FUNCIONAIS LINEARES SOBRE ESPAÇOS
DE HARDY DE VÁRIAS VARIÁVEIS

LUIZ ANTONIO PEREIRA GOMES

ORIENTADOR

PROF. DR. ROBERTO ARISTÓBULO MACÍAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Este trabalho foi realizado com o auxílio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNP_q) e da Financiadora Nacional de Estudos e Projetos (FINEP).

JULHO DE 1978.

A G R A D E C I M E N T O S :

Ao prof. Roberto Aristóbulo Macías que, com sua orientação segura, tornou possível a realização deste trabalho.

Ao prof. Carlos Segovia Fernández pela gentileza com que sempre nos ajudou.

Ao prof. Benjamin Bordin que se dispos a nos auxiliar durante o período de elaboração do trabalho.

Aos colegas, amigos e a todos aqueles que, mesmo indiretamente, nos apoiaram e incentivaram.

Ao CNP_q e FINEP pelo apoio financeiro.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O propósito desta dissertação é fazer um estudo da dualidade entre os espaços H^p de Hardy e os espaços de Lipschitz. Estamos particularmente interessados numa exposição detalhada desta teoria para valores pequenos de p, como por exemplo $p \leq 1/2$ na reta, que encontra-se enunciada em diversos trabalhos como [2] e [6], mas as demonstrações são omitidas ou apenas são feitas algumas indicações.

No capítulo I apresentamos os resultados básicos que usamos no desenvolvimento do trabalho. Deixamos de fazer as demonstrações, mas elas podem ser encontradas nas respectivas referências.

No capítulo II introduzimos a noção de espaços de tipo homogêneo e definimos a classe $\mathcal{L}_\alpha$ de funções de Lipschitz sobre estes espaços. Usando a noção de átomo introduzida em [2] definimos os espaços H^p de Hardy como um subespaço do dual de $\mathcal{L}_\alpha$ e caracterizamos o dual de H^p como certos espaços de Lipschitz. Os espaços de tipo homogêneo é um dos contextos mais gerais para a teoria dos espaços de Hardy que foi desenvolvida em [4] e [9]. Entretanto esta teoria não inclui, por exemplo, o caso de H^p na reta com $p \leq 1/2$, devido ao fato da noção de polinômio não ter sentido nos espaços de tipo homogêneo. Por esta razão estudamos no capítulo III os espaços de Hardy sobre o espaço R^n.

No capítulo III introduzimos a noção de espaços de Lipschitz "Integrais" e definimos os espaços H^p sobre R^n usando, como no capítulo II, a noção de átomo definida em [2]. A demonstração que damos da dualidade entre H^p e certos espaços de Lipschitz não está desenvolvida na literatura sobre o assunto. Salientamos ainda que pelos resultados contidos em [2] e [8] esta teoria sobre os espaços H^p coincide com a teoria clássica para todo p tal que $0 < p \leq 1$, ver [11].

Dedicamos o capítulo IV à uma demonstração elementar da equivalência entre os espaços de Lipschitz "Integrais" e os espaços de Lipschitz clássicos. A prova que apresentamos é uma adaptação para o caso do espaço R^n daquela feita em [10] e simplifica muito a original publicada em [12].

CAPÍTULO I

NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo daremos uma série de definições, teoremas e propriedades que usaremos nos demais capítulos. Não faremos aqui nenhuma demonstração pois elas podem ser encontradas nas respectivas referências.

1.1 - NOÇÕES GERAIS SOBRE R^n.

Chamaremos de espaço R^n ao conjunto de todas as n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais. Tomaremos em R^n a norma $|x| = (\Sigma_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$ e a distância definida a partir desta norma por $d(x,y) = |x-y|$, que é chamada distância euclidiana usual.

Dado $r > 0$ e x pertencente a R^n a bola de centro x e raio r, que denotaremos por $B(x,r)$, é definida como o conjunto de todos os pontos de R^n cuja distância ao ponto x é inferior a r.

Por um multi-índice α de ordem k, entenderemos uma k-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ de números inteiros não negativos. A soma de dois multi-índices de ordem k, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, é definida por $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_k + \beta_k)$.

A norma de um multi-índice α de ordem k é dada por $|\alpha| = \Sigma_{i=1}^k \alpha_i$. Dado um elemento x de R^n e um multi-índice α de ordem n, denotaremos por x^α o monômio $x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot x_3^{\alpha_3} \ldots x_n^{\alpha_n}$.

Indicaremos por $m(E)$ a medida de Lebesgue do conjunto mensurável E contido em R^n e usaremos a notação $\int_E f(x)dx$ ao invés de $\int_E f(x)\, dm(x)$.

Dada uma bola $B = B(x,r)$ de centro x pertencente a R^n e raio $r > 0$, a medida de Lebesgue de B é dada por (ver [5])

$$m(B) = \omega_n \cdot r^n , \tag{1.1}$$

onde ω_n é a medida de Lebesgue da bola unitária.

O teorema seguinte (ver [15] - pag. 5) é conhecido como o teorema de derivação de Lebesgue.

TEOREMA 1.1 - Se f é uma função definida e localmente integrável sobre R^n, então

$$\lim_{r\to 0} m(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

para quase todo x.

1.2 - TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO (ver [14])

Se X é um conjunto, e A está contido em X, denotaremos por $\tilde{A}$ o complementar de A em relação a X e por $\emptyset$ o conjunto vazio. Designaremos por $P(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X.

Se $\mathcal{R}$ é um subconjunto de $P(X)$, dizemos que $\mathcal{R}$ é uma σ-álgebra sobre X se $\mathcal{R} \neq \emptyset$ e se:

(1.2) $\quad A \in \mathcal{R}$ implica $\tilde{A} \in \mathcal{R}$.

(1.3) $\quad A_n \in \mathcal{R}$, $n \in N$, implica $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$.

Um espaço mensurável é um par $(X,\mathcal{R})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{R}$ é uma σ-álgebra sobre X. Os elementos de $\mathcal{R}$ são denominados conjuntos mensuráveis.

Seja $(X,\mathcal{R})$ um espaço mensurável e f uma função definida em X e com valores em $\bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$. Dizemos que f é uma função mensurável se, e somente se, $f^{-1}([-\infty, \alpha])$ pertence a $\mathcal{R}$, para todo α real.

Dizemos que μ é uma medida sobre o espaço mensurável $(X,\mathcal{R})$ se μ é uma aplicação de $\mathcal{R}$ em $[0,\infty]$ tal que:

(1.4) $\quad \mu(\emptyset) = 0$

(1.5) $\quad A_n \in \mathcal{R}$, $n \in N$, A_n disjuntos dois a dois entre si, implica

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) .$$

Se μ é uma medida sobre $(X,\mathcal{R})$, dizemos que a terna $(X,\mathcal{R},\mu)$ é um espaço de medida. Se A pertence a $\mathcal{R}$, então $\mu(A)$ chama-se medida de A.

Dizemos que uma medida μ sobre um espaço mensurável $(X,\mathcal{R})$ é σ-finita se X é a união de uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis A_i pertencentes a $\mathcal{R}$ tal que $\mu(A_i)$ seja finita.

Dizemos que uma propriedade P de pontos de um conjunto mensurável A vale quase sempre ou para quase todo x se os pontos de A para os quais P é falsa estiver contido num conjunto de medida nula.

Dados duas funções f,g definidas em um conjunto mensurável A e com valores em $\overline{R}$, dizemos que elas são iguais quase sempre se o conjunto $\{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\}$ tem medida nula.

Se A é um subconjunto de X, denotaremos por χ_A a função característica de A (em relação a X), que vale 1 se x pertence a A, e vale 0 se x pertence a $\tilde{A}$.

Dizemos que uma função mensurável f é localmente integrável se $\int_B |f(x)|d\mu(x)$ é finita, para toda bola B.

Seja A um subconjunto aberto de X. Chama-se suporte de uma função f definida em A ao menor conjunto fechado (relativamente a A) que contém o conjunto de todos os x pertencentes a A tal que $f(x) \neq 0$.

1.3 - ESPAÇOS NORMADOS E ESPAÇOS $L^p(X)$. (ver [14])

Dado um espaço vetorial E sobre um corpo K (que será sempre R ou C), uma norma sobre E é uma aplicação que associa a cada x em E um número real não negativo $\|x\|$, chamado norma de x, com as seguintes propriedades:

(1.6) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, quaisquer que sejam x, y em E

(1.7) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \; \|x\|$, qualquer que seja x em E e λ em K

(1.8) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Um espaço vetorial munido de uma norma é denominado espaço vetorial normado. Num espaço normado, a função $d(x,y) = \|x-y\|$ é uma distância, e consideramos sempre o espaço normado munido desta distância e da topologia a ela associada. Assim todo espaço normado é um espaço métrico.

Um espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.

Chama-se espaço de Banach um espaço vetorial normado e completo.

Um espaço vetorial E munido de uma topologia $\mathcal{H}$ chama-se um espaço vetorial topológico se a adição é uma função contínua de $E \times E$ em E e a multiplicação por escalar é uma função contínua de $R \times E$ em E.

Seja $1 \leq p < \infty$ e $(X,\mathcal{R},\mu)$ um espaço de medida. Chamamos de $L^p(X,\mu)$ ao conjunto de todas as funções f mensuráveis sobre X e com suporte contido em X tal que $\int_X |f(x)|^p d\mu(x)$ seja finita, considerando duas funções em $L^p(X,\mu)$ como equivalentes se elas são iguais quase sempre. A norma de uma função f em $L^p(X,\mu)$ é definida por:

(1.9) $$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$$

Definimos $L^\infty(X,\mu)$ como o espaço de todas as funções mensuráveis sobre X e com suporte contido em X tal que existe C real satisfazendo $|f(x)| \leq C$ quase sempre, onde identificamos duas funções em $L^\infty(X,\mu)$ se elas são iguais quase-sempre. O ínfimo de tais C é denotado por $\|f\|_\infty$ e e chamado supremo essencial de f, também denotado por $\operatorname{Sup\,ess}_{x \in X} |f(x)|$. Salientamos que $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $L^\infty(X,\mu)$.

Agora podemos enunciar o teorema de Riesz-Fischer que garante que os espaços $L^p(X,\mu)$ são completos.

TEOREMA 1.2 - Se $1 \leq p \leq \infty$, os espaços $L^p(X,\mu)$ são espaços de Banach.

Sejam p e q tais que $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ e $1/p + 1/q=1$. Se f pertence a $L^p(X,\mu)$ e g pertence a $L^q(X,\mu)$, então $f\cdot g$ pertence a $L^1(X,\mu)$ e vale a chamada desigualdade de Hölder:

$$(1.10) \qquad \left|\int_X f(x)g(x)\,d\mu(x)\right| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad .$$

Notemos que se $\mu(X)$ é finita e p e q são tais que $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então aplicando a desigualdade de Hölder temos

$$(1.11) \qquad \left(\mu(X)^{-1}\int_X |f(x)|^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} \leq \left(\mu(X)^{-1}\int_X |f(x)|^q\,d\mu(x)\right)^{1/q} ,$$

ou seja, $L^q(X,\mu)$ está contido em $L^p(X,\mu)$.

Dados f e g pertencentes a $L^p(X,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, temos a desigualdade triangular das normas $\|\cdot\|_p$, conhecida por desigualdade de Minkowski e dada por:

$$(1.12) \qquad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad .$$

Sejam E, F espaços vetoriais sobre um corpo K. Uma aplicação T de em E em F diz-se linear se:

$$(1.13) \qquad T(\lambda x+y) = \lambda T(x) + T(y),$$

quaisquer que sejam x,y em E e λ em K. Se F é igual ao corpo K dizemos que a aplicação T é um funcional linear sobre o corpo K.

Consideremos agora E, F espaços vetoriais normados sobre um corpo K e T uma aplicação linear de E em F. Dizemos que T é contínua se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$(1.14) \qquad \|T(x)\| \leq C \cdot \|x\| ,$$

para todo x em E.

Um resultado muito importante da teoria dos espaços $L^p(X,\mu)$ é o teorema de representação de Riesz que enunciamos a seguir.

TEOREMA 1.3 - Seja T um funcional linear sobre $L^p(X,\mu)$ com $1 \leq p < \infty$ e μ uma medida σ-finita. Então existe um único elemento g em $L^q(X,\mu)$, onde $1/p + 1/q = 1$, tal que

$$< T, f > = T(f) = \int_X g(x) f(x) \, d\mu(x) \quad ,$$

para todo f em $L^p(X,\mu)$. Além disso, temos

$$(1.15) \qquad \|T\| = \sup_{\|f\|_p=1} \left| \int_X g(x) f(x) \, d\mu(x) \right| = \|g\|_q \; .$$

Em um espaço vetorial normado temos a seguinte versão do teorema de Hahn - Banach.

TEOREMA 1.4 - Seja E um espaço vetorial normado sobre C , F um subespaço de E e T um funcional linear contínuo definido sobre F. Então T possue uma extensão para um funcional linear contínuo L sobre E tal que

(1.16) $\qquad \|L\| = \|T\|$.

Seja E um espaço vetorial com produto interno $(\cdot,\cdot)$ e de dimensão finita e seja $(a_i)_{1\leq i\leq m}$ uma família de elementos de E. Para todo par i,j, com $1 \leq i,j \leq m$, colocaremos $\alpha_{ij} = (a_i, a_j)$ e diremos que $A = (\alpha_{ij})$ é a matriz do produto interno $(\cdot,\cdot)$ em relação à família $(a_i)_{1\leq i\leq m}$. O determinante da matriz A é chamado determinante de Gram da família (a_i). Nesta notação temos o seguinte lema (ver [13]).

LEMA 1.1 - Se a família $(a_i)_{1\leq i\leq m}$ é linearmente independente, então o determinante da matriz A é um número real estritamente positivo.

CAPÍTULO II

ESPAÇOS $H^{p,q}$ E DE LIPSCHITZ SOBRE ESPAÇOS DE TIPO HOMOGÊNEO

Estudaremos neste capítulo os espaços de Lipschitz $\mathcal{L}_\alpha$ e os espaços de Hardy $H^{p,q}$, sobre espaços do tipo homogêneo. O resultado principal vem a ser um teorema que afirma que os duais dos espaços $H^{p,q}$ são certos espaços de Lipschitz $\mathcal{L}_\alpha$. Usaremos [9] como referência principal para este capítulo.

2.1 - ESPAÇOS DE TIPO HOMOGÊNEO

Uma quase distância sobre um conjunto X é uma função não negativa $d(x,y)$, definida sobre $X \times X$ tal que :

(2.1) Para todo x e y em X, $d(x,y) = 0$ se, e somente se, $x = y$;

(2.2) Para todo x e y em X, $d(x,y) = d(y,x)$ e

(2.3) Existe uma constante finita K tal que para todo x,y e z em X

$$d(x,y) \leq K(d(x,z) + d(z,y)).$$

Uma quase-distância $d(x,y)$ define uma estrutura uniforme sobre X. As bolas $B(x,r) = \{y: d(x,y) < r\}$, $r > 0$, formam uma base de vizinhanças de x para a topologia induzida pela uniformidade sobre X. Esta topologia é uma métrica uma vez que a estrutura uniforme associada a $d(x,y)$ possue uma base enumerável. Nos referiremos a esta topologia como a d-topologia sobre X.

Dizemos que duas quase-distâncias $d(x,y)$ e $d'(x,y)$ sobre X são equivalentes se existe duas constantes positivas e finitas, c_1 e c_2, tal que

$$c_1 \cdot d(x,y) \leq d'(x,y) \leq c_2\, d(x,y),$$

verifica-se para todo x e y em X. Observamos que as uniformidades e as topologias definidas pelas quase-distâncias equivalentes coincidem.

Seja X um conjunto munido de uma quase-distância $d(x,y)$ e assumiremos que μ é uma medida positiva, definida sobre uma σ-álgebra de subconjuntos de X que contém os subconjuntos d-abertos e as bolas $B(x,r)$, e que existe duas constantes, $a > 1$ e A, tal que

$$(2.4) \quad 0 < \mu(B(x,ar)) \leq A \cdot \mu(B(x,r)) < \infty,$$

verifica-se para todo x em X e $r > 0$.

Um conjunto X com uma quase-distância $d(x,y)$ e uma medida μ satisfazendo a condição acima chama-se um espaço de tipo homogêneo e será denotado por (X, d, μ).

Alguns exemplos destes espaços são:

1) R^n com a medida de Lebesgue e diversas quase-distâncias, por exemplo $d_1(x,y) = (\Sigma_{i=1}^n (x_i-y_i)^2)^{1/2}$;
$d_2(x,y) = \Sigma_{i=1}^n |x_i-y_i|^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$; $d_3(x,y) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i-y_i|$.

2) As variedades riemannianas compactas.

3) $\Sigma_{n-1} = \{x \in R^n : |x| = 1\}$, com a quase distância $d(x,y) = |1 - \Sigma_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i|^{\alpha}$, $\alpha > 0$, e a única medida μ invariante por rotações que satisfaz $\mu(\Sigma_{n-1}) = 1$.

2.2 - ESPAÇOS $H^{p,q}$.

Seja (X, d, μ) um espaço de tipo homogêneo. Dada uma função f definida e localmente integrável sobre X e uma bola B, denotaremos por $m_B(f)$ o valor médio de f sobre B, isto é,

$$m_B(f) = \mu(B)^{-1} \int_B f(x)\, d\mu(x). \tag{2.5}$$

Consideremos uma função f definida e localmente integrável sobre X e α um número real positivo. Suponhamos que exista uma constante finita C tal que para toda bola B em X, tenhamos

$$\| [f - m_B(f)] \, \chi_B \|_\infty \leq C \cdot \mu(B)^{\alpha} , \tag{2.6}$$

onde $m_B(f)$ é o valor médio de f sobre B.

