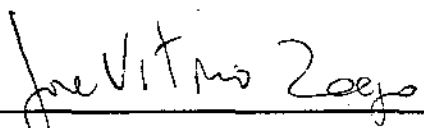


"SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO FLUXO DE CZOCHRALSKI NÃO ISOTÉRMICO"

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. DANIEL NORBERTO KOZAKEVICH e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 08 de fevereiro de 1988

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. JOSÉ VITORIO ZAGO  
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada, área: Análise Aplicada.

A meus pais

## A G R A D E C I M E N T O S

Ao meu orientador, Prof.Dr. JOSÉ VITÓRIO ZAGO, pelo apoio e incentivo ao desenvolvimento de meu trabalho.

Aos professores e colegas do curso de Pós-Graduação, do Departamento de Matemática Aplicada do IMECC-UNICAMP pela convivência oferecida.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática y Estadística de la Facultad de Economía de la Universidad del Comahue, pelo esforço realizado, sem o qual, este trabalho não teria sido concretizado.

Ao CAPES e UNICAMP, pelo apoio financeiro.

## Í N D I C E

NOTAÇÃO.....	i
RESUMO.....	iv
Capítulo I - UMA SÍNTESE DESCRITIVA	
1.1 - Introdução.....	1
1.2 - A bibliografia consultada.....	4
1.3 - Descrição do trabalho.....	5
1.4 - Condições de fronteira e parâmetros físicos e geométricos.....	7
Capítulo II - OS FLUXOS NA FASE LÍQUIDA	
2.1 - As equações do escoamento.....	9
2.2 - As equações em coordenadas cilíndricas polares.....	13
2.3 - A aproximação de Boussinesq.....	17
2.4 - Análise dimensional.....	18
2.5 - A função corrente - vetor vorticidade.....	20
Capítulo III - AS FORMULAÇÕES	
3.1 - As formulações variacionais dos elementos finitos	
3.1.1 - Um exemplo introdutório.....	24
3.1.2 - A formulação pelos resíduos ponderados..	24
3.1.3 - A formulação por minimização.....	26
3.1.4 - Formulação aproximada.....	26
3.2 - Elementos finitos mistos	
3.2.1 - Minimização de funcionais.....	28
3.2.2 - Minimização com restrições.....	29
3.2.3 - O problema de Stokes.....	30
3.2.4 - Aproximação por elementos finitos.....	33
3.3 - Quadrados Mínimos	

3.3.1.1 - Solução pelos quadrados mínimos para o problema de Dirichlet não linear.....	34
3.3.1.2 - Solução para as equações de Navier-Stokes.....	37
3.3.2 - Formulação com divergência livre.....	39
3.3.3 - Método de penalidade.....	40
3.3.4 - Formulação de variacionais para a função corrente vetor vorticidade.....	42
3.4 - Formulação variacional mista para o escoamento não isotérmico	
3.4.1 - Caso estacionário.....	43
3.4.2 - Formulação aproximada.....	45
3.4.3 - Caso não estacionário.....	46
 Capítulo IV - OS MÉTODOS NUMÉRICOS E AS TÉCNICAS COMPUTACIONAIS.....	
4.1 - A resolução aproximada para o caso estacionário..	52
4.2 - As funções de interpolação.....	59
4.3 - O método frontal.....	62
 Capítulo V - RESULTADOS E CONCLUSÕES	
5.1 - Testes	
5.1.1 - Escoamento de Poiseville.....	65
5.1.2 - Simulação com um sólido.....	65
5.1.3 - Convecção natural com solução exata....	66
5.2 - Análise dos resultados.....	70
5.3 - Descrição das principais subrotinas e variáveis.....	78
5.4 - Propostas de trabalhos futuros.....	85

A.1.1 - Alguns espaços de funções.....	88
A.1.2 - Uma Triangularização.....	89
A.1.3 - O produto tensorial.....	89
A.1.4 - A fórmula de Green-Ostrogradski.....	89
Apêndice II.....	91
A.2.1 - Os coeficientes do sistema(4.1.8-12)...	91
Bibliografia.....	93

NOTAÇÃO

- $r$  : coordenada radial [ m ]  
 $\theta$  : coordenada angular [ rad ]  
 $z$  : coordenada axial [ m ]  
 $t$  : coordenada temporal [ seg ]  
 $u$  : velocidade radial [ m/seg ]  
 $v$  : velocidade angular [ m/seg ]  
 $w$  : velocidade axial [ m/seg ]  
 $\vec{u}$  : vetor campo velocidade (u,v,w)  
 $p$  : pressão [ N/m<sup>2</sup> ]  
 $T$  : temperatura [ °K ]  
 $\underline{\underline{\sigma}}$  : tensor de tensões [ N/m<sup>2</sup> ]  
 $\underline{\underline{\zeta}}$  : tensor de tensão viscoso [ N/m<sup>2</sup> ]  
 $\underline{\underline{D}}$  : tensor de deformação [ 1/seg ]  
 $\vec{q}$  : vetor fluxo de calor [ W/m<sup>2</sup>seg ]  
 $\vec{\psi}$  : vetor função corrente  
 $\vec{\omega}$  : vetor vorticidade  
 $\psi$  : função corrente  
 $\omega$  : vorticidade  
 $\phi$  : função de dissipação  
 $\hat{U}$  : energia interna específica [ v/°k.kg ]  
 $\hat{n}$  : vetor unitário (  $\hat{e}_r^u, \hat{e}_\theta^u, \hat{e}_z^u$  )  
 $\mu, \lambda$  : coeficientes de viscosidade [ N seg/m<sup>2</sup> ]  
 $k$  : conductividade térmica [ W/m°k ]

- $c_p$  : capacidade calorífica a pressão constante [J/ °K Kg]  
 $\rho$  : densidade [Kg/m<sup>3</sup>]  
 $\beta$  : coeficiente de compressibilidade térmica [1/°K]  
 $g$  : aceleração da gravidade [m/seg<sup>2</sup>]  
 $\vec{f}$  : força externa [ $f_r, f_\theta, f_z$ ]  
 $\rho_m$  : densidade à temperatura de fusão  
 $T_m$  : temperatura de fusão  
 $T_c$  : temperatura do cadinho  
 $\omega_c$  : velocidade de rotação do cadinho [rad/seg]  
 $\omega_s$  : velocidade de rotação do cristal [rad/seg]  
 $Re_c$  : número de Reynolds do cadinho;  $Re_c = \omega_c b^2 / \nu$   
 $Re_s$  : número de Reynolds do cristal;  $Re_s = \omega_s b^2 / \nu$   
 $Gr$  : número de Grashof;  $Gr = g\beta(T_c - T_m)b^3 / \nu^2$   
 $Pr$  : número de Prandtl;  $Pr = \nu c_p / K$   
 $Ra$  : número de Rayleigh ;  $Ra = Gr.Pr$   
 $a$  : raio do cristal [m]  
 $b$  : raio do cadinho [m]  
 $d$  : altura do cadinho [m]  
 $\epsilon$  : parâmetro positivo  
 $\Omega$  : um domínio limitado  
 $\bar{\Omega}$  : o fecho de  $\Omega$   
 $\partial\Omega$  : o contorno de  $\Omega$   
 $\nabla$  : operador gradiente  
 $\nabla \cdot$  : operador divergente



$\nabla x$  : operador rotacional

$\Delta$  : operador laplaciano

## SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO FLUXO DE CZOCHRALSKI NÃO ISOTÉRMICO

RESUMO

Na produção de cristais pela solidificação de sais fundidos, a técnica de CZOCHRALSKI é amplamente utilizada.

Os cristais obtidos por esta técnica são indicados para a construção de dispositivos de baixa potência.

Nesta técnica o sal é fundido num cadinho e mantido a uma temperatura superior a seu ponto de fusão. Uma semente do cristal é mergulhada no líquido e então puxada lentamente.

O calor latente do sal que se solidifica na interfase semente-líquido, é eliminado por conduções através do cristal.

Os três mecanismos básicos: convecção natural, rotação do cadinho e rotação do cristal e suas combinações foram simuladas numericamente, para um fluxo de CZOCHRALSKI. Uma solução aproximada foi obtida mediante o método dos elementos finitos mistos, utilizando elementos quadrilaterais subparamétricos com aproximações / quadráticas nas componentes da velocidade e a temperatura e lineares na pressão. As integrais são calculadas numericamente com uma regra gaussiana de nove pontos. As equações discretizadas são resolvidas pelo método de Newton e, os sistemas lineares pelo método frontal. O fluxo é não isotérmico, incompressível, newtoniano, estacionário, tridimensional axisimétrico com fronteiras fixas. Outras formulações alternativas são colocadas para as equações de Navier-Stokes.

## CAPÍTULO I

### 1.1 INTRODUÇÃO

O crescimento de cristais usando a técnica de Czochralski precisa de um conhecimento e posterior análise, dos fenômenos de transporte que ocorrem no material fundido. Uma tentativa experimental neste sentido, apresenta dificuldades. Desta forma, a simulação numérica da fase líquida a partir das equações que regem o escoamento, serve de grande ajuda para introduzir as modificações que produzam uma melhoria na qualidade do cristal.

O processo de crescimento, basicamente, segue o seguinte esquema: um material (arsenieto de galio, silício policristalino, etc) é introduzido num cadinho onde é fundido e mantido a uma temperatura superior à do ponto de fusão. Uma semente de cristal é mergulhada no líquido e então puxada lentamente. A transmissão de calor por condução através da semente permite a eliminação do calor latente gerado pelo sal fundido que se solidifica na interface semente-líquido. As partes mais frias que sustentam a semente são refrigeradas continuamente, permitindo o transporte de calor através da semente. Calor também é eliminado por radiação da semente para a atmosfera que envolve o cadinho.

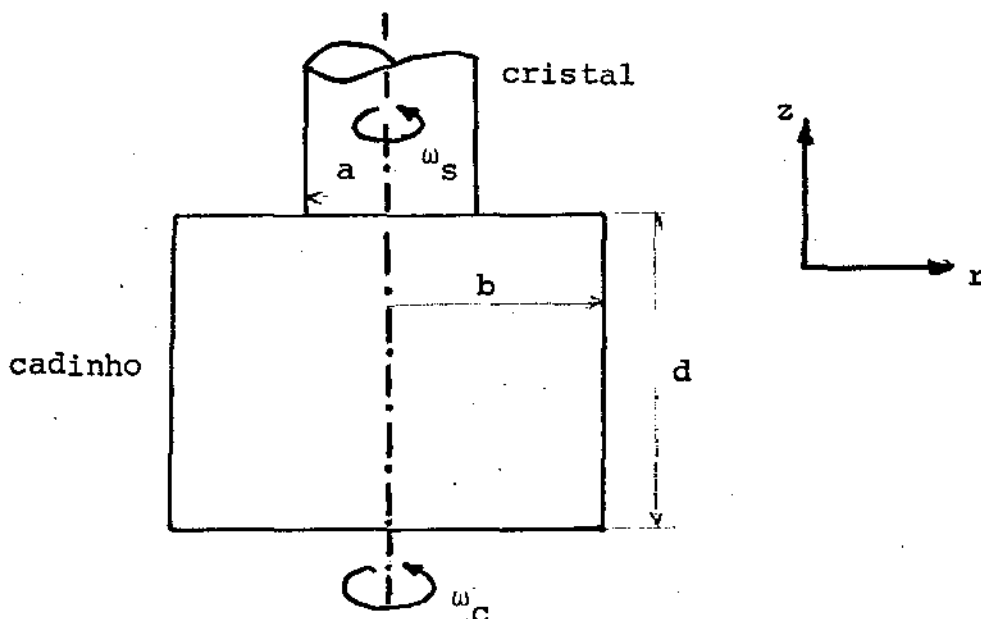
No líquido existem dois processos principais na transmissão de calor: condução e convecção. Além da convecção natural, temos a convecção forçada gerada pela rotação de cadinho e/ou cristal.

A convecção natural surge devido à presença de gradientes de temperatura num campo gravitacional. A não-homogeneidade na densidade, sob a ação da gravidade, faz com que as partículas do fluido mais frias desçam enquanto as mais quentes tenderão a subir, gerando um movimento contínuo no seio do líquido.

Na simulação numérica deste tipo de fluxos, o uso do método dos elementos finitos resolve vantajosamente as dificuldades que surgem na representação das geometrias das fronteiras que evoluem com o tempo.

Analisaremos apenas o caso estacionário e obteremos resultados considerando os mecanismos básicos: convecção natural, rotação do cadinho e do cristal com as possíveis combinações.

A maioria das simulações numéricas para um fluxo de Czochralski seguem a clássica configuração geométrica que se mostra na figura.



O modelo estabelecido satisfaz as seguintes hipóteses simplificadoras:

Apresenta axisimetria, ou seja, as componentes da velocidade, a temperatura e a pressão não dependem da coordenada azimutal; contudo a componente azimutal da velocidade aparecerá quando o cristal ou o cadinho começarem a rodar e será incluída no cálculo. Esta hipótese nos permite reduzir o domínio do fluxo a apenas duas dimensões. Além disso, neste caso, é factível restringir esse domínio apenas a metade. Também, teremos formas de visualização dos resultados, mediante gráficos em duas dimensões.

Excluimos do nosso cálculo a presença de células periódicas azimutais convectivas que foram observadas em alguns experimentos devido a hipótese de axisimetria.

A simulação está baseada na aproximação de Boussinesq, a qual estabelece que todos os coeficientes de transporte permanecerão constantes com exceção da densidade, quando esta atuar nos termos das forças de flutuação.

O calor gerado pela dissipação viscosa e o calor radiante não são considerados.

Supõe-se que o fluido é viscoso. A interface é mantida à temperatura de fusão. Na parede do cadinho temos uma dupla escolha: a temperatura pode ser fixada em toda sua extensão ou o fundo pode ser isolado. A superfície do líquido é tomada como termicamente isolada.

O nosso problema pode ser caracterizado do ponto de vista

matemático como segue: achar uma solução aproximada de um sistema não linear de equações diferenciais parciais com condições de fronteiras mistas.

## 1.2 A BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

Indicaremos neste parágrafo, as principais fontes bibliográficas que foram usadas para a confecção desta tese.

Devido a que o objetivo principal a atingir neste trabalho, é uma tentativa de repetir alguns dos resultados dados em [ 1 ] o mesmo foi desenvolvido seguindo a orientação dada nessa publicação e, portanto, várias conclusões serão feitas analisando e comparando os gráficos, para as linhas de corrente e isothermas, entre os gráficos fornecidos na publicação indicada e as obtidas neste trabalho. Para isso foram usados, em geral, os mesmos valores para os parâmetros físicos e geométricos.

Por outro lado, pensando em dar continuidade aos trabalhos apresentados em [ 2 ], [ 3 ] e [ 4 ], foram considerados vários aspectos aí apontados. Aliás, este trabalho vem a complementar ao menos, em parte, os referidos, no sentido de que é levada em conta a convecção natural.

A apresentação das equações que regem o escoamento nas variáveis primitivas e através da função corrente e vetor vorticidade foi obtida de [ 5 ] e [ 9 ]. A formulação variacional das equações para o nosso problema, foi feita, por analogia, com a

apresentada em [ 6 ] , onde essa formulação é colocada para as equações de Navier-Stokes para um fluxo isotérmico. Não foi possível, na bibliografia consultada, achar uma formulação variacional em que se incluía a equação de energia térmica. Na sua maioria, as mais recentes publicações tratam de novas formulações das equações de Stokes e Navier-Stokes, principalmente em relação a análise de convergência e da acuidade.

Para introduzir o método dos elementos finitos foi usado [ 10 ] . A fundamentação da formulação variacional mista, a qual é usada no presente trabalho e outras formulações alternativas foram tomadas principalmente de [ 7 ] .

### 1.3 DESCRIÇÃO DO TRABALHO

Resumiremos o que será feito nos próximos capítulos.

No Capítulo II são colocadas as equações de escoamento para um fluido viscoso não isotérmico em forma vetorial. Novamente as equações são apresentadas em coordenadas polares. Simplificando e particularizando, obtemos as equações de Navier-Stokes e o problema de Stokes os quais também são colocadas em termos de novas variáveis: função corrente e vetor vorticidade. Por último , as equações são adimensionalizadas para que surjam os números adimensionais.

Numa forma esquemática e conceitual é apresentada no início do Capítulo III a formulação dos resíduos ponderados e o método

dos elementos finitos indicando alguns dos aspectos computacionais. A seguir a fundamentação da formulação variacional mista é feita a partir do problema de minimização de funcionais com restrições. Esta, e as formulações alternativas são colocadas para as equações de Navier-Stokes e/ou Stokes convenientemente. Em cada caso, destacam-se vantagens e desvantagens de cada uma delas. Deve-se esclarecer, que estas últimas são tratadas de forma superficial e foram extraídas de estudos mais detalhados que podem ser encontrados na bibliografia oportunamente indicada. O objetivo, é, principalmente mostrar outros procedimentos alternativos existentes para a resolução de problemas deste tipo. Finalmente, é feita a formulação variacional mista para o nosso problema no caso não-estacionário.

