ITALA M. LOFFREDO D'OTTAVIANO

FECHOS CARACTERIZADOS POR INTERPRETAÇÕES

TESE APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM MATEMÁTICA

CAMPINAS

1973

Para Climene e Eurico,
meus pais

Ao Prof. Mário Tourasse Teixeira, meu agradecimento pela orientação segura, dedicação e estímulo; meu agradecimento, sobretudo, por me ter introduzido num convívio científico de criar ambientes, num dar-se e desenvolver-se contínuos.

À Profa. Ayda I. Arruda, meu agradecimento pela dedicação e amizade com que colaborou neste trabalho, dando-me sugestões, lendo a maior parte dos resultados obtidos e orientando-me na sua redação.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O pensar e o dizer são dinâmicos, mas sua expressão ou comunicação é atomizada estáticamente em fonemas, sentenças, etc. Então, é preciso tentar restaurar, nesse universo estático, o dinamismo primitivo.

Em muitos casos, tal tentativa pode ser efetuada por uma idéia intuitiva de completamento, que se formaliza através de um operador de fecho. O dinamismo é restaurado, não só pela idéia intuitiva, como pelos artifícios dedutivos que acompanham sua formalização.

A Matemática, procurando captar em suas fases mais gerais o dinamismo de nosso pensamento e de nossa imaginação criativa, é levada a uma série de construções e desenvolvimentos característicos.

Salientam-se, nessas construções e desenvolvimentos, os "conjuntos" e seus "elementos". Tais conjuntos correspondem, na verdade, a completamentos, condensações, ânsias de unificação e síntese, como por exemplo, o prosseguir indefinidamente dos números naturais; os elementos, por sua vez, são ânsias de análise e sua emersão, muitas vezes, dá-se de maneira vaga e dinâmica, como, por exemplo, um ponto num espaço geométrico, ou um número real.

Tais desenvolvimentos aparecem neste trabalho, nas construções dos F_G, por meio de operações criativas as mais simples, operações no sentido algébrico.

O significado dos F_G é apenas o de sua construção. No entanto, por sua "forma", os elementos de F_G são capazes de exprimir muitos significados, desde que um dinamismo adequado de interpretações atue sobre eles. Além disso, sob a ação dessas interpretações, surgem várias noções nitidamente matemáticas, correspondentes ao dinamismo intuitivo que sugeriu, tanto a construção dos F_G, como suas interpretações.

Técnicamente então, surgem no trabalho os $F_{G;J}$ e as categorias de estruturas algébricas geradas no processo.

Particularmente sugestivos, como co-domínios para as interpretações, são conjuntos com operadores de fechos generalizados, convenientemente definidos; tais operadores refletem bem muitos dos dinamismos de nossa imaginação criativa. Assim, interpretando nesses conjuntos, é-se levado a introduzir um fecho em F_G.

A intuição lógica é a que mais incide neste trabalho e, o operador de fecho, refletindo a idéia de consequência, aparece de maneira natural.

Sete etapas podem ser distinguidas nos três capítulos deste trabalho:

1. A idéia intuitiva de completamento, expressa matemáticamente pelo operador de fecho generalizado, procura captar o dinamismo essencial de nosso pensamento.

"A princípio", tal completamento é vago, como também são vagos os "elementos aos que se aplica". Esses elementos, na verdade, emergem por um esforço de análise e o "conjunto" desses elementos emerge como um esforço de síntese.

Assim, a primeira etapa deste trabalho corresponde, matemáticamente, ao aparecimento do conjunto E com operador de fecho $\bar{\ }$.

2. Na segunda etapa, o completamento de E é acrescido de propriedades adicionais, que tornam E mais definido na imaginação e fazem com que o completamento se aproxime mais do dinamismo primitivo citado.

Aparecem então, no trabalho, os fechos conjuntivos, disjuntivos, etc.

3. Através de caracterização contrutiva dos F_G, E torna-se mais definido. Os elementos são destituidos de toda complexidade adicional e refletem apenas uma "estrutura" dada pelo desenvolvimento construtivo.

4. Os F_G, precisamente construídos, são relacionados com os completamentos de (2), por interpretações. Os elementos de F_G, que eram meras "construções", são "interpretados" em termos de completamento e adquirem novos significados.

5. Os F_G, através das interpretações, são dotados de fecho padrão, que é o fecho mais natural em F_G que reflete a situação. Esse fecho corresponde à dedução formal correspondente ao caso em consideração.

6. O fecho padrão é explicitado o mais possível.

7. Outros fechos são determinados em F_G, também por meio de interpretações, os quais levam à geração de estruturas algébricas, naturalmente associadas ao processo.

Assim sendo, na primeira parte deste trabalho é introduzida uma idéia de geração de estruturas algébricas, diferente da usual, não através de caracterização axiomática. São obtidos alguns resultados, relativos às categorias geradas, que serão utilizados no desenvolvimento do Capítulo III.

Na segunda parte, são caracterizados os operadores de fecho conjuntivo, fecho disjuntivo, fecho reticulado, fecho reticulado-distributivo, fecho booleano, fecho condicional, fecho intuicionista e fecho negação, e os fechos algebrizados a êles associados, os quais serão centrais para a obtenção de muitos dos resultados do Capítulo III. Um resultado importante do Capítulo II é a obtenção de uma correspondência entre fechos algebrizados e estruturas algébricas.

Como, para a caracterização dos fechos citados, é necessário um certo conhecimento de operadores de fecho ou completamento, algumas definições e resultados retativos a tais operadores e à continuidade de funções são fundamentais; portanto, ainda que triviais, foram incluidos no primeiro parágrafo do Capítulo II.

No Capítulo III obtém-se, finalmente, a caracterização procurada dos fechos estudados, através de interpretações.

Por meio de caracterizações obtidas no segundo e terceiro capítulos, os Sistemas Lógicos usuais surgem, de maneira construtiva.

Um exemplo algébrico, foi incluído no final do Capítulo III, a fim de tornar mais clara a caracterização procurada para fechos especialmente considerados.

Além disso, como muitos resultados podem ainda ser obtidos e caracterizados, foi incluído um Apêndice, após os capítulos, onde estão apontados vários problemas e sugeridas algumas possíveis soluções, que ainda devem ser pesquisadas em detalhe.

No início de cada parte do trabalho há uma pequena introdução, apontando as metas dos capítulos.

Várias demonstrações de teoremas, bastante triviais, não foram aqui incluidas e outras, são apenas indicadas.

São utilizadas várias notações habituais de Teoria de Conjuntos e "see" é usado como abreviatura de "se e sómente se"; os símbolos $A \Vdash a$ *e* $A \Vdash B$ *são usados, respectivamente, para indicar que* a *é elemento do fecho de* A*, e que o fecho de* B *é sub-conjunto do fecho de* A*;* $[x]$ *indica o conjunto formado pelos geradores de* x*.*

Os demais símbolos e conceitos são os mesmos usados nos trabalhos relacionados na bibliografia.

CAPÍTULO I

GERAÇÃO DE ESTRUTURAS ALGÉBRICAS POR DUALIDADE

Introdução

As estruturas algébricas são, quase sempre, caracterizadas axiomàticamente. Em sentido mais construtivo, no entanto, os axiomas podem ser encarados como diretrizes para possíveis realizações.

Quando os axiomas são expressos por meio de operações com igualdades, há um processo padrão para construir as estruturas algébricas. Tal processo gera as estruturas livres, por meio de identificações impostas pelas igualdades, e são os quocientes dessas estruturas livres que determinam as estruturas algébricas em consideração.

Uma idéia diferente de geração de estruturas, não através de caracterização axiomática, mas sim através de considerações de caráter intuitivo, constitui a primeira parte deste trabalho. Tal idéia intuitiva é uma idéia de dualidade e procura enriquecer o significado de situações, por meio de transformações, interpretações, pontos de vista, etc., que preservam, em certo sentido, as estruturas em que as situações se verificam.

Algèbricamente, essas interpretações são, em geral, morfismos e o significado dual $\sigma(a)$ de um elemento a qualquer de determinada estrutura é encarado como uma aplicação definida no conjunto desses morfismos, dada por $(\sigma(a))(h) = h(a)$.

Assim sendo, o novo significado das situações, que preserva o antigo, emerge dos significados duais dos elementos das estruturas em consideração, os quais emergem, por sua vez, do comportamento dos elementos da estrutura, segundo as interpretações h.

Embora não seja usual, neste trabalho, as operações serão consideradas distintamente, ora como operações criativas, ora como operações seletivas; por exemplo, a operação singular de sucessor no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é uma operação criativa, pois $\mathbb{N}$ é gerado, por sua ação, a partir de 0 (zero) e, além disso, cada elemento de $\mathbb{N}$ é univocamente determinado, a partir de 0(zero), por meio dessa operação; a adição em $\mathbb{N}$, por outro lado, é uma operação binária seletiva, que seleciona um elemento de $\mathbb{N}$, em termos de dois outros, em certa ordem, independentemente do modo como êsses elementos são gerados.

§ 1 - *Interpretações; significado dual*

Através da definição de interpretação é que se inicia, praticamente, o desenvolvimento do método de geração citado.

Seja G um conjunto não vazio e C um conjunto, disjunto de G, eventualmente vazio. Então, a partir de $G \cup C$, por meio de operações criativas, operações estas no sentido algébrico, com número finito de argumentos, obtém-se o conjunto F_G, recursivamente:

i) Se a é elemento de $G \cup C$, então a é elemento de F_G.

ii) Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são elementos de F_G e o_i, com i percorrendo um determinado conjunto de índices ϑ, é uma qualquer das operações n-áreas criativas em consideração, então $o_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é elemento de F_G.

iii) x é elemento de F_G see é obtido por meio de (i) e (ii).

Observe-se que C é o conjunto das constantes da estrutura F_G.

Seja M um determinado conjunto, não vazio, contendo uma parte C' em correspondência biunívoca com C e onde estão definidas operações o_i' selectivas, em correspondência biunívoca com as criativas que definiram F_G, as operações correspondentes sendo de mesmo número de argumentos.

Definição 1.1 - Uma interpretação de F_G em M é uma aplicação h: $F_G \to M$, tal que:

i) Se c é elemento de C, então h(c) = c', sendo c' o elemento correspondente a c em C'.

ii) Para toda operação o_i, $h(o_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)) =$
$= o_i'\ (h(x_1), h(x_2) \ldots, h(x_n))$.

Considere-se então o conjunto I, formado por todas as interpretações de F_G em M, e seja J um subconjunto qualquer não vazio de I.

Definição 1.2 - O significado dual associado a J, dos elementos de F_G que é denotado por $\sigma_J(a)$, para um elemento a qualquer de F_G, é uma aplicação de J em M, dada por $\sigma_J(a)\ (h) = h(a)$.

Definição 1.3 - Dados dois elementos a e b quaisquer de F_G, diz-se que têm o mesmo significado dual relativo J, o que é denotado por $a \equiv_J b$, see h(a) = h(b), para toda interpretação h em J.

Tem-se que "$\equiv$"$_J$ é uma relação de aquivalência compatível com as operações em F_G.

Considere-se, então, o conjunto $F_{G/\equiv_J}$, quociente de F_G pela relação $\equiv_J$: se π_J é a projeção canônica π_J: $F_G \to F_{G/\equiv_J}$ e c é um elemento qualquer de C, então $\pi_J(c)$ é uma constante de $F_{G/\equiv_J}$; além disso, são definidas as operações $\tilde{o}_i$ em $F_{G/\equiv_J}$, por $\bar{o}_i(\pi_J(x_1),\ \pi_J(x_2),\ldots,\pi_J(x_n)) = \pi_J(o_i(x_1,x_2,\ldots,x_n))$, para i elemento de ϑ e $x_1,x_2,\ldots,x_n$ elementos quaisquer de F_G, operações essas que são seletivas em $F_G/_{\equiv_J}$ e estão bem definidas, pois, se $\pi_J(x_k) = \pi(y_k)$, com k variando de 1 a n, como $h(x_k) = h(y_k)$ para toda interpretação h em J, tem-se que $h(o_i(x_1,\ldots,x_n)) = h(o_i(y_1,\ldots,y_n))$ e, portanto, $\pi_J(o_i(x_1,\ldots,x_n)) = \pi_J(o_i(y_1,\ldots,y_n))$.

Observação 1.1 : Se J=I, $\sigma_I(a)$ e $F_{G;I}$ são denotados por $\sigma(a)$ e L_G, respectivamente, e diz-se que $\sigma(a)$ é o significado dual de a.

§ 2 - *Funções Associadas*

Dados os conjuntos G, F_G e M e as funções $i: G \to F_G$, que é a imersão de G em F_G, e $f = h \circ i$, sendo h uma interpretação qualquer de F_G em M, verifica-se a existência de uma correspondência buinívoca natural entre as aplicações f de G em M e as interpretações de F_G em M.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & M \\ & F_G \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

A interpretação $h: F_G \to M$ é denotada por h_f e a aplicação f associada a h é denotada por h_G, sendo que f nada mais é que a restrição de h a G.

O significado dual $\sigma_J(a)$ de qualquer elemento a de F_G, induzido pelas interpretações de J, sugere que se encare $\pi_J(a)$ como uma aplicação de J em M, dada por $(\pi_J(a))(h) = h(a)$, sendo a um elemento qualquer de F_G ; então, $(\pi_J(a))(h_G) = h(a)$, para toda interpretação h de J, e os elementos $\pi_J(a)$ de $F_{G;J}$ podem ser considerados como aplicações de um subconjunto D de M^G em M.

Em particular, os elementos de L_G podem ser considerados como aplicações de M^G em M. Quando G é finito, as aplicações determinadas por L_G podem esgotar as aplicações de M^G em M. Entretanto, quando G não é finito, não se deve esperar que o conjunto de aplicações determinadas por L_G coincida com o das aplicações de M^G em M, pois as aplicações determinadas por L^G dependem apenas de um número finito de variáveis; fazendo tal restrição, ver-se-ão casos em que L_G coincide com as aplicações de M^G em M que dependem apenas de um número finito de variáveis.

Em qualquer caso, $F_{G;J}$ é isomorfo a uma parte do produto cartesiano $\prod_{i \in D} M_i$, com as operações definidas da maneira usual. Quando M e G são finitos, os elementos de $F_{G;J}$ correspondem a um número finito de aplicações definidas e com valores em conjuntos finitos, havendo, portanto, método de decisão para se saber quando elementos quaisquer a e b de F_G têm, ou não, o mesmo significado dual relativo a J; quando G é enumerável, mas M é finito, como as aplicações correspondentes dependem apenas de um número finito de variáveis, tem-se também método de decisão para se saber se elementos a e b quaisquer de F_G têm, ou não, mesmo significado dual relativo a J.

§ 3 - *Geração de Categorias*

3.1 - A categoria de estruturas algébricas que se pretendia gerar por dualidade é, então, constituída pelos $F_{G;J}$, sendo G e J conjuntos não vazios e sendo $\bar{o}_i$, com i elemento de $\mathcal{J}$, operações em $F_{G;J}$ e $\pi_J(C)$ o conjunto de constantes de $F_{G;J}$.

Os elementos de $F_{G;J}$ são constituídos pelos de F_G , com o significado adicional adquirido em virtude do comportamento perante as interpretações de J e, como esse significado respeita globalmente a estrutura anterior, $F_{G;J}$ é uma estrutura algébrica do mesmo tipo que F_G, com as operações e constantes satisfazendo certas propriedades, que vêm com o novo significado das situações.