Observemos que se f satisfaz (2.6) e k é uma constante qualquer, então f+k também satisfaz, com a mesma constante C. De fato, pela definição de valor médio de f sobre B, temos

$$\| [(f+k) - m_B(f+k)] \, \chi_B \|_\infty =$$

$$\| [f+k - m_B(f) - k] \, \chi_B \|_\infty =$$

$$\| [f-m_B(f)] \, \chi_B \|_\infty \leq C \, \mu(B) \;.$$

Além disso, para toda constante k segue, da definição de valor médio de uma constante, que

$$\|[k - m_B(k)]\chi_B\|_\infty = 0.$$

Identificaremos todo par de funções satisfazendo (2.6) que difiram por uma constante. Esta identificação define uma relação de equivalência, módulo constantes, sobre o conjunto de todas as funções que satisfazem (2.6). Dada uma função f satisfazendo (2.6), denotaremos por $\overline{f}$ a classe de equivalência de f.

DEFINIÇÃO 2.1 - Seja X um espaço de tipo homogêneo tal que $\mu(X)$ seja infinita. Chamaremos de $\mathcal{L}_\alpha$ ao espaço das classes de equivalência, módulo constantes, de funções que satisfazem a condição (2.6). A norma de $\overline{f}$ em $\mathcal{L}_\alpha$, denotada por $\|\overline{f}\|_{\mathcal{L}_\alpha}$, é definida como o ínfimo das constantes C tal que, para uma função pertencente à classe $\overline{f}$, a condição (2.6) verifica-se para toda bola B.

Notemos que a norma $\|\overline{f}\|_{\mathcal{L}_\alpha}$ está bem definida, pois de f e g pertencem a $\overline{f}$, então $g = f + k$, onde k é uma constante e pela observação feita após (2.6) temos

$$\|[g-m_B(g)]\chi_B\|_\infty = \|[f-m_B(f)]\chi_B\|_\infty.$$

LEMA 2.1 - $\mathcal{L}_\alpha$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{\overline{f}_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_\alpha$; então dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que para m, $n \geq N(\varepsilon)$, temos

$$\|\bar{f}_n - \bar{f}_m\|_{\mathcal{L}_\alpha} < \varepsilon,$$

donde,

$$(2.7) \qquad \|[(f_n - f_m) - m_B(f_n - f_m)]\, \chi_B\|_\infty < \varepsilon \cdot \mu(B)^\alpha ,$$

para toda bola B e todo $n, m \geq N(\varepsilon)$. Queremos provar que existe uma classe $\bar{h}$ em $\mathcal{L}_\alpha$ tal que $\bar{f}_n$ converge para $\bar{h}$. Para isto mostraremos que se f_n e h são representantes de $\bar{f}_n$ e $\bar{h}$, respectivamente, então para cada bola B e $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que

$$\|[(h - f_m) - m_B(h - f_m)]\, \chi_B\|_\infty \leq \varepsilon \cdot \mu(B)^\alpha ,$$

para todo $m \geq N(\varepsilon)$. Para demonstrar isto seja x_o um ponto fixo em X e para cada número natural j, consideremos as bolas $B_j = B(x_o, j)$. Então $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência crescente de bolas em X tal que $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = X$.

Notemos que para cada n, existe um elemento f_n da classe $\bar{f}_n$ tal que $m_{B_1}(f_n) = 0$. De fato, se $m_{B_1}(f_n) \neq 0$, então basta tomarmos a função $f_n - m_{B_1}(f_n)$, que pertence à mesma classe e pela definição de valor médio de $f_n - m_{B_1}(f_n)$ sobre B_1, temos

$$m_{B_1}(f_n - m_{B_1}(f_n)) = m_{B_1}(f_n) - m_{B_1}(m_{B_1}(f_n)) = 0.$$

De (2.7) e pela definição de valor médio de uma função segue que

$$\|[f_n - m_{B_j}(f_n)]\chi_{B_j} - [f_m - m_{B_j}(f_m)]\chi_{B_j}\|_\infty \leq \varepsilon \cdot \mu(B_j)^\alpha$$

para toda bola B_j e todo $n, m \geq N(\varepsilon)$, donde concluímos que $\{[(f_n - m_{B_j}(f_n)]\chi_{B_j}\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $L^\infty(X)$. Seja g_j o limite desta sequência em $L^\infty(X)$. Então, pela definição de valor médio de uma função, temos

$$|m_{B_1}(g_j) - m_{B_1}(f_n - m_{B_j}(f_n))| \leq \mu(B_1)^{-1} \cdot \int_{B_1} |g_j(x) - [f_n(x) - m_{B_j}(f_n)]| d\mu(x)$$

$$\leq \|g_j - [f_n - m_{B_j}(f_n)]\chi_{B_j}\|_\infty ,$$

o que implica que

$$\|[m_{B_1}(g_j) - m_{B_1}(f_n - m_{B_j}(f_n))]\chi_{B_j}\|_\infty \leq \|g_j - [f_n - m_{B_j}(f_n)]\chi_{B_j}\|_\infty .$$

Como $[f_n - m_{B_j}(f_n)]\chi_{B_j}$ converge para g_j em $L^\infty(X)$ então $[m_{B_1}(f_n - m_{B_j}(f_n))]\chi_{B_j}$ converge para $m_{B_1}(g_j)\chi_{B_j}$ em $L^\infty(X)$.

Seja $h_j = g_j - m_{B_1}(g_j)\chi_{B_j}$, então pelo que foi visto anteriormente e pela definição de g_j, temos

$$h_j = \lim_{n\to\infty} [f_n - m_{B_j}(f_n)]\chi_{B_j} - \lim_{n\to\infty} [m_{B_1}(f_n - m_{B_j}(f_n)]\chi_{B_j} .$$

Como estes limites existem em $L^\infty(X)$ e do fato de $m_{B_1}(f_n) = 0$, para todo n, segue que

$$h_j = \lim_{n\to\infty} [f_n - m_{B_j}(f_n) - m_{B_1}(f_n) + m_{B_j}(f_n)]\chi_{B_j}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f_n \chi_{B_j}.$$

Por outro lado $h_j = h_{j+1}\chi_{B_j}$ como função de $L^\infty(X)$, pois pelo que foi visto anteriormente e do fato de B_j estar contido em B_{j+1}, temos

$$h_j - h_{j+1}\chi_{B_j} = \lim_{n\to\infty} [f_n\chi_{B_j} - (f_n\chi_{B_{j+1}})\chi_{B_j}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} [f_n\chi_{B_j} - f_n\chi_{B_j}] = 0 ,$$

Portanto a função h satisfazendo a condição $h\chi_{B_j} = h_j$, para cada j, está bem definida em X, h pertence a $L^\infty(X)$, localmente, e para toda bola B e todo índice j tal que B está contida em B_j, temos

$$\lim_{n\to\infty} f_n\chi_B = \lim_{n\to\infty}(f_n\chi_{B_j})\chi_B = h_j\chi_B = h\chi_B ,$$

onde os limites foram calculados em $L^\infty(X)$. Daí segue que $m_B(f_n)\chi_B$ converge para $m_B(h)\chi_B$ em $L^\infty(X)$, quando n tende para o infinito, donde pela definição de valor médio de uma função, resulta que

$$[(f_n - f_m) - m_B(f_n - f_m)]\chi_B \quad \text{converge para}$$

$$[(h - f_m) - m_B(h - f_m)]\chi_B \quad \text{em } L^\infty(X), \text{ se n tende para o infinito.}$$

Fazendo n tender para o infinito em (2.7), temos

$$\|[(h-f_m)-m_B(h-f_m)]\chi_B\|_\infty \leq \varepsilon\, \mu(B)^\alpha ,$$

para toda bola B e todo $m \geq N(\varepsilon)$, o que implica pela definição da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\alpha}$, que

$$\|\overline{h - f_m}\|_{\mathcal{L}_\alpha} \leq \varepsilon ,$$

para todo $m \geq N(\varepsilon)$, ou seja,

$$\|\bar{h} - \bar{f}_m\|_{\mathcal{L}_\alpha} \leq \varepsilon$$

para todo $m \geq N(\varepsilon)$. Portanto $\bar{f}_m$ converge para $\bar{h}$ em $\mathcal{L}_\alpha$. Além disso, como $\bar{h} - \bar{f}_m$ pertence a $\mathcal{L}_\alpha$ e $\bar{f}_m$ pertence a $\mathcal{L}_\alpha$ temos que $\bar{h}$ pertence a $\mathcal{L}_\alpha$, o que completa a demonstração do lema.

DEFINIÇÃO 2.2 - Sejam p e q tais que $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p < q$. Dizemos que uma função a, definida e mensurável sobre X, é um (p,q) átomo se:

(2.8) O suporte de a está contido em uma bola $B = B(y,\delta)$ para algum y em X e algum $\delta > 0$;

(2.9) $\int_X a(x)\, d\mu(x) = 0$;

(2.10) $\left(\mu(B)^{-1}\int_B |a(x)|^q\, d\mu(x)\right)^{1/q} \leq \mu(B)^{-1/p}$ se $q < \infty$, ou

$\|a\|_\infty \leq \mu(B)^{-1/p}$ se $q = \infty$.

Mostraremos agora que se $\alpha = 1/p-1$, então as séries $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$, com $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p$ finita, podem ser interpretadas como funcionais lineares sobre $\mathcal{L}_\alpha$.

Começaremos associando a um (p,q) átomo a, $p < 1$, um funcional linear L_a sobre $\mathcal{L}_\alpha$ definido da seguinte maneira:

$$L_a(\bar{g}) = \langle a,\bar{g} \rangle = \int_X a(x)g(x)d\mu(x) ,$$

onde g é um elemento da classe $\bar{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_\alpha$. Notemos que L_a está bem definido em $\mathcal{L}_\alpha$, pois se g_1 e g_2 pertencem à mesma classe, então $g_1-g_2 = k$, onde k é uma constante, donde pela linearidade de L_a e por (2.9), segue que

$$\begin{aligned} L_a(\bar{g}_1) - L_a(\bar{g}_2) &= \int_X a(x)[g_1(x)-g_2(x)]\,d\mu(x) \\ &= k\int_X a(x)\,d\mu(x) = 0, \end{aligned}$$

o que implica que $L_a(\bar{g}_1) = L_a(\bar{g}_2)$.

LEMA 2.2 - L_a é um funcional linear sobre $\mathcal{L}_{(1/p-1)}$, limitado em norma por um.

Demonstração: Observemos, inicialmente, que do fato do suporte de a estar contido em uma bola B, segue que

$$L_a(\bar{f}) = \int_X a(x)f(x)d\mu(x) = \int_B a(x)f(x)d\mu(x).$$

Como $m_B(g)$ é constante temos por (2.9) que

$$|L_a(\bar{g})| = |\int_B a(x)\,[g(x)-m_B(g)]\,d\mu(x)|,$$

o que implica que

$$|L_a(\bar{g})| \leq \int_B |a(x)|\cdot|[g(x)-m_B(g)]\,\chi_B(x)|\,d\mu(x)$$

$$\leq \int_B |a(x)|\,d\mu(x)\cdot\|[g-m_B(g)]\,\chi_B\|_\infty .$$

Se $q < \infty$, pela desigualdade de Hölder e pelas condições (2.6) e (2.10) resulta que

$$|L_a(\bar{g})| \leq \mu(B)\cdot(\mu(B)^{-1}\int_B |a(x)|^q\,d\mu(x))^{1/q}\,\|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{(1/p-1)}}\,\mu(B)^{1/p-1}$$

$$\leq \mu(B)\,\mu(B)^{-1/p}\,\mu(B)^{1/p-1}\,\|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{(1/p-1)}} .$$

Por outro lado, se $q = \infty$ por (2.6) e (2.10) temos

$$|L_a(\bar{g})| \leq \mu(B)\,\|a\|_\infty\,\|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{(1/p-1)}}\,\mu(B)^{1/p-1}$$

$$\leq \mu(B)\,\mu(B)^{-1/p}\,\mu(B)^{1/p-1}\,\|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{(1/p-1)}} .$$

Portanto, para todo $\overline{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_{(1/p-1)}$, temos

$$(2.11) \qquad |L_a(\overline{g})| = |<a,\overline{g}>| \leq \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{(1/p-1)}},$$

o que termina a demonstração do lema.

Com o objetivo de facilitar a notação, identificaremos a partir daqui o funcional linear L_a com o átomo a. Nesta notação temos o seguinte lema:

LEMA 2.3 - Seja $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de (p,q) átomos, $p < 1$, e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência numérica tal que $\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p$ seja finita. Então $\Sigma_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_i$ define um funcional linear sobre $\mathcal{L}_{(1/p-1)}$ com norma limitada por $(\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p)^{1/p}$.

Demonstração: Seja $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de (p,q) átomos, $p < 1$ e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de escalares tal que $\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p$ seja finita. Então para todo $\overline{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_{(1/p-1)}$ e todo $m > 0$, segue de (2.11) que

$$\Sigma_{i=1}^{m} |\alpha_i <a_i,\overline{g}>| = \Sigma_{i=1}^{m}|\alpha_i| \, |<a_i,\overline{g}>|$$

$$\|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{(1/p-1)}} \Sigma_{i=1}^{m} |\alpha_i|.$$

Do fato de $p < 1$, resulta que

$$\Sigma_{i}^{m}|\alpha_i < a_i,\overline{g} >| \leq ||\overline{g}||_{\mathcal{L}_{(1/p-1)}} (\Sigma_{i=1}^{m}|\alpha_i|^p)^{1/p}$$

$$\leq ||\overline{g}||_{\mathcal{L}_{(1/p-1)}} (\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p)^{1/p} ,$$

o que implica que a sequência $\{\Sigma_{i=1}^{m}|\alpha_i < a_i,\overline{g} >|\}_{m=1}^{\infty}$ é limitada superiormente, pois $\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p$ é limitada. Além disso, esta sequência é monótona crescente, donde resulta que a série $\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i <a_i,\overline{g}>|$ é absolutamente convergente. Portanto a série $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i <a_i,\overline{g}>$ converge para um valor que denotaremos por $<\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i,\overline{g}>$. Isto define uma aplicação sobre $\mathcal{L}_{(1/p-1)}$ que denotaremos também por $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ e que satisfaz

$$| <\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i,\overline{g} >| \leq ||\overline{g}||_{\mathcal{L}_{(1/p-1)}} (\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p)^{1/p},$$

para todo $\overline{g}$ em $\mathcal{L}_{(1/p-1)}$.

Para terminar a demonstração do lema provaremos que $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ é linear. De fato, para todo $\overline{f}$ e $\overline{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_{(1/p-1)}$ e todo escalar λ temos, pela definição de $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ e do fato de L_a ser linear, que

$$< \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i, \lambda\overline{f}+\overline{g} > = \lim_{m\to\infty} \Sigma_{i=1}^{m} \alpha_i < a_i,\lambda\overline{f}+\overline{g} >$$

$$= \lim_{m\to\infty} \Sigma_{i=1}^{m}[\lambda\alpha_i < a_i,\overline{f}> + \alpha_i <a_i,\overline{g} >].$$

Como os limites acima existem, segue que

$$<\Sigma_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_i,\ \lambda\overline{f}+\overline{g}> = \lambda\lim_{m\to\infty}\Sigma_{i=1}^{m}\alpha_i < a_i,\overline{f} > + \lim_{m\to\infty}\Sigma_{i=1}^{m}\alpha_i < a_i,\overline{g} >$$

$$= \lambda <\Sigma_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_i\ ,\ \overline{f} > + <\Sigma_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_i,\overline{g} >.$$

Estamos agora em condições de definir o espaço $H^{p,q}$, $p < 1$, sobre X, como segue.

DEFINIÇÃO 2.3 - Sejam p e q tais que $0 < p < 1 \leq q \leq \infty$. Definimos o espaço $H^{p,q}$ sobre X como o subespaço linear de $\mathcal{L}^*_{(1/p-1)}$, formado por todos os funcionais lineares h sobre $\mathcal{L}_{(1/p-1)}$, que possuem uma representação em série da forma $h = \Sigma_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_i$, onde $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de (p,q) átomos e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares tal que $\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p$ seja finita.

Devemos observar que esta representação não é única. Então para cada elemento h em $H^{p,q}$ definimos a "norma":

$$|h|_{H^{p,q}} = \inf\{\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p : h = \Sigma_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_i\ ,\ \text{onde os } a_i \text{ são (p,q) átomos}\}.$$

Notemos que se $p \neq 1$, então $|\cdot|_{H^{p,q}}$ não é uma norma, pois não é homogênea, mas satisfaz a desigualdade triangular, o que permite definir uma distância sobre $H^{p,q}$ da seguinte maneira:

(2.12) $$d(h_1,h_2) = |h_1 - h_2|_{H^{p,q}} .$$

Com esta distância $H^{p,q}$ é um espaço vetorial topológico. (ver parágrafo 1.3).

Existe uma inclusão natural entre os espaços $H^{p,q}$, como veremos a seguir.

LEMA 2.4 - Sejam p, q_1 e q_2 tais que $0 < p < 1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$. Então temos a seguinte inclusão:

$$H^{p,\infty} \subset H^{p,q_2} \subset H^{p,q_1}$$

Além disso, $d(\cdot,\cdot)_{p,q_1} \leq d(\cdot,\cdot)_{p,q_2}$.

Demonstração: Para provar a primeira parte do lema basta mostrarmos que todo (p,q_2) átomo é um (p,q_1) átomo. De fato, se $q_1 \leq q_2$, aplicando a condição (1.11) temos

$$(\mu(B)^{-1}\int_B |a(x)|^{q_1} d\mu(x))^{1/q_1} \leq (\mu(B)^{-1}\int_B |a(x)|^{q_2} d\mu(x))^{1/q_2} ,$$

donde segue a afirmação.

Para demonstrar que $d(\cdot,\cdot)_{p,q_1} \leq d(\cdot,\cdot)_{p,q_2}$, observemos que se $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ pertence a H^{p,q_2} então h pertence a H^{p,q_1}, de onde resulta, pela definição da norma $|\cdot|_{H^{p,q_1}}$, que

$$|h|_{H^{p,q_1}} \leq \Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p ,$$

para toda expressão $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ em H^{p,q_2}. Daí segue, pela definição da norma $|\cdot|_{H^{p,q_2}}$, que

$$|h|_{H^{p,q_1}} \leq |h|_{H^{p,q_2}} \quad ,$$

o que completa a demonstração do lema.