No Capítulo IV começamos por definir os espaços de aproximação para a formulação variacional aproximada no caso estacionário; a seguir são introduzidas algumas simplificações e as funções testes e da base; em seguida, obtemos um sistema algébrico não-linear, e são mostrados os métodos e técnicas computacionais para sua resolução.

No último capítulo descrevemos, na primeira parte, os testes realizados; a seguir são mostrados os resultados em forma gráfica e as respectivas conclusões. No fim, são descritas as principais subrotinas usadas e colocadas propostas de novos trabalhos.

Notação, definições e cálculos auxiliares são encontrados



nos apêndices.

#### 1.4 CONDIÇÕES DE FRONTEIRA E PARÂMETROS FÍSICOS E GEOMÉTRICOS

Colocaremos as condições de fronteira e consideraremos alguns dados e relações entre parâmetros físicos e geométricos. Primeiramente analisaremos as condições na fronteira:

a. fundo do cadinho;  $0 < r < b, z = 0$

$$u = w = 0 ; v = \omega_c \cdot r ; T = T_c \text{ ou } \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

b. lateral do cadinho;  $r = b, 0 < z < d$

$$u = w = 0 ; v = \omega_c \cdot b ; T = T_c$$

c. superfície livre;  $a < r < b, z = d$

$$w = 0 ; \partial u / \partial z = \partial v / \partial z = \partial T / \partial z = 0$$

d. crystal;  $a < r < b/2, z = d$

$$u = w = 0 ; v = \omega_s \cdot r ; T = 0$$

e. eixo de simetria ;  $r = 0, 0 < z < d$

$$u = v = 0 ; \partial T / \partial r = \partial w / \partial r = 0$$

Tendo em conta a equação (2.5.8),  $\psi = 0$  sob todo o contorno.

Alguns dados típicos do modelo são:

$$a = 0.001 - 0.03\text{m} ; b = 0.025 - 0.05\text{m} ; d = 0.05 - 0.1\text{m}$$

$$\omega_s = 0 - 10\text{rpm} ; \omega_c = -50 - 50\text{rpm}$$

$$\text{Pr} = 0.015 - 0.09 ; \text{Gr} = 6 \times 10 - 9 \times 10$$

$$\text{Re} = 1300 - 5350 ; \text{Re} = - 1500 - 1500$$

A relação entre os parâmetros geométricos é a seguinte:

$$d/b = 2 ; a/b = 1/2$$

daqui podemos fixar valores para  $a$ ,  $b$  e  $d$  como segue:

$$a = 0.02 ; b = 0.04 ; d = 0.08$$

Os valores para as propriedades do fluido são os seguintes:

$T_m$ : temperatura de fusão  $1511 \text{ }^\circ\text{K}$

$\rho$ : densidade ( $1518 \text{ }^\circ\text{K}$ )  $5.71 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$

$\beta$ : coeficiente de compressibilidade térmica  $1.89 \times 10^{-4} \text{ l/}^\circ\text{K}$

$\nu$ : viscosidade cinemática  $5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$

$c_p$ : capacidade calorífica  $507 \text{ l/}^\circ\text{K.Kg}$

$k$ : conductividade térmica  $15.15 \text{ w/m}^\circ\text{K}$

## CAPÍTULO II

### 2.1 AS EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO [ 5 ], [ 9 ]

O escoamento de um meio contínuo é governado pelos princípios da mecânica clássica e da termodinâmica. A aplicação das leis de conservação de massa, momento e energia fornecem as equações básicas para descrever o escoamento, as quais formam um conjunto de equações diferenciais parciais.

As formas não conservativas destas equações são respectivamente: a equação de conservação da massa:

$$D\rho/Dt + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.1.1)$$

a equação de conservação do momentum:

$$D\vec{u}/Dt - \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \vec{f} \quad (2.1.2)$$

a equação de conservação da energia:

$$\rho D\hat{U}/Dt - \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \vec{u} + \nabla \cdot \vec{q} = 0 \quad (2.1.3)$$

onde:

$$D[ \ ]/Dt = \partial[ \ ]/\partial t + (\vec{u} \cdot \nabla[ \ ])$$

As equações acima estão baseadas numa descrição euleriana do fluido; isto é, as propriedades características do meio  $\rho$ ,  $\vec{u}$ ,  $T$ , etc. são consideradas como funções do tempo e do espaço num sistema de referência inercial.

Devem se acrescentar as equações constitutivas para o tensor de tensões  $\underline{\underline{\sigma}}$  para o vetor de fluxo de calor  $\vec{q}$ . A relação para  $\underline{\underline{\sigma}}$  é expressa como a soma das contribuições do efeito estático da pressão e do tensor de tensão viscoso  $\underline{\underline{\zeta}}$  proveniente da deformação do fluido durante o movimento, assim:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \mathbf{I} + \underline{\underline{\zeta}} \quad (2.1.4)$$

Estamos interessados apenas nos fluidos newtonianos; fluidos nos quais o tensor de tensão viscoso é função linear de tensor de deformação  $\underline{\underline{D}}$ . A expressão de  $\underline{\underline{\zeta}}$  em termos de  $\underline{\underline{D}}$  e de  $\nabla \vec{u}$  é:

$$\underline{\underline{\zeta}} = 2 \mu \underline{\underline{D}} + \lambda (\nabla \cdot \vec{u}) \mathbf{I} \quad (2.1.5)$$

onde  $\mu$  e  $\lambda$  são coeficientes de viscosidade e  $\underline{\underline{D}}$  está dado por:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)$$

Para o vetor  $\vec{q}$  assumimos que o fluido obedeça a lei de

Fourier para a condução de calor:

$$\vec{q} = -k \nabla T \quad (2.1.6)$$

onde  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica.

Trataremos de um fluido incompressível que se caracteriza pela seguinte condição:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.1.7)$$

O fluido é dito com divergência livre e a equação (2.1.5) simplifica-se, pela hipótese de Stokes e incompressibilidade a:

$$\underline{z} = 2 \mu D \quad (2.1.8)$$

Se introduzirmos a condição de incompressibilidade (2.1.7), também chamada equação da continuidade, na equação (2.1.1) obtemos:

$$D\rho/Dt = 0$$

cujo significado é que a densidade permanece constante na trajetória da partícula de fluido.

É necessário também considerarmos uma equação que relacione a energia interna específica com a temperatura.

$$\hat{U} = c_p T \quad (2.1.9)$$

onde  $c_p$  é a capacidade calorífica.

Substituindo nas equações da conservação do momento (2.1.2) e da energia (2.1.3) as equações constitutivas (2.1.8) e (2.1.9) correspondentemente, temos:

$$\rho D\vec{u}/Dt - \nabla \cdot (-p I + 2 \mu D) = \vec{f} \quad (2.1.10)$$

$$\rho c_p DT/Dt - (-p I + 2 \mu D) : \nabla \vec{u} - k \Delta T = 0 \quad (2.1.11)$$

as formas conservativas das equações acima são:

$$\rho \partial \vec{u} / \partial t + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \nabla \cdot (-p I + 2 \mu D) = \vec{f} \quad (2.1.12)$$

$$\rho c_p \partial T / \partial t + \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T - (-p I + 2 \mu D) : \nabla \vec{u} - k \Delta T = 0 \quad (2.1.13)$$

definimos a função dissipação viscosa como:

$$\Phi = \sigma : \nabla \vec{u} = (-p I + 2 \mu D) : \nabla \vec{u}$$

que de acordo com as hipóteses simplificadoras já mencionadas, será desprezada.

Considerando a equação (2.1.12) no caso em que  $\mu$  seja constante e levando em conta a equação de continuidade obtemos a

equação de Navier-Stokes..

$$\rho (\partial \vec{u} / \partial t + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) + \nabla p - \mu \Delta \vec{u} = \vec{f}$$

Para baixos números de Reynolds ( $Re \ll 1$ ), desprezando o termo convectivo não linear  $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$  obtemos:

$$\rho \partial \vec{u} / \partial t + \nabla p - \mu \Delta \vec{u} = \vec{f}$$

com a equação continuidade

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

e com condições na fronteira (por exemplo condições de Dirichlet)

$$\vec{u} = \vec{g} \quad \text{em} \quad \delta\Omega$$

definem o sistema de Stokes

## 2.2 AS EQUAÇÕES EM COORDENADAS CILÍNDRICAS POLARES [ 2 ]

Em consideração a geometria do modelo escrevemos as equações em coordenadas cilíndricas polares.

Nestas coordenadas os diversos termos das equações são:

$$\vec{\nabla} \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

$$\nabla T = \left( \frac{\partial T}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Fazemos uso de uma das hipóteses simplificadoras: a axisimetria.

Para um escoamento axisimétrico, obtemos as seguintes expressões:



$$\nabla \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & -\frac{v}{r} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{u}{r} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r})}{2} & \frac{(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r})}{2} \\ \frac{(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r})}{2} & \frac{u}{r} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r})}{2} & \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\nabla \cdot D = \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \right. \\ \left. \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]$$

$$\Delta \vec{u} = \left[ \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right]$$

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \left[ u \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + \frac{w \partial u}{\partial z} \right), \left( \frac{uv}{\partial r} + \frac{uv}{r} + \frac{w \partial v}{\partial z} \right), \left( \frac{uw}{\partial r} + \frac{w \partial w}{\partial z} \right) \right]$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\nabla p = \left( \frac{\partial p}{\partial r}, 0, \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

$$\Delta T = \left( \frac{\partial T}{\partial r}, 0, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

$$\vec{u} \cdot \nabla T = u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z}$$

agora, as equações (2.1.7), (2.1.12) e (2.1.13) vão ser escritas nestes termos.

Assim teremos para a equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2.1)$$

a equação do momentum para cada componente pode ser expressa como:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial t}{\partial r} - \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - 2 \frac{u}{r^2} + \frac{2u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r} \right) \partial z = f_r \quad (2.2.2)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + \frac{\partial r}{\partial z} w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = f_\theta \quad (2.2.3)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \left( u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = f_z \quad (2.2.4)$$

a equação da energia é:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) - k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.2.5)$$

Com relação às forças externas, apenas a força de gravidade é considerada, assim:

$$f_r = f_\theta = 0, \quad f_z = \rho g$$

### 2.3 A APROXIMAÇÃO DE BOUSSINESQ

Em convecção livre, a variação da densidade com a temperatura deve ser considerada. Na aproximação de Boussinesq, todas as propriedades do fluido são independentes da temperatura com a única exceção da densidade onde ela intervêm nos termos que levam em conta as forças de flutuação do fluido.

Para obter a relação densidade-temperatura fazemos o desenvolvimento de Taylor da densidade em função da temperatura, no ponto correspondente a temperatura de fusão  $T_m$ .

$$\rho = \rho(T_m) + \frac{\partial \rho}{\partial T}(T_m)(T - T_m) + \dots$$

consideraremos somente os dois primeiros termos; assim temos:

$$\rho = \rho(1 - \beta_m(T - T_m)) \quad (2.3.1)$$

onde  $\beta_m$  é o coeficiente de compressibilidade do fluido.

#### 2.4 ANÁLISE DIMENSIONAL

Com a finalidade de introduzirmos números adimensionais típicos que caracterizam o escoamento, faremos a adimensionalização das equações.

Após escolhermos os parâmetros característicos obtemos as variáveis adimensionalizadas:

$$r^* = \frac{r}{b}, \quad z^* = \frac{z}{b}$$

$$u^* = \frac{bu}{v}, \quad v^* = \frac{bv}{v}, \quad w^* = \frac{bw}{v}$$

$$t^* = \frac{vt}{b^2}$$

$$T^* = \frac{(T - T_m)}{(T_c - T_m)}$$

$$p^* = (p + \rho_m g z) \frac{b^2}{\rho_m} v^2$$

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} + \frac{\partial^2}{\partial z^{*2}}$$

Substituindo os termos correspondentes e considerando a aproximação de Boussinesq obtemos para as equações de Navier-Stokes:

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* u^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{v^{*2}}{r^*} + \frac{\partial p^*}{\partial r^*} - \Delta^* u^* + \frac{u^*}{r^{*2}} = 0 \quad (2.4.2)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + u^* \frac{v^*}{r^*} - \Delta^* v^* + \frac{v^*}{r^{*2}} = 0 \quad (2.4.3)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{\partial p^*}{\partial z^*} - \Delta^* w^* = Gr T^* \quad (2.4.4)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} - \frac{1}{Pr} \Delta^* T^* = 0 \quad (2.4.5)$$

Onde  $Gr$  e  $Pr$  são os números de Grashof e Prandtl respectivamente.

A magnitude do número de Grashof determina a importância das forças de flutuação; entretanto um número de Prandtl pequeno indica a predominância da condução sobre a convecção.

## 2.5 A FUNÇÃO CORRENTE-VETOR VORTICIDADE [ 5 ]

Consideremos o problema de Stokes:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \mu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

com a seguinte condição na fronteira:  $\vec{u} = \vec{g}$  em  $\partial \Omega$

Este problema pode ser reformulado em termos do vetor vorticidade:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \tag{2.5.1}$$

para isso, o operador rotacional é aplicado na equação acima e o termo que contém a pressão desaparece:

$$\rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \mu \Delta \vec{\omega} = \nabla \times \vec{f} \tag{2.5.2}$$

esta equação pode ser associada com uma outra em termos do vetor função corrente  $\vec{\psi}$  definido por:

$$\vec{u} = \nabla \times \vec{\psi} \quad (2.5.3)$$

que cumpre automaticamente com a condição de incompressibilidade  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ .

Se aplicamos o rotacional em (2.5.3) obtemos:

$$\Delta \vec{\psi} + \vec{\omega} = 0 \quad (2.5.4)$$

quando o escoamento é bidimensional, ou para fluxos tridimensionais axisimétricos, o vetor  $\vec{\psi}$  tem uma componente normal ao plano do fluxo. Assim:

$$\vec{u} = \nabla \times (\psi \vec{k}) \quad (2.5.5)$$

onde  $\vec{k}$  é o versor unitário normal ao plano do fluxo e  $\psi$  é uma função escalar. Neste caso,  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$  e as equações (2.5.2) e (2.5.4) se transformarão em equações escalares:

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} - \mu \Delta \omega = f \quad (2.5.6)$$

$$\Delta \psi + \omega = 0 \quad ; \quad (2.5.7)$$

também as condições de fronteira devem ser transformadas

$$\psi_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \vec{u} \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (2.5.8)$$

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \Omega} \right|_{\Gamma} = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (2.5.9)$$

Assim notamos a diminuição do número de variáveis e que a pressão não aparece explicitamente.

Vamos expressar as componentes da velocidade da equação (2.5.5) como derivada de  $\psi$  em coordenadas polares

$$\vec{u} = (u, w) = \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \quad (2.5.10)$$

onde  $u$  e  $w$  são as componentes radial e axial da velocidade. A equação de continuidade é satisfeita, já que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r}$$

Para o cálculo de  $\psi$ , derivamos em relação a  $z$  e a  $r$  respectivamente cada uma das componentes de (2.5.10)

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$$

obtemos:



$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = r \frac{\partial u}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = r \frac{\partial w}{\partial r} + w$$

e somamos as duas últimas expressões para obter:

$$\Delta \psi = -r \frac{\partial u}{\partial z} + r \frac{\partial w}{\partial r} + w \quad (2.5.11)$$

esta equação deve ser resolvida com condições de fronteira apropriadas.

As curvas  $\psi$  constante são as linhas de corrente para o fluxo estacionário correspondentes as trajetórias percorridas pelas partículas do fluido.

## CAPÍTULO III

### 3.1 - A FORMULAÇÃO DE GALERKIN E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS [ 10 ]

#### 3.1.1 - Um exemplo introdutório

A fim de apresentar o método, tomamos o problema (estabelecido no capítulo anterior) de determinar a solução para a função corrente que satisfaça (2.5.11) com as correspondentes condições de fronteira. O lado direito dessa equação é calculado a partir da resolução do sistema determinado pelas equações (2.1.7), (2.1.12), (2.1.13) para o caso estacionário. O problema referido pode ser formulado assim:

achar  $u(x)$  tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{em } \Omega, \\ u &= 0 && \text{em } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.1.1.1)$$

onde  $\Omega$  é o domínio do fluxo e a fronteira  $\partial\Omega$  é contínua.

Chamamos uma solução clássica, a uma função  $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  que satisfaça (3.1.1.1). Uma outra formulação deste problema, demandará menos regularidade na solução.

#### 3.1.2 - A formulação pelos resíduos ponderados

Suponhamos que  $u$  seja suficientemente regular, por exemplo,  $u \in H^2(\Omega)$  e  $f \in L^2(\Omega)$ . Multiplicamos o resíduo de (3.1.1.1)

por uma função teste (peso)  $v \in H_0^1$  e integramos em  $\Omega$ , temos

$$-\int_{\Omega} \Delta u \, v \, dx = \int_{\Omega} f \, v \, dx = 0$$

integrando por partes obtemos:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \, v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.1.2.1)$$

Nesta última forma, a exigência de continuidade sobre a solução  $u$  diminuiu e levando em conta (3.1.2.1) reformulamos o problema como se gue:

Achar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que:

$$a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (3.1.2.2)$$

sendo:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \text{e} \quad (f, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f \, v \, dx$$

Se a função  $u \in H_0^1(\Omega)$  é a solução de (3.1.2.2) for suficiente mente regular ( $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$ ) ela é também solução de (3.1.1.1).