Assim sendo, a categoria dos $F_{G;J}$ diz-se gerada por dualidade, em termos das operações o_i, das constantes de C e do conjunto M. Tal categoria será denotada por $\mathcal{C}$.

Observe-se que, se G e H são dois conjuntos quaisquer e J e K são dois subconjuntos de I, então, sem que G=H e K=J, $F_{G;J}$ e $F_{H;K}$ podem coincidir, a menos de isomorfismo, como objetos de $\mathcal{C}$.

<u>*Definição 1.4*</u> : Dados dois conjuntos G e H e os subconjuntos J e K de I, se $F_{G;J}$ e $F_{H;K}$ coincidem a menos de isomorfismo, como objetos da categoria $\mathcal{C}$, diz-se que $F_{G;J}$ e $F_{H;K}$ são apresentações duais do mesmo objeto de $\mathcal{C}$.

Considere-se a categoria $\mathcal{E}$ das estruturas algébricas determinadas pelas operações o_i, sendo i elemento de $\mathcal{J}$, e pelas constantes de C; seja $\mathcal{D}$ a categoria das estruturas algébricas determinadas pelas operações o_i e constantes de C, cujos morfismos são os de $\mathcal{E}$, definidos e com valores em tais estruturas, tendo M como matriz separadora.

É imediato que $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são sub-categorias de $\mathcal{E}$. Mostre-se, então, que a categoria $\mathcal{C}$ coincide com a categoria $\mathcal{D}$, ou seja, mostre-se que todo $F_{G;J}$ é separado por M e que, para todo objeto A de $\mathcal{E}$, que é separado por M, existem G e J tais que A é $F_{G;J}$.

Teorema 1.1 : M é objeto de $\mathcal{C}$.

Demonstração - Dado o conjunto M, seja $J = \{h\}$, sendo h a aplicação identidade de M em M prolongada a uma interpretação de F_M em M.

Defina-se a aplicação f de $F_{M;J}$ em M por: $f(\pi_J(x)) = h(x)$, para todo elemento x de F_M. Tal aplicação está bem definida e é um isomorfismo, pois $f(\pi_J(c)) = c$ para qualquer elemento c de C e $f(\pi_J(x)\ \tilde{o}_i\ \pi_J(y)) = f(\pi_J(x o_i y)) = f(\pi_J(x))\ o_i'\ f(\pi_J(y))$, para quaisquer x e y em F_M.

Portanto, M é isomorfo a $F_{M;J}$, que é elemento de $\mathcal{C}$.

Teorema 1.2 : M é matriz separadora da categoria $\mathcal{C}$.

Demonstração - Prove-se que, para qualquer $F_{G;J}$, se $\pi_J(a) \neq \pi_J(b)$, sendo a e b elementos de F_G, então existe um morfismo k de $\mathcal{C}$, tal que $k(\pi_J(a)) \neq k(\pi_J(b))$.

De fato, sejam $\pi_J(a)$ e $\pi_J(b)$ elementos de um $F_{G;J}$ qualquer, com $\pi_J(a) \neq \pi_J(b)$. Como a e b não têm, então, o mesmo significado dual relativo a J, existe uma interpretação h em J, tal que $h(a) \neq h(b)$,

$$\begin{tikzcd} F_G \arrow[rr, "\pi_J"] \arrow[dr, "h"'] & & F_{G;J} \arrow[dl, "k"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Defina-se a aplicação $k: F_{G;J} \to M$ por $k(\pi_J(x)) = h(x)$, para todo elemento x de F_G. A função k está bem definida, é morfismo da categoria $\mathcal{C}$ e tem-se que $k(\pi_J(a)) \neq k(\pi_J(b))$.

Teorema 1.3 : A categoria $\mathcal{D}$ coincide com a categoria $\mathcal{C}$.

Demonstração - Pelo teorema anterior, $\mathcal{C}$ é subconjunto de $\mathcal{D}$.

Considerem-se, então, um objeto A qualquer de categoria $\mathcal{D}$ e as estruturas F_A e $F_{A;J}$, sendo J o conjunto das interpretações h de F_A em M, tais que h é da forma $\varphi \circ k$, sendo φ morfismo de A em M e k prolongamento da identidade de F_A em A; seja a aplicação $\bar{k}$ de $F_{A;J}$ em A definida por $\bar{k}(\pi_J(x)) = k(x)$, definição esta possível.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i"'] & F_A \arrow[r, "\pi_J"] \arrow[d, "k"] & F_{A;J} \arrow[dl, "\bar{k}"] \\
& A \arrow[d, "\varphi"] & \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Tem-se que $\bar{k}$ é morfismo sobrejetor de $\mathcal{C}$ e, além disso se $k(x) = k(y)$, então $\varphi \circ k(x) = \varphi \circ k(y)$ para todo morfismo φ de $\mathcal{D}$ e portanto $\pi_J(x) = \pi_J(y)$; logo, $\bar{k}$ é bijetora e portanto, A é isomorfo a $F_{A;J}$.

Assim sendo, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ coincidem.

Teorema 1.4 : A categoria $\mathcal{C}$ é fechada para o produto e a sub-estrutura.

Demonstração - Para se provar que $\mathcal{C}$ é fechada para o produto, considerem-se dois elementos distintos x e y de um produto de elementos quaisquer de $\mathcal{C}$ e seja a projeção π_j que associa x e y às suas componentes x_i e y_i respectivamente, sendo $x_i \neq y_i$. Como existe um morfismo h de $\mathcal{C}$ tal que $h(x_i) \neq h(y_i)$, prove-se que $h \circ \pi_j$ é também morfismo de $\mathcal{C}$ e portanto.

Teorema 1.5 : A é objeto de $\mathcal{C}$ see A é sub-produto de $\prod_{d \in D} M_d$, sendo $M_d = M$ e D um conjunto qualquer.

3.2 - *Estruturas Livres e Quocientes.*

Teorema 1.6 : F_G é a estrutura livre sobre G, na categoria $\mathcal{C}$.

Demonstração - Sejam A um objeto qualquer de $\mathcal{C}$ e a aplicação j: $G \to F_G$ a inclusão. A demonstração é imediata, desde que se defina h construtivamente, à medida que F_G vai sendo gerado.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & F_G \arrow[dl, "h"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Teorema 1.7 : L_G é a estrutura livre, tendo G como conjunto de geradores, na categoria $\mathcal{C}$.

Demonstração - Sejam A um objeto qualquer de $\mathcal{C}$ e uma função qualquer f: $G \to A$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & F_G \arrow[r, "\pi_I"] \arrow[d, "h"] & L_G \arrow[dl, dashed, "k"] \\ & A \arrow[d, "\ell"] & \\ & M & \end{tikzcd}$$

Pode-se prolongar univocamente f a uma aplicação h: $F_G \to A$, definindo-se $h(c) = c'$ e $h(o_i(x_1,\dots,x_n)) = o_i'(h(x_1),\dots,h(x_n))$, sendo c elemento de C e c' a constante de A correspondente a c, $x_1,\dots,x_n$ elementos de F_G, e sendo o_i e o_i' as operações correspondentes, em F_G e A, respectivamente, com i elemento de $\mathcal{I}$; h está bem definida, pois F_G é gerado a partir de $G \cup C$.

Para que se demonstre o teorema, é suficiente que se possa definir uma aplicação k: $L_G \to A$ por $k(\pi_I(x)) = h(x)$.

Para que não se pudesse definir tal função, seria necessário que $a \equiv_I b$ e $h(a) \neq h(b)$, para elementos a e b de F_G e algum h em J; entretanto, como M é matriz separadora, existiria um morfismo $\ell : A \to M$, tal que $\ell(h(a)) \neq \ell(h(b))$, e $\ell o h$ seria uma interpretação de F_G em M, o que contradiz $a \equiv_I b$.

Teorema 1.8 : Todo $F_{G;J}$ é um quociente de L_G .

Demonstração - Dados F_G, L_G um $F_{G;J}$ qualquer, π e π_J, seja a aplicação p: $L_G \to F_{G;J}$ definida por $p(\pi(a)) = \pi_J(a)$, para todo elemento a de F_G; tem-se que p é um epimorfismo.

Observação 1.2 : Como nem todos os quocientes de L_G são isomorfos a algum $F_{H;K}$, pode-se conseguir uma condição para que todos o sejam — tal condição seria que M separasse também os quocientes de L_G, ou seja, dados

$$\begin{tikzcd} L_G \arrow[dr, "\pi"] & & M \\ & L_{G/\equiv} \arrow[ur, "h"] & \end{tikzcd}$$

elementos quaisquer distintos $\pi(x)$ e $\pi(y)$ em $L_{G/\equiv}$, sendo "$\equiv$" uma relação qualquer de equivalência em L_G, deve existir um morfismo h de $L_{G/\equiv}$ em M tal que: $h(\pi(x)) \neq h(\pi(y))$.

CAPÍTULO II

SOBRE OPERADORES DE FECHO

Introdução

Após algumas considerações gerais sobre operadores de fecho e funções contínuas, num sentido especial, são obtidos resultados interessantes relativos a certos operadores de fecho e aos fechos algebrizados a eles associados.

§ 1 - *Generalidades sôbre o Operador de Fecho*

1.1-*Definições*

Definição 2.1 : Dado um conjunto E não vazio, sendo $\mathcal{P}(E)$ o conjunto das partes de E e "$^{-}$" uma aplicação de $\mathcal{P}(E)$ em $\mathcal{P}(E)$, denotada por $^{-}$: $A \mapsto \bar{A}$, diz-se que "$^{-}$" é um operador de fecho em E, quando e apenas quando:

i) Para todo subconjunto A de E, A é subconjunto de $\bar{A}$.

ii) Se A e B são subconjuntos de E, tais que A é subconjunto de B, então $\bar{A}$ é subconjunto de $\bar{B}$.

iii) Para todo subconjunto A de E, $\bar{\bar{A}}$ é subconjunto de $\bar{A}$.

Definição 2.2 : Uma parte A de E diz-se fechada, ou completa, com relação ao operador $^{-}$, see $A = \bar{A}$.

Definição 2.3 : Diz-se que D gera uma parte A de E, ou que o subconjunto D de E é gerador de A, see $A = \bar{D}$.

Definição 2.4 : Um operador de fecho $^{-}$, em E, diz-se de tipo finito quando e apenas quando, para todo subconjunto A de E, se x é ele mento de $\bar{A}$, então existe um subconjunto finito A_o de A, tal que x é elemento de $\overline{A_o}$.

Definição 2.5 : Dado um conjunto E, com fecho $^{-}$, se S é subconjunto de E, o fecho $\sim$, induzido em S, do fecho de E, é dado por $\tilde{A} = \bar{A} \cap S$, sendo A um subconjunto qualquer de S. Ou seja, os fechados de S, segundo $\sim$, são obtidos dos fechados de E, segundo $^{-}$, por intersecção com S.

Definição 2.6 : Dado um conjunto E com operadores de fecho $\sim$ e $^{-}$, diz-se que o operador $\sim$ é mais fino que o operador $^{-}$, (ou o operador $^{-}$ é menos fino que $\sim$, see todo fechado de E, segundo $^{-}$, é fechado de E, segundo $\sim$, ou seja, see $\tilde{S}$ é subconjunto de $\bar{S}$, para todo subconjunto S de E.

1.2 - *Decorrências simples das definições*

Dado um conjunto E com operador de fecho $^{-}$, é imediato que:

1) Para todo subconjunto A de E, o fecho do fecho de A é o fecho de A, ou seja, $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.
2) O fecho de um subconjunto qualquer de E é um fechado de E.
3) Se um subconjunto de E é não vazio, então seu fecho é não vazio.
4) Se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de partes de E, então:

   a) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \bar{A}_i$

   b) $\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$

c) $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i}$

d) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \overline{\bigcap_{i\in I} \bar{A}_i}$

5) E é fechado

6) A intersecção de uma família qualquer de fechados de E é um fechado de E, ou seja, se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de completos de E, então $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \bar{A}_i = \overline{\bigcap_{i\in I} \bar{A}_i}$

7) O fecho de um subconjunto A de E é ~ "menor" fechado de E que contém A.

8) A união de uma família de não fechados de E é um não fechado de E, ou seja, se $(A_i)_{i\in I}$ é uma família de não fechados de E, $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \neq \bigcup_{i\in I} A_i$

1.3-Teorema 2.1: Se forem dados um conjunto E não vazio e um conjunto $\mathcal{C}$ de partes de E, tais que E é elemento de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechado para a intersecção arbitrária, então pode ser definido um e apenas um operador de fecho $^{-}$, em E, para o qual $\mathcal{C}$ é o conjunto dos fechados.

O teorema mostra que, dar um operador de fecho $^{-}$, em E, é equivalente a dar uma família $\mathcal{C}$ de partes de E, fechada para a intersecção arbitrária e contendo E.

1.4-Função Contínua

Definição 2.7 : Dados os conjuntos A e B, sendo $^{-}$ e $\sim$ operadores de fecho em A e B, respectivamente diz-se que uma função $f: A \to B$ é con tínua quando e apenas quando a imagem inversa de qualquer fechado de B, segundo $\sim$, é um fechado de A, segundo $\overline{}$.

Teorema 2.2 : Se A e B são conjuntos com fecho $\overline{}$ e $\sim$ respectivamente, f é uma função contínua de A em B see $f(\bar{S})$ é subconjunto de de $\widetilde{f(S)}$, para qualquer subconjunto S de A.

Demonstração - a) Como $f^{-1}(\widetilde{f(S)})$ é um fechado de A que contém $f^{-1}(f(S))$, $\bar{S}$ é subconjunto de $f^{-1}(\widetilde{f(S)})$.

b) Por outro lado, se $f(\bar{S})$ é subconjunto de $\widetilde{f(S)}$ e D é um subconjunto fechado qualquer de B, tem-se que $f(\overline{f^{-1}(D)})$ é subconjunto de D; logo, se x é elemento de $\overline{f^{-1}(D)}$, então f(x) é elemento de D e, portanto, $f^{-1}(D)$ é um fechado de A.

Teorema 2.3 : Se f é uma função contínua de A em B e S é um subconjunto de A, então a restrição de f a S é contínua, sendo fecho de S o fecho induzido do fecho de A.

Teorema 2.4 : Se A é uma classe de aplicações definidas em E e com valores em conjuntos com operadores de fecho, então existe um único fecho $\sim$, em E, tal que:

a) Todas as funções f de A são contínuas relativamente a $\sim$.

b) Se $\ulcorner\urcorner$ é um fecho em E que torna tôdas as funções f de A contínuas, então $\ulcorner\urcorner$ é mais fino que $\sim$.

Demonstração - Para cada função f de A, considere-se o conjunto $\mathcal{C}_f$ das imagens inversas dos fechados do codomínio de f, segundo f. Ou seja, C é elemento de $\mathcal{C}_f$ see $C = f^{-1}(D)$, para D um fechado do codomínio de f. Logo, $\bigcap_{i\in I} C_i = f^{-1}(\bigcap_{i\in I} D_i)$. Considere-se $\mathcal{C}$ dado por:

C é elemento de $\mathcal{C}$ see $C = \bigcap_{i\in I} B_i$, sendo B_i elemento de $\bigcap \mathcal{C}_f$.

Tem-se que $\mathcal{C}$ é fechado para a intersecção, E é elemento de $\mathcal{C}$ e, portanto, pelo teorema 2.1, existe um único fecho $\sim$, em E, para o qual $\mathcal{C}$ é o conjunto dos fechados; tal fecho torna as funções f contínuas.