LEMA 2.5 - Seja q tal que $1 < q \leq \infty$ e suponhamos que $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de $(1,q)$ átomos e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de escalares tal que $\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$ seja finita. Então $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ converge em $L^1(X)$ para uma função h pertencente a $L^1(X)$.

Demonstração: Para demonstrar o lema basta verificarmos que toda sequência da forma $S_n = \Sigma_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ é de Cauchy em $L^1(X)$, pois unindo isto ao fato de $L^1(X)$ se completo. (ver teorema 1.2) o resultado se segue. Começaremos provando que para todo $(1,q)$ átomo a, $1 < q \leq \infty$, temos $\|a\|_1 \leq 1$. De fato, se $1 < q < \infty$, então pela condição (1.11) e por (2.10) segue que

$$\mu(B)^{-1}\int_B |a(x)|\, d\mu(x) \leq (\mu(B)^{-1}\int_B |a(x)|^q\, d\mu(x))^{1/q}$$

$$\leq \mu(B)^{-1} \quad ,$$

donde resulta que $\|a\|_1 \leq 1$.

Por outro lado, se a é um $(1,\infty)$ átomo, temos por (2.10) que

$$||a||_1 = \int_B |a(x)|d\mu(x) \leq ||a||_\infty \cdot \mu(B)$$

$$\leq \mu(B)^{-1} \cdot \mu(B) \quad ,$$

o que implica que $||a||_1 \leq 1$. Logo, para todo $(1,q)$ átomo a, $1 < q \leq \infty$, temos $||a||_1 \leq 1$.

Afirmamos agora que a sequência definida por $A_n = \Sigma_{i=1}^{n} \|\alpha_i a_i\|_1$ é uma sequência de Cauchy. Com efeito, pelo que foi visto acima temos, para todo $n > 0$, que

$$A_n = \Sigma_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|a\|_1 \leq \Sigma_{i=1}^{n} |\alpha_i|$$

$$\leq \Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| \quad ,$$

o que implica que a sequência A_n é limitada superiormente, pois $\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$ é finita. Além disso, é fácil ver que A_n é monótona crescente. Logo A_n é convergente e portanto de Cauchy.

Agora estamos em condições de provar que a sequência S_n é de Cauchy em $L^1(X)$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que

$$\|S_m - S_n\|_1 = \|\Sigma_{i=n+1}^{m} \alpha_i a_i\|_1$$

$$\leq \Sigma_{i=n+1}^{m} \|\alpha_i a_i\|_1 < \varepsilon,$$

se $m \geq n > N(\varepsilon)$, o que termina a demonstração do lema.

O lema anterior sugere a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2.4 - Seja q tal que $1 < q \leq \infty$. Definimos o espaço $H^{1,q}$ sobre X como o conjunto de todas as funções h pertencentes a $L^1(X)$ que podem ser expressas na forma $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$, onde $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de (1,q) átomos e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares tal que $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|$ seja finita. A norma de um elemento h pertencente a $H^{1,q}$ é definida por

$$|h|_{H^{1,q}} = \inf \{\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| : h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i, \text{ onde os } a_i \text{ são (1,q) átomos}\}.$$

Observemos que o lema 2.4 também é verdadeiro quando p = 1.

2.3 - ESPAÇOS DUAIS

Já foi visto anteriormente que a distância definida sobre $H^{p,q}$ em (2.12) não provém de uma norma, mas com esta distância $H^{p,q}$ é um espaço vetorial topológico. Logo, dado um funcional linear L, contínuo sobre $H^{p,q}$, não é verdadeira a afirmação de que existe uma constante $C > 0$ tal que $|L(h)| \leq C\ |h|_{H^{p,q}}$. Mas temos o seguinte resultado:

TEOREMA 2.1 - Um funcional linear L sobre $H^{p,q}$ é contínuo se, e somente se, existe uma constante finita $C > 0$ tal que

$$(2.13) \qquad |<L,h>| \leq C \cdot |h|_{H^{p,q}}^{1/p} ,$$

para todo h pertencente a $H^{p,q}$.

Demonstração: Seja L um funcional linear sobre $H^{p,q}$. Então L é contínuo se, e somente se, L é contínuo em 0. Pela definição de continuidade, isto é equivalente à existência de um $\delta > 0$ tal que

$$(2.14) \qquad |\langle L,h\rangle| \leq 1 \quad \text{se} \quad |h|_{H^{p,q}} \leq \delta .$$

Mas pela definição da "norma" $|\cdot|_{H^{p,q}}$, para todo $h \neq 0$ pertencente a $H^{p,q}$, temos

$$|\delta^{1/p} \cdot |h|_{H^{p,q}}^{-1/p} \cdot h|_{H^{p,q}} = \delta |h|_{H^{p,q}}^{-1} |h|_{H^{p,q}} = \delta ,$$

donde segue que (2.14) é equivalente à condição

$$(2.15) \qquad |\langle L, \delta^{1/p} \cdot |h|_{H^{p,q}}^{-1/p} \cdot h\rangle| \leq 1 ,$$

para todo h pertencente a $H^{p,q}$. Pela linearidade de L, a condição (2.15) é válida se, e só se, para todo h em $H^{p,q}$ temos

$$|\langle L,h\rangle| \leq \delta^{-1/p} \cdot |h|_{H^{p,q}}^{1/p} ,$$

o que demonstra o lema.

DEFINIÇÃO 2.5 - Se L pertence ao espaço $(H^{p,q})^*$, a norma de L, denotada por $\|L\|_{p,q}^*$, é definida como o ínfimo das constantes C que satisfazem a condição (2.13), para todo h pertencente a $H^{p,q}$.

Sejam p,q e q' tais que $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p < q$ e

$1/q + 1/q' = 1$. Consideremos uma função g, definida e localmente integrável sobre X, tal que existe uma constante finita $C > 0$, satisfazendo

$$(2.16) \qquad \left(\mu(B)^{-1}\int_B |g(x)-m_B(g)|^{q'}\, d\mu(x)\right)^{1/q'} \leq C \cdot \mu(B)^{1/p-1} ;$$

para toda bola B em X, onde $m_B(g)$ é o valor médio da função g sobre B, definido em (2.5). A condição (2.16) é equivalente a

$$(2.17) \qquad \|[g-m_B(g)]\chi_B\|_{q'} \leq C \quad \mu(B)^{1/p-1/q} ,$$

para toda bola B em X.

Observamos que quando $q' = \infty$ em (2.17) temos a condição (2.6) da definição do espaço $\mathcal{L}_\alpha$, com a norma $\|\cdot\|_{q'}$ substituída pela norma $\|\cdot\|_\infty$ e $1/p - 1/q$ por α.

Notemos que se uma função g satisfaz (2.17), o mesmo ocorre com g mais uma constante. Identificando estas funções temos uma relação de equivalência, módulo constantes, sobre o conjunto de todas as funções que satisfazem (2.17). Denotaremos por $\bar{g}$ a classe de equivalência de uma função g, segundo esta relação.

DEFINIÇÃO 2.6 - Seja X um espaço de tipo homogêneo tal que $\mu(X)$ seja infinita. Definimos $\mathcal{L}_{p,q'}$ como sendo o conjunto das classes de equivalência, módulo constantes, de funções que satisfazem a condição (2.17). A norma de uma classe $\bar{g}$ pertencente à $\mathcal{L}_{p,q'}$, denotada por $\|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q}}$, é definida como o ínfimo das constantes C tal que, para uma função de classe $\overline{g}$, a condição (2.17) é satisfeita para toda bola B em X.

De maneira análoga ao espaço $\mathcal{L}_\alpha$, temos o seguinte resultado:

LEMA 2.6 - $\mathcal{L}_{p,q'}$ é um espaço de Banach.

A demonstração é semelhante à prova do lema 2.1, bastando substituir a norma $\|\cdot\|_\infty$ pela norma $\|\cdot\|_{q'}$ e α por $1/p-1/q$.

O teorema seguinte fornece uma caracterização dos duais dos espaços $H^{p,q}$.

TEOREMA 2.2 - Sejam p,q e q' tais que $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p < q$ e $1/q+1/q' = 1$. Então o espaço $(H^{p,q})^*$ de todos os funcionais lineares e contínuos sobre $H^{p,q}$ é equivalente ao espaço $\mathcal{L}_{p,q'}$, no seguinte sentido:

(2.18) Para todo $\overline{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_{p,q'}$, existe um funcional linear $L_{\overline{g}}$ sobre $H^{p,q}$, obtido a partir de $\overline{g}$, que satisfaz a condição (2.13).

(2.19) Para todo funcional linear L, contínuo sobre $H^{p,q}$, existe um elemento $\overline{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_{p,q'}$ que define um funcional linear $L_{\overline{g}}$ que coincide com L.

(2.20) Para todo $\overline{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_{p,q'}$, temos

$$\|L_{\overline{g}}\|^*_{p,q} \leq \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} \leq 2.\|L_{\overline{g}}\|^*_{p,q}.$$

Demonstração: Para provar (2.18) consideraremos uma classe $\overline{g}$ em $\mathcal{L}_{p,q'}$ e fixaremos um elemento g pertencente a $\overline{g}$. Provaremos, inicialmente, que se $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ é um elemento qualquer de $H^{p,q}$, então a série $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i <\overline{g}, a_i>$ converge, onde para cada (p,q) átomo a, definimos

$$(2.21) \qquad <\overline{g}, a> = \int_B g(x) a(x) \, d\mu(x) \, .$$

De fato, se a é um (p,q) átomo, B é uma bola satisfazendo as condições (2.8), (2.9) e (2.10) e $m_B(g)$ é o valor médio de g sobre B, então temos

$$\begin{aligned} |<\overline{g}, a>| &= \left| \int_B g(x) a(x) d\mu(x) \right| \\ &= \left| \int_B [g(x) - m_B(g)] \, a(x) \, d\mu(x) \right| \\ &\leq \int_B | g(x) - m_B(g) \, a(x) | \, d\mu(x) \, , \end{aligned}$$

donde, aplicando a desigualdade de Hölder e as condições (2.17) e (2.10), segue que

$$\begin{aligned} | <\overline{g}, a> | &\leq \| [g - m_B(g)] \chi_B \|_{q'} \, \| a \|_q \\ &\leq \| \overline{g} \|_{\mathcal{L}_{p,q'}} \cdot \mu(B)^{1/p - 1/q} \, \mu(B)^{1/q - 1/p} \, , \end{aligned}$$

o que implica que

$$(2.22) \qquad | <\overline{g}, a> | \leq \| \overline{g} \|_{\mathcal{L}_{p,q'}} \, ,$$

para todo (p,q) átomo a. Logo, para todo $m > 0$ e todo $h = \Sigma_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_i$ pertencente a $H^{p,q}$ segue, de (2.22) e do fato de $p < 1$, que

$$\Sigma_{i=1}^{m} |\alpha_i <\overline{g},a_i> | = \Sigma_{i=1}^{m} |\alpha_i| \; |<\overline{g}, a_i>|$$

$$\leq (\Sigma_{i=1}^{m} |\alpha_i|) \, \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}}$$

$$\leq \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} (\Sigma_{i=1}^{m}|\alpha_i|^p)^{1/p}$$

$$\leq \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} (\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p)^{1/p} \quad ,$$

donde resulta que a sequência $\{\Sigma_{i=1}^{m}|\alpha_i < \overline{g},a_i> |\}_{m=1}^{\infty}$ é limitada superiormente, pois $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p$ é limitada. Além disso, como esta sequência é monótona crescente, então ela é convergente, donde segue que a série $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i <\overline{g}, a_i>$ é absolutamente convergente. Portanto a série $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \overline{g}, a_i >$ converge para um valor que denotaremos por $< \overline{g}, \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i >$ e temos

$$(2.23) \qquad | <\overline{g}, \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i >| \leq \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} (\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p)^{1/p} \, ,$$

para todo $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ pertencente a $H^{p,q}$.

Agora podemos definir um funcional linear $L_{\overline{g}}$ sobre $H^{p,q}$ da seguinte maneira:

$$L_{\overline{g}}(h) = < \overline{g}, \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i > ,$$

para todo $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ pertencente a $H^{p,q}$.

Provaremos que $L_{\overline{g}}$ é linear. Com efeito, se $h_1=\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ e $h_2 = \Sigma_{i=1}^{\infty} \beta_i b_i$ são elementos qualquer de $H^{p,q}$, então para todo escalar λ, temos

$$\lambda h_1+h_2 = \Sigma_{i=1}^{\infty}(\lambda\alpha_i a_i + \beta_i b_i),$$

donde, pela definição de $L_{\overline{g}}$ e linearidade $<\overline{g}, a>$ definido em (2.21), segue que

$$L_{\overline{g}}(\lambda h_1+h_2) = \Sigma_{i=1}^{\infty} < \overline{g},\lambda \alpha_i a_i + \beta_i b_i >$$

$$= \Sigma_{i=1}^{\infty} [\lambda\alpha_i <\overline{g},a_i> + \beta_i <\overline{g}, b_i>].$$

Daí, pela convergência absoluta das série resulta que

$$L_{\overline{g}}(\lambda h_1+h_2) = \lambda\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i <\overline{g}, a_i> + \Sigma_{i=1}^{\infty} \beta_i <\overline{g},b_i>$$

$$= \lambda L_{\overline{g}}(h_1) + L_{\overline{g}}(h_2),$$

o que demonstra a afirmação.

Observemos que pela definição da "norma" $|\cdot|_{H^{p,q}}$, segue de (2.23) que

$$|L_{\bar{g}}(h)| \leq \|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q}} \cdot |h|^{1/p}_{H^{p,q}} ,$$

para todo h pertencente a $H^{p,q}$, o que implica que $L_{\bar{g}}$ satisfaz a condição (2.13). Além disso, da última desigualdade e pela definição da norma $\|\cdot\|^*_{p,q}$ temos

$$(2.24) \qquad \|L_{\bar{g}}\|^*_{p,q} \leq \|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} .$$

Passemos à demonstração de (2.19). Para isto, seja L um funcional linear contínuo sobre $H^{p,q}$ e para cada bola fixa B, definamos o seguinte conjunto:

$$L^q_0(B) = \{f \in L^q(B) : \int_B f(x)\, d\mu(x) = 0\} .$$

Então, se f pertence à $L^q_0(B)$, a função definida por

$a(x) = \mu(B)^{1/q-1/p} \|f\|_q^{-1} f(x)$ é um (p,q) átomo. De fato, pela definição $L^q(B)$ (ver parágrafo 1.3) o suporte de a está contido em B; a condição (2.9) resulta de

$$\int_B a(x)\, d\mu(x) = \mu(B)^{1/q-1/p} \cdot \|f\|_q^{-1} \int_B f(x)\, d\mu(x) = 0 ,$$

e finalmente, a condição (2.10) segue de

$$\|a\|_q = \mu(B)^{1/q-1/p} \cdot \|f\|_q^{-1} \|f\|_q .$$

Logo f pertence a $H^{p,q}$ e pela definição da "norma" $|\cdot|_{H^{p,q}}$, temos

$$|f|^{1/p}_{H^{p,q}} \leq \mu(B)^{1/p-1/q} \cdot \|f\|_q \, .$$

Daí segue que $< L,f >$ está definido e de (2.13) e da última desigualdade, vem que

$$(2.25) \qquad |< L,f >| \leq \|L\|^*_{p,q} \; \mu(B)^{1/p-1/q} \cdot \|f\|_q \, ,$$

para todo f pertencente a $L^q_o(B)$, o que implica que L é um funcional linear limitado sobre $L^q_o(B)$. Aplicando o teorema de Hahn-Banach (ver teorema 1.4) L pode ser extendido sobre $L^q(B)$, com a mesma norma. Pelo teorema de representação de Riesz (ver teorema 1.3) existe uma função g pertencente a $L^{q'}(B)$ tal que

$$(2.26) \qquad < L,f > = \int_B g(x) f(x) \, d\mu(x) = < g,f >,$$

para toda f pertencente a $L^q(B)$ e

$$(2.27) \qquad \|g\|_{q'} = \sup_{\|f\chi_B\|_q = 1} \left| \int_B g(x) f(x) \, d\mu(x) \right| \, .$$

As funções pertencentes a $L^{q'}(B)$ e satisfazendo a condição (2.26), para toda função f em $L^q(B)$, diferem por uma constante. De fato, sejam g_1 e g_2 duas funções pertencentes a $L^{q'}(B)$ e satisfazendo a condição (2.26). Notemos, inicialmente, que para toda função f em $L^q(B)$, pela definição de valor médio de f sobre B, temos

$$\int_B [f(x)-m_B(f)]\ d\mu(x) = \int_B f(x)d\mu(x) - \mu(B)^{-1}\int_B f(y)\ d\mu(y)\int_B d\mu(x)=0,$$

donde concluímos que $f-m_B(f)$ pertence a $L_0^q(B)$, para toda função f em $L^q(B)$. Daí segue que

$$< g_1, f-m_B(f) > = <g_2, f-m_B(f) >,$$

para toda função f em $L^q(B)$, o que implica que

$$<g_1-g_2\ ,\ f-m_B(f) > = 0, \tag{2.28}$$

qualquer que seja a função f em $L^q(B)$.

