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, existiria $\lambda_n \in F^*$ com $|\lambda_n| \geq n$, mas $x_{k(n)} \notin \lambda_n V$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $\{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de η-vizinhanças equilibradas e F-convexas da origem tal que $x_{k(n)} \notin \lambda_n V + U_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Seja

$$W = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n V + U_n)$$

e seja $\mathcal{B}$ um sistema fundamental de conjuntos τ-limitados de E. Se $B \in \mathcal{B}$, então $B \subset \lambda_{n_o} V$ para algum $n_o \in \mathbb{N}$. Logo

$$W \cap B = \bigcap_{n=1}^{n_o} (U_n \cap B),$$

do que segue que $W \cap B$ é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B.

Como $|\lambda_n| \geq n$, segue que

$$W \supset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n V) \supset V$$

que é absorvente. Logo W é absorvente.

Vamos mostrar que W é equilibrado. Para isso consideremos $\lambda \in F$ com $0 < |\lambda| < 1$ e temos:

$$\lambda W = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\lambda\lambda_n V + \lambda U_n) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n V + U_n),$$

porque, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n V$ e U_n são equilibrados.

Observamos também que W é F-convexo. De fato, se

$x + y \in W + W$, então $x \in \lambda_n V + U_n$ e $y \in \lambda_n V + U_n$,

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$x + y \in \lambda_n(V + V) + (U_n + U_n) \subset \lambda_n V + U_n \ ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, porque V e U_n são F-convexas para cada $n \in \mathbb{N}$.

Logo $x + y \in W$, o que mostra que W é F-convexo.

Da construção de $\gamma_F[\eta,\tau]$ segue que W é uma $\gamma_F[\eta,\tau]$-vizinhança da origem em E. Mas por hipótese, $x_{k(n)} \notin \lambda_n V + U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que $x_{k(n)} \notin W$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto contradiz o fato de $\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ convergir a zero na topologia $\gamma_F[\eta,\tau]$.

TEOREMA 1.39: *Sejam* E, η *e* τ *como no Teorema 1.37. Uma sequência em* E *é* $\gamma_F[\eta,\tau]$*-convergente a zero, se e somente se é* τ*-limitada e* η*-convergente a zero.*

DEMONSTRAÇÃO: Este resultado segue do Lema 1.38 e sua demonstração é análoga à do Teorema 1.30.

§2 - BASES DE VIZINHANÇAS DE $\gamma[\eta,\tau]$

Sejam (E,τ) um EVT sobre $(F,|\cdot|)$ e $\mathbb{L}(\tau)$ a família de todos os subconjuntos τ-limitados de E. Se η é outra topologia de EVT sobre E, vimos no §1 que a topologia mista $\gamma[\eta,\tau]$ tem as seguintes propriedades:

(1) $\gamma[\eta,\tau]$ coincide com η nos elementos de $\mathbb{L}(\tau)$;

(2) $\gamma[\eta,\tau]$ é a mais fina de todas as topologias que gozam da propriedade (1).

Vimos também que a topologia $\gamma[\eta,\tau]$ pode ser determinada por um sistema fundamental de subconjuntos τ-limitados de E. Ainda mais, $\gamma[\eta,\tau]$ independe do sistema fundamental de τ-limitados escolhido para sua construção, [ver Obs. 1.9].

Estamos interessados agora em encontrar um sistema fundamental de vizinhanças da origem para $\gamma[\eta,\tau]$. Se η for localmente F-convexo e $\mathbb{L}(\tau)$ possuir um sistema fundamental de conjuntos que são F-convexos (e isto ocorre, em particular, sempre que (E,τ) for localmente F-convexo), gostaríamos que $\gamma[\eta,\tau]$ também fosse localmente F-convexa.

Vamos caracterizar então um sistema fundamental de vizinhanças da origem para $\gamma[\eta,\tau]$ no caso em que $\mathbb{L}(\tau)$ possue um sistema fundamental enumerável $\mathcal{B}$. Sem perda de generalidade, podemos escolher $\mathcal{B} = \{B_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ e $\lambda_o \in F$ com $0 < |\lambda_o| < 1$, tais que, para todo $n \in \mathbb{N}$, sejam satisfeitas:

(a) $B_n + B_n \subset B_{n+1}$

(b) $B_n \subset \lambda_o B_{n+1}$

(c) B_n é equilibrado.

Para isso, seja $\mathcal{C} = \{C_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ um sistema fundamental de τ-limitados equilibrados de E. Vamos construir o sistema fundamental enumerável $\mathcal{B} = \{B_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ da seguinte maneira: tomemos $B_1 = C_1$ e suponhamos escolhidos $B_1, \ldots, B_k$ tais que (a) e (b) estejam satisfeitas para $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Como o conjunto $B_n + B_n + \lambda_o^{-1} B_n + C_{n+1}$ é τ-limitado, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que C_p contém tal conjunto. Pondo $B_{n+1} = C_p$ temos (a) e (b) verificadas para $k = n$.

Com o sistema fundamental $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(\tau)$ assim definido, vamos construir uma base de vizinhanças da origem para uma nova topologia a qual denotaremos por $\gamma^* [\eta, \gamma]$ e mostraremos, no Corolário 2.6 que ela coincide com a topologia mista $\gamma [\eta, \tau]$ definida inicialmente, no caso em que $\mathbb{L}(\tau)$ possui um sistema fundamental enumerável. Em seguida mostraremos algumas propriedades que são satisfeitas pela topologia $\gamma^* [\eta, \tau]$.

Para obtermos $\gamma^* [\eta, \tau]$, consideremos a família Λ de todos os conjuntos da forma

$$\gamma(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (U_k \cap B_k),$$

onde $\mathcal{U} = \{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência arbitrária de η-vizinhanças de origem em E e $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência fundamental crescente de τ-limitados não vazios satisfazendo (a),(b) e (c).

Vamos mostrar que a família Λ determina um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia de EVT que será indicada por $\gamma^*[\eta,\tau]$. Temos:

(0) A origem pertence a $\gamma(\mathcal{U})$, logo $\gamma(\mathcal{U}) \neq \phi$; $\phi \notin \gamma(\mathcal{U})$.

(1) Dados

$$\gamma(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{n} (U_k \cap B_k) \quad \text{e} \quad \gamma(\mathcal{V}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (V_k \cap B_k)$$

existe um conjunto $\gamma(\mathcal{W}) \in \Lambda$ tal que

$$\gamma(\mathcal{W}) \subset \gamma(\mathcal{U}) \cap \gamma(\mathcal{V}).$$

Com efeito, tomemos a sequência $\{W_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de η-vizinhanças da origem com $W_n = U_n \cap V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\gamma(\mathcal{W}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (W_k \cap B_k) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} ((U_k \cap B_k) \cap (V_k \cap B_k))$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (U_k \cap B_k) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (V_k \cap B_k) = \gamma(\mathcal{U}) \cap \gamma(\mathcal{V}).$$

(2) a) Cada conjunto $\gamma(\mathcal{U})$ é equilibrado.

Para verificarmos, consideremos $\lambda \in F$ com $0 < |\lambda| < 1$. Temos:

$$\lambda\gamma(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (\lambda U_k \cap \lambda B_k) \subset$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (U_k \cap B_k) = \gamma(\mathcal{U}),$$

pois, para cada $n \in \mathbb{N}$, U_n e B_n são equilibrados.

Cada $\gamma(\mathcal{U})$ é absorvente.

De fato, seja $x \in E$. Seja $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{k_o}$. Como U_{k_o} é absorvente, existe $\delta_o > 0$ tal que para qualquer $\lambda \in F^*$ com $|\lambda| \geq \delta_o$, $x \in \lambda U_{k_o}$. Seja um tal λ com $|\lambda| > 1$ e tomemos $\delta = |\lambda|$. Então para qualquer $\mu \in F^*$, $|\mu| \geq \delta$,

$$x \in \mu(U_{k_o} \cap B_{k_o}),$$

pois B_{k_o} é equilibrado. Assim,

$$x \in \mu \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (U_k \cap B_k) = \mu\gamma(\mathcal{U}).$$

(2) b) Se $\gamma(\mathcal{U}) \in \Lambda$, então existe $\gamma(\mathcal{V}) \in \Lambda$ com

$$\gamma(\mathcal{V}) + \gamma(\mathcal{V}) \subset \gamma(\mathcal{U}).$$

Seja

$$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (U_k \cap B_k).$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja V_k uma η-vizinhança da origem tal que $V_k + V_k \subset U_{k+1}$. Consideremos

$$\gamma(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (V_k \cap B_k).$$

Assim, se $x \in \gamma(V) + \gamma(V)$,

$$x \in \sum_{k=1}^{p} (V_k \cap B_k) + \sum_{k+1}^{m} (V_k \cap B_k)$$

para algum p e para algum m em $\mathbb{N}$. Logo $x = y + z$ onde

$$y = y_1 + \ldots + y_p \quad \text{com} \quad y_k \in V_k \quad \text{e} \quad y_k \in B_k$$

e

$$z = z_1 + \ldots + z_m \quad \text{com} \quad z_k \in V_k \quad \text{e} \quad z_k \in B_k .$$

Suponhamos $m \leq p$. Temos:

$$x = (x_1 + y_1) + \dots + (x_m + y_m) + y_{m+1} + \dots + y_p \in$$

$$\in (V_1 + V_1) \cap (B_1 + B_1) + \dots + (V_m + V_m) \cap (B_m + B_m)$$

$$+ V_{m+1} \cap B_{m+1} + \dots + V_p \cap B_p$$

$$\subset U_2 \cap B_2 + \dots + U_{m+1} \cap B_{m+1} \subset U_{m+2} \cap B_{m+2} + \dots + V_{p+1} \cap B_{p+1}$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (U_k \cap B_k) = \gamma(\mathcal{U}).$$

(2) c) Para algum $\lambda \in F^*$ com $0 < |\lambda| < 1$, dado $\gamma(\mathcal{U}) \in \Lambda$, existe $\gamma(\mathcal{V}) \in \Lambda$ com $\gamma(\mathcal{V}) \subset \lambda\gamma(\mathcal{U})$.

Seja $\gamma(\mathcal{U})$ dado e escolhamos $\lambda_o \in F^*$ como na definição de $\mathcal{B}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma η-vizinhança V_k da origem tal que $V_k \subset \lambda_o U_{k+1}$.

Se $x \in \gamma(\mathcal{V})$, então $x \in \sum_{k=1}^{n} (V_k \cap B_k)$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então

$$x \in \sum_{k=1}^{n} (\lambda_o U_{k+1} \cap \lambda_o B_{k+1}) = \lambda_o \sum_{k=2}^{n} (U_k \cap B_k).$$

Portanto, $\lambda_o^{-1} x \in \sum_{k=2}^{n} (U_k \cap B_k) \subset \gamma(\mathcal{U})$, e então $x \in \lambda_o\gamma(\mathcal{U})$.

De (0), (1) e (2), e usando o Teorema 2.15 Prolla [17], concluímos que a família Λ de todos os conjuntos $\gamma(\mathcal{U})$ definidos como acima forma um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia de EVT sobre E.

DEFINIÇÃO 2.1: Como já observamos, a topologia acima obtida será então denotada por $\gamma^*[\eta,\tau]$.

EXEMPLO 2.2: No caso particular em que τ é proveniente de uma norma $\|\cdot\|$ em E, podemos tomar $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ da seguinte maneira: escolhamos $\lambda_o \in F$ com $0 < |\lambda_o| < \frac{1}{2}$ e chamemos $\rho = |\lambda_o|$. Tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{x \in E : \|x\| \leq \rho^{-n}\}$, $\mathcal{B}$ satisfaz, para todo $n \in \mathbb{N}$ as condições:

(a) $B_n + B_n \subset B_{n+1}$

(b) $B_n \subset \lambda_o B_{n+1}$

(c) B_n é equilibrado

(d) $B_n = \lambda_o^{-n} B$, onde $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Se $x \in B_n + B_n$, então $x = y + z$ com y e z em B_n e

$$\|x\| \leq \|y\| + \|z\| \leq 2\rho^{-n} < \rho^{-1}\rho^{-n} = \rho^{-(n+1)},$$

e portanto $x \in B_{n+1}$. Logo $B_n + B_n \subset B_{n+1}$.

(b) Se $x \in B_n$, então $\|x\| \leq \rho^{-n}$, donde

$$\| \lambda_o^{-1} x \| = \rho^{-1} \| x \| \leq \rho^{-1} \rho^{-n} = \rho^{-(n+1)} .$$

Assim, $\lambda_o^{-1} x \in B_{n+1}$, e portanto $x \in \lambda_o B_{n+1}$. Logo $B_n \subset \lambda_o B_{n+1}$.

(c) É evidente.

(d) Se $x \in \lambda_o^{-n} B$, então $\lambda_o^n x \in B$, donde $\rho^n \| x \| = \| \lambda_o^n x \| \leq 1$. Portanto, $\| x \| \leq \rho^{-n}$. Logo $x \in B_n$.

Se, por outro lado, $x \in B_n$, façamos $x = \lambda_o^{-n} \lambda_o^n x = \lambda_o^{-n} v$ com $v = \lambda_o^n x$ e obtemos

$$\| v \| = \rho^n \| x \| \leq \rho^n \rho^{-n} = 1.$$

Assim, $v \in B$ e portanto $x \in \lambda_o^{-n} B$.

Isso mostra que $B_n = \lambda_o^{-n} B$.

EXEMPLO 2.3: Se (E, τ) possui uma vizinhança τ-limitada U da origem, então a sequência fundamental $\mathcal{B}$ pode ser escolhida tomando-se $B_n = a_n U$, onde $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de elementos de F^* satisfazendo $|a_n| \to +\infty$.

Para isso, escolhamos $\lambda_o \in F$ com $0 < |\lambda_o| < 1$ e dada uma sequência $\{b_k : k \in \mathbb{N}\}$ em F^* com $|b_k| \to +\infty$, escolhamos a sequência $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ da seguinte maneira. Seja $a_1 = b_1$.

Seja $B_1 = a_1 U$. O conjunto $A_1 = B_1 + B_1 + \lambda_o^{-1} B_1$ é τ-limitado. Decorre daí que existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com

$|\lambda| \geq \delta$, $A_1 \subset \lambda U$. Como $|b_k| \to +\infty$ existe $k_2 > k_1 = 1$ tal que $|b_{k_2}| \geq \delta_1$ e portanto $A_1 \subset b_{k_2}U$. Chamando $a_2 = b_{k_2}$ e $B_2 = a_2U$, temos:

(a) $B_1 + B_1 \subset B_2$ e

(b) $B_1 \subset \lambda_o B_2$.

Suponhamos escolhidos $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$ tais que

$$B_{n-1} + B_{n-1} \subset B_n \quad \text{e} \quad B_{n-1} \subset \lambda_o B_n$$

para todo $n = 1,\ldots,p$.

O conjunto $A_p = B_p + B_p + \lambda_o^{-1}B_p$ é τ-limitado e pelo mesmo raciocínio anterior, existe $k_{p+1} > k_p$ tal que $A_p \subset b_{k_{p+1}}U$. Chamando analogamente $a_{p+1} = b_{k_{p+1}}$ e $B_{p+1} = a_{p+1}U$, temos:

(a) $B_p + B_p \subset B_{p+1}$ e

(b) $B_p \subset \lambda_o B_{p+1}$.

Uma vez escolhido $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$ como a subsequência $\{b_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, temos que $|a_n| \to +\infty$ e claramente a família $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema fundamental de subconjuntos τ-limitados de E.

Desde que tenhamos escolhido U como uma vizinhança τ-limitada e equilibrada da origem, temos também satisfeita a condição (c) da página 46. Assim, se $\{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de vizinhanças da origem para uma topologia η de EVT sobre E, os conjuntos do tipo $U^\gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (U_i \cap a_i U)$ formam um sistema fundamental de vizinhanças da origem para a topologia $\gamma^* [\eta,\tau]$ sobre E.