### 3.1.3 - A FORMULAÇÃO POR MINIMIZAÇÃO [ 10 ]

Consideremos o funcional  $J(v)$  definido em  $H_0^1(\Omega)$  por

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx$$

Pode ser mostrado que o problema (3.1.2.2) é equivalente ao problema de minimização:

Achar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

### 3.1.4 - Formulação aproximada

Faremos a formulação aproximada de (3.1.2.2); isto é, formularemos o problema num subespaço de dimensão finita  $V_h \subset H_0^1(\Omega)$  para obter  $u_h$  (uma solução aproximada de  $u$ ) conhecida como a aproximação de Galerkin.

Consideremos uma base de  $V_h$ ,  $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^N$ ; a solução aproximada  $u_h$  pode ser escrita em termos dessa base:

$$u_h = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x) \quad (3.1.4.1)$$

e deve satisfazer a equação:

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad v_h \in V_h. \quad (3.1.4.2)$$

Considerando (3.1.4.1) temos:

$$a\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i, \phi_j\right) = (f, \phi_j) \quad 1 \leq j \leq N$$

agora o problema torna-se o de achar  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  que satisfça

$$A \vec{\alpha} = \vec{b} \quad (3.1.4.3)$$

onde  $A$  é uma matriz cujos elementos são dados por:

$$(a_{ij}) = a(\phi_i, \phi_j)$$

e as componentes de  $\vec{b}$  por

$$(b_j) = (f, \phi_j)$$

Para que o sistema (3.1.4.3) seja de fácil resolução, devem ser levadas em conta algumas considerações relativas à construção do subespaço de aproximação  $V_h$ . O método dos elementos finitos fornece uma técnica para a construção das funções da base  $\phi_i$ . O domínio  $\Omega$  é aproximado por  $\Omega_h$  formado pela união de subregiões simples (triangulares ou quadrangulares), chamados de elementos finitos.

Assim

$$\Omega \cong \Omega_h \quad e \quad \bar{\Omega}_h = \bigcup_{e=1}^E \bar{\Omega}_e$$

onde  $E$  é o número de elementos  $\Omega_e$

As funções  $\phi_i$  são polinômios por partes construídos mediante polinômios definidos em cada elemento (as funções de forma) de modo que o suporte de  $\phi_i$  seja compacto.

### 3.2 - ELEMENTOS FINITOS MISTOS [7]

#### 3.2.1 - Minimização de funcionais

Consideremos um funcional  $J$  definido sobre um espaço de Hilbert ( $H^m(\Omega); H_0^m(\Omega)$  são exemplos típicos) com um produto interno  $(\cdot, \cdot)$  e norma  $\| \cdot \| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ . Desejamos achar  $u \in H$  tal que:

$$J(u) \leq J(v) \quad v \in H \quad J: H \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.2.1.1)$$

Se  $J$  é diferenciável (no sentido de Gâteaux) é possível calcular a primeira variação de Gâteaux de  $J$  através de:

$$\langle J'(u), v \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (J(u + \varepsilon v) - J(u)) / \varepsilon \quad (3.2.1.2)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota a dualidade em  $H^* \times H$ , observe que se  $H^*$  é o dual topológico de  $H$  então  $J'(u) \in H^*$ .

O funcional  $J$  possui um ponto crítico em  $u \in H$  se a primeira variação de  $J$  se anula em  $u$ , ou seja

$$\langle J'(u), v \rangle = 0 \quad \forall v \in H \quad (3.2.1.3)$$

o que é equivalente a:

$$J'(u) = 0 \quad (3.2.1.4)$$

### 3.2.2 - Minimização com restrições

No parágrafo anterior o funcional era minimizado em todo o espaço  $H$ ; frequentemente encontramos problemas nos quais a minimização é feita apenas num subconjunto de  $H$  que satisfaz certas restrições tais como:

$$Bu = g \quad B: H \rightarrow Q \quad (3.2.2.1)$$

onde  $B$  é um operador linear contínuo  $H$  e  $Q$  são espaços de Hilbert.

O método dos multiplicadores de Lagrange nos permite minimizar outro funcional sobre o espaço total  $H$ . Introduzimos o espaço  $Q^*$  (o dual de  $Q$ , o qual denominamos de espaço dos multiplicadores de Lagrange); e um novo funcional

$$L: H \times Q^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ definido por}$$

$$L(v, q) = J(v) + [q, Bv - g] \quad (3.2.2.2)$$

onde  $[\dots]$  e a dualidade entre  $Q^* \times Q$

A primeira variação em  $(u,p) \in H \times Q^*$  é

$$\langle L'(u,p), (v,q) \rangle = \langle J'(u), v \rangle + [p, Bv] + [q, Bu-g] \quad (3.2.2.3)$$

$H \times Q^*$

onde  $\langle \dots, \dots \rangle_{H \times Q^*}$  é a dualidade entre  $(H \times Q^*)^* \times (H \times Q^*)$ .

Exigindo que  $(u,p)$  seja tal que  $\langle L'(u,p), (v,q) \rangle$  se anule para todo  $(v,q) \in H \times Q^*$  obtemos a formulação variacional:

$$\langle J'(u), v \rangle + [p, Bv] = 0 \quad \forall v \in H$$

$$[q, Bu-g] = 0 \quad \forall q \in Q^* \quad (3.2.2.4)$$

onde a primeira componente  $\underline{u}$  é a solução do problema com restrições.

### 3.2.3 - O Problema de Stokes

Consideremos fluxo bidimensional de um fluido incompressível newtoniano fluindo lentamente; se o domínio do fluxo é regular e limitado, energia total é

$$J(\vec{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mu \nabla \vec{v} : \nabla \vec{v} - 2\vec{f} \cdot \vec{v}) \, dx \quad , \quad (3.2.3.1)$$

sendo  $\vec{v}$  é a velocidade



onde assumimos que  $\vec{v}|_{\Gamma} = 0$ , e  $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^2$ .

Neste caso, o espaço das funções admissíveis é  $(H_0^1(\Omega))^2$ . Já que o fluido é incompressível, a nossa restrição é:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega$$

o que significa que o operador de restrições  $B$  está dado por:

$$B\vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}, \quad B: (H_0^1(\Omega))^2 \longrightarrow L^2(\Omega); \quad (3.2.3.2)$$

e podemos tomar  $Q = Q^* = L^2(\Omega)$ , e então

$$[\alpha, B\vec{v}] = \int_{\Omega} \alpha \nabla \cdot \vec{v} \, dx = (\alpha, B\vec{v}) \quad (3.2.3.3)$$

onde  $(\alpha, B\vec{v})$  é o produto interno em  $L^2(\Omega)$ ; se  $\alpha$  é suficientemente regular

$$[\alpha, B\vec{v}] = \int_{\Omega} \nabla \alpha \cdot \vec{v} \, dx. \quad (3.2.3.4)$$

Para a formulação do método dos multiplicadores de Lagrange introduzimos:

$$L: (H_0^1(\Omega))^2 \times L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$L(v, \alpha) = J(v) + [\alpha, B\vec{v}] \quad (3.2.3.5)$$

considerando a primeira variação e a condição necessária para ponto crítico, o valor estacionário de  $L$  em  $(\vec{u}, p) \in H \times Q$  deve satisfazer o sistema:

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, dx - \int_{\Omega} p \, \nabla \cdot \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx \quad \forall \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^2 \quad (3.2.3.6)$$

$$\int_{\Omega} \alpha \cdot \nabla \vec{u} \, dx = 0 \quad \forall \alpha \in Q \quad (3.2.3.7)$$

e se  $u$  e  $p$  são suficientemente regulares, viã fórmula de Green obtemos a formulação clássica do problema

$$-\mu \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{f}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2.3.8)$$

$$\vec{u} = 0 \quad \text{em } \partial \Omega$$

o multiplicador de Lagrange tem uma interpretação física: é a pressão do fluido; que é determinada menos de uma constante.

### 3.2.4 - APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos baseado nas formulações por multiplicadores de Lagrange são chamados de métodos de elementos finitos mistos. Nesses métodos procedemos de maneira usual, construindo subespaços de dimensão finita  $H^h$  de  $(H^1)^2$  e  $Q^h$  de  $H^1$ . A única peculiaridade nesta formulação é que devemos aproximar em cada elemento a solução  $u$  e o multiplicador de Lagrange.

A nossa aproximação consiste em achar  $\{\vec{u}_h, p_h\} \in H^h \times Q^h$  tal que:

$$\int_{\Omega} u \nabla \vec{u}_h : \nabla \vec{v}_h \, dx + \int_{\Omega} \nabla p_h \cdot \vec{v}_h \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v}_h \, dx \quad \forall \vec{v}_h \in H^h \quad (3.2.4.1)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \alpha_h \cdot \vec{u}_h \, dx = 0 \quad \forall \alpha_h \in Q^h \quad (3.2.4.2)$$

Para que o problema discreto não apresente problemas de estabilidade e convergência quando  $h \rightarrow 0$  os subespaços de aproximação  $H_h$  e  $Q^h$  devem ser escolhidos de tal maneira que satisfaçam uma condição de compatibilidade. Essa condição, que é um requerimento crítico para a estabilidade do método, é a satisfação da inequação de BABUSKA-BREZZI.

Para esse fim, as aproximações da velocidade  $\vec{u}_h$  e da pressão  $p_h$  devem ser construídas seguindo as seguintes regras:

a: - na construção da malha podem ser usados elementos  $\Omega_e$  trian

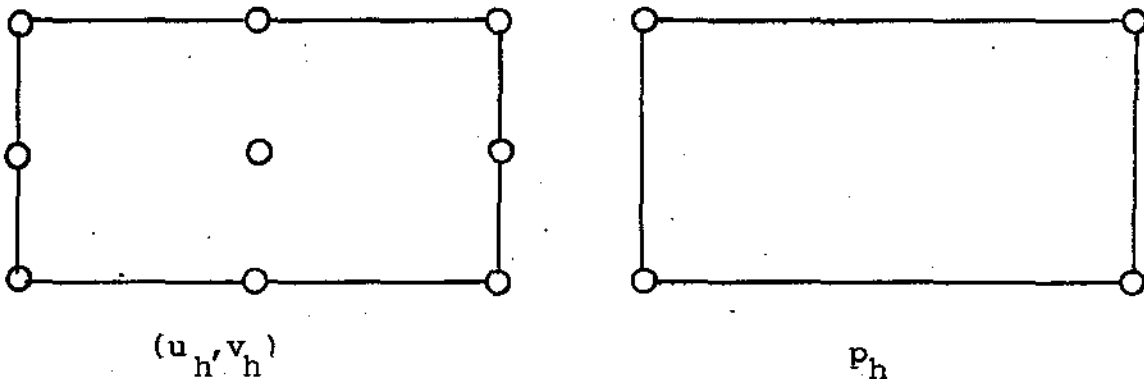
gulares ou retangulares.

b. - as aproximações para a velocidade e a pressão devem ser conformes ( $C^0$ ).

c. - i) se o elemento é triangular  $(u_h, v_h)$  são polinômios quadráticos por partes completos em  $x, y$  e  $p_h$  é linear.

ii) se o elemento é quadrangular,  $(u_h, v_h)$  são produtos tensoriais de polinômios quadráticos e  $p_h$  é bilinear.

O esquema da aproximação usado neste trabalho está ilustrado na figura abaixo:



Pode ser mostrado que as velocidades de convergência são de ordem ótima com esta escolha.

### 3.3.1 - QUADRADOS MÍNIMOS [6]

#### 3.3.1.1 - Solução pelos quadrados mínimos para o problema de Dirichlet não linear.

A fim de introduzir o método para a solução de problemas não lineares em mecânica dos fluidos, consideraremos primeiramente um problema mais simples: o problema de Dirichlet não linear, que se rá formulado usando o método dos quadrados mínimos juntamente com o método do gradiente conjugado.

O problema modelo pode ser colocado assim: achar  $u \in H_0^1(\Omega)$  tal que:

$$-\Delta u - T(u) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.3.1.1)$$

$$u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

com  $T: H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ ; onde  $T(u)$  é um operador não linear e  $H^{-1}(\Omega)$  é o dual topológico de  $H_0^1(\Omega)$ .

Uma formulação deste problema por quadrados mínimos requer que a função  $u$  minimize o resíduo num conjunto de funções admissíveis da equação (3.3.1.1) na norma  $L^2$ , o que é equivalente a:

$$\min_{v \in V} \int_{\Omega} |\Delta v + T(v)|^2 dx, \quad (3.3.1.2)$$

onde  $V$  é o espaço das funções admissíveis.

Introduzimos uma nova variável  $\xi$  através de:

$$-\Delta \xi = T(v) \quad \text{em } \Omega \quad (3.3.1.3)$$

$$\xi = 0 \quad \text{em } \partial\Omega$$

A expressão (3.3.1.2) pode ser escrita como:

$$\min_{v \in V} \int_{\Omega} |\Delta(v - \xi)|^2 dx, \quad (3.3.1.4)$$

onde  $\xi$  é uma função não linear de  $v$ , definida por (3.3.1.3).

Esta formulação, de acordo com o indicado em [4], conduz a problemas de convergência, devido a norma escolhida com a definição de  $\xi$  não ser apropriada.

Uma alternativa, ainda usando quadrados mínimos, seria considerar

$$v \in H_0^1(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla \xi(v)|^2 dx \quad (3.3.1.5)$$

onde  $\xi(v), \xi \in H_0^1(\Omega)$  é introduzida através de:

$$\Delta \xi = \Delta v + T(v) \quad \text{em } \Omega \quad (3.3.1.6)$$

$$\xi = 0 \quad \text{em } \partial \Omega.$$

se definimos a  $J: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$  como:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \xi(v)|^2 dx \quad (3.3.1.7)$$

a formulação acima será equivalente a:

achar  $u \in H^1(\Omega)$  tal que

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (3.3.1.8)$$

Para resolver este problema é indicada uma variante do método dos gradientes conjugados. Numa etapa deste algoritmo (a correspondente à construção da nova direção de descida) é necessário resolver um problema de Poisson; daí ser muito importante ter um eficiente "resolvedor" da equação de Poisson.

### 3.3.1.2 - Solução para as Equações de Navier-Stokes

Consideremos agora o problema não linear que surge das equações de Navier-Stokes. Para o caso estacionário e bidimensional temos:

$$\left. \begin{aligned} -\mu \Delta \vec{u} + \nabla p + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} &= \vec{f} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ em } \Omega \quad (3.3.2.1)$$

$$\vec{u} = \vec{g} \quad \text{em } \partial\Omega$$

Uma formulação pelo método dos quadrados mínimos é:

Achar  $\vec{u} \in M_g$  tal que

$$J(\vec{u}) \leq J(\vec{v}) \quad \vec{v} \in M_g \quad (3.3.2.2)$$

onde

$$M_g = \{ \vec{v}/\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2, \nabla \cdot \vec{v} = 0, \vec{v} = \vec{g} \text{ em } \partial\Omega \}$$

sendo

$$J(\vec{v}) = \mu/2 \int_{\Omega} |\nabla \xi(\vec{v})| \, dx \quad (3.3.2.3)$$

onde  $\xi(\vec{v})$  é definido por:

$$\left. \begin{aligned} -\mu \Delta \xi - \nabla p &= -\mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} - \vec{f} \\ \nabla \cdot \xi &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ em } -\Omega \quad (3.3.2.4)$$

$$\xi = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Podemos perceber que  $\xi$  é obtido resolvendo este problema de Stokes e que esta formulação é uma generalização do problema de Dirichlet não linear apresentado anteriormente.

Novamente se propõe o método dos gradientes conjugados. Em cada iteração devemos resolver vários problemas de Stokes; logo, precisamos de um eficiente "resolvedor" do problema de Stokes. Um método para resolver o problema de Stokes pode ser encontrado em [ 6 ]. Este método consiste em achar a solução de um número finito de problemas de Dirichlet e a solução de uma equação inte-



gral com valores na fronteira. Este método pode ser implementado usando elementos finitos.

### 3.3.2 - FORMULAÇÃO COM DIVERGÊNCIA LIVRE [ 7 ]

Nas formulações variacionais, a condição de continuidade  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  deve ser satisfeita, além das equações de momento e energia. Essa equação pode ser considerada como uma restrição e assim é requerido que as soluções admissíveis a satisficam.

Definimos o espaço  $M_0(\Omega)$ , subespaço de  $(H_0^1(\Omega))^2$  onde é satisfeita a restrição de incompressibilidade

$$M_0(\Omega) = \{ \vec{v} \in (H_0^1(\Omega))^2 ; \nabla \cdot \vec{v} = 0 \}$$

Colocamos, como é usual, a formulação variacional, para uma função teste  $\vec{v}$  que satisfaça  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  e temos:

$$- \int_{\Omega} \mu \Delta \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx \quad \vec{v} \in M_0(\Omega). \quad (3.3.2.1)$$

Fazendo uso da fórmula de Green-Ostrogradski obtemos uma expressão simplificada

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx \quad (3.3.2.2)$$

na qual temos somente como incógnita o vetor de velocidade, já que o termo que continha a pressão  $p$  é multiplicado por  $\nabla \cdot \vec{v}$  e se anula automaticamente.