Por outro lado, observemos que pela definição de valor médio de uma função sobre uma bola B, temos

$$\begin{aligned} <m_B(g_1-g_2)\ ,f > &= \int_B m_B(g_1-g_2)\ f(x)\ d\mu(x) \\ &= \mu(B)^{-1}\int_B (g_1-g_2)(y)\ d\mu(y)\int_B f(x)\ d\mu(x) \\ &= \int_B (g_1-g_2)(y)\ m_B(f)\ d\mu(y) \\ &= <g_1 - g_2\ ,\ m_B(f) >. \end{aligned}$$

Daí e de (2.28) segue que

$$< g_1-g_2 - m_B(g_1-g_2) \, , \, f > = < g_1-g_2, f> - < m_B(g_1-g_2), f >$$

$$= < g_1-g_2, f> - < g_1-g_2, m_B(f)>$$

$$= < g_1-g_2, f - m_B(f) > = 0 \, ,$$

para toda função f em $L^q(B)$, o que implica que

(2.29) $$g_1-g_2 = m_B(g_1-g_2) \, ,$$

quase sempre em B, o que demonstra a afirmação.

Nosso objetivo agora é definir uma função g sobre X que pertença a uma classe $\overline{g}$ de funções em $\mathcal{L}_{p,q}$, e que para cada bola B em X satisfaça (2.26), para toda função f pertencente a $L^q(B)$. Para fazer isto fixemos em ponto x_o em X e para cada inteiro positivo i, consideremos as bolas $B_i = B(x_o, i)$. Temos que $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência crescente de bolas em X tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = X$. Consideremos ainda uma sequência de funções $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que para cada i, g_i pertence a $L^{q'}(B_i)$ e satisfaz a condição (2.26), para toda função f em $L^q(B_i)$. Então impondo a condição

(2.30) $$\int_{B_1} g_i(x) \, d\mu(x) = 0 \, , \quad \text{para todo} \quad i \geq 1 \, ,$$

obtemos g definida sobre X da seguinte forma:

$$g(x) = g_i(x), \text{ se } x \text{ pertence a } B_i \, .$$

A função g está bem definida, pois para todo $i \geq 1$, a função g_{i+1} restrita ao conjunto B_i é igual à função g_i. Com efeito, do fato de cada bola B_i estar contida na bola B_{i+1} segue que $L^{q'}(B_i)$ está contido em $L^{q'}(B_{i+1})$, donde resulta que a função $g_{i+1}\chi_{B_i}$ satisfaz (2.26) para toda função f pertencente a $L^q(B_i)$ Pela observação feita após (2.27) temos que $g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i$ é igual a uma constante. Daí e de (2.30), segue que

$$g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i = \mu(B_1)^{-1}\int_{B_1} [g_{i+1}(x)\chi_{B_i}(x) - g_i(x)]\, d\mu(x)$$

$$= \mu(B_1)^{-1}\int_{B_1} g_{i+1}(x)\chi_{B_i}(x)d\mu(x) - \mu(B_1)^{-1}\int_{B_1} g_i(x)d\mu(x) = 0,$$

o que implica que $g_{i+1}\chi_{B_i} = g_i$.

Provaremos agora que g pertence a uma classe $\bar{g}$ de funções em $\mathcal{L}_{p,q'}$. Observemos, inicialmente, que para toda bola B em X e toda função f em $L^q(B)$, temos

$$\int_B [g(x) - m_B(g)]\, m_B(f)\, d\mu(x) = m_B(f)\left[\int_B g(x)\, d\mu(x) - \mu(B)^{-1}\int_B g(y)\, d\mu(y)\int_B d\mu(x)\right] = 0.$$

Logo, para toda bola B em X, segue de (2.27) e do que vimos acima que

$$\|[g - m_B(g)]\chi_B\|_{q'} = \sup_{\|f\chi_B\|_q = 1} \left|\int_B [g(x) - m_B(g)]\, f(x)\, d\mu(x)\right|$$

$$= \sup_{\|f\chi_B\|_q = 1} \left|\int_B [g(x) - m_B(g)][f(x) - m_B(f)]\, d\mu(x)\right| . \tag{2.31}$$

Como $[f-m_B(f)]\chi_B$ pertence a $L^q(B)$, temos que (2.31) é igual à condição

$$\sup_{\|f\chi_B\|_q=1} |\langle L, [f-m_B(f)]\chi_B\rangle|.$$

Portanto segue da condição (2.25) que

$$\|[g-m_B(g)]\chi_B\|_{q'} \leq \sup_{\|f\chi_B\|_q=1} \{\|L\|^*_{p,q} \cdot \mu(B)^{1/p-1/q} \cdot \|[f-m_B(f)]\chi_B\|_q\}.$$

Aplicando a desigualdade de Minkowski , a última desigualdade se transforma em

$$(2.32) \quad \|[g-m_B(g)]\chi_B\|_{q'} \leq \|L\|^*_{p,q}\, \mu(B)^{1/p-1/q} \sup_{\|f\chi_B\|_q=1} \{\|f\chi_B\|_q + \|m_B(f)\chi_B\|_q\}$$

Mas observemos que para toda função f em $L^q(B)$, $\|f\chi_B\|_q$ majora $\|m_B(f)\chi_B\|_q$. Isto decorre da definição de $m_B(f)$ e da desigualdade de Hölder , pois

$$\|m_B(f)\chi_B\|_q = |m_B(f)|\ \|\chi_B\|_q$$

$$\leq \int |f(x)|\, d\mu(x) \cdot \mu(B)^{1/q-1}$$

$$\leq \|f\chi_B\|_q\ \mu(B)^{1-1/q} \cdot \mu(B)^{1/q-1}.$$

Logo, decorre daí e de (2.32) que

$$\|[g - m_B(g)]\chi_B\|_{q'} \leq 2 \cdot \|L\|^*_{p,q} \; \mu(B)^{1/p-1/q} \quad ,$$

o que prova que g é representante de alguma classe $\overline{g}$ de funções em $\mathcal{L}_{p,q'}$. Além disso notemos que pela definição da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{p,q'}}$, resulta da última desigualdade que

$$(2.33) \qquad \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} \leq 2 \cdot \|L\|^*_{p,q} \quad .$$

Até agora obtemos um funcional linear definido em (2.26) a partir de g pertencente a $\overline{g}$, que coincide com L para todo (p,q) átomo a, ou seja,

$$(2.34) \qquad \langle L, a \rangle = \langle g, a \rangle,$$

para todo (p,q) átomo a.

Para completar a demonstração de (2.19) provaremos que este funcional possue uma única extensão para um funcional linear limitado $L_{\overline{g}}$ sobre $H^{p,q}$ tal que $L_{\overline{g}}$ coincide com L. Para isto, definiremos o funcional linear $L_{\overline{g}}$ sobre $H^{p,q}$ tal que

$$\langle L_{\overline{g}}, h \rangle = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i \langle g, a_i \rangle ,$$

para todo $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ pertencente a $H^{p,q}$.

Então, para todo $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ em $H^{p,q}$ resulta de (2.34) que

$$\langle L_{\overline{g}}, h\rangle = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i \langle g, a_i\rangle$$

$$= \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i \langle L, a_i\rangle$$

$$= \langle L, h\rangle ,$$

o que demonstra a afirmação.

Para terminar a demonstração do teorema 2.2 , observemos que a prova de (2.20) segue imediatamente de (2.24) e de (2.33).

O próximo teorema (ver [9]) afirma que os espaços $H^{p,q}$, $0 < p \leq 1$, coincidem como conjunto para todo q tal que $1 \leq q \leq \infty$ e $p < q$.

TEOREMA 2.3 - Sejam p e q tais que $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$ e $p < q$. Então temos $H^{p,\infty} = H^{p,q}$. Além disso, as métricas são equivalentes.

Salientamos que uma parte da demonstração deste teorema já foi feita no lema 2.4 e o restante encontra-se em [9].

COROLÁRIO 2.1 - Se os espaços H^{p,q_1} e H^{p,q_2} estão definidos, então $(H^{p,q_1})^* = (H^{p,q_2})^*$.

Demonstração: De fato, pelo teorema 2.3 temos que $H^{p,q_1} = H^{p,\infty}$ e $H^{p,q_2} = H^{p,\infty}$, donde segue o resultado.

O corolário seguinte é um caso particular do corolário 2.1 quando p = 1 e é um resultado obtido por John e Nirenberg (ver [7]) que envolve a definição dos espaços B.M.O. (Bounded Mean Oscillation), que é o que faremos a seguir. Consideremos uma função g, definida e localmente integrável sobre X, tal que existe uma constante finita C satisfazendo, para toda bola B em X, a condição

$$(2.35) \qquad \mu(B)^{-1}\int_B |g(x)-m_B(g)|^{q'} \, d\mu(x) \leq C ,$$

onde $1 \leq q' < \infty$.

Notemos que (2.35) é um caso particular da condição (2.16) quando $p = 1$, portanto continua válida a observação que precede a definição 2.6 e podemos dar a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 2.7 - Seja X um espaço de tipo homogêneo tal que $\mu(X)$ seja infinita. Definimos $BMO(q')$ como o conjunto de todas as classes de equivalência, módulo constantes, de funções que satisfazem a condição (2.35) A norma de uma classe $\bar{g}$ em $BMO(q')$, denotada por $\|\bar{g}\|_{BMO(q')}$, é definida como o ínfimo das constantes C tal que, para uma função da classe $\bar{g}$, a condição (2.35) verifica-se para toda bola B em X.

Devemos observar que o espaço $BMO(q')$ coincide com o espaço $\mathcal{L}_{1,q'}$.

COROLÁRIO 2.2 - Sejam q_1' e q_2' tais que $1 \leq q_1' \leq \infty$ e $1 \leq q_2' < \infty$. Então temos:

$$BMO(q_1') = BMO(q_2')$$

Demonstração: Aplicando o corolário 2.1 com $p = 1$, temos $(H^{1,q_1})^* = (H^{1,q_2})^*$. Pelo teorema 2.2 resulta que $\mathcal{L}_{1,q_1'} = \mathcal{L}_{1,q_2'}$, donde segue o resultado.

CAPÍTULO III

ESPAÇOS $H^{p,q}$ E DE LIPSCHITZ SOBRE O ESPAÇO R^n.

Neste capítulo vamos considerar o caso em que o espaço de tipo homogêneo X seja R^n. Redefiniremos (p,q) átomos e os espaços $H^{p,q}$ e neste caso podemos considerar por exemplo, $p < 1/2$ na reta, o que não ocorria no capítulo anterior.

Deixaremos de apresentar algumas demonstrações quando as mesmas forem análogas as já apresentadas anteriormente.

Consideraremos em todo este capítulo o espaço R^n munido da distância euclidiana $d(x,y) = |x-y|$. Denotaremos por $m(E)$ a medida de Lebesgue do conjunto mensurável E e usaremos a notação $\int_E f(x)dx$ ao invés de $\int_E f(x)\, dm(x)$.

3.1 - ESPAÇOS $H^{p,q}$

Seja B uma bola no espaço R^n. Definimos em $L^2(B)$ o seguinte produto interno:

(3.1) $$(f,g) = m(B)^{-1} \int_B f(x)g(x)dx .$$

Consideremos uma função f definida e localmente integrável sobre R^n e $\{\pi_i\}_{i=1}^r$ uma base ortonormal do subespaço W_M de $L^2(B)$, formado por todos os polinômios reais de grau menor ou igual a M, onde M é um número inteiro maior ou igual a zero. Denotaremos por $P_B(f)$ o polinômio associado a f sobre a bola B, de grau menor ou igual a M, definido por

$$(3.2) \qquad P_B(f)(x) = \Sigma_{i=1}^{r} (f,\pi_i)\pi_i(x).$$

LEMA 3.1 - O polinômio $P_B(f)$ satisfaz as seguintes propriedades:

$$(3.3) \qquad \int_B [f(x) - P_B(f)(x)]\, x^k \, dx = 0,$$

para todo multi-índice k tal que $0 \leq |k| \leq M$;

$$(3.4) \qquad P_B(f+g)(x) = P_B(f)(x) + P_B(g)(x),$$

quaisquer que sejam as funções f e g, localmente integráveis.

$$(3.5) \qquad P_B(Q)(x) = Q(x),$$

para todo polinômio Q pertencente a W_M.

Demonstração: Para provar (3.3) observemos que da definição do polinômio $P_B(f)$ e do fato da base $\{\pi_i\}_{i=1}^{r}$ ser ortonormal, temos

$$(P_B(f),\pi_i) = \Sigma_{j=1}^{r}(f,\pi_j)(\pi_j,\pi_i)$$

$$= (f,\pi_i)$$

para todo i tal que $1 \leq i \leq r$, o que implica que

$$(3.6) \qquad (f - P_B(f),\pi_i) = 0 ,$$

para todo i tal que $1 \leq i \leq r$.

Como x^k pertence a W_M, para todo multi-índice k tal que $0 \leq |k| \leq M$, então

$$x^k = \Sigma_{i=1}^{r} \lambda_i \pi_i(x) \quad ,$$

onde os λ_i, $1 \leq i \leq r$, são escalares, donde, da definição do produto interno dada em (3.1) e de (3.6), segue que

$$\int_B [f(x) - P_B(f)(x)]\, x^k\, dx = m(B)(f - P_B(f),\ x^k)$$

$$= m(B)\ \Sigma_{i=1}^{r} \lambda_i (f - P_B(f), \pi_i) = 0.$$

A prova de (3.4) resulta, imediatamente, da definição do polinômio $P_B(f+g)$ e da bilinearidade do produto interno (3.1), como segue

$$P_B(f+g)(x) = \Sigma_{i=1}^{r} (f+g, \pi_i)\pi_i(x)$$

$$= \Sigma_{i=1}^{r} (f, \pi_i)\pi_i(x) + \Sigma_{i=1}^{r} (g, \pi_i)\pi_i(x)$$

$$= P_B(f)(x) + P_B(g)(x).$$

Finalmente, para provar (3.5) basta lembrarmos que, do fato da base $\{\pi_i\}_{i=1}^{r}$ ser ortonormal, temos

$$Q(x) = \Sigma_{i=1}^{r} (Q, \pi_i)\pi_i(x),$$

para todo polinômio Q pertencente a W_M donde o resultado se segue.

Consideremos agora uma função f definida e localmente integrável sobre R^n, M um inteiro não negativo e α um número real positivo. Suponhamos que exista uma constante finita C tal que, para toda bola B em R^n, tenhamos

$$(3.7) \qquad \|[f - P_B(f)]\chi_B\|_\infty \leq C \cdot m(B)^\alpha,$$

onde $P_B(f)$ é o polinômio de grau menor ou igual a M, definido em (3.2).

Observemos que se f satisfaz (3.7) e Q é um polinômio qualquer pertencente a W_M, então f+Q também satisfaz, com a mesma constante C. De fato, por (3.4) e (3.5), temos

$$\|[(f+Q) - P_B(f+Q)]\chi_B\|_\infty =$$

$$\|[f + Q - P_B(f) - Q]\chi_B\|_\infty =$$

$$\|[f - P_B(f)]\chi_B\|_\infty \leq C \cdot m(B)^\alpha .$$

Além disso, para todo Q em W_M, segue de (3.5) que

$$\|[Q - P_B(Q)]\chi_B\|_\infty = 0 .$$

Portanto identificaremos todo par de funções satisfazendo (3.7) que difiram por um polinômio de grau menor ou igual a M. Notemos que esta identificação define uma relação de equivalência, módulo polinômios de grau menor ou igual a M, sobre o conjunto de todas as funções satisfazendo (3.7). Além disso, dada uma função satisfazendo (3.7), a classe de equivalência de f será denotada por $\bar{f}$.

DEFINIÇÃO 3.1 - Chamaremos de $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$ ao espaço das classes de equivalência de funções, módulo polinômios de grau menor ou igual a M, que satisfazem a condição (3.7). A norma de $\bar{f}$ em $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$, denotada por $\|\bar{f}\|_{\mathcal{L}_{(\alpha,M)}}$, é definida como o ínfino das constantes C tal que, para uma função da classe $\bar{f}$, a condição (3.7) verifica-se para toda bola B.

Notemos que a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{(\alpha,M)}}$ está bem definida, pois se f e g pertencem à mesma classe, então $g = f+Q$, onde Q é um polinômio de grau menor ou igual a M. Daí, pela observação feita após a condição (3.7), segue que

$$\|[g - P_B(g)]\chi_B\|_\infty = \|[f - P_B(f)]\chi_B\|_\infty ,$$

o que demonstra a afirmação.

LEMA 3.2 - $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\bar{f}_m$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$; então dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que para $k, m \geq N(\varepsilon)$, temos

$$\|\bar{f}_k - \bar{f}_m\|_{\mathcal{L}_{(\alpha,M)}} < \varepsilon ,$$

donde,

$$\|[(f_k - f_m) - P_B(f_k - f_m)]\chi_B\|_\infty < \varepsilon \cdot m(B)^\alpha \tag{3.8}$$

para toda bola B e todo $k, m \geq N(\varepsilon)$.

Queremos provar que existe uma classe $\bar{h}$ em $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$ tal que $\bar{f}_k$ converge para $\bar{h}$. Para isto mostraremos que se f_k e h são representantes de $\bar{f}_k$ e $\bar{h}$, respectivamente, então para cada bola B e $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que

$$||[(h - f_m) - P_B(h - f_m)]\chi_B||_\infty \leq \varepsilon \cdot m(B)^\alpha$$

para todo $m \geq N(\varepsilon)$.

Para demonstrar isto, seja x_o um ponto fixo em R^n e para cada número natural j, consideremos bolas $B_j = B(x_o,j)$. Então $\{B_j\}_{j=1}^\infty$ é uma sequência crescente de bolas em R^n tal que $\bigcup_{i=1}^\infty B_j = R^n$.