PROPOSIÇÃO 2.4:

(i) η *é menos fina que* $\gamma^* [\eta,\tau]$.

(ii) $\gamma^* [\eta,\tau]$ *e* η *coincidem nos subconjuntos* τ-*limitados de* E.

(iii) $\gamma^* [\eta,\tau]$ *é a mais fina topologia de* EVT *que coincide com* η *nos subconjuntos* τ-*limitados de* E.

DEMONSTRAÇÃO: (i) Seja U uma η-vizinhança da origem em E. Existe sequência $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ de η-vizinhanças da origem tais que $U_1 + U_2 + \ldots + U_n \subset U$. Tomemos

$$\gamma(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (U_k \cap B_k).$$

Se $x \in \gamma(\mathcal{U})$, então

$$x \in \sum_{k=1}^{n} (U_k \cap B_k)$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$x \in \sum_{k=1}^{n} U_k \subset U.$$

(ii) Como $\eta \subset \gamma^* [\eta,\tau]$, basta mostrarmos que $\gamma^* [\eta,\tau] \subset \eta$

nos τ-limitados não vazios de E. Sejam $B \in \mathbb{L}(\tau)$ e $x_o \in B$. Seja

$$\gamma(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (U_k \cap B_k).$$

Escolhamos $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $B - B \subset B_{k_o}$. Consideremos $W = U_{k_o}$, que é η-vizinhança da origem. Vamos mostrar que

$$(x_o + W) \cap B \subset (x_o + \gamma(\mathcal{U})) \cap B.$$

Se $x \in (x_o + W) \cap B$, então $x \in B$ donde $x - x_o \in B - B \subset B_{k_o}$ e $x \in x_o + W$ donde $x - x_o \in W = U_{k_o}$. Assim,

$$x \in x_o + (W \cap B_{k_o}) \subset x_o + (U_{k_o} \cap B_{k_o}) \subset x_o + \gamma(\mathcal{U}).$$

Portanto,

$$x \in (x_o + \gamma(\mathcal{U})) \cap B.$$

(iii) Seja ν uma topologia de EVT sobre E que satisfaz (ii) e seja V uma ν-vizinhança da origem em E. Consideremos uma sequência $\{V_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de ν-vizinhanças da origem em E tal que

$$V_1 + V_2 + \ldots + V_n \subset V,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\eta \subset \nu$ nos elementos de $\mathcal{B}$, escolhamos uma sequência de

η-vizinhanças $U_1, \ldots, U_n, \ldots$ da origem tais que

$$U_k \cap B_k \subset V_k \cap B_k ,$$

para todo $k = 1,2,\ldots$.

Assim sendo, temos

$$U_1 \cap B_1 + \ldots + U_n \cap B_n \subset V_1 + \ldots + V_n \subset V.$$

Então $\gamma(\mathcal{U}) \subset V$, o que completa a demonstração.

COROLÁRIO 2.5: *Se existir sequência fundamental enumerável* $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(\tau)$, *satisfazendo as propriedades* (a), (b) *e* (c) *da página 48 temos:*

(1) $\gamma^*[\eta,\tau]$ *independe da escolha de* $\mathcal{B}$.

(2) *Se* η_1 *e* η_2 *são duas topologias de* EVT *sobre* E, *então* $\gamma^*[\eta_1,\tau] = \gamma^*[\eta_2,\tau]$ *se e somente se* η_1 *e* η_2 *coincidirem nos conjuntos* τ-*limitados de* E.

(3) $\gamma^*[\eta,\tau]$ *coincide com a topologia mista* $\gamma[\eta,\tau]$.

TEOREMA 2.6: *Se existir sequência fundamental* $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(\tau)$ *em* E *formada por conjuntos* η-*fechados, então temos* $\mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau]) \subset \mathbb{L}(\tau)$.

Para uma demonstração deste teorema precisaremos do seguinte lema.

LEMA 2.7: *Sob a hipótese do Teorema 2.6, uma sequência* $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ *converge a zero em* $(E, \gamma[\eta, \tau])$ *se e somente se* $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{L}(\tau)$ *e converge a zero em* (E, η).

DEMONSTRAÇÃO: Se $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia $\gamma[\eta, \tau]$, então converge a zero também na topologia η, por ser η menos fina que $\gamma[\eta, \tau]$.

Suponhamos agora que $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\} \notin \mathbb{L}(\tau)$. Então existe subsequência $\{x_{n_k} ; n \in \mathbb{N}\}$ tal que $x_{n_k} \notin B_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como por hipótese B_k é η-fechado, existe uma sequência

$$\{U_k ; k = 1, \ldots, n\}$$

de η-vizinhanças da origem em E tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} \notin B_k + U_k$.

Consideremos uma sequência $\{V_k ; k \in \mathbb{N}\}$ de η-vizinhanças da origem tal que:

$$V_1 = U_1$$

$$V_k + V_k \subset U_k \cap V_{k-1}, \qquad k > 1.$$

Então para cada $k > 1$,

$$\begin{aligned}\gamma(\mathcal{V}) &= \bigcup_{p=1}^{\infty} (V_1 \cap B_1 + \ldots + V_{k+p} \cap B_{k+p}) \\ &= \bigcup_{p=1}^{\infty} (V_1 \cap B_1 + \ldots + V_{k-1} \cap B_{k-1} + V_k \cap B_k + \ldots + V_{k+p} \cap V_{k+p}) \\ &= \bigcup_{p=1}^{\infty} (B_1 + \ldots + B_{k-1} + V_k + \ldots + V_{k+p}) \\ &\subset \bigcup_{p=1}^{\infty} (B_k + V_k + V_k) \subset B_k + V_k + V_k \subset B_k + U_k \,.\end{aligned}$$

Assim, $x_{n_k} \not\in \gamma(\mathcal{V})$ para cada $k \in \mathbb{N}$, o que contradiz a hipótese de $\{x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ ser convergente a zero na topologia $\gamma[\eta,\tau]$.

Reciprocamente, seja $\{x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{L}(\tau)$. Por Proposição 2.4.(ii), η e $\gamma[\eta,\tau]$ coincidem neste conjunto. Assim, do fato de $\{x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ convergir a zero na topologia η, segue o resultado.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.6: Seja $\mathcal{B} = \{B_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{L}(\tau)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, B_n é η-fechado. Consideremos um conjunto $B \in \mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau])$ em E. Se $B \not\in \mathbb{L}(\tau)$, então existe uma sequência $\{x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ em B tal que $x_n \not\in \lambda_n B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $\{\lambda_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em F^*, com $|\lambda_n| \to +\infty$. Mas então $|\lambda_n^{-1}| \to 0$ e como $B \in \mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau])$, a sequência $\{\lambda_n^{-1} x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ é $\gamma[\eta,\tau]$-convergente a zero. Pelo Lema 2.7, o conjunto $\{\lambda_n^{-1} x_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ é τ-limitado, logo existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n^{-1} x_n \in B_{k_o}$. Mas então $x_{k_o} \in \lambda_{k_o} B_{k_o}$, o que é uma contradição.

TEOREMA 2.8: *Se existir uma sequência fundamental* $B \subset \mathbb{L}(\tau)$ *formada por conjuntos* η*-limitados e* η*-fechados, então*

$$\mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau]) = \mathbb{L}(\tau).$$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 2.6 temos que $\mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau]) \subset \mathbb{L}(\tau)$.

Por outro lado, segue da hipótese feita que $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\eta)$. Pela Proposição 1.24, temos $\mathbb{L}(\tau) \subset \mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau])$, como queríamos.

Se A for um subconjunto η-compacto e τ-limitado de E, como η e $\gamma[\eta,\tau]$ coincidem nos τ-limitados, temos que A é $\gamma[\eta,\tau]$-compacto. Vamos ver agora que sob as hipóteses do Teorema 2.7 a recíproca é verdadeira.

PROPOSIÇÃO 2.9: *Se existir em* E *uma sequência fundamental* $B \subset \mathbb{L}(\tau)$ *formada por conjuntos* η*-fechados, então todo subconjunto* $\gamma[\eta,\tau]$*-compacto de* E *é* η*-compacto e* τ*-limitado.*

DEMONSTRAÇÃO: Se $A \subset E$ é $\gamma[\eta,\tau]$-compacto, então é $\gamma[\eta,\tau]$-limitado. Pelo Teorema 2.6, A é também τ-limitado. Pela Proposição 2.4.(ii), η e $\gamma[\eta,\tau]$ coincidem em A. Logo A é também η-compacto.

DEFINIÇÃO 2.10: Um espaço vetorial topológico (E,τ) é chamado *semi-Montel* se seus limitados são relativamente compactos.

PROPOSIÇÃO 2.11: *Se* $(E;\eta,\tau)$ *é* EVBT *e* $(E,\gamma[\eta,\tau])$ *é semi-Montel, então todo subconjunto* τ*-limitado* η*-fechado de* E *é* η*-compacto.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B \in \mathbb{L}(\tau)$ um subconjunto η-fechado de E. Pela Proposição 1.24, B é $\gamma[\eta,\tau]$-limitado e como $\eta \subset \gamma[\eta,\tau]$, B é também $\gamma[\eta,\tau]$-fechado. Como por hipótese $(E,\gamma[\eta,\tau])$ é semi-Montel, segue que B é $\gamma[\eta,\tau]$-compacto. Logo B é η-compacto.

PROPOSIÇÃO 2.12: *Se existir sequência fundamental* $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(\tau)$ *em* E *formada por conjuntos* η*-compactos então* $(E,\gamma[\eta,\tau])$ *é semi-Montel.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ sequência fundamental de τ-limitados que são η-compactos. Seja $B \in \mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau])$ e seja $\overline{B}$ seu fecho em $(E,\gamma[\eta,\tau])$. Pelo Teorema 2.6, $\overline{B}$ é τ-limitado. Logo existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{B} \subset B_n$, onde B_n é compacto. Pela Proposição 2.4.(ii), B_n é $\gamma[\eta,\tau]$-compacto. Assim sendo, $\overline{B}$ é $\gamma[\eta,\tau]$-compacto, o que completa a demonstração.

COROLÁRIO 2.13: *Se existir sequência fundamental* $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(\tau)$ *formada por conjuntos* η*-limitados e* η*-fechados e se* (E,η) *for semi-Montel, então* $(E,\gamma[\eta,\tau])$ *é semi-Montel.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ sequência fundamental de τ-limitados tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n é η-fechado e η-limitado. Como (E,η) é semi-Montel, B_n é η-compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. Estamos, pois, nas condições da Proposição 2.12, de onde segue que $(E,\gamma[\eta,\tau])$ é semi-Montel.

COROLÁRIO 2.14: *Se* $(E;\eta,\tau)$ *for* EVBT *e se existir sequência fundamental* $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(\tau)$ *formada por subconjuntos* η-*compactos de* E, *então* $(E,\gamma[\eta,\tau])$ *é semi-Montel se e somente se todo subconjunto* τ-*limitado* η-*fechado de* E *é* η-*compacto*.

LEMA 2.15: *Se* $(E;\eta,\tau)$ *e* EVBT *e se* (E,τ) *é bornológico (em particular se* (E,τ) *é normado) então* $\gamma[\eta,\tau] \subset \tau$.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a identidade $I : (E,\tau) \to (E,\gamma[\eta,\tau])$ e $B \subset E$ um subconjunto τ-limitado. Como $(E;\eta,\tau)$ é EVBT segue, pela Proposição 1.24, que B é $\gamma[\eta,\tau]$-limitado e como (E,τ) é bornológico, I é contínua, do que segue o resultado.

PROPOSIÇÃO 2.16: *Seja* (E,τ) *um espaço normado. Se existir uma sequência fundamental* $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(\tau)$ *formada por conjuntos que são* η-*fechados e se* $(E,\gamma[\eta,\tau])$ *é bornológico (em particular metrizável), então* $\tau \subset \gamma[\eta,\tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 2.6, $\mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau]) \subset \mathbb{L}(\tau)$. Logo, a identidade $I : (E,\gamma[\eta,\tau]) \to (E,\tau)$ é contínua pelo fato de $(E,\gamma[\eta,\tau])$ ser bornológico. Decorre daí que $\tau \subset \gamma[\eta,\tau]$.

Vamos apresentar uma nova descrição das vizinhanças da origem para $\gamma[\eta,\tau]$ no caso em que $\mathbb{L}(\tau)$ possui um sistema fundamental enumerável.

Para isso, consideremos uma sequência $\mathcal{U} = \{U_n ; n \in 0,1,\ldots\}$ de η-vizinhanças equilibradas da origem em E e $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência fundamental crescente de subconjuntos τ-limitados de E, satisfazendo (a), (b) e (c) da página 46. A família Λ'' de todos os conjuntos do tipo

$$\gamma''(\mathcal{B}) = U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n)$$

constitue um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia $\gamma''[\eta,\tau]$ de EVT sobre E, pois

(0) $\phi \notin \Lambda''$ *e* $\Lambda'' \neq \phi$, *pois* $\mathcal{B}$ *é crescente.*

(1) *Dados* $\gamma''(\mathcal{U}) = U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n)$ *e*

$$\gamma''(\mathcal{V}) = V_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n + B_n),$$

existe $\gamma''(\mathcal{W}) \in \Lambda''$ *tal que* $\gamma''(\mathcal{W}) \subset \gamma''(\mathcal{U}) \subset \gamma''(\mathcal{V})$.

Com efeito, se tomarmos a sequência $\{W_n ; n = 0, 1, \ldots\}$ de

η-vizinhanças da origem tal que $W_n = U_n \cap V_n$, temos

$$\gamma''(\mathcal{W}) = W_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (W_n + B_n) = (U_o \cap V_o) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap V_n + B_n) \subset$$

$$\subset (U_o \cap V_o) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} [(U_n + B_n) \cap (V_n + B_n)]$$

$$\subset [U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n)] \cap [V_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n + B_n)] =$$

$$= \gamma''(\mathcal{U}) \cap \gamma''(\mathcal{V}) .$$

(2) a) *Cada* $\gamma''(\mathcal{U})$ *é equilibrado e absorvente.*

Seja $\lambda \in F$ com $0 < |\lambda| < 1$. Então

$$\lambda\gamma''(\mathcal{U}) = \lambda U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (\lambda U_n + \lambda B_n)$$

$$\subset U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n) ,$$

pois, para cada $n = 0,1,\ldots$, U_n e B_n são equilibrados.

Logo $\lambda\gamma''(\mathcal{U}) \subset \gamma''(\mathcal{U})$ e portanto $\gamma''(\mathcal{U})$ é equilibrado.

Consideremos agora $x \in E$. Seja $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_{n_o}$. Como a sequência $\mathcal{B}$ é crescente, para todo $n \geq n_o$, temos

$$x \in B_n \subset U_n + B_n .$$

Como cada U_n é absorvente, para cada $i = 0,1,\dots,n_o - 1$, existe $\delta_i > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda_i| \geq \delta_i$,

$$x \in \lambda_i U_i \subset \lambda_i (U_i + B_i).$$

Tomemos

$$\delta = \max\{\delta_o, \dots, \delta_{n_o - 1}, 1\}.$$

Assim, para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, ocorre que $x \in \lambda U_i$ para todo $i = 0,1,\dots$. Segue-se então que

$$x \in \lambda U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \lambda (U_n + B_n) = \lambda \gamma''(\mathcal{U}).$$

(2) b) *Se* $\gamma''(\mathcal{U}) \in \Lambda''$, *então existe* $\gamma''(\mathcal{V}) \in \Lambda''$ *com*

$$\gamma''(\mathcal{V}) + \gamma''(\mathcal{V}) \subset \gamma''(\mathcal{U}).$$

Se

$$\gamma''(\mathcal{U}) = U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n),$$

escolhamos uma sequência $\{V_n ; n = 0,1,\dots\}$ de η-vizinhanças da origem tal que

$$V_o + V_o \subset U_o \cap U_1$$

e

$$V_n + V_n \subset U_{n+1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e seja

$$\gamma''(V) = V_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n + B_n).$$

Se $x \in \gamma''(V) + \gamma''(V)$, então $x = y + z$ com y e z em V_o e y e z em $V_n + B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$x = y + z \in V_o + V_o \subset U_o \cap U_1 \subset U_o \cap (U_1 + B_1)$$

e para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x = y + z \in V_n + B_n + V_n + B_n \subset U_{n+1} + B_{n+1} .$$

Logo

$$x \in U_o \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (U_n + B_n) = \gamma''(U).$$

(2) c) *Para algum* $\lambda \in F$ *com* $0 < |\lambda| < 1$ *(e daí para todo* $\lambda \in F^*$*), dado* $\gamma''(U) \in \Lambda''$, *existe* $\gamma''(V) \in \Lambda''$ *tal que* $\gamma''(V) \subset \lambda\gamma''(U)$.