Além disso, é imediato que qualquer outro fecho que torne as f contínuas é mais fino que $\sim$.

Definição 2.7 : Nas condições do teorema acima, diz-se que o fecho "$\sim$" é o menos fino fecho, em E, que torna as funções de A contínuas.

§ 2 - *Pré-ordem e equivalência associadas ao fecho; estruturas quocientes*

2.1-Considere-se um conjunto E com operador de fecho $\overline{}$ e sejam a,b e c elementos de E e A subconjunto de E.

Definição 2.8 :

$a \wedge\!\!\wedge b = \{c \in E: \overline{\{c\}} = \overline{\{a\} \cup \{b\}}\}$.

Definição 2.9 :

$a \vee\!\!\vee b = \{c \in E: \overline{\{c\}} = \overline{\{a\}} \cap \overline{\{b\}}\}$

Definição 2.10 :

$a \Supset b = \{c \in E: b \in \overline{\{a\} \cup \{c\}}$ e, se $b \in \overline{\{a\} \cup A}$ então $\overline{\{c\}} \subset \bar{A}\}$.

Definição 2.11 :

$\mathrel{=\!\!=} a = \{b \in E: \overline{\{a\}} \cap \overline{\{b\}} = \bar{\phi}, \overline{\{a\} \cup \{b\}} = E$ e, se $\overline{\{a\} \cup A} = E$ então $\overline{\{b\}} \subset \bar{A}\}$

Definição 2.12 :

$/\!\!/ a = \{b \in E: \overline{\{a\} \cup \{b\}} = E$ e, se $\overline{\{a\} \cup A} = E$ então $\overline{\{b\}} \subset \bar{A}\}$

2.2-*Definição 2.13* : A relação "$\prec$", dada por "$a \prec b$ see b é elemento de $\overline{\{a\}}$", é a pré-ordem associada ao fecho $\overline{}$,em E, sendo a e b elemen tos quaisquer de E.

Portanto, a equivalência "$\equiv$", em E, associada ao fecho $\overline{}$, é dada por "$a \equiv b$ see $\overline{\{a\}} = \overline{\{b\}}$".

Teorema 2.5 : Se C é um fechado de E, segundo o operador $\overline{}$, e x é elemento de C tal que $x \equiv y$, sendo y elemento de E, então y é elemento de C.

Teorema 2.6 : Dado um conjunto E com operador de fecho $\overline{}$, sendo "$\equiv$" a relação de equivalência associada ao fecho e a,b,c e d elementos de E, tais que $a \equiv b$ e $c \equiv d$:

a) Se $a \wedge b$ é não vazio, para todo par (a,b) de elementos de E, então $a \wedge b$ é uma classe de equivalência, segundo "$\equiv$", e $a \wedge c = b \wedge d$.

b) Se $a \vee b$ é não vazio, para todo par (a,b) de elementos de E, então $a \vee b$ é uma classe de equivalência, segundo "$\equiv$", e $a \vee c = b \vee d$.

c) Se $a \supset b$ é não vazio, para todo par (a,b) de elementos de E, então $a \supset b$ é uma classe de equivalência, segundo "$\equiv$", e $a \supset c = b \supset d$.

d) Se $- a$ é não vazio, para todo elemento a de E, então $- a$ é uma classe de equivalência, segundo "$\equiv$", e $- a = - b$.

e) Se $\neg a$ é não vazio, para todo elemento a de E, então $\neg a$ é uma classe de equivalência, segundo "$\equiv$" e $\neg a = \neg b$.

Demonstração - Basta que se verifique que dois elementos m e n quaisquer de E, que pertençam a um dos conjuntos $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \supset b$, $- a$, ou $\neg a$ são equivalentes e, além disso, que qualquer elemento x de E, tal que $x \equiv m$ ou $x \equiv n$, é também elemento do conjunto ao qual m pertence.

Observação 2.1 : Para facilidade operacional manipulativa em E, admita-se que $\wedge$, $\vee$, $\supset$ $-$ e $\neg$ estejam também definidas em classes de equi valência relativas à relação "≡".

Propriedades simples dos fechos - Dado um conjunto E com operador de fecho —, sendo a, b e c elementos de E e A subconjunto de E:

2.1) Se $a \mathbin{\bar{\wedge}} b$ é não vazio, para todo par (a,b) de elementos de E, então:

a) $a \mathbin{\bar{\wedge}} b \Vdash a$

$a \mathbin{\bar{\wedge}} b \Vdash b$

b) Se $A \Vdash a$ e $A \Vdash b$, então $A \Vdash a \mathbin{\bar{\wedge}} b$

c) $a \mathbin{\bar{\wedge}} b = b \mathbin{\bar{\wedge}} a$

d) $(a \mathbin{\bar{\wedge}} b) \mathbin{\bar{\wedge}} c = a \mathbin{\bar{\wedge}} (b \mathbin{\bar{\wedge}} c)$

2.2) Se $a \mathbin{\bar{\vee}} b$ é não vazio, para todo par (a,b) de elementos de E, então:

a) $\{a\} \Vdash a \mathbin{\bar{\vee}} b$

$\{b\} \Vdash a \mathbin{\bar{\vee}} b$

b) Se $\{a\} \Vdash A$ e $\{b\} \Vdash A$, então $a \mathbin{\bar{\vee}} b \Vdash A$

c) $(a \mathbin{\bar{\vee}} b) \mathbin{\bar{\vee}} c = a \mathbin{\bar{\vee}} (b \mathbin{\bar{\vee}} c)$

d) $a \mathbin{\bar{\vee}} b = b \mathbin{\bar{\vee}} a$

2.3) Se $a \mathbin{\bar{\supset}} b$ é não vazio, para todo par (a,b) de elementos de E, então:

a) $\{a\} \cup (a \mathbin{\bar{\supset}} b) \Vdash b$

b) Se $\{a\} \cup A \Vdash b$, então $A \Vdash a \mathbin{\bar{\supset}} b$.

2.4) Se $a \mathbin{\bar{\wedge}} b$, $a \mathbin{\bar{\vee}} b$ e $\bar{\neg} a$ são não vazios, para a e b elementos quaisquer de E, então:

a) $\overline{a \mathbin{\bar{\wedge}} \bar{\neg} a} = E$

b) $\overline{a \mathbin{\bar{\vee}} \bar{\neg} a} = \bar{\phi}$

c) Se $A \cup \{a\} \Vdash E$, então $A \Vdash \neg a$

2.5) Se $a \wedge b$ e $\neg a$ são não vazios, para a e b elementos - quaisquer de E, então $\overline{a \wedge \neg a} = E$.

23-*Teorema 2.7* : Se $a \supset b$ é não vazio, para todo par (a,b) de elementos do conjunto E, com fecho $\overline{}$, então $\bar{\phi}$ é não vazio e $a \prec b$ see $a \supset b = \bar{\phi}$.

Demonstração - a) Pela propriedade (2.3b), como $\{a\} \cup \phi \Vdash a$ tem-se que $\phi \vdash a \supset a$. Logo, $\bar{\phi} = a \supset a$.

Verifica-se, analogamente, que $\bar{\phi} = a \supset a = b \supset (a \supset b) = a \supset (b \supset c) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c))$.

b) Se $a \prec b$, então $\{a\} \Vdash b$ e, portanto, $a \supset b = \bar{\phi}$.

Se $a \supset b = \phi$, então b é elemento de $\overline{\{a\} \cup (a \supset b)}$ e portanto, b é elemento de $\overline{\{a\} \cup \bar{\phi}}$. Logo, b é elemento de $\overline{\{a\}}$.

Teorema 2.8 : Se $a \wedge b$, $a \vee b$ e $a \supset b$ são não vazios, para todo par (a,b) de elementos de E, então $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ e $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Demonstração - a) Como $a \wedge b \Vdash a$ e $a \wedge b \Vdash b$, $\{a,b\}$ é subconjunto de $\overline{a \wedge b}$; logo, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ é subconjunto de $\overline{a \wedge b}$. Analogamente, de $a \wedge c \Vdash \{a,c\}$ tem-se que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ é subconjunto de $\overline{a \wedge c}$. Então, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ é subconjunto de $\overline{\{a,b\}} \cap \overline{\{a,c\}}$ e, portanto, também o é, de $\{a,b,c\}$; entretanto, como $\overline{\{a,b,c\}} = \overline{\{a, b \vee c\}}$, ou seja, $\overline{\{a,b,c\}} = \overline{a \wedge (b \vee c)}$, tem-se que $(a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ é subconjunto de $\overline{a \wedge (b \vee c)}$, ou seja, $a \wedge (b \vee c) \supset ((a \wedge b) \vee (a \wedge c) = \bar{\phi}$.

Por outro lado, como $a \wedge b \Vdash a$, $a \wedge b \Vdash b$ e $b \Vdash b \vee c$, tem-se que $a \wedge (b \vee c)$ é subconjunto de $\overline{\{a,b\}}$. Analogamente ,

$a \wedge c \Vdash a \wedge (b \vee c)$, logo, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \Vdash a \wedge (b \vee c)$, ou seja, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \supset (a \wedge (b \vee c)) = \bar{\phi}$.

b) Análoga a (a).

Teorema 2.9 : Se o operador de fecho $\bar{\ }$, em E, for de tipo finito, tal que $a \wedge b$ seja não vazio, para quaisquer elementos a e b de E , então, dado um subconjunto A qualquer de E, um elemento x de E é elemento de $\bar{A}$ see existem elementos a_1, $a_2,\ldots,a_n$ de A, tais que, se c é elemento de $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$, então $c \prec x$.

Demonstração - a) Se x é um elemento de E, com x elemento de $\bar{A}$, como o operador $\bar{\ }$ é de tipo finito, existe um subconjunto finito $A_o = \{a_1, a_2,\ldots,a_n\}$ de A, tal que x é elemento de $\bar{A_o}$. Como existe c em E, tal que $\overline{\{c\}} = \overline{\{a_1, a_2,\ldots,a_n\}}$, tem-se que x é elemento de $\overline{\{c\}}$, ou seja, $c \prec x$.

b) Por outro lado, se existem elementos a_1, $a_2,\ldots,a_n$ de A, tais que, para c em E, com $\overline{\{c\}} = \overline{\{a_1, a_2,\ldots,a_n\}}$ e $c \prec x$, é imediato que x é elemento de $\bar{A}$.

2.4-*Estruturas Quocientes*

Dada a relação de equivalência "$\equiv$", associada ao fecho $\bar{\ }$, em um conjunto E, considere-se o conjunto quociente $E_{/\equiv}$.

Em virtude do teorema 2.5, os fechados de E são uniões de classes de equivalência. Assim sendo, pode-se induzir, de modo natural, o fecho de E em $E_{/\equiv}$: se U é um subconjunto de $E_{/\equiv}$, o fecho $\bar{\ }$, em $E_{/\equiv}$, é dado por $\bar{U} = \pi(\overline{\cup U})$, onde $\pi\colon E \to E_{/\equiv}$ é a projeção canônica e $\overline{\cup U}$ é considerado em E.

A pré-ordem "$\prec$", de E, induz a ordem "$\leq$", em $E_{/\equiv}$, e $\pi(a)\leq\pi(b)$ é definido por $a \prec b$, sendo a e b elementos quaisquer de E. Assim sen do, $\pi(a) \leq \pi(b)$ see $\{\pi(b)\}$ é subconjunto de $\overline{\{\pi(a)\}}$ e, além disso, se u e v são classes de equivalência segundo "$\equiv$" e a e b são elementos de u e v respectivamente, tais que $a \prec b$, então $x \prec y$, para todo elemento x de u e todo elemento y de v, ou seja, a e b são escolhidos arbitràriamente nas classes de equivalência.

Teorema 2.10 : Se A é subconjunto de $E_{/\equiv}$, a e b são elementos de $E_{/\equiv}$, tais que $a \leq b$ e a é elemento de $\bar{A}$, então b é elemento de $\bar{A}$.

Teorema 2.11 : Se $\bar{\phi}$ é não vazio em $E_{/\equiv}$, então $E_{/\equiv}$ tem último elemento.

Demonstração - $\bar{\phi}$ é o último elemento de $E_{/\equiv}$.

Teorema 2.12 : Dado o fecho $\bar{\ }$, induzido do fecho de E em $E_{/\equiv}$, tem-se:

a) Se $a \curlywedge b$ é não vazio, para todo par (a,b) de elementos de E, então $\pi(a) \curlywedge \pi(b)$ é também não vazio em $E_{/\equiv}$ e a aplicação que associa $(\pi(a), \pi(b))$ a $\pi(a) \curlywedge \pi(b)$ torna-se uma operação algébrica binária "$\wedge$" em $E_{/\equiv}$.

b) Se $a \curlyvee b$ é não vazio, para todo par (a,b) de elementos de E, então $\pi(a) \curlyvee \pi(b)$ é também não vazio em $E_{/\equiv}$ e a aplicação que associa $(\pi(a), \pi(b))$ a $\pi(a) \curlyvee \pi(b)$ torna-se uma operação algébrica binária "$\vee$" em $E_{/\equiv}$.

c) Se $a \Supset b$ é não vazio para todo par (a,b) de elementos de E, então $\pi(a) \Supset \pi(b)$ é também não vazio em $E_{/\equiv}$ e a aplicação que associa $(\pi(a), \pi(b))$ a $(\pi(a) \Supset \pi(b))$ torna-se uma operação algébrica binária "$\supset$" em $E_{/\equiv}$.

d) Se $\neg$ a é não vazio, para todo elemento a de E, então

$-\pi(a)$ é também não vazio em $E_{/\equiv}$ e a aplicação que associa $\pi(a)$ a $-\pi(a)$ torna-se uma operação algébrica unária "$-$" em $E_{/\equiv}$.

e) Se $\neg a$ é não vazio para todo elemento a de E, então $\neg\pi(a)$ é também não vazio em $E_{/\equiv}$ e a aplicação que associa $\pi(a)$ a $\neg\pi(a)$ torna-se uma operação "$\neg$" em $E_{/\equiv}$.

Demonstração - É suficiente que sejam considerados $\pi(a)$ e $\pi(b)$ em $E_{/\equiv}$ e c, elemento de um dos conjuntos $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \supset b$, $-a$ ou $\neg a$ e que se verifique que $\pi(c)$ é elemento do conjunto correspondente $\pi(a) \wedge \pi(b)$, ou $\pi(a) \vee \pi(b)$, ou $\pi(a) \supset \pi(b)$, ou $-\pi(a)$, ou $\neg\pi(a)$, já que $\overline{\{\pi(c)\}} = \pi(\overline{\pi(c)})$ e $\overline{\pi(c)} = \overline{\{c\}}$, conjunto esse que é unitário em $E_{/\equiv}$, tendo como único elemento $a \wedge b$, ou $a \vee b$, ou $a \supset b$, ou $-a$, ou $\neg a$.

Assim sendo, as aplicações $\wedge, \vee, \supset, -$ e $\neg$ podem ser consideradas como operações algébricas em $E_{/\equiv}$ e serão denotadas respectivamente, por:

$$(\pi(a), \pi(b)) \mapsto \pi(a) \wedge \pi(b)$$

$$(\pi(a), \pi(b)) \mapsto \pi(a) \vee \pi(b)$$

$$(\pi(a), \pi(b)) \mapsto \pi(a) \supset \pi(b)$$

$$\pi(a) \mapsto -\pi(a)$$

$$\pi(a) \mapsto \neg\pi(a)$$

Propriedades - Como decorrência imediata das propriedades 2.1 a 2.5, e dos teoremas 2.8 e 2.12, para a, b e c elementos quaisquer de $E_{/\equiv}$:

2.6) Se $x \wedge y$ é não vazio, para todo par (x,y) de elementos de E:

a) $a \wedge b \leq a$

b) $a \wedge b \leq b$

c) Se $c \leq a$ e $c \leq b$, então $c \leq a \wedge b$.

