

IDEAIS PRIMOS E RADICAIS
EM EXTENSÕES DE ANÉIS

AGRADECIMENTO

Penso que qualquer frase de gratidão é realmente pouco para agradecer à dedicação, o incentivo e o apoio recebidos do professor Miguel Ferrero durante todo este caminho percorrido chamado Doutorado. Mesmo assim, neste momento, só posso dizer muito obrigado, professor Miguel.

Obrigado também a todas as pessoas que, de uma maneira ou de outra, contribuíram para a conclusão desta jornada, em especial

- à minha família, porque sempre representou a razão dos meus esforços;
- aos professores Francisco Thaine, Antônio Paques, Tenkasi Wanathan, Paulo Brumatti, José Engler, Andrzej Nowicki, Ives Lequian, Djairo Figueiredo, e Francesco Mercuri, porque todos eles também me encaminharam na formação matemática;
- aos professores, funcionários e amigos do Instituto de Matemática da UFRGS, pelo apoio recebido durante todo o tempo em que fiquei em Porto Alegre;
- aos professores e amigos Manuel Folledo, Rodney Bassanezi, Belmer Negrillo, Alcibíades Rigas e Raquel Brumatti, pelo estímulo e auxílio oportuno que me deram quando estive em Campinas;
- aos amigos chilenos, em particular a Moisés Cañas, Haroldo Villarroel, Eduardo Correa e suas respectivas famílias, pelo seu apoio e amizade;
- aos professores e amigos da Faculdade de Educação Física da UNICAMP, Zwinglio Moreira, Marcelo, Wagner, Enori, Deco, Padua, Paulo e José Júlio, pelos inúmeros

momentos agradáveis que compartilhei com todos eles;

- aos senhores Oclide José Dotto, Alexandre Carnielli, Roberto Scop, Arlindo Paschoetto, Luiz Dinon, Ênio Bernardes, Adalberto Bernardi, Dárcio Nascimento, José Cardoso, Valfredo Barbisan, Rubens Guerra, e Cayo Blasquez, por me permitir compartilhar com eles como mais um membro de suas respectivas famílias;
- aos amigos de Porto Alegre, André Jablonski, Moises Meza, Anísio Peixoto, Solange Shama, Eduardo Molina, Leopoldo Ginez, Andrea Bernades, Adriane Lawich, Deyse Cabistani, Suzana Teixeira e Diosnel Rodriguez, pela suas amizades;
- ao amigão chileno Luis Valderrama Campusano porque me ajudou a encontrar o caminho que sempre procurei.
- E a Ti Senhor, porque nos presenteias com esta formosa vida sem pedir nunca nada.

A meus irmãos Roberto Scop, Luis Valderrama, Alexandre Carnielli, Zwinglio Moreira e André Jablonski.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO		viii
CAPÍTULO I	ALGUMAS EXTENSÕES DE ANÉIS	1
	1. O Anel de Operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$	1
	2. Os Skew Anéis $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $R[X, \mathcal{A}]$	12
	3. Outros Anéis-Extensão	19
CAPÍTULO II	RADICAIS DOS ANÉIS $R[X, \mathcal{D}]$, $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ E	
	$R[X, \mathcal{A}]$	24
	1. Introdução	24
	2. O α -radical de $R[X, \mathcal{D}]$ é um Ideal Estendido do	
	Anel R	32
	3. O α -radical de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é um Ideal Estendido do	
	Anel R	38
	4. Sobre os Ideais $\alpha(R * \mathcal{L}) \cap R$ e $\alpha(R\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap R$..	44
	5. O α -radical de $S_n = R[X_1, \sigma_1] \cdots [X_n, \sigma_n]$	51
	6. O Nil Radical Generalizado dos Anéis $R * \mathcal{L}$ e	
	$R\langle X, \mathcal{A} \rangle$	62

CAPÍTULO III	IDEAIS PRIMOS, FORTEMENTE PRIMOS E NÃO SINGULARES DO SKEW ANEL $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$	66
1.	O Anel Completo de \mathcal{A} -quocientes à Esquerda Q de R	66
2.	Ideais Fechados do Skew Anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$	69
3.	Correspondência entre os Ideais Fechados de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ quando os Automorfismos de \mathcal{A} comutam entre si	73
4.	Ideais Fortemente Primos do Anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$	82
5.	Ideais Não Singulares do Anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$	85
REFERÊNCIAS	90

APRESENTAÇÃO

Seja R um anel. Para uma derivação D (respectivamente automorfismo σ) de R denotamos com $R[X, D]$ (respectivamente $R\langle X, \sigma \rangle$) o skew anel de polinômios tipo derivação (respectivamente o skew anel de polinômios de Laurent) sobre R . Em [9] Ferrero provou que se S é qualquer uma das extensões acima citadas e α é um radical satisfazendo certas condições, então o α -radical $\alpha(S)$ de S é o ideal estendido $I \cdot S$, onde $I = \sigma(S) \cap R$. Também é obtido uma representação do radical β dos skew anéis de polinômios $R[X, \sigma]$, onde β é um radical satisfazendo certas condições (quase idênticas às satisfeitas por α). A família de radicais α e β em consideração inclui os radicais mais conhecidos como o radical primo, de Jacobson, de Brown McCoy, de Levitzki, e o radical fortemente primo.

O primeiro trabalho nessa direção é de Amitsur. Ele prova que o radical de Jacobson $J(R[X])$ de um anel de polinômios $R[X]$ é o ideal estendido $I \cdot R[X]$, onde I é o nil ideal $J(R[X]) \cap R$ de R ([1]). Depois Pearson e Stephenson descrevem completamente o radical primo do skew anel de polinômios $R[X, \sigma]$ ([19], Teorema 1.3). Bedi e Ram estendem os resultados de Amitsur ao provar que o radical de Jacobson do skew anel de Laurent $R\langle X, \sigma \rangle$ é o ideal estendido $I \cdot R\langle X, \sigma \rangle$, onde $I = J(R\langle X, \sigma \rangle) \cap R$ ([2], Teorema 3.1). Nesse mesmo trabalho eles descrevem o radical de Jacobson do skew anel de polinômios $R[X, \sigma]$ ([2], Teorema 3.1). Os radicais primo e de Jacobson do skew anel $R[X, D]$ são descritos por Ferrero, Kishimoto e Motose. Eles provam que se α é qualquer um desses radicais, então o radical $\alpha(R[X, D])$ é também um ideal estendido. Bergen, Montgomery e Passman descrevem o radical

primo do anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$. Se prova que o radical primo de $R * \mathcal{L}$ é o ideal estendido $N \cdot (R * \mathcal{L})$, onde N é a intersecção de todos os \mathcal{L} -ideais do anel R ([3], Proposição 2.6). Também, eles conseguem uma descrição do radical de Jacobson de anéis de operadores diferenciais sob certas condições ([3], Corolários 3.4 e 3.5).

Um dos propósitos desta tese é provar generalizações dos resultados de [9] para os skew anéis generalizados $R[X, \mathcal{D}]$, $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $R[X, \mathcal{A}]$, onde X é um conjunto de indeterminadas e \mathcal{D} (respectivamente \mathcal{A}) é um certo conjunto de derivações (respectivamente automorfismos) do anel R .

De outro lado em [8] se definem os ideais fechados de uma extensão livre $R[E]$ do anel R . Os resultados obtidos se aplicam, em particular, ao estudo dos ideais primos de $R[E]$.

Um outro propósito desta tese será provar resultados correspondentes para os skew anéis de polinômios de Laurent generalizados $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$.

O Capítulo I inicia com a construção dos skew anéis generalizados que serão considerados, bem como as propriedades dessas estruturas. Ditos anéis são basicamente generalizações das extensões de Ore ([10]), dos anéis considerados por Kishimoto em [16], Sec. 2, e incluem os anéis de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$, onde \mathcal{L} é uma K -álgebra de Lie que satisfaz certas condições. De fato, um dos resultados mais importantes deste Capítulo é aquele onde se dão condições sobre a K -álgebra de Lie \mathcal{L} para que o anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$ seja isomorfo com o skew anel $R[X, \mathcal{D}]$ (Teorema I.1.5).

O Capítulo II é iniciado com uma introdução rápida da teoria de radicais de anéis associativos, para depois provar que o radical superior dos anéis $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Z}_p[X]$ (onde X é um conjunto de indeterminadas) é zero (Teoremas II.1.3 e II.1.4). Os resultados que afirmam que o radical superior dos anéis $\mathbb{Z}_p\langle X \rangle$ e

$\mathbb{Z}(X)$ é também zero são dados mais adiante no parágrafo 3 deste Capítulo. Então, utilizando métodos semelhantes aos de [9], se prova nos parágrafos 2 e 3 que, se S é qualquer uma das extensões $R[X, \mathcal{D}]$ e $R(X, \mathcal{A})$ e α é um radical satisfazendo certas condições, se tem que $\alpha(S) = I \cdot S$, onde $I = \alpha(S) \cap R$ (Teoremas II.2.6 e II.3.9). Esses resultados generalizam assim os resultados citados inicialmente.

A determinação dos ideais contraídos $I = \alpha(S) \cap R$ é então um problema de interesse para cada radical α e cada anel-extensão. Alguns resultados parciais são obtidos no parágrafo 4. Também se prova que, se α é um radical determinado pela intersecção de ideais primos e satisfaz certas condições, então o radical α do skew anel de polinômios generalizado tipo automorfismo $S_n = R[X_1, \sigma_1] \cdots [X_n, \sigma_n]$ é um ideal de S_n da forma:

$$\sigma(S_n) = (\alpha(S_n) \cap R) \bigoplus_t \bigoplus_{i_1, \dots, i_t} A_{i_1 \dots i_t} [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}] X_{i_1} \cdots X_{i_t},$$

onde os $A_{i_1 \dots i_t}$ são certos ideais \mathcal{A} -invariantes do anel R (Teorema II.5.10). Finaliza-se este Capítulo calculando o nil radical generalizado dos skew anéis $R * \mathcal{L}$ e $R(X, \mathcal{A})$ (Teoremas II.6.3 e II.6.6).

No Capítulo III, para um anel \mathcal{A} -primo R (com automorfismos \mathcal{A}) lembra-se a noção do anel completo de \mathcal{A} -quocientes à esquerda Q de R . Logo são definidos os ideais do skew anel $R(X, \mathcal{A})$ de forma análoga aos ideais fechados considerados nas extensões livres $R[E]$ ([8]). Então, seguindo um procedimento similar ao usado no trabalho de Ferrero, se prova que, quando os automorfismos de \mathcal{A} comutam entre si, então existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos ideais fechados do anel $R(X, \mathcal{A})$ e o conjunto de ideais fechados do anel $Q(X, \mathcal{A})$ (Teorema III.3.8), e essa correspondência preserva os ideais primos (Teorema III.3.10). Então nos parágrafos 4 e 5 desse Capítulo se usa esta correspondência entre os ideais primos de $R(X, \mathcal{A})$ e $Q(X, \mathcal{A})$ para provar que todo ideal \mathcal{A} -primo de R é \mathcal{A} -fortemente primo (respectivamente não singular) se, e somente se, todo ideal primo de $R(X, \mathcal{A})$ é fortemente primo (respectivamente não singular) (Teoremas III.4.4 e III.5.3).

CAPÍTULO I

ALGUMAS EXTENSÕES DE ANÉIS

1 – O Anel de Operadores Diferenciais $R * \mathcal{L}$

Para construir os anéis de operadores diferenciais seguiremos [5].

Sejam K um anel comutativo com unidade, e R uma K -álgebra associativa fiel com unidade (a mesma de K). Seja \mathcal{L} uma K -álgebra de Lie livre como K -módulo e $U(\mathcal{L})$ a álgebra envolvente universal de \mathcal{L} .

Se \mathcal{L} age sobre R como K -derivações através do K -homomorfismo $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \text{Der}_K(R)$ (não necessariamente um homomorfismo de K -álgebras de Lie), onde $\Delta(x) = d_x \quad \forall x \in \mathcal{L}$, então esta ação determina, de maneira natural, um anel $R * \mathcal{L}$ gerado por R e $U(\mathcal{L})$.

Esse anel $R * \mathcal{L}$ tem como conjunto subjacente o R -módulo (à esquerda) livre $R \otimes_K U(\mathcal{L})$.

Para cada $x \in \mathcal{L}$ denotamos com \bar{x} o elemento $1 \otimes x$ de $R * \mathcal{L}$, e para cada $r \in R$ denotamos com o próprio r o elemento $r \otimes 1$ de $R * \mathcal{L}$.

Se em $R * \mathcal{L}$ consideramos a multiplicação sujeita às relações:

$$(1) \quad \bar{x}r = r\bar{x} + d_x(r), \quad \forall r \in R, \quad \forall x \in \mathcal{L},$$

$$(2) \quad \bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x} + \overline{[x,y]} + t(x,y), \quad \forall x, y \in \mathcal{L},$$

(onde $t: \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow R$ é uma função K -bilinear que satisfaz condições para que $R * \mathcal{L}$ seja um anel ([5], Cap. 1), e $[,]$ denota o produto de Lie em \mathcal{L}), então $R * \mathcal{L}$ torna-se um anel extensão de R . $R * \mathcal{L}$ é chamado o *anel de operadores diferenciais* ou o *produto cruzado de R por \mathcal{L}* .

No caso particular em que a K -álgebra de Lie \mathcal{L} seja abeliana e finito dimensional (como K -módulo livre) se tem que $R * \mathcal{L}$ é isomorfo com o "skew" anel de polinômios tipo derivação, considerado por K. Kishimoto ([15], Sec. 2). Nós veremos depois situações mais gerais (onde \mathcal{L} não necessariamente é abeliana nem finito dimensional), nas quais $R * \mathcal{L}$ é isomorfo com um anel construído usando sucessivas extensões de Ore.

Durante todo o desenvolvimento desta tese Λ denotará um segmento de ordinais, e sempre vamos supor que as K -álgebras de Lie em consideração possuem uma K -base ordenada, indexada por Λ .

Se $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é uma K -base de \mathcal{L} então o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt ([13]) garante que o conjunto de monômios

$$\{\bar{x}_{\lambda_1}^{\nu_{\lambda_1}} \bar{x}_{\lambda_2}^{\nu_{\lambda_2}} \cdots \bar{x}_{\lambda_n}^{\nu_{\lambda_n}} : \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n, \nu_{\lambda_i} \geq 0, \quad \forall i\}$$

forma uma base de $R * \mathcal{L}$ como R -módulo à esquerda. Além disso, as relações (1) e (2) são equivalentes às relações:

$$(1)' \quad \bar{x}_\lambda r = r\bar{x}_\lambda + d_\lambda(r), \quad \forall r \in R, \quad \forall \lambda \in \mathcal{L},$$

$$(2)' \quad \bar{x}_\lambda \bar{x}_\iota = \bar{x}_\iota \bar{x}_\lambda + \overline{[x_\lambda, x_\iota]} + t(x_\lambda, x_\iota), \quad \forall \lambda, \iota \in \Lambda,$$

onde d_λ denota a derivação d_{x_λ} .

Seja \mathbb{N} o conjunto dos números inteiros não negativos. Se consideramos o seguinte subconjunto do produto cartesiano \mathbb{N}^Λ ,

$$\Omega = \{ \bar{\nu} = (\nu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathbb{N}^\Lambda : \nu_\lambda = 0 \text{ excepto para um número finito de índices } \lambda \},$$

então um monômio de $R * \mathcal{L}$ da forma $\bar{x}_{\lambda_1}^{\nu_{\lambda_1}} \bar{x}_{\lambda_2}^{\nu_{\lambda_2}} \cdots \bar{x}_{\lambda_n}^{\nu_{\lambda_n}}$ pode ser denotado simplesmente com $\bar{x}^{\bar{\nu}}$ (onde $\bar{\nu} = (\nu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$) e, portanto, podemos escrever

$$R * \mathcal{L} = \left\{ \alpha = \sum_{\bar{\nu}} r_{\bar{\nu}} \bar{x}^{\bar{\nu}} \text{ (soma finita)} : r_{\bar{\nu}} \in R, \bar{\nu} \in \Omega \right\}.$$

A fim de definir um grau para cada elemento não nulo de $R * \mathcal{L}$, apresentamos previamente algumas definições e resultados que são fáceis de verificar.

Para cada elemento $\bar{\nu} = (\nu_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \Omega$ definimos $|\bar{\nu}| = \sum_{\lambda} \nu_\lambda \in \mathbb{N}$. Se no conjunto Ω consideramos a relação lexicográfica

$$\bar{\nu} < \bar{\mu} \iff \begin{cases} |\bar{\nu}| < |\bar{\mu}|, & \text{ou} \\ |\bar{\nu}| = |\bar{\mu}| & \text{e } \exists \lambda_0 \in \Lambda \text{ tal que } \nu_\lambda = \mu_\lambda \quad \forall \lambda < \lambda_0, \text{ e} \\ & \nu_{\lambda_0} > \mu_{\lambda_0}, \end{cases}$$

então $(\Omega, <)$ é um conjunto totalmente ordenado, e cada subconjunto finito de (Ω, \leq) tem um elemento minimal e um elemento maximal. Em particular, se o conjunto Λ é finito então (Ω, \leq) é um conjunto bem ordenado.

Para cada elemento não nulo $\alpha = \sum_{\bar{\nu}} r_{\bar{\nu}} \bar{x}^{\bar{\nu}}$ de $R * \mathcal{L}$ definimos: o *suporte* de α como sendo o conjunto $\text{supp}(\alpha) = \{ \bar{\nu} : r_{\bar{\nu}} \neq 0 \}$; o *grau* de α como o elemento de Ω , $\partial \alpha = \max \text{supp}(\alpha)$; o *$\bar{\nu}$ -ésimo coeficiente* (à esquerda) de α , $c_{\bar{\nu}}(\alpha) = r_{\bar{\nu}}$; e o *coeficiente principal* de α , $\ell c(\alpha) = c_{\bar{\nu}_0}(\alpha)$, onde $\bar{\nu}_0 = \partial \alpha$.

Assim, o elemento α de $R * \mathcal{L}$ pode escrever-se na forma $\alpha = \sum_{\bar{\nu} \in \text{supp}(\alpha)} r_{\bar{\nu}} \bar{x}^{\bar{\nu}}$,

mas nós usaremos a notação $\alpha = \sum_{\bar{\nu} \leq \bar{\nu}_0} r_{\bar{\nu}} \bar{x}^{\bar{\nu}}$, onde $\bar{\nu}_0 = \partial \alpha$.

Sejam α e β elementos não nulos do anel $R * \mathcal{L}$. É fácil provar que, se $\alpha + \beta \neq 0$, então $\delta(\alpha + \beta) \leq \max\{\delta\alpha, \delta\beta\}$. Também, dados r e s em R , e $\bar{\nu}$ e $\bar{\mu}$ em Ω , existem elementos únicos $a_{\bar{\tau}} \in R$ ($\bar{\tau} < \bar{\nu} + \bar{\mu}$) tais que

$$r \bar{x}^{\bar{\nu}} \cdot s \bar{x}^{\bar{\mu}} = rs \bar{x}^{\bar{\nu} + \bar{\mu}} + \sum_{\bar{\tau} < \bar{\nu} + \bar{\mu}} a_{\bar{\tau}} \bar{x}^{\bar{\tau}},$$

onde $\bar{\nu} + \bar{\mu}$ é definido componente à componente. Em conseqüência, se $\alpha\beta \neq 0$, então $\delta(\alpha\beta) \leq \delta\alpha + \delta\beta$.

Agora introduzimos uma condição que será importante no que segue.

Dizemos que uma K -álgebra de Lie \mathcal{L} possui a *propriedade (s)* (respectivamente *(n)*) se existir um segmento de ordinais Λ e uma K -base $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de \mathcal{L} que satisfaz a seguinte condição: para cada par de elementos ι e ρ de Λ , com $\iota < \rho$, existem elementos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de Λ e elementos $k_1^{(\iota, \rho)}, k_2^{(\iota, \rho)}, \dots, k_n^{(\iota, \rho)}$, de K tais que $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \leq \iota$ (respectivamente $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \iota$) e

$$[x_\iota, x_\rho] = \sum_{i=1}^n k_i^{(\iota, \rho)} x_{\lambda_i}.$$

Neste caso $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ será dita uma *base admissível* relativa à propriedade *(s)* (respectivamente *(n)*), e os elementos $k_i^{(\iota, \rho)}$ (onde $\iota, \rho \in \Lambda$ são tais que $\iota < \rho$) serão chamados constantes correspondentes a esta base.

Suponhamos que K seja um corpo e que a K -álgebra de Lie \mathcal{L} seja finito dimensional. Então \mathcal{L} é solúvel se, e somente se, existir uma cadeia $0 = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \dots \subset \mathcal{L}_n = \mathcal{L}$, onde $\dim_K \mathcal{L}_i = i$ e \mathcal{L}_{i-1} é um ideal de \mathcal{L}_i ([13] pg 29, Ex. 13). Como conseqüência imediata temos que \mathcal{L} é solúvel se, e somente se, \mathcal{L} possui a propriedade *(s)*. Também usando o Teorema de Engel ([13]) podemos provar que \mathcal{L} é nilpotente se, e somente se, \mathcal{L} possui a propriedade *(n)*.

Agora suponhamos que o corpo K seja algebricamente fechado e \mathcal{L} de dimensão arbitrária. Usando o fato de que, se \mathcal{L} não é nilpotente então \mathcal{L} contém

uma subálgebra bidimensional não abeliana ([13] pg 54, Ex. 04), pode-se provar que quando \mathcal{L} possui a propriedade (n) então \mathcal{L} é nilpotente.

Assim, as condições (s) e (n) definidas acima são, de certo modo, generalizações dos conceitos de solubilidade e nilpotência.

Daqui em diante, salvo menção em contrário, quando se falar de uma K-álgebra de Lie \mathcal{L} que possui a propriedade (s) ou (n), será entendido que $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ e $\{k_\zeta^{(\iota, \rho)} : \iota, \rho \in \Lambda \text{ com } \iota < \rho\}$ denotam respectivamente a base admissível e as constantes correspondentes.

O seguinte resultado é chave para o desenvolvimento dos resultados fundamentais dos anéis de operadores diferenciais que podem ser construídos por sucessivas extensões de Ore (ver Cap. II §2, adiante), e portanto mostra a importância da propriedade (s).

PROPOSIÇÃO 1.1 – se \mathcal{L} é uma K-álgebra de Lie que possui a propriedade (s), então, para cada $\lambda \in \Lambda$ e cada $\bar{\nu} \in \Omega$, existem elementos únicos $\Gamma_{\bar{\mu}}$ de \mathbb{R} tais que no anel $\mathbb{R} * \mathcal{L}$ se tem

$$\bar{x}_\lambda \bar{x}^{\bar{\nu}} = \bar{x}^{\bar{\nu} + \bar{\epsilon}_\lambda} + \sum_{\bar{\mu} \leq \bar{\nu}} \Gamma_{\bar{\mu}} \bar{x}^{\bar{\mu}},$$

onde $\bar{\epsilon}_\lambda$ denota o elemento (ρ_ι) de Ω tal que $\rho_\lambda = 1$ e $\rho_\iota = 0, \forall \iota \neq \lambda$.

PROVA – É feita por indução em relação a $|\bar{\nu}| \geq 1$.

Se para cada elemento $\lambda \in \Lambda$ consideramos a derivação interna de $\mathbb{R} * \mathcal{L}$, $\bar{d}_\lambda = \bar{\tilde{x}}_\lambda$, determinada pelo elemento \bar{x}_λ (i.e. $\bar{d}_\lambda(\alpha) = \bar{x}_\lambda \alpha - \alpha \bar{x}_\lambda, \forall \alpha \in \mathbb{R} * \mathcal{L}$), então é claro que $\bar{d}_\lambda(\bar{x}_\iota) = \overline{[x_\lambda, x_\iota]} + t(x_\lambda, x_\iota), \forall \iota \in \Lambda$. Esta derivação \bar{d}_λ é uma extensão da derivação d_λ e também será denotada simplesmente por d_λ .

Agora vamos mostrar que certos anéis de operadores diferenciais podem ser obtidos como sucessivas extensões de Ore.

Para isto lembremos primeiro que, se d é uma derivação de R , então o "skew" anel de polinômios $R[X, d]$ é definido como o conjunto $\left\{ \sum_i r_i X^i : r_i \in R \right\}$ com a soma usual de polinômios e uma multiplicação, dada por $Xr = rX + d(r)$, $\forall r \in R$ ([10]).

Doravante, para um segmento de ordinais Λ , definimos o conjunto

$$\Lambda^* = \{ \lambda \in \Lambda : \lambda \text{ é um ordinal sucessor} \}$$

Consideremos um anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$ e um conjunto de indeterminadas $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$.

Supondo que a K -álgebra de Lie \mathcal{L} possui a propriedade (s), definimos $T_0 = R$, $D_1 = d_1$, e $T_1 = T_0[X_1, D_1]$.

LEMA 1.2 - Seja $\phi_1 : T_1 \rightarrow R * \mathcal{L}$ o R -monomorfismo definido por $\phi_1 \left(\sum r_i X_1^i \right) = \sum r_i \bar{x}_1^i$. Se $D_2 : T_1 \rightarrow T_1$ é definido aditivo e satisfazendo $D_2(X_1) = -k_1^{(1,2)} X_1 - t(x_1, x_2)$ e $D_2(r X_1^m) = d_2(r) X_1^m + r \sum_{v=0}^{m-1} X_1^v D_2(X_1) X_1^{m-1-v}$, $\forall r \in R$, $\forall m \geq 1$, então

(i) $\phi_1 \circ D_2 = d_2 \circ \phi_1$

(ii) D_2 é uma K -derivação de T_1 .

PROVA - (i) Se $r \in R$ e $i \geq 1$, então

$$\begin{aligned} \phi_1(D_2(r X_1^i)) &= \phi_1 \left(d_2(r) X_1^i + r \sum_{v=0}^{i-1} X_1^v (-k_1^{(1,2)} X_1 - t(x_1, x_2)) X_1^{i-1-v} \right) \\ &= d_2(r) \bar{x}_1^i + r \sum_{v=0}^{i-1} \bar{x}_1^v (-k_1^{(1,2)} \bar{x}_1 - t(x_1, x_2)) \bar{x}_1^{i-1-v} \\ &= d_2(r) \bar{x}_1^i + r \sum_{v=0}^{i-1} \bar{x}_1^v (\bar{x}_2 \bar{x}_1 - \bar{x}_1 \bar{x}_2) \bar{x}_1^{i-1-v} \\ &= d_2(r) \bar{x}_1^i + r (\bar{x}_2 \bar{x}_1^i - \bar{x}_1^i \bar{x}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= d_2(r) \bar{x}_1^i + r d_2(\bar{x}_1^i) \\
 &= d_2(r \bar{x}_1^i) = d_2(\phi_1(r X_1^i))
 \end{aligned}$$

Com isto é claro que $\phi_1 \circ D_2 = d_2 \circ \phi_1$.

(ii) Vejamos que $D_2(fg) = D_2(f)g + fD_2(g)$, $\forall f, g \in T_1$. Sejam $r, s \in \mathbb{R}$ e $i, j \in \mathbb{N}$. Nós temos que

$$\begin{aligned}
 d_2(\phi_1(r X_1^i s X_1^j)) &= d_2(r \bar{x}_1^i s \bar{x}_1^j) \\
 &= d_2(r \bar{x}_1^i) s \bar{x}_1^j + r \bar{x}_1^i d_2(s \bar{x}_1^j) \\
 &= d_2(\phi_1(r X_1^i)) \phi_1(s X_1^j) + \phi_1(r X_1^i) d_2(\phi_1(s X_1^j)) \\
 &= \phi_1(D_2(r X_1^i)) \phi_1(s X_1^j) + \phi_1(r X_1^i) \phi_1(D_2(s X_1^j)) \\
 &= \phi_1(D_2(r X_1^i) s X_1^j + r X_1^i D_2(s X_1^j)),
 \end{aligned}$$

e também

$$d_2(\phi_1(r X_1^i s X_1^j)) = \phi_1(D_2(r X_1^i s X_1^j)).$$

Então, usando a injetividade de ϕ_1 , segue que $D_2(r X_1^i s X_1^j) = D_2(r X_1^i) s X_1^j + r X_1^i D_2(s X_1^j)$. Com isso prova-se a igualdade desejada.

Como consequência do lema anterior podemos definir $T_2 = T_1[X_2, D_2]$.

Agora, para cada inteiro n em Λ tal que $n \geq 2$, definimos a função $D_{n+1}: T_n \rightarrow T_n$ como sendo aditiva e satisfazendo

$$\begin{aligned}
 D_{n+1}(X_\ell) &= - \sum_i k_i^{(\ell, n+1)} X_{\lambda_i} - t(x_\ell, x_{n+1}), \quad \forall \ell \leq n, \text{ e} \\
 D_{n+1}(r X_{\ell_1}^{\nu_{\ell_1}} \dots X_{\ell_m}^{\nu_{\ell_m}}) &= d_{n+1}(r) X_{\ell_1}^{\nu_{\ell_1}} \dots X_{\ell_m}^{\nu_{\ell_m}} \\
 &+ r \sum_{u=1}^m \sum_{v=0}^{\nu_{\ell_u}-1} X_{\ell_1}^{\nu_{\ell_1}} \dots X_{\ell_u-1}^{\nu_{\ell_u-1}} X_{\ell_u}^v D_{n+1}(X_{\ell_u}) X_{\ell_u}^{\nu_{\ell_u}-1-v} X_{\ell_{u+1}}^{\nu_{\ell_{u+1}}} \dots X_{\ell_m}^{\nu_{\ell_m}},
 \end{aligned}$$

$\forall r \in \mathbb{R}$, $\forall \ell_1, \dots, \ell_m$ com $\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_m \leq n$, onde $T_n = T_{n-1}[X_n, D_n]$.

Seguindo um procedimento análogo à prova do Lema 1.2, podemos verificar o seguinte

LEMA 1.3 – Seja $n \geq 2$. Se definimos a função $\phi_n : T_n \longrightarrow R * \mathcal{L}$ por

$$\phi_n \left(\sum_{r_{i_1 \dots i_n}} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \right) = \sum_{r_{i_1 \dots i_n}} \bar{X}_1^{i_1} \cdots \bar{X}_n^{i_n},$$

então

- (1) $\phi_\ell \circ D_{n+1} = d_{n+1} \circ \phi_\ell, \quad \forall \ell \leq n.$
- (2) ϕ_ℓ é um R -monomorfismo para todo $\ell \leq n.$
- (3) D_{n+1} é uma K -derivada de $T_n.$

Assim, com esse resultado, temos que os anéis $T_n = T_{n-1}[X_n, D_n]$ estão bem definidos para todo n em $\mathbb{N}.$

Seja λ um ordinal limite. Se $\lambda \in \Lambda,$ definimos o anel $T_\lambda = \bigcup_{\iota < \lambda} T_\iota$ e a função $\phi_\lambda : T_\lambda \longrightarrow R * \mathcal{L}$ por $\phi_\lambda(f) = \phi_\iota(f)$ se $f \in T_\iota$ com $\iota < \lambda.$ Claramente ϕ_λ é um monomorfismo se os $\phi_\iota (\iota < \lambda)$ o são.