Para resolver o problema aproximado por elementos finitos de vemos construir um subespaço de aproximação  $M_{0,h}(\Omega) \subset M_0(\Omega)$  usando polinômios por partes tal que  $\nabla \cdot \vec{u}_h = 0$ .

A satisfação de  $\nabla \cdot \vec{u}_h = 0$  implica a necessidade de usar elementos especiais e esta é a maior dificuldade do ponto de vista da programação e cálculo.

### 3.3.3 - MÉTODO DE PENALIDADE [ 7 ]

A formulação da divergência livre é feita sobre um espaço  $M_0$  no qual o campo de velocidade deve satisfazer  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ , com a vantagem que a pressão é eliminada, mas com a dificuldade na construção do subespaço de aproximação  $M_0$  que deve ser de uma classe especial. Na formulação dos elementos mistos, a condição de incompressibilidade é colocada introduzindo um multiplicador de Lagrange (acrescentando uma incógnita), e a solução fica em termos do par velocidade-pressão  $(u;p)$ .

Na formulação por penalização temos uma técnica, que respeitando a restrição, fornece uma solução sem a necessidade do cálculo da pressão, reduzindo assim o número de variáveis e sem o uso de elementos especiais com divergência livre. A restrição é colo-

cada na formulação através de um termo de penalidade.

No problema de Stokes uma escolha apropriada para um funcional de penalização é a seguinte:

$$P(\vec{u}) = 1/2 \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{u})^2 dx \quad (3.3.3.1)$$

que satisfaz  $P \geq 0$  para valores admissíveis de  $\vec{u}$  e é zero se  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ .

Consideremos o funcional que define a energia total do sistema (3.2.3.1) no qual acrescentamos um termo de penalidade; assim obtemos o funcional da energia penalizado.

$$J_{\epsilon}(\vec{u}) = \int_{\Omega} \left( \frac{\mu}{2} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{u} - \vec{f} \cdot \vec{u} \right) dx + \frac{1}{2} \epsilon \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{u})^2 dx \quad (3.3.3.2)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro positivo.

Igualamos a primeira variação de  $J_{\epsilon}$  a zero e obtemos o seguinte problema variacional:

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \vec{u}_{\epsilon} : \nabla \vec{v} dx + \frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u}_{\epsilon} \nabla \cdot \vec{v} dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} dx \quad \forall v \in H \quad (3.3.3.3)$$

e portanto, se  $u_{\epsilon}$  minimiza  $J_{\epsilon}$  também é solução do problema variacional.

A formulação aproximada de (3.3.3.3) é: achar  $\vec{u}_h^\varepsilon$  tal que

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \vec{u}_h^\varepsilon : \nabla \vec{v}_h dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \nabla \vec{u}_h^\varepsilon \cdot \nabla \cdot \vec{v}_h dx = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v}_h dx \quad \forall \quad v_h \in H_h \quad (3.3.3.4)$$

onde  $H_h \subset (H^1(\Omega))^2$ .

Um inconveniente para este método ocorre para valores de  $\varepsilon$  pequenos. Embora o termo de penalidade esteja adequadamente definido para o problema contínuo, ele não o é para o discreto. As condições impostas no funcional  $P(\vec{u})$  o define como sendo semidefinido positivo ( $P(\vec{u}) > 0$  se  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  e  $P(\vec{u}) = 0$  se  $\nabla \cdot u = 0$ ). Na passagem ao problema discreto, em geral, a aproximação para o funcional  $P(\vec{u})$  será definida positiva e as soluções  $\vec{u}_h^\varepsilon$  irão para zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Uma técnica, conhecida como integração reduzida que é apresentada em [ 7 ] melhora esta formulação.

### 3.3.4 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL PARA A FUNÇÃO CORRENTE-VORTICIDA

DE. [ 18 ]

Em duas dimensões temos uma maneira fácil de obter uma solução aproximada usando a formulação em termos das novas variáveis: função corrente e vorticidade  $(\psi, \omega)$ .

De fato, uma formulação variacional para o problema de Stokes é: achar  $\psi \in H_0^1(\Omega)$  e  $\omega \in H(\Omega)$  tal que:

$$\mu \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{x} \omega \cdot \nabla \mathbf{x} \cdot) dx = \int_{\Omega} (\vec{f} \cdot \nabla \mathbf{x} \cdot) dx \quad \omega \in H_0^1(\Omega) \quad (3.3.4.1)$$

$$\int_{\Omega} \omega \Pi dx = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{x} \psi \cdot \nabla \mathbf{x} \Pi) dx \quad \Pi \in H_0^1(\Omega) \quad (3.3.4.2)$$

Podemos obter, a partir deste sistema, a formulação aproximada construindo os subespaços de aproximação de  $H_0^1$  e  $H_0^1$ .

A formulação  $(\psi, \omega)$  em 3-D é feita em [18] e um tratamento mais extenso em [ 7 ].

### 3.4 - FORMULAÇÃO VARIACIONAL MISTA PARA O ESCOAMENTO NÃO ISOTÉRMICO.

Colocaremos o problema com condições de fronteiras gerais.

#### 3.4.1 - Caso Estacionário

As equações a considerar são, ainda na notação do cap. I

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \nabla \cdot (-p \mathbf{I} + 2\mu \underline{D}) + \vec{f} = \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \\ \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T = k \Delta T \end{cases} \quad \text{em } \Omega \quad (3.4.1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{u} = \vec{g}_0 & \text{em } \Gamma_0 \\ (-p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}) \vec{n} = \vec{g} & \text{em } \Gamma \\ T = T_0 & \text{em } \hat{\Gamma}_0 \\ \nabla T \cdot \vec{n} = Q_1 & \text{em } \hat{\Gamma}_1 \end{array} \right.$$

Por simplicidade, vamos supor que  $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^3$ ; e  $\Omega$  é limitado.

Definimos:

$$V_0 = \{ \vec{v} / \vec{v} \in (H^1(\Omega))^3, \vec{v} = 0 \text{ em } \Gamma_0 \} \quad (3.4.1.2)$$

$$S_0 = \{ s / s \in H^1(\Omega), s = 0 \text{ em } \hat{\Gamma}_0 \} \quad (3.4.1.3)$$

Multiplicando as equações (3.4.1.1) pelas funções testes  $q$ ,  $\vec{v}$  e  $s$  respectivamente e integrando por partes (isto é, aplicando a fórmula de Green-Ostrogradsky nos termos que contêm derivadas de maior ordem) obtemos a formulação fraca das equações que escrevemos a seguir:

Achar  $(\vec{u}, T, p) \in (H^1(\Omega))^3 \times H^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$  tal que  $\vec{u} = \vec{g}_0$  sobre  $\Gamma_0$ ,  $T = T_0$  sobre  $\hat{\Gamma}_0$  que satisfaça

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u} \cdot q \, dx = 0 \quad \forall q \in H^1 \quad (3.4.1.4)$$

$$\int_{\Omega} (-p \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}) : \nabla \vec{v} \, dx + \int_{\Omega} \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \cdot \vec{v} \, dx =$$

$$= \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, dx + \int_{\Gamma_1} \vec{g} \cdot \vec{v} \, d\Gamma \quad \forall \vec{v} \in V_0 \quad (3.4.1.5)$$

$$\int_{\Omega} \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T \, s \, dx + \int_{\Gamma_1} k \nabla T \cdot \nabla s \, dx = \int_{\hat{\Gamma}_1} Q_1 s \, d\Gamma \quad \forall s \in S_0 \quad (3.4.1.6)$$

### 3.4.2 - Formulação Aproximada

É preciso definir os espaços que serão usados na formulação aproximada. Tomaremos

$$V_{gh} = \{ \vec{v}_h \in V_h, \vec{v}_h = g_{0h} \text{ sobre } \Gamma_0 \} \quad (3.4.2.1)$$

se  $\vec{g}_0 = 0$  obtemos  $V_{0h}$

$$S_{Th} = \{ s_h \in S_h, s_h = T_{0h} \text{ sobre } \hat{\Gamma}_0 \} \quad (3.4.2.2)$$

se  $T_0 = 0$  obtemos  $S_{0h}$ ;  $\vec{g}_{0h}$  e  $T_{0h}$  são uma apropriada aproximação de  $\vec{g}_0$  e  $T_0$ .

A formulação aproximada por analogia será feita sobre os

espaços de dimensão finita definidos acima. Devemos achar

$\{\vec{u}_h, T_h, p_h\} \in V_{gh} \times S_{Th} \times Q_h$ , tal que,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u}_h \alpha_h dx = 0 \quad \forall \alpha_h \in Q \quad (3.4.2.3)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (-p_h I + 2\mu D_h) : \nabla \vec{v}_h dx + \int_{\Omega} \rho \vec{u}_h \cdot \nabla \vec{u}_h \cdot \vec{v}_h dx = \\ & = \int_{\Omega} \vec{f}_h \cdot \vec{v}_h dx + \int_{\Gamma_1} g_{Th} \cdot \vec{v}_h d\Gamma \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \quad (3.4.2.4)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho c_p \vec{u}_h \cdot \nabla T_h s_h dx + \int_{\Omega} k \nabla T_h \cdot \nabla T_h dx = \\ & = \int_{\hat{\Gamma}_1} Q_{1h} s_h d\Gamma \quad \forall s \in S_{0h} \end{aligned} \quad (3.4.2.5)$$

### 3.4.3 - Caso Não Estacionário

É possível reduzir o problema não estacionário a um sistema de equações diferenciais ordinárias, por meio de uma discretização espacial.

Escrevemos o problema dependente do tempo a seguir:



$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{u} = 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla \cdot (-pI + 2\mu D) + \vec{f} \\ \rho_{cp} \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_{cp} \vec{u} \cdot \nabla T = k \Delta T \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega \quad (3.4.3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}(x, 0) = \vec{u}_0(x) \quad \text{em } \Omega \\ \vec{u} = \vec{g}_0(x, t) \quad \text{em } \Gamma_0 \\ (-pI + 2\mu D)\vec{n} = \vec{g}_1(x, t) \quad \text{em } \Gamma_1 \\ T(x, 0) = T_0(x) \quad \text{em } \Omega \\ T = T_0(x, t) \quad \text{em } \hat{\Gamma}_0 \\ \nabla T \cdot \vec{n} = Q_1(x, t) \quad \text{em } \hat{\Gamma}_1 \end{array} \right.$$

Procedendo de maneira similar ao que foi feito para o problema estacionário obtemos uma forma semidiscretizada (no espaço) deste problema:

achar  $(\vec{u}_h(t), T_h(t), p_h(t)) \in V_{gh}(t) \times S_{Th}(t) \times Q_h$  tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u}_h \, \alpha_h \, dx = 0 \quad \forall \alpha_h \in Q \quad (3.4.3.2)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \vec{u}_h}{\partial t} \cdot \vec{v}_h \, dx + \int_{\Omega} (-pI + 2\mu D_h) : \nabla \vec{v}_h \, dx + \\
& + \int_{\Omega} \rho \vec{u}_h \cdot \nabla \vec{u}_h \, dx = \int_{\Omega} \vec{f}_h \cdot \vec{v}_h \, dx + \\
& + \int_{\Gamma_1} \vec{g}_{1h}(t) \cdot \vec{v}_h \, d\Gamma \quad \forall \quad \vec{v}_h \in V_{0h} \quad (3.4.3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho_{cp} \frac{\partial T}{\partial t} s_h \, dx + \int_{\Omega} \rho_{cp} \vec{u}_h \cdot \nabla T_h s_h \, dx + \\
& + \int_{\Omega} k \nabla T_h \cdot \nabla s_h \, dx = \int_{\Gamma_1} Q_{1h}(t) s_h \, d\Gamma \quad \forall s_h \in S_{0h} \quad (3.4.3.4)
\end{aligned}$$

com  $V_{gh}(t) = \{ \vec{v}_h \in V_h, \vec{v}_h|_{\Gamma_0} = \vec{g}_{0h}(t) \}$  e

$S_{Th}(t) = \{ s_h \in S_h, s_h|_{\Gamma_0} = T_{0h}(t) \}$

sendo  $\vec{g}_{0h}(t)$ ;  $T_{0h}(t)$ ;  $\vec{g}_{1h}(t)$  e  $Q_{1h}(t)$  apropriadas aproximações

de  $\vec{g}_0(x,t)$ ;  $T_0(x,t)$ ;  $\vec{g}(x,t)$  e  $Q(x,t)$  e sendo  $\vec{u}_h(0) = \vec{u}_{0h}$  e  $T_h(0) = T_{0h}$  dados do problema onde  $\vec{u}_{0h}$  é a aproximação de  $\vec{u}$  e  $T_{0h}$  de  $T_0$ .

Para obter o problema totalmente aproximado devemos fazer uma conveniente discretização no tempo; assim o teremos em uma forma computacionalmente adequada. Com esse fim são propostos diferentes esquemas dos quais apresentamos a seguir o esquema semi-implícito de Cranck-Nicholson.

Dado  $\vec{u}_h^0 = \vec{u}_{0h}$ ,

para  $n \geq 0$ , obteremos  $\vec{u}_h^{n+1}$  a partir de  $\vec{u}_h^n$  resolvendo o sistema seguinte:

$$\int_{\Omega} \nabla \vec{u}_h^{n+1/2} \cdot \vec{q}_h \, dx = 0 \quad \forall \vec{q}_h \in Q_h \quad (3.4.3.5)$$

$$\int_{\Omega} \rho \frac{(\vec{u}_h^{n+1} - \vec{u}_h^n)}{\Delta t} \cdot \vec{v}_h \, dx + \int_{\Omega} (-p_h^{n+1/2} + 2\mu D_h^{n+1/2}) : \vec{v}_h \, dx +$$

$$+ \int_{\Omega} \rho \vec{u}_h^{n+1/2} \cdot \nabla \vec{u}_h^{n+1/2} \cdot \vec{v}_h \, dx = \int_{\Omega} \vec{f}_h^{n+1/2} \cdot \vec{v}_h \, dx + \int_{\Gamma_1} \vec{g}_{1h}^{n+1/2} \cdot \vec{v}_h \, dx \quad \forall \vec{v}_h \in V_{0h}$$

(3.4.3.6)

$$\int_{\Omega} \rho_{cp} \frac{(T_h^{n+1} - T_h^n)}{\Delta t} s_h dx + \int_{\Omega} \rho_{cp} \bar{u}_h^{n+1/2} \cdot \nabla T_h^{n+1/2} s_h dx +$$

$$+ \int_{\hat{\Gamma}} k \nabla T_h^{n+1/2} \cdot \nabla s_h dx = \int_{\hat{\Gamma}} Q_{lh}^{n+1/2} \cdot s_h d\Gamma \quad \forall s_h \in S_{0h} \quad (3.4.3.7)$$

com  $\{ \bar{u}_h^{n+1/2}, T_h^{n+1/2}, \bar{p}_h^{n+1/2} \} \in V_{gh}^{n+1/2} \times S_{Th}^{n+1/2} \times Q_h$

sendo:

$$\bar{u}_h^{n+1/2} = 1/2 (\bar{u}_h^{n+1} + \bar{u}_h^n)$$

$$T_h^{n+1/2} = 1/2 (T_h^{n+1} + T_h^n)$$

$$\bar{p}_h^{n+1/2} = 1/2 (\bar{p}_h^{n+1} + \bar{p}_h^n)$$

e

$$V_{gh}^{n+1/2} = V_{gh}((n+1/2)\Delta t)$$

$$S_{Th}^{n+1/2} = S_{Th}((n+1/2)\Delta t)$$

usando as relações:

$$\bar{u}_h^{n+1} = \bar{u}_h^n + 2(\bar{u}_h^{n+1/2} - \bar{u}_h^n) \quad e$$

$$T_h^{n+1} = T_h^n + 2(T_h^{n+1/2} - T_h^n)$$

Podemos eliminar  $\bar{u}_h^{n+1}$  e  $T_h^{n+1}$  das equações (3.4.3.6) e (3.4.3.7).

O esquema apresentado têm um erro de truncamento de  $O(\Delta t^2)$ , e é incondicionalmente estável.