Notemos que para cada k, existe um elemento f_k da classe $\bar{f}_k$ tal que $P_{B_1}(f_k) = 0$. De fato, se $P_{B_1}(f_k) \neq 0$, então basta tomarmos a função $f_k - P_{B_1}(f_k)$, que pertence à mesma classe que f_k e por (3.4) e (3.5) vem que

$$P_{B_1}(f_k - P_{B_1}(f_k)) = P_{B_1}(f_k) - P_{B_1}(P_{B_1}(f_k)) = 0.$$

De (3.8) e (3.4) segue que

$$||[f_k - P_{B_j}(f_k)]\chi_{B_j} - [f_m - P_{B_j}(f_m)]\chi_{B_j}||_\infty \leq \varepsilon \cdot m(B_j)^\alpha ,$$

para toda bola B_j, donde concluímos que

$$\{[f_k - P_{B_j}(f_k)]\chi_{B_j}\}_{k=1}^{\infty}$$

é uma sequência de Cauchy em $L^{\infty}(R^n)$. Seja g_j o limite desta sequência em $L^{\infty}(R^n)$. Então por (3.4) e pela definição do polinômio definido em (3.2), temos

$$|P_{B_1}(g_j)(x) - P_{B_1}(f_k - P_{B_j}(f_k))(x)| =$$

$$|P_{B_1}(g_j - (f_k - P_{B_j}(f_k))(x)| =$$

$$|\Sigma_{i=1}^{r} [m(B_1)^{-1}\int_{B_1} (g_j-(f_k-P_{B_j}(f_k))(x)\pi_i(x)dx]\pi_i(y)| \leq$$

(3.9) $$\Sigma_{i=1}^{r}[m(B_1)^{-1}\int_{B_1} |(g_j-(f_k-P_{B_j}(f_k))(x)||\pi_i(x)|dx]|\pi_i(y)|$$

Mas para cada i, $1 \leq i \leq r$, existe uma constante finita C_i tal que $|\pi_i(x)| \leq C_i$, pois cada π_i é contínua em B_1. Então se tomarmos C igual ao máximo dos elementos C_i, $1 \leq i \leq r$, segue que (3.9) é menor ou igual que

$$\Sigma_{i=1}^{r} m(B_1)^{-1} C^2\int_{B_1} |g_j - (f_k - P_{B_j}(f_k))(x)|dx .$$

Consequentemente,

$$|P_{B_1}(g_j)(x) - P_{B_1}(f_k-P_{B_j}(f_k))(x)| \leq \Sigma_{i=1}^{r} C^2 \|[g_j-(f_k-P_{B_j}(f_k))]\chi_{B_j}\|_\infty$$

$$\leq rC^2 \|[g_j-(f_k-P_{B_j}(f_k))]\chi_{B_j}\|_\infty ,$$

o que implica que

$$\|[P_{B_1}(g_j)-P_{B_1}(f_k-P_{B_j}(f_k))]\chi_{B_j}\|_\infty \leq rC^2 \|[g_j-(f_k-P_{B_j}(f_k))]\chi_{B_j}\|_\infty .$$

Como $[f_k - P_{B_j}(f_k)]\chi_{B_j}$ converge para g_j em $L^\infty(R^n)$, então

$$[P_{B_1}(f_k - P_{B_j}(f_k))]\chi_{B_j} \text{ converge para } P_{B_1}(g_j)\chi_{B_j} \text{ em } L^\infty(R^n).$$

Seja $h_j = g_j - P_{B_1}(g_j)\chi_{B_j}$, então pelo que foi visto anteriormente e pela definição de g_j, temos

$$h_j = \lim_{k\to\infty} [f_k-P_{B_j}(f_k)]\chi_{B_j} - \lim_{k\to\infty} [P_{B_1}(f_k-P_{B_j}(f_k))]\chi_{B_j}$$

Como estes limites existem em $L^\infty(R^n)$ e do fato de $P_{B_1}(f_k) = 0$, para todo k, segue que

$$h_j = \lim_{k\to\infty} [f_k-P_{B_j}(f_k)-P_{B_1}(f_k)+P_{B_j}(f_k)]\chi_{B_j}$$

$$= \lim_{k\to\infty} f_k \chi_{B_j} .$$

Por outro lado, $h_j = h_{j+1}\chi_{B_j}$ como função de $L^\infty(R^n)$, pois pelo que foi visto anteriormente e de fato de B_j estar contido em B_{j+1}, temos

$$h_{j+1}\chi_{B_j} = \lim_{k\to\infty}(f_k\chi_{B_{j+1}})\chi_{B_j} = \lim_{k\to\infty} f_k\chi_{B_j} = h_j .$$

Portanto, a função h satisfazendo

$$h\chi_{B_j} = h_j \ , \quad \text{para todo } j \ ,$$

está bem definida em R^n, h pertence a $L^\infty(R^n)$, localmente, e para toda bola B e todo índice j tal que $B \subset B_j$, temos

$$\lim_{k\to\infty} f_k\chi_B = \lim_{k\to\infty}(f_k\chi_{B_j})\chi_B = h_j\chi_B = h\chi_B \ ,$$

onde os limites foram calculados em $L^\infty(R^n)$. Daí segue que

$$P_B(f_k)\chi_B \quad \text{converge para} \quad P_B(h)\chi_B \quad \text{em} \quad L^\infty(R^n)$$

quando k tende para ∞, o que implica, por (3.4), que

$$[(f_k - f_m) - P_B(f_k - f_m)]\chi_B \quad \text{converge para}$$

$$[(h - f_m) - P_B(h - f_m)]\chi_B \quad \text{em} \quad L^\infty(R^n)$$

se k tende para ∞. Fazendo k tender para o infinito em (3.8), temos

$$\|[(h - f_m) - P_B(h - f_m)]\chi_B\|_\infty < \varepsilon\, m(B)^\alpha$$

para toda bola B e todo $m \geq N(\varepsilon)$, o que implica, pela definição da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{(\alpha,M)}}$, que

$$\|\overline{h - f_m}\|_{\mathcal{L}_{(\alpha,M)}} \leq \varepsilon$$

para todo $m \geq N(\varepsilon)$, ou seja,

$$\|\bar{h} - \bar{f}_m\|_{\mathcal{L}_{(\alpha,M)}} \leq \varepsilon \quad ,$$

para todo $m \geq N(\varepsilon)$. Portanto, $\bar{f}_m$ converge para $\bar{h}$ em $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$. Além disso, como $\bar{h} - \bar{f}_m$ pertencem a $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$, temos que $\bar{h}$ pertence a $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$, o que conclui a demonstração do lema.

DEFINIÇÃO 3.2 - Sejam p e q tais que $0 < p \leq q \leq \infty$, $p < q$. Dizemos que uma função a definida e mensurável sobre R^n é um (p,q) átomo se:

(3.10) O suporte de a está contido em uma bola $B = B(y,\delta)$ para algum y em R^n e algum $\delta > 0$;

(3.11) $$\int_{R^n} a(x)x^k\, dx = 0$$

para todo multi-índice k, tal que $0 \leq |k| \leq [n/p] - n$, onde $[s]$ denota o maior inteiro que não supera s, e

$$(3.12)\qquad (m(B)^{-1} \int_B |a(x)|^q \, dx)^{1/q} \leq m(B)^{-1/p} \quad \text{se} \quad q < \infty, \text{ ou}$$

$$\|a\|_\infty \leq m(B)^{-1/p} \quad \text{se} \quad q = \infty .$$

Veremos a seguir que se $\alpha = 1/p-1$ e $M = [n/p] - n$, então as séries $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$, com $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p$ finita, podem ser interpretadas como funcionais lineares sobre $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$.

Começaremos associando a um (p,q) átomo a, $p < 1$, um funcional linear L_a sobre $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$, $M = [n/p] - n$, $\alpha = 1/p-1$, definido da seguinte maneira

$$L_a(\overline{g}) = \langle a, \overline{g} \rangle = \int_{R^n} a(x) g(x) dx,$$

onde g é um elemento da classe $\overline{g}$ em $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$.

Notemos que L_a está bem definido em $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$. De fato, se g_1 e g_2 pertencem à mesma classe, então $g_1 - g_2 = Q$, onde Q é um polinômio pertencente a W_M. Mas para qualquer polinômio Q pertencente a W_M, $M = [n/p] - n$, $Q(x) = \sum_{|k| \leq M} \lambda_k x^k$ e temos por (3.11) que

$$(3.13)\qquad \int_{R^n} a(x) Q(x) dx = \sum_{|k| \leq M} \lambda_k \int_{R^n} a(x) x^k \, dx = 0 .$$

Logo, pela linearidade de L_a, segue que

$$L_a(\overline{g}_1) - L_a(\overline{g}_2) = \int_{R^n} a(x)[g_1(x) - g_2(x)]dx$$

$$= \int_{R^n} a(x)\ Q(x)dx = 0,$$

o que implica que $L_a(\overline{g}_1) = L_a(\overline{g}_2)$.

LEMA 3.3 - L_a é um funcional linear sobre $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$, limitado em norma por um.

Demonstração: Observemos, primeiramente, que do fato do suporte de a estar contido em uma bola B, segue que

$$L_a(\overline{f}) = \int_{R^n} a(x)f(x)dx = \int_B a(x)f(x)dx$$

Então do fato de $P_B(g)$ pertencer a W_M segue de (3.13) que

$$L_a(\overline{g}) = \int_B a(x)[g(x) - P_B(g)(x)]dx\ ,$$

o que implica que

$$|L_a(\overline{g})| \le \int_B |a(x)|\ |g(x) - P_B(g)(x)|dx$$

$$\le \int_B |a(x)|dx \cdot \|[g - P_B(g)]\chi_B\|_\infty$$

Se $q < \infty$, aplicando a desigualdade de Hölder e por (3.7), lembrando que $\alpha = 1/p-1$, temos

$$|L_a(\overline{g})| \leq m(B)(m(B)^{-1}\int_B |a(x)|^q\, dx)^{1/q}\ \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{(\alpha,M)}}\ m(B)^{1/p-1}\ ,$$

donde resulta por (3.12) que

$$|L_a(\overline{g})| \leq m(B)m(B)^{-1/p}\ m(B)^{1/p-1}\ \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{(\alpha,M)}}\ .$$

Por outro lado, se $q = \infty$, então por (3.7) e (3.12), vem que

$$|L_a(\overline{g})| \leq m(B)\ \|a\|_\infty\ \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{(\alpha,M)}}\ m(B)^{1/p-1}$$

$$\leq m(B)\ m(B)^{-1/p}\ m(B)^{1/p-1}\ \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{(\alpha,M)}}\ .$$

Portanto, temos

$$(3.14) \qquad |L_a(\overline{g})| \leq \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{(\alpha,M)}}\ ,$$

para todo $\overline{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$, onde $\alpha = 1/p-1$ e $M = [n/p] - n$. Isso conclui a demonstração.

Para facilitar a notação, identificaremos a partir daqui o funcional linear L_a com a. Nesta notação temos o seguinte lema:

LEMA 3.4 - Seja $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ uma sequência de (p,q) átomos, $p < 1$, e $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ uma sequência de escalares tal que $\Sigma_{i=1}^\infty |\alpha_i|^p$ seja finita. Então $\Sigma_{i=1}^\infty \alpha_i a_i$ define um funcional linear limitado sobre $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$, com norma limitada por $(\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p)^{1/p}$, onde $\alpha = 1/p-1$ e $M = [n/p] - n$.

Demonstração: É análoga à prova do lema 2.3 e não será repetida.

Da mesma forma como fizemos no capítulo II, poremos a seguinte definição de espaço $H^{p,q}$ sobre R^n para $p < 1$.

DEFINIÇÃO 3.3 - Sejam p e q tais que $0 < p < 1 \leq q \leq \infty$. Definimos o espaço $H^{p,q}$ sobre R^n como o subespaço linear de $\mathcal{L}^*_{(\alpha,M)}$, $\alpha = 1/p-1$ e $M = [n/p] - n$, formado por todos os funcionais lineares h sobre $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$, que possuem uma representação em série na forma $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$, onde $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de (p,q) átomos e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de escalares tal que $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p$ seja finita.

Devemos observar que esta representação não é única. Então para cada h pertencente a $H^{p,q}$ definimos a "norma":

$$|h|_{H^{p,q}} = \inf\{\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^p : h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i, \text{ onde os } a_i \text{ são (p,q) átomos}\}$$

Notemos que se $p \neq 1$, então $|\cdot|_{H^{p,q}}$ não é homogênea e portanto não é uma norma, mas satisfaz a desigualdade triangular, o que permite definir uma distância sobre $H^{p,q}$ da seguinte maneira:

$$(3.15) \qquad d(h_1, h_2) = |h_1 - h_2|_{H^{p,q}} .$$

Munido desta distância $H^{p,q}$ é um espaço vetorial topológico. (ver parágrafo 1.3).

Os espaços $H^{p,q}$ sobre R^n também satisfazem a seguinte inclusão:

LEMA 3.5 - Sejam p, q_1 e q_2 tais que $0 < p < 1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$. Então temos a seguinte inclusão:

$$H^{p,\infty} \subset H^{p,q_2} \subset H^{p,q_1} .$$

Além disso, $d(\cdot,\cdot)_{p,q_1} \leq d(\cdot,\cdot)_{p,q_2}$.

Demonstração: É semelhante à demonstração do lema 2.4 e não será feita.

LEMA 3.6 - Seja q tal que $1 < q \leq \infty$ e suponhamos que $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ seja uma sequência de (1,q) átomos e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ uma sequência de escalares tal que $\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$ seja finita. Então $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ converge em $L^1(R^n)$ para uma função h pertencente a $L^1(R^n)$.

Demonstração: É análoga à demonstração do lema 2.5 e não será repetida.

Em face do lema anterior podemos dar a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.4 - Seja q tal que $1 < q \leq \infty$. Definimos o espaço $H^{1,q}$ sobre R^n como o conjunto de todas as funções h pertencentes a $L^1(R^n)$, que possuem uma representação na forma $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$, onde $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de (1,q) átomos e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais tal que $\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$ seja finita. A norma de um elemento h pertencente a $H^{1,q}$ é definida por:

$$|h|_{H^{1,q}} = \inf\{\Sigma_{i=1}^{\infty}|\alpha_i| \ : \ h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i, \text{ onde os } a_i \text{ são } (1,q) \text{ átomos}\}.$$

Observamos que o lema 3.5 continua válido quando $p = 1$.

3.2 - ESPAÇOS DUAIS

Vimos no parágrafo anterior que a distância definida sobre $H^{p,q}$ em (3.15) não provém de uma norma, mas com esta distância $H^{p,q}$ é um espaço vetorial topológico. Logo, dado um funcional linear L, contínuo sobre $H^{p,q}$, não é verdadeira a afirmação de que existe uma constante $C > 0$ tal que $|L(h)| \leq C \cdot |h|_{H^{p,q}}$. Mas vale o seguinte resultado:

TEOREMA 3.1 - Um funcional linear L sobre $H^{p,q}$ é contínuo se, e somente se, existe uma constante finita $C > 0$, independente de h pertencente a $H^{p,q}$, tal que,

$$(3.16) \qquad |< L, h >| \leq C|h|_{H^{p,q}}^{1/p} .$$

Demonstração: É análoga à demonstração do teorema 2.1 e será omitida.

DEFINIÇÃO 3.5 - Se L pertence ao espaço $(H^{p,q})^*$, a norma de L, denotada por $||L||_{p,q}^*$, é definida como o ínfimo das constantes C que satisfazem a condição (3.16), para todo h pertencente a $H^{p,q}$.

Sejam p,q e q' tais que $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p < q$ e $1/q + 1/q' = 1$. Consideremos uma função g definida e localmente integrável sobre R^n, tal que existe uma constante finita C, satisfazendo

$$(3.17)\quad (m(B)^{-1}\int_B |g(x) - P_B(g)(x)|^{q'}dx)^{1/q'} \leq C \cdot m(B)^{1/p-1} ,$$

para toda bola B em R^n, onde $P_B(g)$ é o polinômio, de grau menor ou igual a M, definido em (3.2). Então a condição (3.17) é equivalente a

$$(3.18)\quad \|[g - P_B(g)]\chi_B\|_{q'} \leq C \cdot m(B)^{1/p-1/q} ,$$

para toda bola B em R^n. Observemos que se $q' = \infty$ em (3.18) temos a condição (3.7) da definição dos espaços $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$ com α igual a $1/p - 1/q$.

Notemos que se uma função g satisfaz (3.18), o mesmo ocorre com g mais um polinômio qualquer de grau menor ou igual a M. Identificando estas funções temos uma relação de equivalência, módulo polinômios de grau menor ou igual a M, sobre o conjunto de todas as funções que satisfazem (3.18). Denotaremos por $\overline{g}$ a classe de equivalência de uma função g, segundo esta relação.

Em face do que vimos acima daremos a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.6 - Definimos o espaço $\mathcal{L}_{p,q'}$ como o conjunto de todas as classes de equivalência, módulo polinômios de grau menor ou igual a $M = [n/p] - n$, de funções que satisfazem a condição (3.18). A norma de uma classe $\overline{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_{p,q'}$, denotada por

$\|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}}$, é definida como o ínfimo das constantes C tal que, para uma função da classe $\bar{g}$, a condição (3.18) e satisfeita, para toda bola B em R^n.

Um resultado análogo ao que foi obtido para os espaços $\mathcal{L}_{(\alpha,M)}$ é dado a seguir.

LEMA 3.7 - $\mathcal{L}_{p,q'}$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Não faremos a demonstração deste lema por ser análoga à demonstração do lema 3.2, bastando substituir a norma $\|\cdot\|_\infty$ pela norma $\|\cdot\|_{q'}$ e α por $1/p - 1/q$.

Uma caracterização dos duais dos espaços $H^{p,q}$ é dada pelo seguinte teorema:

TEOREMA 3.2 - Sejam p, q e q' tais que $0 < p \leq 1 \leq q \leq \infty$, $p < q$ e $1/q + 1/q' = 1$. Então o espaço $(H^{p,q})^*$ de todos os funcionais lineares e contínuos sobre $H^{p,q}$ é equivalente ao espaço $\mathcal{L}_{p,q'}$, no seguinte sentido:

(3.19) Para todo $\bar{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_{p,q'}$, existe um funcional linear $L_{\bar{g}}$ sobre $H^{p,q}$, obtido a partir de $\bar{g}$, que satisfaz a condição (3.16).

(3.20) Para todo funcional linear L, contínuo sobre $H^{p,q}$, existe uma classe $\bar{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_{p,q'}$ que define um funcional linear $L_{\bar{g}}$ que coincide com L.