Seja $\lambda = \rho + 1$ um ordinal sucessor. Se $\lambda \in \Lambda,$ definimos a função $D_{\rho+1} : T_\rho \longrightarrow T_\rho$ que seja aditiva e que satisfaça as condições:

$$(a) D_{\rho+1}(X_\iota) = - \sum_i k_i^{(\tau, \rho)} Z_i - t(x_\tau, x_\rho), \quad \forall \iota \in \Lambda^*, \text{ com } \iota \leq \rho, \text{ onde}$$

$$\tau = \begin{cases} \iota & , \text{ se } \iota < \mathcal{X}_0 \\ \iota - 1 & , \text{ se } \iota > \mathcal{X}_0 \end{cases}$$

$$\text{e } Z_i = \begin{cases} X_{\rho_i} & , \text{ se } \rho_i < \mathcal{X}_0 \\ X_{\rho_i+1} & , \text{ se } \rho_i > \mathcal{X}_0 \end{cases}$$

$$(b) D_{\rho+1}(r X_{i_1}^{\nu_{i_1}} \cdots X_{i_m}^{\nu_{i_m}}) = d_\rho(r) X_{i_1}^{\nu_{i_1}} \cdots X_{i_m}^{\nu_{i_m}} \\ + r \sum_{u=1}^m \sum_{v=0}^{\nu_{i_u}-1} X_{i_1}^{\nu_{i_1}} \cdots X_{i_{u-1}}^{\nu_{i_{u-1}}} X_{i_u}^v D_{\rho+1}(X_{i_u}) X_{i_u}^{\nu_{i_u}-1-v} X_{i_{u+1}}^{\nu_{i_{u+1}}} \cdots X_{i_m}^{\nu_{i_m}}.$$

Procedendo como na prova do Lema 1.2 e usando indução transfinita sobre $\rho \in \Lambda$ tal que $\rho \geq \aleph_0$, consegue-se provar o

LEMA 1.4 - Seja $\lambda = \rho + 1$ um ordinal sucessor no conjunto Λ tal que $\lambda \geq \aleph_0$. Se $\phi_\rho: T_\rho \rightarrow R * \mathcal{L}$ é definido por

$$\phi_\rho\left(\sum_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1, \dots, i_m} X_{i_1}^{\nu_{i_1}} \cdots X_{i_m}^{\nu_{i_m}}\right) = \sum_{i_1, \dots, i_m} r_{i_1, \dots, i_m} \phi_\rho(X_{i_1})^{\nu_{i_1}} \cdots \phi_\rho(X_{i_m})^{\nu_{i_m}},$$

onde $\phi_\rho(X_n) = \bar{x}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (positivo) e $\phi_\rho(X_\iota) = \bar{x}_{\iota-1} \quad \forall \iota \in \Lambda^* \setminus \mathbb{N}$, então

- (1) $\phi_\iota \circ D_{\rho+1} = d_\rho \circ \phi_\iota, \quad \forall \iota \leq \rho.$
- (2) ϕ_ι é um R -monomorfismo para todo $\iota \leq \rho.$
- (3) $D_{\rho+1}$ é uma K -derivação de $T_\rho.$

Agora definimos, para cada $\lambda \in \Lambda^* \setminus \mathbb{N}$, o anel $T_\lambda = T_{\lambda-1}[X_\lambda, D_\lambda].$

Se denotamos com \mathcal{D} o conjunto de todas as derivações $D_\lambda (\lambda \in \Lambda^*)$, então definimos o anel $R[X, \mathcal{D}] = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ e temos o

TEOREMA 1.5 - Se \mathcal{L} é uma K -álgebra de Lie que possui a propriedade (s), então $R[X, \mathcal{D}]$ é um anel extensão de R , isomorfo com o anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}.$

PROVA - A função $\phi: R[X, \mathcal{D}] \rightarrow R * \mathcal{L}$, definida por $\phi(f) = \phi_\lambda(f), \quad \forall f \in T_\lambda$, é um isomorfismo de anéis e um R -homomorfismo.

Seja $\lambda \in \Lambda^*$. Se definimos $D_\lambda(X_\lambda) = 0$ e $D_\lambda(X_\iota) = -D_\iota(X_\lambda), \quad \forall \iota \in \Lambda^*$, tal que $\iota > \lambda$, então D_λ torna-se uma derivação interna de $R[X, \mathcal{D}]$, determinada pelo elemento X_λ se $\lambda < \aleph_0$ ou por $X_{\lambda-1}$ se $\lambda > \aleph_0.$

Concluimos este parágrafo apresentando algumas definições e diversos resultados para os anéis T_λ . Dado que as provas destes resultados são simples, elas não são incluídas aqui.

Seja $\lambda \in \Lambda$. É claro que T_ι é um subanel de T_λ , $\forall \iota < \lambda$. Também, se I é um ideal de T_λ , então $D_\iota(I) \subseteq I$, $\forall \iota \in \Lambda^*$ tal que $\iota < \lambda$.

Um ideal I de T_λ será chamado um \mathcal{D} -ideal, se $D_\iota(I) \subseteq I$, $\forall \iota \in \Lambda^*$ tal que $\iota \geq \lambda$.

No que segue, a menos que seja dito outra coisa, Ω^* denotará o seguinte subconjunto do produto cartesiano \mathbb{N}^{Λ^*} ,

$$\{\bar{\nu} = (\nu_\iota) \in \mathbb{N}^{\Lambda^*} : \nu_\iota = 0 \text{ exceto para um número finito de índices } \iota \in \Lambda^*\}.$$

Também, dado $\bar{\nu} \in \Omega^*$, denotamos com $X^{\bar{\nu}}$ o elemento $X_{i_1}^{\nu_{i_1}} \cdots X_{i_m}^{\nu_{i_m}}$ do anel $R[X, \mathcal{D}]$.

PROPOSIÇÃO 1.6 – Se I é um \mathcal{D} -ideal de T_λ , então $I \cdot R[X, \mathcal{D}]$ é um ideal bilátero de $R[X, \mathcal{D}]$ que coincide com o conjunto

$$\left\{ \sum_{\bar{\nu}} t_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}} : t_{\bar{\nu}} \in I \text{ e } \bar{\nu} = (\nu_\iota) \in \Omega^* \text{ com } \nu_\iota = 0 \quad \forall \iota \in \Lambda^* \text{ tal que } \iota < \lambda \right\}$$

e satisfaz a condição $I R[X, \mathcal{D}] \cap T_\lambda = I$.

O ideal estendido $I \cdot R[X, \mathcal{D}]$ de $R[X, \mathcal{D}]$ será denotado com $I[X, \mathcal{D}]$.

PROPOSIÇÃO 1.7 – Se I é um ideal de T_λ tal que $D_{\lambda+1}(I) \subseteq I$ então $I \cdot T_{\lambda+1}$ é um ideal bilátero de $T_{\lambda+1}$ que coincide com o conjunto

$$\left\{ \sum_{i=0}^n t_i X_{\lambda+1}^i : t_i \in I, \quad n \geq 0 \right\}$$

e satisfaz a condição $I \cdot T_{\lambda+1} \cap T_\lambda = I$.

O ideal estendido $I \cdot T_{\lambda+1}$ de $T_{\lambda+1}$ será denotado com $I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]$.

Se I é um \mathcal{D} -ideal de T_λ então é claro que $I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}][X, \mathcal{D}] = I[X, \mathcal{D}]$.

Sejam $\lambda \in \Lambda$ e I um \mathcal{D} -ideal de T_λ . Se para cada $\iota \in \Lambda^*$ definimos $\bar{D}_\iota : T_\lambda / I \rightarrow T_\lambda / I$ por $\bar{D}_\iota(t+I) = D_\iota(t)+I$, $\forall t \in T_\lambda$, então as funções

$\bar{D}_i (i \in \Lambda^*)$ são K -derivações do anel quociente T_λ / I . Com isso, temos que a função $\bar{\Delta}: \mathcal{L} \rightarrow \text{Der}_K(T_\lambda / I)$, definida por

$$\bar{\Delta}\left(\sum_i k_i x_{i_1}\right) = \sum_i k_i \bar{\Delta}(x_{i_1}),$$

$$\text{onde} \quad \bar{\Delta}(x_i) = \begin{cases} \bar{D}_i, & \text{se } i \in \mathbb{N} \\ \bar{D}_{i+1}, & \text{se } i \geq \mathcal{X}_0 \end{cases}$$

é um K -homomorfismo que torna possível a construção dos anéis

$$(T_\lambda / I)[X_{\lambda+1}, \bar{D}_{\lambda+1}] \quad \text{e} \quad (T_\lambda / I)[X, \bar{\mathcal{D}}]$$

onde $\bar{\mathcal{D}} = \{\bar{D}_i : i \in \Lambda^*\}$.

O seguinte resultado mostra que o anel quociente T_λ / I pode ser considerado um subanel dos anéis $T_{\lambda+1} / I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]$ e $R[X, \mathcal{D}] / I[X, \mathcal{D}]$.

PROPOSIÇÃO 1.8 – Se $\lambda \in \Lambda$ e I é um \mathcal{D} -ideal de T_λ então

$$(1) \quad T_{\lambda+1} / I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}] \cong (T_\lambda / I)[X_{\lambda+1}, \bar{D}_{\lambda+1}]$$

$$(2) \quad R[X, \mathcal{D}] / I[X, \mathcal{D}] \cong (T_\lambda / I)[X, \bar{\mathcal{D}}].$$

Seja $\lambda \in \Lambda$. É fácil provar que, se J é um ideal de $R[X, \mathcal{D}]$, então $J \cap T_\lambda$ é um \mathcal{D} -ideal de T_λ . Também, se L é um ideal de $T_{\lambda+1}$, então $L \cap T_\lambda$ é um ideal de T_λ que satisfaz $D_{\lambda+1}(L \cap T_\lambda) \subseteq L \cap T_\lambda$.

A Proposição seguinte e seu Corolário serão de muita utilidade nas provas do parágrafo 2 no Capítulo seguinte.

PROPOSIÇÃO 1.9 – Sejam $\lambda \in \Lambda$ e I um \mathcal{D} -ideal de T_λ .

(1) Se J é um ideal de $R[X, \mathcal{D}]$ tal que $I[X, \mathcal{D}] \subseteq J$, então

$$(J / I[X, \mathcal{D}]) \cap (T_\lambda / I) = (J \cap T_\lambda) / I.$$

(2) Se L é um ideal de $T_{\lambda+1}$ tal que $I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}] \subseteq L$, então

$$(L/I[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]) \cap (T_{\lambda}/I) = (L \cap T_{\lambda})/I.$$

COROLÁRIO 1. 10 - Se $\lambda \in \Lambda$, então temos o seguinte:

(1) Se J é um ideal de $R[X, \mathcal{D}]$, então

$$(J/(J \cap T_{\lambda})[X, \mathcal{D}]) \cap (T_{\lambda}/(J \cap T_{\lambda})) = 0;$$

(2) Se L é um ideal de $T_{\lambda+1}$, então

$$(L/(L \cap T_{\lambda})[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]) \cap (T_{\lambda}/(L \cap T_{\lambda})) = 0.$$

2 - Os Skew Anéis $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $R[X, \mathcal{A}]$.

Iniciamos este parágrafo introduzindo algumas notações e resultados fáceis de verificar e que serão usados na construção dos skew anéis $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $R[X, \mathcal{A}]$.

Consideremos os seguintes conjuntos

$$\Omega_1 = \{\bar{\nu} = (\nu_{\lambda}) \in \mathbb{Z}^{\Lambda} : \nu_{\lambda} = 0 \text{ exceto para um número finito de índices } \lambda \in \Lambda\} \text{ e}$$

$$\Omega_1^* = \{\bar{\nu} = (\nu_{\lambda}) \in \mathbb{Z}^{\Lambda^*} : \nu_{\lambda} = 0 \text{ exceto para um número finito de índices } \lambda \in \Lambda\},$$

onde Λ e Λ^* são definidos como no parágrafo 1.

É claro que $\Omega \subseteq \Omega_1$. Se em Ω_1 consideramos a relação lexicográfica " $<$ " definida em Ω no parágrafo 1, então $(\Omega_1, <)$ é também um conjunto totalmente ordenado, e cada subconjunto finito de (Ω_1, \leq) possui um elemento minimal e um elemento maximal.

Se u é uma unidade do anel R , então \tilde{u} denotará o automorfismo interno de R determinado por u , i.e., $\tilde{u}(r) = uru^{-1}$, $\forall r \in R$. Também, denotamos com

$(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ um anel R , um conjunto ordenado de automorfismos \mathcal{A} de R , e um conjunto de unidades \mathcal{U} de R , tais que \mathcal{A} é equivalente a Λ^* , e as condições

$$(K) \begin{cases} \sigma \circ \rho = \tilde{u}_{\sigma, \rho} \circ \rho \circ \sigma \\ \sigma(u_{\rho, \theta}) u_{\sigma, \theta} \theta(u_{\sigma, \rho}) = u_{\sigma, \rho} \rho(u_{\sigma, \theta}) u_{\rho, \theta} \\ u_{\sigma, \rho}^{-1} = u_{\rho, \sigma} \quad \text{e} \quad u_{\sigma, \sigma} = 1 \end{cases}$$

são satisfeitas para $\sigma, \rho, \theta \in \mathcal{A}$ arbitrárias. Aqui a condição " \mathcal{A} é equivalente a Λ^* " significa que existe uma bijeção de Λ^* sobre \mathcal{A} que preserva a ordem e, portanto, podemos indexar \mathcal{A} com Λ^* , i.e., vamos supor $\mathcal{A} = \{\sigma_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$.

Antes de passar a definir o skew anel $R(X, \mathcal{A})$, lembramos que, para um automorfismo σ de R , o skew anel de polinômios de Laurent $R(X, \sigma)$ é definido como o anel com conjunto subjacente

$$\left\{ \sum_{i=u}^v r_i X^i : r_i \in R, u, v \in \mathbb{Z} \text{ com } u \leq v \right\}$$

e com as operações de soma usual de polinômios, e o produto dado por $Xr = \sigma(r)X$, $\forall r \in R$ ([9]).

Consideremos um anel com automorfismos $(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ e um conjunto de indeterminadas $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$.

Definamos primeiro

$$V_0 = R, \quad \sigma'_1 = \sigma_1, \quad V_1 = V_0 \langle X_1, \sigma'_1 \rangle.$$

Agora definamos a função $\sigma'_2 : V_1 \rightarrow V_1$, por

$$\sigma'_2 \left(\sum_i r_i X_1^i \right) = \sum_i \sigma_2(r_i) (u_{2,1} X_1)^i$$

PROPOSIÇÃO 2.1 - σ'_2 é um automorfismo de V_1 que estende σ_2 .

PROVA - Sejam $r, s \in R$ e $i, j \in \mathbb{Z}$. Usando a condição $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \tilde{u}_{2,1} \circ \sigma_1 \circ \sigma_2$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sigma'_2(r X_1^i s X_1^j) &= \sigma'_2(r \sigma_1^i(s) X_1^{i+j}) \\
&= \sigma_2(r \sigma_1^i(s)) (u_{2,1} X_1)^{i+j} \\
&= \sigma_2(r) \sigma_2 \circ \sigma_1(\sigma_1^{i-1}(s)) u_{2,1} X_1 (u_{2,1} X_1)^{i+j-1} \\
&= \sigma_2(r) u_{2,1} \sigma_1 \circ \sigma_2(\sigma_1^{i-1}(s)) X_1 (u_{2,1} X_1)^{i+j-1} \\
&= \sigma_2(r) u_{2,1} X_1 \sigma_2 \circ \sigma_1(\sigma_1^{i-2}(s)) u_{2,1} X_1 (u_{2,1} X_1)^{i+j-2} \\
&= \sigma_2(r) u_{2,1} X_1 u_{2,1} \sigma_1 \circ \sigma_2(\sigma_1^{i-2}(s)) X_1 (u_{2,1} X_1)^{i+j-2} \\
&= \sigma_2(r) (u_{2,1} X_1)^2 \sigma_2(\sigma_1^{i-2}(s)) (u_{2,1} X_1)^{i+j-2} \\
&\quad \vdots \\
&= \sigma_2(r) (u_{2,1} X_1)^t \sigma_2(\sigma_1^{i-t}(s)) (u_{2,1} X_1)^{i+j-t} \\
&\quad \vdots \\
&= \sigma_2(r) (u_{2,1} X_1)^i \sigma_2(s) (u_{2,1} X_1)^j \\
&= \sigma'_2(r X_1^i) \sigma'_2(s X_1^j) .
\end{aligned}$$

Com isso e usando a aditividade de σ'_2 , prova-se facilmente que σ'_2 é um homomorfismo de anéis.

Não é difícil verificar que σ'_2 tem inverso definido por

$$\sigma'^{-1}_2 \left(\sum_i r_i X_1^i \right) = \sum_i \sigma_2^{-1}(r_i) (\sigma_2^{-1}(u_{1,2}) X_1)^i ,$$

e assim σ'_2 é um isomorfismo. Finalmente, é claro que σ'_2 é uma extensão do automorfismo σ_2 .

Por causa da Proposição 2.1, podemos agora definir o anel

$$V_2 = V_1 \langle X_2, \sigma'_2 \rangle .$$

Continuando dessa forma definimos, para cada $n \in \mathbb{N} \cap \Lambda$ com $n \geq 2$, a função $\sigma'_{n+1} : V_n \rightarrow V_n$ por

$$\sigma'_{n+1} \left(\sum r_{i_1 \dots i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \right) = \sum \sigma_{n+1}(r_{i_1 \dots i_n}) (u_{n+1,1} X_1)^{i_1} \cdots (u_{n+1,n} X_n)^{i_n}$$

Uma prova análoga àquela da Proposição 2.1 mostra que σ'_{n+1} é um automorfismo de V_n que estende σ_{n+1} . Assim podemos definir agora o anel $V_{n+1} = V_n\langle X_{n+1}, \sigma'_{n+1} \rangle$.

Agora seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq \lambda_0$. Se λ é um ordinal limite, definimos o anel $V_\lambda = \bigcup_{i < \lambda} V_i$. Se λ é um ordinal sucessor, com $\lambda = \rho + 1$, então consideramos a função $\sigma'_\lambda : V_\rho \rightarrow V_\rho$ definida por

$$\sigma'_\lambda \left(\sum_{\bar{\nu}} r_{\bar{\nu}} X_{i_1}^{\nu_{i_1}} \cdots X_{i_m}^{\nu_{i_m}} \right) = \sum_{\bar{\nu}} \sigma'_\lambda(r_{\bar{\nu}}) (u_{\lambda, i_1} X_{i_1})^{\nu_{i_1}} \cdots (u_{\lambda, i_m} X_{i_m})^{\nu_{i_m}},$$

onde $\bar{\nu} = (\nu_i) \in \Omega_1^*$. Podemos provar também que σ'_λ é um automorfismo de V_ρ que estende σ_ρ . Isso nos permite definir o anel $V_{\rho+1} = V_\rho\langle X_{\rho+1}, \sigma'_{\rho+1} \rangle$.

Finalmente definimos o anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ por

$$R\langle X, \mathcal{A} \rangle = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda.$$

É claro que $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é um anel extensão de R .

Cada automorfismo σ_λ pode ser estendido a um automorfismo de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ como antes. Este automorfismo será denotado ainda por σ_λ .

Usando as condições (K) vamos provar o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.2 - Para todo $\alpha \in R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $i, \lambda \in \Lambda^*$ tem-se:

- (1) $X_\lambda X_i = u_{\lambda, i} X_i X_\lambda$;
- (2) $X_\lambda \alpha = \sigma_\lambda(\alpha) X_\lambda$.

PROVA - (1) $X_\lambda X_i = \sigma_\lambda(X_i) X_\lambda = u_{\lambda, i} X_i X_\lambda$.

(2) Usando a parte (1) sucessivamente obtemos para cada $r \in R$ que

$$\begin{aligned}
\sigma_\lambda(r X_{i_1}^{\nu_{i_1}} \cdots X_{i_m}^{\nu_{i_m}}) X_\lambda &= \sigma_\lambda(r) (u_{\lambda, i_1} X_{i_1})^{\nu_{i_1}} \cdots (u_{\lambda, i_m} X_{i_m})^{\nu_{i_m}} X_\lambda \\
&= \sigma_\lambda(r) (u_{\lambda, i_1} X_{i_1})^{\nu_{i_1}} \cdots (u_{\lambda, i_m} X_{i_m})^{\nu_{i_m} - 1} u_{\lambda, i_m} X_{i_m} X_\lambda \\
&= \sigma_\lambda(r) (u_{\lambda, i_1} X_{i_1})^{\nu_{i_1}} \cdots (u_{\lambda, i_m} X_{i_m})^{\nu_{i_m} - 1} X_\lambda X_{i_m} \\
&= \sigma_\lambda(r) (u_{\lambda, i_1} X_{i_1})^{\nu_{i_1}} \cdots (u_{\lambda, i_m} X_{i_m})^{\nu_{i_m} - 2} u_{\lambda, i_m} X_{i_m} X_\lambda X_{i_m} \\
&= \sigma_\lambda(r) (u_{\lambda, i_1} X_{i_1})^{\nu_{i_1}} \cdots (u_{\lambda, i_m} X_{i_m})^{\nu_{i_m} - 2} X_\lambda X_{i_m}^2 \\
&\quad \vdots \\
&= \sigma_\lambda(r) (u_{\lambda, i_1} X_{i_1})^{\nu_{i_1}} \cdots (u_{\lambda, i_{m-1}} X_{i_{m-1}})^{\nu_{i_{m-1}}} X_\lambda X_{i_m}^{\nu_{i_m}} \\
&\quad \vdots \\
&= \sigma_\lambda(r) X_\lambda X_{i_1}^{\nu_{i_1}} \cdots X_{i_m}^{\nu_{i_m}} \\
&= X_\lambda r X_{i_1}^{\nu_{i_1}} \cdots X_{i_m}^{\nu_{i_m}}
\end{aligned}$$

Com isso e usando a aditividade de σ_λ fica claro que $X_\lambda \alpha = \sigma_\lambda(\alpha) X_\lambda$, para todo $\alpha \in R\langle X, \mathcal{A} \rangle$.

Como consequência da Proposição 2.2 temos que, para cada $\lambda \in \Lambda^*$,

$$\sigma_\lambda(\alpha) = X_\lambda \alpha X_\lambda^{-1}, \quad \forall \alpha \in R\langle X, \mathcal{A} \rangle,$$

isto é, σ_λ é o automorfismo interno de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, determinado pelo elemento X_λ .

Se usamos a notação $X^{\bar{\nu}}$ para cada monômio de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ da forma $X_{i_1}^{\nu_{i_1}} \cdots X_{i_m}^{\nu_{i_m}}$ (onde $\bar{\nu} = (\nu_i) \in \Omega_1^*$), então podemos escrever

$$V_\lambda = \left\{ \alpha = \sum_{\bar{\nu}} r_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}} : r_{\bar{\nu}} \in R, \bar{\nu} = (\nu_i) \in \Omega_1^* \text{ e } \nu_i = 0 \quad \forall i > \lambda \right\}$$

$$\text{e } R\langle X, \mathcal{A} \rangle = \left\{ \alpha = \sum_{\bar{\nu}} r_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}} : r_{\bar{\nu}} \in R, \bar{\nu} \in \Omega_1^* \right\}.$$

No caso particular em que Λ^* seja finito, temos que $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ coincide com o anel \mathcal{B} considerado por K. Kishimoto em [16], Sec. 2.

Também, como consequência da Proposição 2.2, temos o

COROLARIO 2.3 – Para cada par de elementos $\bar{\nu}, \bar{\mu} \in \Omega_1^*$, existe uma única unidade $u^{(\bar{\nu}, \bar{\mu})}$ de R tal que no anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ se tem

$$X^{\bar{\nu}} X^{\bar{\mu}} = u^{(\bar{\nu}, \bar{\mu})} X^{\bar{\nu} + \bar{\mu}},$$

onde $\bar{\nu} + \bar{\mu}$ está definido componente a componente.

Dado um automorfismo σ de R , se define o skew anel de polinômios $R[X, \sigma]$ como o subanel

$$\left\{ \sum_{i=0}^n r_i X^i : r_i \in R, n \geq 0 \right\}$$

de $R\langle X, \sigma \rangle$ ([9]).

Para cada $\lambda \in \Lambda$ consideramos o subanel de V_λ ,

$$S_\lambda = \left\{ \alpha = \sum_{\bar{\nu}} r_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}} : r_{\bar{\nu}} \in R, \bar{\nu} = (\nu_i) \in \Omega^* \text{ e } \nu_i = 0 \ \forall i > \lambda \right\}$$

e o subanel de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$,

$$R[X, \mathcal{A}] = \left\{ \alpha = \sum_{\bar{\nu}} r_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}} : r_{\bar{\nu}} \in R, \bar{\nu} \in \Omega^* \right\}.$$

Temos que

$$S_\lambda = \begin{cases} \bigcup_{i < \lambda} S_i, & \text{se } \lambda \text{ é um ordinal limite} \\ S_{\lambda-1} [X_\lambda, \sigma_\lambda], & \text{se } \lambda \text{ é um ordinal sucessor} \end{cases}$$

$$\text{e } R[X, \mathcal{A}] = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda.$$

Cada σ_λ restrito a $R[X, \mathcal{A}]$ é ainda um automorfismo e a Proposição 2.2 vale também para o anel $R[X, \mathcal{A}]$. Mas desta vez cada automorfismo σ_λ de $R[X, \mathcal{A}]$ não é interno.

Tal como foi feito em $R * \mathcal{L}$, definimos para um elemento não nulo $\alpha = \sum_{\bar{\nu}} r_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}}$, de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ o *suporte* de α como sendo o conjunto $\text{Supp}(\alpha) = \{\bar{\nu} \in \Omega_1^* : r_{\bar{\nu}} \neq 0\}$, e o $\bar{\nu}$ -ésimo coeficiente (à esquerda) de α por $c_{\bar{\nu}}(\alpha) = r_{\bar{\nu}}$. O grau e o coeficiente principal de α só será definido se α pertencer a $R[X, \mathcal{A}]$. Assim se $\alpha \in R[X, \mathcal{A}]$, então $\partial \alpha = \text{máx Supp}(\alpha)$ e $\ell c(\alpha) = c_{\bar{\nu}_0}(\alpha)$, onde $\bar{\nu}_0 = \partial \alpha$.

Um ideal I de V_λ (respectivamente S_λ) será dito \mathcal{A} -invariante se $\sigma_\lambda(I) = I$, $\forall \lambda \in \Lambda^*$. Neste caso notaremos isto com $I \triangleleft_{\mathcal{A}} V_\lambda$ (respectivamente $I \triangleleft_{\mathcal{A}} S_\lambda$).

Para um ideal \mathcal{A} -invariante I de V_λ (respectivamente S_λ) podemos definir os ideais estendidos $I\langle X, \mathcal{A} \rangle = IR\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $I\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle = IV_{\lambda+1}$ (respectivamente $I[X, \mathcal{A}] = IR[X, \mathcal{A}]$ e $I[X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}] = IS_{\lambda+1}$). É rotineiro provar resultados análogos às Proposições 1.6 e 1.7 para estes ideais estendidos.

As provas dos resultados restantes deste parágrafo são simples e, por causa disso, não serão incluídas aqui.

PROPOSIÇÃO 2.4 – Para um anel $(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ consideremos um ideal $I \triangleleft_{\mathcal{A}} R$. Se para cada $\lambda \in \Lambda^*$ definimos a função $\bar{\sigma}_\lambda : R/I \rightarrow R/I$ por

$$\bar{\sigma}_\lambda(r + I) = \sigma_\lambda(r) + I, \quad \forall r \in R,$$

então $\bar{\mathcal{A}} = \{\bar{\sigma}_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$ é uma família de automorfismos de R/I tal que, $(R/I, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{U}} = \{u_{i,\lambda} + I : i, \lambda \in \Lambda^*\})$ satisfaz a condição (K).

PROPOSIÇÃO 2.5 – Se $\lambda \in \Lambda$ e $I \triangleleft_{\mathcal{A}} V_\lambda$, então

- (1) $V_{\lambda+1}/I\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle \cong (V_\lambda/I)\langle X_{\lambda+1}, \bar{\sigma}_{\lambda+1} \rangle$,
- (2) $R\langle X, \mathcal{A} \rangle/I\langle X, \mathcal{A} \rangle \cong (V_\lambda/I)\langle X, \bar{\mathcal{A}} \rangle$.

PROPOSIÇÃO 2.6 – Se $\lambda \in \Lambda$ e $I \triangleleft_{\mathcal{A}} S_\lambda$, então

$$(1) S_{\lambda+1} / I[X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1}] \cong (S_{\lambda} / I) [X_{\lambda+1}, \bar{\sigma}_{\lambda+1}],$$

$$(2) R[X, \mathcal{A}] / I[X, \mathcal{A}] \cong (S_{\lambda} / I) [X, \mathcal{A}].$$

PROPOSIÇÃO 2.7 - Seja λ um elemento de Λ .

(1) Se J é um ideal de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ então $J \cap V_{\lambda}$ é um ideal \mathcal{A} -invariante de V_{λ} que satisfaz $(J / (J \cap V_{\lambda})) \langle X, \mathcal{A} \rangle \cap (J / J \cap V_{\lambda}) = 0$.

(2) Se L é um ideal de $V_{\lambda+1}$ então $L \cap V_{\lambda}$ é um ideal de V_{λ} que satisfaz $\sigma_{\lambda}(L \cap V_{\lambda}) \subseteq L \cap V_{\lambda}$ e $(L / (L \cap V_{\lambda})) \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle \cap (L / L \cap V_{\lambda}) = 0$.

3 - Outros Anéis-Extensão.

Neste Parágrafo, enquanto não se disser o contrário, K denotará um anel comutativo com unidade, R um K -álgebra associativa e C um subanel de K .

Consideremos o anel soma direta $R^* = R \oplus C$, onde a soma e o produto vêm dados por

$$(r, c) + (r', c') = (r + r', c + c') \quad \text{e} \quad (r, c)(r', c') = (rr' + cr', +rc'cc')$$

para todo $(r, c), (r', c') \in R^*$.

Sabe-se que R^* é um anel com unidade extensão dos anéis R e C .

Consideremos o anel de operadores diferenciais $R^* \mathcal{L}$. Se para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos a função $d_{\lambda}^* : R^* \rightarrow R^*$ por $d_{\lambda}^* = (d_{\lambda}, 0)$, então não é difícil provar que d_{λ}^* é um K -derivação de R^* que estende a derivação d_{λ} .

Se $\Delta^* : \mathcal{L} \rightarrow \text{Der}_K(R^*)$ é definida por $\Delta^* \left(\sum_{\lambda} k_{\lambda} x_{\lambda} \right) = \sum_{\lambda} k_{\lambda} d_{\lambda}^*$, então Δ^* é um homomorfismo de K -módulos. Assim podemos construir o anel de operadores diferenciais $R^* * \mathcal{L}$ (onde $t^* : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \rightarrow R^*$ é definido por $t^*(x, y) = (t(x, y), 0)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$).

É fácil provar que R é um \mathcal{L} -ideal de R^* (i.e. $d_\lambda^*(R) \subseteq R \quad \forall \lambda \in \Lambda$), e portanto $R * \mathcal{L}$ é um ideal do anel $R^* * \mathcal{L}$.

PROPOSIÇÃO 3.1 - Sejam $r \in R$ e $\bar{\nu}, \bar{\mu} \in \Omega$. Se no anel $R * \mathcal{L}$ se tem

$$\bar{x}^{\bar{\nu}} r = r \bar{x}^{\bar{\nu}} + \sum_{\bar{\rho} < \bar{\nu}} r_{\bar{\rho}} \bar{x}^{\bar{\rho}} \quad e \quad \bar{x}^{\bar{\nu}} \bar{x}^{\bar{\mu}} = \bar{x}^{\bar{\nu} + \bar{\mu}} + \sum_{\bar{\rho} < \bar{\nu} + \bar{\mu}} s_{\bar{\rho}} \bar{x}^{\bar{\rho}},$$

então no anel $R^* * \mathcal{L}$ se tem

$$\bar{x}^{\bar{\nu}}(r, c) = (r, c) \bar{x}^{\bar{\nu}} + \sum_{\bar{\rho} < \bar{\nu}} r_{\bar{\rho}} \bar{x}^{\bar{\rho}} \quad e \quad \bar{x}^{\bar{\nu}} \bar{x}^{\bar{\mu}} = \bar{x}^{\bar{\nu} + \bar{\mu}} + \sum_{\bar{\rho} < \bar{\nu} + \bar{\mu}} (s_{\bar{\rho}}, 0) \bar{x}^{\bar{\rho}}, \quad \forall c \in C.$$

PROVA - Isto é consequência direta dos fatos $d_\lambda^*(R) \subseteq R \quad \forall \lambda \in \Lambda$, $K \subseteq R^*$, e $t^*(\mathcal{L} \times \mathcal{L}) \subseteq R$.