## CAPÍTULO IV

### 4.1 - A RESOLUÇÃO DA FORMULAÇÃO APROXIMADA PARA O CASO ESTACIONÁRIO.

Seja  $\{\tau_h\}$  uma família de triangularizações de  $\bar{\Omega}$  tal que  $\bar{\Omega} = \cup_{T \in \tau_h} T$  e consideremos os seguintes subespaços de aproximação.

$$X_h = \{ \alpha_h \in C^0(\bar{\Omega}), \alpha_h|_T \in P_1, \forall T \in \tau_h \}$$

$$V_h = \{ \vec{v}_h \in (C^0(\Omega))^3, \vec{v}_h|_T \in (P_2)^3, \forall T \in \tau_h \}$$

$$V_{gh} = \{ \vec{v}_h \in V_h, \vec{v}_h = \vec{g}_{0h} \text{ sobre } \Gamma_0 \}$$

$$V_{0h} = \{ \vec{v}_h \in V_h, \vec{v}_h = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \}$$

$$S_h = \{ s_h \in C^0(\bar{\Omega}), s_h|_T \in P_2, \forall T \in \tau_h \}$$

$$S_{Th} = \{ s_h \in S_h, s_h = T_{0h} \text{ sobre } \hat{\Gamma}_0 \}$$

$$S_{0h} = \{ s_h \in S_h, s_h = 0 \text{ sobre } \hat{\Gamma}_0 \}.$$

Escrevemos novamente a formulação aproximada do problema

achar  $\{\vec{u}_h, p_h, T_h\} \in V_{gh} \times S_{Th} \times X_h$ , que satisfaça

$$\int_{\Omega} (-p_h I + 2\mu D_h) : \nabla \vec{v}_h \, dx + \int_{\Omega} \rho \vec{u}_h \cdot \nabla \vec{u}_h \cdot \vec{v}_h \, dx =$$

$$= \int_{\Omega} \vec{f}_h \cdot \vec{v}_h \, dx + \int_{\Gamma_1} \vec{g}_1 \cdot \vec{v}_h \, d\Gamma \quad \forall \vec{v}_h \in V_{0h} \quad (4.1.1)$$

$$\int_{\Omega} \rho c_p \vec{u}_h \cdot \nabla T_h \, s_h \, dx + \int_{\Omega} k \nabla T_h \cdot \nabla s_h \, dx =$$

$$= \int_{\Gamma_1} Q_{1h} s_h \, d\Gamma \quad \forall s_h \in S_{0h} \quad (4.1.2)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u}_h \, \alpha_h \, dx = 0 \quad \forall \alpha_h \in X_h \quad (4.1.3)$$

Os termos

$$\int_{\Gamma_1} \vec{g}_{lh} \cdot \vec{v}_h \, d\Gamma \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma_1} Q_{lh} s_h \, d\Gamma$$

que representam a força de contato e o fluxo de calor na fronteira respectivamente são ignorados. Eles serão calculados e colocados na fase da resolução computacional, no momento de impor as condições na fronteira.

De acordo com os espaços apresentados acima, as componentes da velocidade e a temperatura serão escolhidas como funções de interpolação lagrangianas biquadráticas e a pressão por bilineares, as quais serão definidas numa outra seção.

Assim, em cada elemento teremos as seguintes expansões

$$u_h = u_j \phi_j ; v_h = v_j \phi_j ; w_h = w_j \phi_j ; T_h = T_j \phi_j ; p_h = p_k \xi_k$$

onde  $u_j, v_j, w_j, T_j, p_k$  são os valores das variáveis nos nós e  $\phi_j$  e  $\xi_k$  as funções de interpolação já mencionadas.

O vetor que representa as forças externas assume a seguinte expressão

$$\vec{f}_h = [0, 0, \rho_m \cdot g(1 + (T_h - T_m))] ]$$



$s_h$  e as componentes de  $\vec{v}_h$  são tornadas iguais a  $\phi_j$  e  $\alpha_h$  como  $S_i$ .

Utilizando-se das expressões em coordenadas polares descritas no Capítulo II e considerando-se as substituições acima, onde  $\vec{v}_h$  assumirá em (4.1.1) consecutivamente  $(\phi_i, 0, 0)$ ,  $(0, \phi_i, 0)$ ,  $(0, 0, \phi_i)$ , obtemos o seguinte sistema (os subíndices  $h$  e  $m$  são eliminados):

$$\int_{\Omega_e} \left[ \left( -\frac{1}{r} p_k \xi_k + \frac{2}{r^2} \mu u_j \phi_j + \rho (u_j^2 \phi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r}) - \frac{1}{r} v_j^2 \phi_j^2 + \right. \right. \\ \left. \left. w_j u_j \phi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \phi_i + (-p_k \xi_k + 2\mu u_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r}) \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \right. \\ \left. \mu (w_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r} r + u_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \right] r dr dz = 0 \quad (4.1.4)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[ \mu \left( \frac{1}{r^2} v_j \phi_j - \frac{1}{r} v_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \right) + \rho (u_j v_j \phi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r}) + \right. \\ \left. \frac{1}{r} u_j v_j \phi_j^2 + w_j v_j \phi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right) \phi_i + \\ \left. \mu (v_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r} - \frac{1}{r} v_j \phi_j) \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \mu v_j \phi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right] r dr dz = 0 \quad (4.1.5)$$

$$\int_{\Omega_e} \left| \left( \varphi (w_j^2 \phi_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + w_j^2 \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) + \varphi_g (1 + \beta T_j \phi_j) \right) \phi_i + u (w_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + u_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r}) \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + (-p_k \xi_k + \mu w_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \right| r dr dz = 0 \quad (4.1.6)$$

$$\int_{\Omega_e} \rho c_v (u_j T_\ell \phi_j \frac{\partial \phi_\ell}{\partial r} + w_j T_\ell \phi_j \frac{\partial \phi_\ell}{\partial z}) \phi_i +$$

$$k (T_\ell \frac{\partial \phi_\ell}{\partial r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + T_\ell \frac{\partial \phi_\ell}{\partial z} \frac{\partial \phi_i}{\partial z}) r dr dz = 0 \quad (4.1.7)$$

$$\int_{\Omega_e} (u_j \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{1}{r} u_j \phi_j + w_j \frac{\partial \phi_j}{\partial z}) \xi_k r dr dz = 0 \quad (4.1.8)$$

onde  $1 \leq i, j, e \leq N, 1 \leq k \leq M$ .

Assim, temos um sistema algébrico não linear que pode ser escrito numa forma mais condensada.

$$\begin{aligned}
 F_1(i) = & -E(i,k)P_k + \mu [C(i,j)u_j + A(i,j)w_j + B(i,j)w_j] + \\
 & \rho [ZBR(i, j, \ell)u_j w_\ell + ZBZ(i, j, \ell)w_j w_\ell] + \\
 & + g\beta ZA(i, j)T_j + g z(i)] = 0 \quad (4.1.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_2(i) = & \mu [A(i,j)v_j + B(i,j)v_j + CC(i,j)v_j - CC(j,i)v_j + ZQ(i,j)v_j] + \\
 & + \rho [ZBR(i, j, \ell)u_j v_\ell + ZBZ(i, j, \ell)w_j v_\ell + ZH(i, j, \ell)u_j v_\ell] = 0 \quad (4.1.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_3(i) = & -D(i,k)P_k + 2\mu A(i,j)u_j + \mu B(i,j)u_j + \mu C(j,i)w_j + 2\mu ZQ(i,j)u_j + \\
 & + \rho ZBk(i, j, \ell)u_j u_\ell + \rho ZBZ(i, j, \ell)w_j u_\ell - \rho ZH(i, j, \ell)v_j v_\ell = 0 \quad (4.1.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_4(i) = & \rho c_p [ZBR(i, j, \ell)u_j T_\ell + ZBZ(i, j, \ell)w_j T_\ell] + \\
 & + \rho [A(i, \ell) + B(i, \ell)] T_\ell = 0 \quad (4.1.11)
 \end{aligned}$$

$$F_5(i) = -D(j,i)u_j - E(j,i)w_j = 0 \quad (4.1.12)$$

onde, por exemplo

$$ZQ(i, j) = \int_{\Omega_e} \frac{1}{r} \phi_i \phi_j dr dz ;$$

as outras expressões estão dadas no apêndice.

As equações 4.1.10 - 12 podem ser representadas resumidamente por

$$\vec{F}(u_i, v_i, w_i, T_i, p_j) = 0 ; \quad 1 \leq i \leq N$$

$$1 \leq j \leq M ,$$

onde  $N$  é o número de nós da malha e  $M$  o número de vértices. Portanto existem  $(4N + M)$  equações e incógnitas, e este é o sistema que deverá ser resolvido; para isto utilizamos o método de Newton.

Seja  $\vec{x} = (u_i, v_i, w_i, T_i, p_j)$  e  $\vec{F} = (F_1(i), F_2(i), F_3(i), F_4(i), F_5(i))$ . No método, damos um valor inicial  $\vec{x}_0$ , e numa iteração  $k$ ; tendo  $\vec{x}^k$  obtemos  $\vec{x}^{k+1}$  resolvendo-se o sistema

$$J(\vec{x}^k) (\vec{x}^{k+1} - \vec{x}^k) = -\vec{F}(\vec{x}^k)$$

onde  $J(\vec{x}^k)$  é a matriz jacobiana de  $\vec{F}(\vec{x}^k)$  calculada em  $\vec{x}^k$ ; assim os coeficientes de  $J$

$$J_{kj} = \frac{\partial F_k(i)}{\partial x_j}$$

A matriz  $J$  tem a seguinte expressão:

$$J = \begin{bmatrix} \vec{F}_{1u} & \vec{F}_{1v} & \vec{F}_{1w} & \vec{F}_{1T} & \vec{F}_{1p} \\ \vec{F}_{2u} & \vec{F}_{2v} & \vec{F}_{2w} & \vec{F}_{2T} & \vec{F}_{2p} \\ \vec{F}_{3u} & \vec{F}_{3v} & \vec{F}_{3w} & \vec{F}_{3T} & \vec{F}_{3p} \\ \vec{F}_{4u} & \vec{F}_{4v} & \vec{F}_{4w} & \vec{F}_{4T} & \vec{F}_{4p} \\ \vec{F}_{5u} & \vec{F}_{5v} & \vec{F}_{5w} & \vec{F}_{5T} & \vec{F}_{5p} \end{bmatrix}$$

onde, por exemplo

$$F_{4T} = k(A+B) + \rho_{cp} (ZBR u_j + ZBZ w_j).$$

Os outros coeficientes são dados no apêndice. Em cada iteração a matriz  $J$  é preenchida percorrendo a malha, elemento por elemento utilizando-se o método frontal, que será descrito posteriormente.

#### 4.2 - AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Os cálculos dos coeficientes em 4.1.8 - 12 não são feitos sobre cada elemento real da malha  $\Omega_e$  mas num elemento padrão fixo  $\hat{\Omega}$ ; portanto os polinômios de aproximação serão definidos sobre  $\hat{\Omega}$ .

Particularizando para o caso de quadriláteros temos:

$$\xi_1(\chi, \eta) = (1 + \chi)(1 + \eta)/4$$

$$\xi_2(\chi, \eta) = (1 - \chi)(1 + \eta)/4$$

$$\xi_3(\chi, \eta) = (1 - \chi)(1 - \eta)/4$$

$$\xi_4(\chi, \eta) = (1 + \chi)(1 - \eta)/4$$

$$\phi_1(\chi, \eta) = \chi(1 + \chi)\eta(1 + \eta)/4$$

$$\phi_2(\chi, \eta) = -\chi(1 - \chi)\eta(1 + \eta)/4$$

$$\phi_3(\chi, \eta) = \chi(1 - \chi)\eta(1 - \eta)/4$$

$$\phi_4(\chi, \eta) = -\chi(1 + \chi)\eta(1 - \eta)/4$$

$$\phi_5(\chi, \eta) = (1 - \chi^2) \eta (1 + \eta)/2$$

$$\phi_6(\chi, \eta) = -\chi(1 - \chi)(1 - \eta^2)/2$$

$$\phi_7(\chi, \eta) = -(1 - \chi^2) \eta (1 - \eta)/2$$

$$\phi_8(\chi, \eta) = \chi(1 + \chi)(1 - \eta^2)/2$$

$$\phi_9(\chi, \eta) = (1 - \chi)^2 (1 - \eta^2)$$

com as seguintes propriedades:

$$\xi_j(P_i) = \delta_{ij}$$

$$\phi_j(P_i) = \delta_{ij}$$

O elemento real e o elemento padrão estão relacionados mediante a seguinte transformação que leva  $(\chi, \eta)$  em  $(x, y)$

$$\begin{cases} x = x_i \xi_i(\chi, \eta) \\ y = y_i \xi_i(\chi, \eta) \end{cases}$$

onde  $(x_i, y_i)$  são as coordenadas dos vértices de  $\Omega_e$ . Um elemento definido por (4.2.1) chama-se de elemento subparamétrico.

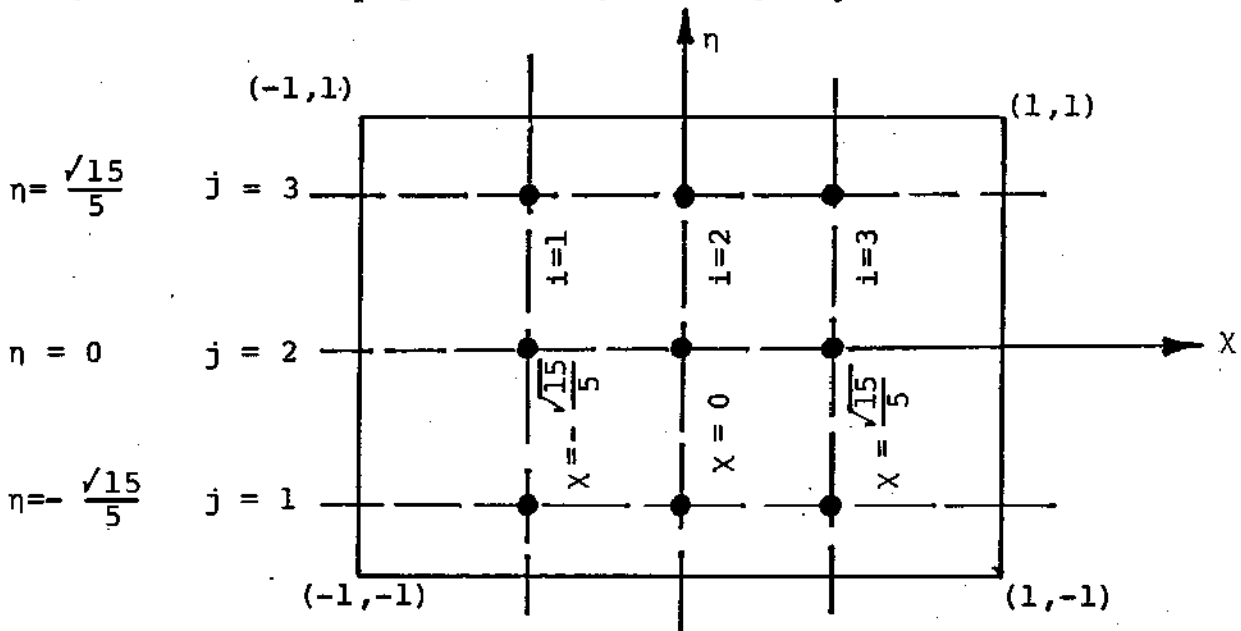
As derivadas que aparecem nas integrais podem ser transformadas usando a regra da cadeia e essas integrais são relacionadas às integrais no elemento padrão como segue:

$$\int_{\Omega_e} f(x,z) \bar{d}r dz = \int_{\hat{\Omega}} f(x(\chi,\eta), y(\chi,\eta)) |J| d\chi d\eta$$

onde

$$|J| = \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \chi}$$

Finalmente as integrais serão calculadas usando-se uma quadratura gaussiana de  $q$  pontos, cuja configuração é mostrada abaixo:



Se  $W_i$  e  $W_j$  são os pesos e  $(x_i, \eta_j)$  os pontos de quadratura, a integral de uma função  $g(x, \eta)$  é calculada através da expressão seguinte:

$$\int_{\hat{\Omega}} g(x, \eta) d\chi d\eta = \sum_i \sum_j W_i W_j g(x_i, \eta_j) \quad 1 \leq i, j \leq q$$

#### 4.3 - O MÉTODO FRONTAL [ 8 ]

O método frontal pode ser usado para a resolução de sistemas não simétricas que aparecem em algumas aplicações do método dos elementos finitos com valor na fronteira. O método está baseado na eliminação gaussiana e tem vantagens sobre os métodos que usam a estrutura de banda em relação às exigências de memória e tempo de computação.

A técnica, desenvolvida inicialmente por Irons,[23] é muito efetiva para a resolução de matrizes definidas positivas obtidas através dos elementos finitos.

Como em nosso caso, apresentam-se matrizes não simétricas, onde não é possível garantir a estabilidade da decomposição LU; então deve-se procurar uma forma de pesquisar nas colunas e linhas para estabelecer o pivô no processo de eliminação. Assim mesmo o conceito do frontal será usado e a técnica descrita tem um comportamento similar ao problema simétrico. Entre os fatores que destacam o método indicamos: a quantidade de armazenamento e a busca do pivô.