(3.21) Para todo $\bar{g}$ pertencente a $\mathcal{L}_{p,q'}$, temos

$$\|L_{\overline{g}}\|^*_{p,q} \leq \|\overline{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} \leq (C+1)\,\|L_{\overline{g}}\|^*_{p,q} ,$$

onde C é uma constante.

Demonstração: Para provar (3.19) consideremos uma classe $\overline{g}$ em $\mathcal{L}_{p,q'}$, e fixemos um elemento g pertencente a esta classe. Provaremos, inicialmente, que se $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ é um elemento qualquer de $H^{p,q}$, então a série $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \overline{g}, a_i >$ é convergente, onde para cada (p,q) átomo a com suporte em uma bola B, definimos:

$$(3.22) \qquad < \overline{g}, a > = \int_B g(x)\cdot a(x)\,dx .$$

De fato, seja a um (p,q) átomo, B é uma bola satisfazendo as condições (3.10), (3.11) e (3.12) e $P_B(g)$ o polinômio definido em (3.2) para $M = [n/p] - n$. Então por (3.13) temos

$$< \overline{g}, a > = \int_B [g(x) - P_B(g)(x)]\,a(x)\,dx .$$

Pela desigualdade de Hölder, segue que

$$|< \overline{g}, a >| \leq \int_B |g(x) - P_B(g)(x)|\,|a(x)|\,dx$$

$$\leq \|[g - P_B(g)]\chi_B\|_{q'} \cdot \|a\|_q ,$$

donde, usando as condições (3.18) e (3.12), resulta que

$$|< \bar{g}, a >| \leq \|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} m(B)^{1/p-1/q} \cdot m(B)^{1/q-1/p} ,$$

ou seja,

$$(3.23) \qquad |< \bar{g}, a >| \leq \|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} ,$$

para todo (p,q) átomo a, onde $M = [n/p] - n$. Logo, para todo $m > 0$ e todo $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ pertencente a $H^{p,q}$, segue de (3.23) que

$$\Sigma_{i=1}^{m} |\alpha_i < \bar{g}, a_i >| = \Sigma_{i=1}^{m} |\alpha_i| \, |< \bar{g}, a_i >|$$

$$(\Sigma_{i=1}^{m} |\alpha_i|) \, \|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} .$$

Do fato de $p < 1$ resulta que

$$\Sigma_{i=1}^{m} |\alpha_i < \bar{g}, a_i >| \leq \|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} (\Sigma_{i=1}^{m} |\alpha_i|^p)^{1/p}$$

$$\leq \|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} (\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p)^{1/p} ,$$

donde concluímos que a sequência $\{\Sigma_{i=1}^{m} |\alpha_i < \bar{g}, a_i >|\}_{m=1}^{\infty}$ é limitada superiormente, pois $\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p$ é limitada. Além disso, esta sequência é monótona crescente. Logo, a série $\Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \bar{g}, a_i >$ é absolutamente convergente e portanto converge para um valor que denotaremos por $< \bar{g}, \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i >$ e temos

$$(3.24) \qquad |< \bar{g}, \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i >| \leq ||\bar{g}||_{\mathcal{L}_{p,q'}} \cdot (\Sigma_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p)^{1/p} .$$

Agora podemos definir um funcional linear $L_{\bar{g}}$ sobre $H^{p,q}$, da seguinte maneira:

$$L_{\bar{g}}(h) = < \bar{g}, \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i > ,$$

para todo $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ pertencente a $H^{p,q}$.

Provemos que $L_{\bar{g}}$ é linear. Com efeito, se $h_1 = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ e $h_2 = \Sigma_{i=1}^{\infty} \beta_i b_i$ são elementos quaisquer de $H^{p,q}$, então para todo escalar λ temos

$$\lambda h_1 + h_2 = \Sigma_{i=1}^{\infty} (\lambda \alpha_i a_i + \beta_i b_i) ,$$

donde, pela definição de $L_{\bar{g}}$ e linearidade de $< \bar{g}, a >$ definido em (3.22), segue que

$$L_{\bar{g}}(\lambda h_1 + h_2) = \Sigma_{i=1}^{\infty} < \bar{g}, \lambda \alpha_i a_i + \beta_i b_i >$$

$$= \Sigma_{i=1}^{\infty} [\lambda \alpha_i < \bar{g}, a_i > + \beta_i < \bar{g}, b_i >] .$$

Pela convergência absoluta das séries, resulta que

$$L_{\bar{g}}(\lambda h_1 + h_2) = \lambda \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \bar{g}, a_i > + \Sigma_{i=1}^{\infty} \beta_i < \bar{g}, b_i >$$

$$= \lambda L_{\bar{g}}(h_1) + L_{\bar{g}}(h_2) ,$$

como queríamos demonstrar.

Observemos ainda que de (3.24) e da definição da norma $|\cdot|_{H^{p,q}}$, resulta que

$$|L_{\bar{g}}(h)| \leq \|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} \cdot |h|_{H^{p,q}}^{1/p} ,$$

donde concluímos pelo teorema 3.1 que $L_{\bar{g}}$ é um funcional linear contínuo sobre $H^{p,q}$. Além disso, da última desigualdade e da definição da norma $\|\cdot\|_{p,q}^{*}$, segue que

$$\| L_{\bar{g}} \|_{p,q}^{*} \leq \|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} . \tag{3.25}$$

Passemos à demonstração (3.20). Para isso, seja L um funcional linear e contínuo sobre $H^{p,q}$ e para cada bola fixa B em R^n , definamos o seguinte conjunto:

$$L_o^q(B) = \{ f \in L^q(B) : \int_B f(x)\, x^k dx = 0, \text{ para todo multi-índice } k \text{ tal que } 0 \leq |k| \leq [n/p] - n \}.$$

Então, se f pertence a $L_o^q(B)$, a função definida por $a(x) = m(B)^{1/q-1/p} \|f\|_q^{-1} f(x)$ é um (p,q) átomo. De fato, pela defi nição de $L^q(B)$ (ver parágrafo 1.3) o suporte de a está contido em B; a condição (3.11) segue de

$$\int_{R^n} a(x)x^k dx = m(B)^{-1/q-1/p} \|f\|_q^{-1} \int_B f(x)x^k dx = 0 ,$$

para todo multi-índice k tal que $0 \leq |k| \leq [n/p] - n$, e finalmente, a condição (3.12) resulta de

$$\|a\|_q = m(B)^{1/q-1/p} \|f\|_q^{-1} \|f\|_q .$$

Logo, f pertence a $H^{p,q}$ e pela definição da "norma" $|\cdot|_{H^{p,q}}$, temos

$$|f|_{H^{p,q}}^{1/p} \leq m(B)^{1/p-1/q} \|f\|_q .$$

Daí segue que $\langle L, f \rangle$ está definido e pelo teorema 3.1 temos

$$(3.26) \qquad |\langle L, f \rangle| \leq \|L\|_{p,q}^{*} \; m(B)^{1/p-1/q} \|f\|_q ,$$

para todo f pertencente a $L_0^q(B)$, o que implica que L é um funcional linear limitado sobre $L_0^q(B)$. Aplicando o teorema Hahn - Banach (ver teorema 1.4) L pode ser extendido sobre $L^q(B)$, com a mesma norma. Pelo teorema de representação de Riesz (ver teorema 1.3), existe uma função g pertencente a $L^{q'}(B)$ tal que

$$(3.27) \qquad \langle L, f \rangle = \int_B g(x)f(x)\, dx = \langle g, f \rangle ,$$

para toda f pertencente a $L^q(B)$ e,

(3.28) $$\|g\|_{q'} = \sup_{\|f\chi_B\|_q = 1} \left| \int_B g(x) f(x)\, dx \right| .$$

As funções pertencentes a $L^{q'}(B)$ e satisfazendo a condição (3.27), para toda função f pertencente a $L^q(B)$, diferem por um polinômio de grau menor ou igual a $M = [n/p] - n$. De fato, sejam g_1 e g_2 pertencentes a $L^{q'}(B)$ e satisfazendo a condição (3.27). Observemos que para provarmos a afirmação basta verificarmos que

(3.29) $$< g_1 - g_2 - P_B(g_1 - g_2),\ f > \ = 0,$$

para toda f em $L^q(B)$, pois daí segue que

(3.30) $$g_1 - g_2 = P_B(g_1 - g_2)\chi_B \quad ,$$

quase sempre em B. Com o fim de provarmos (3.29) notemos, primeiramente, que se f pertence a $L^q(B)$ e $P_B(f)$ é o polinômio, de grau menor ou igual a $M = [n/p] - n$, definido em (3.2), então resulta de (3.3) que $f - P_B(f)$ pertence a $L^q_o(B)$, donde concluímos que

$$< g_1,\ f - P_B(f) > \ = \ < g_2,\ f - P_B(f) > \quad ,$$

para toda f pertencente a $L^q(B)$, ou seja,

(3.31) $$< g_1 - g_2,\ f - P_B(f) > \ = 0 \ ,$$

qualquer que seja f pertencente a $L^q(B)$.

Por outro lado, observemos que pela definição do produto interno dada em (3.1) e por (3.27), temos que

$$(g_1-g_2,\pi_i) < \pi_i, f > = (\pi_i, f) < g_1-g_2, \pi_i > ,$$

para todo i tal que $1 \leq i \leq r$. Daí segue que

$$< P_B(g_1-g_2), f > = \Sigma_{i=1}^{r} (g_1-g_2,\pi_i) < \pi_i, f >$$

$$= \Sigma_{i=1}^{r} (\pi_i, f) < g_1-g_2, \pi_i >$$

$$= < g_1-g_2, P_B(f) > ,$$

para toda função f em $L^q(B)$. Consequentemente,

$$< g_1-g_2-P_B(g_1-g_2), f > = < g_1-g_2, f > - < P_B(g_1-g_2), f >$$

$$= < g_1-g_2, f > - < g_1-g_2, P_B(f) >$$

$$= < g_1-g_2, f - P_B(f) > ,$$

para toda função f em $L^q(B)$, donde por (3.31) resulta que

$$< g_1-g_2 - P_B(g_1-g_2), f > = 0 ,$$

para toda f em $L^q(B)$, como queríamos demonstrar.

Nosso objetivo agora é definir uma função g sobre R^n que pertença a uma classe de funções em $\mathcal{L}_{p,q}$, e que para cada bola B em R^n satisfaça (3.27), para toda função f em $L^q(B)$. Para isto, fixemos um ponto x_o em R^n e para cada inteiro positivo i, consideremos as bolas $B_i = B(x_o,i)$. Temos que $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ é uma sequência crescente de bolas em R^n tal que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = R^n$. Consideremos ainda uma sequência de funções $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que, para cada i, g_i pertence a $L^{q'}(B_i)$ e satisfaz a condição (3.27) para toda função f em $L^q(B_i)$. Então, impondo a condição

(3.32) $$\int_{B_1} g_i(x)\ x^k dx = 0 \quad ,$$

para todo $i \geq 1$ e todo multi-índice k tal que $0 \leq |k| \leq [n/p] - n$, obtemos uma função g definida sobre R^n da seguinte maneira:

$$g(x) = g_i(x) \text{ se } x \text{ pertence a } B_i \ .$$

A função g está bem definida, pois para cada $i \geq 1$, a função g_{i+1} restrita ao conjunto B_i é igual a função g_i. Com efeito, do fato de cada bola B_i estar contida na bola B_{i+1}, para todo i, segue que $L^{q'}(B_i)$ está contido em $L^{q'}(B_{i+1})$, donde resulta que a função g_{i+1} restrita ao conjunto B_i satisfaz (3.27), para toda função f pertencente a $L^q(B)$. Além disso, por (3.30) e (3.5) temos

$$g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i = P_{B_i}(g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i)\chi_{B_i}$$

$$= P_{B_1}(P_{B_i}(g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i)\chi_{B_i}) ,$$

donde, novamente por (3.30), segue que

$$g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i = P_{B_1}(g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i) .$$

Logo a afirmação estará demonstrada se provarmos que $P_{B_1}(g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i)=0$, para todo $i \geq 1$. Para fazer isto, observemos que por (3.4) e pela definição do polinômio $P_{B_1}(g)$ dada em (3.2), temos

$$P_{B_1}(g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i)(y) = P_{B_1}(g_{i+1}\chi_{B_i})(y) - P_{B_1}(g_i)(y)$$

$$(3.33) \qquad = \Sigma_{j=1}^{r}(g_{i+1}\chi_{B_i},\pi_j)\pi_j(y) - \Sigma_{j=1}^{r}(g_i,\pi_j)\pi_j(y) .$$

Como cada π_j pertence a W_M, $M = [n/p] - n$, então $\pi_j(x) = \sum_{|k|\leq M} \lambda_k x^k$, onde λ_k são constantes. Pela definição do produto interno dada em (3.1) temos

$$(g_i,\pi_j) = m(B_1)^{-1} \int_{B_1} g_i(x)\pi_j(x)\,dx$$

$$= m(B_1)^{-1} \sum_{|k|\leq M} \lambda_k \int_{B_1} g_i(x)x^k\,dx ,$$

donde por (3.32) segue que

$(g_i, \pi_j) = 0$, para todo $i \geq 1$ e para cada j tal que $1 \leq j \leq r$.

Daí e de (3.33), resulta que

$$P_{B_1}(g_{i+1}\chi_{B_i} - g_i) = 0 \quad ,$$

como queríamos demonstrar.

Provaremos agora que g pertence a uma classe de funções em $\mathcal{L}_{p,q'}$. Para isso seja B uma bola qualquer em R^n e f pertencente a $L^q(B)$. Como o polinômio $P_B(f)$ definido em (3.2) pertence a W_M, $M = [n/p] - n$, então podemos escrever $P_B(f)(x) = \sum_{|k| \leq M} \lambda_k x^k$, k um multi-índice e por (3.3) temos

$$\int_B [g(x) - P_B(g)(x)] P_B(f)(x)\,dx = \sum_{|k| \leq M} \lambda_k \int_B [g(x) - P_B(g)(x)] x^k dx = 0 \ .$$

Daí e de (3.28) segue que

$$\| [g - P_B(g)] \chi_B \|_{q'} = \sup_{\|f\chi_B\|_q = 1} \left| \int_B [g(x) - P_B(g)(x)] [f(x) - P_B(f)(x)]\,dx \right| .$$

Por (3.3) temos que $[f - P_B(f)]\chi_B$ pertence a $L_0^q(B)$, donde vem por (3.27) que o segundo membro da última igualdade é igual a

$$\sup_{\|f\chi_B\|_q = 1} | < L, [f - P_B(f)]\chi_B > \quad .$$

Pela condição (3.26) o termo acima é menor ou igual que

$$\sup_{\|f\chi_B\|_q=1} \{\|L\|^*_{p,q}\ m(B)^{1/p-1/q}\ \|[f - P_B(f)]\chi_B\|_q\} \quad .$$

Consequentemente, aplicando a desigualdade de Minskowski, resulta que

$$(3.34) \quad \|[g-P_B(g)]\chi_B\|_{q'} \leq \|L\|^*_{p,q}\ m(B)^{1/p-1/q} \sup_{\|f\chi_B\|_q=1} \{\|f\chi_B\|_q + $$

$$+ \|P_B(f)\chi_B\|_q\} \quad .$$

Mas pelo lema (3.8), que provaremos a seguir, existe uma constante finita C, que independe das bolas B, tal que

$$\|P_B(f)\chi_B\|_q \leq C\ \|f\chi_B\|_q \quad .$$

Dai e de (3.34) segue que

$$\|[g - P_B(g)]\chi_B\|_{q'} \leq (C+1)\,\|L\|^*_{p,q}\ m(B)^{1/p-1/q} \quad ,$$

o que prova que g é represssentante de alguma classe de funções em $\mathcal{L}_{p,q'}$. Além disso, pela definição da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_{p,q'}}$ temos

$$(3.35) \qquad \|\bar{g}\|_{\mathcal{L}_{p,q'}} \leq (C+1)\ \|L\|^*_{p,q} \quad .$$

Até agora obtemos um funcional linear definido em (3.27), a partir de g pertencente a $\overline{g}$, que coincide com L para todo (p,q) átomo, ou seja,

$$(3.36) \qquad < L, a > = < g, a > ,$$

para todo (p,q) átomo a.

Para completar a demonstração de (3.20) provaremos que este funcional possue uma única extensão para um funcional linear limitado $L_{\overline{g}}$ sobre $H^{p,q}$ tal que $L_{\overline{g}}$ coincide com L. Para isto, seja $L_{\overline{g}}$ o funcional linear sobre $H^{p,q}$ definido por

$$< L_{\overline{g}}, h > = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i < g, a_i > ,$$

para todo $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ pertencente a $H^{p,q}$.

Então, para todo $h = \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ pertencente a $H^{p,q}$, resulta de (3.36) que

$$\begin{aligned} < L_{\overline{g}}, h > &= \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i < g, a_i > \\ &= \Sigma_{i=1}^{\infty} \alpha_i < L, a_i > \\ &= < L, h > , \end{aligned}$$

o que demonstra a afirmação.

Para terminarmos a demonstração do teorema, observemos que a prova de (3.21) segue imediatamente de (3,25) e de (3.35).