PROPOSIÇÃO 3.2 - Se $C[X]$ denota o anel de polinômios sobre C com indeterminadas $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, então os anéis $(R \oplus C) * \mathcal{L} / R * \mathcal{L}$ e $C[X]$ são isomorfos.

PROVA - É suficiente considerar o epimorfismo $\pi : (R \oplus C) * \mathcal{L} \rightarrow C[X]$, definido por $\pi\left(\sum_{\bar{\nu}} (r_{\bar{\nu}}, c_{\bar{\nu}}) \bar{x}^{\bar{\nu}}\right) = \sum c_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}}$ (onde $X^{\bar{\nu}} = X_{\lambda_1}^{\nu_{\lambda_1}} \cdots X_{\lambda_n}^{\nu_{\lambda_n}}$), o qual tem como kernel o ideal $R * \mathcal{L}$ de $(R \oplus C) * \mathcal{L}$.

Agora consideramos os anéis $(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ e $R^* = R \times C$ (com a soma e o produto usuais). Se para cada $\lambda \in \Lambda^*$ definimos a função $\sigma_\lambda^* : R^* \rightarrow R^*$ por $\sigma_\lambda^* = (\sigma_\lambda, 1_c)$, então não é difícil provar que σ_λ^* é um automorfismo de R^* que estende o autormorfismo σ_λ .

Também pode-se provar sem dificuldade que, se $\mathcal{A}^* = \{\sigma_\lambda^* : \lambda \in \Lambda^*\}$ e $\mathcal{U}^* = \{u_{i, \lambda}^* = (u_{i, \lambda}, 1) : i, \lambda \in \Lambda^*\}$, então $(R^*, \mathcal{A}^*, \mathcal{U}^*)$ satisfaz a condição (K). Assim torna-se possível construir os skew anéis $R^*(X, \mathcal{A}^*)$ e $R^*[X, \mathcal{A}^*]$ (onde X é o conjunto de indeterminadas $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$).

Utilizando as propriedades de multiplicação nos skew anéis $R^*(X, \mathcal{A}^*)$ e levando em conta a forma em que \mathcal{A}^* e \mathcal{U}^* têm sido definidos, podemos provar facilmente o seguinte.

PROPOSIÇÃO 3.3 – Se no anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ (respectivamente $R[X, \mathcal{A}]$), se tem $X^{\bar{\nu}} X^{\bar{\mu}} = u^{(\bar{\nu}, \bar{\mu})} X^{(\bar{\nu} + \bar{\mu})}$, então no anel $R^p\langle X, \mathcal{A}^p \rangle$ (respectivamente $R^p[X, \mathcal{A}^p]$), tem-se $X^{\bar{\nu}} X^{\bar{\mu}} = (u^{(\bar{\nu}, \bar{\mu})}, 1) X^{\bar{\nu} + \bar{\mu}}$.

É claro que o ideal R de R^p é \mathcal{A}^p -invariante. Como conseqüência disso, temos que $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é um ideal do anel $R^p\langle X, \mathcal{A}^p \rangle$, e $R[X, \mathcal{A}]$ é um ideal do anel $R^p[X, \mathcal{A}^p]$.

PROPOSIÇÃO 3.4 – Se $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$ é um conjunto de indeterminadas e $C(X)$ denota o anel de Laurent $\left\{ \sum_{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}} \text{ (soma finita)} : c_{\bar{\nu}} \in C, \bar{\nu} \in \Omega_1^* \right\}$, então

$$(1) \quad (R \times C)\langle X, \mathcal{A}^p \rangle / R\langle X, \mathcal{A} \rangle \cong C(X),$$

$$(2) \quad (R \times C)[X, \mathcal{A}^p] / R[X, \mathcal{A}] \cong C[X].$$

PROVA – É análoga à prova da Proposição 3.2

Para um anel R e cada primo p definimos o conjunto $R_p = \{r \in R : pr = 0\}$.

É rotineiro provar que R_p é um ideal de R . Também prova-se sem dificuldade os seguintes resultados

PROPOSIÇÃO 3.5 – Se \mathcal{L} é um K -álgebra de Lie que age sobre o anel R como K -derivações, então R_p é um \mathcal{L} -ideal de R .

PROPOSIÇÃO 3.6 – Se consideramos o anel $(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$, então R_p é um ideal \mathcal{A} -invariante do anel R .

Agora passamos a apresentar alguns resultados das extensões tipo anéis de operadores diferenciais e skew anéis do anel produto tensorial $R \otimes_c B$.

Seja B um anel com unidade extensão do anel C .

Suponhamos que a K -álgebra de Lie \mathcal{L} age sobre R como K -derivações. Se

para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos a função $\bar{d}_\lambda : R \otimes_c B \longrightarrow R \otimes_c B$ por $\bar{d}_\lambda = d_\lambda \otimes 1_B$, então não é difícil provar que \bar{d}_λ é uma K -derivada do anel $R \otimes_c B$. Se $\bar{\Delta} : \mathcal{L} \longrightarrow \text{Der}_K(R \otimes_c B)$ é a função definida por $\bar{\Delta}\left(\sum_\lambda k_\lambda x_\lambda\right) = \sum_\lambda k_\lambda \bar{d}_\lambda$, então $\bar{\Delta}$ é um homomorfismo de K -módulos que permite construir o anel de operadores diferenciais $(R \otimes_c B) * \mathcal{L}$.

Usando as regras da multiplicação nos anéis de operadores diferenciais, podemos provar sem problemas o seguinte

LEMA 3.7 - Se no anel $R * \mathcal{L}$ se têm as relações

$$\bar{x}^{\bar{\nu}} r = r \bar{x}^{\bar{\nu}} + \sum_{\bar{\rho} < \bar{\nu}} r_{\bar{\rho}} \bar{x}^{\bar{\rho}} \quad \text{e} \quad \bar{x}^{\bar{\nu}} \bar{x}^{\bar{\mu}} = \bar{x}^{\bar{\nu} + \bar{\mu}} + \sum_{\bar{\rho} < \bar{\nu} + \bar{\mu}} s_{\bar{\rho}} \bar{x}^{\bar{\rho}},$$

então no anel $(R \otimes_c B) * \mathcal{L}$ temos

$$\bar{x}^{\bar{\nu}} (r \otimes b) = (r \otimes b) \bar{x}^{\bar{\nu}} + \sum_{\bar{\rho} < \bar{\nu}} (r_{\bar{\rho}} \otimes b) \bar{x}^{\bar{\rho}} \quad \text{e} \quad \bar{x}^{\bar{\nu}} \bar{x}^{\bar{\mu}} = \bar{x}^{\bar{\nu} + \bar{\mu}} + \sum_{\bar{\rho} < \bar{\nu} + \bar{\mu}} (s_{\bar{\rho}} \otimes 1) \bar{x}^{\bar{\rho}},$$

para todo $b \in B$.

O seguinte Teorema será de muita utilidade para o cálculo de α -radicais dos anéis $R[X, \mathcal{D}]$ (ver parágrafo 2 do Capítulo II), e é demonstrado aplicando em forma adequada as regras de multiplicação do lema 3.7.

TEOREMA 3.8 - A função $G : (R * \mathcal{L}) \otimes_c B \longrightarrow (R \otimes_c B) * \mathcal{L}$, definida por

$$G\left(\sum_{\ell=1}^u \left(\sum_{\bar{\nu}} r_{\bar{\nu}}^{(\ell)} \bar{x}^{\bar{\nu}}\right) \otimes b_{(\ell)}\right) = \sum_{\ell=1}^u \sum_{\bar{\nu}} (r_{\bar{\nu}}^{(\ell)} \otimes b_{(\ell)}) \bar{x}^{\bar{\nu}},$$

é um isomorfismo de anéis com inverso definido por

$$G^{-1}\left(\sum_{\bar{\nu}} \left(\sum_{\ell=1}^{u_{\bar{\nu}}} (r_{\ell}^{(\bar{\nu})} \otimes b_{\ell}^{(\bar{\nu})})\right) \bar{x}^{\bar{\nu}}\right) = \sum_{\bar{\nu}} \sum_{\ell=1}^{u_{\bar{\nu}}} (r_{\ell}^{(\bar{\nu})} \bar{x}^{\bar{\nu}} \otimes b_{\ell}^{(\bar{\nu})}).$$

Agora consideremos o anel $(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$. Se para cada $\lambda \in \Lambda^*$ definimos a função $\bar{\sigma}_\lambda : R \otimes_c B \longrightarrow R \otimes_c B$ por $\bar{\sigma}_\lambda = \sigma_\lambda \otimes 1_B$, então $\bar{\sigma}_\lambda$ é um automorfismo do

anel $R \otimes_c B$. Se $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{\sigma}_\lambda : \lambda \in \Lambda^*\}$ e $\overline{\mathcal{U}} = \{u_{\iota, \lambda} \otimes 1 : \iota, \lambda \in \Lambda^*\}$, então $(R, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{U}})$ é um anel que satisfaz a condição (K). Com isso podemos definir os skew anéis $(R \otimes_c B) \langle X, \overline{\mathcal{A}} \rangle$ e $(R \otimes_c B) [X, \overline{\mathcal{A}}]$.

LEMA 3.9 - Se no anel $R \langle X, \mathcal{A} \rangle$ (respectivamente $R[X, \mathcal{A}]$), se tem que $X^{\overline{\nu}} X^{\overline{\mu}} = u^{(\overline{\nu}, \overline{\mu})} X^{\overline{\nu} + \overline{\mu}}$, então no anel $(R \otimes_c B) \langle X, \overline{\mathcal{A}} \rangle$ (respectivamente $(R \otimes_c B) [X, \overline{\mathcal{A}}]$) se tem $X^{\overline{\nu}} X^{\overline{\mu}} = (u^{(\overline{\nu}, \overline{\mu})} \otimes 1) X^{\overline{\nu} + \overline{\mu}}$.

O Teorema a seguir cumpre um papel importante na prova dos resultados centrais do parágrafo 3 no próximo Capítulo.

TEOREMA 3.10 - A função $H : R \langle X, \mathcal{A} \rangle \otimes_c B \longrightarrow (R \otimes_c B) \langle X, \overline{\mathcal{A}} \rangle$, definida por

$$H \left(\sum_{\ell=1}^u \left(\sum_{\overline{\nu}} r_{\overline{\nu}}^{(\ell)} X^{\overline{\nu}} \right) \otimes b_\ell \right) = \sum_{\ell=1}^u \sum_{\overline{\nu}} (r_{\overline{\nu}}^{(\ell)} \otimes b_\ell) X^{\overline{\nu}},$$

é um isomorfismo de anéis tal que sua restrição ao anel $R[X, \mathcal{A}] \otimes_c B$ também é um isomorfismo sobre o anel $(R \otimes_c B) [X, \overline{\mathcal{A}}]$.

CAPÍTULO II

RADICAIS DOS ANÉIS $R[X, \mathcal{D}]$, $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ E $R[X, \mathcal{A}]$

Neste Capítulo estudaremos certos radicais dos anéis de operadores diferenciais $R[X, \mathcal{D}]$ e dos skew anéis $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $R[X, \mathcal{A}]$.

1 – Introdução

Iniciamos apresentando alguns resultados referentes a radicais de anéis associativos. O leitor interessado nas provas e outros detalhes pode consultar [7], [22], ou as respectivas referências dadas.

Seja α uma certa propriedade que um anel pode possuir. Os anéis que possuem a propriedade α serão chamadas α -anéis. Todo ideal de um anel R que como anel é um α -anel, será dito um α -ideal de R .

A seguinte definição é devida a Amitsur-Kurosh. Uma propriedade α será dita *propriedade radical* se satisfizer as condições seguintes:

- (a) toda imagem homomorfa de um α -anel é um α -anel;

(b) todo anel R tem um α -ideal $\alpha(R)$, que contém qualquer outro α -ideal de R ;

(c) para cada anel R o anel quociente $R/\alpha(R)$ não tem nenhum α -ideal não nulo.

Seja α uma propriedade radical. O maior α -ideal $\alpha(R)$ do anel R é chamado o α -radical de R . Se, em particular, $\alpha(R) = R$, então R é dito *anel α -radical*. Dizemos que α é *hereditária* se todo ideal de um anel α -radical é também α -radical. As propriedades hereditárias podem ser caracterizadas como segue. Uma propriedade radical α é hereditária se, e somente se, para cada anel R e cada ideal I de R verifica-se a condição $\alpha(I) = \alpha(R) \cap I$.

Os radicais primo (L), de Jacobson (J), de Brown McCoy (\mathcal{G}), de Levitzki (\mathcal{L}) ([17]) e o radical fortemente primo (s) ([18]) são exemplos de radicais hereditários.

Sejam R e S anéis tais que S é uma extensão de R . Dizemos que S é uma *extensão liberal* de R se existirem elementos s_1, s_2, \dots, s_n do anel S tais que $S = \sum_{i=1}^n s_i R$ e $s_i r = r s_i, \forall r \in R, \forall i (1 \leq i \leq n)$ ([20]).

Um exemplo de extensão liberal é o seguinte. Sejam C um anel comutativo e A uma C -álgebra. Se B é uma extensão Galoissiana finita de C então $A \otimes_C B$ é uma extensão liberal de A . De fato, sendo B uma extensão Galoissiana de C , então podemos provar, repetindo o processo seguido na prova do Lema 1.7 em [4], que $A \otimes_C B$ é uma extensão Galoissiana de A . Se $\{b_1, \dots, b_n\}$ são os C -geradores de B então os elementos $s_1 = 1 \otimes b_1, \dots, s_n = 1 \otimes b_n$ do anel $A \otimes_C B$ são tais que $A \otimes_C B = \sum_{i=1}^n s_i A$, e $s_i a = a s_i, \forall a \in A, \forall i (1 \leq i \leq n)$.

Um radical α será chamado *admissível* se $\alpha(R) = \alpha(S) \cap R$ para toda extensão liberal S de R . Sendo que toda extensão liberal é normalizante ([20]) então a definição de radical admissível considerada por Ferrero em [9] é mais forte do que a nossa

definição. Em consequência, os radicais L , \mathcal{L} , J , \mathcal{G} e s são radicais admissíveis ([9], Sec. 1).

Em ([7]), pág. 155) define-se o *radical F* associado à classe de todos os corpos e se prova que o radical F de um anel associativo R vem dado por

$$F(R) = \cap \{M \triangleleft R : R/M \text{ é um corpo} \} .$$

Analogamente definimos o *radical superior γ* associado à classe de todos os corpos finitos. Pode-se provar que

$$\gamma(R) = \cap \{M \triangleleft R : R/M \text{ é um corpo finito} \} .$$

Sendo que as classes que definem os radicais F e γ são especiais, então F e γ são hereditários ([7], Cap. 7).

Sejam α e β duas propriedades radicais. Dizemos que $\alpha \leq \beta$ se $\alpha(R) \subseteq \beta(R)$ para todo anel associativo R .

É claro que $F \leq \gamma$. Também em [7] prova-se que

$$L \leq \mathcal{L} \leq J \leq \mathcal{G} \leq F$$

e $L \leq s \leq N$.

A fim de apresentar o primeiro resultado importante desta tese fazemos previamente as seguintes considerações.

Sejam $n \geq 1$ um número inteiro e p um inteiro primo. Consideremos o epimorfismo $\pi_0 : \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n]$ definido por

$$\pi_0 \left(\sum_{\bar{\nu}} r_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}} \right) = \sum_{\bar{\nu}} (r_{\bar{\nu}} + p\mathbb{Z}) X^{\bar{\nu}} ,$$

onde $\bar{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$. Sendo que $\mathbb{Z}_p[X_1]$ é um subanel de $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n]$, então para um polinômio $g_1(X_1) \in \mathbb{Z}_p[X_1]$ irreduzível em $\mathbb{Z}_p[X_1]$ existe um polinômio $f_1(X_1) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ tal que $\pi_0(f_1(X_1)) = g_1(X_1)$.

Agora definimos o corpo finito $G_1 = \mathbb{Z}_p[X_1] / g(X_1) \mathbb{Z}_p[X_1]$. Consideremos o epimorfismo $\pi_1 : \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow G_1[X_2, \dots, X_n]$, definido por

$$\begin{aligned} \pi_1 \left(\sum_{(\nu_2, \dots, \nu_n)} h_{(\nu_2, \dots, \nu_n)}(X_1) X_2^{\nu_2}, \dots, X_n^{\nu_n} \right) \\ = \sum_{(\nu_2, \dots, \nu_n)} (h_{(\nu_2, \dots, \nu_n)}(X_1) + g_1(X_1) \mathbb{Z}_p[X_1]) X_2^{\nu_2}, \dots, X_n^{\nu_n}, \end{aligned}$$

(onde $h_{(\nu_2, \dots, \nu_n)}(X_1) \in \mathbb{Z}_p[X_1]$), e consideremos um polinômio $g_2(X_2) \in G_1[X_2]$ irredutível em $G_1[X_2]$. Porque $G_1[X_2] \subseteq G_1[X_2, \dots, X_n]$, existe um polinômio $f_2(X_2) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ tal que $\pi_1 \circ \pi_0(f_2(X_2)) = g_2(X_2)$.

Continuando dessa forma definimos, para cada $j \in \{2, 3, \dots, n-1\}$, o corpo finito $G_j = G_{j-1}[X_j] / g_j(X_j) G_{j-1}[X_j]$. Então consideramos o epimorfismo $\pi_j : G_{j-1}[X_j, \dots, X_n] \longrightarrow G_j[X_{j+1}, \dots, X_n]$, um polinômio $g_{j+1}(X_{j+1}) \in G_j[X_{j+1}]$ irredutível em $G_j[X_{j+1}]$ e um polinômio $f_{j+1}(X_{j+1}) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ tal que $\pi_j \circ \dots \circ \pi_1 \circ \pi_0(f_{j+1}(X_{j+1})) = g_{j+1}(X_{j+1})$.

Finalmente definimos o corpo finito $G_n = G_{n-1}[X_n] / g_n(X_n) G_{n-1}[X_n]$.

Se nessas condições consideramos o ideal do anel $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$,

$$M(p, f_1, \dots, f_n) = p \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] + \sum_{i=1}^n f_i(X_i) \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n],$$

então temos os seguintes resultados.

LEMA 1.1 - Para cada primo p e polinômios f_1, \dots, f_n de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, definidos como acima, se tem que $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] / M(p, f_1, \dots, f_n)$ é um corpo finito.

PROVA - Isso decorre do fato seguinte:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] / M(p, f_1, \dots, f_n) \\
&= \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] / \left(p\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] + \sum_{i=1}^n f_i(X_i) \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \right) \\
&= \frac{\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] / p \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]}{\left(p \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] + \sum_{i=1}^n f_i(X_i) \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \right) / p \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]} \\
&\cong \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n] / \left(\sum_{i=1}^n \pi_0(f_i(X_i)) \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n] \right) \\
&= \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n] / \left(g_1(X_1) \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n] + \sum_{i=2}^n \pi_0(f_i(X_i)) \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n] \right) \\
&= \frac{\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n] / g_1(X_1) \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n]}{\left(g_1(X_1) \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n] + \sum_{i=2}^n \pi_0(f_i(X_i)) \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n] \right) / g_1(X_1) \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n]} \\
&\cong G_1[X_1, \dots, X_n] / \left(\sum_{i=2}^n \pi_1 \circ \pi_0(f_i(X_i)) G_1[X_1, \dots, X_n] \right) \\
&= G_1[X_1, \dots, X_n] / \left(g_2(X_2) G_1[X_2, \dots, X_n] + \sum_{i=3}^n \pi_1 \circ \pi_0(f_i(X_i)) G_1[X_2, \dots, X_n] \right) \\
&= \frac{G[X_2, \dots, X_n] / g_2(X_2) G_1[X_2, \dots, X_n]}{\left(g_2(X_2) G_1[X_2, \dots, X_n] + \sum_{i=3}^n \pi_1 \circ \pi_0(f_i(X_i)) G_1[X_2, \dots, X_n] \right) / g_2(X_2) G_1[X_2, \dots, X_n]} \\
&\cong G_2[X_3, \dots, X_n] / \left(\sum_{i=3}^n \pi_2 \circ \pi_1 \circ \pi_0(f_i(X_i)) G_2[X_3, \dots, X_n] \right) \\
&\quad \vdots \\
&= G_{n-1}[X_n] / \pi_{n-1} \circ \dots \circ \pi_1 \circ \pi_0(f_n(X_n)) G_{n-1}[X_n] \\
&= G_{n-1}[X_n] / g_n(X_n) G_{n-1}[X_n] \\
&= G_n,
\end{aligned}$$

que é um corpo finito.

LEMA 1.2 - A intersecção de todos os ideais $M(p, f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, onde p é um primo arbitrário e f_1, \dots, f_n são quaisquer polinômios do anel $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$, definidos como acima, é nula.

PROVA - Denotemos por I o ideal intersecção de todos os ideais $M(p, f_1, \dots, f_n)$. Consideremos um dos ideais $M(p, f_1, \dots, f_n)$ e o epimorfismo canônico $\pi_n: G_{n-1}[X_n] \rightarrow G_n$.

Se $H = \sum_{\ell_n=0}^{m_n} h^{(\ell_n)}(X_1, \dots, X_{n-1}) X_n^{\ell_n}$ é um elemento de I (com $h^{(\ell_n)}(X_1, \dots, X_{n-1}) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{n-1}]$), então $\pi_n \circ \dots \circ \pi_0(H) = 0$, i.e., $\pi_{n-1} \circ \dots \circ \pi_0(H) \in \mathfrak{g}_n(X_n) G_{n-1}[X_n]$.

Agora, sendo que os $\mathfrak{g}_n(X_n) \in G_{n-1}[X_n]$ são irredutíveis em $G_{n-1}[X_n]$ e arbitrários, então em $G_{n-1}[X_n]$ se tem

$$0 = \pi_{n-1} \circ \dots \circ \pi_0(H) = \sum_{\ell_n=0}^{m_n} \pi_{n-1} \circ \dots \circ \pi_0(h^{(\ell_n)}(X_1, \dots, X_{n-1})) X_n^{\ell_n}.$$

Logo $\pi_{n-1} \circ \dots \circ \pi_0(h^{(\ell_n)}(X_1, \dots, X_{n-1})) = 0$, $\forall \ell_n$ ($0 \leq \ell_n \leq m_n$), i.e., $\pi_{n-2} \circ \dots \circ \pi_0(h^{(\ell_n)}(X_1, \dots, X_n)) \in \mathfrak{g}_{n-1}(X_{n-1}) G_{n-2}[X_{n-1}]$, $\forall \ell_n$ ($0 \leq \ell_n \leq m_n$). Pela arbitrariedade dos $\mathfrak{g}_{n-1}(X_{n-1})$, concluímos que $\pi_{n-2} \circ \dots \circ \pi_0(h^{(\ell_n)}(X_1, \dots, X_{n-1})) = 0$, $\forall \ell_n$ ($0 \leq \ell_n \leq m_n$).

Se para cada $\ell_n \in \{0, 1, \dots, m_n\}$ temos

$$h^{(\ell_n)}(X_1, \dots, X_{n-1}) = \sum_{\ell_{n-1}=0}^{m_{n-1}} h^{(\ell_{n-1}, \ell_n)}(X_1, \dots, X_{n-2}) X_{n-1}^{\ell_{n-1}},$$

onde $h^{(\ell_{n-1}, \ell_n)}(X_1, \dots, X_{n-2}) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{n-2}]$, então podemos provar como acima que $\pi_{n-3} \circ \dots \circ \pi_0(h^{(\ell_{n-1}, \ell_n)}(X_1, \dots, X_{n-2})) = 0$ para todo ℓ_{n-1} e ℓ_n com $0 \leq \ell_{n-1} \leq m_{n-1}$ e $0 \leq \ell_n \leq m_n$.

Continuando dessa forma podemos provar o seguinte. Se

$$h^{(\ell_i, \dots, \ell_n)}(X_1, \dots, X_{j-1}) = \sum_{\ell_{j-1}=0}^{m_{j-1}} h^{(\ell_{j-1}, \dots, \ell_n)}(X_1, \dots, X_{j-2}) X_{j-1}^{\ell_{j-1}},$$

para cada $j \in \{3, \dots, n\}$ e cada $\ell_j \in \{0, 1, \dots, m_j\}$ (onde se tem que $h^{(\ell_{j-1}, \dots, \ell_n)}(X_1, \dots, X_{j-2}) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_{j-2}]$), então

$$\pi_{j-2} \circ \dots \circ \pi_0(h^{(\ell_{j-1}, \dots, \ell_n)}(X_1, \dots, X_{j-2})) = 0.$$

Assim $\pi_1 \circ \pi_0(h^{(\ell_2, \dots, \ell_n)}(X_1)) = 0$, $\forall \ell_j$, i.e., $\pi_0(h^{(\ell_2, \dots, \ell_n)}(X_1)) \in \mathfrak{g}_1(X_1) \mathbb{Z}_p[X_1]$, $\forall \ell_j$. Sendo $\mathfrak{g}_1(X_1)$ arbitrário, temos que necessariamente $\pi_0(h^{(\ell_2, \dots, \ell_n)}(X_1)) = 0$, $\forall \ell_j$.

Se $h^{(\ell_2, \dots, \ell_n)}(X_1) = \sum_{\ell_1=0}^{m_1} h^{(\ell_1, \dots, \ell_n)} X_1^{\ell_1}$ (com $h^{(\ell_1, \dots, \ell_n)} \in \mathbb{Z}$), então $\pi_0(h^{(\ell_1, \dots, \ell_n)}) = 0$, $\forall \ell_j$, i.e., $h^{(\ell_1, \dots, \ell_n)} \in p\mathbb{Z}$, $\forall \ell_j$. Sendo os primos p arbitrários, temos que $h^{(\ell_1, \dots, \ell_n)} = 0$, $\forall \ell_j$.

Como conseqüência disso temos que $h^{(\ell_j, \dots, \ell_n)}(X_1, \dots, X_{j-1}) = 0$, $\forall j$ com $2 \leq j \leq n$ e $\forall \ell_j$ com $0 \leq \ell_j \leq m_j$. Assim $h^{(\ell_n)}(X_1, \dots, X_{n-1}) = 0$, $\forall \ell_n$ com $0 \leq \ell_n \leq m_n$, i.e., $H = 0$.

Agora estamos em condições de apresentar o primeiro resultado importante.

TEOREMA 1.3 - Se $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ são indeterminadas, então $\gamma(\mathbb{Z}[X]) = 0$.

PROVA - Seja f um elemento de $\gamma(\mathbb{Z}[X])$ e sejam $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ elementos de Λ tais que $f = f(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n})$.

No subanel $\mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}]$ de $\mathbb{Z}[X]$ consideremos um dos ideais $M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n}))$, onde p é um primo e $f_i(X_{\lambda_i}) \in \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}]$ é tal que $g_i(X_{\lambda_i}) = \pi_{i-1} \circ \dots \circ \pi_0(f_i(X_{\lambda_i})) \in G_{i-1}[X_{\lambda_i}]$ é irredutível em $G_{i-1}[X_{\lambda_i}]$, $\forall i$ ($1 \leq i \leq n$).

Consideremos o ideal de $\mathbb{Z}[X]$

$$\overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n})) = p\mathbb{Z}[X] + \sum_{i=1}^n f_i(X_{\lambda_i}) \mathbb{Z}[X] + \sum_{\substack{i \neq \lambda_j \\ i=1, \dots, n}} X_i \mathbb{Z}[X].$$

Afirmamos que

$$\overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n})) \cap \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}] = M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n})) .$$

De fato, se $g \in \overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n})) \cap \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}]$, então existem elementos $g_0, g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_u$ de $\mathbb{Z}[X]$ tais que

$$g = pg_0 + \sum_{i=1}^n f_i(X_{\lambda_i}) g_i + \sum_{\ell=1}^u X_{\lambda_\ell} h_\ell ,$$

onde $\lambda_\ell \neq \lambda_i, \forall \ell, i$. Fica claro que podemos escrever

$$g = pg'_0 + \sum_{i=1}^n f_i(X_{\lambda_i}) g'_i + \sum_{\ell=1}^v X_{\lambda_\ell} h'_\ell ,$$

sendo que agora $g'_0, g'_1, \dots, g'_n \in \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}]$.

Uma vez que $g \in \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}]$, temos necessariamente $\sum_{\ell=1}^v X_{\lambda_\ell} h'_\ell = 0$.

Assim $g \in M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n}))$, e acabamos de provar que

$$\overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n})) \cap \mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}] \subseteq M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n})) .$$

Sendo a outra inclusão óbvia, temos a igualdade procurada.

Usando o fato de que $\mathbb{Z}[X]/\overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n}))$ é isomorfo com $\mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}]/M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n}))$ e o Lema 1.1, obtemos que $f \in \overline{M}(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n}))$, e, como conseqüência da afirmação feita antes, obtemos que $f \in M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n}))$.

Mas o ideal $M(p, f_1(X_{\lambda_1}), \dots, f_n(X_{\lambda_n}))$ de $\mathbb{Z}[X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}]$, inicialmente considerado foi arbitrário. Então podemos concluir do Lema 1.2 que $f = 0$.

Seja p qualquer número primo fixo. Para um polinômio $f_1(X_1) \in \mathbb{Z}_p[X_1]$ irreduzível em $\mathbb{Z}_p[X_1]$, consideramos o corpo finito $G_1 = \mathbb{Z}_p[X_1]/f_1(X_1)\mathbb{Z}_p[X_1]$.

Para um polinômio $g_2(X_2) \in G_1[X_2]$ irredutível em $G_1[X_2]$ consideramos um polinômio $f_2(X_2) \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n]$ tal que $\pi_1(f_2(X_2)) = g_2(X_2)$.

Se continuarmos construindo os corpos finitos G_j ($2 \leq j \leq n$) e considerarmos os respectivos polinômios $f_j(X_j) \in \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n]$, definidos como antes, podemos provar sem dificuldade que o ideal de $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n]$,

$$N(f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)) = \sum_{i=1}^n f_i(X_i) \mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n],$$

define o corpo finito $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n] / N(f_1(X_1), \dots, f_n(X_n))$, e que a intersecção de todos esses ideais $N(f_1(X_1), \dots, f_n(X_n))$ de $\mathbb{Z}_p[X_1, \dots, X_n]$ é nula.

Com uma demonstração análoga à do Teorema 1.3, podemos provar o seguinte resultado importante.

TEOREMA 1.4 – Se $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ são indeterminadas, então $\gamma(\mathbb{Z}_p[X]) = 0$.

2 – O α -radical de $R[X, \mathcal{D}]$ é um Ideal Estendido do Anel R .

Em [9] Ferrero provou que, se α é um radical que satisfaz certas condições, o α -radical do skew anel de polinômios tipo derivação $R[X, \mathcal{D}]$ é um ideal estendido $I[X, \mathcal{D}]$, onde $I = \alpha(R[X, \mathcal{D}]) \cap R$. Um resultado similar é provado por Bergen-Montgomery e Passmar ([3]) para anéis de operadores diferenciais, mas somente quando α é o radical primo. Nesse mesmo artigo eles descrevem o radical de Jacobson para alguns anéis de operadores diferenciais particulares.

Neste parágrafo generalizamos tais resultados para o skew anel de polinômios tipo derivação $R[X, \mathcal{D}]$ e, em particular, para o anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$, quando \mathcal{L} possui a propriedade (s).