Na eliminação gaussiana é desejável, para a precisão e estabilidade, que todas as entradas da matriz armazenada fiquem disponíveis para a procura do pivô; os requerimentos de memória, para este processo, faz proibitivo este esquema. Se aceitamos alguma forma de restrição para a escolha do pivô, obtemos uma solução de compromisso que consiste em reter uma parte da matriz nu-

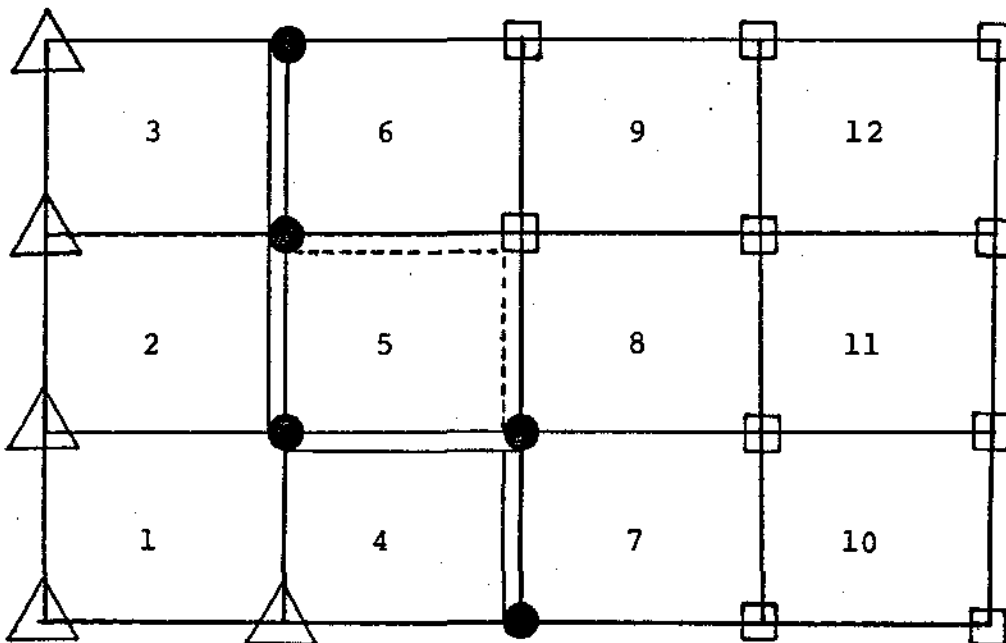


ma fase do processo e fazer a escolha do pivô nesta parte. Com esta estratégia é usado o método frontal.

Embora complexas, as rotinas frontais são preferidas, mais rápidas e os requerimentos de memória são menores comparados às rotinas de banda; além disso é desnecessário um rigoroso esquema para a enumeração dos nós.

A rotina frontal começa fazendo a montagem das matrizes de rigidez por elemento; logo após dessa montagem, dentro de uma parte de uma matriz completa é feita uma busca do pivô apenas entre as linhas e colunas tenham sido totalmente somadas, isto é, linhas e colunas que não terão mais contribuições adicionais nas montagens posteriores. A linha do pivô é usada para a eliminação e armazenada num disco; segue uma nova montagem e posterior eliminação. Quando todos os coeficientes são eliminados a solução é obtida por retrossubstituição.

Para descrever esquematicamente o procedimento consideraremos uma malha quadrangular; numa etapa qualquer temos:



==== frente ===== próximo elemento a ser montado

△ variáveis desativadas

● variáveis ativas

□ variáveis inativas

Apenas as equações dos elementos montados que não foram totalmente somadas permanecem na memória (que contém as variáveis ativas), as quais definem o frente. As equações atrás do frente foram eliminadas (correspondem às variáveis desativadas), entretanto, as que ficam na frente (incluindo as variáveis inativas) ainda não foram atingidas pelo frente.

No presente trabalho é feito pivotamento na diagonal o que melhora o valor do pivô mínimo em 100 vezes.

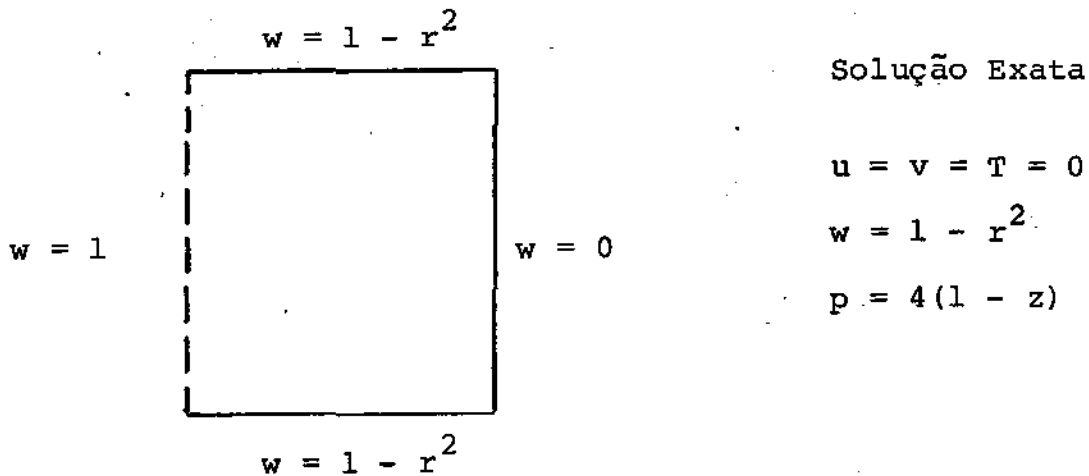
## CAPÍTULO V

### 5.1 TESTES

Contando com a facilidade de comparar algumas das soluções calculadas com as apresentadas em [ 1 ], foi realizado um número reduzido de testes, a fim de observar o comportamento do programa. Com esse objetivo, foram escolhidos os seguintes escoamentos elementares: o escoamento de Poiseuille, uma analogia como comportamento de um sólido e um escoamento com convecção natural com solução exata.

De forma detalhada:

#### 5.1.1 ESCOAMENTO DE POISEUILLE - Tabela 5.1.1



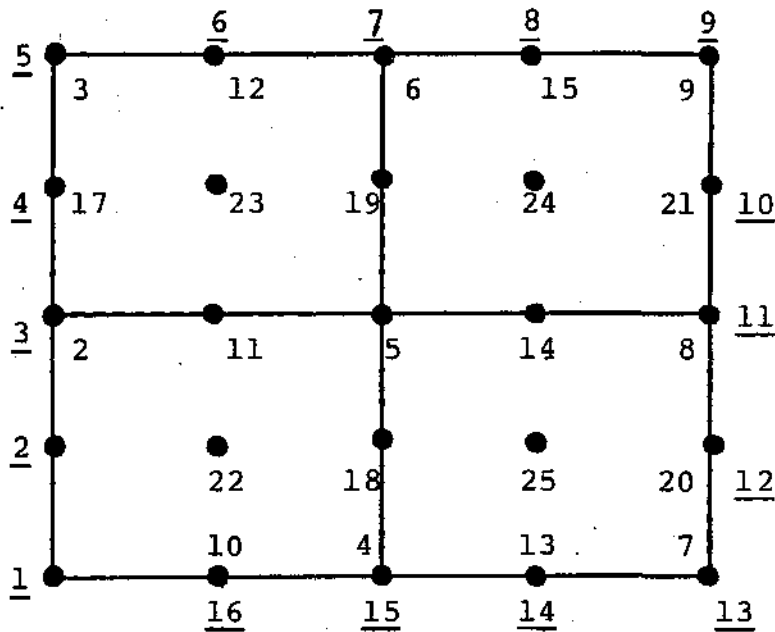
#### 5.1.2 SIMULAÇÃO COMO UM SÓLIDO - Tabela 5.1.2

A temperatura é fixada,  $T = T_c - T_m = 10$  e as componentes das velocidades são igualadas a zero ao longo da fronteira. Obtemos  $T = 10$  e  $u = v = w = 0$  em todos os nós da malha.

### 5.1.3. CONVECCÃO NATURAL COM SOLUÇÃO EXATA - Tabela 5.1.3

A temperatura varia na fronteira de acordo à seguinte lei:  $T(r,z) = 2z^2 - r^2$ ; as velocidades são novamente nulas. A solução obtida é:  $u = v = w = 0$  e  $T = 2z^2 - r^2$  em cada nó da malha.

Os testes foram realizados usando uma rede com 4 elementos, que é mostrada embaixo, com a correspondente enumeração dos nós.



numeração global e numeração dos nós na fronteira (sublinhados).







## 5.2 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta secção, interpretaremos alguns resultados obtidos , através dos respectivos gráficos. Apenas exibiremos e faremos comentário, encima daqueles que sejam úteis para a compreensão dos fenômenos de transporte, ou mostrem um comportamento particular.

Os programas computacionais para os mecanismos básicos: convecção livre, rotação do cadinho e do cristal foram implementados e executados, como também algumas combinações, para diferentes valores de temperaturas e velocidades de rotação.

O trabalho realizado está delineado no seguinte quadro sinóptico:

A - Convecção Natural ( $\omega_s = \omega_c = 0$ )

A.1 - Lateral e fundo do cadinho a temperatura constante

$$T = T_c - T_m$$

a.  $T = 0.5$  ; b.  $T = 5.0$  ; c.  $T = 50.0$

A.2 - Lateral do cadinho  $T = T_c - T_m$ ; fundo do cadinho

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

a.  $T = 0.5$  ; b.  $T = 5.0$  ; c.  $T = 50.0$

B - Rotação do cadinho ( $Gr = 0$  ;  $\omega_s = 0$ )

B.1 a.  $\omega_c = 0.3$  ; b.  $\omega_c = 0.6$  ; c.  $\omega_c = 1.25$



C - Rotação do Cristal ( $Gr = 0$  ,  $\omega_c = 0$ )

C.1 a.  $\omega_s = 1.2$  ; b.  $\omega_s = 3.0$

D. Rotações do Cadinho e do Cristal ( $Gr = 0$ )

D.1 Rotações com igual signal

a.  $\omega_c = 0.04$  ;  $\omega_s = 0.12$

D.2 Rotações com diferente signal

a:  $\omega_c = 0.012$  ;  $\omega_s = 0.04$  ;  $\omega_c = 0.04$  ;  $\omega_s = 0.12$

E - Convecção natural e rotação do Cristal ( $T = 0.5$  ;  $\omega_c = 0$ )

a.  $\omega_s = 0.12$  ; b.  $\omega_s = 0.15$

F - Convecção natural e rotações do cadinho e do Cristal

a:  $\omega_c = 0.003$  ; b.  $\omega_c = 0.03$  ; c.  $\omega_c = - 0.03$

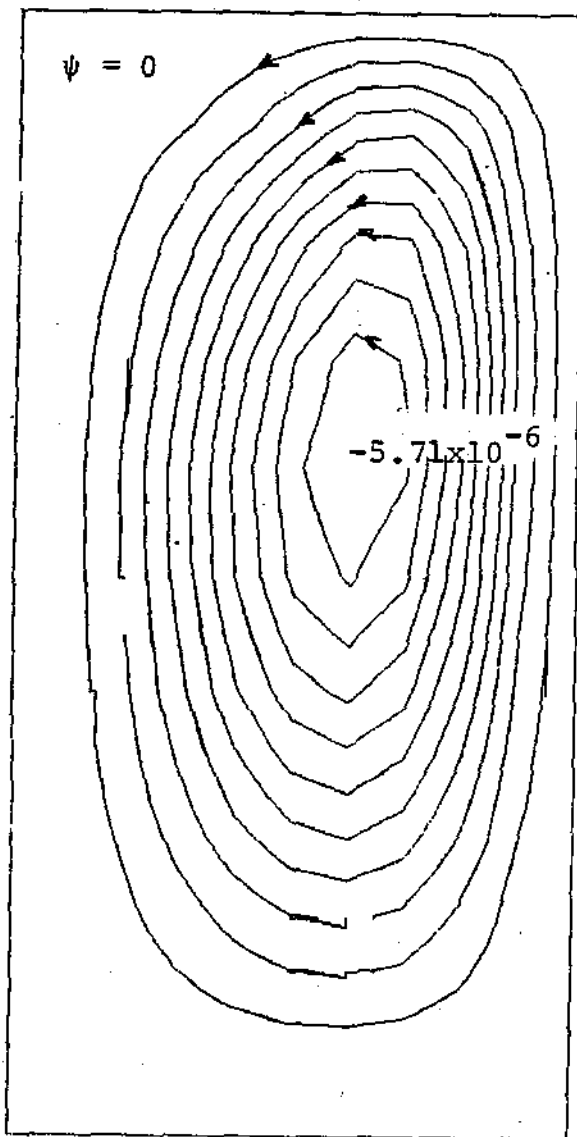
Em princípio, tentou-se obter soluções para os números de  $Re$  e  $Gr$  indicados na bibliografia, objetivo que não foi atingido porque para estes valores o programa apresenta problemas com a convergência.

Dado que as discretizações utilizadas no nosso trabalho e em [ 1 ] são diferentes, os gráficos obtidos, em alguns casos ( $Re$  altos), não coincidem integralmente. A subrotina para a geração da

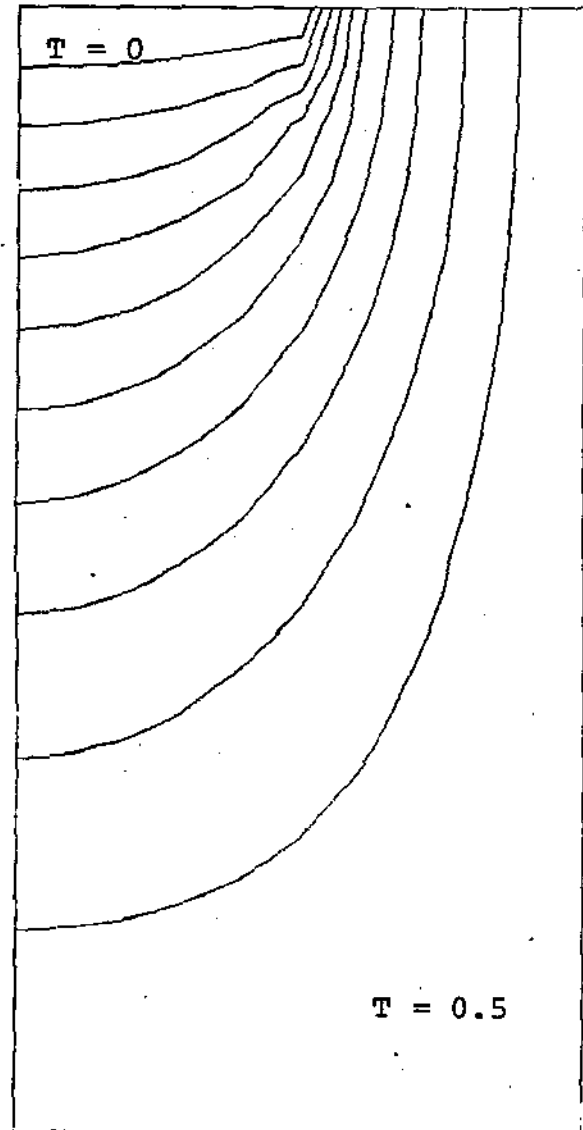
rede permite fazer refinamentos em regiões de maior interesse , como por exemplo, nas proximidades do cristal e da superfície livre do líquido. Esta possibilidade não foi aproveitada apenas por limitações de tempo, causados principalmente por dificuldades de acesso ao sistema computacional da UNICAMP.

Apresentaremos primeiramente os mecanismos puros.