Seja

$$\gamma''(U) = U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n)$$

dado e seja $\lambda \in F$ com $0 < |\lambda| < 1$ escolhido da definição de $\mathcal{B}$. Por hipótese, para cada $n = 0,1,\ldots,$ existe uma η-vizinhança

V_n da origem tal que $V_n \subset \lambda U_{n+1}$ e existe uma η-vizinhança V_o da origem tal que

$$V_o \subset \lambda(U_o \cap U_1) \subset \lambda[U_o \cap (U_1 + B_1)].$$

Assim, como para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset \lambda B_{n+1}$, obtemos

$$\gamma''(V) = V_o \cap (V_1 + B_1) \cap (V_2 + B_2) \cap \ldots \subset$$

$$\subset \lambda U_o \cap \lambda(U_1 + B_1) \cap \lambda(U_2 + B_2) \cap \ldots =$$

$$= \lambda\gamma''(U).$$

PROPOSIÇÃO 2.17: *Sob as condições acima*, $\gamma''[\eta,\tau] = \gamma^*[\eta,\tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar inicialmente que $\gamma''[\eta,\tau] \subset \gamma^*[\eta,\tau]$, em cada conjunto $B_k \in \mathcal{B}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\gamma''(U) \cap B_k = [U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n + U_n)] \cap B_k =$$

$$= U_o \cap \bigcap_{n=1}^{k} (B_n + U_n) \cap B_k,$$

que é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B_k. Segue então da Proposição 2.4.(iii) que $\gamma''[\eta,\tau] \subset \gamma^*[\eta,\tau]$.

Consideremos agora uma $\gamma^*[\eta,\tau]$-vizinhança da origem dada por

$$\gamma(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (U_i \cap B_i).$$

Para cada $n = 2,3,\ldots,$ consideremos uma η-vizinhança V_n da origem tal que $V_n + V_n \subset U_{n+2}$. Se $x \in \gamma''(\mathcal{V})$ então

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n + B_n)$$

o que implica que para cada $n \geq 1$, x possui uma decomposição $x = y_n + z_n$ com $y_n \in V_n$ e $z_n \in B_n$.

Vamos definir $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2 - z_1,\ldots,x_n = z_n - z_{n-1}, \ldots$ e temos:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + y_n = z_1 + z_2 - z_1 + \ldots + z_n - z_{n-1} + y_n =$$

$$= z_n + y_n = x$$

e portanto $y_{n-1} - y_n = x_n$.

Logo,

$$x_n = y_{n-1} - y_n \in V_n + V_{n-1} \subset V_{n-1} + V_{n-1} \subset U_{n+1}$$

e

$$x_n = z_n - z_{n-1} \in B_n + B_{n-1} \subset B_n + B_n \subset B_{n+1}.$$

Assim temos $x_n \in U_{n+1} \cap B_{n+1}$. (1)

Seja agora n_o escolhido tal que $x \in B_{n_o}$. Então

$$y_{n_o} = x - z_{n_o} \in B_{n_o} + B_{n_o} \subset B_{n_o+1} \subset B_{n_o+2}$$

e

$$y_{n_o} \in V_{n_o} \subset U_{n_o+2} .$$

Logo,

$$y_{n_o} \in U_{n_o+2} \cap B_{n_o+2}. \qquad (2)$$

De (1) e (2), temos

$$x = x_1 + \ldots + x_{n_o} + y_{n_o} \in (U_2 \cap B_2) + \ldots + (U_{n_o} \cap B_{n_o}) +$$

$$+ \ldots + (U_{n_o+2} \cap B_{n_o+2}) \subset \gamma(\mathcal{U}).$$

Isto mostra que $\gamma^*[\eta,\tau] \subset \gamma''[\eta,\tau]$.

TEOREMA 2.18: *Se* $\mathbb{L}(\tau)$ *possui uma sequência fundamental formada por conjuntos* η*-fechados, então a topologia* $\gamma[\eta,\tau]$ *é* η*-fechada.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos tomar um sistema fundamental de vizinhanças da origem para $\gamma''[\eta,\tau]$ formado por conjuntos do tipo

$$\gamma''(\mathcal{U}) = U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + B_n)$$

onde $\mathcal{B} \subset \mathbb{L}(\tau)$ é formado por conjuntos η-fechados, e

$$\mathcal{U} = \{U_n ; n = 0, 1, \ldots\}$$

é uma sequência de η-vizinhanças η-fechadas da origem.

Como cada conjunto $\gamma''(\mathcal{U})$ desse tipo é claramente η-fechado, segue que $\gamma''[\eta,\tau]$ é η-fechada e consequentemente, $\gamma[\eta,\tau]$ é η-fechada.

PROPOSIÇÃO 2.19: *Se* η *for localmente* F-*convexa e a sequência fundamental* $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ *puder ser escolhida tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$, B_n *é* F-*convexo, então* $\gamma[\eta,\tau]$ *é localmente* F-*convexa.*

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos uma $\gamma[\eta,\tau]$-vizinhança da origem

$$\gamma(\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} (U_k \cap B_k),$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, B_n é F-convexo. Como η é localmente F-convexa, existe uma sequência $\mathcal{U}' = \{U_k' ; k \in \mathbb{N}\}$ de η-vizinhanças F-convexas da origem tal que $U_k' \subset U_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. A vizinhança $\gamma(\mathcal{U}')$ da origem é F-convexa visto que para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto $U_n' \cap B_n$ é F-convexo. Ainda mais, temos $\gamma(\mathcal{U}') \subset \gamma(\mathcal{U})$ do que segue que $\gamma[\eta,\tau]$ é localmente F-convexa.

PROPOSIÇÃO 2.20: *Sejam* E, η *e* τ *como na Proposição 2.19. Então*

$\gamma\,[\eta,\tau] = \gamma_F\,[\eta\ \tau]$.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar incialmente que $\gamma_F\,[\eta,\tau] \subset \gamma\,[\eta,\tau]$. Mas $\gamma_F\,[\eta,\tau] = \eta$ nos subconjuntos γ-limitados. Então pela Observação 1.6, temos $\gamma_F\,[\eta,\tau] \subset \gamma\,[\eta,\tau]$.

Para mostrarmos a segunda inclusão, lembramos que, $\gamma_F\,[\eta,\tau]$ é a mais fina topologia de EVT localmente F-convexa que coincide com η nos subconjuntos τ-limitados de E. Além disso, $\gamma\,[\eta,\tau]$ coincide com η nos subconjuntos τ-limitados e pela Proposição 2.19, é localmente F-convexa. Logo $\gamma\,[\eta,\tau] \subset \gamma_F\,[\eta,\tau]$.

§ 3 - ESPAÇOS DE SAKS

Seja E um espaço vetorial sobre F e sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E. Se η é determinada por uma família de seminormas, gostaríamos de encontrar uma família de seminormas que define a topologia $\gamma[\eta,\tau]$. Para isso vamos pedir que E, η e τ satisfaçam a propriedade:

(*) A topologia τ é definida por uma norma $\|\cdot\|$; a topologia η é determinada por uma família S de seminormas p tais que

$$\|f\| = \sup\{p(f);\ p \in S\},$$

para todo $f \in E$.

Quando a norma $\|\cdot\|$ é não-arquimediana suporemos que a família S acima pode ser encontrada de modo que cada seminorma $p \in S$ é não-arquimediana. Diremos então que vale a propriedade (*) n.a.

Observamos que numa terna $(E;\eta,\tau)$ como acima são verdadeiras as seguintes propriedades:

(1) *Para todo número real* $r > 0$, *a bola fechada* $\overline{B}_r$ *de raio* r *em* (E,τ) *é* η*-limitada.*

Isto é verificado imediatamente, pois para qualquer $x \in \overline{B}_r$, com $r > 0$ fixado, temos $p(x) \leq \|x\| \leq r$, do que segue que $\eta \subset \tau$.

(2) *As bolas* $\overline{B_r}$ *são* η-*fechadas*.

Com efeito, consideremos o net $\{x_\delta \; ; \; \delta \in \Delta\}$ em $\overline{B_r}$, η-convergente a um elemento x de E. Como para qualquer $\delta \in \Delta$, $x_\delta \in \overline{B_r}$, temos, para todo $p \in S$, $p(x_\delta) \leq \|x_\delta\| \leq r$ e portanto $p(x) \leq r$. Logo,

$$\|x\| = \sup \{p(x) \; : \; p \in S\} \leq r$$

e portanto $x \in \overline{B_r}$.

Segue da propriedade (1) que $(E;\eta,\tau)$ é um EVBT, e da propriedade (2) que a topologia τ, dada pela norma $\|\cdot\|$, é η-fechada. Portanto, se $\|\cdot\|$ for não arquimediana, então $(E;\eta,\tau)$ satisfaz as condições do Teorema 1.28, e portanto $\mathbb{L}(\tau) = \mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau])$.

DEFINIÇÃO 3.1: Se $(E;\eta,\tau)$ satisfaz a propriedade (*) (respectivamente (*) não arquimediana) diremos que $(E;\eta,\tau)$ é um *espaço de Saks* (respectivamente *espaço de Saks não arquimediano*).

Se a topologia τ for proveniente da norma $\|\cdot\|$, poderemos denotar a terna $(E;\eta,\tau)$ por $(E;\eta,\|\cdot\|)$.

EXEMPLO 3.2: Seja $(E,\|\cdot\|)$ um espaço normado sobre $(F,|\cdot|)$. Seja Φ um conjunto de funcionais lineares contínuos sobre E tais que

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in \Phi} |\varphi(x)|.$$

Seja η a topologia definida em E pela família S de seminormas $x \to |\varphi(x)|$ quando φ percorre Φ. Então $(E;\eta, \|\cdot\|)$ é um espaço de Saks. Como exemplo, seja $E = \ell_\infty$ o espaço de todas as sequências $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ com $x_n \in F$ tais que

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty.$$

Neste caso, Φ será o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \to x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLO 3.3: Consideremos a terna $(E;\eta, \|\cdot\|)$, onde E é o espaço vetorial de todas as sequências $\{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ com $x_n \in F$ tais que

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty,$$

η é a topologia definida pela família S de seminormas

$$p_n(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \text{e} \quad \|x\| = \|x\|_1 .$$

Temos:

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \sup_n \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sup_n p_n(x),$$

o que implica que a terna $(E;\eta,\|\cdot\|)$ é um espaço de Saks.

Consideremos agora um espaço de Saks $(E;\eta,\|\cdot\|)$ e S uma família de seminormas η-contínuas que definem a topologia η, fechada por supremo finito e tal que $\|\cdot\| = \sup S$. Observamos aqui que S é um conjunto dirigido.

Para cada par de sequências $\{p_n ; n \in \mathbb{N}\}$ e $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}\}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in S$ e $\lambda_n \in F^*$ com $|\lambda_n| \to +\infty$, a aplicação

$$\tilde{p} : x \to \sup \{ |\lambda_n|^{-1} p_n(x) ; n \in \mathbb{N} \}$$

é uma seminorma sobre E.

Seja $\tilde{\gamma}[\eta,\|\cdot\|]$ a topologia definida sobre E pela família $\tilde{S}$ de todas as seminormas $\tilde{p}$ assim definidas.

Observamos que a família $\tilde{S}$ é um conjunto dirigido.

PROPOSIÇÃO 3.4: *Se* $(E;\eta,\|\cdot\|)$ *é um espaço de Saks e* $\tilde{\gamma}[\eta,\|\cdot\|]$ *é a topologia definida pela família* $\tilde{S}$ *acima, então*

$$\tilde{\gamma}[\eta,\|\cdot\|] \subset \gamma[\eta,\|\cdot\|].$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência fundamental de subconjuntos $\|\cdot\|$-limitados de E satisfazendo (a), (b) e (c) da definição de $\mathcal{B}$.

Usando a Proposição 2.5.(iii), basta mostrarmos que

$\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|] \subset \eta$ em cada elemento $B' \in \mathcal{B}$. Seja $\tilde{V}$ uma $\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|]$-vizinhança da origem em B' dada por

$$\tilde{V} = B' \cap \{x \in E : \tilde{p}_n(x) \leq 1\} =$$

$$= B' \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : p_n(x) \leq |\lambda_n|\},$$

onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in S$ e $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é sequência em F^* com $|\lambda_n| \to +\infty$.

Como $B \in \mathbb{L}(\|\cdot\|)$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $\lambda \in F^*$, com $|\lambda| \geq \delta$, temos $B' \subset \lambda B$, onde por B denotaremos a bola unitária fechada de $(E, \|\cdot\|)$. Logo existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que, para todo $n \geq n_o$,

$$B' \subset \lambda_n B \subset \{x : p_n(x) \leq |\lambda_n|\},$$

visto que $\|\cdot\| = \sup S$ e $p_n \in S$.

Assim,

$$B' \subset \bigcap_{n=n_o}^{\infty} \{x : p_n(x) \leq |\lambda_n|\}$$

e portanto

$$B' \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : p_n(x) \leq |\lambda_n|\} = B' \cap \bigcap_{n=1}^{n_o} \{x : p_n(x) \leq |\lambda_n|\},$$

que é uma $\hat{\eta}$-vizinhança da origem em B'.

Logo, $\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|] \subset \gamma[\eta, \tau]$.

PROPOSIÇÃO 3.5: *Seja* $(E;\eta, \|\cdot\|)$ *um espaço de Saks. Consideremos as seguintes condições:*

(a) *para cada* $x \in E$, *para cada* $\varepsilon > 0$ *e para cada* $p \in S$ *existem elementos* y *e* z *em* E *tais que*

$$x = y + z, \quad p(z) = 0 \quad e \quad \|y\| \leq p(x) + \varepsilon.$$

(b) *a bola unitária* B *de* $(E, \|\cdot\|)$ *é* η-*compacta.*

Se (a) ou (b) estiver verificada, então

$$\gamma[\eta, \|\cdot\|] \subset \tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|].$$

DEMONSTRAÇÃO: (a) Vamos supor inicialmente que está satisfeita a condição (a) e vamos provar que

$$\gamma''[\eta, \|\cdot\|] \subset \tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|], \text{ onde } \gamma''[\eta, \|\cdot\|]$$

é a topologia definida em 2.17, supondo-se que η é dada por uma família S de seminormas e $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$, com $B_n = \mu_n B$, sendo $\mu_n = \lambda^{-n}$, para algum $\lambda \in F^*$, com $0 < |\lambda| < \frac{1}{2}$.

Consideremos então a $\gamma''[\eta, \|\cdot\|]$-vizinhança da origem dada por

$$\gamma''(\mathcal{U}) = U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n + \mu_n B),$$

onde para cada $n = 0,1,\ldots$, $U_n = \{x \in E : p_n(x) \leq \varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$ e $p_n \in S$.