2.7) Se $x \vee\!\!\!\vee y$ é não vazio, para todo par (x,y) de elementos de E:

a) $a \leq a \vee b$

b) $b \leq a \vee b$

c) Se $a \leq c$ e $b \leq c$, então $a \vee b \leq c$

2.8) Se $x \supseteq y$ é não vazio, para todo par (x,y) de elementos de E:

$\bar{\phi} = a \supset a = a \supset (b \supset a) = (a \supset (b \supset c)) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c))$

2.9) Se $x \wedge y$, $x \vee\!\!\!\vee y$ e $-\!\!\!-\, x$ são não vazios, para x e y elementos de E:

a) $\overline{a \wedge - a} = E$

b) $\overline{a \vee - a} = \bar{\phi}$

2.10) Se $x \wedge\!\!\!\wedge y$, $x \vee\!\!\!\vee y$, $x \supseteq y$ são não vazios, para todo par (x,y) de E:

a) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

b) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

2.11) Se $x \wedge\!\!\!\wedge y$, $x \vee\!\!\!\vee y$ e $\neg\!\!\neg x$ são não vazios, para elementos x e y de E, então $\overline{a \wedge \neg a} = E$

<u>*Teorema 2.13*</u> : Se $a \wedge x = E$, para elementos a e x quaisquer de $E_{/\equiv}$, então $x \leq - a$.

<u>*Teorema 2.14*</u> : Se o operador em E é de tipo finito, tal que $a \wedge\!\!\!\wedge b$ seja não vazio, para todo par (a,b) de elementos E, então $\bar{A}$ é o filtro gerado por A, sendo A um subconjunto qualquer de $E_{/\equiv}$.

Demonstração - Pelo teorema 2.9, como o fecho em $E_{/\equiv}$ também é de tipo finito, x é elemento de $\bar{A}$ see existem elementos $a_1, a_2, \ldots a_n$

de A, tais que $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \leq x$.

Para se provar que $\bar{A}$ é o filtro gerado por A, considere-se a família $(F_i)_{i\in I}$ de todos os filtros de $E_{/\equiv}$ que contêm A e demonstre-se que:

a) $\bar{A}$ é elemento de $(F_i)_{i\in I}$

De fato, se x é elemento de $\bar{A}$ e $x \leq y$, com y em $E_{/\equiv}$, tem-se que $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \leq y$ e, portanto, y é elemento de $\bar{A}$; se x e y são elementos de $\bar{A}$, então $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \leq x \wedge y$. Logo, $\bar{A}$ é filtro.

b) $\bar{A} = \bigcap_{i\in I} F_i$

De fato, como $\bar{A}$ é elemento da família $(F_i)_{i\in I}$, é imediato que $\bigcap_{i\in I} F_i$ é subconjunto de $\bar{A}$; além disso, se x é elemento de $\bar{A}$, então x é elemento de qualquer filtro que contém A, pois $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \leq x$ e, portanto, x é elemento de $\bigcap_{i\in I} F_i$.

Logo, $\bar{A}$ é o "menor" filtro que contém A.

§ 3 - *Alguns Fechos Especiais*

3.1- *Fecho Conjuntivo*

Definição 2.14 : Um operador de fecho $\overline{}$, em um conjunto E, diz-se conjuntivo see $a \wedge\!\!\!\wedge b$ é não vazio, para todo par (a,b) de elementos de E.

Se E é um conjunto com operador de fecho conjuntivo $\overline{}$, são válidos os resultados enunciados nos teoremas 2.5, 2.6 e 2.9 e as propriedades 2.1.

Se $E_i = E_{/\equiv}$, sendo "$\equiv$" a relação de equivalência associada ao fecho $\overline{}$, são válidos os resultados dos teoremas 2.10, 2.11, 2.12 a e 2.14. Assim sendo, em E_i o fecho $\overline{}$, induzido do fecho de E, é também conjuntivo e está definida uma operação binária "$\wedge$", que goza das propriedades 2.6.

Teorema 2.15 : E_i é um inf-reticulado.

Demonstração - Além de "$\leq$" ser uma ordem em E_i, pelas propriedades 2.6, para qualquer par (a,b) de elementos de E_i, tem-se que $a \wedge b = \inf (a,b)$.

Exemplo de Fecho Conjuntivo de tipo não finito - Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e defina-se em $\mathbb{R}$ o fecho $\bar{\ }$, dado por: x é elemento de $\bar{S}$ see $x \geq \inf S$ se S é limitado inferiormente, ou x é qualquer se S não é limitado inferiormente.

Tem-se que o operador de fecho é conjuntivo, pois, se $a \leq b$, então a é elemento de $a \mathbin{\bar{\wedge}} b$ e, se $b \leq a$ então b é elemento de $a \mathbin{\bar{\wedge}} b$; entretanto, tal operador não é de tipo finito pois, se $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, então o número real 0 não é elemento de $\bar{S}_o$, para nenhuma parte finita S_o de S.

3.2- *Fecho Disjuntivo*

Definição 2.15 : Um operador de fecho $\bar{\ }$, em E, diz-se disjuntivo, see $a \mathbin{\bar{\vee}} b$ é não vazio, para todo par (a,b) de elementos de E.

Como consequência da definição, se E é um conjunto com operador de fecho $\bar{\ }$ disjuntivo, então são válidos os resultados enunciados nos teoremas 2.5, 2.6b, 2.9 e as propriedades 2.2.

Se $E_S = E_{/\equiv}$, sendo "$\equiv$" a relação de equivalência associada ao fecho $\bar{\ }$, de E, são válidos os teoremas 2.10, 2.11, 2.12b . Logo, em E_S, o fecho $\bar{\ }$, induzido do fecho de E, é também disjuntivo e se pode definir a operação binária "$\vee$", que goza das propriedades 2.7.

<u>*Teorema 2.16*</u> : E_S é um sup-reticulado.

Demonstração - Além de "$\leq$" ser uma ordem em E_S, as proprie- 2.7 dos fechos disjuntivos acarretam que, para elementos quaisquer a e b de E_S , $a \vee b = \sup(a,b)$.

33- <u>*Fecho Reticulado*</u>

<u>*Definição 2.15*</u> : Um operador de fecho $\overline{}$, em E, diz-se reticulado see $a \bar{\wedge} b$ e $a \bar{\vee} b$ são não vazios, para elementos a e b quaisquer de E.

Como consequência da definição, se E é um conjunto com operador de fecho reticulado, então são válidos os teoremas 2.5, 2.6b e 2.8 e as propriedades 2.1 e 2.2.

Se $E_r = E_{/\equiv}$, sendo "$\equiv$" a relação de equivalência associada ao fecho de E, são válidos os teoremas 2.10, 2.11, 2.12a , 2.12b e 2.14. Logo, o fecho $\overline{}$, induzido em E_r pelo fecho de E, é também reticulado e em E_r estão definidas as operações binárias "$\wedge$" e "$\vee$", que gozam das propriedades 2.6 e 2.7.

<u>*Teorema 2.17*</u> : E_r é um reticulado.

34 - <u>*Fecho Reticulado-Distributivo*</u>

<u>*Definição 2.16*</u> : Diz-se que o fecho $\overline{}$, em um conjunto E, é reticulado distributivo quando e apenas quando $a \bar{\wedge} b$ e $a \bar{\vee} b$ são não vazios, para elementos a e b quaisquer de E e a estrutura quociente $E_d = E_{/\equiv}$ é distributiva, com relação às operações "$\wedge$" e "$\vee$", induzidas de $\bar{\wedge}$ e $\bar{\vee}$, sendo "$\equiv$" a relação de equivalência induzida pelo fecho.

Em virtude da definição, se $\overline{}$ é um fecho reticulado-distributivo em

E, são válidos os teoremas 2.5, 2.6a, 2.6b, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12a, 2.12b e 2.14 e as propriedades 2.1, 2.2, 2.6 e 2.7.

Além disso, salente-se que E_d é um reticulado distributivo.

§3 - *Fecho Booleano*

Definição 2.17: Um operador de fecho $\overline{}$, em E, diz-se booleano, see $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \supset b$ e $-a$ são não vazios, para elementos a e b quaisquer de E.

Em virtude da definição, se $\overline{}$ é um fecho booleano em E, então são válidos todos os teoremas e propriedades do parágrafo (§2).

Saliente-se que, se o fecho $\overline{}$, em E, é booleano, $\bar{\phi}$ é não vazio e $a \supset a = b \supset (a \supset b) = a \supset (b \supset a \wedge b) = a \wedge b \supset a = a \wedge b \supset b =$
$= a \supset a \vee b = b \supset a \vee b = (a \supset c) \supset ((b \supset c) \supset (a \vee b) \supset c)) =$
$= (a \supset (b \supset c)) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c)) = (a \supset b) \supset ((a \supset -b) \supset -a) =$
$= - - a \supset a = \bar{\phi}$, para elementos a, b e c quaisquer de E; além disso, $a \leq b$ see $a \supset b = \bar{\phi}$. Se $E_a = E_{/\equiv}$, o fecho $\overline{}$, induzido em E_a pelo fecho de E, é também booleano e podem ser definidas em E_a as operações "$\wedge$", "$\vee$", "$\supset$" e "$-$".

Teorema 2.18 : E_a é uma Álgebra de Boole.

Demonstração - Além de "$\leq$" ser uma ordem em E, $a \wedge b = \inf(a,b)$ e $a \vee b = \sup(a,b)$, para todo par (a,b) de elementos de E e as operações $\wedge$ e $\vee$ gozam das propriedades distributivas.

Como $\bar{\phi}$ é não vazio, chame-se de "1" a classe de equivalência correspondente a $\bar{\phi}$; se c é elemento de $a \wedge -a$, então $\overline{\{c\}} = E$ e portanto, chame-se de "0" a classe de equivalência correspondente a c. É imediato que 0 é primeiro elemento de E_a e 1 é último elemento de E_a e que para qualquer elemento x de E_a : $x \wedge -x = 0$ e $x \vee -x = 1$.

Saliente-se que, em E_a, $a \supset a = b \supset (a \supset b) = a \supset (b \supset a \wedge b) =$ $= a \wedge b \supset a = a \wedge b \supset b = a \supset (a \vee b) = b \supset a \vee b =$ $= (a \supset c) \supset ((b \supset c) \supset (a \vee b) \supset c)) = (a \supset (b \supset c)) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c)) =$ $= (a \supset b) \supset ((a \supset - b) \supset - a = - - a \supset a = 1$, para elementos a,b e c quaisquer.

Teorema 2.19 : Se a é um elemento qualquer de E_a , então $-(-a) = a$.

Demonstração - Prove-se que, se b é elemento de $-$ a, e c é elemento de $-$ b, então $c \equiv a$.

Teorema 2.20 : Se o fecho $\overline{}$, em E, é booleano e de tipo finito, então todo fechado de E, distinto de E, é intersecção de fechados maximais.

Demonstração - Seja C um fechado qualquer de E, distinto de E, sendo x um elemento de E que não pertence a C.

Seja $\mathcal{C}_x$ a família dos fechados de E que contêm C e não contêm x. Tal família é indutiva, pois se $(C_i)_{i \in I}$ é uma família totalmente contida em $\mathcal{C}_x$ e x é elemento de $\overline{\bigcup_{i \in I} C_i}$, então x é elemento de $\overline{\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}}$, sendo a_i elemento de C_{1i}, com i variando de 1 a n e, portanto, x é elemento de $\bigcup_{i \in I} C_i$.

Pelo Lema de Zorn, existe, então, um elemento maximal M_x de $\mathcal{C}_x$. Mostre-se que M_x é fechado maximal.

De fato, se x não é elemento de C, então $\overline{C \cup \{-x\}}$ não contém x. Logo, M_x contém $(-x)$ e, se D é um fechado que contém propriamente M_x, então D contém $(-x)$ e x. Assim sendo, D coincide com E.

O raciocínio deve ser feito para todo elemento de E que não pertença a C, que será, então, a intersecção dos fechados maximais encontrados.

3.6 - *Fecho Condicional*

Definição 2.18 : Um operador de fecho $\overline{}$, em E, diz-se condicional, see $a \supset b$ é não vazio, para a e b elementos quaisquer de E.

Se o fecho $\overline{}$, em E, é condicional então são válidos os teoremas 2.5, 2.6c e 2.7 e a propriedade 2.3.

Saliente-se, portanto, que $\bar{\phi}$ é não vazio e que $a \prec b$ see $a \supset b = \bar{\phi}$, sendo a e b elementos quaisquer de E.

Definição 2.19 : $\mathcal{B}$ é a família dos subconjuntos B de E, tais que $A \cup \bar{\phi}$ é subconjunto de B e, se a é elemento de B e $(a \supset b) \cap B$ é não vazio, então b é elemento de B, para um determinado subconjunto A de E.

Definição : $C(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$

Definição 2.20 : Um elemento x de E é elemento de D(A), fixado um subconjunto A de E see existe uma sequência $a_1, \ldots, a_n = x$ tal que, para cada i, uma das alternativas se verifica:

i) a_i é elemento de $A \cup \bar{\phi}$

ii) existem $j, k < i$, tais que a_k é elemento de $a_j \supset a_i$.

Definição 2.21 : Se E é um conjunto com operador de fecho $\overline{}$, condicional, então D(A) diz-se sistema dedutivo gerado por A.

Teorema 2.21 : O fecho condicional $\overline{}$, em E, é de tipo finito see $\bar{A} = C(D) = D(A)$.

Se $E_c = E_{/\equiv}$, sendo "$\equiv$" a relação de equivalência associada ao fecho $\overline{}$, em E, são válidos os teoremas 2.10, 2.11, 2.12c e propriedade 2.8. Assim sendo, o fecho $\overline{}$, induzido em E_c do fecho de E, é também condicional, em E_c está definida a operação "$\supset$", e $\bar{\phi}$ é último elemento de E_c , sendo $\bar{\phi} = a \supset a = a \supset (b \supset a) = (a \supset (b \supset c)) \supset ((a \supset b) \supset (a \supset c))$, para elementos a, b e c quaisquer de E_c .

Teorema 2.22 : E_c é uma Álgebra de Hilbert

3.7 - *Fecho Intuicionista, ou Quase Booleano*

Definição 2.22 : Um operador de fecho $\bar{\ }$, em E, diz-se intuicionista, see $a \mathbin{\bar\wedge} b$, $a \mathbin{\bar\vee} b$, $a \mathbin{\bar\supset} b$ e $\bar{\neg} a$ são não vazios, para elementos a e b quaisquer de E.

Se $\bar{\ }$, em E, é um fecho intuicionista, são válidos, então, todos os teoremas e proriedades do (§ 2), relativos a $\bar\vee$, $\bar\wedge$, $\bar\supset$ e $\bar\neg$ em E, e relativos a $\wedge$, $\vee$, $\supset$ e $\neg$ em $E_T = E_{/\equiv}$, sendo "$\equiv$" a relação de equivalência associada ao fecho de E.