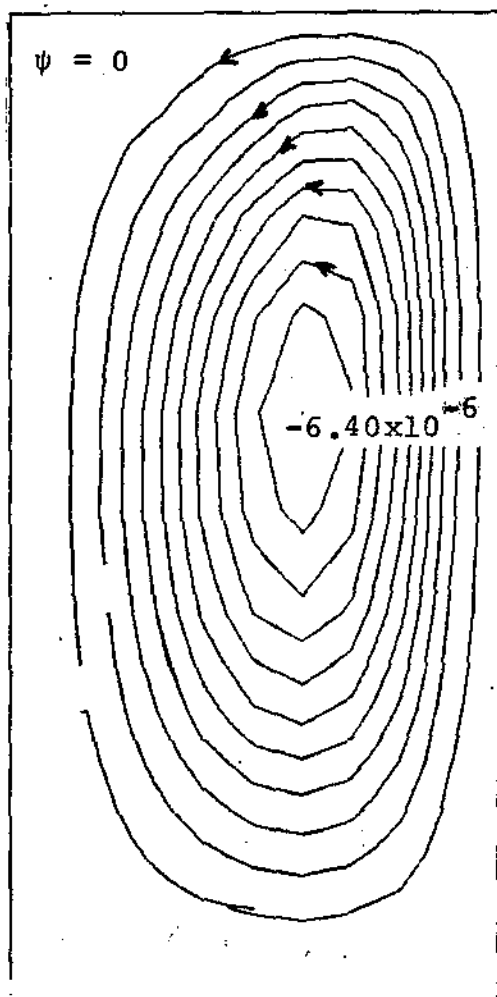
#### A - Convecção natural



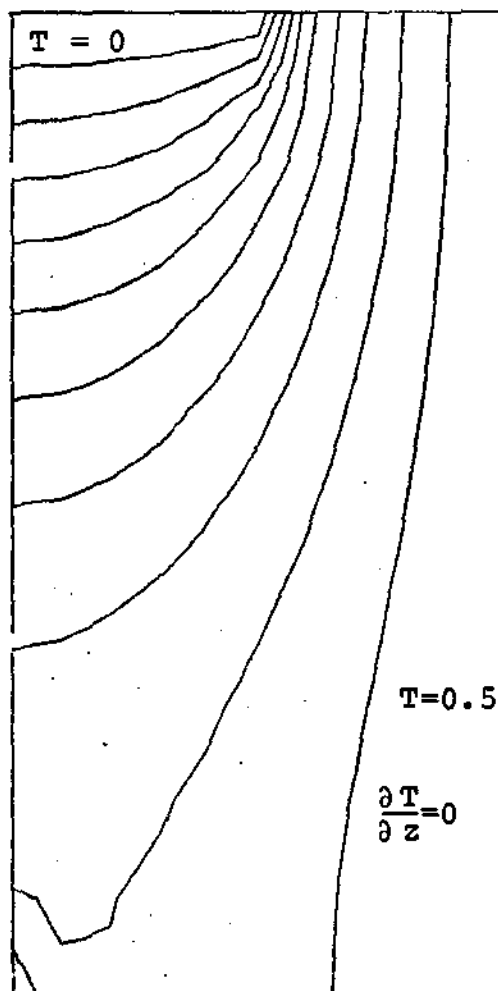
LINHAS DE CORRENTE



ISOTERMAS



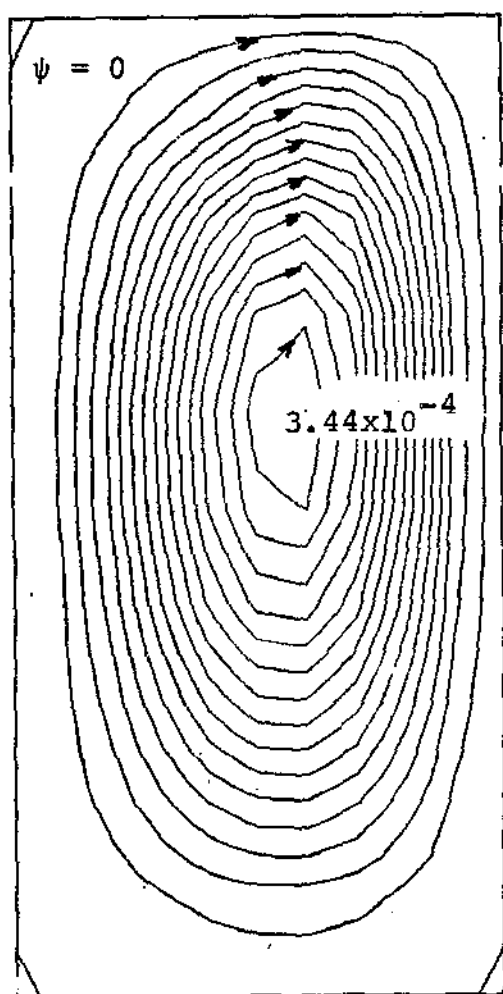
LINHAS DE CORRENTE



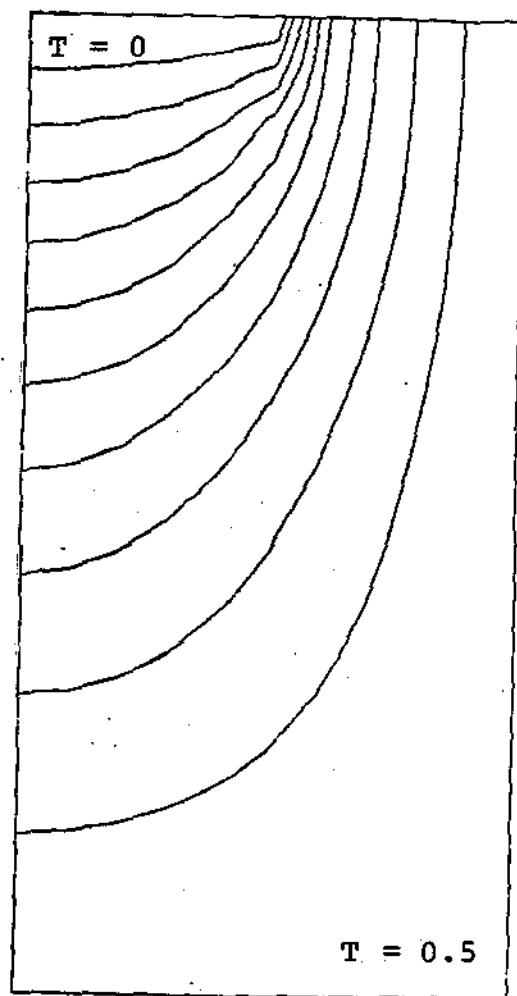
ISOTERMAS

O material fundido está mais frio nas proximidades do cristal, o que causa que o fluido se desloque em direção ao fundo, ao longo do eixo, até atingir a parede lateral do cadinho. Apresentaremos os gráficos das isoterms e linhas de corrente para os casos A.1.a e A.2.a. As curvas para as isoterms conferem com as previsões feitas, enquanto que as correspondentes linhas de correntes são quase idênticas.

B - Rotação do cadinho



LINHAS DE CORRENTE

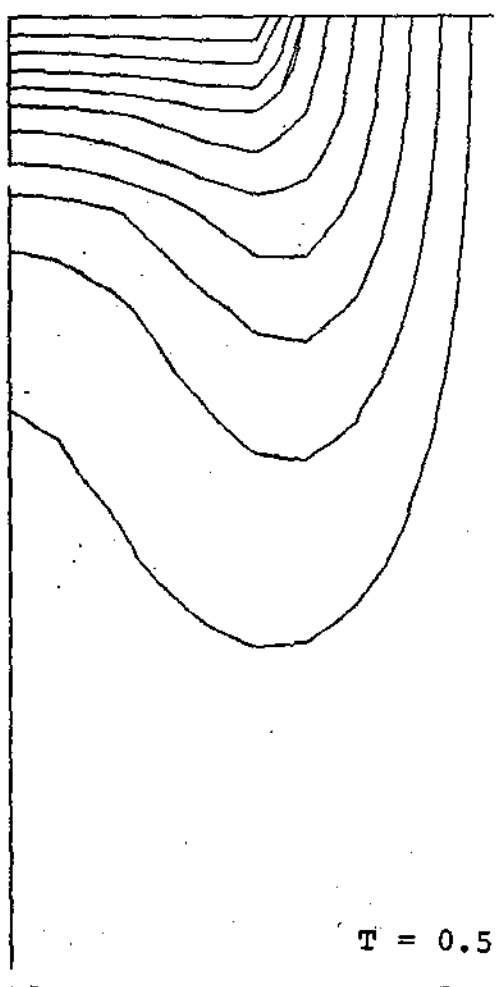
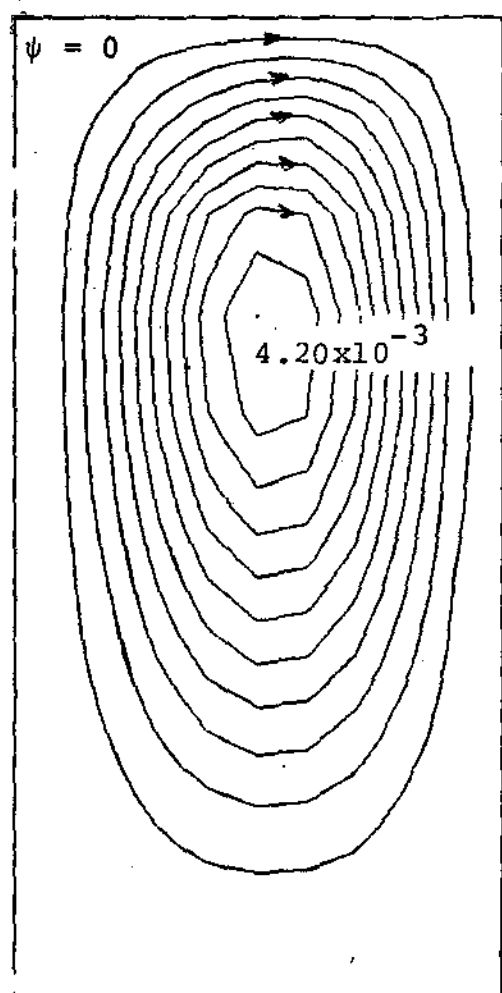


ISOTERMAS

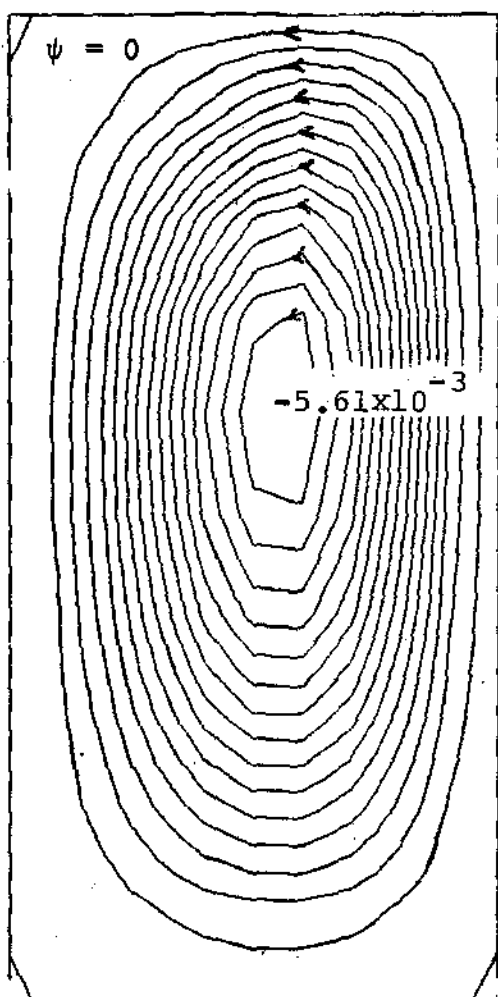
FIGURAS B.1.a

A rotação do cadinho produz um fluxo centrífugo ao longo do fundo, fazendo com que o fluido ascenda pela parede, para depois atingir o cristal, que permanece imóvel, e cair ao longo do eixo formando um vórtice que gira em sentido anti-horário. Comparando os gráficos B.1.a e B.1.c, é possível perceber um deslocamento nas curvas de temperatura constante produzidas por diferentes valores nas velocidades de rotação. O número de Grashof é nulo para evitar a convecção natural, o que em termos computacionais significa que a equação da energia fica desacoplada.

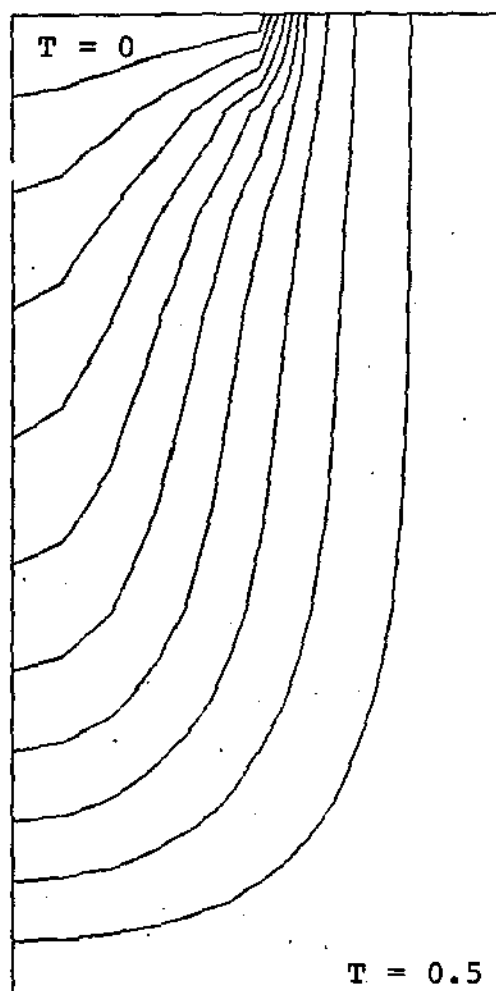
C - Rotação do cristal



FIGURAS C.1.a

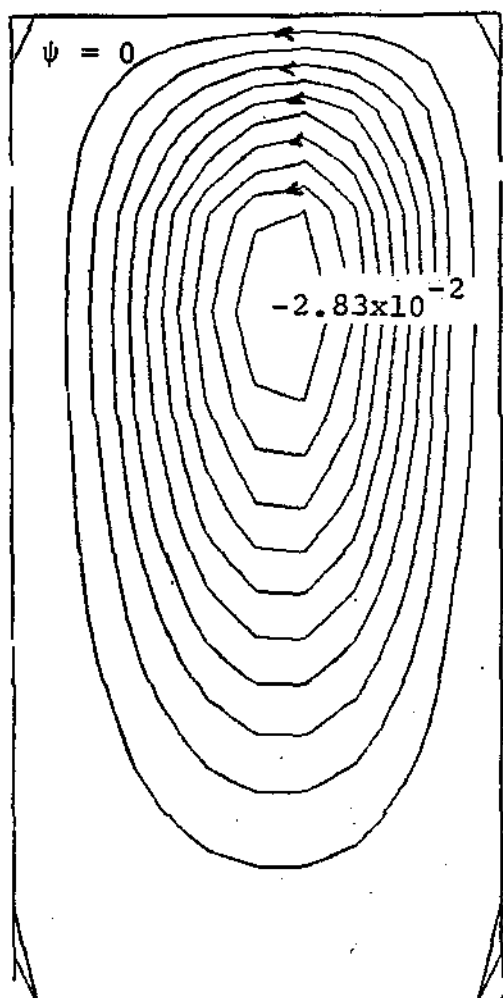


LINHAS DE CORRENTE

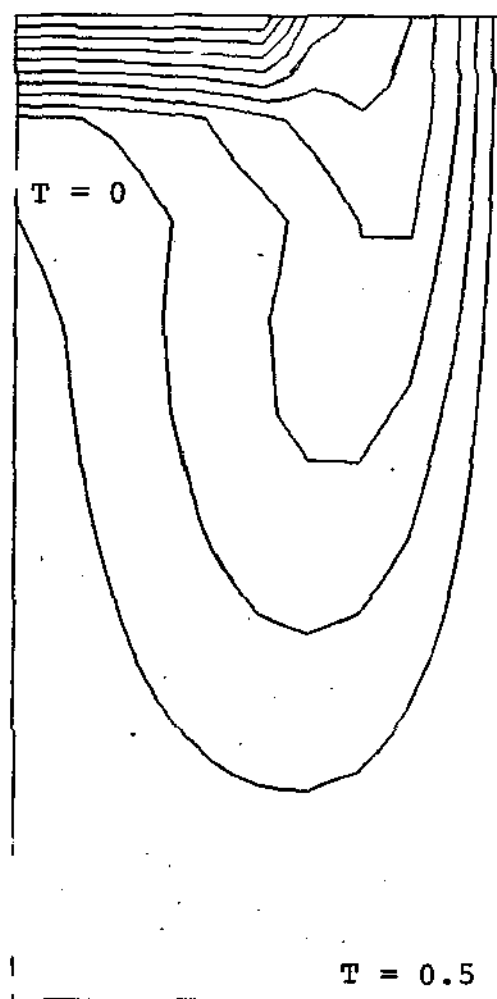


ISOTÉRMAS

FIGURAS B.1.c



LINHAS DE CORRENTE



ISOTERMAS

O fluido na vizinhança do cristal, é impelido, radialmente, para fora, até atingir a parede do cadinho, formando um vórtice que gira em sentido horário. Novamente o número de Grashof é igual a zero. As isothermas mostradas na figura C.1.a, sofrem um leve deslocamento com relação às da figura C.1.b.

Agora faremos uma breve análise sobre os mecanismos anteriores combinados.

Devido a que o valor para a densidade foi diminuído, para que o número de Reynolds seja baixo, muitos dos efeitos interagindo entre si passaram despercebidos. Assim a maioria dos gráficos para as linhas de corrente para as isothermas mostram uma grande similitude, e as preanálises feitas numa forma intuitiva, não foram correlacionadas a esses resultados.

### 5.3 DESCRIÇÃO DAS PRINCIPAIS SUBROTINAS E VARIÁVEIS

Subrotina REDE

Gera a malha, numera e calcula as coordenadas dos nós e define os índices dos nós de fronteira.

Dados: TE, NITNR

Entradas: ID, M, N, IDEP, DENS

Saídas: IPL, IP2, IC1, IC2, IC3, IC4, IC5, NNODE, NSO, NBD,  
NVAR, NELEM, INOD, IBDNOD, X, Y.

Variáveis:

ID: índice que indica a geometria do elemento (triângulo ou quadrado)



M: número de elementos no eixo das abscissas

N: número de elementos no eixo das ordenadas

IDEP: índice que define a aproximação inicial

DENS: densidade do fluido

TE: tolerância

IP1, IP2: constantes que definem o nó e elemento em que se-  
rá fixada a pressão.

IC1, IC2, IC3, IC4, IC5: constantes que definem diferentes  
secções na fronteira.

NNODE: número total de nós

NSO: número de nós nos vértices

NBD: número de nós na fronteira

NVAR: número total de variáveis físicas

NELEM: número de elementos

INOD: matriz que relaciona as designações entre os nós, lo-  
cais e globais

IBNOD: vetor que indica os nós na fronteira

X,Y: vetores das coordenadas dos nós

Subrotina BOUND

Introduz as condições de fronteira do problema.

Entradas: INOD, NNODE, NVAR, NELEM, NSO, IBNOD, X, Y, IC1,  
IC2, IC3, IC4, IC5

Saídas: IBDU, IBDV, IBDW, IBDT, IDFX, IBDFY, IBDFZ, IBDFT ,  
VALU, VALV, VALW, VALT, VALFX, VALFY, VALFZ, VALFT

Variáveis:

IBDU, IBDV, IBDW, IBDT: vetores que indicam se as respectivas variáveis foram prescritas na fronteira.