Seja $\lambda_o \in F^*$ tal que $|\lambda_o| \leq \varepsilon_o$ e para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\lambda_n \in F^*$ tal que $\varepsilon_n + |\lambda_n| \leq |\mu_n|$. Seja $x \in E$ tal que

$$\tilde{p}(x) = \sup\{|\lambda_n|^{-1} p_n(x);\ n = 0,1,\ldots\} \leq 1.$$

Por hipótese, para cada $n \in \mathbb{N}$, existem y_n e z_n em E tais que $x = y_n + z_n$, $p_n(z_n) = 0$ e

$$\| y_n \| \leq p_n(x) + |\lambda_n| \leq \varepsilon_n + |\lambda_n| \leq |\mu_n|.$$

Assim, para todo $n = 1,2,\ldots$, temos $z_n \in U_n$ e $y_n \in \mu_n B$, o que implica que $x \in U_n + \mu_n B$.

Para $n = 0$, se

$$\tilde{p}(x) = \sup\{|\lambda_n|^{-1} p_n(x);\ n = 0,1,\ldots\} \leq 1,$$

então $p_o(x) \leq |\lambda_o|$, do que segue que $x \in U_o$.

Logo, $x \in \gamma''(\mathcal{U})$ e portanto $\{x;\ \tilde{p}(x) \leq 1\} \subset \gamma''(\mathcal{U})$ o que implica que $\gamma''(\mathcal{U})$ é uma $\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|]$-vizinhança da origem em E.

Logo, $\gamma[\eta,\tau] \subset \tilde{\gamma}[\eta,\tau]$.

(b) Suponhamos agora que B é η-compacta.

Seja U uma $\gamma[\eta,\|\cdot\|]$-vizinhança aberta da origem em E. Como $\gamma[\eta,\tau]$ e η coincidem sobre os $\|\cdot\|$-limitados de E, existem $p_o \in S$ e $\varepsilon > 0$ tais que $\{x : p_o(x) < \varepsilon\} \cap B \subset U \cap B$.

Suponhamos encontradas $p_1,\ldots,p_n \in S$ tais que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{x : p_k(x) \leq |\lambda_k|\} \cap \mu_n B \subset U \cap \mu_n B,$$

onde $\lambda_n \in F^*$ com $|\lambda_o| < \varepsilon$ e $|\lambda_k| \geq k-1$, $k=2,\ldots,n$ e $\mu_n \in F^*$ com

$$k \leq |\mu_k| \leq |\mu_{k+1}|, \qquad k = 1,\ldots,n-1.$$

Queremos provar que existe $p_{n+1} \in S$ tal que

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} \{x : p_k(x) \leq |\lambda_k|\} \cap \mu_{n+1} B \subset U \cap \mu_{n+1} B.$$

Vamos supor, por absurdo, que não existe uma seminorma nestas condições. Então para qualquer $q \in S$, o conjunto

$$C_q = \bigcap_{k=1}^{n} \{x : p_k(x) \leq |\lambda_k|\} \cap \{x : q(x) \leq n\} \cap (\mu_{n+1} B \setminus U)$$

é não vazio. Como o conjunto $\mu_{n+1} B \setminus U$ é $\gamma[\eta,\|\cdot\|]$- compacto e portanto η-compacto, pela propriedade da intersecção finita existe um ponto x_o em $(\mu_{n+1} B \setminus U) \cap \bigcap_{q \in S} C_q$ e portanto

$$x_o \in \bigcap_{k=1}^{n} \{x : p_k(x) \leq |\lambda_n|\}.$$

Temos então $q(x_o) \leq n \leq |\mu_n|$ para cada $q \in S$, o que implica $\| x_o \| \leq |\mu_n|$.

Logo $x_o \in U \cap \mu_n B$ e portanto $x \in U \cap \mu_{n+1} B$, o que é uma contradição.

Assim foi construida, por indução, uma sequência $\{p_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de seminormas de S tal que

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{x : p_k(x) \leq |\lambda_k|\} \subset U$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\{x : |\lambda_n|^{-1} p_n(x) \leq 1\} \subset U.$$

Portanto existe uma $\tilde{\gamma}\,[\eta, \|\cdot\|]$-vizinhança $\tilde{U}$ da origem dada por $\tilde{U} = \{x : \tilde{p}(x) \leq 1\}$ que está contida em U.

Logo $\gamma\,[\eta, \|\cdot\|] \subset \tilde{\gamma}\,[\eta, \|\cdot\|]$, como queríamos.

OBSERVAÇÃO 3.6: Por este resultado e por 3.4 vimos que se $(E; \eta, \|\cdot\|)$ é um espaço de Saks onde uma das condições (a) ou (b) da Proposição 3.5 é satisfeita, então uma base de vizinhanças da origem para a topologia $\gamma\,[\eta, \|\cdot\|]$ pode ser dada por conjuntos do tipo

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : p_n(x) \leq |\lambda_n|\},$$

onde $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em F^* com $|\lambda_n| \to +\infty$ e $\{p_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência de seminormas η-contínuas pertencentes a S.

EXEMPLO 3.7: Vamos dar um exemplo de um espaço de Saks não arquimediano onde está satisfeita a condição (a) da Proposição 3.5. É fácil ver que a terna $(\ell_\infty;\eta, \|\cdot\|_\infty)$ do Exemplo 3.2 onde η é a topologia localmente F-convexa definida pela família de seminormas não arquimedianas $\{p_i ; i \in \mathbb{N}\}$, onde $p_i(x) = |x_i|$ é um espaço de Saks não arquimediano.

Sejam $\varepsilon > 0$, $x \in E$ e $i \in \mathbb{N}$ fixados. Se tormarmos

$$y = (x_1,\ldots,x_i ,0,\ldots) \quad e \quad z = (0,\ldots,0,x_{i+1},x_{i+2},\ldots)$$

em ℓ_∞ temos:

$$x = y + z, \quad p_i(z) = |z_i| = 0$$

e

$$\|y\| = \sup_i |y_i| = \max_{1\leq j\leq i} |x_i| \leq \|x\| \leq \|x\| + \varepsilon.$$

Logo $(\ell_\infty;\eta, \|\cdot\|_\infty)$ satisfaz a condição (a) da Proposição 3.5 e portanto uma base de vizinhanças da origem para a topologia mista $\gamma[\eta,\|\cdot\|_\infty]$ pode ser dada por conjuntos do tipo

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \{x : |x_i| \leq |\lambda_i|\},$$

onde $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em F^* com $|\lambda_n| \to +\infty$.

EXEMPLO 3.8: Já vimos que a terna $(\ell_1;\eta, \|\cdot\|_1)$ do Exemplo 3.3 é um espaço de Saks. Vamos mostrar que aqui também a condição (a) da Proposição 3.5 está satisfeita e vamos apresentar uma base de vizinhanças da origem para $\gamma[\eta,\|\cdot\|_1]$ em ℓ_1. Da mesma forma, fazendo, para cada $x \in \ell_1$, $\varepsilon > 0$ e $i \in \mathbb{N}$,

$$y = (x_1,\ldots,x_i,0,0,\ldots) \quad \text{e} \quad z = (0,0,\ldots,0,x_{i+1},x_{i+2},\ldots)$$

obtemos $x = y + z$, $p_i(z) = \sum_{k=1}^{i} |x_k| = 0$ e

$$\|y\| = \sup_i \sum_{k=1}^{i} |y_k| = \sum_{k=1}^{i} |x_k| \leq \|x\| \leq \|x\| + \varepsilon.$$

Assim, $(\ell_1;\eta, \|\cdot\|_1)$ satisfaz a condição (a) da Proposição 3.5 e portanto uma base de vizinhanças da origem para $\gamma[\eta,\|\cdot\|_1]$ é dada por conjuntos do tipo

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in \ell_1 : \sum_{k=1}^{i} |x_k| \leq |\lambda_i|\},$$

onde $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é sequência em F^* com $|\lambda_n| \to +\infty$.

EXEMPLO 3.9: Daremos agora um exemplo de um espaço de Saks no qual é satisfeita a condição (b) da Proposição 3.5. Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço normado sobre um corpo local não trivialmente valorizado $(F, |\cdot|)$ tal que $\|E\| \subset |F|$ e seja E^* seu dual.

Para cada $\varphi \in E^*$, definamos a norma

$$\|\varphi\| = \inf \{r > 0; \ |\varphi(x)| < r\|x\|\}.$$

Seja η a topologia fraca ω^* que é definida em E^* pela família de seminormas $p_x : \varphi \to |\varphi(x)|$, $x \in E$.

Vamos mostrar que

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)|.$$

Se $\|x\| \leq 1$, temos $|\varphi(x)| \leq r$, do que segue que

$$\sup \{|\varphi(x)| = \|x\| \leq 1\} \leq r$$

para todo número real positivo r. Logo,

$$\sup \{|\varphi(x)|; \ \|x\| \leq 1\} \leq \|\varphi\|. \quad (1)$$

Tomemos agora $r = \sup \{|\varphi(x)|; \|x\| \leq 1\}$ e $x \in E$ arbitrário. Seja $\lambda \in F$ tal que $|\lambda| = \|x\|$. Então

$$\|\lambda^{-1} x\| = |\lambda|^{-1}\|x\| = 1$$

e portanto $|\varphi(\lambda^{-1}x)| \leq r$, ou seja $|\lambda|^{-1}|\varphi(x)| \leq r$, o que implica

$$\|\varphi(x)\| \leq r \|x\| .$$

Da definição, segue que

$$\|\varphi\| \leq r = \sup \{ |\varphi(x)| : \|x\| \leq 1\}. \quad (2)$$

De (1) e (2) temos

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| .$$

Isto mostra que a terna $(E^*;\omega^*,\|\cdot\|)$ é um espaço de Saks.

Como $(F,|\cdot|)$ é localmente compacto, pelo Teorema de Alaoglu, para todo $r>0$ a bola fechada de raio r em $(E^*,\|\cdot\|)$ é ω^*-compacta. Logo $(E^*;\omega^*,\|\cdot\|)$ satisfaz a condição (b) da Proposição 3.5.

Assim uma base de vizinhanças da origem para a topologia mista $\gamma[\omega^*;\|\cdot\|]$ em E pode ser dada por conjuntos do tipo

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \{\varphi \in E^* : |\varphi(x_i)| \leq |\lambda_i|\},$$

onde $\{\lambda_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em F^* com $|\lambda_n| \to +\infty$ e $x_i \in E$ com $\|x_i\| \leq 1$.

EXEMPLO 3.10: Vamos dar outro exemplo de espaço de Saks onde a condição (a) da Proposição 3.5 é satisfeita. Consideremos o espaço

$C_b(X;F)$ das funções contínuas e limitadas definidas sobre um espaço topológico localmente compacto e 0-dimensional X e consideremos sobre $C_b(X;F)$ a topologia compacto-aberta κ e a topologia σ da convergência uniforme sobre X, proveniente da norma $\|\cdot\|_\infty$.

Para cada $f \in C_b(X;F)$, temos $\|f\|_\infty = \sup_k p_k(f)$, onde K percorre a família de todos os subconjuntos compacto de X. Assim,

$$\|f\|_\infty = \sup\{p_K(f);\ p_K \in S\},$$

onde S é uma família de seminormas que define a topologia κ sobre $C_b(X;F)$. Isto mostra que $(C_b(X;F),\kappa,\|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Saks.

Para mostrarmos que esta terna satisfaz a condição (a) da Proposição 3.5, consideremos dados $f \in C_b(X;F)$, $\varepsilon > 0$ e $K \subset X$ compacto. Seja A um subconjunto compacto-aberto de X tal que $K \subset A$ e

$$\sup_{x\in A} |f(x)| \leq p_K(f) + \varepsilon.$$

Seja $\varphi \in C_b(X;F)$ a função característica de A. Então $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in K$ e $\varphi(x) = 0$ para todo $x \notin A$.

Definindo as funções $h(x) = [1 - \varphi(x)]f(x)$ e $g(x) = \varphi(x)f(x)$, temos: $f = g + h$; $p_K(h) = 0$ e

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in X} |g(x)| = \sup_{x\in A} |f(x)| \leq p_K(f) + \varepsilon.$$

Assim a condição (a) está satisfeita e portanto uma base de vizinhanças da origem para $\gamma\,[\kappa,\sigma]$ pode ser dada por conjuntos do tipo

$$U = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f \in C_b(X;F);\ p_{K_n}(f) \leq |\lambda_n|\}$$

onde $\{\lambda_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em F com $|\lambda_n| \to +\infty$ e $\{K_n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ é uma sequência estritamente crescente de compacto-abertos de X.

TEOREMA 3.11: *Se* κ *e* σ *são topologias definidas sobre* $C_b(X;F)$ *como no Exemplo 3.10, então* $\beta = \gamma\,[\kappa,\sigma]$.

DEMONSTRAÇÃO: Vimos em 0.13 que β e κ coincidem sobre os σ-limitados. Logo $\beta \subset \gamma\,[\kappa,\sigma]$.

Vamos mostrar que $\gamma\,[\kappa,\sigma] \subset \beta$. Seja U uma $\gamma\,[\kappa,\sigma]$-vizinhança da origem. Pelo Exemplo 3.10, existe uma $\gamma\,[\kappa,\sigma]$-vizinhança da origem $U_1 \subset U$ do tipo

$$U_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f \in C_b(X;F);\ p_{K_n}(f) \leq |\lambda_n|\}$$

e as sequências $\{K_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ e $\{\lambda_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ satisfazem as propriedades lá enunciadas.

Vamos definir uma função limitada $\phi : X \to F$ pondo

$$\phi(x) = \begin{cases} \lambda_1^{-1}, & \text{se} \quad x \in K_1 \\ \lambda_n^{-1}, & \text{se} \quad x \in K_n - K_{n-1} \\ 0, & \text{se} \quad x \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n , \end{cases}$$

que é contínua. Com efeito, seja $x_o \in X$. Se $x_o \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, então $x_o \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$, onde $H_1 = K_1$ e $H_n = K_n - K_{n-1}$, para $n > 1$. Logo, para algum $j \in \mathbb{N}$, temos $\phi(x_o) = \lambda_j^{-1}$. Dada uma vizinhança W do ponto λ_j^{-1} em $(F,|\cdot|)$, podemos escolher uma vizinhança W' de λ_j^{-1} tal que $W' \subset W$ e $\lambda_n^{-1} \notin W'$, para todo $n \neq j$. Assim sendo, $\phi^{-1}(W') = H_j$, que é um subconjunto aberto e fechado de X e contém o ponto x_o. Portanto $\phi(H_j) \subset W$.

Se $x_o \in X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, então $\phi(x_o) = 0$. Seja então V uma vizinhança do zero em $(F,|\cdot|)$. Como $\lambda_n^{-1} \to 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_o$, $\lambda_n^{-1} \in V$. Seja

$$A = X \setminus \bigcup_{n=1}^{n_o} K_n ,$$

que é um conjunto aberto e fechado e contém x_o. Se $x \in A$ e $x \neq x_o$, temos $\phi(x) = \lambda_n^{-1}$ para algum $n \geq n_o$. Portanto $\phi(x) \in V$, ou seja, $\phi(A) \subset V$.

Logo ϕ é contínua.

Da construção de ϕ decorre imediatamente que $\phi \in C_o(X;F)$. Assim a aplicação

$$f \to p_\phi(f) = \sup_{x \in X} |\phi(x) f(x)|$$

é uma seminorma para a topologia β. Considerando então a β-vizinhança da origem $\mathcal{U}_\phi = \{f \in C_b(X;F) : p_\phi(f) \leq 1\}$, temos que se $g \in U_\phi$, então

$$p_\phi(g) = \sup_{x \in X} |\phi(x) g(x)| \leq 1.$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$p_{K_n}(f) = \sup_{x \in K_n} |g(x)| = \sup_{x \in K_n} |\lambda_n \lambda_n^{-1} g(x)| =$$

$$= |\lambda_n| \sup_{x \in K_n} |\lambda_n|^{-1} |g(x)| \leq$$

$$\leq |\lambda_n| \sup_{x \in K_n} |\phi(x) g(x)| \leq |\lambda_n|.$$

Logo $g \in U$.