Teorema 2.23 : E_T é uma Álgebra de Brower, ou de Heyting.

3.8 - *Fecho Negação*

Definição 2.23 : Um operador de fecho $\bar{\ }$, em E, diz-se fecho negação, see $\bar\neg$ a é não vazio, para todo elemento a de E.

Se $\bar{\ }$, em E, é um fecho negação, então são válidos os teoremas 2.5 e 2.6d.

Se $E_N = E_{/\equiv}$, sendo "$\equiv$" a relação de equivalência associada ao fecho $\bar{\ }$, em E, o fecho induzido em E_N do fecho de E é também um fecho negação e pode ser definida em E_N a operação unária " $\neg$ ".

3.9 - *Observação 2.*

Se o fecho $\bar{\ }$, em um conjunto E, é booleano, condicional, ou intuicionista, então a estrutura quociente $E_{/\equiv}$, sendo "$\equiv$" a relação de equivalência associada ao fecho de E, tem último elemento, que é $\bar\phi$.

Como, nos casos citados, $\bar\phi$ coincide com os axiomas dos Cálculos Proposicionais Clássico, Implicativo, ou Intuicionista, respecti vamente, é imediato que $\bar{\phi}$ corresponde, em cada caso, aos teoremas dos Cálculos Proposicionais citados.

3.10 - *Correspondência entre fechos algebrizados e estruturas algébricas*

Pelo § 2, se o fecho $\overline{}$, em um conjunto E, é de tipo finito e é um fecho conjuntivo, reticulado, reticulado-distributivo, booleano, ou intuicionista, então $\bar{A}$ é o filtro gerado por A, para qualquer subconjunto A de $E_{/\equiv}$, sendo "$\equiv$" a relação de equivalência associada ao fecho de E; se o fecho $\overline{}$, em E, é condicional e de tipo finito, então $\bar{A}$ é o sistema dedutivo gerado por A.

Assim sendo, dado em E um fecho qualquer, conjuntivo, disjuntivo, reticulado, reticulado-distributivo, booleano, condicional, ou intuicionista, ao se considerar a estrutura quociente associada a êle, a idéia de Inf-reticulado, Sup-reticulado, Reticulado, Reticulado Distributivo, Álgebra de Boole, Álgebra de Hilbert ou Álgebra de Heyting, respectivamente, não é a mesma que a de estrutura quociente, pois, fechos diferentes podem dar a mesma estrutura quociente, e estruturas quocientes diferentes podem dar o mesmo Inf-reticulado, Sup-Reticulado, etc.

Entretanto, quando o fecho em consideração é de tipo finito, a correspondência entre as estruturas é biunívoca, pois, um Inf-reticulado, um Reticulado, um Reticulado Distributivo, uma Álgebra de Boole e uma Álgebra de Heyting são, respectivamente, fechos conjuntivo, reticulado, reticulado-distributivo, booleano e intuicionista, algebrizados e, entre os vários fechos algebrizados que podem determinar o mesmo Inf-Reticulado, o mesmo Reticulado, etc., existe um único, o fecho do filtro gerado, que é de tipo finito. No caso das Álgebras de Hilbert, o único fecho de tipo finito é o fecho do sistema dedutivo gerado.

3.11 - *Um fecho interessante no conjunto* M = {0,1}

Considere-se o conjunto M = {0,1}, com fecho $\overline{}$, dado pelos fechados M e N = {1}.

Então em M, $\bar{\phi} = \overline{\{1\}} = \{1\}$ e $\overline{\{0\}} = \overline{\{0,1\}} = \{0,1\}$.

As aplicações $\mathbin{\bar{\wedge}}$, $\mathbin{\bar{\vee}}$, $\mathbin{\bar{\supset}}$, $\bar{-}$ e $\bar{7}$, induzidas em M pelo fecho são dadas por:

i) $0 \mathbin{\bar{\wedge}} 0 = 1 \mathbin{\bar{\wedge}} 0 = 0 \mathbin{\bar{\wedge}} 1 = \{0\}$

$1 \mathbin{\bar{\wedge}} 1 = \{1\}$

ii) $0 \mathbin{\bar{\vee}} 0 = \{0\}$

$0 \mathbin{\bar{\vee}} 1 = 1 \mathbin{\bar{\vee}} 0 = 1 \mathbin{\bar{\vee}} 1 = \{1\}$

iii) $0 \mathbin{\bar{\supset}} 0 = 0 \mathbin{\bar{\supset}} 1 = 1 \mathbin{\bar{\supset}} 1 = \{1\}$

iv) $\bar{-}\ 0 = \{1\}$

$\bar{-}\ 1 = \{0\}$

v) $\bar{7}\ 0 = \{1\}$

$\bar{7}\ 1 = \{0\}$

Assim sendo, o fecho $\overline{}$, em M, é conjuntivo, disjuntivo, reticulado, reticulado distributivo, booleano, condicional, intuicionista e fecho negação. Além disso, $M_i = M_s = M_r = M_d = M_a = M_c = M_T = M_N = M$ e as operações $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $-$ e 7 são definidas em M, sendo $0<1$ a ordem induzida em M.

Porque é natural considerar M com fecho dado pelos fechados e M e N ?

Considere-se, por exemplo, o caso em que a operação $\vee$, em M, é considerada como sup.

Se $\overline{}$ é um fecho em M, para o qual $\vee$ faz o papel correspondente em fechos disjuntivos:

$$\overline{\{0\}} = \overline{\{0 \vee 0\}} = \overline{\{0\}} \cap \overline{\{0\}}$$
$$\overline{\{1\}} = \overline{\{0 \vee 1\}} = \overline{\{0\}} \cap \overline{\{1\}}$$
$$\overline{\{1\}} = \overline{\{1 \vee 0\}} = \overline{\{1\}} \cap \overline{\{0\}}$$
$$\overline{\{1\}} = \overline{\{1 \vee 1\}} = \overline{\{1\}} \cap \overline{\{1\}}$$

Logo, $\overline{\{1\}}$ é subconjunto de $\overline{\{0\}}$.

Assim sendo, os fechos possíveis satisfazendo tais condições são:

1) $\overline{\phi} = \overline{\{0\}} = \overline{\{1\}} = \overline{\{0,1\}} = \{0,1\}$

O único fechado é M.

2) $\overline{\phi} = \phi$; $\overline{\{0\}} = \overline{\{1\}} = \overline{\{0,1\}} = \{0,1\}$

Os fechados são ϕ e $\{0,1\}$.

3) $\overline{\phi} = \overline{\{1\}} = \{1\}$; $\overline{\{0\}} = \overline{\{0\ 1\}} = \{0,1\}$

Os fechados são $\{1\}$ e $\{0,1\}$.

4) $\overline{\phi} = \phi$; $\overline{\{1\}} = \{1\}$; $\overline{\{0\}} = \overline{\{0,1\}} = \{0,1\}$

Os fechados são ϕ, $\{1\}$, $\{0,1\}$.

Então, o mais fino fecho em M é o (4) e o mais fino para o qual $\overline{\phi} \neq \phi$ é o (3).

No capítulo III, observar-se-á que, quando F_G é gerado a partir de G, por meio da operação binária $\vee$, se $\overline{}$ é um fecho em

G e $\overline{\overline{\phi}} \neq \phi$, não existirá interpretação de F_G em M, cuja restrição a G seja contínua; o que não é conveniente.

Assim sendo, parece mais natural considerar, em M, o mais fino fecho tal que $\overline{\overline{\phi}} = \phi$, ou seja, o fecho em que os fechados são M e N = { 1}.

Teorema: 2.23: Se $\mathcal{M}$ é um fechado maximal de um conjunto E, sendo $-$, em E, fecho booleano, e se h é uma aplicação de E em M tal que h($\mathcal{M}$) = { 1} e h(E $-\mathcal{M}$) = {0}, então h preserva $\wedge\!\!\!\wedge$, $\vee\!\!\!\vee$, $\supset\!\!\!\supset$ e $=\!\!=$.

Demonstração - Sejam a e b elementos de E, tais que a $\vee\!\!\!\vee$ b seja subconjunto de $\mathcal{M}$. Se a e b não são elementos de $\mathcal{M}$, então { $-$ a, $-$ b} é subconjunto de $\mathcal{M}$ e, portanto, $-$ a $\wedge\!\!\!\wedge$ $-$ b é subconjunto de $\mathcal{M}$, o que é absurdo; logo, a é elemento de $\mathcal{M}$, ou b é elemento de $\mathcal{M}$, e , portanto, se h(a $\vee\!\!\!\vee$ b) ={ 1}, então h(a) =1 ou h(b) =1.

Por outro lado, se a e b são elementos de E tais que (a $\vee\!\!\!\vee$ b)$\cap\mathcal{M}$=ϕ, então a e b não são elementos de $\mathcal{M}$; logo, se h(a $\vee\!\!\!\vee$ b) ={ 0}, então h(a) = 0 e h(b) =0.

Raciocínio análogo para $\wedge\!\!\!\wedge$, $\supset\!\!\!\supset$ e $=\!\!=$.

CAPÍTULO III

FECHOS CARACTERIZADOS POR INTERPRETAÇÕES

Introdução

São introduzidas, neste capítulo, as definições de interpretações e M-interpretações de um conjunto F_G em estruturas de fecho, sendo tais F_G gerados, a partir de um conjunto não vazio G de geradores, por meio de operações criativas.

São então caracterizados os fechos menos finos, em F_G, que tornam as interpretações contínuas.

Na caracterização dos fechos, salientam-se quatro situações especiais, sobre as quais é feito um estudo mais detalhado; nestas situações são analizados também os casos em que, na geração de F_G, um operador de fecho está definido em G.

É abordado o problema de decidibilidade e também introduzido um outro tipo de interpretação.

No último parágrafo é apresentado um exemplo algébrico.

§ 1 - *Definições*

Considere-se um conjunto G de geradores não vazio. Seja F_G obtido criativamente, a partir de G, por meio da operação binária $\wedge$, ou da operação binária $\vee$, ou das operações binárias $\wedge$ e $\vee$, ou das operações binárias $\wedge$, $\vee$, $\supset$ e da operação singular $-$, ou da operação binária $\supset$, ou das operações binárias $\wedge$, $\vee$, $\supset$ e da operação singular $\neg$, ou por meio da operação singular $\neg$.

Definição 3.1 : Uma interpretação de F_G, é uma aplicação $h: F_G \to E$, sendo E um conjunto com um operador de fecho $\overline{}$, tal que:

a) Se F_G é obtido por meio da operação binária criativa $\wedge$, então o fecho em E é conjuntivo e $h(x \wedge y)$ é elemento de $h(x) \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} h(y)$ para todo par (x,y) de elementos de F_G.

b) Se F_G é obtido por meio da operação binária criativa $\vee$, então o fecho em E é disjuntivo e $h(x \vee y)$ é elemento de $h(x) \mathbin{\vee\!\!\!\vee} h(y)$, para todo par (x,y) de elementos de E.

c) Se F_G é obtido por meio das operações binárias criativas $\wedge$ e $\vee$, então o fecho em E é reticulado ou reticulado-distributivo e, em qualquer dos dois casos, $h(x \wedge y)$ e $h(x \vee y)$ são elementos de $h(x) \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} h(y)$ e $h(x) \mathbin{\vee\!\!\!\vee} h(y)$, respectivamente, para todo par (x,y) de elementos de F_G.

d) Se F_G é obtido por meio das operações binárias criativas $\wedge$, $\vee$ e $\supset$ e da operação singular criativa $-$, então o fecho em E é booleano e $h(x \wedge y)$, $h(x \vee y)$, $h(x \supset y)$ e $h(-x)$ são elementos de $h(x) \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} h(y)$, $h(x) \mathbin{\vee\!\!\!\vee} h(y)$, $h(x) \Supset h(y)$ e $= h(x)$, respectivamente, para elementos x e y quaisquer de F_G.

e) Se F_G é obtido por meio de operação binária criativa $\supset$, então o fecho em E é um fecho condicional e $h(x \supset y)$ é elemento de $h(x) \Supset h(y)$, para todo par (x,y) de elementos de F_G.

f) Se F_G é obtido por meio da operação singular criativa $\urcorner$, e das operações binárias criativas $\wedge$, $\vee$ e $\supset$, então o fecho em E é intuicionista e $h(\urcorner x)$, $h(x \wedge y)$, $h(x \vee y)$ e $h(x \supset y)$ são elementos de $\urcorner\!\!\urcorner\, h(x)$, $h(x) \mathbin{\wedge\!\!\!\wedge} h(y)$, $h(x) \mathbin{\vee\!\!\!\vee} h(y)$ e $h(x) \Supset h(y)$, respectivamente, para elementos a e b quaisquer de F_G.

g) Se F_G é obtido por meio da operação singular criativa $\neg$, então o fecho em E é um fecho negação e $h(\neg x)$ é elemento de $\overline{\neg} h(x)$, para todo elemento x de F_G.

Definição 3.2 : Uma M-interpretação de F_G é uma aplicação $h: F_G \to M$, sendo M o conjunto $\{0,1\}$, com fecho $\overline{\ }$, dado pelos fechados M e $N = \{1\}$, tal que as condições da definição anterior se verifiquem, ou seja, para elementos a e b quaisquer de F_G, respectivamente:

a) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$

b) $h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$

c) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$

$h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$

$h(-x) = - h(x)$

d) $h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$

$h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$

$h(x \supset y) = h(x) \supset h(y)$

e) $h(x \supset y) = h(x) \supset h(y)$

f) $h(\neg x) = \neg h(x)$

$h(x \wedge y) = h(x) \wedge h(y)$

$h(x \vee y) = h(x) \vee h(y)$

$h(x \supset y) = h(x) \supset h(y)$

g) $h(\neg x) = \neg h(x)$

Definição 3.3 : O fecho "$\sim$" é o menos fino fecho em F_G que torna as interpretações contínuas.

Teorema 3.1 : As interpretações de F_G preservam a pré ordem "$\prec$" associada no fecho $\sim$, em F_G.

Demonstração: Se $x \prec y$, então $h(x) \prec h(y)$.

Teorema 3.2 : O fecho $\tilde{\ }$, menos fino que torna as interpretações con- contínuas, coincide com o fecho $\bar{\ }$, em F_G, dado por: x é elemento de $\bar{S}$ see $h(x)$ é elemento de $\overline{h(S)}$, para toda interpretação h.

Demonstração - a) Se x é elemento de $\bar{S}$, então $h(x)$ é elemento de $\overline{h(S)}$, pela definição de $\tilde{\ }$.

b) Se $h(x)$ é elemento de $\overline{h(S)}$, para toda interpretação, tomando-se a interpretação identidade i em F_G com fecho $\tilde{\ }$, então $i(x) = x$, que é elemento de $\tilde{S}$.

Definição 3.4 : O fecho "$\sqcap$" é o menos fino fecho em F_G que torna as M-interpretações contínuas.

§ 2 - *Caracterizações*

2.1 - *Interpretações em Fechos Conjuntivos* - Considere-se um conjunto G de geradores, não vazio. Seja F_G obtido a partir de G, por meio da operação binária criativa $\wedge$.

Teorema 3.3 : Se "$\prec$" é a pré-ordem associada ao fecho $\tilde{\ }$, em F_G, então $x \prec y$ see $[y]$ é subconjunto de $[x]$.

Teorema 3.4 : Se "$\equiv$" é a equivalência associada ao fecho $\tilde{\ }$, em F_G, então $x \equiv y$ see $[x] = [y]$, para x e y elementos quaisquer de F_G.