Seja \mathcal{L} uma K -álgebra de Lie que possui a propriedade (s), e consideremos o anel de operadores diferenciais $R[X, \mathcal{D}]$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ consideremos a família

$$\mathcal{F}(T_\lambda) = \{I \triangleleft T_\lambda : D_\iota(I) \subseteq I \forall \iota \in \Lambda^* \text{ tal que } \iota \geq \lambda\}.$$

Dado um radical α , definimos, para cada $\lambda \in \Lambda$, a função $\bar{\alpha}_\lambda : \mathcal{F}(T_\lambda) \rightarrow \mathcal{F}(T_\lambda)$ por $\bar{\alpha}_\lambda(I) = \alpha(I[X, \mathcal{D}]) \cap I$. A função $\bar{\alpha}_\lambda$ não é um radical, pois não está definida para anéis associativos arbitrários. Mesmo assim a função $\bar{\alpha}_\lambda$ tem suficientes propriedades dos radicais de forma tal que podemos proceder como em [9], sec. 3.

Seja $\lambda \in \Lambda$. Se α é um radical hereditário, é claro que $\bar{\alpha}_\lambda(I) = \bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda) \cap I$, $\forall I \in \mathcal{F}(T_\lambda)$. Agora, se p é um primo, então $(T_\lambda)_p \in \mathcal{F}(T_\lambda)$ (Proposição I. 3.5), logo $(T_\lambda)_p [X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}] \in \mathcal{F}(T_{\lambda+1})$. Conjugando esses fatos, podemos provar o seguinte.

PROPOSIÇÃO 2.1 - Sejam $\lambda \in \Lambda$ e p um número primo. Se α é um radical hereditário, $\bar{\alpha}_{\lambda+1}((T_\lambda)_p [X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]) = \bar{\alpha}_{\lambda+1}(T_{\lambda+1}) \cap (T_\lambda)_p [X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]$.

Seja p um número primo. Temos que $(R \oplus \mathbb{Z}_p)[X, \mathcal{D}^*] / R[X, \mathcal{D}] \cong \mathbb{Z}_p[X]$ (Proposição I.3.2) e $\gamma(\mathbb{Z}_p[X]) = 0$ (Teorema 1.4). Assim fica claro que $\alpha((R \oplus \mathbb{Z}_p)[X, \mathcal{D}^*]) = \alpha(R[X, \mathcal{D}])$ para todo radical α tal que $\alpha \leq \gamma$. Com isso prova-se sem dificuldade a

PROPOSIÇÃO 2.2 - Sejam $\lambda \in \Lambda$ e p um número primo. Se α é um radical tal que $\alpha \leq \gamma$, então $\bar{\alpha}_{\lambda+1}((T_\lambda \oplus \mathbb{Z}_p)[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}^*]) = \bar{\alpha}_{\lambda+1}(T_{\lambda+1})$.

Para um número primo p e um $m \geq 1$, denotemos com F_q o corpo com $q = p^m$ elementos. No parágrafo introdutório deste Capítulo vimos que $R[X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ é uma extensão Galoissiana e liberal do anel $R[X, \mathcal{D}]$ (pois F_q é uma extensão Galoissiana finita de \mathbb{Z}_p). Então, usando o Lema 1.2 de [9], podemos concluir que $\alpha(R[X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) = \alpha(R[X, \mathcal{D}]) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$, para todo radical α que, seja admissível.

Sejam C um anel comutativo, e A e B duas subálgebras de uma C -álgebra D . Se M é um C -módulo livre (à esquerda), então $(A \cap B) \otimes_C M = (A \otimes_C M) \cap (B \otimes_C M)$.

Suponhamos que R é uma \mathbb{Z}_p -álgebra, seja $\lambda \in \Lambda$ e seja G o isomorfismo de $T_\lambda[X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ sobre $(T_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X, \mathcal{D}]$, considerado no Teorema I. 3.8.

Usando os resultados prévios, estamos em condições de provar o seguinte.

PROPOSIÇÃO 2.3 – Se R é uma \mathbb{Z}_p -álgebra, $\lambda \in \Lambda$ e α é um radical admissível, então

$$\bar{\alpha}_{\lambda+1}(T_{\lambda+1}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q \stackrel{G}{\cong} \bar{\alpha}_{\lambda+1}((T_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]) .$$

PROVA – Temos que

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{\lambda+1}(T_{\lambda+1}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q &= (\alpha(T_{\lambda+1}[X, \mathcal{D}]) \cap T_{\lambda+1}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q \\ &= (\alpha(T_{\lambda+1}[X, \mathcal{D}]) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \cap (T_{\lambda+1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \\ &= \alpha(T_{\lambda+1}[X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \cap (T_{\lambda+1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{\lambda+1}(T_{\lambda+1}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q &= \alpha(T_\lambda[X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \cap (T_\lambda[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \\ &\stackrel{G}{\cong} \alpha((T_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X, \mathcal{D}]) \cap ((T_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]) \\ &= \bar{\alpha}_{\lambda+1}((T_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_{\lambda+1}, D_{\lambda+1}]) . \end{aligned}$$

Agora podemos provar o seguinte resultado chave.

LEMA 2.4 – Seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq 1$, e seja α um radical hereditário, admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\bar{\alpha}_i(T_i) = 0$, $\forall i < \lambda$, então $\bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda) = 0$.

PROVA – Por redução ao absurdo, suponhamos que $\bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda) \neq 0$. Logo existe um elemento não nulo f em $\bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda)$.

Caso 1: λ é um ordinal limite. Nesse caso, $T_\lambda = \bigcup T_i$. Portanto existe um elemento $i < \lambda$ tal que $f \in T_i$. Assim $0 \neq f \in \bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda) \cap T_i = \bar{\alpha}_i(T_i)$, o que é uma contradição.

Caso 2: λ é um ordinal sucessor. Nesse caso, seja $\lambda = \rho + 1$ e $f = \sum_{i=0}^m t_i X_{\rho+1}^i$, com $t_i \in T_\rho$ e $t_m \neq 0$. Já que $\bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda) \neq 0$, será $m \geq 1$, e podemos escolher f com $m \geq 1$ minimal.

Caso 2.1: $nt_m \neq 0, \forall 0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Para esse caso consideramos o automorfismo ζ de $R[X, \mathcal{D}]$, definido pelas relações $\zeta(r) = r, \forall r \in R, \zeta(X_\lambda) = X_\lambda + 1$, e $\zeta(X_i) = X_i, \forall i \neq \lambda$.

Sendo que ζ restrito a T_λ é um automorfismo de T_λ , o elemento $g = \zeta(f)$ pertence a $\zeta(\bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda)) = \bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda)$. Logo $h = f - g \in \bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda)$. Mas h tem grau menor do que m (em relação à variável $X_{\rho+1}$). Então $h = 0$.

Por isso

$$\sum_{i=0}^m t_i X_{\rho+1}^i = f = g = \sum_{i=0}^m t_i (X_{\rho+1} + 1)^i = \sum_{i=0}^m t_i \sum_{\ell=0}^i \binom{i}{\ell} X_{\rho+1}^\ell,$$

e temos que $t_{m-1} = t_{m-1} + \binom{m}{m-1} t_m$, i.e., $t_m = 0$, uma contradição

Caso 2.2: existe $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ tal que $nt_m = 0$. Se $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ é tal que $nt_m = 0$, então $nf = 0$, e podemos considerar um número primo p e um elemento não nulo $f = \sum_{i=0}^m t_i X_{\rho+1}^i \in \bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda)$ tais que $m \geq 1$ é minimal e $pf = 0$. Daí $f \in (T_\rho)_p [X_{\rho+1}, D_{\rho+1}]$ e, em vista da Proposição 2.1, $f \in \bar{\alpha}_{\rho+1}((T_\rho)_p [X_{\rho+1}, D_{\rho+1}])$. Em conseqüência disso, podemos supor que R (e portanto T_ρ) seja uma \mathbb{Z}_p -álgebra.

Pela Proposição 2.2 $f \in \bar{\alpha}_{\rho+1}((T_\rho \oplus \mathbb{Z}_p) [X_{\rho+1}, D_{\rho+1}])$, e podemos supor que R contém o corpo \mathbb{Z}_p . Seja G o isomorfismo de $T_\rho [X, \mathcal{D}] \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ sobre $(T_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) [X, \mathcal{D}]$. Se $g = G(f \otimes 1)$, então $g \in \bar{\alpha}_{\rho+1}((T_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) [X_{\rho+1}, D_{\rho+1}])$

(Proposição 2.3) e $g = \sum_{i=0}^m (t_i \otimes 1) X_{\rho+1}^i$, com $m \geq 1$ minimal.

Se definimos $q = p^m$, então $q > m$ e, portanto, podemos escolher m elementos não nulos u_1, \dots, u_m de F_q . Cada elemento u_s determina um automorfismo ζ_s de $R[X, \mathcal{D}]$ que satisfaz as condições $\zeta_s(r) = r \quad \forall r \in R$, $\zeta_s(X_s) = X_s + u_s$, e $\zeta_\iota(X_\lambda) = X_\lambda \quad \forall \iota \neq \lambda$.

Conforme foi feito no Caso 2.1 podemos provar que necessariamente se tem $\zeta_s(g) = g, \quad \forall s$ com $1 \leq s \leq m$, isto é,

$$\sum_{i=0}^m (t_i \otimes 1) X_{\rho+1}^i = \sum_{i=0}^m \sum_{\ell=0}^i \binom{i}{\ell} (t_i \otimes 1) u_s^\ell X_{\rho+1}^{i-\ell},$$

para todo $s \in \{1, \dots, m\}$. Daí $t_0 \otimes 1 = \sum_{i=0}^m (t_i \otimes 1) u_s^i, \quad \forall s$ com $1 \leq s \leq m$, e, portanto,

$$\begin{aligned} (t_1 \otimes 1) u_1 + (t_2 \otimes 1) u_1^2 + \dots + (t_m \otimes 1) u_1^m &= 0, \\ (t_1 \otimes 1) u_2 + (t_2 \otimes 1) u_2^2 + \dots + (t_m \otimes 1) u_2^m &= 0, \\ &\vdots \\ (t_1 \otimes 1) u_m + (t_2 \otimes 1) u_m^2 + \dots + (t_m \otimes 1) u_m^m &= 0. \end{aligned}$$

Dado que $\det [u_i^j] = u_1 u_2 \dots u_m \Delta \neq 0$ (onde Δ denota o determinante de Vandermonde $\prod_{i < j} (u_i - u_j)$), tem-se $t_i \otimes 1 = 0, \quad \forall i$ com $1 \leq i \leq m$. Como consequência, $g = t_0 \otimes 1$ e temos $f = t_0$. Assim $m = 0$ e chegamos a uma contradição. Isto completa a prova do Lema.

LEMA 2.5 - Seja α um radical hereditário, admissível e tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\alpha(R[X, \mathcal{D}]) \cap R = 0, \quad \alpha(R[X, \mathcal{D}]) = 0$.

PROVA - Vejamos primeiro, usando indução transfinita sobre λ , que $\bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda) = 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda$.

A condição dada na hipótese $\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R} = 0$ significa $\bar{\alpha}_0(T_0) = 0$.

Seja $\lambda \in \Lambda$ com $\lambda \geq 1$, e suponhamos $\bar{\alpha}_i(T_i) = 0 \quad \forall i < \lambda$. Pelo Lema 2.4 temos $\bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda) = 0$. Assim $\bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda$.

Agora seja $f \in \alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}])$. Se $\lambda \in \Lambda$ é tal que $f \in T_\lambda$, temos que f pertence a $\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap T_\lambda = \bar{\alpha}_\lambda(T_\lambda) = 0$ e o Lema está demonstrado.

Como conseqüência desse Lema conseguimos o seguinte resultado, o mais importante deste parágrafo.

TEOREMA 2.6 – Se α é um radical hereditário e admissível tal que $\alpha \leq \gamma$, então $\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) = (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) [X, \mathcal{D}]$.

PROVA – Sendo

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\left(\mathbb{R} / (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) \right) [X, \mathcal{D}] \right) \cap \left(\mathbb{R} / (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) \right) \\ & \cong \alpha \left(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}] / (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) [X, \mathcal{D}] \right) \cap \left(\mathbb{R} / (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) \right) \\ & = \left(\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) / (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) [X, \mathcal{D}] \right) \cap \left(\mathbb{R} / (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) \right), \end{aligned}$$

segue-se da Proposição I.1.9. que

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\left(\mathbb{R} / (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) \right) [X, \mathcal{D}] \right) \cap \left(\mathbb{R} / (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) \right) \\ & \cong (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) / (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) = 0, \end{aligned}$$

Então, com apoio no Lema 2.5, temos $\alpha \left(\left(\mathbb{R} / (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) \right) [X, \mathcal{D}] \right) = 0$, i.e., $\alpha \left(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}] / (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) [X, \mathcal{D}] \right) = 0$. Disso, e por ser α um radical, obtemos $\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \subseteq (\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) [X, \mathcal{D}]$. Também, sendo $(\alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}]) \cap \mathbb{R}) [X, \mathcal{D}] \subseteq \alpha(\mathbb{R}[X, \mathcal{D}])$, é obvio que temos a igualdade desejada.

COROLÁRIO 2.7 – Seja α um radical hereditário e admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Se \mathcal{L} é um K-álgebra de Lie que possui a propriedade (s), então

$$\alpha(R * \mathcal{L}) = (\alpha(R * \mathcal{L}) \cap R) * \mathcal{L}.$$

Finalmente observamos o seguinte. Sendo os radicais $L, J, \mathcal{G}, \mathcal{L}$, e s hereditários, admissíveis e menores ou iguais a γ , o Corolário 2.7 é aplicável a todos eles. Assim fica claro que o Corolário 2.7 estende, de certa forma, os resultados de Bergen-Montgomery e Passman ([3], Proposição 2.6 e Corolários 3.4 e 3.5) e o Teorema 2.6 estende o resultado de Ferrero ([9], Teorema 3.2).

3 – O α -radical de $R(X, \mathcal{A})$ é um Ideal Estendido do Anel R .

O objetivo principal deste parágrafo é mostrar que o α -radical do skew anel $R(X, \mathcal{A})$ é o ideal estendido $I(X, \mathcal{A})$, onde $I = \alpha(R(X, \mathcal{A})) \cap R$. Sendo muitos dos resultados prévios similares àqueles do parágrafo 2, não entraremos em detalhes em algumas das demonstrações.

Seja $(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ um anel com automorfismos e consideremos o anel $R(X, \mathcal{A})$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$ consideremos a família $\mathfrak{S}(V_\lambda) = \{I \triangleleft V_\lambda : I \text{ é } \mathcal{A}\text{-invariante}\}$.

Dado um radical α , definimos, para cada $\lambda \in \Lambda$, a função $\tilde{\alpha}_\lambda : \mathfrak{S}(V_\lambda) \rightarrow \mathfrak{S}(V_\lambda)$ por $\tilde{\alpha}_\lambda(I) = \alpha(I(X, \mathcal{A})) \cap I, \forall I \in \mathfrak{S}(V_\lambda)$.

O fato de que $A \otimes_C B$ é uma extensão liberal da C-álgebra A , sempre que B seja uma extensão Galoissiana finita do anel comutativo C , será muito usado no que segue.

Suponhamos que R é uma C-álgebra. Neste parágrafo, H denota o isomorfismo de $V_\lambda(X, \mathcal{A}) \otimes_C B$ sobre $(V_\lambda \otimes_C B)(X, \mathcal{A})$, considerado no Teorema I.3.10.

LEMA 3.1 – Seja B uma extensão Galoissiana finita do anel comutativo C , e supo-

nhamos que R seja uma C -álgebra, Se B é livre como C -módulo e α é um radical admissível, então

$$\tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) \otimes_c B \stackrel{H}{\cong} \tilde{\alpha}_{\lambda+1}((V_{\lambda+1} \otimes_c B) \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle), \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda.$$

PROVA - Para qualquer $\lambda \in \Lambda$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) \otimes_c B &= (\alpha(V_{\lambda+1} \langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap V_{\lambda+1}) \otimes_c B \\ &= (\alpha(V_{\lambda+1} \langle X, \mathcal{A} \rangle) \otimes_c B) \cap (V_{\lambda+1} \otimes_c B) \\ &= (\alpha(V_{\lambda} \langle X, \mathcal{A} \rangle) \otimes_c B) \cap (V_{\lambda} \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle \otimes_c B) \end{aligned}$$

Mas, usando o Lema 1.2 de [9], prova-se facilmente que

$$\alpha(V_{\lambda} \langle X, \mathcal{A} \rangle) \otimes_c B = \alpha(V_{\lambda} \langle X, \mathcal{A} \rangle \otimes_c B),$$

pois $V_{\lambda} \langle X, \mathcal{A} \rangle \otimes_c B$ é uma extensão liberal de $V_{\lambda} \langle X, \mathcal{A} \rangle$ e α é admissível.

Em conseqüência desses fatos temos,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) \otimes_c B &= \alpha(V_{\lambda} \langle X, \mathcal{A} \rangle) \otimes_c B \cap (V_{\lambda} \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle \otimes_c B) \\ &\stackrel{H}{\cong} \alpha((V_{\lambda} \otimes_c B) \langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap ((V_{\lambda} \otimes_c B) \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle) \\ &= \tilde{\alpha}_{\lambda+1}((V_{\lambda} \otimes_c B) \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle), \end{aligned}$$

o que prova o lema.

Seja p um número primo. A fim de provar que $\gamma(\mathbb{Z}_p \langle X \rangle) = 0$, suponhamos $R = \mathbb{Z}_p$, $\sigma_{\lambda} = \text{id}$, $\forall \lambda \in \Lambda^*$, e $\alpha = \gamma$, o radical superior.

Primeiramente observamos o seguinte. Mesmo que γ não seja um radical admissível, podemos provar, semelhantemente ao Lema 3.1, o seguinte resultado: Se F_q denota o corpo com $q = p^m$ elementos, então

$$\tilde{\gamma}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q \cong \tilde{\gamma}_{\lambda+1}((V_{\lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \langle X_{\lambda+1} \rangle).$$

Este resultado particular é usado no seguinte.

LEMA 3.2 - Seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq 1$. Se $\tilde{\gamma}_\iota(V_\iota) = 0$, para todo $\iota \in \Lambda$ tal que $\iota < \lambda$, então $\tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda) = 0$.

PROVA - Seja $f \in \tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda)$.

Caso 1: λ é um ordinal limite. Nesse caso $V_\lambda = \bigcup_{\iota < \lambda} V_\iota$ e existe um $\iota < \lambda$ tal que $f \in V_\iota$. Por isso $f \in \tilde{\gamma}_\iota(V_\iota)$ e temos $f = 0$ pela hipótese.

Caso 2: $\lambda = \rho + 1$ é um ordinal sucessor. Nesse caso $V_\lambda = V_\rho \langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1} \rangle$ e podemos supor $f = \sum_{i=0}^m v_i X_{\rho+1}^i$ com $v_i \in V_\rho$ (pois $\tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda)$ é um ideal de V_λ).

Se supomos $f \neq 0$, então, usando a hipótese, podemos considerar $v_m \neq 0$ e $m \geq 1$ minimal com relação à propriedade de que $f \in \tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda)$.

Se F_q é o corpo com $q = p^m$ elementos e H é o isomorfismo de $V_\rho \langle X \rangle \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ sobre $(V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \langle X \rangle$, então $g = H(f \otimes 1)$ pertence à $\tilde{\gamma}_{\rho+1}((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \langle X_{\rho+1} \rangle)$ e $g = \sum_{i=0}^m (v_i \otimes 1) X_{\rho+1}^i$ com $v_m \otimes 1 \neq 0$ e $m \geq 1$ minimal.

Sejam $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m$ $m+1$ unidades diferentes em F_q . Se, para cada $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ consideramos o automorfismo ζ_j de $(V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \langle X_{\rho+1} \rangle$ definido por $\zeta_j(a) = a$, $\forall a \in V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$, e $\zeta_j(X_{\rho+1}) = \eta_j X_{\rho+1}$, então $\zeta_j(\tilde{\gamma}_{\rho+1}((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \langle X_{\rho+1} \rangle)) = \tilde{\gamma}_{\rho+1}((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \langle X_{\rho+1} \rangle)$.

Assim $h_j = \zeta_j(g)$ pertence a $\tilde{\gamma}_{\rho+1}((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \langle X_{\rho+1} \rangle)$ com $h_j = \sum_{i=0}^m \eta_j^i (v_i \otimes 1) X_{\rho+1}^i$, $\forall j$ com $0 \leq j \leq m$. Desse modo, procedendo como na prova da regra de Cramer, concluímos que $\Delta(v_m \otimes 1) X_{\rho+1}^m$ esta no conjunto $\tilde{\gamma}_{\rho+1}((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \langle X_{\rho+1} \rangle)$ (onde $\Delta = \prod_{i < j} (\eta_i - \eta_j)$ é uma unidade de F_q). Daí temos que $v_m \otimes 1 \in \tilde{\gamma}_{\rho+1}((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \langle X_{\rho+1} \rangle)$ e $0 \neq v_m \in \tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda)$, isto é, $\tilde{\gamma}_\rho(V_\rho) = \tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda) \cap V_\rho \neq 0$, o que contradiz a hipótese. Assim $f = 0$ e provamos

que $\tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda) = 0$.

Se consideramos o ideal M do anel $\mathbb{Z}_p\langle X \rangle$, gerado pelo conjunto $\{X_\lambda - 1 : \lambda \in \Lambda^*\}$, temos que $\mathbb{Z}_p\langle X \rangle / M$ é um corpo finito e assim $\gamma(\mathbb{Z}_p\langle X \rangle) \neq \mathbb{Z}_p\langle X \rangle$. Por isso e usando o fato de que $\gamma(\mathbb{Z}_p\langle X \rangle) \cap \mathbb{Z}_p$ é um ideal do corpo \mathbb{Z}_p , teremos necessariamente $\gamma(\mathbb{Z}_p\langle X \rangle) \cap \mathbb{Z}_p = 0$, i.e., $\tilde{\gamma}_0(V_0) = 0$. Usando esse fato, o Lema 3.2, e indução transfinita sobre $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \geq 1$, prova-se sem dificuldade que $\tilde{\gamma}_\lambda(V_\lambda) = 0$, $\forall \lambda \in \Lambda$. Logo segue facilmente o

TEOREMA 3.3 - Se p é um número primo e $X = \{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é um conjunto de indeterminadas, então $\gamma(\mathbb{Z}_p\langle X \rangle) = 0$.

COROLÁRIO 3.4 - Seja R uma \mathbb{Z}_p -álgebra. Se α é um radical tal que $\alpha \leq \gamma$, então

$$\tilde{\alpha}_{\lambda+1}((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle) = \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}), \quad \text{para todo } \lambda \in \Lambda$$

PROVA - Seja $\lambda \in \Lambda$. Sendo $(V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X, \mathcal{A} \rangle / V_\lambda\langle X, \mathcal{A} \rangle \cong \mathbb{Z}_p\langle X \rangle$, usando o Teorema 3.3, segue que $\alpha((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X, \mathcal{A} \rangle) = \alpha(V_\lambda\langle X, \mathcal{A} \rangle)$. Com isso,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\lambda+1}((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle) &= \alpha((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap ((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle) \\ &= \alpha(V_\lambda\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap ((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle). \end{aligned}$$

Mas $\alpha(V_\lambda\langle X, \mathcal{A} \rangle) \subseteq V_\lambda\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Logo

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\lambda+1}((V_\lambda \times \mathbb{Z}_p)\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle) &= \alpha(V_\lambda\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap V_{\lambda+1} \\ &= \alpha(V_{\lambda+1}\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap V_{\lambda+1} \\ &= \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}). \end{aligned}$$

Seja p um número primo e $\lambda \in \Lambda$. Se α é um radical hereditário, prova-se sem dificuldade que $\tilde{\alpha}_\lambda(I) = \tilde{\alpha}_\lambda(V_\lambda) \cap I$, $\forall I \in \mathfrak{I}(V_\lambda)$. Também temos que $(V_\lambda)_p\langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle$ é um ideal do anel $V_{\lambda+1}$ (Proposição I.3.6). Em visto disso tudo, fica claro o seguinte

LEMA 3.5 – Seja p um número primo e $\lambda \in \Lambda$. Se α é um radical hereditário, então $\tilde{\alpha}_{\lambda+1}((V_\lambda)_p \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle) = \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}) \cap (V_\lambda)_p \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle$.

Se ζ é uma raiz m -ésima primitiva complexa da unidade, então $\mathbb{Z}[\zeta]$ é uma extensão Galoissiana finita de \mathbb{Z} . Por isso, se A é uma \mathbb{Z} -álgebra, $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]$ é uma extensão liberal de A . Usamos esse fato no que segue.

LEMA 3.6 – Sejam R uma \mathbb{Z} -álgebra e ζ uma raiz m -ésima primitiva complexa da unidade. Se α é um radical admissível, então

$$\tilde{\alpha}_{\lambda+1}((V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle) = \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}), \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

PROVA – Se $\lambda \in \Lambda$, temos

$$\begin{aligned} & \alpha_{\lambda+1}((V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle) \cap V_{\lambda+1} \\ &= \alpha((V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap ((V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \langle X_{\lambda+1}, \sigma_{\lambda+1} \rangle) \cap V_{\lambda+1} \\ &= \alpha((V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap V_{\lambda+1} \quad (V_\lambda \subseteq V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \\ &= \alpha((V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap V_\lambda \langle X, \mathcal{A} \rangle \cap V_{\lambda+1} \quad (V_{\lambda+1} \subseteq V_\lambda \langle X, \mathcal{A} \rangle) \\ &= \alpha(V_\lambda \langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap V_{\lambda+1} \quad (\alpha \text{ é admissível}) \\ &= \tilde{\alpha}_{\lambda+1}(V_{\lambda+1}). \end{aligned}$$

Mesmo que γ não seja admissível, podemos provar que, quando $R = \mathbb{Z}$, $\gamma((V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \langle X \rangle) \cap (V_\lambda \langle X \rangle) = \gamma(V_\lambda \langle X \rangle)$. Daí seguindo um procedimento similar à demonstração do Lema 3.6, podemos provar que

$$\tilde{\gamma}_{\lambda+1}((V_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \langle X_{\lambda+1} \rangle) \cap V_\lambda \langle X_{\lambda+1} \rangle = \tilde{\gamma}_{\lambda+1}(V_\lambda \langle X_{\lambda+1} \rangle), \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Isso é usado para provar um resultado análogo ao Lema 3.2 para o anel $R = \mathbb{Z}$, e assim pode-se deduzir sem dificuldade que $\gamma(\mathbb{Z} \langle X \rangle) = 0$.

A prova do seguinte resultado é quase uma repetição do prova do Lema 3.2 e por isso omitiremos vários detalhes.

PROPOSIÇÃO 3.7 – Seja $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq 1$, e seja α um radical hereditário, admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\tilde{\alpha}_\iota(V_\iota) = 0$, para todo $\iota \in \Lambda$ tal que $\iota < \lambda$, então $\tilde{\alpha}_\lambda(V_\lambda) = 0$.

PROVA – Seja $f \in \tilde{\alpha}_\lambda(V_\lambda)$.

Caso 1: λ é um ordinal limite. Aqui procedemos como no Lema 3.2.

Caso 2: $\lambda = \rho + 1$ é um ordinal sucessor. Nesse caso $V_\lambda = V_\rho \langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1} \rangle$. Se supomos $f \neq 0$, então, como na prova do Lema 3.2, podemos considerar f da forma $f = \sum_{i=0}^m v_i X_{\rho+1}^i$ com $v_m \neq 0$ e $m \geq 1$ minimal.

Caso 2.1: existe $\theta \neq n \in \mathbb{Z}$ tal que $nv_m = 0$. Como na prova do Lema 2.4, podemos considerar um número primo p tal que $pf = 0$, e portanto podemos supor que R é uma \mathbb{Z}_p -álgebra. Mais ainda, o Corolário 3.4 permite supor que R contém o corpo \mathbb{Z}_p .

Consideremos o isomorfismo H de $V_\rho \langle X, \mathcal{A} \rangle \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ sobre $(V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \langle X, \mathcal{A} \rangle$ (Teorema I.3.10) e os automorfismos ζ_j de $(V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q) \langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1} \rangle$, determinados por $m+1$ unidades $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m$ de F_q . Daqui em diante procedemos como na prova do Lema 3.2 para obter que $0 \neq v_m \in \tilde{\alpha}_\rho(V_\rho)$, isto é, chegamos a uma contradição à partir da suposição de que $f \neq 0$.

Caso 2.2: $nv_m \neq 0, \forall \theta \neq n \in \mathbb{Z}$. Nesse caso podemos supor que R contém o anel dos inteiros \mathbb{Z} . Se ζ é uma raiz $(m+1)$ -ésima primitiva complexa da unidade, então $f \in \tilde{\alpha}_{\rho+1} \left((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1} \rangle \right)$ (Lema 3.6).

Tomando $m+1$ unidades η_0, \dots, η_m de $\mathbb{Z}(\zeta)$, podemos provar, como no Lema 3.2, que $\Delta(v_m \otimes 1) X_{\rho+1}^m \in \tilde{\alpha}_{\rho+1} \left((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1} \rangle \right)$ (onde $\Delta = \prod_{i < j} (\eta_i - \eta_j)$).

Agora consideremos a extensão Galoissiana $\mathbb{Q}(\zeta)$ de \mathbb{Q} , e consideremos os m

\mathbb{Q} -automorfismos β_1, \dots, β_m de $\mathbb{Q}(\zeta)$, definidos por $\beta_i(\zeta) = \zeta^i$ ($1 \leq i \leq m$).

Seja $\delta = \beta_1(\Delta) \dots \beta_m(\Delta)$. Uma vez que $\beta_i(\mathbb{Z}[\zeta]) \subseteq \mathbb{Z}[\zeta]$, temos $\beta_i(\Delta) \in \mathbb{Z}[\zeta]$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq m$. Logo $\delta \in \mathbb{Z}[\zeta]$. Mas $\delta \in \mathbb{Q}(\zeta)^{\mathfrak{S}} = \mathbb{Q}$ (onde \mathfrak{S} é o grupo de Galois da extensão $\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}$). Logo $\delta \in \mathbb{Z}$.

Como $\delta(V_m \otimes 1)X_{\rho+1}^m \in \tilde{\alpha}_{\rho+1}\left((V_\rho \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta]) \langle X_{\rho+1}, \sigma_{\rho+1} \rangle\right)$, vem que $\delta V_m X_{\rho+1}^m \in \tilde{\alpha}_{\rho+1}(V_{\rho+1})$ (Lema 3.1). Logo $0 \neq \delta v_m \in \tilde{\alpha}_{\rho+1}(V_{\rho+1}) \cap V_\rho = \tilde{\alpha}_\rho(V_\rho)$, o que também é uma contradição.

LEMA 3.8 - Seja α um radical hereditário, admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\alpha(\mathbb{R}\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap \mathbb{R} = 0$, então $\alpha(\mathbb{R}\langle X, \mathcal{A} \rangle) = 0$.

PROVA - É análoga à prova do Teorema 2.5.

Agora podemos provar o resultado central deste parágrafo, da mesma maneira que o Teorema 2.6.

TEOREMA 3.9 - Se α é um radical hereditário admissível tal que $\alpha \leq \gamma$, então

$$\alpha(\mathbb{R}\langle X, \mathcal{A} \rangle) = \left(\alpha(\mathbb{R}\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap \mathbb{R} \right) \langle X, \mathcal{A} \rangle.$$

É claro que o Teorema 3.9 é aplicável aos radicais $L, \mathcal{L}, J, \mathcal{G}$, e s.