Mostramos assim que a topologia estrita definida no §0 é a topologia mista $\gamma[\kappa,\sigma]$.

Na verdade este resultado continua verdadeiro mesmo quando β estiver definida sobre o espaço das funções contínuas e limitadas definidas em X e com valores em um espaço normado $(E, \|\cdot\|)$, em lugar do anel de divisão $(F, |\cdot|)$.

§4- TOPOLOGIAS MISTAS DE ÁLGEBRAS

DEFINIÇÃO 4.1: Seja F uma anel de divisão. Uma *álgebra* E sobre F é um conjunto que possui uma estrutura de espaço vetorial sobre F, no qual está definida uma aplicação $(x,y) \to x \cdot y$ de $E \times E \to E$ satisfazendo, para quaisquer elementos x, y e z em E e α em F, as propriedades:

(1) $(x + y)z = xz + yz$ e $x(y + z) = xy + xz$

(2) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

Uma álgebra E é dita *associativa* se a multiplicação satisfizer também a propriedade:

(3) $x(yz) = (xy)z$ para quaisquer elementos x,y e z em E.

Dizemos que E é *comutativa* se for satisfeita:

(4) $xy = yx$ para quaisquer elementos x e y em E.

E é uma *álgebra com identidade* se existir um elemento não nulo e em E chamado *elemento identidade* de E tal que $ex = xe = x$ para todo $x \in E$.

DEFINIÇÃO 4.2: Uma *álgebra topológica* sobre $(F,|\cdot|)$ é um par (E,τ) onde E é uma álgebra sobre F e τ é uma topologia de EVT sobre E tal que a aplicação $(x,y) \to x \cdot y$ de $E \times E$ em E é contínua.

DEFINIÇÃO 4.3: Uma álgebra E é dita uma *álgebra normada* se E é um espaço normado cuja norma $\|\cdot\|$ satisfaz, para quaisquer elementos x e y em E, $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Se E for uma álgebra com identidade, suporemos que $\|e\| = 1$.

Claramente, toda álgebra normada é uma álgebra topológica. Mais geralmente, (E,τ) é uma álgebra topológica se E for uma álgebra e τ for uma topologia de EVT sobre E dada por uma família de seminormas Γ tal que dada $p \in \Gamma$ existe $q \in \Gamma$ satisfazendo

$$p(x\,y) \leq q(x)q(y),$$

para todo par x e y em E.

Com efeito, se U é uma vizinhança arbitrária da origem, existe $\varepsilon > 0$ e $p_1,\ldots,p_n \in \Gamma$ tais que

$$U \supset \{x \in E;\ p_i(x) < \varepsilon,\quad i = 1,\ldots,n\}.$$

Para cada $i = 1,\ldots,n$, seja $q_i \in \Gamma$ satisfazendo a propriedade acima. Então

$$V = \{x \in E : q_i(x) < \sqrt{\varepsilon}\}$$

é tal que $V \cdot V \subset U$.

Seja E uma álgebra sobre F e sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E com $\eta \subset \tau$. Como vimos no §1, as topologias η e τ dão origem a uma nova topologia $\gamma[\eta,\tau]$ de EVT sobre E, a qual foi chamada topologia mista determinada em E por η e τ.

Veremos a seguir algumas condições sobre E, η e τ que tornam $(E;\gamma[\eta,\tau])$ uma álgebra topológica.

LEMA 4.4: *Seja* E *uma álgebra sobre* $(F,|\cdot|)$. *Se* τ *é uma topologia de EVT tal que a multiplicação* $(x,y) \to xy$ *é contínua na origem, então* (E,τ) *é uma álgebra topológica.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $(x_o,y_o) \in E \times E$ e U uma τ-vizinhança da origem em E. Seja V outra vizinhança da origem tal que

$$V + V + V \subset U$$

e consideremos uma τ-vizinhança equilibrada W da origem satisfazendo $WW \subset V$.

Como W é absorvente, existe $\delta > 0$ tal que se $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, temos $\{x_o,y_o\} \subset \lambda W$. Escolhido e fixado $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$ e $|\lambda| \geq 1$, temos que $\lambda^{-1}x_o \in W$ e $\lambda^{-1}y_o \in W$. Consideremos $x \in x_o + \lambda^{-1}W$ e $y \in y_o + \lambda^{-1}W$. Então existem w e w' em W tais que $x = x_o + \lambda^{-1}w$ e $y = y_o + \lambda^{-1}w'$.

Logo,

$$xy = x_oy_o + \lambda^{-1}wy_o + x_o\lambda^{-1}w' + \lambda'w\lambda^{-1}w'.$$

Mas $\quad \lambda^{-1}wy_o = w(\lambda^{-1}y_o) \in WW \subset V;$

$$x_o\lambda^{-1}w' = (\lambda^{-1}x_o)w' \in WW \subset V;$$

e

$$\lambda^{-1}w\lambda^{-1}w' \in \lambda^{-1}W\lambda^{-1}W \subset WW \subset V,$$

pois W é equilibrada e $|\lambda^{-1}| < 1$.

Concluimos que $xy \in x_o y_o + U$, e portanto $(x,y) \to xy$ é contínua no ponto (x_o, y_o).

LEMA 4.5: *Seja (E,τ) uma álgebra topológica. Se U é uma τ-vizinhança da origem e B é τ-limitado, então existe uma τ-vizinhança V da origem tal que $VB \subset U$ e $BV \subset U$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como $(x,y) \to xy$ é contínua, existe uma τ-vizinhança W da origem tal que $WW \subset U$. Como B é τ-limitado, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, temos $B \subset \lambda W$. Seja λ_o um deles fixado e seja $V = \lambda_o^{-1}W$. Então

$$VB \subset (\lambda_o^{-1}W)(\lambda_o W) = WW \subset U$$

e

$$BV \subset (\lambda_o W)(\lambda_o^{-1}W) = WW \subset U,$$

como queríamos.

TEOREMA 4.6: *Seja E uma álgebra sobre $(F,|\cdot|)$ e η e τ duas topologias de EVT sobre E. Suponhamos que τ é definida por uma norma submultiplicativa $\|\cdot\|$ e que $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é um sistema* *fundamental de subconjuntos τ-limitados de* E *satisfazendo as propriedades (a)-(d) do Exemplo 2.2. Suponhamos que para cada η-vizinhança* U *da origem e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *exista uma η-vizinhança* V *da origem satisfazendo* $(V \cap B_n)B_n \subset U$. *Então* $(E;\ \gamma[\eta,\tau])$ *é uma álgebra topológica.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Lema 4.4, basta provarmos a continuidade da multiplicação na origem.

Seja

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (U_i \cap B_i)$$

uma $\gamma[\eta,\tau]$-vizinhança da origem (ver 2.1). Lembramos que da propriedade (d), $B_i = \lambda_o^{-i}B$, onde $\lambda_o \in F$ com $0 < |\lambda_o| < \frac{1}{2}$ e $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Consideremos a aplicação injetora $v : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$v(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j,$$

para cada par $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Queremos encontrar η-vizinhanças $V_1,\ldots,V_n$ da origem tais que

$$(V_i \cap B_i)(V_j \cap B_j) \subset U_{v(i,j)} \cap B_{v(i,j)}. \quad \text{(A)}$$

Usando o Lema 4.5 para B_1 e $U_{v(1,1)}$, obtemos uma η-vizinhança

V_1 da origem tal que

$$(V_1 \cap B_1)(V_1 \cap B_1) \subset (V_1 \cap B_1)B_1 \subset U_{v(1,1)} .$$

Além disso, como $\|\cdot\|$ é submultiplicativa, temos

$$B_1 B_1 = \lambda_o^{-1} B \lambda_o^{-1} B = \lambda_o^{-2} BB \subset \lambda_o^{-2} B = B_2 \subset B_{v(1,1)}$$

pois B é equilibrado e $v(1,1) = 4 > 2$.

Logo,

$$(V_1 \cap B_1)(V_1 \cap B_1) \subset U_{v(1,1)} \cap B_{v(1,1)} .$$

Suponhamos escolhidos $V_1, \ldots, V_n$ satisfazendo (A), para cada par $i, j \leq n$. Seja

$$\tilde{U} = \bigcap_{i=1}^{n+1} U_{v(i,n+1)}$$

uma η-vizinhança da origem. Pelo Lema 4.5, existe uma η-vizinhança V_{n+1} da origem tal que $(V_{n+1} \cap B_{n+1})B_{n+1} \subset \tilde{U}$.

Assim, para cada k, $1 \leq k \leq n + 1$, temos:

$$(V_k \cap B_k)(V_{n+1} \cap B_{n+1}) \subset B_k(V_{n+1} \cap B_{n+1}) \subset$$

$$\subset B_{n+1}(V_{n+1} \cap B_{n+1}) \subset \tilde{U} \subset U_{v(i,n+1)} ,$$

para todo i, $1 \leq i \leq n + 1$.

Além disso,

$$(V_k \cap B_k)(V_{n+1} \cap B_{n+1}) \subset B_n B_{n+1} \subset B_{k+(n+1)} \subset$$

$$\subset B_{v(k,n+1)} .$$

Logo,

$$(V_k \cap B_k) \cap (V_{n+1} \cap B_{n+1}) \subset U_{v(k,n+1)} \cap B_{v(k,n+1)} .$$

Tomando

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (V_i \cap B_i),$$

temos:

$$VV = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (V_i \cap B_i) \cdot \bigcup_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (V_j \cap B_j) \subset$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{n} (V_i \cap B_i)(V_j \cap B_j) \subset$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{n} (U_{v(i,j)} \cap B_{v(i,j)}) ,$$

por (A).

Logo, $VV \subset U$.

EXEMPLO 4.7: Seja X um espaço topológico localmente compacto e $\beta = \gamma[\kappa, \sigma]$ a topologia estrita sobre $C_b(X;F)$. Por exemplo, quando X é 0-dimensional, vide Exemplo 1.31. Vamos mostrar que $(C_b(X;F),\beta)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 4.6.

Se $f,g \in C_b(X;F)$, temos

$$\|fg\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)| \sup_{x\in X} |g(x)| = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty .$$

Portanto $\|\cdot\|_\infty$ é submultiplicativa.

Agora, seja $B_n = \{f \in C_b(X;F) : \|f\|_\infty \leq \rho^{-n}\}$, onde $\rho = |\lambda_o|$ e $\lambda_o \in F$ tal $0 < |\lambda_o| < \frac{1}{2}$ é escolhido para a definição do sistema fundamental $\mathcal{B} = \{B_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de σ-limitados de $C_b(X;F)$. Consideremos a κ-vizinhança da origem dada por

$$U = \{f \in C_b(X;F) : p_K(f) \leq \varepsilon\},$$

onde K é um subconjunto compacto de X e $\varepsilon > 0$ dado. Escolhamos $\delta > 0$ tal que $\delta\rho^{-n} < \varepsilon$ e $V = \{f \in C_b(X;F) : p_K(f) \leq \delta\}$.

Se $f \in V \cap B_n$ e $g \in B_n$, então

$$\sup_{x\in K} |f(x)| < \delta$$

e

$$\sup_{x\in K} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |g(x)| < \rho^{-n},$$

o que implica que para todo $x \in K$, $|f(x)g(x)| \leq \delta\rho^{-n}$, e portanto $fg \in U$.

Pelo Teorema 4.5 $(C_b(X;F),\beta)$, é então, uma álgebra topológica.

DEFINIÇÃO 4.8: Seja $(E, \|\cdot\|)$ uma álgebra normada sobre $(F, |\cdot|)$ e seja η uma topologia de álgebra topológica sobre E tais que existe um conjunto S de seminormas η-contínuas que define a topologia η satisfazendo $\|\cdot\| = \sup S$. Sob essas condições, o espaço de Saks $(E;\eta, \|\cdot\|)$ será chamada uma *álgebra de Saks*.

TEOREMA 4.9: *Seja* $(E;\eta,\|\cdot\|)$ *uma álgebra de Saks tal que* η *está definida por um conjunto* $S = \{p_i \; ; \; i \in I\}$ *de seminormas tais que para todo* $i \in I$, *existe* $j \in I$ *satisfazendo* $p_i(xy) \leq p_j(x)\, p_j(y)$ *para todo par* x *e* y *de elementos de* E. *Se uma das condições (a) ou (b) da Proposição 3.5 estiver satisfeita, então existe um sistema fundamental de seminormas* Γ *que define a topologia* $\gamma[\eta,\|\cdot\|]$ *tal que dada* $p \in \Gamma$, *existe* $q \in \Gamma$ *satisfazendo* $p(xy) \leq q(x)q(y)$, *para todo par* $x, y \in E$.

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 3.5, uma família de seminormas que define $\gamma[\eta,\|\cdot\|]$ pode ser dada pelas aplicações $x \to \tilde{p}(x)$ onde $\tilde{p}(x) = \sup\limits_n |\lambda_n|^{-1} p_n(x)$ onde $\{\lambda_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em F com $|\lambda_n| \to +\infty$ e $\{p_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\} \subset S$.

Seja $\mu \in F$ tal que $|\mu| > 1$. Vamos definir uma sequência $\{\mu_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ em F pondo $\mu_n = \mu^{2n}$ e tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $|\mu|^{2n} \leq |\lambda_n| < |\mu|^{2n+2}$. Como $|\mu_n| = |\mu|^{2n} \geq |a_n|\cdot|\mu|^{-2}$ e como $|a_n|\cdot|\mu|^{-2} \to +\infty$ segue que $|\mu_n| \to +\infty$.

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mu^n = \sqrt{\mu_n}$ e $|\mu^n| \to +\infty$.

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $j_n \in I$ tal que

$$p_n(xy) \leq p_{j_n}(x)p_n(y).$$

Assim, dada

$$\tilde{p}(x) = \sup_n |\lambda_n|^{-1} p_n(x),$$

temos, para quaisquer x e y em E,

$$\tilde{p}(xy) = \sup_n |\lambda_n|^{-1} p_n(xy) \leq \sup_n |\lambda_n|^{-1} p_{j_n}(x)p_{j_n}(y) \leq$$

$$\leq \sup_n |\mu^n|^{-1} p_{j_n}(x) \cdot \sup_n |\mu^n|^{-1} p_{j_n}(x) =$$

$$= \tilde{q}(x)\tilde{q}(y).$$

COROLÁRIO 4.10: *Sob as hipóteses do Teorema 4.9,* $(E;\gamma[\eta,\|\cdot\|])$ *é uma álgebra topológica.*

Sejam dadas agora E uma álgebra sobre F, τ uma topologia de EVT sobre E e $m : E \times E \to E$ a aplicação dada por $m(x,y) = xy$, para todo $(x,y) \in E \times E$.

Consideremos as seguintes propriedades:

(1) m *é separadamente contínua.*

(2) m *é hipocontínua*, isto é, para cada τ-vizinhança U da origem e para cada subconjunto τ-limitado B de E, existe

uma τ-vizinhança V da origem em E tal que $VB \cup BV \subset U$.

(3) m *é contínua.*

Claramente (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1).

Numa álgebra topológica, a condição (3) está satisfeita por definição. Vamos introduzir, seguindo [6], uma classe de álgebras para as quais (2) está automaticamente verificada e que contém propriamente a subclasse das álgebras topológicas constituída pelas álgebras normadas.

Se $(E, \|\cdot\|)$ é uma álgebra normada e η é uma topologia de EVT sobre E passaremos a estudar algumas propriedades da topologia $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$ que são herdadas da topologia η.