LEMA 3.8 - Seja B uma bola qualquer em R^n, f uma função pertencente a $L^q(B)$ e $P_B(f)$ o polinômio de grau menor ou igual a M definido em (3.2). Então existe uma constante finita C, independente da bola B e da função f, tal que

$$\|P_B(f)\chi_B\|_q \leq C\cdot\|f\chi_B\|_q .$$

Demonstração: Podemos supor, sem perda da generalidade, que a bola B possue centro na origem e raio $\delta > 0$, ou seja, $B = B(0,\delta)$. Faremos, inicialmente, a demonstração para $n=1$ e $M = 2$, com o objetivo de esclarecer o raciocínio usado e logo após generalizaremos. Para isso notemos que o polinômio $P_B(f)$ definido em (3.2) pode ser escrito na forma

$$P_B(f)(x) = \Sigma_{j=0}^{2} \lambda_j x^j$$

e pela desigualdade de Minkowski, temos

$$\|P_B(f)\chi_B\|_q \leq \Sigma_{j=0}^{2} |\lambda_j| \, \|x^j\chi_B\|_q .$$

Mas $\|x^j\chi_B\|_q \leq \delta^j \, m(B)^{1/q} = 2^{1/q} \, \delta^{j+1/q}$, pois $m(B) = 2\delta$ e para x pertencente a B temos que $|x| < \delta$. Segue daí que

$$\|P_B(f)\chi_B\|_q \leq \Sigma_{j=0}^{2} \; 2^{1/q} \, |\lambda_j| \, \delta^{j+1/q} . \tag{3.37}$$

Achemos uma majoração para $|\lambda_j|$. Observemos que do fato do polinômio $P_B(f)$ satisfazer (3.3) temos o seguinte sistema de 3 equações a 3 incógnitas λ_0, λ_1 e λ_2:

$$(3.38) \qquad \int_{-\delta}^{\delta} f(x)x^k\,dx = \Sigma_{j=0}^{2} \lambda_j \int_{-\delta}^{\delta} x^k \cdot x^j\,dx \quad , \quad k = 0,\ 1 \text{ e } 2.$$

Fazendo uma mudança de variável temos $\int_{-\delta}^{\delta} x^s dx = \delta^{s+1} \int_{-1}^{1} x^s\,dx$.

Usando isto e a definição do produto interno dada em (3.1), sobre a bola $B(0,1) = (-1,1)$, podemos reescrever o sistema acima como

$$(3.39) \qquad \int_{-\delta}^{\delta} f(x)x^k dx = \Sigma_{j=0}^{2} \lambda_j\ \delta^{k+j+1}\ m(B(0,1))\cdot(x^k,x^j),\ k = 0,1 \text{ e } 2.$$

Pela regra de Cramer, temos

$$(3.40) \qquad \lambda_j = (\det A)^{-1} \cdot \det A_j$$

onde A é a matriz associada ao sistema (3.39) e A_j é a matriz obtida de A substituindo-se a j-ésima coluna pela coluna dos termos independentes. Como $m(B(0,1)) = 2$, a matriz A associada ao sistema (3.39) é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2\delta(1,1) & 2\delta^2(1,x) & 2\delta^3(1,x^2) \\ 2\delta^2(x,1) & 2\delta^3(x,x) & 2\delta^4(x,x^2) \\ 2\delta^3(x^2,1) & 2\delta^4(x^2,x) & 2\delta^5(x^2,x^2) \end{pmatrix}$$

Por propriedades de determinantes, temos

$$(3.41) \qquad \det A = \delta^{1+2+3} \cdot \delta^{1+2} \cdot C_1 = \delta^9 \cdot C_1 \, ,$$

onde denotamos por C_1 o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 2(1,1) & 2(1,x) & 2(1,x^2) \\ 2(x,1) & 2(x,x) & 2(x,x^2) \\ 2(x^2,1) & 2(x^2,x) & 2(x^2,x^2) \end{pmatrix}$$

que é maior que zero pelo lema (1.1) e independe da bola B e da função f.

Encontremos agora o determinante de A_j. Aplicando o teorema de Laplace podemos desenvolver o determinante de A_j, segundo a coluna j, da seguinte forma:

$$(3.42) \qquad \det A_j = \Sigma_{k=0}^{2} \left(\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\, x^k dx\right) (-1)^{k+1} \det D_{kj} \, ,$$

onde D_{kj} é a matriz de ordem 2 que se obtém de A_j suprimindo-se a k-ésima linha e a j-ésima coluna. Mas por propriedades de determinantes, temos que

$$(3.43) \qquad \det D_{kj} = \delta^{8-j-k} \cdot C_2 \, ,$$

onde C_2 é o determinante da matriz de ordem 2 dada por

$$(2(x^t,x^s)),\ 0 \leq t \leq 2,\ t \neq k,\ \ 0 \leq s \leq 2,\ \ s \neq j\ ,$$

que é maior que zero pelo Lema (1.1) e independe da bola B e da função f.

Substituindo (3.43) em(3.42), segue daí, de (3.40) e de (3.41) que

$$\lambda_j = (\delta^9 \cdot C_1)^{-1} \cdot \Sigma_{k=0}^{2} \left(\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\, x^k dx \right) (-1)^{k+1}\ \delta^{8-j-k} \cdot C_2\ ,$$

o que implica que

$$|\lambda_j| \leq C_1^{-1} \cdot C_2 \cdot \delta^{-1-j}\ \ \Sigma_{k=0}^{2}\ \left(\int_{-\delta}^{\delta} |f(x)|\ |x|^k\ \ dx \right) \delta^{-k}\ .$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e levando em conta que $|x| < \delta$, temos

$$|\lambda_j| \leq C_1^{-1} \cdot C_2 \cdot \delta^{-1-j}\ \ \Sigma_{k=0}^{2}\ \ \|f\chi_B\|_q\ \ \ m(B)^{1-1/q}\ ;$$

donde vem, do fato da $m(B) = 2\,\delta$, que

$$|\lambda_j| \leq 6C_1^{-1} \cdot C_2\ 2^{-1/q}\ \ \delta^{-j-1/q}\ \ \|f\chi_B\|_q\ \ ,$$

Finalmente, voltando em (3.37), obtemos

$$\|P_B(f)\chi_B\|_q \leq \Sigma_{j=0}^{2}\ \ 2^{1/q}\ |\lambda_j|\ \ \delta^{j+1/q}$$

$$\leq \Sigma_{j=0}^{2}\ \ 2^{1/q}\ \ 6 \cdot C_1^{-1}\ C_2\ \ 2^{-1/q}\ \delta^{-j-1/q}\ \|f\chi_B\|_q\ \delta^{j+1/q}$$

ou seja,

$$\|P_B(f)\chi_B\|_q \leq 18\, C_1^{-1}\; C_2\, \|f\chi_B\|_q \quad .$$

Logo,

$$\|P_B(f)\chi_B\|_q \leq C\; \|f\chi_B\|_q \quad ,$$

onde C é uma constante que independe da Bola B e da função f.

Façamos agora a generalização para n e M quaisquer. Para isso seja $B(0,\delta)$ uma bola qualquer em R^n e observemos que o polinômio $P_B(f)$ definido em (3.2) pode ser escrito na forma

$P_B(f)(x) = \sum_{|j|\leq M} \lambda_j x^j$, onde j é um multi-índice. Pela desigualdade de Minkowski, resulta que

(3.44) $\quad \|P_B(f)\chi_B\|_q \leq \sum_{|j|\leq M} |\lambda_j|\; \|x^j\chi_B\|_q \quad .$

Mas para todo x pertencente a B e todo multiíndice j de ordem n, temos

(3.45) $\qquad |x^j| < \delta^{|j|} \quad .$

De fato, se $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ e $j = (j_1,j_2,\ldots,j_n)$, então do fato de $|x_i| \leq |x|$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$, segue que

$|x^j| = |x_1|^{j_1}\cdot|x_2|^{j_2}\;.\;.\;.\;|x_n|^{j_n} \leq |x|^{|j|}$, ou seja, $|x^j| < \delta^{|j|}$.

Daí e de (3.44), vem que

$$\|P_B(f)\chi_B\|_q \leq \sum_{|j|\leq M} |\lambda_j| \quad \delta^{|j|}\, m(B)^{1/q} \quad ,$$

donde resulta, do fato da $m(B) = \omega_n\delta^n$, $\omega_n = m(B(0,1))$, que

$$(3.46) \quad \|P_B(f)\chi_B\|_q \leq \sum_{|j|\leq M} \omega_n^{1/q}\, |\lambda_j|\, \delta^{|j|+n/q} \quad .$$

Encontremos uma estimativa para $|\lambda_j|$. Do fato do polinômio $P_B(f)$ satisfazer (3.3) temos o seguinte sistema:

$$\int_{B(0,\delta)} f(x)x^k\, dx = \sum_{|j|\leq M} \lambda_j \int_{B(0,\delta)} x^k\cdot x^j\, dx \quad ,$$

para todo multi-índice k de ordem n tal que $0 \leq |k| \leq M$. Fazendo uma mudança de variável, temos

$$\int_{B(0,\delta)} x^s\, dx = \delta^{|s|+n} \int_{B(0,1)} x^s\, dx \quad ,$$

para todo multi-índice s de ordem n. Daí e da definição do produto interno dada em (3.1), sobre a bola $B(0,1)$, concluímos que o sistema acima pode ser reescrito na forma:

$$(3.47) \quad \int_{B(0,\delta)} f(x)x^k\, dx = \sum_{|j|\leq M} \lambda_j\, \delta^{|k+j|+n}\, \omega_n\cdot (x^k,x^j) \quad ,$$

para todo multi-índice k de ordem n tal que $0 \leq |k| \leq M$.

O determinante da matriz A associada ao sistema (3.47) é dado por

$$(3.48)\quad \det A = \delta^{\left(\sum\limits_{|j|\leq M}(|j|+n) \;+\; \sum\limits_{|k|\leq M}|k|\right)} \cdot C_1 \;,$$

onde C_1 é o determinante da matriz

$$(\omega_n \cdot (x^k, x^j)) \;,\quad 0 \leq |k| \leq M,\quad 0 \leq |j| \leq M \;,$$

que é estritamente positivo pelo lema 1.1 e independe da bola $B(0,\delta)$ e da função f.

Achemos uma majoração para $|\det A_j|$, $0 \leq |j| \leq M$, onde A_j denota a matriz obtida de A substituindo-se a j-ésima coluna pela coluna dos termos independentes. Desenvolvendo o determinante de A_j pelo teorema de Laplace, segundo a coluna j, temos

$$(3.49)\qquad |\det A_j| \leq \sum_{|k|\leq M} \left| \int_{B(0,\delta)} f(x)\, x^k \, dx \right| \; |\det D_{kj}| \;,$$

onde D_{kj} é a matriz obtida da matriz A_j suprimindo-se a k-ésima linha e a j-ésima coluna. Mas por propriedades de determinantes, temos

$$\det D_{kj} = \delta^{\left(\sum\limits_{|i|\leq M}(|i|+n) \;+\; \sum\limits_{|\ell|\leq M}|\ell| \;-\; |k| \;-\; |j| \;-\; n\right)} \cdot C_2 \;,$$

onde C_2 é o determinante da matriz

$$(\omega_n (x^t, x^s)); \quad 0 \leq |t| \leq M, \quad t \neq k \quad e \quad 0 \leq |s| \leq M, \quad s \neq j \quad ,$$

que é maior que zero pelo lema 1.1 e independe da bola $B(0,\delta)$ e da função f. Logo, segue de (3.49) que

$$|\det A_j| \leq \sum_{|k| \leq M} \left(\int_{B(0,\delta)} |f(x)|\, |x^k|\, dx\right) \cdot \delta^{\left(\sum_{|i| \leq M} (|i|+n) + \sum_{|\ell| \leq M} |\ell| - |k| - |j| - n\right)} \cdot C_2,$$

donde por (3.45) vem que

$$|\det A_j| \leq \sum_{|k| < M} \left(\int_{B(0,\delta)} |f(x)| dx\right) \cdot \delta^{\left(\sum_{|i| < M} (|i|+n) + \sum_{|\ell| \leq M} |\ell| - |j| - n\right)} \cdot C_2$$

Pela desigualdade de Hölder e do fato da $m(B) = \omega_n \delta^n$ resulta que

$$|\det A_j| \leq C_3 \delta^{\left(\sum_{|i| \leq M} (|i|+n) + \sum_{|\ell| \leq M} |\ell| - |j| - n\right)} \| f\chi_B \|_q \; m(B)^{1-1/q}$$

$$\leq C_3 \omega_n^{1-1/q} \delta^{\left(\sum_{|i| \leq M} (|i|+n) + \sum_{|\ell| \leq M} |\ell| - |j| - n\right)} \| f\chi_B \|_q \cdot \delta^{n-n/q},$$

onde C_3 é uma constante que independe da bola $B(0,\delta)$ e da função f. Portanto segue da última desigualdade, de (3.40) e de (3.48), que

$$|\lambda_j| = |\det A|^{-1} \cdot |\det A_j|$$

$$\leq \delta^{-\left(\sum\limits_{|j|\leq M}(|j|+n) + \sum\limits_{|k|\leq M}|k|\right)} \cdot C_1^{-1} \cdot C_3 \omega_n^{1-1/q}\, \delta^{\left(\sum\limits_{|i|\leq M}(|i|+n) + \sum\limits_{|\ell|\leq M}|\ell| - |j| - n\right)} \|f\chi_B\|_q\, \delta^{n-n/q} ,$$

ou seja,

$$|\lambda_j| \leq C_1^{-1} \cdot C_3\, \omega_n^{1-1/q} \cdot \delta^{-n/q-|j|} \|f\chi_B\|_q \quad .$$

Voltando em (3.46), temos

$$\|P_B(f)\chi_B\|_q \leq \sum_{|j|\leq M} \omega_n^{1/q}\, C_1^{-1}\, C_3\, \omega_n^{1-1/q}\, \delta^{-n/q-|j|}\, \delta^{|j|+n/q} \|f\chi_B\|_q$$

$$\leq C \|f\chi_B\|_q ,$$

onde C é uma constante que independe de f e da bola $B(0,\delta)$, como queríamos demonstrar.

CAPÍTULO IV

EQUIVALÊNCIA DE ESPAÇOS DE LIPSCHITZ SOBRE O ESPAÇO R^n

Neste capítulo introduziremos a noção de espaços de Lipschitz "Integrais" e de Lipschitz Clássicos sobre o espaço R^n. Faremos uma demonstração curta e simples da equivalência destes espaços, ou seja, daremos uma demonstração direta da equivalência dos espaços de Lipschitz "Integrais". Esta demonstração é uma adaptação para o espaço R^n daquela feita em [10] e simplifica muito a original publicada em [12].

Em todo este capítulo tomaremos em R^n a distância euclidiana usual $d(x,y) = |x-y|$ e denotaremos por $m(E)$ e medida de Lebesgue do conjunto mensurável E. Usaremos a notação $\int_E f(x)dx$ ao invés de $\int_E f(x)dm(x)$.

DEFINIÇÃO 4.1 - Sejam q e α tais que $1 \leq q \leq \infty$ e $0 < \alpha < \infty$. Dizemos que uma função f definida localmente integrável em R^n pertence a $Lip(\alpha,q)$, $1 \leq q < \infty$, se existe uma constante finita C tal que

$$(4.1) \qquad [m(B)^{-1} \int_B |f(x) - m_B(f)|^q \, dx]^{1/q} \leq C \cdot m(B)^{\alpha},$$

verifica-se para toda bola B, onde $m_B(f)$ denota o valor médio de f sobre B, definido em (2.5). Se $q = \infty$, dizemos que f pertence a $Lip(\alpha,\infty)$ se existe uma constante finita C tal que

$$(4.2) \qquad \text{Sup. ess.}_{x\in B}|f(x) - m_B(f)| \leq C\ m(B)^{\alpha},$$

verifica-se para toda bola B. A menor constante C satisfazendo a condição (4.1) (respectivamente (4.2)) será denotada por $\|f\|_{\alpha,q}$ (respectivamente $\|f\|_{\alpha,\infty}$).

DEFINIÇÃO 4.2 - Seja α tal que $0 < \alpha < \infty$. Dizemos que uma função f definida sobre R^n pertence a Lip(α) se existe uma constante finita finita C tal que

$$(4.3) \qquad |f(x) - f(y)| \leq C \cdot |x - y|^{n\alpha} \quad ,$$

para todo x e y em R^n. Denotaremos por $\|f\|_{\alpha}$ a menor constante C satisfazendo a condição acima.

Para demonstrarmos o teorema 4.1, que é um dos resultados fundamentais deste capítulo necessitaremos dos lemas que seguem.

LEMA 4.1 - Sejam $B_1 = B(x,r)$ e $B_2 = B(y,s)$ duas bolas em R^n tal que B_1 está contida em B_2. Seja f pertencente a Lip(α,q), $1 \leq q \leq \infty$. Então temos

$$|m_{B_1}(f) - m_{B_2}(f)| \leq \omega_n^{\alpha} \|f\|_{\alpha,q}\ r^n s^{n(\alpha+1)} \quad ,$$

onde ω_n denota a medida de Lebesgue da bola unitária em R^n.

Demonstração: Pela definição de valor médio de f, temos

$$m_{B_1}(f) - m_{B_2}(f) = m(B_1)^{-1}\int_{B_1} [f(x) - m_{B_2}(f)]\,dx \quad ,$$

e portanto aplicando o valor absoluto a ambos os membros da igualdade e extendendo o domínio de integração de B_1 para B_2, obtemos

$$|m_{B_1}(f) - m_{B_2}(f)| \leq m(B_2)\ m(B_1)^{-1}\ m(B_2)^{-1}\int_{B_2} |f(x) - m_{B_2}(f)|dx\ ,$$

donde, pela desigualdade de Hölder e do fato de f pertencer a Lip(α,q), resulta que

$$|m_{B_1}(f) - m_{B_2}(f)| \leq m(B_2)\cdot m(B_1)^{-1}\cdot[\, m(B_2)^{-1}\int_{B_2} |f(x)-m_{B_2}(f)|^q\ dx]^{1/q}$$

$$\leq m(B_2)\ m(B_1)^{-1}\ \|f\|_{\alpha,q}\ m(B_2)^{\alpha}\ .$$

Como $m(B_1) = \omega_n r^n$ e $m(B_2) = \omega_n s^n$ (ver (1.1)), temos

$$|m_{B_1}(f) - m_{B_2}(f)| \leq \omega_n^{\alpha}\ \|f\|_{\alpha,q}\ r^{-n}\cdot s^{n(\alpha+1)}\ ,$$

o que conclui a demonstração do lema.