4 - Sobre os Ideais $\alpha(\mathbb{R}\langle X, \mathcal{D} \rangle) \cap \mathbb{R}$ e $\alpha(\mathbb{R}\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap \mathbb{R}$

Seja S qualquer uma das extensões $\mathbb{R}\langle X, \mathcal{D} \rangle$ ou $\mathbb{R}\langle X, \mathcal{A} \rangle$ do anel \mathbb{R} , e seja α um radical hereditário admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Segundo os parágrafos 2 e 3, para conhecer realmente o radical $\alpha(S)$, é suficiente conhecer o ideal $\alpha(S) \cap \mathbb{R}$. Assim apresentamos a seguir alguns resultados que fornecem informações do ideal $\alpha(S) \cap \mathbb{R}$ para certos casos particulares do radical α .

Primeiramente seja \mathcal{L} uma K -álgebra de Lie que age sobre o anel R como K -derivações. Lembremos que um \mathcal{L} -ideal I de R (que denotamos com $I \triangleleft_{\mathcal{L}} R$) é um ideal tal que $d_{\lambda}(I) \subseteq I, \forall \lambda \in \Lambda$. É claro que, se I e J são \mathcal{L} -ideais de R , então $I+J, I \cap J$ e IJ também o são.

Como em [14] (pág. 194), definimos, para cada ordinal β , o \mathcal{L} -ideal $\mathcal{D}_R(\beta)$ como segue:

$$\mathcal{D}_R(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{se } \beta = 0 \\ \sum \{I \triangleleft_{\mathcal{L}} R : \text{Existe } n \geq 1 \text{ tal que } I^n \subseteq \mathcal{D}_R(\beta - 1)\}, & \text{se } \beta \text{ é um ordinal sucessor} \\ \sum_{\iota < \beta} \mathcal{D}_R(\iota), & \text{se } \beta \text{ é um ordinal limite.} \end{cases}$$

As seguintes propriedades são evidentes:

- (1) $\mathcal{D}_R(\beta) = \bigcup_{\iota < \beta} \mathcal{D}_R(\iota)$, se β é um ordinal limite;
- (2) $\mathcal{D}_R(\eta) \subseteq \mathcal{D}_R(\beta), \forall \eta < \beta$;
- (3) existe um ordinal ξ tal que $\mathcal{D}_R(\beta) = \mathcal{D}_R(\xi)$, para todo ordinal β tal que $\beta > \xi$.

Assim podemos definir, sem ambigüidade, o radical \mathcal{L} -primo do anel R como segue. Se ξ é um ordinal tal que $\mathcal{D}_R(\beta) = \mathcal{D}_R(\xi), \forall \beta > \xi$, então o \mathcal{L} -ideal $L_{\mathcal{L}}(R) = \mathcal{D}_R(\xi)$, de R é chamado o *radical \mathcal{L} -primo* do anel R .

Um \mathcal{L} -ideal P de R é dito *\mathcal{L} -primo* se para quaisquer \mathcal{L} -ideais A e B de R tais que $AB \subseteq P$, se tem $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$. O anel R é dito *\mathcal{L} -primo* se o ideal zero 0 de R é \mathcal{L} -primo.

Sejam I um \mathcal{L} -ideal de R e $\bar{d}_{\lambda} : R/I \rightarrow R/I$ ($\lambda \in \Lambda$) as derivações do anel quociente R/I , definidas por $\bar{d}_{\lambda}(r + I) = d_{\lambda}(r) + I, \forall r \in R$. O ideal J/I do anel R/I é um $\bar{\mathcal{L}}$ -ideal se, e somente se, J é um \mathcal{L} -ideal de R .

O seguinte é um dos resultados importantes deste parágrafo.

TEOREMA 4.1 - Seja $L(R * \mathcal{L})$ o radical primo do anel do operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$. O \mathcal{L} -ideal $L(R * \mathcal{L}) \cap R$ de R é igual:

- (i) à intersecção dos ideais \mathcal{L} -primos do anel R ;
- (ii) ao radical \mathcal{L} -primo $L_{\mathcal{L}}(R)$ do anel R , e
- (iii) à intersecção dos \mathcal{L} -ideais I de R tais que o anel quociente R/I não tem $\bar{\mathcal{L}}$ -ideais nilpotentes não nulos.

PROVA - Denotemos com D_1 a intersecção dos ideais \mathcal{L} -primos de R , e com D_2 a intersecção dos \mathcal{L} -ideais I de R tais que R/I não tem $\bar{\mathcal{L}}$ -ideais nilpotentes não nulos.

$D_1 \subseteq L_{\mathcal{L}}(R)$: Se para cada ordinal β , definimos o ideal $N_{R * \mathcal{L}}(\beta)$ de $R * \mathcal{L}$ como segue:

$$N_{R * \mathcal{L}}(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{se } \beta = 0 \\ \sum \{I \triangleleft R * \mathcal{L} : \text{Existe } n \geq 1 \text{ tal que } I^n \subseteq N_{R * \mathcal{L}}(\beta - 1)\}, & \text{se } \beta \text{ é um ordinal sucessor} \\ \sum_{\iota < \beta} N_{R * \mathcal{L}}(\iota), & \text{se } \beta \text{ é um ordinal limite.} \end{cases}$$

então existe um ordinal η que define o radical primo $L(R * \mathcal{L}) = N_{R * \mathcal{L}}(\eta)$.

Usando indução transfinita, prova-se sem problemas que $N_{R * \mathcal{L}}(\beta) \cap R = \mathcal{D}_R(\mathcal{L})$, para todo ordinal β , e portanto obtem-se que $L(R * \mathcal{L}) \cap R = L_{\mathcal{L}}(R)$.

Disso e do fato de que $P \cap R$ é um ideal \mathcal{L} -primo de R sempre que P seja um ideal primo de $R * \mathcal{L}$, obtemos

$$\begin{aligned} D_1 &\subseteq \cap \{P \cap R : P \triangleleft R * \mathcal{L} \text{ é primo}\} \\ &= (\cap \{P \triangleleft R * \mathcal{L} : P \text{ é primo}\}) \cap R \end{aligned}$$

$$= L(R * \mathcal{L}) \cap R = L_{\mathcal{L}}(R) .$$

$L_{\mathcal{L}}(R) \subseteq D_2$: Se I é um \mathcal{L} -ideal de R tal que R/I não tem $\overline{\mathcal{L}}$ -ideais nilpotentes não nulos, então é fácil provar, usando indução transfinita, que $\mathcal{D}_R(\beta) \subseteq I$, para todo ordinal β . Daí $L_{\mathcal{L}}(R) \subseteq I$ e segue que $L_{\mathcal{L}}(R) \subseteq D_2$.

$D_2 \subseteq D_1$: Seja Q um ideal \mathcal{L} -primo de R . Se J/Q é um $\overline{\mathcal{L}}$ -ideal nilpotente de R/Q , então existe $t \geq 1$ tal que $J^t \subseteq Q$. Sendo J um \mathcal{L} -ideal de R , então temos que $J \subseteq P$, i.e., $J/P = 0$. Claramente, então, $D_2 \subseteq D_1$.

Em continuação apresentamos resultados contendo informações do \mathcal{L} -ideal $J(R * \mathcal{L}) \cap R$ de R para certos anéis de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$. O leitor interessado nas provas pode consultar as respectivas referências.

PROPOSIÇÃO 4.2 – Suponhamos que K seja um corpo de característica zero, e denotemos com $J(R * \mathcal{L})$ o radical de Jacobson do anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$. Se para cada ideal primo minimal P do anel R se tem que todo ideal não nulo do anel quociente R/P tem um elemento regular (de R/P), então $J(R * \mathcal{L}) \cap R = L_{\mathcal{L}}(R)$.

PROVA – Ver [3], Corolário 3.4.

PROPOSIÇÃO 4.3 – Seja K um corpo. Se R é um anel que satisfaz uma das seguintes condições:

- (i) R é noetheriano à direita,
- (ii) R é uma p. i. K -álgebra (com K de característica zero),
- (iii) R não tem elementos nilpotentes não nulos,

então $J(R * \mathcal{L}) \cap R$ é o maior nil \mathcal{L} -ideal do anel R .

PROVA – Ver [3], Corolário 3.5.

Agora seja (R, \mathcal{A}, U) um anel com automorfismos. Se, para cada ordinal β , definimos o ideal \mathcal{A} -invariante $\mathcal{A}_R(\beta)$ de R como segue:

$$\mathcal{A}_R(\beta) = \begin{cases} 0, & \text{se } \beta = 0 \\ \sum \{I \triangleleft_{\mathcal{A}} R : \text{Existe } n \geq 1 \text{ tal que } I^n \subseteq \mathcal{A}_R(\beta - 1)\}, & \text{se } \beta \text{ é um ordinal sucessor} \\ \sum_{\iota < \beta} \mathcal{A}_R(\iota), & \text{se } \beta \text{ é um ordinal limite,} \end{cases}$$

então podemos provar que $\mathcal{A}_R(\eta) \subseteq \mathcal{A}_R(\beta)$, $\forall \eta < \beta$, e existe um ordinal ξ tal que $\mathcal{A}_R(\beta) = \mathcal{A}_R(\xi)$, $\forall \beta > \xi$. Então definimos o *radical \mathcal{A} -primo* do anel R como o ideal \mathcal{A} -invariante $L_{\mathcal{A}}(R) = \mathcal{A}_R(\xi)$.

Um ideal \mathcal{A} -invariante P de R é dito *\mathcal{A} -primo* se, para quaisquer ideais \mathcal{A} -invariantes A e B de R tais que $AB \subseteq P$, se tem $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$. O anel R é chamado *\mathcal{A} -primo* se o ideal zero 0 de R é \mathcal{A} -primo.

Analogamente ao Teorema 4.1 podemos provar sem dificuldade o seguinte resultado também importante.

TEOREMA 4.4 – O ideal \mathcal{A} -invariante $L(R(X, \mathcal{A})) \cap R$ de R é igual:

- (i) à interseção dos ideais \mathcal{A} -primos do anel R ;
- (ii) ao radical \mathcal{A} -primo $L_{\mathcal{A}}(R)$ do anel R ;
- (iii) à interseção dos ideais \mathcal{A} -invariantes I de R tais que o anel quociente R/I não tem ideais $\overline{\mathcal{A}}$ -invariantes nilpotentes não nulos.

Finalmente consideremos o ideal $s(R(X, \mathcal{A})) \cap R$, onde s é o radical fortemente primo, e os automorfismos de \mathcal{A} comutam entre si.

Sejam P e I ideais do anel R tais que $I \not\subseteq P$. Um *insulador módulo P* (à esquerda) *para I* é um subconjunto finito F de I tal que, se r é um elemento de R que satisfaz $rF \subseteq P$, então $r \in P$. No que segue nós omitiremos a expressão “à esquerda”.

Um ideal P de R é dito *fortemente primo* se todo ideal I de R tal que $I \not\subseteq P$ tem um insulador módulo P . Um anel R é dito *fortemente primo* se o ideal zero 0 de R é fortemente primo ([12]).

O radical fortemente primo $s(R)$ do anel R é definido por

$$s(R) = \cap \{P \triangleleft R : P \text{ é fortemente primo} \} .$$

Analogamente, para um anel com automorfismos (R, \mathcal{A}, U) , podemos definir o seguinte. Um anel \mathcal{A} -invariante P de R é dito *\mathcal{A} -fortemente primo* se todo ideal \mathcal{A} -invariante I de R tal que $I \not\subseteq P$ tem um insulador módulo P . Um anel R será chamado *\mathcal{A} -fortemente primo* se o ideal zero 0 de R é \mathcal{A} -fortemente primo.

Definimos o radical \mathcal{A} -fortemente primo do anel R por

$$s_{\mathcal{A}}(R) = \cap \{P \triangleleft R : P \text{ é fortemente primo} \} .$$

É importante observar que a condição $I \not\subseteq P$ nas definições anteriores pode ser trocada pela condição equivalente $P \not\subseteq I$.

LEMA 4.5 – Se P é um ideal fortemente primo do skew anel $R(X, \mathcal{A})$, então o ideal \mathcal{A} -invariante $P \cap R$ de R é \mathcal{A} -fortemente primo.

PROVA – Se I é um ideal \mathcal{A} -invariante de R tal que $I \not\subseteq P \cap R$, então $I(X, \mathcal{A}) \not\subseteq P$, logo $I(X, \mathcal{A})$ tem um insulador F módulo P . Seja $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ com $\alpha_i = \sum_{\bar{v}} a_{\bar{v}}^{(i)} X^{\bar{v}}$, onde $a_{\bar{v}}^{(i)} \in I$, $\forall \bar{v}, i$, e consideremos o subconjunto finito $A = \{a_{\bar{v}}^{(i)} : i, \bar{v}\}$ de I . Se $r \in R$ é tal que $rA \subseteq P \cap R$, então é claro que $rF \subseteq (P \cap R)(X, \mathcal{A}) \subseteq P$, e

portanto $r \in P$. Assim $r \in P \cap R$ e A é um insulador módulo $P \cap R$ para I . Em consequência fica provado que $P \cap R$ é \mathcal{A} -fortemente primo.

Na prova do seguinte lema usaremos o Lema III.4.3 que será provado no Capítulo III.

LEMA 4.6 – Suponhamos que os automorfismos de \mathcal{A} comutam entre si, e seja Q um ideal \mathcal{A} -fortemente primo do anel R . Se P é um ideal de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ que é maximal respecto da propriedade $P \cap R = Q$, então P é fortemente primo.

PROVA – Se P_1 é o ideal de $(R/Q)\langle X, \mathcal{A} \rangle$ imagem homeomorfa do ideal $P/Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$, então P_1 é maximal com relação à propriedade de ser (R/Q) -disjunto, e

$$R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P \cong (R/Q)\langle X, \mathcal{A} \rangle / P_1 .$$

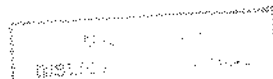
O ideal P_1 é primo, pois o anel R/Q é \mathcal{A} -fortemente primo. Então segue do Lema III.4.3 que P_1 , e portanto P , é um ideal fortemente primo.

Agora estamos em condições de provar o seguinte resultado importante.

TEOREMA 4.7 – Se os automorfismos de \mathcal{A} comutam entre si, então $s(R\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap R = s_{\mathcal{A}}(R)$.

PROVA – Se P é qualquer ideal fortemente primo do skew anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, então $s_{\mathcal{A}}(R) \subseteq P \cap R$ (Lema 4.5). Por isso $s_{\mathcal{A}}(R) \subseteq s(R\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap R$.

Seja Q qualquer ideal \mathcal{A} -fortemente primo do anel R . Se P é um ideal de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ maximal em relação à propriedade $P \cap R = Q$, então $s(R\langle X, \mathcal{A} \rangle) \subseteq P$ (Lema 4.6), e, em consequência, $s(R\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap R \subseteq Q$. Sendo Q arbitrário, obtemos $s(R\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap R \subseteq s_{\mathcal{A}}(R)$ e a igualdade procurada segue.



5 - o α -radical do Anel $S_n = \mathbf{R}[X_1, \sigma_1] \cdots [X_n, \sigma_n]$.

Para um anel com automorfismos $(\mathbf{R}, \mathcal{A}, \mathcal{U})$, onde $\mathcal{A} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ é finito, consideremos os skew anéis de polinômios: $S_0 = \mathbf{R}$ e $S_\ell = S_{\ell-1}[X_\ell, \sigma_\ell]$, $1 \leq \ell \leq n$.

Para cada $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$ consideremos o conjunto

$$\mathcal{H}(S_\ell) = \{I \triangleleft S_\ell : I \text{ é } \mathcal{A}\text{-invariante}\}.$$

Dado um radical α , definimos, para cada $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$, a função $\hat{\alpha}_\ell: \mathcal{H}(S_\ell) \longrightarrow \mathcal{H}(S_\ell)$ por $\hat{\alpha}_\ell(I) = \alpha(I[\mathbf{X}, \mathcal{A}]) \cap I$, $\forall I \in \mathcal{H}(S_\ell)$.

Sejam α um radical e $\ell \in \{1, \dots, n\}$. É rotineiro provar que:

(a) $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)) = 0$,

e (b) Se $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = S_\ell$, então $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / I) = S_\ell / I$, $\forall I \in \mathcal{H}(S_\ell)$.

Também, se α é hereditário, então $\hat{\alpha}_\ell(I) = \hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \cap I$, $\forall I \in \mathcal{H}(S_\ell)$. Como consequência, $\hat{\alpha}_\ell(\hat{\alpha}_\ell(I)) = \hat{\alpha}_\ell(I)$, $\forall I \in \mathcal{H}(S_\ell)$.

O seguinte resultado generaliza um resultado conhecido de Szász ([22], Teorema 1.11).

PROPOSIÇÃO 5.1 - Sejam α um radical, $\ell \in \{1, \dots, n\}$, e $\Theta \subset \mathcal{H}(S_\ell)$. Se $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / I) = 0$, $\forall I \in \Theta$, então $\hat{\alpha}_\ell\left(S_\ell / \bigcap_{I \in \Theta} I\right) = 0$.

PROVA - Seja $M = \bigcap_{I \in \Theta} I$ e suponhamos que $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / M) \neq 0$. Nesse caso existe um ideal J em $\mathcal{H}(S_\ell)$ tal que $M \not\subseteq J$ e $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / M) = J / M$. Portanto existe um ideal $I_0 \in \Theta$ tal que $J / M \not\subseteq I_0 / M$.

Não é difícil provar que $(J / M) / K \cong J / (J \cap I_0)$, onde K é um kernel do epimorfismo $\pi: J / M \longrightarrow J / (J \cap I_0)$. Sendo $\hat{\alpha}_\ell(J / M) = \hat{\alpha}_\ell(\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / M)) = \hat{\alpha}_\ell(S_\ell / M) = J / M$, temos $\hat{\alpha}_\ell(J / (J \cap I_0)) = J / (J \cap I_0)$.

Como conseqüência disso, uma vez que $(J + I_0) / I_0 \cong J / (J \cap I_0)$, temos

$$\begin{aligned} (J + I_0) / I_0 &\cong \hat{\alpha}_\ell((J + I_0) / I_0) \\ &= \alpha\left(\left((J + I_0) / I_0\right) [X, \mathcal{A}]\right) \cap ((J + I_0) / I_0) \\ &\subseteq \alpha\left((S_\ell / I_0) [X, \mathcal{A}]\right) \cap (S_\ell / I_0) \\ &= \hat{\alpha}_\ell(S_\ell / I_0) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Portanto $J \subseteq I_0$ e segue que $J / M \subseteq I_0 / M$, que é uma contradição.

O resultado seguinte mostra que, quando o radical α é hereditário, as funções $\hat{\alpha}_\ell$ comportam-se como radicais.

PROPOSIÇÃO 5.2 – Seja $\ell \in \{1, \dots, n\}$. Se α é um radical hereditário, então

$$\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = \cap \{J \in \mathcal{H}(S_\ell) : \hat{\alpha}_\ell(S_\ell / J) = 0\} .$$

PROVA – Denotemos com D o ideal intersecção $\cap \{J \in \mathcal{H}(S_\ell) : \hat{\alpha}_\ell(S_\ell / J) = 0\}$.

Como $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)) = 0$, temos $D \subseteq \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \alpha_\ell(S_\ell) / D &= \left(\alpha(S_\ell[X, \mathcal{A}]) \cap S_\ell\right) / D \\ &= \left(\alpha(S_\ell[X, \mathcal{A}]) / D[X, \mathcal{A}]\right) \cap (S_\ell / D) \\ &= \alpha(S_\ell[X, \mathcal{A}] / D[X, \mathcal{A}]) \cap (S_\ell / D) \\ &\cong \alpha\left((S_\ell / D) [X, \mathcal{A}]\right) \cap (S_\ell / D) \\ &= \hat{\alpha}_\ell(S_\ell / D) . \end{aligned}$$

Mas pela Proposição 5.1, $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / D) = 0$. Logo $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \subseteq D$ e a igualdade $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = D$ segue.

Conforme foi feito nos parágrafos 2 e 3, podemos provar os seguintes resultados.

Seja α um radical e suponhamos que R é uma C -álgebra. Se $\gamma(C) = 0$ e $\alpha \leq \gamma$, então $\hat{\alpha}_\ell((S_{\ell-1} \times C)[X_\ell, \sigma_\ell]) = \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$, $\forall \ell$ com $1 \leq \ell \leq n$. Também, se B é uma extensão Galoissiana finita de C , H é o isomorfismo do anel $S_\ell \otimes_c B$ sobre o anel $(S_{\ell-1} \otimes_c B)[X_\ell, \sigma_\ell]$, e o radical α é admissível, então $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \otimes_c B \stackrel{H}{\cong} \hat{\alpha}_\ell((S_{\ell-1} \otimes_c B)[X_\ell, \sigma_\ell])$ e $\hat{\alpha}_\ell((S_{\ell-1} \otimes_c B)[X_\ell, \sigma_\ell]) \cap S_\ell = \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$, $\forall \ell$ com $1 \leq \ell \leq n$.

Usamos esses resultados para provar a seguinte

PROPOSIÇÃO 5.3 – Seja α um radical hereditário, admissível tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\ell \in \{1, \dots, n\}$ satisfaz $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \neq 0$, então existem m, s nas condições $0 \neq s \in S_{\ell-1}$, $m \geq 1$ e $sx_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$.

PROVA – Dado que $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \neq 0$, existe um elemento não nulo $f = \sum_{i=0}^m s_i X_\ell^i \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$, com $s_i \in S_{\ell-i}$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Se $m = 0$, então $f = s_0 \neq 0$, $s_0 X_\ell \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$ e o resultado segue. Noutro caso podemos escolher $m \geq 1$ minimal.

Caso 1: existe um $u \in \mathbb{Z}$ não nulo tal que $us_m = 0$. Se $0 \neq u \in \mathbb{Z}$ verifica $us_m = 0$, então podemos escolher um primo p tal que $pf = 0$. Assim $ps_i = 0$, $\forall i$ com $0 \leq i \leq m$, isto é, $f \in (S_{\ell-1})_p[X_\ell, \sigma_\ell]$, e por ser α hereditário podemos supor $f \in \hat{\alpha}_\ell((S_{\ell-1})_p[X_\ell, \sigma_\ell])$. Logo podemos supor que o anel R é uma \mathbb{Z}_p -álgebra.

Usando as observações anteriores a esta Proposição, temos que f pertence ao ideal $\hat{\alpha}_\ell((S_{\ell-1} \times \mathbb{Z}_p)[X_\ell, \sigma_\ell])$ e podemos considerar que R contém o corpo \mathbb{Z}_p . Também, se F_q denota o corpo com $q = p^{m+1}$ elementos e $g = H(f \otimes 1)$, então $g \in \hat{\alpha}_\ell((S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_\ell, \sigma_\ell])$ com $g = \sum_{i=0}^m (s_i \otimes 1) X_\ell^i$.

Sejam η_0, \dots, η_m $m+1$ unidades diferentes em F_q e ζ_j ($0 \leq j \leq m$) os automorfismos de $(S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_\ell, \sigma_\ell]$, definidos pelas condições $\zeta_j(a) = a$,

$\forall a \in S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q$ e $\zeta_j(X_\ell) = (1 \otimes \eta_j)X_\ell$. Procedendo como na prova da Proposição 3.2, pode-se verificar que $(s_m \otimes 1)X_\ell^m \in ((S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}_p} F_q)[X_\ell, \sigma_\ell])$, e portanto $s_m X_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$ com $0 \neq s_m \in S_{\ell-1}$.

Caso 2: $u s_m \neq 0, \forall u \in \mathbb{Z}$ não nulo. Nesse caso podemos supor que R contém o anel dos inteiros \mathbb{Z} . Se ζ é uma raiz $(m+1)$ -ésima primitiva complexa da unidade, então, pelas observações prévias, $f \in \hat{\alpha}_\ell((S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta])[X_\ell, \sigma_\ell])$.

Se η_0, \dots, η_m são $m+1$ unidades diferentes em $\mathbb{Z}[\zeta]$, então, como no caso 1, podemos provar que $(s_m \otimes 1)X_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell((S_{\ell-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\zeta])[X_\ell, \sigma_\ell])$, e portanto $s_m X_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$ com $0 \neq s_m \in S_{\ell-1}$, e a prova está completa.

Seja α um radical. Se, para cada $\ell \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, definimos o conjunto

$$B_\ell = \{s \in S_\ell : sX_{\ell+1} \in \hat{\alpha}_{\ell+1}(S_{\ell+1})\},$$

então não é difícil provar que $B_\ell \in \mathcal{H}(S_\ell)$, $\forall \ell$ com $0 \leq \ell \leq n-1$.

A seguinte definição é devida a Stewart e Watters ([21], sec. 3).

Uma classe de anéis primos \mathcal{P} é dita *rígida* se for satisfeito o seguinte: se S é uma extensão prima normalizante do anel R e P é um ideal primo minimal de R , então $R/P \in \mathcal{P}$ se, e somente se, $S \in \mathcal{P}$. Os radicais definidos por classes de anéis primos rígidos são ditos *rígidos*.

Em conseqüência, um radical rígido α está definido por uma certa classe de anéis primos \mathcal{P} , i.e., $\alpha(R) = \cap \{P \triangleleft R : R/P \in \mathcal{P}\}$.

Prova-se que os radicais rígidos são admissíveis ([21], Proposição 3.3), e que os radicais L, J, \mathcal{G} , e \mathcal{L} são rígidos ([21], Exemplo 3.4).

No que segue usaremos o fato de que $R[X, \mathcal{A}]X_\ell = X_\ell R[X, \mathcal{A}]$, $\forall \ell$ com $1 \leq \ell \leq n$ (Proposição I.2.2).

LEMA 5.4 – Seja α um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\ell \in \{1, \dots, n\}$

é tal que $B_{\ell-1} = 0$, então $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = 0$.

PROVA - Suponhamos que $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \neq 0$. Devido à Proposição 5.3, existe um elemento não nulo $s \in S_{\ell-1}$ e um $m \geq 1$ tais que $sX_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$. Já que $B_{\ell-1} = 0$, podemos escolher um $m \geq 2$ tal que $sX_\ell^m \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$ e $sX_\ell^{m-1} \notin \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$.

Seja \mathcal{P} a classe dos anéis primos que define o radical rígido α . Como $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = \alpha(R[X, \mathcal{A}]) \cap S_\ell$, existe um ideal primo P do anel $R[X, \mathcal{A}]$ tal que $R[X, \mathcal{A}]/P \in \mathcal{P}$ e $sX_\ell^{m-1} \notin P$. Mas $sX_\ell^{m-1}R[X, \mathcal{A}]X_\ell = sX_\ell^mR[X, \mathcal{A}] \subseteq P$ (pois $sX_\ell^m \in P$). Logo $X_\ell \in P$ e $B_{\ell-1} \neq 0$, o que é uma contradição.

TEOREMA 5.5 - Se α é um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$, então

$$\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) = (\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \cap S_{\ell-1}) \oplus B_{\ell-1} [X_\ell, \sigma_\ell] X_\ell, \quad \forall \ell \text{ com } 1 \leq \ell \leq n.$$

PROVA - Seja $\ell \in \{1, \dots, n\}$ e definamos $N = (\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \cap S_{\ell-1}) \oplus B_{\ell-1} [X_\ell, \sigma_\ell] X_\ell$.

É claro que a soma em N é direta, e não é difícil provar que N é um ideal de S_ℓ contido em $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$.

Provaremos que $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / B_{\ell-1} [X_\ell, \sigma_\ell]) = 0$. Com isso, e usando a Proposição 5.2, obtemos que $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \subseteq B_{\ell-1} [X_\ell, \sigma_\ell]$. Assim, se $f \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$, então podemos escrever $f = \sum_{i=0}^u b_i X_\ell^i$ com $b_i \in B_{\ell-1} \quad \forall i$ com $0 \leq i \leq u$. Seja $g = \sum_{i=1}^u b_i X_\ell^i$. Como $g \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell)$, $b_0 = f - g \in \hat{\alpha}_\ell(S_\ell) \cap B_{\ell-1}$. Mas $g \in B_{\ell-1} [X_\ell, \sigma_\ell] X_\ell$. Logo $f = b_0 + g \in N$, como queríamos provar.

Agora, sabemos que $S_\ell / B_{\ell-1} [X_\ell, \sigma_\ell] \cong (S_{\ell-1} / B_{\ell-1}) [X_\ell, \bar{\sigma}_\ell]$ (Proposição I.2.6). Então, para provar que $\hat{\alpha}_\ell(S_\ell / B_{\ell-1} [X_\ell, \sigma_\ell]) = 0$, é suficiente provar que o conjunto

$$W = \left\{ r + B_{\ell-1} \in S_{\ell-1} / B_{\ell-1} : (r + B_{\ell-1}) X_\ell \in \hat{\alpha}_\ell((S_{\ell-1} / B_{\ell-1}) [X_\ell, \sigma_\ell]) \right\}$$

é nulo (Lema 5.4).

Seja $r + B_{\ell-1}$ um elemento de W . Então

$$(r + B_{\ell-1}) X_{\ell} \in \hat{\alpha}_{\ell}((S_{\ell-1}/B_{\ell-1})[X_{\ell}, \sigma_{\ell}]) \subseteq \alpha((S_{\ell-1}/B_{\ell-1})[X, \mathcal{A}]) .$$

Se \mathcal{P} é a classe de anéis primos que define α , e P é um ideal primo do anel $R[X, \mathcal{A}]$ tal que $R[X, \mathcal{A}]/P \in \mathcal{P}$, então

$$\begin{aligned} B_{\ell-1} R[X, \mathcal{A}] X_{\ell} &= B_{\ell-1} X_{\ell} R[X, \mathcal{A}] \\ &\subseteq \hat{\alpha}_{\ell}(S_{\ell}) R[X, \mathcal{A}] \\ &\subseteq \alpha(R[X, \mathcal{A}]) \\ &\subseteq P . \end{aligned}$$

Logo $B_{\ell-1} \subset P$ ou $X_{\ell} \in P$.

Se $B_{\ell-1} \subset P$ então $B_{\ell-1}[X_{\ell}, \sigma_{\ell}] \subset P$ e temos que

$$\begin{aligned} ((S_{\ell-1}/B_{\ell-1})[X, \mathcal{A}]) / (P/B_{\ell-1}[X, \mathcal{A}]) \\ &\cong (S_{\ell-1}[X, \mathcal{A}]/B_{\ell-1}[X, \mathcal{A}]) / (P/B_{\ell-1}[X, \mathcal{A}]) \\ &= S_{\ell-1}[X, \mathcal{A}]/P \\ &= R[X, \mathcal{A}]/P \in \mathcal{P} . \end{aligned}$$

Logo $\alpha((S_{\ell-1}/B_{\ell-1})[X, \mathcal{A}]) \subseteq P/B_{\ell-1}[X, \mathcal{A}]$. Assim $(r + B_{\ell-1}) X_{\ell} \in P/B_{\ell-1}[X, \mathcal{A}]$, isto é, $r X_{\ell} \in P$.

Se $X_{\ell} \in P$, então também $r X_{\ell} \in P$. Em conseqüência $r X_{\ell} \in \alpha(R[X, \mathcal{A}])$ e daí $r X_{\ell} \in \alpha(R[X, \mathcal{A}]) \cap S_{\ell} = \hat{\alpha}_{\ell}(S_{\ell})$. Assim $r \in B_{\ell-1}$ e $r + B_{\ell-1} = 0$.

Seja α um radical. Para $\ell_1, \dots, \ell_t \in \{1, \dots, n\}$ com $\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_t$, definimos o conjunto $A_{\ell_1, \dots, \ell_t} = \{r \in R : r X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_t} \in \alpha(R[X, \mathcal{A}])\}$. Segue facilmente que $A_{\ell_1, \dots, \ell_t} \in \mathcal{H}(R)$.

LEMA 5.6 – Seja α um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$. Se $\alpha(R[X, \mathcal{A}]) \neq 0$ então existem $\ell_1, \dots, \ell_t \in \{1, \dots, n\}$ tais que $\ell_1 < \dots < \ell_t$ e $A_{\ell_1, \dots, \ell_t} \neq 0$.