Definição 3.5 : O fecho "$\sqcup$", em F_G, é dado por: x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ see $[x]$ é subconjunto de $\bigcup_{s \in S} [s]$.

Teorema 3.5 : O operador de fecho "$\sqcup$" é de tipo finito.

Demonstração - Se x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$, como o conjunto de geradores de x é finito e x é da forma $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$, então, para cada x_i, i variando de 1 a n, existe um elemento s_i de S, tal que x_i é gerador de s_i. Logo, x é elemento de $\overset{\sqcup}{\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}}$ e, portanto, $\sqcup$ é de tipo finito.

Assim sendo, x pertencer a $\overset{\sqcup}{S}$ é equivalente a existirem elementos $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de S, tais que $s_1 \wedge s_2 \wedge \ldots \wedge s_n \prec x$.

Teorema 3.6 : Os operadores $\sqcup$ e $\sim$, em F_G, coincidem.

a) O fecho $\sqcup$ é conjuntivo, pois, para todo par (x,y) de elementos de F_G, como $\overset{\sqcup}{\{x \wedge y\}} = \overset{\sqcup}{\{x,y\}}$, tem-se que $x \wedge y$ é elemento de $x \wedge y$.

b) Considerando-se a aplicação identidade $i: F_G \to F_G$, sendo $\sim$ e $\sqcup$, respectivamente, os fechos do domínio e do conjunto de valores de i, como i é uma interpretação de F_G, i é contínua e, portanto, todo fechado segundo o fecho $\sqcup$, o é também segundo o fecho $\sim$. Logo, $\sim$ é mais fino que $\sqcup$.

c) Prove-se que todas as interpretações de F_G são contínuas, relativamente ao fecho $\sqcup$.

De fato, considere-se uma interpretação h qualquer. Se x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$, então existem elementos $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de S, tais que $s_1 \wedge s_2 \wedge \ldots \wedge s_n \prec x$; portanto, pelo teorema 3.1, $h(s_1 \wedge \ldots \wedge s_n) \prec h(x)$ e, então, $h(x)$ é elemento de $\overline{h(S)}$. Logo, pelo teorema 2.2, h é contínua e o fecho $\sqcup$ é mais fino que $\sim$.

Teorema 3.7 : Os fechos $\sim$ e $\sqcap$ coincidem.

Demonstração - a) É imediato, pelas definições 3.3 e 3.4, que o fecho $\sim$ é mais fino que $\sqcap$.

b) Para que se prove que $\sqcap$ é mais fino que $\sim$, mostre-se que o fecho $\sqcap$ é mais fino que $\sqcup$.

Seja S um fechado qualquer de F_G, segundo o operador $\sqcup$, e seja J a família das M-interpretações h de F_G, tais que $h(S)$ é subconjunto de N. Demonstre-se que $S = \bigcap_{h \in J} h^{-1}(N)$.

Se x é elemento de S, então existem $s_1, \ldots, s_n$ elementos de S, tais que $s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \leqslant x$ e, portanto, $h(s_1 \wedge \ldots \wedge s_n) \leqslant h(x)$, para toda interpretação h; se h é elemento de J, como $h(s_1 \wedge \ldots \wedge s_n)$ é elemento de N, então $h(x) = 1$. Logo, x é elemento de $\bigcap\limits_{h \in J} h^{-1}(N)$.

Por outro lado, se x é elemento de $\bigcap\limits_{h \in J} h^{-1}(N)$, então h(x) é elemento de N, para toda interpretação h de J. Se x não é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$, então $[x]$ não é subconjunto de $\bigcup\limits_{s \in S} [s]$, ou seja, existe um gerador g de x que não é gerador de nenhum elemento de S; a interpretação h, definida por $h(g) = 0$ e $h(G-\{g\}) = \{1\}$, é elemento de J e $h(x) = 0$. Absurdo, logo, x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$.

Assim sendo, todo fechado de F_G, segundo $\sqcup$, o é também, segundo $\sqcap$.

2.2 - *Interpretações em Fechos Disjuntivos* - Seja F_G construído, a partir de um conjunto G não vazio, por meio da operação binária criativa $\vee$.

Teorema 3.8 : Se "$\leqslant$" é a pré-ordem associada ao fecho $\tilde{}$, em F_G, então $x \leqslant y$ see $[x]$ é subconjunto de $[y]$.

Teorema 3.9 : Se "$\equiv$" é a equivalência associada ao fecho $\tilde{}$, em F_G, então $x \equiv y$ see $[x] = [y]$.

Definição 3.6 : O fecho "$\sqcup$", em F_G é dado por: x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ see existe um elemento s, em S, tal que $s \leqslant x$.

Teorema 3.10 : O fecho $\sqcup$ em F_G, é de tipo finito, e coincide com o fecho $\tilde{}$.

Demonstração - a) O fecho $\sqcup$, em F_G, é disjuntivo, pois $x \vee y$ é elemento de $x \mathbin{\vee\!\!\vee} y$, para todo par (x,y) de elementos de F_G.

É também imediato que $\sqcup$ é de tipo finito.

b) Considerando-se F_G, com fecho $\sqcup$, como o conjunto de valores da interpretação identidade $i: F_G \to F_G$, sendo fecho do domínio o fecho $\sim$, é imediato que todo fechado de F_G, segundo $\sqcup$, é fechado de F_G, segundo $\sim$. Logo, $\sim$ é mais fino que $\sqcup$.

c) Se h é uma interpretação qualquer de F_G e x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$, então existe um elemento s do subconjunto S de F_G, tal que $s \prec x$; portanto, $h(s) \prec h(x)$ e, então, h(x) é elemento de h(S). Logo, h é contínua e $\sqcup$ é mais fino que $\sim$.

<u>*Teorema 3.11*</u> : Os fechos $\sim$ e $\sqcap$ coincidem.

Demonstração - a) É imediato que $\sim$ é mais fino que $\sqcap$.

b) Prove-se que $\sqcap$ é mais fino que $\sqcup$.

De fato, se S é um fechado de F_G, segundo o operador $\sqcup$, seja J o conjunto das M-interpretações h, tais que h(S) seja subconjunto de N.

Se x é elemento de S, então $s \prec x$, para algum elemento s de S; logo, se h é uma interpretação de J, então h(x) é elemento de N, ou seja, x é elemento de $\bigcap_{h\in J} h^{-1}(N)$. Portanto, S é subconjunto de $\bigcap_{h\in J} h^{-1}(N)$, que é um fechado de F_G, segundo o operador $\sqcap$.

Por outro lado, se x é elemento de $\bigcap_{h\in J} h^{-1}(N)$, então h(x) é elemento de N, para toda h, em J. Se x não for elemento de $\overset{\sqcup}{S}$, então $[s]$ não será subconjunto de $[x]$, para todo elemento s de S; logo, como, para cada elemento s de S, existirá um gerador a_s em $[s]$, que não será elemento de $[x]$, defina-se a M-interpretação k, tal que $k(y) = 1$ see y for um dos a_s ; então, h(S) será subconjunto de N e $h(x) = 0$, o que é absurdo. Assim sendo, x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ e, portanto, $\bigcap\limits_{h \in J} h^{-1}(N)$ é subconjunto de S.

Logo, todo fechado de F_G, segundo $\sqcup$, é fechado, segundo $\sqcap$.

2.3 - *Interpretações em Fechos Reticulados* - Seja F_G obtido, a partir de um conjunto G não vazio de geradores, por meio das operações binárias criativas $\wedge$ e $\vee$.

Sistema R : Considere-se o sistema R, dado, para x, y, u e v elementos de F_G, pela seguinte axiomática:

1) $x \preccurlyeq x$

2) $x \wedge y \preccurlyeq x$

3) $x \wedge y \preccurlyeq y$

4) $x \preccurlyeq x \vee y$

5) $y \preccurlyeq x \vee y$

R_1) $\dfrac{x \preccurlyeq y \quad y \preccurlyeq z}{x \preccurlyeq z}$

R_2) $\dfrac{u \preccurlyeq x \quad u \preccurlyeq y}{u \preccurlyeq x \wedge y}$

R_3) $\dfrac{u \preccurlyeq x \quad v \preccurlyeq x}{u \wedge v \preccurlyeq x}$

Teorema 3.12 : Se $x \preccurlyeq y$, então $h(x) \preccurlyeq h(y)$, para todo par (x,y) de elementos de F_G e toda interpretação h de F_G, sendo "$\preccurlyeq$" a pré-ordem induzida pelo fecho reticulado $\overline{}$, em E.

Definição 3.7 : A relação "$\leq$", em F_G, é dada por : $x \leq y$ see $x \preccurlyeq y$ é teorema no sistema R.

Definição 3.8 : O fecho $\sqcup$, em F_G, é dado por: x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ see existem elementos $s_1, s_2, \ldots, s_n$ em S, tais que $s_1 \wedge s_2 \wedge \ldots \wedge s_n \leq x$.

Teorema 3.13 : O fecho $\sqcup$ é de tipo finito e coincide com o fecho $\overline{}$, em F_G .

Demonstração - a) É análoga à do teorema 3.10, pois o fecho $\sqcup$ é um fecho reticulado e considerando-se a aplicação identidade $i: F_G \to F_G$, tem-se que todo fechado, segundo $\sqcup$, é fechado, segundo $^{-}$, em F_G .

b) Se x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$, então existem $s_1, s_2, \ldots, s_n$ elementos de S, tal que $h(s_1 \wedge \ldots \wedge s_n) \preccurlyeq h(s)$, para toda interpretação A. Logo, $h(x)$ é elemento de $\overline{h(S)}$, pois $\overline{h(s_1 \wedge \ldots \wedge s_n)}$ é subconjunto de $\overline{h(S)}$ e, portanto, toda interpretação é contínua segundo o fecho $\sqcup$, em F_G .

2.4 - *Interpretações em Fechos Reticulado - Distributivos*

Seja F_G obtido, a partir de um conjunto G não vazio de geradores, por meio das operações binárias criativas $\wedge$ e $\vee$.

Sistema D - Sendo x,y,u e v elementos de F_G ,o Sistema D é dado pela seguinte axiomática:

1) $x \preccurlyeq x$

2) $x \wedge y \preccurlyeq x$

3) $x \wedge y \preccurlyeq y$

4) $x \preccurlyeq x \vee y$

5) $y \preccurlyeq x \vee y$

6) $x \wedge (y \vee z) \preccurlyeq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

7) $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \preccurlyeq x \vee (y \wedge z)$

$R_1)$ $$\frac{x \preccurlyeq y \quad y \preccurlyeq z}{x \preccurlyeq z}$$

$R_2)$ $$\frac{u \preccurlyeq x \quad u \preccurlyeq y}{u \preccurlyeq x \wedge y}$$

$$R_3)\quad \frac{u \preccurlyeq x \quad v \preccurlyeq x}{u \vee v \preccurlyeq x}$$

Teorema 3.14 : Se $x \preccurlyeq y$, então $h(x) \preccurlyeq h(y)$, para todo par (x,y) de elementos de F_G e toda interpretação h de F_G , sendo "$\preccurlyeq$" a pré-ordem induzida em E, pelo fecho $\overline{}$,   que é um fecho reticulado-distributivo.

Definição 3.9 : A relação "$\leq$" , em F_G , é dada por: $x \leq y$ see $x \preccurlyeq y$ é teorema no Sistema D.

Definição 3.10 : O fecho $\sqcup$, em F_G , é dado por: x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ see existem elementos $s_1, s_2 ,\ldots, s_n$ em S, tais que $s_1 \wedge s_2 \ \ldots \wedge s_n \leq x$.

Teorema 3.15 : O fecho $\sqcup$ é de tipo finito e coincide com o fecho $\tilde{}$, em F_G .

Demonstração - a) O fecho $\sqcup$ é um fecho reticulado-distributivo, pois $a \wedge b$ é elemento de $a \wedge\!\!\backslash\, b$ e $a \vee b$ é elemento de $a \vee\!\!/\, b$, para todo par (a,b) de elementos de F_G e, além disso, $F_{G/\equiv}$ é um reticulado distributivo, com relação às operações $\wedge$ e $\vee$ nele induzidas, segundo a relação de aquivalência "$\equiv$", associada ao fecho.

De fato, através do Sistema D, tem-se que $\overline{\{x \wedge (y \vee z)\}} = \overline{\{(x \wedge y) \vee (x \wedge z)\}}$ e $\overline{\{(x \vee y) \wedge (x \vee z)\}} = \overline{\{x \vee (y \wedge z)\}}$, o que implica na validade das propriedades distributivas, em $F_{G/\equiv}$, das operações $\wedge$ e $\vee$.

b) Como em demonstrações análogas, considerando-se a aplicação identidade $i: F_G \to F_G$, tem-se que o fecho $\sqcup$ é menos fino que $\tilde{}$.

c) Toda interpretação de F_G, com fecho $\sqcup$, é contínua. Logo, $\sqcup$ é mais fino que $\tilde{}$.

Teorema 3.16 : Os fechos $\sqcap$ e $\sim$, em F_G , coincidem.

Demonstração - a) Seja C um fechado de F_G , segundo o fecho $\sqcup$, que é a imagem inversa de um fechado D de E algebrizado, segundo a interpretação h; D é filtro de E, pois o fecho do filtro gerado, em E, só pode ser mais fino que o fecho reticulado-distributivo dado em E. Assim sendo, C também seria um fechado quando interpretassemos F_G nos reticulados distributivos com fecho do filtro gerado.

Para cada filtro primo P que contém D, defina-se a aplicação k_p: $E \to M$ por $k_p(P) = \{1\}$ e $k_p(E-P) = \{0\}$; a aplicação k_p o h é uma M-interpretação de F_G e $(k_p \text{ o } h)^{-1}(\{1\})$ é um fechado de F_G, segundo o fecho $\sqcap$.

Como $C = \bigcap\limits_{P \supset D} C_p$, tem-se o resultado procurado.

2.5 - *Interpretações em Fechos Booleanos* — Seja F_G obtido, a partir de um conjunto G não vazio, por meio da operação singular criativa $-$ e das operações binárias criativas $\wedge$, $\vee$ e $\supset$.

Teorema 3.17 : Os fechos $\sim$ e $\sqcap$, em F_G, coincidem.

Seja D um fechado elementar de F_G segundo o operador $\sim$, ou seja, existe uma interpretação h: $F_G \to E$, E com fecho $\overline{}$, booleano , tal que $h^{-1}(C) = D$, sendo C um fechado próprio de E.

Pelo teorema 2.20, $C = \bigcap\limits_{i \in \vartheta} M_i$, sendo M_i fechados maximais de E, segundo o operador $\overline{}$.

Para cada M_i , defina-se a função k_i: $E \to M$, por: $k_i(x) = 1$, se x é elemento de M_i e $k_i(x) = 0$, se x não é elemento de M_i . Pelo teorema 2.23 , as aplicações k_i preservam $\wedge$, $\vee$, $\supset$ e $-$.

Considerem-se as aplicações $\ell_i = k_i$ o h , para cada i de ϑ.

Tais aplicações são M-interpretações e:

$$\begin{tikzcd} F_G \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\ell_i"'] & & E \arrow[dl, "k_i"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$$\bigcap_{i\in\vartheta} \ell_i^{-1}(N) = \bigcap_{i\in\vartheta} h^{-1}(M_i) = h^{-1}\Big(\bigcap_{i\in\vartheta^{-1}} M_i\Big) = h^{-1}(C) = D.$$

Assim sendo, D é um fechado de F_G, segundo o operador $\sqcap$.