Inicialmente veremos algumas definições:

DEFINIÇÃO 4.11: Chamamos de *álgebra s-topológica* a uma álgebra E munida de uma topologia de EVT que torna a multiplicação em E, separadamente contínua.

Claramente, toda álgebra topológica é s-topológica.

DEFINIÇÃO 4.12: Um subconjunto A de uma álgebra s-topológica (E,τ) é *m-bornívoro à esquerda* se para todo subconjunto limitado B de E existir $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, tivermos $BA \subset \lambda A$. Analogamente define-se *conjunto m-bornívoro à direita.*

DEFINIÇÃO 4.13: Uma álgebra s-topológica (E,τ) é chamada *localmente m-bornívora à esquerda* (respectivamente *à direita*) se possuir um sistema fundamental de vizinhanças da origem consistindo de conjuntos m-bornívoros à esquerda (respectivamente à direita). Diremos que (E,τ) é *localmente m-bornívora* se possui um sistema fundamental de vizinhanças da origem consistinto de conjuntos m-bornívoros à esquerda e à direita.

OBSERVAÇÃO 4.14: Seja (E,τ) uma álgebra topológica cuja topologia é dada por uma família Γ de seminormas tal que dada $p \in \Gamma$ existe $q \in \Gamma$ satisfazendo, para todo x, y em E, $p(xy) \leq p(x)q(x)$. Então (E,τ) é localmente m-bornívora. Com efeito sejam $B \in \mathbb{L}(\tau)$ e U uma vizinhança da origem. Então existe $p_1,\ldots,p_n \in \Gamma$ e $\varepsilon > 0$ tal que $U \supset \{x \in E : p_i(x) < \varepsilon\}$, $i = 1,\ldots,n$. Para cada $i = 1,\ldots,n$, existe $q_i \in \Gamma$ tal que $p_i(xy) \leq p_i(x)q_i(y)$. Mas dados $0 < \delta < 1$ e $V = \{x \in E : q_i(x) \leq \delta\}$, existe $\mu > 0$ tal que $B \subset \lambda V$ sempre que $|\lambda| \geq \mu$. Disto temos $BU \subset \lambda U$ para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \mu$. Logo U é m-bornívoro à equerda. Analogamente mostra-se que U é m-bornívoro a direita, do que segue o resultado.

OBSERVAÇÃO 4.15: Se $(E, \|\cdot\|)$ é uma álgebra normada então e localmente m-bornívora. Isto segue claramente de 4.14 e da Definição 4.8.

OBSERVAÇÃO 4.16: Em uma álgebra localmente m-bornívora (E,τ) a multiplicação é hipocontínua.

De fato, sejam $b \in \mathbb{L}(\tau)$ e U uma τ-vizinhança da origem em E. Por hipótese existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, tem-se $BU \subset \lambda U$. Fixando um tal λ e tomando a τ-vizinhança da origem dada por $V = \lambda^{-1}U$, temos $BV = B(\lambda^{-1}U) \subset U$ o que implica que a multiplicação é hipocontínua à esquerda. Analogamente provamos que a multiplicação é hipocontínua à direita.

PROPOSIÇÃO 4.17: *Sejam* (E,η) *e* (E,τ) *duas álgebras s-topológicas tal que* $\mathbb{L}(\tau)$ *possue um sistema fundamental enumerável. Então* $(E, \gamma[\eta,\tau])$ *é uma álgebra s-topológica.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (U_i \cap B_i)$$

uma $\gamma[\eta,\tau]$-vizinhança da origem dada como em 2.1, e seja $x_o \in E$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $j_n \in \mathbb{N}$ tal que $x_o B_n \subset B_{j_n}$. Como (E,η) é s-topológica, dada U_{j_n} existe uma η-vizinhança U_n da origem tal que $x_o U_n \subset U_{j_n}$. Considerando a $\gamma[\eta,\tau]$-vizinhança da origem dada por

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (V_i \cap B_i),$$

temos

$$x_o V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_o V_i \cap x_o B_i) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (U_{j_i} \cap B_{j_i}) \subset$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m} (U_k \cap B_k)$$

onde $m = \max\{j_1,\dots,j_n\}$.

Logo $x_o V \subset U$. (1)

Analogamente mostra-se que dado $y_o \in E$ e U, existe uma $\gamma[\eta,\tau]$-vizinhança W da origem tal que $Wy_o \subset U$. (2)

De (1) e (2) decorre que $(E, \gamma[\eta,\tau])$ é s-topológica.

TEOREMA 4.18: *Se $(E;\eta,\tau)$ é uma álgebra de Saks tal que as semi-normas de* S *são submultiplicativas e se uma das condições (a) ou (b) da Proposição 3.5 estiver satisfeita, então $(E,\gamma[\eta,\tau])$ é uma álgebra localmente* m-*bornívora.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 4.17, $(E,\gamma[\eta,\tau])$ é uma álgebra s-topológica. Pela Proposição 3.5, uma base de vizinhanças da origem para $\gamma[\eta,\tau]$ pode ser dada por conjuntos do tipo

$$U = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : p_n(x) \leq |a_n|\}$$

onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in F^*$, $|a_n| \to +\infty$ e $p_n \in S$.

Seja U uma $\gamma[\eta,\tau]$-vizinhança da origem deste tipo e seja $L \in \mathbb{L}(\gamma[\eta,\tau])$. Como $(E;\eta,\tau)$ é um espaço de Saks, $\mathbb{L}(\tau)$ possui uma sequência fundamental de conjuntos η-fechados. Portanto, pelo Teorema 2.6, $L \in \mathbb{L}(\tau)$. Seja B a bola unitária de (E,τ). Então existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$ com $|\lambda| \geq \delta$, temos $L \subset \lambda B$.

Se $x \in E$ e $b \in L$, temos para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n(xb) \leq p_n(x)p_n(b) \leq p_n(x)\|b\| \leq |a_n| \cdot |\lambda|,$$

isto é, $xb \in \lambda U$. Logo U é m-bornívoro à esquerda. Analogamente mostra-se que U é m-bornívoro à direita, de onde segue o resultado.

Já vimos no Exemplo 4.7 que $(C_b(X;F), \beta)$ com X localmente compacto é uma álgebra localmente m-bornívora. Observamos aqui que $(C_b(X;F); \kappa, \|\cdot\|_\infty)$ satisfaz também as hipótese do Teoreoma 4.18.

TEOREMA 4.19: *Seja $(E;\eta, \|\cdot\|)$ uma álgebra de Saks para a qual está satisfeita uma das condições (a) ou (b) da Proposição 3.5 e suponhamos que a família S de seminormas η-contínuas com $\|\cdot\| = \sup S$ satisfaz a seguinte propriedade: (*) existe $q \in S$ tal que para toda $p \in S$, e para todo par x e y em E, $p(xy) \leq p(x)q(y)$. Seja Γ a correspondente família de seminormas que define $\tilde{\gamma}[\eta, \|\cdot\|]$. Então existe uma seminorma $\gamma[\eta,\|\cdot\|]$-contínua $\tilde{q}$ tal que $\tilde{p}(xy) \leq \tilde{p}(x)\tilde{q}(y)$ para todo $\tilde{p} \in \Gamma$ e para todo par x e y em E.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 3.5, as seminormas de Γ são do tipo

$$x \to \tilde{p}(x) = \sup_n |\lambda_n|^{-1} p_n(x)$$

onde $\{p_n ; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em S e $\lambda_n \to +\infty$ em F. Seja S' a família das seminormas η-contínuas dada pelos múltiplos escalares positivos dos elementos de S. É claro que cada seminorma de S' é η-contínua e S' satisfaz a propriedade (*).

Consideremos a seminorma

$$x \to \tilde{q}(x) = \sup_n |\lambda_n|^{-1}(|\lambda_n| q(x)),$$

onde q é dada por hipótese. É claro que $\tilde{q}$ é $\gamma[\eta, \|\cdot\|]$-contínua por ser η-contínua e tem-se, para toda $\tilde{p} \in \Gamma$ e para quaisquer x e y em E,

$$\tilde{p}(xy) = \sup_n |\lambda_n|^{-1} p_n(xy) \leq \tilde{p}(x)\tilde{q}(y).$$

Isto completa a prova do teorema.

COROLÁRIO 4.20: *Sob as hipóteses do Teorema 4.19,* $(E,\gamma[\eta,\|\cdot\|])$ *é uma álgebra localmente m-bornívora.*

TEOREMA 4.21: *Seja* (E,τ) *uma álgebra normada e seja* (E,η) *uma álgebra s-topológica tal que a bola unitária* B *de* (E,τ) *é* η*-fechada e satisfaz, para todo conjunto* U *de uma base* $\mathcal{U}$ *de* η*-vizinhanças da origem, a condição* $UB \cup BU \subset U$. *Então* $(E,\gamma[\eta,\tau])$ *é uma álgebra localmente m-bornívora.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela Proposição 4.17, $(E,\gamma[\eta,\tau])$ é uma álgebra s-topológica. Por Proposição 2.17, uma base de vizinhanças da origem para a topologia $\gamma[\eta,\tau]$ pode ser dada por conjuntos do tipo

$$U = U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap a_n B),$$

onde $\{U_n ; n = 0,1,...\}$ é uma sequência de η-vizinhanças da origem e $\{a_n ; n = 0,1,...\}$ é uma sequência em F^* com $|a_n| \to +\infty$.

Seja U uma vizinhança da origem desse tipo e seja L um subconjunto $\gamma[\eta,\tau]$-limitado de E. Como B é η-fechada, pelo Teorema 2.6, L é τ-limitado. Então, para algum $\lambda \in F^*$, temos $L \subset \lambda B$. Assim sendo,

$$LU = LU_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (LU_n \cap La_n B) \subset \lambda BU_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (\lambda BU_n \cap \lambda a_n BB) \subset$$

$$\subset \lambda[U_o \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap a_n B)] \subset \lambda U,$$

pois para todo $n = 0,1,...,$ $BU_n \subset U_n$.

Analogamente mostra-se que $UL \subset U$.

Segue-se então que $(E,\gamma[\eta,\tau])$ é uma álgebra localmente m-bornívora.

EXEMPLO 4.22: Vamos dar exemplo de uma álgebra E e duas topologias η e τ definidas sobre E, satisfazendo as condições do Teorema 4.21, tornando portanto $(E,\gamma[\eta,\tau])$ uma álgebra localmente m-bornívora.

Seja $(E, \|\cdot\|)$ uma álgebra normada e (E,η) uma álgebra s-topológica definida por uma família Γ de seminormas satisfazendo

(1) existe $p \in \Gamma$ tal que $\|x\| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

(2) $q(xy) \leq \|x\| q(y)$ para todo x, y em E e $q \in \Gamma$.

De (1) segue imediatamente que a bola unitária B de $(E, \|\cdot\|)$ é η-fechada e de (2), que $UB \cup BU \subset U$ para todo conjunto U de um sistema fundamental $\mathcal{U}$ de η-vizinhanças da origem. Logo as hipóteses do Teorema 4.21 estão verificadas e portanto $(E, \gamma[\eta, \|\cdot\|])$ é uma álgebra localmente m-bornívora.

EXEMPLO 4.23: Um exemplo concreto da situação anterior é o seguinte: tomemos $E = \mathcal{C}_b(X;F)$, onde

$$X = \{t \in F : |t| \leq 1\};$$

τ a topologia em E dada pela norma $\|\cdot\|_\infty$ o que torna (E,τ) uma álgebra normada; e η a topologia em E dada pela família de semi-normas

$$\Gamma = \{p_n : p_n(f) = \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot |x|^n\}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Observamos que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot |x|^o = p_\infty(f).$$

Assim, $\tau \subset \eta$, do que segue que a bola unitária τ-fechada de (E,τ) é η-fechada.

Afirmamos agora que para cada U pertencente a um sistema fundamental de η-vizinhanças da origem em E, se B denota a bola unitária de (E,τ), então $BU \cup UB \subset U$. Com efeito, seja

$$U = U_n = \{f \in E : \sup_{x \in X} |f(x)| \cdot |x|^n < \varepsilon\}.$$

Se $f \in B$ e $g \in U$, temos

$$p_n(fg) = \sup_{x \in X} |f(x)g(x)| \cdot |x|^n \leq$$

$$\leq \sup_{x \in X} |f(x)| \sup_{x \in X} |g(x)| \cdot |x|^n \leq$$

$$\leq \|f\|_\infty p_n(x) < 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

Além disso, (E,η) é uma álgebra s-topológica, ou seja fixado $f_o \in E$, a aplicação $(f_o,g) \to f_o g$ é contínua na origem. De fato, dada

$$U = \{h \in E : \sup_{x \in X} |h(x)| \cdot |x|^n \leq \varepsilon\},$$

seja

$$V = \{h \in E : \sup_{x \in X} |h(x)| \cdot |x|^n \leq \frac{\varepsilon}{\|f_o\|_\infty}\}$$

Se $g \in V$, temos

$$\sup_{x\in X} |(f_o g)(x)| \cdot |x|^n \leq \sup_{x\in X} |f_o(x)| \cdot \sup_{x\in X} |g(x)| \cdot |x|^n \leq$$

$$\leq \| f_o \|_\infty \cdot \frac{\varepsilon}{\| f_o \|_\infty} = \varepsilon .$$

Pelo Teorema 4.21, $(E,\gamma\,[\eta,\tau])$ é então uma álgebra localmente m-bornívora.

DEFINIÇÃO 4.24: Seja E um espaço vetorial sobre F e sejam η e τ duas topologias de EVT sobre E. Consideremos a família $\mathcal{N}$ de todos os conjuntos da forma

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (U_i \cap a_i U),$$

onde $\{U_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência arbitrária de η-vizinhanças da origem e $\{a_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em F com $|a_n| \to +\infty$. É fácil ver que $\mathcal{N}$ constitue um sistema fundamental de vizinhanças da origem para uma topologia de EVT sobre E. Vamos denotar essa topologia por ω.

PROPOSIÇÃO 4.25: *Sejam* E, η *e* τ *como na Definição 4.24. Então* $\eta \subset \omega$.

DEMONSTRAÇÃO: Dada uma η-vizinhança V da origem, existe uma η vizinhança U_1 da origem tal que $U_1 + U_1 \subset V$. Da mesma forma, existe uma η-vizinhança U_2 da origem tal que $U_2 + U_2 \subset U_1$, Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe uma η-vizinhança U_n da origem tal que $U_n + U_n \subset U_{n-1}$. Concluimos, então que existe uma sequência $\{U_n ; n \in \mathbb{N}\}$ de η-vizinhanças da origem tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(U_n \cap a_n U) + (U_{n-1} \cap a_{n-1}U) + \ldots + (U_1 \cap a_1 U) \subset V.$$

Logo

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (U_i \cap a_i U) \subset V$$

e portanto $\eta \subset \omega$.

TEOREMA 4.26: *Seja* (E,η) *uma álgebra normada e* (E,τ) *uma álgebra* s-*topológica para a qual existe uma base* $U(\tau)$ *de vizinhanças da origem consistindo de conjuntos* U *que absorvem os conjuntos* $US \cup SU$. *Então* (E,ω) *é uma álgebra localmente* m-*bornívora*.

DEMONSTRAÇÃO: Seja

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (U_i \cap a_i U)$$

uma ω-vizinhança da origem onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \alpha_n S$ para algum $\alpha_n \in F^*$ sendo S a bola unitária de (E,η).

Seja L um subconjunto ω-limitado de E. Como $\eta \subset \omega$, L é também η-limitado e portanto existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $\lambda \in F$

com $|\lambda| \geq \delta_1$, $L \subset \lambda S$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$LU_n \subset \lambda S\alpha_n S \subset \lambda\alpha_n S = \lambda U_n .$$

Por hipótese existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $\mu \in F$ com $|\mu| \geq \delta_2$, $US \cup SU \subset \mu U$. Assim, $LU \subset \lambda SU \subset \lambda\mu U$ para todo λ e para todo μ em F com $|\lambda| \geq \delta_1$ e $|\mu\nu| \geq \delta_1\delta_2$.