VALU, VALV, VALW, VALT: vetores que indicam os valores das variáveis prescritas na fronteira

IBDFX, IBDFY, IBDFZ, IBDFT: idem para as forças de tração e fluxo de calor

VALFX, VALFY, VALFZ, VALFT: idem idem

Subrotina ECRFRO

Produz a impressão de dados fornecidos pela Subrotina BOUND

Subrotina PREFRO

Define vetores e matrizes auxiliares para o uso do método frontal na Subrotina FRONT.

Dados: K1, K2

Entradas: INOD, NELEM, NVAR

Saídas: IGLO, IEF, IDES, MVAC, NVEL, NNOS

Auxiliares: IACT

Variáveis:

K1: constante que indica o número de nós por elemento  
 K2: constante que indica o número de vértices por elemento  
 IGLO: matriz que indica o índice global da variável J do elemento I  
 IEF: vetor que indica o elemento onde a variável I aparece por última vez  
 IDES: vetor que indica a destinação da variável I  
 MVAC: número máximo de variáveis ativas simultaneamente  
 NVEL: número de variáveis por elemento  
 IACT: vetor que dá o índice da variável ocupando a destinação I  
 NNOS: número de nós no elemento

#### Subrotina PRELIM

Fornece os dados úteis que interferem apenas num elemento para a Subrotina FRONT dando informação local da estrutura do elemento e das condições de fronteira desse elemento.

Entrada: INOD, IGLO, IEF, IDES, NNODE, NVAR, NELEM, NSO ,  
 IBDNOD, K1, K2, NVEL, IBDU, IBDV, IBDW, IBDT, IBDFX,  
 IBDFY, IBDFZ, IBDFZ, IBDFZ, IBDFZ, VALU, VALV, VALW, VALT, VALFX,  
 VALFY, VALFZ, VALFT, X, Y

Saídas: IVAR, JDES, IMP, RHLOC, JEF, U, V, W, T, P, K1, K2,  
 NVEL, XV, YU

Variáveis:

JDES: vetor local que resume o vetor IDES para o elemento

JEF: idem para IEF

RHLOC: idem para RH

IVAR: número de variáveis por elemento

IMP: vetor que indica se as variáveis desse elemento tem va  
lor prescrito na fronteira

U,V,W,T,P: vetores que contém os valores das variáveis no  
elemento

XV,YV: coordenada dos vértices

#### Subrotina MATRIX

Calcula os coeficientes do jacobiano e o lado direito para cada iteração do método de Newton por integração numérica das funções forma e derivadas que são fornecidas pelas Subrotinas DEFUNQ e DDFUNQ.

Entradas: U, V, W, T, K1, K2, NVEL, X9Q, Y9Q, W9Q

Saídas: F1U, F1V, F1W, F2U, F2V, F2W, F3U, F3W, F3T, F4V ,  
F4W, F4T, F2P, F3P, F4P, F1, F2, F3, F4, F5, GT3 ,  
G1W, G2U, G3W

Variáveis:

X9Q, Y9Q, W9Q: coordenadas e pesos da quadratura gaussiana  
F1U, F1V, F1W, F2U, F2V, F2W, F3U, F3W, F3T, F4V, F4W, F4T,  
F2P, F3P, F4P, F1, F2, F3, F4, F5, GT3, G1W, G2U, G3W: coe-  
ficientes do jacobiano de Newton

## Subrotina RAILIN

Faz a montagem das entradas do jacobiano e o lado direito do método de Newton em cada elemento.

Entradas: F1U, F1V, F1W, F2U, F2V, F2W, F3U, F3W, F3T, F4V, F4W, F4T, F2P, F3P, F4, F4P, F1, F2, F3, F4, F5, GT3, G1W, G2U, G3W, U, V, W, T, P

Saídas: ST, RH

Variáveis:

ST: submatriz de montagem para o elemento considerado

RH: lado direito de ST

## Subrotina FRONT

Comanda todas as operações envolvidas no método frontal.

Entradas: NNODE, NVAR, NELEM, NBD, NSO, IVAR, JDES, IMP, RHLOC, JEF, INOD, IGLO, IEF, IDES, JBNOD

Saídas: Z, BUFFER, SUM, SUMMAX, VTEST, PROD

Auxiliares: ACT, ARHS, VEC, KE, INDEX, INDIMP, NELIM, NIMP, IMP

Variáveis:

Z: vetor das soluções para cada iteração de Newton

BUFFER: matriz onde são armazenadas as linhas eliminadas da matriz ACT; substitui armazenam em disco no VAX-11

ACT: matriz de trabalho do método frontal; montagem e eliminação

ARHS: lado direito de ACT

VEC: vetor que contém o lado direito das variáveis a ser eliminadas

KE: contador para as variáveis que estão sendo eliminadas

INDEX: vetor com componentes que são os nomes das variáveis que irão ser eliminadas

INDIMP: vetor com componentes que são os nomes das variáveis prescritas que vão ser eliminadas

NELIM: número das variáveis livres que vão ser eliminadas

NIMP: número das variáveis prescritas que vão ser eliminadas

IMP: vetor que indica se as variáveis tem valor prescrito

SUM: diferença entre as soluções de duas iterações de Newton consecutivas

SUMMAX: o máximo de SUM

VTEST: idem que SUM para o lado direito (valor de  $F(x)$ )

PROD: parametro que mede a proximidade da singularidade da submatriz de trabalho

Subrotina ELIM

Elimina as variáveis que aparecem por última vez no avanço do frontal e armazena as equações correspondentes no BUFFER.

Entradas: IVAR, JDES, IMP, RHLOC, JEF, ACT, ARHS, MVAC, INDEX, NELIM

Saídas: BUFFER, PMIN, PROD.

Auxiliares: KE, VEC, XMAX, IKE, PP, XXX, Pl, IK, P, IAUX ,  
PABS, VV, IELIM, INDEX,

Variáveis:

PP: elemento na diagonal das linhas que serão eliminadas

PMIN: valor do pivo mínimo

XMAX: vetor que contém os valores máximos, em módulo, das  
linhas de ACT

Pl: relação entre o módulo do elemento na diagonal e o módu  
lo do máximo na linha

IK: índice que corresponde ao maior Pl entre as linhas en-  
volvidas.

#### 5.4 PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

São vários os aspectos que podem ser abordados para o pros-  
seguimento deste trabalho.

Embora a formulação do nosso problema, para o caso não-esta-  
cionário, tenha sido colocada inteiramente, não foi feita sua im-  
plementação computacional. Sua realização, completaria o conjun-  
to de resultados para o problema que foi posto: a resolução de  
um fluxo não-isotérmico com convecção livre e forçada.

No que concerne às diferentes formulações, colocadas no Ca-  
pítulo III, a bibliografia consultada indica que a formulação  
pelos quadrados mínimos aparece competindo com o método misto, em  
relação a convergência e simplicidade na implementação.

Uma nova formulação, que não foi descrita, chamada de " uma formulação menos padrão", apresentada em [ 6 ], têm sido abordada teoricamente e promete bons resultados. Nesta formulação, a condição de incompressibilidade é tratada de uma forma diferente. A velocidade, é descomposta em duas partes, uma das quais satisfaz exatamente essa condição, enquanto que a outra, que representa o erro, é expressa como o gradiente de um potencial. No esquema numérico de resolução, é necessário resolver uma sequência de problemas de Dirichlet para o laplaciano.

Lembrando o esquema apresentado para os quadrados mínimos , e considerando esta última formulação, surge, para ambas, a necessidade de ter algoritmos eficientes para os problemas de Poisson e Stokes.

A técnica de múltiplas malhas (multigrid), poderia ser incluída na parte computacional, esperando-se uma melhoria na velocidade da convergência para a solução.

Como já foi explicado anteriormente; no método frontal, a eliminação gaussiana é repetidamente usada, cada vez que um novo elemento é montado. A alternativa aqui proposta, é usar o método das projeções.

No modelo físico escolhido, foram colocadas algumas hipóteses que simplificavam o nosso estudo. Entre elas, uma em relação às geometrias da superfície do líquido e do cristal. De fato, o líquido em rotação formará um menisco e, o crescimento do cristal produzirá uma superfície irregular; com ambos efeitos intera



gindo entre si. Temos um problema onde uma região do espaço, (superfície livre do líquido e interface do cristal), chamada de fronteira livre, é a priori desconhecida e, sobre a qual, as funções incógnitas do problema devem verificar certas condições.

Aliás, o problema pode ser desdobrado. No crescimento do cristal temos um processo de mudança de fase, a solidificação do sal fundido. Então, nesta região, o problema pode ser caracterizado como um problema de Stefan a duas fases, nas quais se procura estabelecer a distribuição de temperatura. A interface, que está a temperatura constante é uma incógnita suplementar do problema. Uma introdução para o problema de Stefan com equações elípticas, está feita em [ 21 ].

Já foi feito um comentário a respeito do tratamento da superfície livre do líquido no início do Capítulo I.

APÊNDICE I

A.1.1 ALGUNS ESPAÇOS DE FUNÇÕES

$V, H, Q$  : espaços de Hilbert

$V^*, H^*, Q^*$  : duais topológicos

$L^2(\Omega)$  :  $\{v/v \text{ é mensurável, } \int_{\Omega} |v(x)|^2 dx < \infty\}$

$H^1(\Omega)$  :  $\{v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); \quad i = 1, N\}$

$H^2(\Omega)$  :  $\{v \in H^1(\Omega); \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega); \quad i, j = 1, N\}$

$H_0^1(\Omega)$  :  $\{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$

$H^{-1}$  : dual topológico de  $H_0^1$

$Mg$  :  $\{\vec{v} \in (H_1(\Omega))^N; \nabla \cdot \vec{v} = 0; \vec{v} = g \text{ em } \partial\Omega\}$

$C^m(\bar{\Omega})$  : espaço das funções  $m$ -vezes continuamente diferenciáveis para as quais todas as derivadas até de ordem  $m$  são contínuas em  $\bar{\Omega}$ .

$P_k$  : espaço dos polinômios em  $(x_1, x_2)$  de grau  $\leq k$

A.1.2 UMA TRIANGULARIZAÇÃO

Uma triangularização  $\tau_h$  de  $\Omega$  é um conjunto finito de elementos (triângulos) tal que:

$$T \subset \bar{\Omega}, \quad \forall T \in \tau_h \quad \text{e} \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \tau_h} T$$

onde  $T$  é um elemento de  $\tau_h$ ,  $T \neq \emptyset$  e  $h$  é o tamanho do maior lado de  $T$ . Além disso  $\forall T_1, T_2 \in \tau_h$  e  $T_1 \neq T_2$  deve-se cumprir:

i)  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$

ii) um dos lados de um elemento  $T_1 \in \tau_h$  está sobre um dos lados dum outro elemento  $T_2$  (nesse caso  $T_1$  e  $T_2$  são ditos adjacentes) ou sobre uma parte da fronteira  $\Gamma$  de  $\Omega$ .

Usamos a seguinte notação:

$\hat{T}$  : um elemento genérico de triangularização

$v_h|_{\hat{T}}$  : restrição de  $v_h$  a  $\hat{T}$

### A.1.3 O PRODUTO TENSORIAL

Sejam os tensores  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{z}$ , o produto de duplo ponto é definido como segue:

$$\underline{\sigma} : \underline{z} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} z_{ij}$$

### A.1.4 A FÓRMULA DE GREEN-OSTROGRADSKY

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} v \nabla \cdot \vec{\nabla} dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \vec{\nabla}) dx = \int_{\Gamma} v \vec{\nabla} \cdot \vec{n} d\Gamma$$

APÊNDICE II

A.2.1 OS COEFICIENTES DO SISTEMA (4.1.8-12)

$$A(i,j) = \int_A r \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} dA$$

$$B(i,j) = \int_A r \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dA$$

$$C(i,j) = \int_A r \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dA$$

$$CC(i,j) = \int_A \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \phi_j dA$$

$$D(i,j) = \int_A \left( r \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \xi_j + \phi_i \xi_j \right) dA$$

$$E(i,j) = \int_A r \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \xi_j dA$$

$$Fk(i,j,k) = \int_A \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial r} dA$$

$$Fz(i,j,k) = \int_A \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial z} dA$$

$$Z(i) = \int_A r \phi_i \, dA$$

$$ZA(i,j) = \int_A r \phi_i \phi_j \, dA$$

$$ZAR(i,j) = \int_A \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial r} \, dA$$

$$ZAZ(i,j) = \int_A \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \, dA$$

$$ZBR(i,j,k) = \int_A r \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial r} \, dA$$

$$ZBZ(i,j,k) = \int_A r \phi_i \phi_j \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \, dA$$

$$ZH(i,j,k) = \int_A \phi_i \phi_j \phi_k \, dA$$

$$ZQ(i,j,k) = \int_A \frac{1}{r} \phi_i \phi_j \, dA$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] M. J. CROCHET, P. S. WOUTERS - FINITE ELEMENT SIMULATION OF CZOCHRALSKI BULK FLOW - Journal of Crystal Growth 65-1983 (153-165)
- [2] ZAGO, JOSÉ V. - SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO EFEITO WEISSENBERG - Tese de Livre Docencia- ICMSC - USP - 1982.
- [3] SCALVI, LUÍS V. DE A. - SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA FASE LÍQUIDA DO CRESCIMENTO DE SILÍCIO PELO MÉTODO DE CZOCHRALSKI - Te se de Mestrado - IFQSC - USP - 1986.
- [4] SCALVI, L. V. DE A., MOKROSS, B. I., ZAGO, J. V. - SIMULAÇÃO NUMÉRICA DA CONECÇÃO FORÇADA NO CRESCIMENTO DE SILÍCIO PELO MÉTODO CZOCHRALSKI - Revista Brasileira de Instrumentação, vol. 2, nº 2, 1987.
- [5] PEYRET, R.; TAYLOR, T. D., COMPUTACIONAL METHODS FOR FLUID FLOW, Springer Verlag, 1983.
- [6] GLOWINSKI, R., NUMERICAL METHODS FOR NONLINEAR PROBLEMS - Springer Series in Computational Physics - 1984.
- [7] GAREY, G. T.; ODEN, L. T. - FINITE ELEMENTS - vol. I, II, III, IV, VI - Texas Finite Element Series - 1983.

- [ 8 ] HOOD, P. - FRONTAL SOLUTION PROGRAM FOR UNSYMMETRIC MATRICES  
Int. J. for Numerical Methods in Engineering - vol. 10 -  
1976.
- [ 9 ] BHATNAGAR, R. K.; INTRODUÇÃO À TEORIA MATEMÁTICA DE MECANICA  
DOS FLUIDOS, XII CNMAC - Campinas - 1984.
- [10] LESAINTE, P. - AN INTRODUCTION TO FINITE ELEMENT METHOD - MA-  
THEMATICAL AND NUMERICAL METHODS IN FLUID DYNAMICS; Int.C.  
for Theoretical Physics, Trieste, 1976, 581.
- [11] MERCIER, B. - APROXIMATION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS BY  
FINITE ELEMENT, Int. C. for Theoretical Physics, Trieste, 1976, 685.
- [12] HINTON, E.; OWEN, R. J. - FINITE ELEMENT PROGRAMMING, 1977.
- [13] BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHFOOT, E. N.; FENOMENOS DE  
TRANSPORTE - Ed. Deverté - 1964.
- [14] PIN TONG, ROSSETTOS, J.; FINITE ELEMENT METHODS, 1977.
- [15] CHAVES, C. A.; ESCOAMENTO DE UM FLUIDO DE MAXWELL ATRAVÉS DE  
CILINDROS COAXIAIS POROSOS; Tese de Mestrado - IMECC-UNICAMP  
1987.



- [16] PIRONEAU, O.; FINITE ELEMENTS FOR FLOW PROBLEMS - INRIA.
- [17] GIRAULT, V.; RAVIART, P. A., FINITE ELEMENTS APROXIMATION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS - Lectures Notes in Mathematics 749 - 1981.
- [18] NEDELEC, I. C.; A MIXED ELEMENT METHOD FOR 3D NAVIER-STOKES EQUATIONS; Lectures in Applied Mathematics, vol. 22-1985.
- [19] LETALLEC, P.; A MIXED FINITE ELEMENT APROXIMATION OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS - Numerical Mathematics 35, 1980, 381-404.
- [20] MANSFIELD, L.; FINITE ELEMENT SUBSPACES WITH OPTIMAL RATES OF CONVERGENCE FOR THE STATIONARY STOKES PROBLEM R.A.I.R.O.- Numerical Analysis, vol. 16, nº 1, 1982.
- [21] TARZIA, D. A.; INTRODUCCIÓN A LAS INECUACIONES VARIACIONALES Y SUS APLICACIONES A PROBLEMAS DE FRONTERA LIBRE - CLAMI - nº 5 - 1981.
- [22] GLOWINSKI, R.; ON A NEW PRECONDITIONER FOR THE STOKES PROBLEM Matemática Aplicada e Computacional, vol. 6, nº 2 - 1987 , (123-140).

[23] IRONS, B. M.; A FRONTAL SOLUTION PROGRAM FOR FINITE ELEMENT  
ANALYSIS - Int. J. Num. Meth. Engn. - vol. 2 - 1970 - 5-32.