PROVA - Temos que $R[X, \mathcal{A}] = S_n$. Logo da hipótese $\hat{\alpha}_n(S_n) \neq 0$. Pelo Lema 5.4 $B_{n-1} \neq 0$, i.e., existe $s \in S_{n-1}$ não nulo tal que $sX_n \in \hat{\alpha}_n(S_n)$.

Se $s \in R$, então $s \in A_n$ e temos que $A_n \neq 0$. Noutro caso podemos escolher $s = \sum_{i=0}^m s_i X_{\ell_{t-1}}^i \in S_{\ell_{t-1}}$ com $\ell_{t-1} \leq n-1$, $s_i \in S_{\ell_{t-1}-1} \forall i$ com $0 \leq i \leq m$, e $m \geq 1$ minimal.

Procedendo como na prova da Proposição 5.3, obtemos que $s_m X_{\ell_{t-1}}^m X_n$ pertence à $\alpha(R[X, \mathcal{A}])$, e, semelhantemente à prova do Lema 5.4, provamos que $s_m X_{\ell_{t-1}} X_n \in \alpha(R[X, \mathcal{A}])$.

Se $\ell_{t-1} = 1$, então $s_m \in R$ e $s_m \in A_{1,n}$, i.e., $A_{1,n} \neq 0$. Caso contrário podemos escolher $s_m = \sum_{i=0}^v h_i X_{\ell_{t-2}}^i$ com $\ell_{t-2} < \ell_{t-1}$, $h_i \in S_{\ell_{t-2}-1} \forall i$ com $0 \leq i \leq v$, e $v \geq 1$ minimal, e repetimos o procedimento anterior. Esse procedimento termina depois de um número finito de passos, i.e., existem $r \in R$ e $\ell_1 < \dots < \ell_t = n$ tais que $rX_{\ell_1} \dots X_{\ell_t} \in \alpha(R[X, \mathcal{A}])$. Portanto $A_{\ell_1, \dots, \ell_t} \neq 0$ e a prova está completa.

O resultado a seguir é muito importante para a prova do teorema central deste parágrafo.

LEMA 5.7 - Se α é um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$, então

$$\alpha(S_n) \subseteq A_{1,2, \dots, n} S_n.$$

PROVA - Seja $r \in R$ tal que

$$(r + A_{1, \dots, n}) X_1 \dots X_n \in \alpha((R/A_{1, \dots, n}) [X_1, \sigma_1] \dots [X_n, \sigma_n]).$$

Seja \mathcal{P} a classe dos anéis primos que definem o radical α . Se P é um ideal primo de S_n tal que $S_n/P \in \mathcal{P}$, mostremos que $rX_1 \dots X_n \in P$.

Se algum $X_i \in P$, então é claro que $rX_1 \dots X_n \in P$. Assim suponhamos

que $X_i \notin P$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq n$. Como

$$\begin{aligned} A_{1, \dots, n} S_n X_1 S_n \cdots S_n X_n &= A_{1, \dots, n} X_1 \cdots X_n S_n \\ &\subseteq \alpha(S_n) \\ &\subseteq P, \end{aligned}$$

temos $A_{1, \dots, n} \subseteq P$. Logo $A_{1, \dots, n} S_n \subseteq P$. Mas

$$(R/A_{1, \dots, n})[X_1, \sigma_1] \cdots [X_n, \sigma_n] / (P/A_{1, \dots, n} S_n) \cong S_n/P \in \mathcal{P}.$$

Então $\alpha((R/A_{1, \dots, n})[X_1, \sigma_1] \cdots [X_n, \sigma_n]) \subseteq P/A_{1, \dots, n} S_n$. Por isso e porque $rX_1 \cdots X_n + A_{1, \dots, n} S_n \in \alpha((R/A_{1, \dots, n})[X_1, \sigma_1] \cdots [X_n, \sigma_n])$, temos que $rX_1 \cdots X_n \in P$.

Sendo P arbitrário, $rX_1 \cdots X_n \in \alpha(S_n)$, i.e., $r \in A_{1, \dots, n}$, e temos $r + A_{1, \dots, n} = 0$.

Deste modo está provado que

$$\left\{ r + A_{1, \dots, n} \in R/A_{1, \dots, n} : (r + A_{1, \dots, n})X_1 \cdots X_n \in \alpha((R/A_{1, \dots, n})[X_1, \sigma_1] \cdots [X_n, \sigma_n]) \right\} = 0.$$

Segue do Lema 5.6 que $\alpha(S_n/A_{1, \dots, n} S_n) = 0$, e, em conseqüência, $\alpha(S_n) \subseteq A_{1, \dots, n} S_n$.

LEMA 5.8 - Sejam α um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$, e $h \in \alpha(S_2)$.

- (i) Se $h = r_0 + \sum_{i=1}^u a_i X_1^i$ (com $r_0, a_i \in R$), então $r_0 \in \alpha(S_2) \cap R$ e $a_i \in A_1$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq u$.
- (ii) Se $h = r_0 + \sum_{i=1}^u a_i X_1^i + \sum_{j=1}^v b_j X_2^j$ (com $r_0, a_i, b_j \in R$), então $r_0 \in \alpha(S_2) \cap R$, $a_i \in A_1$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq u$, e $b_j \in A_2$, $\forall j$ com $1 \leq j \leq v$.

PROVA - (i) É consequência do fato $h \in \hat{\alpha}_1(S_1)$ e do Teorema 5.5.

(ii) Como $S_2 = S_1[X_2, \sigma_2]$, podemos escrever

$$\alpha(S_2) = (\alpha(S_2) \cap S_1) \oplus C[X_2, \sigma_2]X_2,$$

onde $C = \{f \in S_1 : fX_2 \in \alpha(S_2)\}$ ([9], Teorema 2.5). Por isso $\{b_1, \dots, b_v\} \subset C$, e então $b_j \in A_2$, $\forall j$ com $1 \leq j \leq v$. Como $\sum_{j=1}^v b_j X_2^j \in \alpha(S_2)$, $h - \sum_{j=1}^v b_j X_2^j = r_0 + \sum_{i=1}^u a_i X_1^i \in \alpha(S_2)$. A prova completa-se usando a parte (i) já provada.

O seguinte Lema pode ser provado sem muita dificuldade.

LEMA 5.9 - $R + \sum_{t=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq n} R[X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}] X_{i_1} \cdots X_{i_t}$ é uma soma direta.

Agora vamos provar o resultado central deste parágrafo. Esse resultado generaliza o Teorema 2.5 de [9] e, em particular, vale para os radicais L , J , \mathcal{G} , e \mathcal{L} .

TEOREMA 5.10 - Seja $n \geq 2$. Se α é um radical hereditário rígido tal que $\alpha \leq \gamma$, então

$$\alpha(S_n) = (\alpha(S_n) \cap R) \bigoplus_{t=1}^n \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq n} A_{i_1 \dots i_t} [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}] X_{i_1} \cdots X_{i_t}.$$

PROVA - Definamos

$$M_n = (\alpha(S_n) \cap R) \bigoplus_{t=1}^n \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq n} A_{i_1 \dots i_t} [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}] X_{i_1} \cdots X_{i_t}.$$

Pelo lema anterior M_n é uma soma direta. Também é claro que $M_n \subseteq \alpha(S_n)$.

Agora procedemos por indução sobre $n \geq 2$ para provar que $\alpha(S_n) \subseteq M_n$.

Caso $n = 2$ - Seja $f \in \alpha(S_2)$ com $f = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} r_{ij} X_1^i X_2^j$ (onde $r_{ij} \in R$, $\forall i, j$).

Pelo Lema 5.7, $r_{ij} \in A_{1,2}$, $\forall i, j$. Logo o elemento $g = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} r_{ij} X_1^i X_2^j$ está em

$\alpha(S_2)$. Assim $h = f - g \in \alpha(S_2)$ com h da forma $h = r_0 + \sum_{i=1}^u a_i X_1^i + \sum_{j=1}^v b_j X_2^j$, onde $r_0, a_i, b_j \in \mathbb{R}$.

A prova se completa aplicando o Lema 5.8 (ii) para esse elemento $h \in \alpha(S_2)$.

Seja $m > 2$ e suponhamos que o resultado vale para todo n tal que $2 \leq n \leq m - 1$.

Caso $n = m$ - Usando o fato de que $S_m = S_1[X_2, \sigma_2] \cdots [X_m, \sigma_m]$ e a hipótese de indução, podemos escrever

$$\alpha(S_m) = (\alpha(S_m) \cap S_1) \bigoplus_{t=1}^{m-1} \bigoplus_{2 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m} D_{i_1 \dots i_t} [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}] X_{i_1} \cdots X_{i_t},$$

onde $D_{i_1 \dots i_t} = \{g \in S_1 : g X_{i_1} \cdots X_{i_t} \in \alpha(S_m)\}$.

Como $\alpha(S_m) \cap S_1 = \hat{\alpha}_1(S_1)$, segue do Teorema 5.5 que $\alpha(S_m) \cap S_1 \subseteq M_m$.

Completamos a prova verificando que $D_{i_1 \dots i_t} [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}] X_{i_1} \cdots X_{i_t} \subseteq M_m$, para quaisquer i_1, \dots, i_t com $2 \leq i_1 < \dots < i_t \leq m$ e todo t com $1 \leq t \leq m - 1$.

Caso 1: $t = m - 1$. Nesse caso $i_j = j + 1 \quad \forall j$ com $1 \leq j \leq m - 1$. Se $f \in D_{2 \dots m} [X_2, \sigma_2] \cdots [X_m, \sigma_m] X_2 \cdots X_m$, então é-nos permitido escrever $f = \left(\sum_{\bar{\nu}} f_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}} \right) X_2 \cdots X_m$, onde $f_{\bar{\nu}} \in D_{2 \dots m}$, $\forall \bar{\nu}$, e os elementos $\bar{\nu} \in \mathbb{N}^m$ são da forma $\bar{\nu} = (0, \nu_2, \dots, \nu_m)$.

Seja $f_{\bar{\nu}}$ da forma $f_{\bar{\nu}} = \sum_{i=0}^v r_i X_1^i$ (com $r_i \in \mathbb{R}$), e u a unidade de \mathbb{R} tal que $X^{\bar{\nu}} X_2 \cdots X_m = u X_2 \cdots X_m X^{\bar{\nu}}$ (Corolário I.2.3.). Já que $f_{\bar{\nu}} \in D_{2 \dots m}$, então $f_{\bar{\nu}} u \in D_{2 \dots m}$, logo $f_{\bar{\nu}} u X_2 \cdots X_m \in \alpha(S_m)$. Segue que $r_0 u X_2 \cdots X_m \in \alpha(S_m)$, pois $r_1 \sigma_1^i(u) \in A_{1 \dots m} \quad \forall i$ com $0 \leq i \leq v$ (Lema 5.7). Daí se deduz que $f_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}} X_2 \cdots X_m \in M_m$, $\forall \bar{\nu}$, e, usando a aditividade em M_m , obtemos que $f \in M_m$.

Caso 2: $i < m - 1$. Nesse caso temos que existe um elemento p no conjunto $\{2, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_t\}$.

Tomemos o elemento $f \in D_{i_1, \dots, i_t}[X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}] X_{i_1} \cdots X_{i_t}$ com $f = \left(\sum_{\bar{\mu}} f_{\bar{\mu}} X^{\bar{\mu}} \right) X_{i_1} \cdots X_{i_t}$, onde $f_{\bar{\mu}} \in D_{i_1, \dots, i_t} \quad \forall \bar{\mu}$, e os elementos $\bar{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in \mathbb{N}^m$ são tais que $\mu_j = 0$ para todo $j \notin \{i_1, \dots, i_t\}$.

Consideremos um dos $f_{\bar{\mu}}$ e suponhamos que se escreve na forma $f_{\bar{\mu}} = \sum_{i=0}^v s_i X_1^i$, onde $s_i \in R \quad \forall i$ com $0 \leq i \leq v$. Como $f_{\bar{\mu}} \in D_{i_1, \dots, i_t}$ e D_{i_1, \dots, i_t} é um ideal de S_1 , temos $f_{\bar{\mu}} u \in D_{i_1, \dots, i_t}$. Assim $g = f_{\bar{\mu}} u X_{i_1} \cdots X_{i_t} \in \alpha(S_m)$ com

$$g = s_0 u X_{i_1} \cdots X_{i_t} + \left(\sum_{\ell=0}^{v-1} s_{\ell+1} \sigma_1^{\ell+1}(u) X_1^{\ell} \right) X_1 X_{i_1} \cdots X_{i_t}.$$

Mas também temos

$$S_m = R[X_p, \sigma_p][X_1, \sigma_2][X_2, \sigma_2] \cdots [X_{p-1}, \sigma_{p-1}][X_{p+1}, \sigma_{p+1}] \cdots [X_m, \sigma_m].$$

Então, usando mais uma vez a hipótese de indução, podemos escrever

$$\alpha(S_m) = (\alpha(S_m) \cap R[X_p, \sigma_p]) \oplus_{s=1}^{m-1} \bigoplus_{\substack{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_s \leq m \\ \ell_j \neq p, \forall j}} E_{\ell_1, \dots, \ell_s} [X_{\ell_1}, \sigma_{\ell_1}] \cdots [X_{\ell_s}, \sigma_{\ell_s}] X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s},$$

onde $E_{\ell_1, \dots, \ell_s} = \{h \in R[X_p, \sigma_p] : h X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s} \in \alpha(S_m)\}$.

Por isso, tendo em conta que $g \in \alpha(S_m)$, existem elementos

$$h_0 \in \alpha(S_m) \cap R[X_p, \sigma_p]$$

$$e \quad h^{(\ell_1, \dots, \ell_s)} \in E_{\ell_1, \dots, \ell_s} [X_{\ell_1}, \sigma_{\ell_1}] \cdots [X_{\ell_s}, \sigma_{\ell_s}]$$

$$(1 \leq s \leq m-1, 1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_s \leq m, e \ell_j \neq p, \forall j)$$

$$\text{tais que } g = h_0 + \sum_{s=1}^{m-1} \sum_{\substack{1 \leq \ell_1 < \dots < \ell_s \leq m \\ \ell_j \neq p, \forall j}} h^{(\ell_1, \dots, \ell_s)} X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_s}.$$

Comparando as duas expressões obtidas para g e aplicando o Lema 5.9, obtemos que

$$h_0 = 0$$

$$s_0 u X_{i_1} \cdots X_{i_t} = h^{(i_1, \dots, i_t)} X_{i_1} \cdots X_{i_t}$$

$$\left(\sum_{\ell=0}^{v-1} s_{\ell+1} \sigma_1^{\ell+1}(u) X_1^\ell \right) X_1 X_{i_1} \cdots X_{i_t} = h^{(1, i_1, \dots, i_t)} X_1 X_{i_1} \cdots X_{i_t},$$

isto é

$$s_0 u = h^{(i_1, \dots, i_t)} \in E_{i_1, \dots, i_t} [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}]$$

$$e \sum_{\ell=0}^{v-1} s_{\ell+1} \sigma_1^{\ell+1}(u) X_1^\ell = h^{(1, i_1, \dots, i_t)} \in E_{1, i_1, \dots, i_t} [X_1, \sigma_1] [X_{i_1}, \sigma_{i_1}] \cdots [X_{i_t}, \sigma_{i_t}].$$

Daí $s_0 u \in E_{i_1, \dots, i_t}$ e $s_{\ell+1} \sigma_1^{\ell+1}(u) \in E_{1, i_1, \dots, i_t}$, $\forall \ell$ com $0 \leq \ell \leq v-1$, e, em conseqüência, $s_0 \in E_{i_1, \dots, i_t} \cap R = A_{i_1, \dots, i_t}$, e $s_\ell \in E_{1, i_1, \dots, i_t} \cap R = A_{1, i_1, \dots, i_t}$ $\forall \ell$ com $1 \leq \ell \leq v$.

Assim $f_{\bar{\mu}} X^{\bar{\mu}} X_{i_1} \cdots X_{i_t} = f_{\bar{\mu}} u X_{i_1} \cdots X_{i_t} X^{\bar{\mu}} \in M_m$, $\forall \bar{\mu}$. Por isso, usando a aditividade em M_m , obtemos que $f \in M_m$, e a prova está completa.

6 - O Nil Radical Generalizado dos Anéis $R * \mathcal{L}$ e $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$.

Um anel R é dito *completamente primo* se R não tem divisores de zero não nulos. Um ideal P de R é chamado *completamente primo* se o anel quociente R/P é completamente primo.

O *nil radical generalizado* N é o radical definido pela classe dos anéis completamente primos ([7]). Assim, para um anel associativo R , se tem

$$N(R) = \cap \{P \triangleleft R : P \text{ é completamente primo} \}.$$

N é um radical hereditário que satisfaz $N \leq \gamma$, mas N não é um radical admissível ([9], Sec. 4). Em conseqüência disso os resultados dos parágrafos 2,3 e

5 não podem ser utilizados para calcular o nil radical generalizado das extensões $R[X, \mathcal{D}]$, $R(X, \mathcal{A})$ e $R[X, \mathcal{A}]$. Mesmo assim vamos provar neste parágrafo que o nil radical generalizado dos anéis $R * \mathcal{L}$ e $R(X, \mathcal{A})$ é um ideal estendido do anel R .

Seja S qualquer anel extensão de R . Se $P \triangleleft S$ é completamente primo, então é claro que o ideal $P \cap R$ de R é completamente primo. Esse resultado é usado na prova dos Lemas 6.1 e 6.4 seguintes.

Consideremos o anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$. Para o anel R definimos

$$N_{\mathcal{L}}(R) = \cap \{P \triangleleft R : P \text{ é um } \mathcal{L}\text{-ideal completamente primo}\}.$$

É claro que $N_{\mathcal{L}}(R)$ é um \mathcal{L} -ideal de R . Sendo que todo ideal I do anel de operadores diferenciais $R * \mathcal{L}$ se contrai num \mathcal{L} -ideal $I \cap R$ do anel R , prova-se facilmente o seguinte resultado.

LEMA 6.1 - Se $R * \mathcal{L}$ é um anel de operadores diferenciais, então

$$N_{\mathcal{L}}(R) \subseteq N(R * \mathcal{L}) \cap R.$$

LEMA 6.2 - Se Q é um \mathcal{L} -ideal completamente primo do anel R , então o ideal estendido $Q * \mathcal{L}$ de $R * \mathcal{L}$ também é completamente primo.

PROVA - Suponhamos que $Q * \mathcal{L}$ não é completamente primo. Nesse caso existem elementos $f, g \in R * \mathcal{L} \setminus Q * \mathcal{L}$ tais que $fg \in Q * \mathcal{L}$.

Sejam $f = \sum_{\bar{\nu} \leq \bar{\nu}_0} a_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}}$ e $g = \sum_{\bar{\mu} \leq \bar{\mu}_0} b_{\bar{\mu}} X^{\bar{\mu}}$. Como

$$Q * \mathcal{L} = \left\{ h = \sum_{\bar{p}} c_{\bar{p}} X^{\bar{p}} \in R * \mathcal{L} : c_{\bar{p}} \in Q, \forall \bar{p} \right\},$$

existem $\nu_1 = \max \{ \bar{\nu} \leq \bar{\nu}_0 : a_{\bar{\nu}} \notin Q \}$ e $\mu_1 = \max \{ \bar{\mu} \leq \bar{\mu}_0 : b_{\bar{\mu}} \notin Q \}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_0$ e $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_0$.

As regras de multiplicação em $R * \mathcal{L}$ e a Proposição I.1.1 permitem escrever $fg = a_{\bar{\nu}_0} b_{\bar{\mu}_0} X^{\bar{\nu}_0 + \bar{\mu}_0} + \sum_{\bar{\rho} < \bar{\nu}_0 + \bar{\mu}_0} d_{\bar{\rho}} X^{\bar{\rho}}$, para certos elementos $d_{\bar{\rho}}$ do anel R .

Do fato $fg \in Q * \mathcal{L}$ obtém-se $a_{\bar{\nu}_0} b_{\bar{\mu}_0} \in Q$. Logo $a_{\bar{\nu}_0} \in Q$ ou $b_{\bar{\mu}_0} \in Q$ (pois Q é completamente primo), o que é uma contradição.

Se Θ é uma família de \mathcal{L} -ideais do anel R , então é rotineiro provar que $(\cap \{I : I \in \Theta\}) * \mathcal{L} = \cap \{I * \mathcal{L} : I \in \Theta\}$. Esse resultado é usado no seguinte

TEOREMA 6.3 – Se $R * \mathcal{L}$ é um anel de operadores diferenciais, então

$$N(R * \mathcal{L}) = N_{\mathcal{L}}(R) * \mathcal{L} .$$

PROVA – Como consequência do Lema 6.1, temos

$$N_{\mathcal{L}}(R) * \mathcal{L} \subseteq (N(R * \mathcal{L}) \cap R) * \mathcal{L} \subseteq N(R * \mathcal{L}) .$$

Por outro lado, o Lema 6.2 garante que $N(R * \mathcal{L}) \subseteq P * \mathcal{L}$, para todo \mathcal{L} -ideal completamente primo P de R . Por isso

$$\begin{aligned} N(R * \mathcal{L}) &\subseteq \cap \{P * \mathcal{L} : P \triangleleft R \text{ é um } \mathcal{L}\text{-ideal completamente primo}\} \\ &= (\cap \{P \triangleleft R : P \text{ é um } \mathcal{L}\text{-ideal completamente primo}\}) * \mathcal{L} \\ &= N_{\mathcal{L}}(R) * \mathcal{L} , \end{aligned}$$

e temos o resultado desejado.

Agora consideremos um anel com automorfismos $(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ e definamos o conjunto

$$N_{\mathcal{A}}(R) = \cap \{P \triangleleft_{\mathcal{A}} R : P \text{ é completamente primo}\} .$$

É fácil provar que $N_{\mathcal{A}}(R)$ é um ideal \mathcal{A} -invariante do anel R . Pela razão de todo ideal I do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ se contrair num ideal \mathcal{A} -invariante $I \cap R$ de R , temos o seguinte

LEMA 6.4 – Para cada skew anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ se tem $N_{\mathcal{A}}(R) \subseteq N(R\langle X, \mathcal{A} \rangle) \cap R$.

Procedendo como na prova do Lema 6.2 e utilizando as regras de multiplicação em $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ junto com o Corolário I.2.3, podemos provar o

LEMA 6.5 – Se P é um ideal \mathcal{A} -invariante e completamente primo do anel R , então o ideal $P\langle X, \mathcal{A} \rangle$ de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ também é completamente primo.

Se Θ é qualquer família de ideais \mathcal{A} -invariantes do anel R , então

$$(\cap \{J : J \in \Theta\})\langle X, \mathcal{A} \rangle = \cap \{J\langle X, \mathcal{A} \rangle : J \in \Theta\} .$$

Usando esse resultado e os Lemas 6.4 e 6.5, prova-se o

TEOREMA 6.6 – Para cada skew anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ se tem

$$N(R\langle X, \mathcal{A} \rangle) = N_{\mathcal{A}}(R)\langle X, \mathcal{A} \rangle .$$

CAPÍTULO III

IDEAIS PRIMOS, FORTEMENTE PRIMOS E NÃO SINGULARES DO SKEW ANEL $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$

Neste Capítulo vamos estudar os ideais fechados do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Depois, com esta noção, estudaremos os ideais primos, fortemente primos e não singulares do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, quando os automorfismos de \mathcal{A} comutam entre si.

1 – O Anel Completo de \mathcal{A} -quocientes à Esquerda Q de R .

Como em [17], vamos construir um anel de quocientes Q . Como Q herda as propriedades básicas da construção do anel clássico de Martindale, as demonstrações destas propriedades vão ser omitidas.

Consideremos um anel com automorfismo (R, \mathcal{A}, U) , onde R é \mathcal{A} -primo.

Se I e J são ideais \mathcal{A} -invariantes não nulos do anel R , então $I+J$, IJ , e $I \cap J$ também são ideais \mathcal{A} -invariantes não nulos de R . Trivialmente R é um ideal \mathcal{A} -invariante não nulo de R . Assim consideremos o filtro dos ideais de R $\{I \triangleleft_{\mathcal{A}} R : I \neq 0\}$ que, a partir de agora, denotaremos com $\mathfrak{F}(R)$.

Seja I um ideal de R . Se $f: I \rightarrow R$ é um R -homomorfismo à esquerda, então denotaremos isto com $f: {}_R I \rightarrow {}_R R$. Além disso, a imagem de um elemento $a \in I$ por f será escrita af .

Se no conjunto $\Lambda = \{(f, I) : f: {}_R I \rightarrow {}_R R, I \in \mathfrak{S}(R)\}$ definimos a relação: $(f, I) \sim (g, J)$ se, e somente se, existe $H \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $H \subseteq I \cap J$ e $af = ag$, $\forall a \in H$, então é fácil provar que " \sim " é uma relação de equivalência.

Denotemos com Q o conjunto quociente Λ / \sim e com $[f, I]$ a classe de equivalência em Q do elemento (f, I) de Λ .

É rotineiro provar o seguinte. Se em Q definimos

$$[f, I] + [g, J] = [f + g, I \cap J]$$

$$[f, I][g, J] = [f \circ g, JI]$$

para todo $[f, I], [g, J] \in Q$, então essas operações estão bem definidas e Q é um anel com unidade $[id, R]$. Esse anel Q será chamado o *anel completo de \mathcal{A} -quocientes à esquerda de R* .

Cada automorfismo $\sigma \in \mathcal{A}$ pode ser estendido para um único automorfismo de Q , que também será denotado com σ .

Denotemos com C o centro do anel Q e com $C_{\mathcal{A}}$ o conjunto

$$C_{\mathcal{A}} = \{c \in C : \sigma(c) = c, \forall \sigma \in \mathcal{A}\}.$$

O seguinte resultado pode ser provado como o Lema 1.2 em [5]

LEMA 1.1 – Se o anel $(R, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ é \mathcal{A} -primo, então

- (i) $R \subseteq Q$;
- (ii) se $(f, I) \in \Lambda$, então existe $q \in Q$ tal que $af = aq$, $\forall a \in I$; além disso, $q \in C$ se, e somente se, f é um homomorfismo de R -bimódulos;

- (iii) se $q_1, \dots, q_n \in Q$ então existe $I \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $Iq_i \subseteq R, \forall i$ com $1 \leq i \leq n$;
- (iv) seja $I \in \mathfrak{S}(R)$. Se $q \in Q$ é tal que $Iq = 0$, ou $qI = 0$, então $q = 0$;
- (v) Q é \mathcal{A} -primo e $(Q, \mathcal{A}, \mathcal{U})$ satisfaz a condição (K) (ver pág. 14).

Assim, como uma das conseqüências desse Lema, podemos construir o skew anel $Q(X, \mathcal{A})$. Prova-se sem dificuldade que $R(X, \mathcal{A})$ é um subanel de $Q(X, \mathcal{A})$.

Outra conseqüência do Lema 1.1 é o seguinte

LEMA 1.2 - Se $q \in Q$ é tal que $qR = Rq$ e $\sigma(q) = q, \forall \sigma \in \mathcal{A}$, então o elemento q é inversível em Q . Em particular $C_{\mathcal{A}}$ é um corpo.

É facil provar que, se $I \in \mathfrak{S}(Q)$, então $I \cap R \in \mathfrak{S}(R)$.

Usando o Lema 1.1 e as observações anteriores, podemos provar o

LEMA 1.3 - Se α é um elemento de $Q(X, \mathcal{A})$, então

- (i) existe $I \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $I\alpha \subseteq R(X, \mathcal{A})$,
- (ii) se $H \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $H\alpha = 0$, ou $\alpha H = 0$, então $\alpha = 0$.

No parágrafo 2 do Capítulo I definimos, para cada elemento não nulo $\alpha = \sum_{\bar{v}} r_{\bar{v}} X^{\bar{v}}$ de $R(X, \mathcal{A})$, o \bar{v} -ésimo coeficiente (à esquerda) de α que daqui em diante denotaremos com $c_{\bar{v}}^E(\alpha)$, o coeficiente principal (à esquerda) de α , $\ell c_E(\alpha)$, e o suporte (à esquerda) de α , $\text{Supp}_E(\alpha)$.

Dado que o elemento α pode escrever-se na forma $\alpha = \sum_{\bar{v}} X^{\bar{v}} s_{\bar{v}}$ (com coeficientes à direita $s_{\bar{v}} = \sigma^{-\bar{v}}(r_{\bar{v}}), \forall \bar{v}$), é-nos facultado definir os respectivos conceitos anteriores também "à direita". Com isso fica claro que $c_{\bar{v}}^D(\alpha) = \sigma^{-\bar{v}}(c_{\bar{v}}^E(\alpha)), \forall \bar{v}$, $\ell c_D(\alpha) = \sigma^{-\theta\alpha}(\ell c_E(\alpha))$, e $\text{Supp}_D(\alpha) = \text{Supp}_E(\alpha)$.

Assim o suporte de α , $\text{Supp}(\alpha)$, e o grau de α , $\partial \alpha$, estão bem definidos, independentemente de considerar a representação de α com coeficientes à esquerda ou à direita.

Um ideal I do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ será chamado *R-disjunto* se $I \cap R = 0$.

Seja I um ideal *R-disjunto* não nulo do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Diz-se que um elemento não nulo α de I é *de suporte minimal em I* se para todo $\beta \in I$ com $\text{Supp}(\beta) \not\subseteq \text{Supp}(\alpha)$ se tem $\beta = 0$.

Para cada ideal *R-disjunto* não nulo I de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, definimos os conjuntos

$$M(I) = \{ \alpha \in I : \alpha \text{ é de suporte minimal em } I \} ,$$

$$\text{Min}(I) = \{ \text{Supp}(\alpha) : \alpha \in M(I) \} .$$

O seguinte resultado pode ser provado sem dificuldade.

LEMA 1.4 - Seja I um ideal *R-disjunto* não nulo do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Se, para cada $\Gamma \in \text{Min}(I)$ e cada $\bar{\nu} \in \Gamma$, definimos o conjunto

$$\Theta_{\Gamma, \bar{\nu}}(I) = \{ r \in R : \text{Existe } \alpha \in I \text{ com } \text{Supp}(\alpha) = \Gamma \text{ e } c_{\bar{\nu}}^E(\alpha) = r \} \cup \{0\} ,$$

então $\Theta_{\Gamma, \bar{\nu}}(I)$ pertence à $\mathfrak{F}(R)$ e coincide com o conjunto

$$\{ r \in R : \text{Existe } \beta \in I \text{ com } \text{Supp}(\beta) = \Gamma \text{ e } c_{\bar{\nu}}^D(\beta) = r \} \cup \{0\} .$$

2 - Ideais Fechados do Skew Anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$.

Neste parágrafo definimos os ideais fechados do skew anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ de forma análoga à da definição dada em [8], parágrafo 1, e vamos provar resultados que generalizam resultados anteriores, e portanto os resultados de [6] para ideais fechados de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$.

Para cada ideal R -disjunto não nulo I de $R(X, \mathcal{A})$ definimos o *fecho* de I por

$$[I]_R = \{ \alpha \in R(X, \mathcal{A}) : \text{Existe } H \in \mathfrak{S}(R) \text{ tal que } H\alpha \subseteq I \}$$

Procedendo como na prova do Lema 1.1 em [8] pode-se provar o

LEMA 2.1 – Se I é um ideal R -disjunto não nulo de $R(X, \mathcal{A})$, então $[I]_R$ é um ideal R -disjunto não nulo de $R(X, \mathcal{A})$ que satisfaz $I \subseteq [I]_R$ e $\text{Min}(I) = \text{Min}([I]_R)$.

Um ideal R -disjunto I de $R(X, \mathcal{A})$ é chamado *fechado* se $I = 0$ ou $[I]_R = I$.