Se $\delta = \max\{\delta_1, \delta_1\delta_2\}$, temos

$$L[U_n \cap a_n U] = LU_n \cap La_n U \subset$$

$$\subset \nu U_n \cap a_n \nu U =$$

$$= \nu[U_n \cap a_n U],$$

para todo $\nu \in F$ com $|\nu| \geq \delta$.

Logo,

$$LW = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (LU_i \cap La_n U) \subset \nu \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (U_i \cap a_i U) = \nu W.$$

Analogamente mostramos que $WL \subset \nu W$ para todo $\nu \in F$ com $|\nu| \geq \delta$.

Logo W é um conjunto m-bornívoro e portanto (E,ω) é uma álgebra localmente m-bornívora.

COROLÁRIO 4.27: *Sejam* E, η *e* τ *como no Teorema 4.26. Então a multiplicação em* (E,ω) *é hipocontínua.*

DEMONSTRAÇÃO: Segue do Teorema 4.26 e da Observação 4.16.

EXEMPLO 4.28: Vamos dar um exemplo da situação do Teorema 4.26. Consideremos a álgebra $C_b(F)$ das funções contínuas e limitadas definidas em F e com valores em F. Seja $f \in C_b(F)$ tal que $f(x) = x$ para todo $x \in F$. Consideremos também a subálgebra

$$E = \{g \in C_b(F) ; g = fh, h \in C_b(F)\}$$

de $C_b(F)$.

Seja η uma topologia em E induzida pela norma

$$\|g\| = \sup_{x \in F} |g(x)|.$$

É claro que (E,η) é uma álgebra normada.

Seja τ a topologia definida sobre E pela seminorma

$$p(g) = \sup_{x \in F} |h(x)|.$$

Se $g_1 = fh_1$ e $g_2 = fh_2$, temos

$$p(g_1, g_2) = \sup_{x \in F} |h_1(x) g_2(x)| \leq \|g_2\| \, p(g_1).$$

Analogamente obtemos $p(g_1,g_2) \leq \|g_1\| p(g_2)$. Com isto acabamos de provar que (E,τ) é uma álgebra s-topológica.

Observamos ainda que dada uma τ-vizinhança U da origem e considerando a bola unitária S de (E,η), se $g_1 \in U$ e $g_2 \in S$, temos $p(g_1,g_2) \leq \|g_2\| p(g_1) \leq p(g_1)$, o que implica $US \subset U$.

Analogamente temos $SU \subset U$.

Então, pelo Teorema 4.26 se ω é a topologia correspondente a η e τ como na Definição 4.24, (E,ω) e uma álgebra localmente m-bornívora.

EXEMPLO 4.29: Seja $(F,|\cdot|)$ um anel de divisão não trivialmente valorizado não arquimediano. Já mostramos, no Exemplo 4.28, que (E,τ) é uma álgebra s-topológica. Vamos mostrar que a multiplicação em (E,τ) não é hipocontínua. Para isso vamos definir uma sequência $\{g_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ de funções dadas por

$$g_n = \begin{cases} a_n^{-1} x, & \text{se} \quad x \in B(0,|a_n|^2) \\ \\ a_n \,, & \text{se} \quad x \notin B(0,|a_n|^2) \end{cases}$$

onde $\{a_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ é uma sequência em F com $1 < |a_n| \to +\infty$.

Claramente temos $g_n \in C_b(F)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $p(g_n) = |a_n|^{-1}$.

Assim, $\{g_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ converge a zero na topologia τ. Mas

$\{g_n^2 ; n \in \mathbb{N}\}$ não é τ-convergente a zero, pois para todo $n \in \mathbb{N}$, $p(g_n^2) = 1$.

Consideremos uma τ-vizinhança U da origem dada por

$$U = \{g \in E : p(g) < 1\}$$

e o conjunto

$$B = \{g_n ; n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{L}(\tau).$$

Para qualquer τ-vizinhança V da origem, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_o$, $g_n \in V$, mas $g_n g_n \notin U$, pois $p(g_n^2) = 1$.

Isto contradiz o fato da multiplicação ser hipocontínua em (E,τ).

Este é um exemplo de uma álgebra s-topológica que não é topológica.

TEOREMA 4.30: *Seja (E,η) uma álgebra s-topológica cuja multiplicação é hipocontínua e seja (E,τ) uma álgebra normada cuja bola unitária é η-fechada. Então a multiplicação em $(E,\gamma[\eta,\tau])$ é hipocontínua.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja

$$\gamma(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (U_i \cap a_i U)$$

uma $\gamma[\eta,\tau]$-vizinhança da origem em E onde U é uma τ-vizinhança limitada da origem em E e seja B um subconjunto $\gamma[\eta,\tau]$-limitado de E.

Como $\eta \subset \gamma[\eta,\tau]$, B é também η-limitado e como (E,η) tem multiplicação hipocontínua, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma η-vizinhança V_n da origem tal que $BV_n \cup V_nB \subset U_n$.

Agora, dada a τ-vizinhança U da origem em E, como (E,τ) é uma álgebra normada, existe uma τ-vizinhança W da origem em E tal que $WW \subset U$. Ainda do fato de (E,τ) ser normada e de possuir a bola unitária η-fechada, segue do Teorema 2.6 que B é também τ-limitado. Logo para algum $\lambda \in F$, temos $B \subset \lambda W$. Escolhendo uma τ-vizinhança da origem $V = \lambda^{-1}W$, temos

$$BV \subset \lambda W \lambda^{-1} W = WW \subset U$$

e

$$VB \subset \lambda^{-1} W \lambda W = WW \subset U.$$

Logo, tomando,

$$\gamma(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (V_i \cap a_i V),$$

temos:

$$B\gamma(\mathcal{V}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (BV_i \cap a_i BV) \subset$$

$$\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (U_i \cap a_i U) = \gamma(\mathcal{U})$$

e, analogamente, $\gamma(\mathcal{V})B \subset \gamma(\mathcal{U})$.

Assim sendo, a multiplicação em $(E,\gamma[\eta,\tau])$ é hipocontínua.

§5 - O ESPECTRO DE $(C_b(X;E),\ \gamma[\kappa,\sigma])$

DEFINIÇÃO 5.1: Seja $(F,|\cdot|)$ um anel de divisão não trivialmente valorizado. Um espaço topológico (X,τ) é dito *F-ultra-regular* se dados um ponto x em X e um subconjunto τ-fechado M em X não contendo x, existir uma função $f \in C_b(X;F)$ tal que $f(x) = 0$ e $f(M) = \{1\}$.

PROPOSIÇÃO 5.2: *Seja* X *um espaço topológico. São equivalentes:*

(a) X *é* *0-dimensional;*

(b) X *é* *F-ultra-regular, qualquer que seja o anel de divisão valorizado* $(F,|\cdot|)$.

(c) X *é* *F-ultra-regular, para algum anel de divisão valorizado e não-arquimediano* $(F,|\cdot|)$.

DEMONSTRAÇÃO: (a) $\Rightarrow$ (b):

Suponhamos que o espaço topológico (X,τ) seja 0-dimensional. Seja $x \in X$ e seja M um subconjunto fechado de X que não contém o ponto x. Seja M' o complementar de M. Por hipótese, existe um conjunto aberto e fechado $U \subset M'$ tal que $x \in U$. Seja $(F,|\cdot|)$ um anel de divisão não trivialmente valorizado e seja f a função F-característica do complementar U' de U. Então $f \in C_b(X;F)$ pois U' é aberto e fechado, $f(M) = \{1\}$, porque $M \subset U'$, e $f(x)=0$, pois $x \notin U'$. Logo (X,τ) é ultra-regular.

(b) $\Rightarrow$ (c): É óbvio

(c) $\Rightarrow$ (a): Consideremos um ponto $x_o \in X$ e uma τ-vizinhança aberta U de x_o em X. Como (X,τ) é F-últra-regular e o complementar U' de U é τ-fechado, existe uma função $f \in C_b(X;F)$ tal que $f(x_o) = 0$ e $f(U') = 1$.

Consideremos a bola unitária aberta $V = B(0,1)$ de $(F,|\cdot|)$. Como $(F,|\cdot|)$ é não arquimediano, V é uma vizinhança aberta e fechada do zero. O conjunto $W = f^{-1}(V)$ é aberto e fechado em (X,τ) e $W \subset U$, o que prova que (X,τ) possue um sistema fundamental de vizinhanças da origem abertas e fechadas.

OBSERVAÇÃO: Em vista da Proposição 5.2, diremos que um espaço topológico é ultra-regular se ele for 0-dimensional.

PROPOSIÇÃO 5.3: *Se (E,τ) é um espaço topológico ultra-regular, então τ é a topologia fraca gerada por $C_b(X;F)$, para todo anel de divisão $(F,|\cdot|)$ não trivialmente valorizado.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja η a topologia fraca sobre X gerada por $C_b(X;F)$. Pela própria definição, temos $\eta \subset \tau$.

Vamos provar agora que $\tau \subset \eta$. Para isso, consideremos um subconjunto τ-fechado M de X, $M \neq X$ e x um ponto do complementar

M' de M. Por (X,τ) ser 0-dimensional, existe uma vizinhança τ-aberta e τ-fechada U de x contida em M'. Seja f a função característica de U, que é τ-contínua e portanto η-contínua pela definição de η. Logo $U = f^{-1}(\{1\})$ é η-fechado e, sendo também U a imagem inversa do complementar do conjunto $\{0\}$, segue que U é η-aberto. Assim M' é aberto e portanto M é fechado.

De agora em diante, neste parágrafo, (X,τ) será um espaço topológico T_1 e 0-dimensional e $(E, \|\cdot\|)$ uma álgebra associativa normada não arquimediana sobre um anel de divisão não trivialmente valorizado $(F,|\cdot|)$.

Observamos que do fato de (X,τ) ser T_1 e 0-dimensional segue que $C_b(X;E)$ separa pontos em X.

DEFINIÇÃO 5.4: Seja A uma álgebra sobre $(E,|\cdot|)$. Um ideal à esquerda I de A é dito *regular* se A possuir uma identidade à direita módulo I, isto é, se existir um elemento $u \in A$ tal que para qualquer $x \in A$, $xu - x \in I$.

Analogamente definimos quando um ideal à direita em A é regular.

LEMA 5.5: *Todo ideal (à direita ou à esquerda) regular de* $C_b(X;E)$ *é um* $C_b(X;F)$*-módulo.*

DEMONSTRAÇÃO: É análoga à do Lema 3.1 de Prolla [17].

LEMA 5.6: *Seja* $W \subset C_b(X;E)$ *um* $C_b(X;F)$*-módulo. Então para toda função* $f \in C_b(X;E)$, f *pertence à* $\gamma[\kappa,\sigma]$*-aderência de* W *se e somente se, para cada* $x \in X$, $f(x)$ *pertence à aderência de* $W(x)$ *em* $(E, \|\cdot\|)$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$. Se f está na $\gamma[\kappa,\sigma]$ aderência de W, segue-se que f está na κ-aderência de W, pois $\kappa \subset \gamma[\kappa,\sigma]$. Portanto, dados o compacto $K = \{x\}$ e $\varepsilon > 0$, existe $g \in W$ tal que $\|g(x) - f(x)\| < \varepsilon$. Assim $f(x)$ pertence à aderência de $W(x)$ em $(E, \|\cdot\|)$.

Consideremos agora uma função $f \in C_b(X;F)$ tal que para cada $x \in X$, $f(x)$ está na aderência de $W(x)$ em $(E, \|\cdot\|)$.

Consideremos também o subconjunto σ-limitado $B = B(0,1 + \|f\|)$ de $C_b(X;E)$. É claro que $f \in B$. Sejam K um subconjunto compacto de X e $0 < \varepsilon < 1$ dado. Pelo Teorema 3.5 [18], f/K está na κ-aderência de W/K. Então existe $\tilde{g} \in W$ tal que $p_K(\tilde{g} - f) < \varepsilon$. Temos claramente $p_K(\tilde{g}) \leq \|f\| + \varepsilon < \|f\| + 1$.

Seja

$$A = (\tilde{g} - f)^{-1}(B(0,1))$$

que é um conjunto aberto e fechado e contém K. Tomando $g \in C_b(X;E)$ dada por $g = \chi_A \cdot \tilde{g}$, temos $g \in W$, $g(x) = \tilde{g}(x)$, se $x \in A$ e $g(x) = 0$ se $x \notin A$.

Logo $\|g\| \leq 1 + \|f\|$, ou seja, $g \in B$.

Concluimos então que $g \in W \cap B$ e $p_K(g - f) < \varepsilon$. Logo

$$f \in \overline{W \cap B}^{\kappa}.$$

Como as topologias κ e $\gamma[\kappa,\sigma]$ coincidem sobre B, segue que f está na $\gamma[\kappa,\sigma]$-aderência de $W \cap B$ e portanto está na $\gamma[\kappa,\sigma]$-aderência de W.

DEFINIÇÃO 5.7: Seja (A,τ) uma álgebra topológica sobre um anel de divisão $(F,|\cdot|)$. *O espectro de* A *é*, por definição, o conjunto $\Delta(A,\tau)$ de todos os homomorfismos de álgebra definidos em A e sobre F, contínuos e não nulos, equipado com a topologia $\sigma(A^*,A)$.

TEOREMA 5.8: *Seja* X *um espaço localmente compacto e 0-dimensional. Existe um homeomorfismo entre os espaços* $X \times \Delta(E,\|\cdot\|)$ *e*

$$\Delta(C_b(X;E), \gamma[\kappa,\sigma]).$$

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos a aplicação

$$G : X \times \Delta(E,\|\cdot\|) \to \Delta(C_b(X;E), \gamma[\kappa,\sigma])$$

definida por $G(x,h) = h \circ \delta_x$, para cada par $(x,h) \in X \times \Delta(E)$.

(a) G é injetora.

Com efeito, consideremos os pares $(x_1,h_1) \neq (x_2,h_2)$ em $X \times \Delta(E)$.

Se $x_1 \neq x_2$, então $h_1(v) \neq h_2(v)$ para algum $v \in E$. Escolhamos $f \in C_b(X;E)$ tal que $f(x_1) = v$. Temos, então

$$(h_1 \circ \delta_{x_1})(f) = h_1(f(x_1)) = h_1(v) \neq h_2(v) = (h_2 \circ \delta_{x_2})(f).$$

Se $x_1 \neq x_2$, como X é ultra-regular, escolhamos $\varphi \in C_b(X;E)$ com $\varphi(x_1) = 0$ e $\varphi(x_2) = 1$. Seja $u \in E$ tal que $u \notin \mathrm{Kern}\,(h_2)$ e seja $f \in C_b(X;E)$ tal que $f(x_2) = u$. Tomando

$$g = \varphi f \in C_b(X;E),$$

temos

$$(h_1 \circ \delta_{x_1})(g) = h_1(g(x_1)) = h_1(0) = 0$$

e,

$$(h_2 \circ \delta_{x_2})(g) = h_2(g(x_2)) = h_2(f(x_2)) = h_2(u) \neq 0.$$

Assim sendo, G é injetora.

(b) G é sobrejetora.

Seja $H \in \Delta(C_b(X;E), \gamma[\kappa,\sigma])$. Por ser $H \not\equiv 0$ um homomorfismo contínuo, o conjunto $M = \mathrm{Kern}\, H \subset C_b(X;E)$, que é um ideal maximal regular, é próprio e fechado. Pelo Lema 5.6 existe $x \in X$ tal que $\overline{M(x)} \neq E$, ou seja, $\overline{M(x)} \subset E$ é próprio.