Logo, todo fechado de F_G, que é intersecção de fechados elementares, segundo $\sim$, é também fechado, segundo $\sqcap$.

Assim sendo, os fechos $\sim$ e $\sqcap$ coincidem.

Definição 3.11 : O fecho $\sqcup$, em F_G, é dado por: x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ see existe uma sequência finita $x_1, x_2, \dots, x_n = x$ tal que, para cada i, x_i é elemento de S, ou x_i é elemento de D, ou existem j,k<i, tais que $x_k = x_j \supset x_i$, sendo D o conjunto das fórmulas demonstráveis do Cálculo Proposicional Clássico.

Teorema 3.18 : Se x e $x \supset y$ são elementos de $\overset{\sqcup}{S}$, então y é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ e, se y é elemento de $\overset{\sqcup}{S\cup\{x\}}$ então $x \supset y$ é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$.

Teorema 3.19 : O fecho $\sqcup$ é de tipo finito e os fechos $\sqcup$ e $\sim$ coincidem, em F_G.

Demonstração - a) Como o fecho $\sqcup$, em F_G, é booleano, considere-se a aplicação identidade $i: F_G \to F_G$ e mostre-se que todo fechado de F_G, segundo $\sqcup$, o é também, segundo $\sim$.

b) Mostre-se que toda interpretação de F_G é contínua, segundo o fecho $\sqcup$.

De fato, se $h: F_G \to E$ é uma interpretação e C é um fechado de E, segundo o fecho booleano $\overline{}$, então x é elemento de $\overset{\sqcup}{h^{-1}(C)}$ see existe uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n = x$, nas condições da definição 3.11 : se x_i é elemento de $h^{-1}(C)$, está demonstrado que $h^{-1}(C)$ é um fechado em F_G ; se x_i é elemento de D, então pela observação 2.2 $h(x_i)$ é elemento de $\bar{\phi}$ e, portanto, como $\bar{\phi}$ é subconjunto de C, x_i é elemento de $h^{-1}(C)$; se x_j e $x_k = x_j \supset x_i$ são elementos de $h^{-1}(C)$, então $h(xj)$ e $h(x_j \supset x_i)$ são elementos de C e, portanto, x_i é elemento de $h^{-1}(C)$. Assim sendo, $\sqcup$ é mais fino que $\sim$.

Portanto ,os fechos $\sqcup$ e $\sim$ coincidem e pode-se interpretar em fechos booleanos $\sim$ quaisquer, mesmo que não sejam de tipo finito.

<u>*Teorema 3.20*</u> : $\overset{\sqcap}{\Phi} = \bigcap\limits_{h\in I} h^{-1}(N)$

Ou seja, x é elemento de $\overset{\sqcap}{\phi}$ see $h(x) = 1$, para toda interpretação h de I.

Observe-se que $\tilde{\phi} = \overset{\sqcap}{\phi} = \overset{\sqcup}{\phi}$ e que $\tilde{\phi}$ é não vazio.

<u>*Definição 3.12*</u> : Um elemento x de F_G diz-se uma tautologia see x é elemento de $\tilde{\phi}$.

<u>*Teorema 3.2*</u> : Dada a pré-ordem "$\prec$" associada ao fecho $\sim$, em F_G , $x \prec y$ é equivalente a $-x \vee y$ ser elemento de $\tilde{\phi}$, é equivalente a $x \supset y$ ser elemento de $\tilde{\phi}$ e é equivalente a $-h(x) \vee h(y) = 1$, para toda M-interpretação h.

<u>*Teorema 3.22*</u> - Dada a equivalência "$\equiv$" associada ao fecho $\sim$, em F_G , $x \equiv y$ é equivalente a $-x \vee y$ e $-y \vee x$ serem elementos de $\tilde{\phi}$ e é equivalente a $x \supset y$ e $y \supset x$ serem elementos de $\tilde{\Phi}$.

<u>*Teorema 3.23*</u> - Se x e y são elementos quaisquer de F_G e A é um subconjunto de F_G , então y é elemento de $\widetilde{\{x, x \supset y\}}$ e, se y é elemento de $\widetilde{A \cup \{x\}}$ então $x \supset y$ é elemento de $\tilde{A}$.

2.6 - *Interpretações em Fechos Condicionais* — Seja F_G construído a partir de um conjunto G não vazio de geradores, por meio da operação binária criativa "$\supset$".

Sistema C : Considere-se o sistema C, dado pela seguinte axiomática, sendo x, y e z elementos de F_G:

1) $x \supset (y \supset x)$

2) $(x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z))$

R) $\dfrac{x,\ x \supset y}{y}$

Definição 3.13 - O fecho $\sqcup$, em F_G , é dado por: x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ see existe uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n = x$, tal que, para cada x_i, x_i é elemento de S, ou x_i é axioma de C, ou x_i é obtido de elemento anterior da sequência pela regra R.

Teorema 3.24 : Se x e y são elementos de F_G e A é um subconjunto de F_G , então y é elemento de $\overset{\sqcup}{\{x, x \supset y\}}$ e, se y é elemento de $\overset{\sqcup}{A \cup \{x\}}$ então $x \supset y$ é elemento de $\overset{\sqcup}{A}$.

Teorema 3.25 - O fecho $\sqcup$ é de tipo finito e coincide com o fecho $\sim$, em F_G .

Demonstração - O fecho $\sqcup$, em F_G, é um fecho condicional, pois b é elemento de $a \supset b$, para todo par (a,b) de elementos de F_G .

Se $i\colon F_G \to F_G$ é a função identidade, como no teorema 3.10, é imediato que $\sim$ é mais fino que $\sqcup$, em F_G .

b) Sejam $h\colon F_G \to E$ uma interpretação qualquer de F_G e D um fechado de E.

Se x é elemento de $\overset{\sqcup}{h^{-1}(D)}$, então existe uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n = x$, nas condições da definição 3.11 . Se x_i é elemento de $h^{-1}(D)$, esta demonstrado que $h^{-1}(D)$ é um fechado de F_G ; se x_i é axioma de C como $\overline{}$ é um fecho condicional em E, então $h(x_i)$ é elemento de $\bar{\phi}$ e de D, para qualquer interpretação h, logo x_i é elemento de $h^{-1}(D)$; se x_i é obtido pela regra R, então existem $j,k < i$, tal que $x_k = x_j \supset x_i$, com x_j e x_k elementos de $h^{-1}(D)$ e, portanto, h(xj) e $h(x_j \supset x_i)$ são elementos de D e x_i é elemento de $h^{-1}(D)$.

Logo, toda interpretação h de F_G é contínua, segundo o fecho $\sqcup$.

Teorema 3.26 - A pré-ordem associada ao fecho $\bar{}$, em F_G , é $x \precsim y$ see $x \supset y = \tilde{\phi}$; a equivalência associada é $x \equiv y$ see $x \supset y = y \supset x = \bar{\phi}$.

2.7 - *Interpretações em Fechos Intruicionistas* — Seja F_G obtido, a partir de um conjunto G não vazio de geradores, por meio das operações binárias criativas "$\wedge$", "$\vee$" e "$\supset$" e da operação singular criativa "7".

Sistema T : Considere-se o sistema T dado pela axiomática que segue, sendo a, b, e c elementos de F_G:

1) $a \supset (b \supset a)$

2) $(a \supset b) \supset ((a \supset (b \supset c)) \supset (a \supset c))$

3) $a \supset (b \supset a \wedge b)$

4) $a \wedge b \supset a$

5) $a \wedge b \supset b$

6) $a \supset a \vee b$

7) $b \supset a \vee b$

8) $(a \supset c) \supset ((b \supset c) \supset (a \vee b \supset c))$

9) $(a \supset b) \supset ((a \supset 7\, b) \supset 7\, a)$

10) $7 a \supset (a \supset b)$

R) $\dfrac{a,\ a \supset b}{b}$

Defina-se um fecho $\sqcup$, em F_G, como no caso anterior. O fecho $\sqcup$ é intuicionista, em F_G.

São válidos, com as devidas adptações, os teoremas 3.24, 3.25 e 3.26.

2.8 - Interpretações em fechos Negação — Seja F_G gerado a partir de um conjunto G não vazio de geradores por meio da operação singular criativa $\neg$.

Definição 3.14 - A relação "$\preccurlyeq$", em F_G é dada por: $a \preccurlyeq a \preccurlyeq \neg\neg a \preccurlyeq \neg\neg\neg\neg a \preccurlyeq \cdots$ (número par de aplicações de $\neg$) a; a relação "$\equiv$", em F_G é dada por: $\neg b \equiv \neg\neg\neg b \equiv \neg\neg\neg\neg\neg b \equiv \ldots$(número ímpar de aplicações de $\neg$)b.

Definição 3.15 - O fecho $\sqcup$, em F_G, é dado por: $\overset{\sqcup}{S} = E$, se existe algum elemento a de G, tal que a ocorre em S com número par e ímpar de $\neg$; caso contrário, $\overset{\sqcup}{S}$ é o conjunto formado pelos elementos x de F_G, tais que existem elementos s em S, com $s \preccurlyeq x$.

Teorema 3.27 : O fecho $\sqcup$, em F_G, é de tipo finito e coincide com o fecho $\bar{\ }$.

Demonstração - a) O fecho $\sqcup$ é um fecho negação em F_G, pois a é elemento de $\overline{\overline{a}}$ a, para todo a em F_G.

Por meio da aplicação identidade $i: F_G \to F_G$, é imediato que o fecho $\bar{\ }$ é mais fino que $\sqcup$, em F_G.

b) Se x é elemento de $\overset{\sqcup}{h^{-1}(C)}$, sendo $\overset{\sqcup}{h^{-1}(C)} \neq E$, com C fechado de E e h interpretação qualquer, então existe um elemento s de $h^{-1}(C)$ tal que $s \preccurlyeq x$; logo, $h(s) \preccurlyeq h(x)$ e h(x) é elemento de C, sendo h portanto, uma aplicação contínua, segündo o fecho $\sqcup$, em F_G.

§ 3 - *Sôbre os Fechos Caracterizados*

3.1 - O fecho $\tilde{}$, em F_G, que é o menos fino fecho que torna as interpretações de F_G contínuas, coincide com o fecho $\sqcup$, definido em cada um dos casos analisados no parágrafo anterior.

O fecho $\tilde{}$, em F_G, é então de tipo finito, em todos os casos citados.

Além disso, se F_G é gerado por meio da operação $\wedge$, então $\tilde{}$ é um fecho conjuntivo em F_G; se F_G é gerado através da operação $\vee$, então $\tilde{}$ é um fecho disjuntivo em F_G; se F_G é gerado através das operações $\wedge$ e $\vee$, tendo sido considerado E com fecho reticulado, então $\tilde{}$ é um fecho reticulado em F_G; se F_G é gerado através das operações $\wedge$ e $\vee$, tendo sido considerado E com fecho reticulado - distributivo, então $\tilde{}$ é um fecho reticulado distributivo em F_G; se F_G é gerado através das operações $\wedge$, $\vee$, $\supset$ e $-$, então $\sim$ é um fecho booleano em F_G; se F_G é gerado através da operação $\supset$, então $\tilde{}$ é um fecho condicional em F_G; se F_G é gerado por meio das operações $\wedge$, $\vee$, $\supset$ e $\neg$, então $\sim$ é um fecho intuicionista em F_G; se F_G é gerado através da operação $\neg$, então $\sim$ é um fecho negação em F_G.

Assim sendo, todos os resultados do Capítulo II, referentes a tais tipos de fecho, aplicam-se ao fecho $\tilde{}$, em F_G, em cada caso analisado.

Teorema 3.28: Interpretar F_G em um conjunto E com fecho $\tilde{}$, é o mesmo que interpretar F_G na estrutura algebrizada associada a E.

Demonstração: De fato, h é uma interpretação de F_G em E se -

$\pi \circ h$ é um morfismo, sendo π a projeção canônica de E em $E/\equiv$.

As imagens inversas de fechados de $E/\equiv$, segundo πoh, correspondem às imagens inversas de fechados de E, segundo h: $h^{-1}(C) = (\pi \circ h)^{-1}(\pi(C))$. Logo, os fechados de E e $E/\equiv$ se correspondem biunívocamente, por π.

Teorema 3.29: A equivalência $\equiv$ associada ao fecho$^{\sim}$, em F_G, coincide com a equivalência tirada do conjunto das interpretações de F_G (Definição 1.3 e observação 1.1)

Demonstração - Para facilidade, pelo teorema anterior, sejam as interpretações h consideradas com contra-domínio nos fechos algebrizados.

a) Se $x \equiv y$ então $\widetilde{\{x\}} = \widetilde{\{y\}}$; logo, h (x) é elemento de $\overline{\{h(y)\}}$ e h(y) é elemento de $\overline{\{h(x)\}}$. Portanto, $\overline{\{h(x)\}} = \overline{\{h(y)\}}$, o que prova que $h(x) = h(y)$, para toda interpretação h.

b) Se $h(x) = h(y)$, para toda interpretação h, suponha-se que $\widetilde{\{x\}} \neq \widetilde{\{y\}}$.

Então, existe um fechado elementar C de F_G, tal que x, por exemplo, é elemento de C e y não é elemento de C; logo, x é elemento de $h^{-1}(D)$ e y não é elemento de $h^{-1}(D)$, sendo D um fechado do conjunto imagem de h. Então h(x) é elemento de D e h(y) não é elemento de D, o que é uma contradição.

Assim sendo, $\widetilde{\{x\}} = \widetilde{\{y\}}$, quando $h(x) = h(y)$ para toda interpretação h.

3.2 - *Geração de Fechos por Interpretações* - Através de outro ponto de vista, é ainda possível obter resultados análogos aos do § 2.

Considere-se um sub conjunto J do conjunto de interpretações de F_G, sendo F_G gerado criativamente a partir de G, por qualquer uma das maneiras descritas no § 1.

Seja $\equiv_J$ a relação de equivalência definida em F_G (definição 1.3), através das interpretações h do conjunto J.

Definição 3.16: O fecho $\tilde{J}$, em F_G, é o menos fino fecho que torna as interpretações do conjunto J contínuas.

Teorema 3.30: A pré ordem $<_J$ em F_G associada ao fecho $\tilde{J}$ é tal que $x <_J y$ é equivalente $h(x) < h(y)$, para toda interpretação h de J.

Teorema 3.31: A relação de equivalência $\equiv_J$ é a relação de equivalência induzida pelo fecho $\tilde{J}$, em F_G.

Demonstração - Prove-se que $\widetilde{\{x\}} = \widetilde{\{y\}}$ see $x \equiv_J y$, para qualquer par (x,y) de elementos de F_G, considerando-se as interpretações nas estruturas algebrizadas.

Análoga à demonstração do teorema 3.29

Observação 3.1: O fecho $\tilde{}$, em F_G, é um fecho conjuntivo ou disjuntivo, ou reticulado, ou reticulado-distributivo, ou fecho booleano, ou condicional, ou intuicionista, ou fecho negação, dependendo das operações pelas quais F_G foi gerado, a partir de G.