Cada automorfismo extensão do automorfismo $\sigma \in \mathcal{A}$ a todo o anel $Q(X, \mathcal{A})$ será denotado outra vez com σ .

Se $\bar{\rho}$ e $\bar{\nu}$ são dois elementos de Ω_1^* , então segue da definição de $\sigma^{\bar{\rho}}$ e das propriedades do produto em $Q(X, \mathcal{A})$ que existe um elemento inversível $v^{(\bar{\rho}, \bar{\nu})}$ de R tal que $\sigma^{\bar{\rho}}(X^{\bar{\nu}}) = v^{(\bar{\rho}, \bar{\nu})} X^{\bar{\nu}}$. Esse fato e as notações

$$(\mu_1, \dots, \mu_n)^T = (\mu_n, \dots, \mu_1) \quad \text{e} \quad -(\mu_1, \dots, \mu_n) = (-\mu_1, \dots, -\mu_n)$$

são usados no seguinte resultado.

TEOREMA 2.2 – Se I é um ideal R -disjunto não nulo do anel $R(X, \mathcal{A})$, então $[I]_R$ é o maior ideal R -disjunto não nulo J de $R(X, \mathcal{A})$ tal que $I \subseteq J$ e $\text{Min}(I) = \text{Min}(J)$.

PROVA – Por causa do Lema 2.1 é suficiente provar que, se J é um ideal R -disjunto não nulo de $R(X, \mathcal{A})$ tal que $I \subseteq J$ e $\text{Min}(I) = \text{Min}(J)$, então $J \subseteq [I]_R$.

Seja agora J um tal ideal. Vejamos primeiro que $M(J) \subseteq [I]_R$.

Tomemos $\alpha \in M(J)$ com $\Gamma = \text{Supp}(\alpha)$. Uma vez que $\Gamma \in \text{Min}(J) = \text{Min}(I)$, existe $\beta \in M(I)$ tal que $\text{Supp}(\beta) = \Gamma$.

Sejam $\alpha = \sum_{\bar{\nu} \in \Gamma} a_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}}$, $\beta = \sum_{\bar{\nu} \in \Gamma} b_{\bar{\nu}} X^{\bar{\nu}}$ e $\bar{\nu}_0 \in \Gamma$. Se, para cada $\bar{\rho} \in \Omega_1^*$ e cada $r \in R$, definimos $u = (v^{(\bar{\rho}, \bar{\nu}_0)})^{-1}$ e

$$\epsilon(r, \bar{\rho}) = \sigma^{\bar{\rho}}(b_{\bar{\nu}_0}) r \alpha - \sigma^{\bar{\rho}}(\beta) \sigma^{-\bar{\nu}_0^T}(u r a_{\bar{\nu}_0}),$$

então $\epsilon(r, \bar{\rho}) \in J$ e $\text{Supp}(\epsilon(r, \bar{\rho})) \not\subseteq \Gamma$. Assim $\epsilon(r, \bar{\rho}) = 0$ e, em conseqüência, $\sigma^{\bar{\rho}}(b_{\bar{v}_0}) r \alpha = \sigma^{\bar{\rho}}(\beta) \sigma^{-\bar{v}_0^T}(\text{ura}_{\bar{v}_0}) \in I, \forall r \in R, \forall \bar{\rho} \in \Omega_1^*$. Daí obtemos que $H\alpha \subseteq I$ com $H = \sum_{\bar{\rho} \in \Omega_1^*} R \sigma^{\bar{\rho}}(b_{\bar{v}_0}) R \in \mathfrak{S}(R)$, isto é, $\alpha \in [I]_R$.

Agora sejam $\alpha \in J, \Gamma = \text{Supp}(\alpha)$ e $n = |\Gamma|$. Nós vamos provar, por indução sobre $n \geq 1$, que existe $H \in \mathfrak{S}(R)$ tal que

$$H\alpha \subseteq I, \quad \text{para todo } \gamma \in J \text{ com } \text{Supp}(\gamma) \subseteq \Gamma.$$

Caso $n = 1$: Neste caso $\alpha \in M(J)$ e todo $\gamma \in J$ com $\text{Supp}(\gamma) \subseteq \Gamma$ também pertence a $M(J)$ e $\text{Supp}(\gamma) = \Gamma$. Pelo que foi provado antes o ideal de $\mathfrak{S}(R)$, $H = \sum_{\bar{\rho} \in \Omega_1^*} R \sigma^{\bar{\rho}}(b_{\bar{v}_0}) R$, independe do elemento α e portanto satisfaz

$$H\gamma \subseteq I, \quad \text{para todo } \gamma \in I \text{ com } \text{Supp}(\gamma) = \Gamma.$$

Seja $m > 1$ e suponhamos que a afirmação vale para todo $n < m$.

Caso $n = m$: Seja $\gamma \in J$ com $\gamma = \sum_{\bar{v} \in \text{Supp}(\gamma)} c_{\bar{v}} X^{\bar{v}}$ e $\text{Supp}(\gamma) \subseteq \Gamma$.

Se $\text{Supp}(\gamma) \not\subseteq \Gamma$ então segue da hipótese de indução que existe $H_1 \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $H_1 \gamma_1 \subseteq I$ para todo $\gamma_1 \in J$ com $\text{Supp}(\gamma_1) \subseteq \text{Supp}(\gamma)$.

Se $\text{Supp}(\gamma) = \Gamma$, consideramos um $\alpha_1 \in M(J)$ tal que $\text{Supp}(\alpha_1) \subseteq \Gamma$.

Como $\text{Min}(I) = \text{Min}(J)$ existe $\beta \in M(I)$ tal que $\text{Supp}(\beta) = \text{Supp}(\alpha_1)$.

Seja $\beta = \sum_{\bar{v} \in \text{Supp}(\alpha_1)} b_{\bar{v}} X^{\bar{v}}$. Se $\bar{v}_0 \in \text{Supp}(\alpha_1)$ então, como antes, o elemento $\epsilon(r, \bar{\rho}) = \sigma^{\bar{\rho}}(b_{\bar{v}_0}) r \gamma - \sigma^{\bar{\rho}}(\beta) \sigma^{-\bar{v}_0^T}(\text{ura}_{\bar{v}_0})$ pertence a J e $\text{Supp}(\epsilon(r, \bar{\rho})) \subseteq \Gamma \setminus \{\bar{v}_0\}, \forall r \in R, \forall \bar{\rho} \in \Omega_1^*$. Sendo $|\Gamma \setminus \{\bar{v}_0\}| < m$, obtemos, usando mais uma vez a hipótese de indução, que existe um ideal $L \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $L\epsilon(r, \bar{\rho}) \subseteq I, \forall r \in R, \forall \bar{\rho} \in \Omega_1^*$. Como $\beta \in I$, é fácil provar que $H_2 \gamma \subseteq I$ com $H_2 = \sum_{\bar{\rho} \in \Omega_1^*} L \sigma^{\bar{\rho}}(b_{\bar{v}_0}) R \in \mathfrak{S}(R)$.

Se definimos $H = H_1 \cap H_2$ então $H \in \mathfrak{S}(R)$, e H satisfaz

$$H \gamma \subseteq I, \quad \text{para todo } \gamma \in J \text{ com } \text{Supp}(\gamma) \subseteq \Gamma.$$

Como consequência de tudo, temos que, dado $\alpha \in J$, existe $H \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $H\alpha \subseteq I$, isto é $\alpha \in [I]_R$, e a prova do Teorema está completa.

Com uma prova semelhante à do Teorema 1.3 em [8] conseguimos o seguinte resultado

COROLÁRIO 2.3 – Se I é um ideal R -disjunto não nulo de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, então $[I]_R$ é o menor ideal fechado de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ que contém I . Mais ainda, $[I]_R$ é o único ideal fechado do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ que contém I e satisfaz

$$\text{Min}([I]_R) = \text{Min}(I).$$

Seja P um ideal R -disjunto, não nulo e primo do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Se $\alpha \in [P]_R$, então existe $H \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $H\alpha \subseteq P$. Com isso pode-se provar que $H R\langle X, \mathcal{A} \rangle \alpha \subseteq P$. Sendo P primo R -disjunto, obtemos que $\alpha \in P$.

Acabamos de provar a

PROPOSIÇÃO 2.4 – Seja P um ideal R -disjunto não nulo de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Se P é primo, então P é fechado.

Finalizamos este parágrafo com o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.5 – Seja I um ideal Q -disjunto não nulo do anel $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Se definimos $I_0 = I \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, então I_0 é um ideal R -disjunto não nulo do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ tal que $\text{Min}(I_0) = \text{Min}(I)$.

PROVA – É claro que I_0 é um ideal R -disjunto não nulo de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Seja $\Gamma \in \text{Min}(I_0)$. Nesse caso existe um $\alpha \in M(I_0)$ tal que $\Gamma = \text{Supp}(\alpha)$. Suponhamos que exista $\beta \in I$ não nulo tal que $\text{Supp}(\beta) \not\subseteq \Gamma$. Se $H \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $H\beta$

$\subseteq R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ (Lema 1.3), então existe um $h \in H$ tal que $0 \neq h\beta \in I_0$ com $\text{Supp}(h\beta) \not\subseteq \Gamma$, o que contradiz o fato de que $\alpha \in M(I_0)$.

Assim $\alpha \in M(I)$ e $\Gamma \in \text{Min}(I)$. Isso prova que $\text{Min}(I_0) \subseteq \text{Min}(I)$. Agora seja $\Gamma \in \text{Min}(I)$. Se $\gamma \in M(I)$ é tal que $\text{Supp}(\gamma) = \Gamma$, então, usando mais uma vez o Lema 1.3, prova-se que existe um elemento $h \in R$ tal que $0 \neq h\gamma \in I_0$. É fácil provar que $h\gamma \in M(I_0)$ com $\text{Supp}(h\gamma) = \Gamma$, isto é, $\Gamma \in \text{Min}(I_0)$. Logo obtemos a igualdade $\text{Min}(I_0) = \text{Min}(I)$.

3 - Correspondência entre os Ideais Fechados de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ Quando os Automorfismos de \mathcal{A} Comutam entre Si.

Seja R um anel com automorfismos \mathcal{A} que comutam entre si. Neste parágrafo vamos mostrar que existe uma correspondência um a um entre os ideais fechados dos anéis $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ que preserva ideais primos.

No resto deste capítulo vamos admitir que R é um anel com automorfismos \mathcal{A} que comutam entre si. Se o anel R é \mathcal{A} -primo, então não é difícil provar que os automorfismos, que estendem os automorfismos de R a todo Q , também comutam entre si. Como consequência disso temos que $\sigma_\lambda(X_\iota) = X_\iota$, $\forall \lambda, \iota \in \Lambda^*$, e portanto $X_\lambda X_\iota = X_\iota X_\lambda$, $\forall \lambda, \iota \in \Lambda^*$.

Iniciamos com o seguinte

LEMA 3.1 - Seja I um ideal R -disjunto não nulo do skew anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Para cada $\Gamma \in \text{Min}(I)$ e cada elemento $\bar{v}_0 \in \Gamma$ existe um único elemento $\mu = \mu_{r, \bar{v}_0}$ de $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ com $\text{Supp}(\mu) = \Gamma$, $c_{\bar{v}_0}^E(\mu) = 1$, e tal que

$$\alpha = c_{\bar{v}_0}^E(\alpha) \mu = \mu c_{\bar{v}_0}^D(\alpha), \quad \forall \alpha \in I \text{ com } \text{Supp}(\alpha) = \Gamma.$$

Além disso $q\mu = \mu \sigma^{-\bar{v}_0}(q)$, $\forall q \in Q$, e $X^{\bar{p}}\mu = \mu X^{\bar{p}}$, $\forall \bar{p} \in \Omega_1^*$.

PROVA - Consideremos o ideal $J = \Theta_{\Gamma, \bar{v}_0} \in \mathfrak{S}(R)$ do Lema 1.4. Para cada $r \in J$

existe um único elemento $\alpha \in M(I)$ tal que $\text{Supp}(\alpha) = \Gamma$ e $c_{\bar{v}_0}^E(\alpha) = r$, pois $\Gamma \in \text{Min}(I)$. Logo podemos definir, para cada $\bar{v} \in \Gamma$, a função $f_{\bar{v}}: J \rightarrow R$ por $c_{\bar{v}_0}^E(\alpha)f_{\bar{v}} = c_{\bar{v}}^E(\alpha)$.

É fácil provar que cada $f_{\bar{v}}$ é um R -homomorfismo à esquerda, e pelo Lema 1.1 (ii) para cada $\bar{v} \in \Gamma$ existe um elemento $q_{\bar{v}} \in Q$ tal que $a f_{\bar{v}} = a q_{\bar{v}}$, $\forall a \in J$.

Se definimos $\mu = \sum_{\bar{v} \in \Gamma} q_{\bar{v}} X^{\bar{v}}$, então $\mu \in Q(X, \mathcal{A})$, $\text{Supp}(\mu) = \Gamma$ e $c_{\bar{v}_0}^E(\mu) = q_{\bar{v}_0} = 1$, pois $a f_{\bar{v}_0} = a$, $\forall a \in J$.

Agora seja α um elemento de I tal que $\text{Supp}(\alpha) = \Gamma$ e $\alpha = \sum_{\bar{v} \in \Gamma} a_{\bar{v}} X^{\bar{v}}$. Como $a_{\bar{v}_0} f_{\bar{v}} = a_{\bar{v}}$, $\forall \bar{v} \in \Gamma$, temos

$$\alpha = \sum_{\bar{v} \in \Gamma} a_{\bar{v}_0} f_{\bar{v}} X^{\bar{v}} = \sum_{\bar{v} \in \Gamma} a_{\bar{v}_0} q_{\bar{v}} X^{\bar{v}} = a_{\bar{v}_0} \sum_{\bar{v} \in \Gamma} a_{\bar{v}} X^{\bar{v}} = a_{\bar{v}_0} \mu.$$

Se $\eta \in Q(X, \mathcal{A})$ é tal que $\alpha = c_{\bar{v}_0}^E(\alpha) \eta$ para todo $\alpha \in I$ com $\text{Supp}(\alpha) = \Gamma$, então $c_{\bar{v}_0}^E(\alpha)(\mu - \eta) = 0$, $\forall \alpha \in I$ com $\text{Supp}(\alpha) = \Gamma$. Por isso $J(\mu - \eta) = 0$, e usando o Lema 1.1 (iv), concluímos que $\eta = \mu$, o que prova a unicidade do elemento μ .

Consideremos um automorfismo σ de A , $\bar{v} \in \Gamma$ e $c_{\bar{v}_0}^E(\alpha) \in J$. As igualdades

$$\begin{aligned} c_{\bar{v}_0}^E(\alpha) \sigma(q_{\bar{v}}) &= \sigma\left(\sigma^{-1}\left(c_{\bar{v}_0}^E(\alpha)\right) q_{\bar{v}}\right) = \sigma\left(c_{\bar{v}_0}^E\left(\sigma^{-1}(\alpha)\right) q_{\bar{v}}\right) = \sigma\left(c_{\bar{v}_0}^E\left(\sigma^{-1}(\alpha)\right)\right) \\ &= c_{\bar{v}}^E\left(\sigma\left(\sigma^{-1}(\alpha)\right)\right) = c_{\bar{v}}^E(\alpha) = c_{\bar{v}_0}^E(\alpha) q_{\bar{v}} \end{aligned}$$

permitem escrever $J(\sigma(q_{\bar{v}}) - q_{\bar{v}}) = 0$, $\forall \bar{v} \in \Gamma$. Usando mais uma vez o Lema 1.1 (iv), concluímos que $\sigma(q_{\bar{v}}) = q_{\bar{v}}$, $\forall \bar{v} \in \Gamma$, $\forall \sigma \in \mathcal{A}$, logo $\sigma(\mu) = \mu$, $\forall \sigma \in \mathcal{A}$. Por isso e pela Proposição 1.2.2 (2) se tem que $X^{\bar{p}} \mu = \mu X^{\bar{p}}$, $\forall \bar{p} \in \Omega_1^*$.

Para $a, b \in J$ definamos o elemento $\beta(a, b) = b(a\mu - \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(a))$ de I . A inclusão $\text{Supp}(\beta(a, b)) \not\subseteq \Gamma$ conduz a $\beta(a, b) = 0$, $\forall a, b \in J$. Com isso se obtém $J(a\mu - \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(a)) = 0$, $\forall a \in J$. Logo $a\mu = \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(a)$, $\forall a \in J$.

Se $r \in R$ e $a \in J$, então

$$a(r\mu - \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(r)) = ar\mu - a\mu\sigma^{-\bar{v}_0}(r) = ar\mu - \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(ar) = 0.$$

Assim $J(r\mu - \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(r)) = 0$, $\forall r \in R$, e temos que

$$r\mu = \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(r), \quad \forall r \in R.$$

Agora seja $q \in Q$ com $H \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $H_q \subseteq R$. Se $h \in H$, então

$$h(q\mu - \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(q)) = hq\mu - h\mu\sigma^{-\bar{v}_0}(q) = hq\mu - \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(hq) = 0.$$

Em conseqüência $J(q\mu - \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(q)) = 0$, $\forall q \in Q$, e vem

$$q\mu = \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(q), \quad \forall q \in Q.$$

Em particular $\alpha = c_{\bar{v}_0}^E(\alpha)\mu = \mu\sigma^{-\bar{v}_0}(c_{\bar{v}_0}^E(\alpha)) = \mu c_{\bar{v}_0}^D(\alpha)$ para todo $\alpha \in I$ com $\text{Supp}(\alpha) = \Gamma$, e a prova está completa.

Para cada ideal R -disjunto não nulo I do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ denotamos com $M_Q(I)$ o conjunto de todos os elementos da forma $\mu = \mu_{\Gamma, \bar{v}_0}$ (onde $\Gamma \in \text{Min}(I)$ e $\bar{v}_0 \in \Gamma$) definidos no Lema 3.1.

Como conseqüência imediata do Lema 3.1 temos o seguinte

COROLÁRIO 3.2 – Se I é um ideal R -disjunto não nulo do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, então, para cada $\mu \in M_Q(I)$, existe um ideal $J \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $J\mu = \mu J \subseteq I$.

Seja I um ideal R -disjunto não nulo do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Um elemento não nulo α de $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é chamado *resto módulo I* se para todo $\beta \in I$ com $\text{Supp}(\beta) \subseteq \text{Supp}(\alpha)$ se tem $\beta = 0$.

Se $\alpha \in Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é um resto módulo I então é claro que $\alpha \notin [I]_Q$.

Agora estamos em condições de apresentar uma versão do algoritmo de divisão no anel $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$.

LEMA 3.3 – Sejam I um ideal Q -disjunto não nulo de $Q(X, \mathcal{A})$ e $I_0 = I \cap R(X, \mathcal{A})$. Se $\beta \in Q(X, \mathcal{A})$, então existem elementos $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(I_0)$, ($1 \leq i \leq n$), e $\gamma \in Q(X, \mathcal{A})$ tais que

$$\beta = \sum_{i=1}^n q_i \mu_i + \gamma, \quad \text{onde } \gamma = 0 \text{ ou } \gamma \text{ é um resto módulo } I.$$

PROVA – Seja β um elemento de $Q(X, \mathcal{A})$. Se $\beta = 0$ ou β é um resto módulo I , então o resultado é óbvio. Assim suponhamos que $\beta \neq 0$ não é um resto módulo I e $\Gamma = \text{Supp}(\beta)$. Nesse caso existe um elemento não nulo α de I tal que $\text{Supp}(\alpha) \subseteq \Gamma$. Sem perda de generalidade, podemos escolher $\alpha \in M(I)$. Então, se $\Gamma_1 = \text{Supp}(\alpha)$, temos que $\Gamma_1 \in \text{Min}(I) = \text{Min}(I_0)$ (Proposição 2.8).

Agora procedemos por indução sobre $u = |\text{Supp}(\beta)| \geq 1$.

Caso $u = 1$: Nesse caso α e β são da forma $\alpha = aX^{\bar{v}_0}$ e $\beta = bX^{\bar{v}_0}$ (com $a, b \in Q$).

Pelo Lema 1.1 temos que necessariamente $\mu_{\Gamma, \bar{v}_0} = X^{\bar{v}_0}$. Assim $\beta = b\mu_{\Gamma, \bar{v}_0}$ e o lema segue.

Seja $v > 1$ e suponhamos que o lema valha para todo u tal que $1 \leq u < v$.

Caso $u = v$: Consideremos um elemento arbitrário fixo $\bar{v}_1 \in \Gamma_1$ e $\mu_1 = \mu_{\Gamma_1, \bar{v}_1}$. Se $\beta_1 = \beta - c_{\bar{v}_1}^E(\beta)\mu_1$, então $c_{\bar{v}_1}^E(\beta_1) = 0$ (pois $c_{\bar{v}_1}^E(\mu_1) = 1$), logo $\text{Supp}(\beta_1) \not\subseteq \Gamma_1$.

Se β_1 é zero ou um resto módulo I , então de $\beta = c_{\bar{v}_1}^E(\beta)\mu_1 + \beta_1$ obtemos o resultado procurado. Noutro caso temos que $\beta_1 \in Q(X, \mathcal{A})$ com $|\text{Supp}(\beta_1)| \leq v - 1$. Então, pela hipótese de indução, existem $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(I_0)$ ($2 \leq i \leq n$) e $\gamma \in Q(X, \mathcal{A})$ tais que $\beta_1 = \sum_{i=2}^n q_i \mu_i + \gamma$ com $\gamma = 0$ ou γ igual a um resto módulo I . Assim obtemos $\beta = \sum_{i=1}^n q_i \mu_i + \gamma$ com esse γ .

OBSERVAÇÃO 3.4 – Procedendo como na prova do Lema anterior, podemos provar sem dificuldade a seguinte afirmação: sejam I um ideal Q -disjunto não nulo de

$Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $I_0 = I \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Se J é um subconjunto de Q , então, para cada $\beta \in JQ\langle X, \mathcal{A} \rangle$ (respectivamente $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle J$), existem elementos $b_i \in JQ$ (respectivamente QJ), $\mu_i \in M_Q(I_0)$ ($1 \leq i \leq n$), e $\gamma \in JQ\langle X, \mathcal{A} \rangle$ (respectivamente $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle J$) tais que

$$\beta = \sum_{i=1}^n b_i \mu_i + \gamma, \quad \text{com } \gamma = 0 \text{ ou } \gamma \text{ igual a um resto módulo } I.$$

Seja I um ideal R -disjunto não nulo de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Se $\mu = \mu_{\Gamma, \bar{v}_0} \in M_Q(I)$, então segue do Lema 3.1 que $(\sum_{\bar{v}} q_{\bar{v}} X^{\bar{v}}) \mu = \mu (\sum_{\bar{v}} \sigma^{-\bar{v}_0}(q_{\bar{v}}) X^{\bar{v}})$, $\forall \sum_{\bar{v}} q_{\bar{v}} X^{\bar{v}} \in Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Por isso é claro que $QM_Q(I) = M_Q(I)Q$ e $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle M_Q(I) = M_Q(I)Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$.

As provas dos seguintes resultados são semelhantes às provas dos resultados correspondentes em [8], e por isso não serão muito detalhadas.

PROPOSIÇÃO 3.5 - Sejam I um Ideal Q -disjunto não nulo de $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ e $I_0 = I \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Seja β um elemento do anel $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Então $\beta \in QM_Q(I_0) = M_Q(I_0)Q$ se, e somente se, existe um ideal $H \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $H\beta \subseteq I_0$.

PROVA - Seja $\beta \in M_Q(I_0)Q$ com $\beta = \sum_{i=1}^n \mu_i q_i$ ($\mu_i \in M_Q(I_0)$ e $q_i \in Q$ $\forall i$ com $1 \leq i \leq n$)

Para cada μ_i existe um $H_i \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $H_i \mu_i \subseteq I_0$ (Corolário 3.2). Se $H = \bigcap_{i=1}^n H_i$, então $H \in \mathfrak{S}(R)$ e $H\beta \subseteq I_0$.

Reciprocamente, suponhamos que $H_1 \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $H_1 \beta \subseteq I_0$. Se $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(I_0)$ ($1 \leq i \leq m$) e $\gamma \in Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ são tais que $\beta = \sum_{i=1}^m \mu_i q_i + \gamma$, com $\gamma = 0$ ou γ igual a um resto módulo I (Lema 3.3), e $H_2 \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $H_2 \left(\sum_{i=1}^m \mu_i q_i \right) \subseteq I_0$ (pela parte já provada), então $H = H_1 \cap H_2$ pertence a $\mathfrak{S}(R)$ e satisfaz $H\gamma \subseteq I_0$. Se γ é um resto módulo I então necessariamente $H\gamma = 0$. Daí γ

$\neq 0$ e temos uma contradição. Assim $\gamma = 0$ e daí $\beta \in M_Q(I)Q$.

COROLÁRIO 3.6 - Se I é um ideal Q -disjunto não nulo do anel $Q(X, \mathcal{A})$ e $I_0 = I \cap Q(X, \mathcal{A})$, então $[I]_Q = Q(X, \mathcal{A}) M_Q(I_0)$.

PROVA - Se $\alpha \in [I]_Q$, existe $L \in \mathfrak{S}(Q)$ tal que $L\alpha \subseteq I$. Se $H_1 = L \cap R$, segue que $H_1 \in \mathfrak{S}(R)$ e $H_1\alpha \subseteq I$. Sejam $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(I_0)$ ($1 \leq i \leq m$) e $\gamma \in Q(X, \mathcal{A})$ tais que $\alpha = \sum_{i=1}^m q_i \mu_i + \gamma$, com $\gamma = 0$ ou γ igual a um resto módulo I . Pela Proposição 3.5 existe $H_2 \in \mathfrak{S}(R)$ tal que

$$H_2 \left(\sum_{i=1}^m q_i \mu_i \right) \subseteq I_0.$$

Se $H = H_1 H_2$, temos $H \in \mathfrak{S}(R)$ e $H\gamma \subseteq I$. Por causa disso γ não pode ser um resto módulo I . Logo $\gamma = 0$ e, portanto, $\alpha = \sum_{i=1}^m q_i \mu_i \in Q(X, \mathcal{A}) M_Q(I_0)$.

Agora seja $\beta \in Q(X, \mathcal{A}) M_Q(I_0)$ com $\beta = \sum_{i=1}^m f_i \mu_i$,

$$\text{onde } f_i = \sum_{\bar{v} \in \text{Supp}(f_i)} X^{\bar{v}} q_{\bar{v}}^{(i)} \text{ pertence a } Q(X, \mathcal{A})$$

e $\mu_i = \mu_{\Gamma_i, \bar{v}_i} \in M_Q(I_0)$. Se $L \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $L\mu_i \subseteq I_0$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq n$, então $H = QLQ \in \mathfrak{S}(Q)$. É fácil provar que $H\beta \subseteq I$. Então $\beta \in [I]_Q$ e temos a igualdade $[I]_Q = Q(X, \mathcal{A}) M_Q(I_0)$.

COROLÁRIO 3.7 - Se I é um ideal R -disjunto não nulo de $R(X, \mathcal{A})$, então $[I]_R = Q(X, \mathcal{A}) M_Q(I) \cap R(X, \mathcal{A})$.

PROVA - Se $\alpha \in [I]_R$, existe $H \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $H\alpha \subseteq I$. Por isso e pela Proposição 3.5 temos $\alpha \in Q M_Q(I)$. Logo $\alpha \in Q(X, \mathcal{A}) M_Q(I) \cap R(X, \mathcal{A})$.

Reciprocamente, se $\beta \in Q(X, \mathcal{A}) M_Q(I) \cap R(X, \mathcal{A})$, esse β é da forma $\beta = \sum_{i=1}^n \sum_{\bar{v} \in \Gamma_i} X^{\bar{v}} q_{\bar{v}}^{(i)} \mu_i$ com $q_{\bar{v}}^{(i)} \in Q$ e $\mu_i \in M_Q(I)$. Pela Proposição 3.5

existe $H \in \mathfrak{S}(R)$ tal que $H q_{\overline{p}}^{(i)} \mu_i \subseteq I$, $\forall \overline{p} \in \Gamma_i$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq n$. Por isso $H\beta \subseteq I$ e temos $\beta \in [I]_R$.

Agora apresentamos o resultado principal deste parágrafo.

TEOREMA 3.8 – Se R é um anel \mathcal{A} -primo, então existe uma correspondência um a um entre os conjuntos

$$(i) \quad \mathcal{C}(R\langle X, \mathcal{A} \rangle) = \{I \triangleleft R\langle X, \mathcal{A} \rangle : I \text{ é } R\text{-disjunto e } [I]_R = I\},$$

$$(ii) \quad \mathcal{C}(Q\langle X, \mathcal{A} \rangle) = \{I^* \triangleleft Q\langle X, \mathcal{A} \rangle : I^* \text{ é } Q\text{-disjunto e } [I^*]_Q = I^*\}.$$

Essa correspondência associa o ideal $I \in \mathcal{C}(R\langle X, \mathcal{A} \rangle)$ com o ideal $I^* \in \mathcal{C}(Q\langle X, \mathcal{A} \rangle)$ se $I^* \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle = I$ e $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle M_Q(I) = I^*$.

PROVA – Seja $J \in \mathcal{C}(Q\langle X, \mathcal{A} \rangle)$. Se $J_0 = J \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, pelo Corolário 3.6 temos que $J = Q\langle X, \mathcal{A} \rangle M_Q(J_0)$. Com isso, $J_0 = Q\langle X, \mathcal{A} \rangle M_Q(J_0) \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle = [J_0]_R$ (Corolário 3.7), isto é, $J_0 \in \mathcal{C}(R\langle X, \mathcal{A} \rangle)$.

Se $J' \in \mathcal{C}(Q\langle X, \mathcal{A} \rangle)$ também satisfaz $J' \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle = J_0$, então, usando mais uma vez o Corolário 3.6, temos $J' = [J']_Q = Q\langle X, \mathcal{A} \rangle M_Q(J_0) = J$.

Agora seja $I \in \mathcal{C}(R\langle X, \mathcal{A} \rangle)$. A igualdade $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle M_Q(I) = M_Q(I) Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ leva a afirmar que $I' = Q\langle X, \mathcal{A} \rangle M_Q(I)$ é um ideal Q -disjunto de $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$, que satisfaz $I' \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle = Q\langle X, \mathcal{A} \rangle M_Q(I) \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle = [I]_R = I$ (Corolário 3.7) e $[I']_Q = Q\langle X, \mathcal{A} \rangle M_Q(I) = I'$, isto é, $I' \in \mathcal{C}(Q\langle X, \mathcal{A} \rangle)$ com $I' \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle = I$. A prova está completa.

LEMA 3.9 – Se o anel R é \mathcal{A} -primo, então o anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é primo. Mais ainda, o anel $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é primo.

PROVA – Suponhamos que existam ideais não nulos A e B de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ tais que $AB = 0$. Nesse caso $(A \cap R)(B \cap R) = 0$ e temos $A \cap R = 0$ ou $B \cap R = 0$.

Vamos provar que $A \cap R = 0$ e $B \cap R = 0$. Para isso consideramos $\Gamma_1 \in \text{Min}(A)$ e $\Gamma_2 \in \text{Min}(B)$. Sejam $\bar{\nu}_1 = \max \Gamma_1$ e $\bar{\nu}_2 = \max \Gamma_2$. Sendo Ω_1^* totalmente ordenado, não é difícil provar que $\Theta_{\Gamma_1, \bar{\nu}_1}(A) \Theta_{\Gamma_2, \bar{\nu}_2}(B) = 0$, o que é contraditório.