LEMA 4.2 - Seja f pertencente a Lip(α,q), $1 \leq q \leq \infty$, $\alpha > 0$. Seja x_o pertencente a R^n e r e s tais que $0 < r < s$. Então temos

$$|m_{B(x_o,r)}(f) - m_{B(x_o,s)}(f)| \leq C\cdot\|f\|_{\alpha,q}\ \omega_n^{\alpha}\ s^{n\alpha}\ ,$$

onde C é uma constante finita independente de x_o, r, s e f.

Demonstração: Seja x_o pertencente a R^n e r e s tais que $0 < r < s$. Consideremos agora o maior inteiro não negativo m tal que $2^m \cdot r < s$. Então m satisfaz a condição

$$(4.4) \qquad 2^{n\cdot m}\, r^n < s^n \leq 2^{n(m+1)}\, r^n.$$

Seja ainda a sequência r_k definida por $r_k = 2^k \cdot r$ se $0 \leq k \leq m$ e $r_{m+1} = s$. Então r_k verifica a condição

$$(4.5) \qquad 2^{n(k-1)}\, r^n \leq r_k^n \leq 2^{nk}\, r^n \quad ,$$

para todo k tal que $0 \leq k \leq m+1$. Observemos que (4.4) implica (4.5) para $k = m+1$ e os outros casos são obviamente verdadeiros.

Notemos que podemos escrever a seguinte desigualdade

$$|m_{B(x_o,r)}(f) - m_{B(x_o,s)}(f)| \leq \Sigma_{k=0}^{m} |m_{B(x_o,r_k)}(f) - m_{B(x_o,r_{k+1})}(f)|.$$

Mas do fato de cada bola $B(x_o,r_k)$ estar contida na bola $B(x_o,r_{k+1})$ segue do lema 4.1 que

$$|m_{B(x_o,r_k)}(f) - m_{B(x_o,r_{k+1})}(f)| \leq \omega_n^{\alpha}\, \|f\|_{\alpha,q}\; r_k^{-n}\, r_{k+1}^{n(\alpha+1)} \quad .$$

Usando a condição (4.5) no segundo membro da última desigualdade obtemos

$$|m_{B(x_o,r_k)}(f) - m_{B(x_o,r_{k+1})}(f)| \leq \omega_n^{\alpha}\, \|f\|_{\alpha,q}\, 2^{-n(k-1)} r^{-n} (2^{n(k+1)} r^n)^{\alpha+1} ,$$

ou seja,

$$|m_{B(x_o,r_k)}(f)-m_{B(x_o,r_{k+1})}(f)| \leq \omega_n^\alpha \cdot \|f\|_{\alpha,q} \; 2^{n\alpha+2n} \; 2^{n\alpha k} \; r^{n\alpha} \; .$$

Em consequência, temos

$$|m_{B(x_o,r)}(f) - m_{B(x_o,s)}(f)| \leq \Sigma_{k=0}^m \; \omega_n^\alpha \; \|f\|_{\alpha,q} \; 2^{n\alpha+2n} \; 2^{n\alpha k} \; r^{n\alpha}$$

$$= \omega_n^\alpha \; \|f\|_{\alpha,q} \; 2^{n\alpha+2n} \; r^{n\alpha} \Sigma_{k=0}^m \; 2^{n\alpha k} \; .$$

Como $\Sigma_{k=0}^m \; 2^{n\alpha k} = (2^{n\alpha}-1)^{-1} \cdot [(2^{n\alpha})^{m+1} - 1]$, resulta que

$$|m_{B(x_o,r)}(f) - m_{B(x_o,s)}(f)| \leq \omega_n^\alpha \; \|f\|_{\alpha,q} \; 2^{n\alpha+2n} \; r^{r\alpha}(2^{n\alpha}-1)^{-1}[(2^{n\alpha})^{m+1}-1]$$

$$\leq \omega_n^\alpha \; \|f\|_{\alpha,q} \; 2^{n\alpha+2n}(2^{n\alpha}-1)^{-1} \; 2^{n\alpha} \; 2^{nm\alpha} \; r^{n\alpha},$$

donde, aplicando a definição de m dada em (4.4), obtemos

$$|m_{B(x_o,r)}(f) - m_{B(x_o,s)}(f)| \leq C \; \|f\|_{\alpha,q} \; \omega_n^\alpha \; s^{n\alpha} \; ,$$

onde $C = 2^{2n\alpha+2n}(2^{n\alpha}-1)^{-1}$, o que demonstra o lema

LEMA 4.3 - Seja f pertencente a Lip(α,q), $1 \leq q \leq \infty$,$\alpha > 0$. Sejam x e y pontos pertencentes a $B(x_o,s)$ e r tal que $0 < r < s$. Então temos

$$|m_{B(x,r)}(f) - m_{B(y,r)}(f)| \leq C \cdot \|f\|_{\alpha,q} \; \omega_n^\alpha \; s^{n\alpha} \; ,$$

onde C é uma constante finita independente de f, x, y, r e s.

Demonstração: Observemos, inicialmente, que para todo z pertencente à bola $B(x_0,s)$ temos que a bola $B(x_0,s)$ está contida na bola $B(z,2s)$ e que a bola $B(x_0,2s)$ contém a bola $B(z,s)$. De fato, se x pertence a $B(x_0,s)$, então $|x-x_0| < s$ e temos

$$|x-z| \le |x-x_0| + |x_0-z| < 2s \quad ,$$

o que implica que x pertence a $B(z,2s)$. Por outro lado, se x pertence a $B(z,s)$, então $|x-z| < s$, donde segue que

$$|x-x_0| \le |x-z| + |z-x_0| < 2s,$$

o que acarreta que x pertence a $B(x_0,2s)$.

Portanto, temos

$$|m_{B(x,r)}(f) - m_{B(y,r)}| \le$$

$$\le |m_{B(x,r)}(f)-m_{B(x,s)}(f)| + |m_{B(x,s)}-m_{B(x_0,2s)}(f)|$$

$$+ |m_{B(x_0,2s)}(f) - m_{B(y,s)}(f)| + |m_{B(y,s)}(f)-m_{B(y,r)}(f)|.$$

Pelo lema 4.2, o primeiro e quarto termos do segundo membro da última desigualdade são limitados por $C_1\omega_n^{\alpha} \|f\|_{\alpha,q}\; s^{n\alpha}$, enquanto que , pelo lema 4.1, o segundo e o terceiro termos são limitados por $\omega_n^\alpha \|f\|_{\alpha,q}\ s^{-n}(2s)^{n(\alpha+1)}$. Daí resulta que

$$|m_{B(x,r)}(f)-m_{B(y,r)}(f)| \leq 2C_1\omega_n^\alpha \|f\|_{\alpha,q}\ s^{n\alpha}+ 2\omega_n^\alpha \|f\|_{\alpha,q}\ s^{-n}\ (2s)^{n(\alpha+1)}$$

$$\leq (2C_1 + 2^{n\alpha+n+1})\ \omega_n^\alpha \|f\|_{\alpha,q}\ s^{n\alpha}$$

$$\leq C\omega_n^\alpha \|f\|_{\alpha,q}\ s^{n\alpha}$$

onde C é uma constante finita que independe de f, x, y, r e s, o que termina a demonstração do lema.

TEOREMA 4.1 - Sejam α e q tais que $0 < \alpha < \infty$ e $1\leq q\leq\infty$. Então uma função f pertence a $Lip(\alpha,q)$ se, e somente se, f é igual, quase sempre, a uma função g pertencente a $Lip(\alpha)$. Além disso, as normas $\|f\|_{\alpha,q}$ e $\|g\|_\alpha$ são equivalentes.

Demonstração: Seja f pertencente a $Lip(\alpha,q)$ e x, y ponto quaisquer pertencentes a R^n. Consideremos a bola $B(x_0,s)$ com $x_0=(x+y)/2$ e $s = |x-y|$, e r tal que $0 < r < s$. Então x e y pertencem a $B(x_0,s)$ e pelo lema 4.3, temos

$$(4.6)\qquad |m_{B(x,r)}(f) - m_{B(y,r)}(f)| \leq C\cdot\|f\|_{\alpha,q}\ \omega_n^\alpha\ |x-y|^{n\alpha}$$

onde C é uma constante finita que independe de f, x, y e r.

Aplicando o limite em (4.6) para r tendendo a zero, resulta do teorema de derivação de Lebesgue (ver teorema 1.1) que

$$(4.7) \qquad |f(x) - f(y)| \leq C \cdot \omega_n^{\alpha} \; \|f\|_{\alpha,q} \; |x-y|^{n\alpha}$$

para quase todo x e y.

Queremos agora definir uma g sobre R^n que seja igual a f, quase sempre, e que g pertença a $Lip(\alpha)$. Com este objetivo denotaremos por A o conjunto de todos os pontos de R^n tal que a condição (4.7) seja falsa. Então A tem medida nula. Logo, para cada x pertencente a A existe uma sequência de Cauchy $\{x_k\}$ em R^n convergindo para x tal que x_k não pertence a A para todo k. Definimos uma função g sobre R^n da seguinte maneira:

$$g(x) = f(x) \text{ se } x \text{ não pertence a } A \text{ e } g(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$$

se x pertence a A. A função g está bem definida. De fato, seja x pertencente a A e $\{x_k\}$ uma sequência de Cauchy convergindo para x tal que x_k não pertence a A para todo k. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que

$$|x_j - x_k| < \varepsilon ,$$

para todo $j, k \geq N(\varepsilon)$. Daí e pela condição (4.7), segue que

$$|f(x_j) - f(x_k)| \leq C\cdot\omega_n^{\alpha} \; \|f\|_{\alpha,q} \, |x_j - x_k|^{n\alpha}$$

$$< C\omega_n^{\alpha} \, \|f\|_{\alpha,q} \; \varepsilon^{n\alpha} \quad ,$$

para todo $j, k \geq N(\varepsilon)$, o que implica que $\{f(x_k)\}$ é uma sequência de Cauchy em R . Logo o limite de $f(x_k)$ para k tendendo ao infinito existe. Além disso, a definição da função g não depende da sequência de Cauchy que converge para x considerada. Com efeito, seja $\{y_k\}$ outra sequência de Cauchy convergindo para x tal que y_k não pertence a A, para todo k. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon)$ tal que

$$|x_k - x| < \varepsilon/2 \quad e \quad |y_k - x| < \varepsilon/2$$

para todo $k \geq N(\varepsilon)$, donde pela condição (4.7) resulta que

$$\begin{aligned} |f(x_k) - f(y_k)| &\leq C\cdot\omega_n^{\alpha} \; \|f\|_{\alpha,q} \; |x_k - y_k|^{n\alpha} \\ &\leq C\cdot\omega_n^{\alpha} \; \|f\|_{\alpha,q} \; (|x_k-x| + |x-y_k|)^{n\alpha} \\ &\leq C\cdot\omega_n^{\alpha} \, \|f\|_{\alpha,q} \; \varepsilon^{n\alpha} \quad , \end{aligned}$$

para todo $k \geq N(\varepsilon)$, ou seja, $f(x_k) - f(y_k)$ tende para zero quando k tende para o infinito, como queríamos provar.

Provaremos agora que g pertence a Lip(α). Não há nada a demonstrar no caso em que x e y não pertencem a A, pois resulta imediatamente de (4.7). Temos então que considerar dois casos: 1º) x pertence a A e y não pertence a A; 2º) x e y pertencem a A. No primeiro caso temos que $g(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$, onde $\{x_k\}$ é uma sequência de Cauchy convergindo para x tal que x_k não pertence a A, para todo k e

$g(y) = f(y)$. Daí segue que

$$|g(x) - g(y)| = |\lim_{k\to\infty} f(x_k) - f(y)|$$

$$= \lim_{k\to\infty} |f(x_k) - f(y)|,$$

donde, por (4.7) resulta que

$$|g(x) - g(y)| \leq C\cdot \omega_n^{\alpha} \|f\|_{\alpha,q} \lim_{k\to\infty} |x_k - y|^{n\alpha},$$

o que implica que

$$|g(x) - g(y)| \leq C\cdot \omega_n^{\alpha} \|f\|_{\alpha,q} |x - y|^{n\alpha}.$$

Para provarmos o segundo caso, sejam $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ sequências de Cauchy convergindo, respectivamente, para x e y e tais que x_k e y_k não pertencem a A, para todo k. Então $g(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$ e $g(y) = \lim_{k\to\infty} f(y_k)$ e por (4.7) temos

$$|g(x) - g(y)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_k) - f(y_k)|$$

$$\leq C\cdot \omega_n^{\alpha} \|f\|_{\alpha,q} \lim |x_k - y_k|^{n\alpha},$$

o que implica que

$$|g(x) - g(y)| \leq C\cdot \omega_n^{\alpha} \|f\|_{\alpha,q} |x-y|^{n\alpha}.$$

Portanto em ambos os casos segue que g pertence a Lip(α) e temos

$$\|g\|_\alpha \le C\cdot\omega_n^\alpha \; \|f\|_{\alpha,q} \quad , \tag{4.8}$$

o que prova a primeira parte do teorema.

Para demonstrarmos a outra parte do teorema consideremos uma função g que pertence a Lip(α) e que seja igual a f quase sempre. Seja $B = B(x_0,s)$ uma bola qualquer em R^n e x, y pertencentes a B. Então, pela definição de valor médio de g sobre B, temos

$$g(x) - m_B(g) = m(B)^{-1}\int_B [g(x) - g(y)]\,dy \quad .$$

Tomando o valor absoluto em ambos os membros da igualdade acima, segue que

$$|g(x) - m_B(g)| \le m(B)^{-1}\int_B |g(x)-g(y)|\,dy \quad .$$

Daí e do fato de g pertencer a Lip(α), obtemos

$$|g(x) - m_B(g)| \le m(B)^{-1}\int_B \|g\|_\alpha \cdot |x-y|^{n\alpha} dy \quad . \tag{4.9}$$

Como x e y pertencem a B, temos que $|x-y| \le 2s$, donde vem, do fato da $m(B) = \omega_n s^n$, que

$$|x - y|^{n\alpha} \le 2^{n\alpha}\cdot\omega_n^{-\alpha} m(B)^\alpha \quad .$$

Logo, de (4.9) resulta que

$$|g(x) - m_B(g)| \leq \|g\|_\alpha \, 2^{n\alpha} \omega_n^{-\alpha} \, m(B)^\alpha ,$$

o que implica que

$$m(B)^{-1}\int_B |g(x)-m_B(g)|^q \, dx \leq 2^{n\alpha q} \, \omega_n^{-\alpha q} \, \|g\|_\alpha^q \, m(B)^{\alpha q} ,$$

ou seja,

$$(m(B)^{-1}\int_B |g(x) - m_B(g)|^q \, dx)^{1/q} \leq 2^{n\alpha}\omega_n^{-\alpha} \, \|g\|_\alpha \, m(B)^\alpha ,$$

para toda bola B em R^n. Como g é igual a f, quase sempre, então temos

$$(m(B)^{-1}\int_B |f(x)-m_B(f)|^q \, dx)^{1/q} \leq 2^{n\alpha} \, \omega_n^{-\alpha} \, \|g\|_\alpha \, m(B)^\alpha ,$$

para toda bola B em R^n, donde segue que f pertence a Lip (α,q) e temos

$$\|f\|_{\alpha,q} \leq 2^{n\alpha} \, \omega_n^{-\alpha} \, \|g\|_\alpha .$$

Notemos que a equivalência das normas $\|f\|_{\alpha,q}$ e $\|g\|_\alpha$ segue imediatamente de (4.8) e da última desigualdade, ou seja,

$$2^{-n\alpha} \, \omega_n^\alpha \, \|f\|_{\alpha,q} \leq \|g\|_\alpha \leq C\cdot \omega_n^\alpha \, \|f\|_{\alpha,q} .$$

Isto conclui a demonstração do teorema.

Observemos que pelo teorema anterior temos que os espaços Lipschitz "Integrais" Lip(α,q) são equivalentes para todo q variando no intervalo $[1, \infty]$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARTLE, R.G., The Elements of Real Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1964.

[2] COIFMAN, R.R., A Real Variable Characterization of H^p, Studia Mathematica. 51 (1974), 267-272.

[3] COIFMAN, R.R., and WEISS, G., Analyse Harmonique Non-Commutative Sur Certain Espaces Homogenes, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242, Springer Verlag, Berlin. 1971

[4] COIFMAN, R.R., and WEISS, G., Extensions of Hardy Spaces and Their Use in Analysis, Bull. Amer. Math. Soc., 83 (1977), 569-645.

[5] COURANT, R., Differential and Integral Calculus, Interscience Publishers, 1936.

[6] FEFFERMAN, C., and STEIN, E.M., H^p Spaces of Several Variables, Acta Math., 129 (1972), 137-194.

[7] JOHN, F., and NIRENBERG, L., On Functions of Bounded Mean Oscillation, Comm. Pure and Applied Math. 14 (1961), 415-426.

[8] LATTER, R.H., A Characterization of $H^p(R^n)$ in Terms of Atoms, a ser publicado.

[9] MACÍAS, R.A., Interpolation Theorems on Generalized Hardy Spaces, Tese de Doutorado, Washington University,St.Louis,1974.

[10] MACÍAS, R.A., and SEGOVIA, C., Lipschitz Functions on Spaces of Homogeneous Type,a ser publicado.

[11] MACÍAS, R.A., e SEGOVIA, C., Alguns Aspectos da Teoria dos Espaços de Hardy, Monografias de Matemática Pura e Aplicada, 5, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 1977.

[12] MEYERS, G.N., Mean Oscillation over Cubes and Hölder Continuity, Proc. A.M.S. 15 (1964) 717-721.

[13] MONTEIRO; L.H.J., Álgebra Linear, Volumes I e II, 4ª edição , Livraria Nobel S.A., São Paulo, 1969.

[14] ROYDEN, H.L., Real Analysis, 2nd ed., MacMillan, Ney York,1968.

[15] STEIN, E.M., Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[16] STEIN, E.M., and WEISS, G., Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, Princeton , 1971.