Seja $f \in C_b(X;E)$ uma função tal que $H(f) = 1$. Então f é uma identidade módulo M, pois, para todo $g \in C_b(X;E)$, temos

$$H(fg - g) = H(f)H(g) - H(g) = 1 \cdot H(g) - H(g) = 0$$

e portanto $fg - g \in M$.

Para cada $u \in E$, seja $u^* = uf \in C_b(X;E)$ e vamos definir uma função $h : E \to F$ como $h(u) = H(u^*)$, para todo $u \in E$.

Se u_1 e u_2 são elementos de E, temos:

$$h(u_1u_2) = H(u_1u_2f) = H(f)H(u_1u_2f) =$$

$$= H(fu_1u_2f) = H(fu_1)h(u_2) =$$

$$= H(fu_1f)h(u_2) = h(u_1)h(u_2),$$

o que mostra que h é multiplicativa.

Seja $I = \text{Kern}\, h$.

Se $u \in I$, então $H(u^*) = h(u) = 0$, o que implica que $u^* \in M$. Escolhamos $g \in C_b(X;E)$ tal que $g(x) = u$. É claro que $gf - g \in M$ e então $uf(x) - u \in M(x)$.

Agora, $(uf)(x) = u^*(x) \in M(x)$. Segue-se então que

$$u = u^*(x) - [uf(x) - u] \in M(x) \subset \overline{M(x)}.$$

Como $\overline{M(x)} \subset E$ é próprio, temos que $h \not\equiv 0$. Disto, e do fato de $h \in E'$ ser multiplicativa, segue que $h \in \Delta(E, \|\cdot\|)$.

Consideremos agora $W = \text{kern}\,(h \circ \delta_x)$. Queremos mostrar que $M \subset W$. Se $g \in C_b(X;E)$ é tal que $g \notin W$, então $h(g(x)) \neq 0$, donde $g(x) \notin I$. Além disso, temos $I \subset M(x) \subset \overline{M(x)}$, $\overline{M(x)}$ é próprio e I é maximal. Decorre daí que $I = \overline{M(x)}$. Mas então $g(x) \notin \overline{M(x)}$ e pelo lema 5.6 $g \notin M$. Logo, $M \subset W$. Como M é maximal e W é um ideal próprio fechado, segue que $M = W$. Logo $H = h \circ \delta_x$, ou seja, $G(x,h) = H$.

(c) G é contínua.

Para provarmos, consideremos um par (x_o, h_o) em $X \times \Delta(E, \|\cdot\|)$. Dados $\varepsilon > 0$ e uma função $g \in C_b(X;E)$, escolhamos uma vizinhança V de h_o em $\Delta(E, \|\cdot\|)$ tal que para qualquer $h \in V$,

$$|(h - h_o)(g(x_o))| < \varepsilon.$$

Seja W uma vizinhança de $g(x_o)$ em E tal que

$$|h(w - g(x_o))| < \varepsilon,$$

para todo $w \in W$ e $h \in V$.

Consideremos também uma vizinhança U de x_o em X tal que $g(x) \in W$ para todo $x \in U$. Então, se $(x,h) \in U \times V$, temos que $g(x) \in W$ e $h \in V$, donde

$$|h(g(x) - g(x_o))| < \varepsilon.$$

Assim sendo, para todo par $(x,h) \in U \times V$, temos:

$$|G(x,h)(g) - G(x_o,h_o)(g)| = |h(g(x)) - h_o(g(x_o))| \leq$$

$$\leq |h(g(x) - g(x_o)) + (h - h_o)g(x_o)| < \varepsilon.$$

(d) G^{-1} é contínua.

Com efeito, consideremos o net $[H_\alpha]$ de funções de

$$\Delta(C_b(X;E), \gamma[\kappa,\sigma])$$

que é convergente a $H \in \Delta(C_b(X;E), \gamma[\kappa\ \sigma])$.

Como G é sobrejetora, existe um net $[x_\alpha]$ em X e um net $[h_\alpha]$ em $\Delta(E)$ tais que $H_\alpha = G(x_\alpha,h_\alpha)$ e existe um par (x,h) em

$$X \times \Delta(E, \|\cdot\|)$$

tal que $H = G(x,h)$.

Seja $f \in C_b(X;E)$ tal que $H(f) = 1$ e seja $\alpha_o \in \Lambda$ tal que, para todo $\alpha > \alpha_o$, $|H_\alpha(f)| \neq 0$.

Se φ é uma função em $C_b(X;F)$, temos

$$\varphi f \in C_b(X;E)$$

e, para todo $\alpha > \alpha_o$,

$$\varphi(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha)h_\alpha(f(x_\alpha))[h_\alpha(f(x_\alpha))]^{-1} =$$

$$= h_\alpha(\varphi(x_\alpha)f(x_\alpha))[H_\alpha(f)]^{-1} = H_\alpha(\varphi f)[H_\alpha(f)]^{-1}.$$

Portanto.

$$\varphi(x_\alpha) = H_\alpha(\varphi f)[H_\alpha(f)]^{-1}$$

converge a

$$H(\varphi f)[H(f)]^{-1} = H(\varphi f) = h(\varphi(x)f(x)) = \varphi(x)h(f(x)) =$$

$$= \varphi(x)H(f) = \varphi(x).$$

Como X é ultra-regular e $\varphi \in C_b(X;F)$ é arbitrária, pela Proposição 5.3 segue que $x_\alpha \to x$.

Consideremos agora $u \in E$. É claro que $uf \in C_b(X;E)$, e, para todo $\alpha > \alpha_o$, temos

$$h_\alpha(u) = h_\alpha(u)h_\alpha(f(x_\alpha))[h_\alpha(f(x_\alpha))]^{-1} =$$

$$= h_\alpha(uf(x_\alpha))[H_\alpha(f)]^{-1} = H_\alpha(uf)[H_\alpha(f)]^{-1},$$

o que implica que $h_\alpha(u) \to H(uf) \cdot 1 = h(u)$.

Logo $(x_\alpha,h_\alpha) \to (x,h)$ e portanto G^{-1} é uma função contínua do espectro de $(C_b(X;E), \gamma[\kappa,\sigma])$, sobre o produto cartesiano

$X \times \Delta(E, \|\cdot\|)$.

COROLÁRIO 5.9: *Seja* X *um espaço localmente compacto e 0-dimensional. Existe um homeomorfismo entre* X *e o espaço*

$$\Delta(C_b(X;F),\ \gamma[\kappa,\sigma]),$$

dado pela transformação $h(x) = \delta_x$.

Aqui (X,τ) será um espaço topológico localmente compacto e 0-dimensional e $(F,|.|)$ um anel de divisão não trivialmente valorizado não arquimediano completo.

TEOREMA 5.10: *Seja* I *um ideal de* $C_b(X;F)$ *e seja* $Z(I)$ *o conjunto de todos os elementos* x *de* X *para os quais* $g(x) = 0$ *para toda função* g *de* I. *Então uma função* f *de* $C_b(X;F)$ *está na* $\gamma[\kappa,\sigma]$*-aderência de* I *se, e somente se,* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in Z(I)$.

Para uma demonstração deste teorema veremos inicialmente o seguinte lema:

LEMA 5.11: *Sejam* I *e* $Z(I)$ *como no Teorema 5.10, mas consideremos* X *um espaço compacto. Se uma função* $f \in C(X;F)$ *é tal que* $f(x) = 0$ *para todo* $x \in Z(I)$, *então* f *está na aderência de* I.

DEMONSTRAÇÃO: Seja $f \in C(X;F)$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in Z(I)$ e seja $0 < \varepsilon < 1$. Consideremos o subconjunto compacto

$A = \{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ de X. É claro que $A \cap Z(I) = \phi$.

Para cada $x \in A$, escolhamos $h_x \in I$ tal que $h_x(x) = 1$. A família $\{V_x\}_{x \in X}$ formada pelos conjuntos abertos e fechados $V_x = \{x \in A : |h_x(x)-1| < \varepsilon\}$ é uma cobertura para A. Como A é compacto, existem $x_1, \ldots, x_n$ em A tais que $A \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n$, onde V_i denota o conjunto V_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$.

Consideremos a família $\{W_i, i = 1, \ldots, n\}$ de conjuntos abertos e fechados dada por $W_1 = V_1$,

$$W_2 = V_2 \setminus W_1,$$

$$W_k = V_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k} W_{i-1}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

que é disjunta e ainda cobre A. Consideremos também a função $h'(x) = \chi_{W_1} h_1(x) + \ldots + \chi_{W_n} h_n(x)$, para todo $x \in X$, onde por h_i estamos denotando a função h_{x_i}, $i = 1, \ldots, n$.

Obtivemos assim uma função h' em I, pois para cada $i = 1, \ldots, n$, $h_i \in I$ e $\chi_{W_i} \in C_b(X;F)$. Além disso, $h'(x) \neq 0$ para todo $x \in A$. Pelo Teorema 0.15, existe $k' \in C(X,F)$, com $k'(x) = [h'(x)]^{-1}$ para todo $x \in A$ e $0 < |k'(x)| \leq |h'(x)|^{-1}$ para todo $x \in X$.

Se $h = h'k'$, temos que $h \in I$, $h(x) = 1$ para todo $x \in A$ e $\|h\| \leq 1$.

Tomando a função $g = fh$ em I, temos

$$|f(x)-g(x)| = |f(x)| \,.\, |1-h(x)| = 0,$$

se $x \in A$ e $|f(x)-g(x)| < \varepsilon.1 = \varepsilon$, se $x \notin A$, ou seja, $|f-g| < \varepsilon$, do que segue que f pertence à aderência de I.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 5.10: Seja $f \in C_b(X;F)$ uma função pertencente à $\gamma[\kappa,\sigma]$-aderência de I. Do fato de $\kappa \subset \gamma[\kappa,\sigma]$, segue que f está na κ-aderência de I. Para cada elemento a do conjunto τ-fechado

$$Z(I) = \bigcap_{g \in I} g^{-1}(0) ,$$

consideremos a função $\delta_a : C_b(X;F) \to F$ definida por $\delta_a(f) = f(a)$.

Seja $V_\varepsilon = \{\lambda \in F : |\lambda| < \varepsilon\}$ e consideremos uma κ-vizinhança W da origem em $C_b(X;F)$ dada por

$$W = \{f \in C_b(X;F) : P_{\{a\}}(f) = |f(a)| < \varepsilon\} .$$

Se $f \in W$, então $|\delta_a(f)| = |f(a)| < \varepsilon$, o que implica que $\delta_a(f) \in V_\varepsilon$. Isto mostra que δ_a é κ-contínua e portanto é $\gamma[\kappa,\sigma]$-contínua. Agora, se $a \in Z(I)$, então $\delta_a(g) = 0$ para todo $g \in I$. Logo, da $\gamma[\kappa,\sigma]$-continuidade de δ_a, temos $\delta_a(f) = 0$ para toda função f pertencente à $\gamma[\kappa,\sigma]$-aderência de I. Assim $f(a) = 0$, para todo $a \in Z(I)$.

Suponhamos agora que $f(x) = 0$ para todo $x \in Z(I)$ e vamos provar que f está na $\gamma[\kappa,\sigma]$-aderência de I.

Seja $B = B(0,\|f\|_\infty)$ e seja K um subconjunto compacto de X. Como I é um ideal de $C_b(X;F)$, o conjunto I/K é um ideal de

$C(K;F)$. Com efeito, sejam $f \in I/K$ e $g \in C(K,F)$. Da definição, existe $\tilde{f} \in C_b(X;F)$ tal que $\tilde{f}/K = f$ e pelo Teorema 0.15, existe uma função $\tilde{g} \in C_b(X;F)$ que é a extensão de g a X. Mas I é ideal de $C_b(X;F)$, logo $\tilde{g}\tilde{f} \in I$, do que segue que

$$gf = \tilde{g}/K \,.\, \tilde{f}/K \in I/K \,.$$

Como $f/K = 0$ para todo $x \in Z(I/K)$, vem, pelo Lema 5.11, que f/K pertence à aderência de I/K. Então existe $\tilde{h} \in I$ tal que $p_K(\tilde{h}-f) < \varepsilon$. Além disso, temos claramente $p_K(\tilde{h}) \leq \|f\|+1$.

Seja $H = (\tilde{h}-f)^{-1}(B(0,1))$, que é um conjunto aberto e fechado e contém K. Tomando $h \in C_b(X;F)$ dada por $h = \chi_H.\tilde{h}$, temos $h \in I$, $h(x) = \tilde{h}(x)$, se $x \in H$ e $h(x) = 0$ se $x \notin H$.

Logo $\|h\| \leq 1+\|f\|$ isto é, $h \in B$.

Concluímos daí que $h \in I \cap B$ e $p_K(h-f) < \varepsilon$ o que implica que f está na κ-aderência de $I \cap B$.

Como κ e $\gamma[\kappa,\sigma]$ coincidem sobre B, concluímos que f está na $\gamma[\kappa,\sigma]$-aderência de $I \cap B$ e portanto está na $\gamma[\kappa,\sigma]$-aderência de I.

REFERÊNCIAS

[1] A. ALEXIEWICZ, On sequences of operations (II); *Studia Math.* 11, (1950), 200-236.

[2] A. ALEXIEWICZ, On the two-norm convergence; *Studia Math.* 14, (1954), 49-56.

[3] A. ALEXIEWICZ and Z. SEMADENI, A generalization of two-norm spaces; *Bull. Pol. Acad. Sci.* 6, (1958), 135-139.

[4] M.T. BALBI, *Espaços Vetoriais Topológicos sobre Corpos não Comutativos*, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1982.

[5] N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématiques*, Livre V: *Espaces Vectoriels Topologiques*; Hermann, Paris, 1973.

[6] A.K. CHILANA and S. SHARMA, The locally boundedly multiplicatively convex algebras; *Math. Nachr.* 77 (1977), 139-161.

[7] J.B. COOPER, *Saks Spaces and Applications to Functional Analysis*; North-Holland Mathematics Studies, vol.28, Amsterdam, 1977.

[8] G. FICHTENHOLZ, Sur les fonctionnelles linéaires, continues au sens généralisé; *Mat. Sbornik* 4, (1938), 193-214.

[9] D.J.H. GARLING, A generalized form of inductive-limit topology for vector spaces; *Proc. London Math. Soc.*, 14, (1964), 1-28.

[10] S.O. IYHAEN, On certain classes of linear topological spaces; *Proc. London Math. Soc.* 18, (1968), 285-307.

[11] A.F. MONNA, *Analyse non-archimédienne;* Ergebnisse der Mathematik und iher Grenzgebiete, Band 56, Springer Verlag ,

Berlin, 1970.

[12] W. ORLICZ, Linear operations in Saks spaces (I); *Studia Math.* 11, (1950), 237-272.

[13] W. ORLICZ, Linear operations in Saks spaces (II); *Studia Math.* 15, (1956), 1-25.

[14] W. ORLICZ and V. PTÁK, Some remarks on Saks spaces; *Studia Math.* 16, (1957), 56-58.

[15] A. PERSSON, A generalization of two-norm spaces; *Ark. Mat.* 5, (1963), 27-36.

[16] J.B. PROLLA, *Topics in Functional Analysis over Valued Division Rings;* North-Holland Mathematics Studies vol.77, Amsterdam (1982).

[17] J.B. PROLLA, Topological algebras of vector-valued continuous functions, *Advances in Math. Suppl. Studies* 7, Academic Press, N.Y., 1981.

[18] M.Z.M.C. SOARES, *Tópicos em Teoria da Aproximação sobre Anéis Valorizados*, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1982.

[19] J. VAN TIEL, Espaces localement K-convexes; *Indagationes Mathematicae*, vol. XXVII, (1965), 250-289.

[20] A. WIWEGER, A topologization of Saks spaces; *Bull. Pol. Acad. Sci.* 5 (1957), 773-777.

[21] A. WIWEGER, Linear spaces with mixed topology, *Studia Math.* 20 (1961), 47-68.