Se $A \cap R = 0$, consideremos $\Gamma \in \text{min}(A)$ e $\bar{\nu}_0 \in \Gamma$. Sejam $a \in \Theta_{\Gamma, \bar{\nu}_1}(A)$ e $b \in B \cap R$. Pelo Lema 1.4 existe $\alpha \in A$ com $\text{supp}(\alpha) = \Gamma$ e $c_{\bar{\nu}_0}^D(\alpha) = a$. A igualdade $\alpha b = 0$ implica $c_{\bar{\nu}_0}^D(\alpha) b = 0$, $\forall \bar{\nu} \in \Gamma$. Em particular, $a b = 0$. Assim $\Theta_{\Gamma, \bar{\nu}_0}(A) (B \cap R) = 0$ e chegamos a $B \cap R = 0$.

Reciprocamente, se $B \cap R = 0$, consideramos $\Gamma \in \text{min}(B)$ e $\bar{\nu}_0 \in \Gamma$. Com isso prova-se, como acima, que $(A \cap R) \Theta_{\Gamma, \bar{\nu}_0}(B) = 0$, e temos $A \cap R = 0$.

Terminamos de provar que o anel $R(X, \mathcal{A})$ é primo.

Seja I um ideal não nulo de $Q(X, \mathcal{A})$. Se $0 \neq \alpha \in I$ e $H \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $H\alpha \subseteq R(X, \mathcal{A})$, então $0 \neq H\alpha \subseteq I \cap R(X, \mathcal{A})$. Com isso é fácil provar que o anel $Q(X, \mathcal{A})$ é primo, o que completa a prova do lema.

A seguir apresentamos o nosso segundo resultado importante deste parágrafo. Esse resultado, conforme foi dito antes, mostra que a correspondência descrita no Teorema 3.8 preserva ideais primos.

TEOREMA 3.10 - Se R é um anel \mathcal{A} -primo, então a correspondência descrita no Teorema 3.8 é uma correspondência um a um entre os conjuntos

$$(i) \quad \mathcal{P}(R(X, \mathcal{A})) = \{P \triangleleft R(X, \mathcal{A}) : P \text{ é } R\text{-disjunto}\},$$

$$(ii) \quad \mathcal{P}(Q(X, \mathcal{A})) = \{P^* \triangleleft Q(X, \mathcal{A}) : P^* \text{ é } Q\text{-disjunto}\}.$$

PROVA - Temos $\mathcal{P}(R(X, \mathcal{A})) \subseteq \mathcal{C}(R(X, \mathcal{A}))$ e $\mathcal{P}(Q(X, \mathcal{A})) \subseteq \mathcal{C}(Q(X, \mathcal{A}))$ (Proposição 2.4) e, pelo Lema 3.9, podemos considerar só ideais primos não nulos. Assim é suficiente provar que, se $0 \neq P \in \mathcal{C}(R(X, \mathcal{A}))$ e $0 \neq P^* \in \mathcal{C}(Q(X, \mathcal{A}))$ são tais

que $P^* \cap R(X, \mathcal{A}) = P$, então P é primo se, e somente se, P^* é primo.

Suponhamos que P seja primo. Se A e B são ideais de $T(X, \mathcal{A})$ tais que $P^* \subseteq A$, $P^* \subseteq B$ e $AB \subseteq P^*$, então

$$(A \cap R(X, \mathcal{A})) (B \cap R(X, \mathcal{A})) \subseteq AB \cap R(X, \mathcal{A}) \subseteq P^* \cap R(X, \mathcal{A}) = P.$$

Logo $A \cap R(X, \mathcal{A}) \subseteq P$ ou $B \cap R(X, \mathcal{A}) \subseteq P$, i.e., $A \cap R(X, \mathcal{A}) = P$ ou $B \cap R(X, \mathcal{A}) = P$.

Se $A \cap R(X, \mathcal{A}) = P$, então $\min(A \cap R(X, \mathcal{A})) = \min(P)$. Com isso $\min(P^*) = \min(A)$ (Proposição 2.5). Segue do Teorema 2.2 que $A = [P^*]_Q = P^*$. Se $B \cap R(X, \mathcal{A}) = P$, então prova-se de modo igual que $B = P^*$. Está provado então que P^* é primo.

Reciprocamente, seja P^* primo. Se A e B são ideais de $R(X, \mathcal{A})$ tais que $AB \subseteq P$, então temos que $(A \cap R)(B \cap R) \subseteq P \cap R = 0$. Sendo R \mathcal{A} -primo e os ideais $A \cap R$ e $B \cap R$ de R \mathcal{A} -invariantes, então $A \cap R = 0$ ou $B \cap R = 0$.

Suponhamos que $A \cap R = 0$. Nesse caso consideramos $\alpha \in [A]_R$ e $\beta \in B$. Se $H \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $H\alpha \subseteq A$, então $H\alpha\beta \subseteq AB \subseteq P$. Assim $\alpha\beta \in [P]_R = P$ e está provado que $[A]_R B \subseteq P$.

Seja $A^* \in \mathcal{C}(Q(X, \mathcal{A}))$ tal que $A^* \cap R(X, \mathcal{A}) = [A]_R$, e seja $\gamma \in A^*$. Se $L \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $L\gamma \subseteq R(X, \mathcal{A})$, então $L\gamma \subseteq [A]_R$.

Se $B \not\subseteq P$ então existe $\beta \in B$ tal que $\beta \notin P$. Assim $L\gamma\beta \subseteq [A]_R B \subseteq P$, e, usando a Proposição 3.5, temos $\gamma\beta \in QM_Q(P) = P^*$. Em consequência $A^*\beta \subseteq P^*$. Mas P^* é primo e $\beta \notin P^*$. Logo $A^* \subseteq P$ e daí $A \subseteq P$.

Agora suponhamos que $A \cap P \neq 0$. Sendo $(BA)^2 \subseteq P$, vem, como acima, que $BA \cap R = 0$. Se procedemos como antes, obtemos $BA \subseteq P$ com $B \cap R = 0$. Assim estamos em condições de repetir o procedimento anterior e mostrar que $B \subseteq P$, o que completa a prova.

4 – Ideais Fortemente Primos do Anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$

Neste parágrafo vamos generalizar o Teorema 3.3 de [8] para ideais fortemente primos (à esquerda) do skew anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, quando os automorfismos de \mathcal{A} comutam entre si.

Iniciamos com o seguinte

LEMA 4.1 – Se P é um ideal R -disjunto e fortemente primo do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, então o anel R é \mathcal{A} -fortemente primo

PROVA – Seja $I \in \mathfrak{S}(R)$. Como P é R -disjunto, então $I\langle X, \mathcal{A} \rangle \not\subseteq P$, logo $I\langle X, \mathcal{A} \rangle$ tem um insulador F módulo P .

Se $F = \left\{ f_i = \sum_{\bar{\nu} \in \Gamma_i} a_{\bar{\nu}}^{(i)} X^{\bar{\nu}} : a_{\bar{\nu}}^{(i)} \in I, \forall \bar{\nu} \in \Gamma_i = \text{supp}(f_i), \forall i \text{ com } 1 \leq i \leq n \right\}$, então $F_0 = \{ a_{\bar{\nu}}^{(i)} : \bar{\nu} \in \Gamma_i, 1 \leq i \leq n \}$ é um subconjunto finito de I .

Se $r \in R$ é tal que $rF_0 = 0$, então é claro que $rF = 0$. Por isso $r \in P \cap R = 0$ e assim F_0 é um insulador para I . Logo o anel R é \mathcal{A} -fortemente primo.

LEMA 4.2 – Sejam R um anel \mathcal{A} -primo e J um ideal fechado de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Se I é um ideal à esquerda R -disjunto de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ tal que $J \not\subseteq I$, então existe um elemento $\alpha \in M(I)$ que é um resto módulo J .

PROVA – Seja $J^* \in \mathcal{C}(Q\langle X, \mathcal{A} \rangle)$ tal que $J^* \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle = J$, e consideremos um elemento $\beta \in I \setminus J$. Sejam $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(J)$ ($1 \leq i \leq m$) e $\gamma \in Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ tais que $\beta = \sum_{i=1}^m q_i \mu_i + \gamma$, com $\gamma = 0$ ou γ igual a um resto módulo J^* .

Se $\gamma = 0$, obtemos, usando o Corolário 3.7, que $\beta \in [J]_R = J$, uma contradição. Assim γ é um resto módulo J^* .

Se $H \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $H\left(\sum_{i=1}^m q_i \mu_i\right) \subseteq J$, então $H \gamma \subseteq I$. Consideremos então um $\alpha_1 \in H \gamma$ não nulo. Nesse caso $\alpha_1 \in I$ é um resto módulo J .

Se $\alpha \in M(I)$ é tal que $\text{supp}(\alpha) \subseteq \text{supp}(\alpha_1)$, então α é também um resto módulo J .

LEMA 4.3 – Seja R um anel \mathcal{A} -fortemente primo. Se P é um ideal primo R -disjunto do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, então P é fortemente primo.

PROVA – Analisemos primeiro o caso $P = 0$. Seja I um ideal não nulo do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$.

Caso 1.1: $I \cap R \neq \emptyset$. Nesse caso $I \cap R \in \mathfrak{S}(R)$ e $I \cap R$ tem um insulador F_0 . Como no Caso 1 do Teorema 5.1, provamos que F_0 é um insulador para I .

Caso 1.2: $I \cap R = \emptyset$. Aqui consideramos $\Gamma \in \min(I)$, $\bar{v}_0 \in \Gamma$ e $H = \Theta_{\Gamma, \bar{v}_0}(I)$. Como $H \in \mathfrak{S}(R)$ (Lema 1.4), existe um insulador $F_0 = \{a_1, \dots, a_t\}$ para H . Para cada a_i existe $\alpha_i \in I$ tal que $\text{supp}(\alpha_i) = \Gamma$ e $c_{\bar{v}_0}^E(\alpha_i) = a_i$. Seja $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ e suponhamos que $\beta = \sum_{\bar{v}} b_{\bar{v}} X^{\bar{v}} \in R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é tal que $\beta F = 0$.

Pelo Lema 3.1 o elemento $\mu = \mu_{\Gamma, \bar{v}_0} \in M_Q(I)$ satisfaz $\alpha_i = a_i \mu$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq t$. Logo $\beta a_i Q\langle X, \mathcal{A} \rangle \mu = \beta_i a_i \mu Q\langle X, \mathcal{A} \rangle = \beta_i \alpha_i Q\langle X, \mathcal{A} \rangle = 0$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq t$. Mas $Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é primo (Lema 3.9). Então $\beta a_i = 0$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq t$, isto é, $\sum_{\bar{v}} X^{\bar{v}} \sigma^{-\bar{v}}(b_{\bar{v}}) a_i = 0$, $\forall i$. Daí se deduz facilmente que $\beta = 0$ e F é um insulador para I .

Agora vejamos o caso quando o ideal P é não nulo.

Seja $P^* \in \mathcal{P}(Q\langle X, \mathcal{A} \rangle)$ tal que $P^* \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle = P$ e seja I um ideal do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ tal que $P \not\subseteq I$.

Caso 2.1: $I \cap R \neq \emptyset$. Nesse caso $I \cap R \in \mathfrak{S}(R)$ tem um insulador F_0 .

Seja $\alpha \in R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ tal que $\alpha F_0 \subseteq P$ e consideremos os elementos $q_i \in Q$, $\mu_i \in M_Q(P)$ ($1 \leq i \leq n$) e $\gamma \in Q\langle X, \mathcal{A} \rangle$ tais que $\alpha = \sum_{i=1}^n q_i \mu_i + \gamma$, com $\gamma = 0$ ou γ igual a um resto módulo P^* .

Se $a \in F_0$, então $\gamma a = \alpha a - \sum_{i=1}^n q_i \mu_i a \in P^*$, logo $\gamma a = 0$. Assim $\gamma F_0 = 0$. Se $H \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $H\gamma \subseteq R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, vem $H\gamma F_0 = 0$. Daí se deduz que $H\gamma = 0$ e portanto $\gamma = 0$. Assim $\alpha \in P^* \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle = P$ e F_0 é também um insulador módulo P para I .

Caso 2.2: $I \cap R = \emptyset$. Como $P \not\subseteq I$, existe $\alpha \in M(I)$ que é um resto módulo P . (Lema 4.2). Sejam $\Gamma = \text{supp}(\alpha)$, $\bar{v}_0 \in \Gamma$ e consideremos o ideal $L = \Theta_{\Gamma, \bar{v}_0}(I)$.

Se $F_0 = \{a_1, \dots, a_t\}$ é um insulador para L , então, como no Caso 1.2, existem $\alpha_i \in I$ ($1 \leq i \leq t$) e $\mu \in M_Q(I)$ tais que $\alpha_i = a_i \mu$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq t$. Sendo $\text{supp}(\mu) = \text{supp}(\alpha_i) = \Gamma$, então μ é um resto módulo P .

Seja $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$. Se $\beta = \sum q_i \mu_i + \gamma \in R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ (onde γ é um resto módulo P^*) é tal que $\beta F \subseteq P$, então provamos como antes que $\gamma \alpha_i = \gamma a_i \mu \in P^*$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq t$. Com isso $\gamma \alpha_i Q\langle X, \mathcal{A} \rangle \mu \subseteq P^*$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq t$. Mas P^* é primo e μ é um resto módulo P . Logo $\gamma a_i \in P^*$, $\forall i$ com $1 \leq i \leq t$. Por γ ser um resto módulo P^* , $\gamma F_0 = 0$. Como no Caso 2.1, obtemos $\gamma = 0$. Assim $\beta \in P^* \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle = P$ e provamos que F é um insulador módulo P para I .

Assim, em qualquer caso, P é fortemente primo e o lema está provado.

Agora estamos em condições de provar o resultado central deste parágrafo.

TEOREMA 4.4 – Seja R um anel com automorfismos \mathcal{A} que comutam entre si. As seguintes condições são equivalentes:

(i) todo ideal \mathcal{A} -primo de R é \mathcal{A} -fortemente primo;

(ii) todo ideal primo de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é fortemente primo.

PROVA - (i) \implies (ii). Seja P um ideal primo de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$. Como o ideal $P \cap R$ de R é \mathcal{A} -primo, segue da hipótese (i) que $P \cap R$ é \mathcal{A} -fortemente primo.

Se P' é o ideal do anel $(R/P \cap R)\langle X, \mathcal{A} \rangle$ que é imagem homeomorfa do ideal $P/(P \cap R)\langle X, \mathcal{A} \rangle$ de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle/(P \cap R)\langle X, \mathcal{A} \rangle$, então P' é primo, pois

$$\begin{aligned} R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P &= (R\langle X, \mathcal{A} \rangle / (P \cap R)\langle X, \mathcal{A} \rangle) / (P / (P \cap R)\langle X, \mathcal{A} \rangle) \\ &\cong ((R/P \cap R)\langle X, \mathcal{A} \rangle) / P', \end{aligned}$$

e P' é $(R/P \cap R)$ -disjunto. Mas o anel $R/(P \cap R)$ é \mathcal{A} -fortemente primo. Logo P' , e portanto P também, é ideal fortemente primo (Lema 4.3).

- (ii) \implies (i). Se P é um ideal \mathcal{A} -primo de R , então R/P é \mathcal{A} -primo. Logo o anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P\langle X, \mathcal{A} \rangle \cong (R/P)\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é primo (Lema 3.9). Segue da hipótese (ii) que o anel $(R/P)\langle X, \mathcal{A} \rangle$ é fortemente primo. Concluímos do Lema 4.1 que o anel R/P é \mathcal{A} -fortemente primo e está provado que o ideal P é \mathcal{A} -fortemente primo.

5 - Ideais Primos Não Singulares do Anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$.

Consideremos o skew anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, onde os automorfismos de \mathcal{A} comutam entre si. O objetivo deste parágrafo é estender os resultados sobre ideais primos não singulares provados em [8] para esses anéis $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ em consideração.

Seja R um anel. O *anulador* (à esquerda) de um elemento $a \in R$ é definido como sendo o ideal à esquerda de R , $\ell_R(a) = \{r \in R : ra = 0\}$.

Um ideal à esquerda I de R é dito *essencial* se $I \cap J \neq 0$ para todo $J \triangleleft_l R$ não nulo.

O *ideal singular* (à esquerda) do anel R é definido por

$$Z_\ell(R) = \{a \in R : \ell_R(a) \text{ é essencial} \}.$$

O ideal $Z_\ell(R)$ é realmente um ideal bilátero do anel R [11] e daqui em diante será denotado simplesmente com $Z(R)$.

Um anel R é chamado *não singular* se $Z(R) = 0$. Um ideal J de R é dito *não singular* se o anel quociente R/J é não singular ([11]).

No que segue supomos que R é um anel com automorfismos \mathcal{A} que comutam entre si.

LEMA 5.1 – Seja R um anel \mathcal{A} -primo. Se P é um ideal primo não singular R -disjunto do anel $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, então R é não singular

PROVA – Suponhamos que R é não singular. Nesse caso existe $a \in Z(R)$ não nulo.

Caso 1: $P \neq 0$. Vamos mostrar que $a + P \in Z(R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P)$. Com isso teremos que $a + P = 0$ (pois P é não singular) e, então, $0 \neq a \in P \cap R$, uma contradição.

Seja $0 \neq J \triangleleft_\ell R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ tal que $P \not\subseteq J$.

Caso 1.1: $J \cap R = 0$. Pelo Lema 4.2 existe um elemento $\alpha \in M(J)$ que é um resto módulo P .

Sejam $\Gamma = \text{supp}(\alpha)$ e $\bar{\nu}_0 \in \Gamma$. O conjunto

$$H = \{b \in R : \text{existe } \beta \in J \text{ com } \text{supp}(\beta) = \Gamma \text{ e } c_{\bar{\nu}_0}^D(\beta) = b\} \cup \{0\}$$

é um ideal à esquerda não nulo de R . Então $H \cap \ell_R(a) \neq 0$ e portanto existe $\beta = \sum_{\bar{\nu} \in \Gamma} X^{\bar{\nu}} b_{\bar{\nu}} \in J$ (com $\Gamma = \text{supp}(\beta)$) tal que $b_{\bar{\nu}_0} a = 0$.

Se $\beta a = 0$, então $(\beta + P)(a + P) = 0$ com $\beta \notin P$ (pois α é um resto módulo P), i.e., $0 \neq \beta + P \in (J/P) \cap \ell_{R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P}(a + P)$. Assim $a + P \in Z(R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P)$.

Se $\beta a \neq 0$, podemos escolher um elemento $\gamma = \sum_{\bar{\nu} \in \Gamma} X^{\bar{\nu}} c_{\bar{\nu}} \in J$ (com $\Gamma = \text{supp}(\gamma)$) tal que $\gamma a \neq 0$, $\text{supp}(\gamma a) \not\subseteq \Gamma \setminus \{\bar{\nu}_0\}$ e $|\text{supp}(\gamma a)|$ é mínimo.

Se $\bar{v}_1 \in \text{supp}(\gamma a)$, então $0 \neq R c_{\bar{v}_1} \triangleleft_l R$, logo $R c_{\bar{v}_1} \cap \ell_R(a) \neq 0$. Assim existe um $r \in R$ tal que $t = r c_{\bar{v}_1}$ é não nulo e $ta = 0$. Se consideramos o elemento $\gamma_0 = \sigma^{-\bar{v}_0}(r) \gamma$, então $0 \neq \gamma_0 \in J$, $\text{supp}(\gamma_0) = \Gamma$ e $\text{supp}(\gamma_0 a) \not\subseteq \text{supp}(\gamma a)$.

Pela minimalidade de $|\text{supp}(\gamma a)|$ temos que $\gamma_0 a = 0$. Assim $(\gamma_0 + P)(a + P) = 0$ com $\gamma_0 \notin P$ (pois α é um resto módulo P), i.e.,

$$0 \neq \gamma_0 + P \in (J/P) \cap \ell_{R(X, \mathcal{A})/P}(a + P),$$

o que prova de fato que $a + P \in Z(R(X, \mathcal{A})/P)$.

Caso 1.2: $J \cap R \neq \emptyset$. Nesse caso $(J \cap R) \cap \ell_R(a) \neq \emptyset$. Então existe $b \in J \cap R$ não nulo tal que $ba = 0$. Assim $(b + P)(a + P) = 0$ com $b \notin P$ (pois P é R -disjunto), i.e., $0 \neq b + P \in (J/P) \cap \ell_{R(X, \mathcal{A})/P}(a + P)$, e temos que $a + P \in Z(R(X, \mathcal{A})/P)$.

Caso 2: $P = \emptyset$. Vamos mostrar que $a \in Z(R(X, \mathcal{A}))$. Seja $0 \neq J \triangleleft_l R(X, \mathcal{A})$.

Caso 2.1: $J \cap R \neq \emptyset$. Nesse caso $(J \cap R) \cap \ell_R(a) \neq \emptyset$. Se $0 \neq b \in (J \cap R) \cap \ell_R(a)$, então é claro que $b \in J \cap \ell_{R(X, \mathcal{A})}(a)$. Com isso se tem que $a \in Z(R(X, \mathcal{A}))$.

Caso 2.2: $J \cap R = \emptyset$. Aqui escolhemos $\alpha \in M(J)$. Se $\Gamma = \text{supp}(\alpha)$ e $\bar{v}_0 \in \Gamma$, então definimos o ideal à esquerda não nulo H de R como no Caso 1.1. Assim existe um $\beta = \sum_{\bar{v} \in \Gamma} X^{\bar{v}} b_{\bar{v}} \in J$ com $\text{supp}(\beta) = \Gamma$ e $b_{\bar{v}_0} a = 0$.

Se $\beta a = 0$, então $\beta \in J \cap \ell_{R(X, \mathcal{A})}(a)$, logo $a \in Z(R(X, \mathcal{A}))$. Noutro caso podemos escolher um $\gamma = \sum_{\bar{v} \in \Gamma} X^{\bar{v}} c_{\bar{v}} \in J$ com $\text{supp} \gamma = \Gamma$ tal que $\gamma a \neq 0$, $\text{supp}(\gamma a) \not\subseteq \Gamma \setminus \{\bar{v}_0\}$ e $|\text{supp}(\gamma a)|$ é mínimo. Procedendo como no Caso 1.1, obtemos um elemento $\gamma_0 \in J$ com $\text{supp}(\gamma_0) = \Gamma$ tal que $\gamma_0 a = 0$. Assim $0 \neq \gamma_0 \in J \cap \ell_{R(X, \mathcal{A})}(a)$ e $a \in Z(R(X, \mathcal{A}))$.

LEMA 5.2 – Seja R um anel \mathcal{A} -primo não singular. Se P é um ideal primo R -disjunto de $R(X, \mathcal{A})$, então P é não singular.

PROVA – Por redução ao absurdo, suponhamos que $Z(R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P) \neq 0$. Nesse caso existe um ideal I de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$ tal que $P \subsetneq I$ e $Z(R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P) = I/P$.

Suponhamos que $P \neq 0$ e seja $P^* \in \mathcal{P}(Q\langle X, \mathcal{A} \rangle)$ tal que $P^* \cap R\langle X, \mathcal{A} \rangle = P$.

Caso 1.1: $I \cap R \neq 0$. Nesse caso existe $a \in I \cap R$ não nulo. Com isso vamos provar que $a \in Z(R)$, o que produz uma contradição, pois o anel R é não singular.

Se $0 \neq J \triangleleft_l R$, então é fácil provar que $L = R\langle X, \mathcal{A} \rangle J$ é um ideal à esquerda de $R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, que coincide com o conjunto $\left\{ \sum_{\bar{v}} X^{\bar{v}} b_{\bar{v}} : b_{\bar{v}} \in J \right\}$ e satisfaz a condição $L \cap R = J$. Como L não é R -disjunto, se tem $L \not\subseteq P$. Logo $(L + P)/P$ é um ideal à esquerda não nulo do anel quociente $R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P$.

O fato $a + P \in Z(R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P)$ produz $((L + P)/P) \cap \ell_{R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P}(a + P) \neq 0$, i.e., existe $\alpha \in L$ tal que $\alpha a \in P$ mas $\alpha \notin P$. Sejam $b_i \in QJ$, $\mu_i \in M_Q(P)$ ($1 \leq i \leq m$) e $\gamma \in Q\langle X, \mathcal{A} \rangle J$ tais que $\alpha = \sum_{i=1}^m b_i \mu_i + \gamma$ (Observação 3.4) onde $\gamma \neq 0$ é um resto módulo P^* , pois $\alpha \notin P$. A inclusão $\alpha a \in P$ implica esta $\gamma a \in P^*$.

Se $H \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $H\gamma a \subseteq R\langle X, \mathcal{A} \rangle$, então $H\gamma a \subseteq P$. Assim $H\gamma a = 0$ (pois γ é um resto módulo P) e portanto $\gamma a = 0$. Se $F \in \mathfrak{S}(R)$ é tal que $F\gamma \subseteq R\langle X, \mathcal{A} \rangle J$, então $F\gamma \neq 0$ e $F\gamma a = 0$. Daí obtemos que $J \cap \ell_R(a) \neq 0$ e se tem que $a \in Z(R)$.

Caso 1.2: $I \cap R = 0$. Por ser $P \subsetneq I$, existe $\alpha \in M(I)$ que é um resto módulo P (Lema 4.2). Se $\Gamma = \text{supp}(\alpha)$ e $\bar{v}_0 \in \Gamma$, então existe $\mu \in M_Q(I)$ tal que $\alpha = c_{\bar{v}_0}^E(\alpha)\mu$. Se $0 \neq J \triangleleft_l R$, então, como no Caso 1.1, podemos provar que existe $\beta \in R\langle X, \mathcal{A} \rangle J$ tal que $\beta\alpha \in P$. Mas $\beta \notin P$ (pois $\alpha + P \in Z(R\langle X, \mathcal{A} \rangle / P)$). Pelo Lema 3.1, obtemos $\beta c_{\bar{v}_0}^E(\alpha) Q\langle X, \mathcal{A} \rangle \mu = \beta c_{\bar{v}_0}^E(\alpha) \mu Q\langle X, \mathcal{A} \rangle = \beta\alpha Q\langle X, \mathcal{A} \rangle \subseteq P^*$. Por isso e, supondo $\beta = \sum_{i=1}^m b_i \mu_i + \gamma$ (com $b_i \in QJ$, $\mu_i \in M_Q(P)$, sendo $\gamma \in Q\langle X, \mathcal{A} \rangle J$ um resto módulo P^*), obtemos que $\beta c_{\bar{v}_0}^E(\alpha) Q\langle X, \mathcal{A} \rangle \mu \subseteq P^*$. Sendo α também um resto

módulo P^* , então $\mu \notin P^*$, logo $\beta c_{\bar{v}_0}^E(\alpha) \in P^*$, pois P^* é primo.

Procedendo como na parte final do Caso 1.1, obtemos que existe $F \in \mathfrak{F}(R)$ tal que $0 \neq F\gamma \subseteq R(X, \mathcal{A})J$ e $F\gamma c_{\bar{v}_0}^E(\alpha) = 0$. Assim $J \cap \ell_R(c_{\bar{v}_0}^E(\alpha)) \neq 0$ e conclui-se que $c_{\bar{v}_0}(\alpha) \in Z(R)$, o que é uma contradição pois R é não singular.

O caso $P = 0$ é completamente similar.

Agora apresentamos o resultado central deste parágrafo.

TEOREMA 5.3 – Seja R um anel. As afirmações seguintes são equivalentes:

- (i) todo ideal \mathcal{A} -primo de R é não singular,
- (ii) todo ideal primo de $R(X, \mathcal{A})$ é não singular.

PROVA – (i) \implies (ii). Seja P um ideal primo de $R(X, \mathcal{A})$. Como o ideal $P \cap R$ de R é \mathcal{A} -primo, segue da hipótese (i) que o anel $R/P \cap R$ é não singular.

Se P' é o ideal do anel $(R/P \cap R)(X, \mathcal{A})$, imagem homeomorfa do ideal $P/(P \cap R)(X, \mathcal{A})$ de $R(X, \mathcal{A})/(P \cap R)(X, \mathcal{A})$, então P' é $(R/P \cap R)$ -disjunto e primo, pois $R(X, \mathcal{A})/P = (R(X, \mathcal{A})/(P \cap R)(X, \mathcal{A})) / (P/(P \cap R)(X, \mathcal{A})) \cong ((R/P \cap R)(X, \mathcal{A})) / P'$.

Segue do Lema 5.2 que o ideal P' , e portanto P , é não singular.

(ii) \implies (i). Se P é um ideal \mathcal{A} -primo de R então R/P é \mathcal{A} -primo, logo o anel $R(X, \mathcal{A})/P(X, \mathcal{A}) \cong (R/P)(X, \mathcal{A})$ é primo (Lema 3.9). Segue da hipótese (ii) que o anel $(R/P)(X, \mathcal{A})$ é não singular. Concluímos do Lema 5.1 que o anel R/P é não singular, ficando provado que o ideal P é não singular.

REFERÊNCIAS

- [1] S.A. Amitsur, *Radicals of polynomial rings*, *Canad. J. Math.* 8 (1956), 355-361.
- [2] S.S. Bedi and J. Ram, *Jacobson radical of skew polynomial ring and skew group rings*, *Israel J. Math.* 35 (1980) 327-336.
- [3] J. Bergen, S. Montgomery and D. S. Passman, *Radical of crossed products of enveloping algebra*, *Israel J. Math.*, Vol. 59 N^o 2 (1987).
- [4] S. Chase, D. K. Harrison and A. Rosenberg, *Galois theory and cohomology of commutative rings*, *Mem. Amer. Math. Soc.*, Providence, Rhode Island 52 (1965) 15-33.
- [5] W. Chin, *Prime ideals and differential operator ring and crossed products of infinite groups*, *J. Algebra* 106 (1987), 78-104.
- [6] E. Cisneros, M. Ferrero and M. I. Gonzalez, *Prime ideals of skew polynomial rings and skew Laurent polynomial rings*, *Math. J. Okayama Univ* 32 (1990), 61-72.
- [7] N. J. Divinsky, *Rings and radicals*, *Math. Exp.* 14, Univ. of Toronto Press (1965).
- [8] M. Ferrero, *Closed and prime ideals in free centred extensions*, *J. Algebra*, a ser publicado.
- [9] M. Ferrero, *Radicals of skew polynomial rings and skew Laurent polynomial rings*, *Math. J. of Okayama University*, Vol. 29 (1987).
- [10] M. Ferrero, K. Kishimoto and K. Motose, *On radicals of skew polynomial rings of derivation type*, *J. London Math. Soc.* (2), 28 (1983) 8-16.
- [11] K. R. Goodearl, *Rings theory - Non singular and modules*, Marcel Dekker Inc., New York (1976).
- [12] D. Handelman and J. Lawrence, *Strongly prime rings*, *Trans. Amer. Math. Society* 211 (1975) 209-223.
- [13] N. Jacobson, *Lie algebras*, Interscience Publishers, London (1962).
- [14] N. Jacobson, *Structure of rings*, *Colloquium Publications* 37, American Math. society, Providence (1968).
- [15] K. Kishimoto, *On abelian extensions of rings I*, *Math. J. Okayama Univ.* Vol. 14 (1970) 159-174.

- [16] K. Kishimoto, *On abelian extensions of rings II*, Math. J. Okayama Univ. Vol. 15 (1971) 57-70.
- [17] W. S. Martindale, *Prime rings satisfying a generalized polynomial identity*, J. Algebra 12, N^o 4 (1969) 576-584.
- [18] M. M. Parmenter, D. S. Passman and P. N. Stewart, *The strongly radical of crossed product*, Comm. Algebra 12 (1984) 1099-1113.
- [19] K. R. Pearson and W. Stephenson, *A skew polynomial ring over a Jacobson ring need not be a Jacobson ring*, Comm. Algebra 5 (1977) 783-794.
- [20] J. C. Robson and L. W. Small, *Liberal extensions*, Proc. London Math. Soc. (3) 42 (1981) 87-103.
- [21] P. N. Stewart and J. F. Watters, *Properties of normalizing extensions and fixed rings*, Comm. in Algebra 12 (9) (1984) 1067-1098.
- [22] F. A. Szász, *Radicals of rings*, John Wiley and sons, 1981.