Por esse processo, a partir de J, subconjunto de I, geram-se os F_G ; J (Capítulo I - §1), que são estruturas com operador de fecho $\tilde{}$, induzido pelo fecho $\tilde{}$, de F_G. Tais $F_{G;J}$ são inf-reticulados, sup-reticulados, reticulados, reticulados distributivos, Álgebras de Boole, Álgebras de Heyting, ou Álgebras de Hilbert (Capítulo II - § 3), conforme o fecho $\tilde{}$,em F_G, seja respectivamente um fecho conjuntivo,disjuntivo, reticulado, reticulado - distributivo, booleano, condicional, ou intuicionista, o que depende do modo pelo qual F_G foi gerado, a partir de G (§ 1).

Os $F_{G;J}$ são, então, estruturas algebrizadas com operações definidas em suas classes e com fecho $\tilde{}$, de tipo finito.

§ 4 - *Quando M é Matriz Separadora*

4.1 - No § 2 foi demonstrado em que casos os fechos $\tilde{}$ e $\urcorner$, em F_G, coincidem. É conveniente então salientar, que quando F_G é obtido criativamente a partir de um conjunto não vazio G, por meio da operação $\wedge$, ou por meio da operação $\vee$, ou das operações $\wedge$ e $\vee$, ou por meio das operações $\wedge, \vee$, $\supset$ e $\urcorner$, interpretar os elementos de F_G em E, com fecho conjuntivo, ou disjuntivo, ou reticulado-distributivo, ou booleano, respectivamente, é equivalente a interpretar F_G em M com fecho dado pelos fechados M e N, no sentido do fecho menos fino que torna as interpretações contínuas.

Assim sendo, nos casos salientados, os fechados elementares de F_G são do tipo $h^{-1}(N)$, sendo h uma M-interpretação qualquer de F_G; os fechados de F_G são conjuntos do tipo $\bigcap_{h \in J} h^{-1}(N)$, sendo J um subconjunto do conjunto das M-interpretações.

Além disso, também são válidos os seguintes teoremas:

Teorema 3.32: O operador $\tilde{}$, em F_G, é dado por: x é elemento de $\tilde{S}$ see $h(x) = 1$, quando h é uma interpretação de F_G, tal que h(S) é subconjunto de N.

Demonstração - a) Se x é elemento de $\tilde{S}$ e h(S) é subconjunto de N, então S é subconjunto de $h^{-1}(N)$, que é um fechado em F_G; logo, $h^{-1}(N)$ contém $\bar{S}$ e, portanto, $h(x) = 1$

b) Se $h(x) = 1$ para toda M-interpretação h, tal que $h(S)$ é subconjunto de N, então x é elemento de $\bigcap_{h \in J} h^{-1}(N)$, sendo J o conjunto de tais interpretações. Logo, x é elemento de $\tilde{S}$

Teorema 3.33: Se I é o conjunto das M-interpretações de F_G, então $\tilde{\Phi} = \bigcap_{h \in I} h^{-1}(N)$.

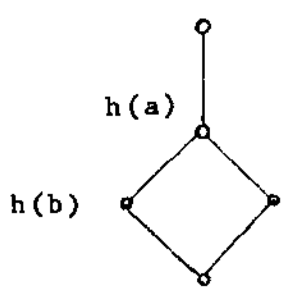
Observação 3.2: Como exemplo de que nos casos não salientados interpretar F_G em E qualquer não é equivalente a interpretar F_G em M, no sentido citado, considere-se o caso em que F_G é gerado através da operação $\supset$ e E tem fecho condicional: verifique-se que existe algum elemento x de F_G, que não é elemento de $\tilde{\Phi}$ e cuja imagem através de qualquer M-interpretação é elemento de N.

De fato, seja $x = ((a \supset b) \supset a)$.

Tem-se que, para qualquer M-interpretação h, $h(x) = 1$, ou seja, x é elemento de $\overline{\Phi}$.

Por outro lado, considerando-se o reticulado distributivo, com fecho de filtro gerado, em que $a \supset b$ é o maior x tal que $a \wedge x \leq b$, o fecho é condicional e $\overline{\Phi}$ é o último elemento.

Considere-se uma interpretação h, conforme o esquema:



Para tal interpretação h, $h((a \supset b) \supset a) \supset a = h(a)$ e $h(x)$ não é elemento de $\bar{\Phi}$.

Logo, $((a \supset b) \supset a) \supset a$ não é elemento de $\bar{\Phi}$.

3.2-*Funções Associadas* - Toda interpretação é univocamente determinada por sua restrição a G.

Pelo capítulo I - § 2, o significado dual de qualquer elemento de F_G, induzido pelas interpretações, pode ser encarado como $(\sigma(x))(f_h) = h_f(X)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f_h"'] & F_G \arrow[d, "h_f"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Por exemplo, se F_G foi obtido, a partir de G, por meio da operação criativa $\wedge$ e o elemento x de F_G é $x = a \wedge (b \wedge c)$, então $(\sigma(a \wedge (b \wedge c))(f_h) = h_f \ (a \wedge (b \wedge c)) = f(a) \wedge f(b) \wedge f(c)$.

Por outro lado, a aplicação $\sigma : x \to \sigma(x)$, definida em F_G, é tal que $\sigma(x) = \sigma(y)$ see x e y têm o mesmo significado dual.

Então, $\sigma(x)$ é uma aplicação de M^G em M, ou seja, $\sigma(x)$ é elemento de M^D, sendo $D = M^G$; algébricamente, M tem a operação $\wedge$ ou a operação $\vee$,ou as operações $\wedge$ e $\vee$, ou as operações $\wedge$, $\vee$, $\supset$ e $-$, dependendo do modo pelo qual F_G tenha sido gerado, a partir de G.

Como M^D é um produto cartesiano e $\sigma(F_G)$ é subconjunto de M^D , nele podem ser definidas a operação $\wedge$, a operação $\vee$, as operações $\wedge$ e $\vee$, ou as operações $\wedge$, $\vee$, $\supset$ e $-$,também dependendo de como F_G foi gerado:

a) $\sigma(x \wedge y) = \sigma(x) \wedge \sigma(y)$

b) $\sigma(x \vee y) = \sigma(x) \vee \sigma(y)$

c) $\sigma(x \supset y) = \sigma(x) \supset \sigma(y)$

d) $\sigma(-x) = -\sigma(x)$

Assim sendo, σ é sempre um homorfismo de F_G em M^D, independentemente das operações que tenham gerado F_G, e $\sigma(F_G)$ é uma sub-estrutura de M^D.

Além disso, como os elementos de F_G, cuja imagem através de σ é a mesma, são equivalentes segundo a relação $\equiv$, tem-se que L_G é isomorfo a $\sigma(F_G)$, ou seja L_G é um sub-produto de M^D.

Observação 3.3 - Se em vez do conjunto I de interpretações, for considerado um sub-conjunto J qualquer de I, o procedimento é análogo: consideram-se apenas as interpretações h de J e as f_h tais que h_f seja elemento de J; portanto, são obtidos sub-produtos de M^E, sendo E subconjunto de D.

4.3 - *Geração de Categorias* - Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{F}$ as categorias das estruturas com operação binária $\wedge$, com operação binária $\vee$, com operações binárias $\wedge$ e $\vee$, e com operação singular $-$ e binárias $\wedge$, $\vee$ e $\supset$, respectivamente; sejam $\mathcal{J}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{A}$ as categorias dos $F_{G;J}$ (Capítulo I - § 1, Capítulo III - § 3), obtidos a partir de F_G, que é gerado, respectivamente, por meio da operação $\wedge$, da operação $\vee$, das operações $\wedge$, $\vee$, $\supset$, e $-$; sejam as subcategorias $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$, e $\mathcal{V}$, constituídas, respectivamente, pelos objetos de $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{F}$ que são separados por M e pelos morfismos destas categorias cujos domínio e contra-domínio são tais objetos.

Observe-se que os F_G são as estruturas livres das categorias $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$ e $\mathfrak{F}$; os L_G são as estruturas livres das categorias $\mathcal{J}$, $\mathcal{S}$, $\mathfrak{D}$ e $\mathcal{A}$ (Capítulo I - § 3).

<u>*Teorema 3.34*</u>: M é matriz separadora da categoria dos inf-reticulados.

Demonstração - Considere-se um inf-reticulado A, sendo a e b elementos distintos de A. Se $a < b$, seja F o conjunto formado pelos elementos x de A, tais que $b \leq x$ e defina-se uma função h por $h(F) = \{1\}$ e $h(A-F) = \{0\}$; se $a \nleq b$, seja F o conjunto formado pelos elementos x de A tais que $a \leq x$ e defina-se uma função h por $h(F) = \{1\}$ e $h(A-F) = \{0\}$. A aplicação h é um morfismo da categoria.

Assim sendo, existe sempre um morfismo h, na categoria dos inf-reticulados, tal que h(a) é distinto de h(b), quando a e b são elementos distintos de um inf-reticulado qualquer.

<u>*Teorema 3.35*</u>: M é matriz separadora da categoria dos sup-reticulados.

Demonstração - Considere-se um sup-reticulado E, sendo x e y elementos distintos de E.

Como existe algum filtro de E contendo x não contendo y, seja $(\mathfrak{F}_i)_{i \in \mathcal{J}}$ a família de tais filtros e $P = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} \mathfrak{F}_i$. Tem-se que P é filtro e y não é elemento de P. Prove-se que P é primo.

De fato, se a e b são elementos de E, tais que $a \vee b$ é elemento de P e a e b não são elementos de P, seja P_a o filtro gerado por $P \cup \{a\}$ e P_b o filtro gerado por $P \cup \{b\}$; como x é elemento de P_a e P é subconjunto próprio de P_a, tem-se que y é elemento de P_a; análogamente, y é elemento de P_b e como y é elemento de $P_a \cap P_b$, tem-se que $y \geq a$ e $y \geq b$, ou seja, $y \geq a \vee b$; logo, y é elemento de P, o que é absurdo.

Então, se $a \vee b$ é elemento de P, então a é elemento de P, ou b é elemento de P.

Seja, então, a aplicação $h: E \to M$, dada por $h(P) = \{1\}$ e $h(E-P) = \{0\}$. Tem-se que $h(x) = 1$ e $h(y) = 0$; além disso, h é um morfismo, pois se $a \vee b$ é elemento de P, então $h(a \vee b) = 1 = h(a) \vee h(b)$, e se $a \vee b$ não é elemento de P, então $h(a \vee b) = 0 = h(a) \vee h(b)$.

M é, portanto, matriz separadora da categoria dos sup-reticulados.

<u>*Teorema* 3.36</u>: M é matriz separadora da categoria dos reticulados distributivos.

Demonstração - Considere-se um reticulado distributivo A, sendo x e y elementos distintos de A.

Como existe algum filtro em E que contém x e não contém y, seja $\mathfrak{F}$ a família de tais filtros:

Considere-se a cadeia $\mathcal{C}$ contida em $\mathfrak{F}$ e seja $C = \bigcup \mathcal{C}$.

Se u é elemento de C e $u \leq v$, então v é elemento de C; se u e v são elementos de C, então u e v pertencem a algum elemento D de $\mathcal{C}$ e, portanto, $u \wedge v$ é elemento de C. Logo, $\mathfrak{F}$ tem elemento maximal, que será indicado por P.

Seja $a \vee b$ elemento de P e suponha-se que a e b não pertencem a P. Seja P_a, então, o filtro gerado por $P \cup \{a\}$ e P_b o filtro gerado por $P \cup \{b\}$; tem-se que y é elemento de $P_a \cap P_b$ e, portanto, $y \geq p \wedge a$ e $y \geq q \wedge b$, com p e q elementos de P. Fazendo-se $r = p \wedge q$, tem-se $y \geq r \wedge a$ e $y \geq r \wedge b$, o que implica $y \geq r \wedge (a \vee b)$, ou seja, y é elemento de P, o que é uma contradição.

 Logo P, é primo.

Seja, então, a aplicação $h: A \to M$, dada por $h(P) = \{1\}$ e $h(A-P) = \{0\}$. Tem-se que $h(x) = 1$ e $h(y) = 0$

A aplicação h é um homorfismo, pois:

1) Se $a \vee b$ é elemento de P, então $h(a \vee b) = 1 = h(a) \vee h(b)$.

a) Se a,b são elementos de P, então $h(a \wedge b) = 1 = h(a) \wedge h(b)$

b) Se a é elemento de P e b não é elemento de P, então $a \wedge b$ não é elemento de P e $h(a \wedge b) = 0 = h(a) \wedge h(b)$.

2) Se $a \vee b$ não é elemento de P então a,b e $a \wedge b$ não são elementos de P, $h(a \vee b) = 0 = h(a) \vee h(b)$ e $h(a \wedge b) = 0 = h(a) \wedge h(b)$.

Teorema 3.37 : M é matriz separadora da categoria das Álgebras de Boole.

Demonstração - Análoga à do teorema anterior, sendo definida a aplicação $h: A \to M$ por $h(P) = \{1\}$ e $h(A-P) = \{0\}$.

A aplicação h é um morfismo, pois: se $-x$ é elemento de P, então x não é elemento de P, já que x ser elemento de P implica que $x \wedge -x = 0$ é elemento de P, o que é uma contradição; se $-x$ não é elemento de P, então x é elemento de P, já que $x \vee -x = 1$ é elemento de P; logo, $h(-x) = -h(x)$.

Teorema 3.38: As categorias $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{A}$ coincidem, respectivamente, com as categorias dos inf-reticulados, dos sup-reticulados, dos reticulados distributivos e das Álgebras de Boole.

Demonstração - Pelos teoremas 2.15 a 2.18, 2.22 a 2.23, os $F_{G;J}$ são inf-reticulados, sup-reticulados, reticulados distributivos, ou Álgebras de Boole, conforme os F_G tenham sido gerados, respectivamente, por meio da operação $\wedge$, da operação $\vee$, das operações $\wedge$ e $\vee$, ou das operações $-, \wedge, \vee$ e $\supset$. Logo, as categorias $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{A}$ são subcategorias, respectivamente, das categorias dos inf-reticulados, dos sup-reticulados, reticulados distributivos e Álgebras de Boole.

Por outro lado, as categorias dos inf-reticulados, sup-reticulados, reticulados distributivos e Álgebras de Boole, pelos teoremas anteriores são subcategorias das categorias $\mathcal{NC}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ que, por sua vez, pelo teorema 1.3, coincidem, respectivamente, com as categorias $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{A}$.

Assim sendo, dependendo das operações através das quais F_G é gerado, $F_{G;J}$ é um inf-reticulado, um sup-reticulado, um reticulado distributivo, ou uma Álgebra de Boole; por outro lado, dado um inf-reticulado, um sup-reticulado, um reticulado distributivo, ou uma Álgebra de Boole, existem conjuntos G e J tais que a referida estrutura seja $F_{G;J}$.

4.4 - <u>*Em G está definido um operador de fecho*</u> O conjunto F_G pode ser gerado, a partir de um conjunto G não vazio, por meio de operações criativas, estando definido em G um operador de fecho^{-}.

Serão consideradas as interpretações de F_G cujas restrições a G são contínuas.

<u>*Definição 3.17*</u>: O fecho$^{\sim}$, em F_G, é o menos fino fecho que torna contínuas as interpretações de F_G, que restritas a G são contínuas.

<u>*Definição 3.18*</u>: O fecho $^{\frown}$, em F_G, é o menos fino fecho que torna

contínuas as M-interpretações de F_G, que restritas a G são contínuas.

São válidos resultados equivalentes aos casos em que F_G é gerado a partir de um conjunto de geradores, onde não está definido um operador de fecho.

a) Considere-se F_G obtido , a partir de G, por meio da operação binária $\wedge$.

<u>*Teorema* 3.39</u>: Se S é um subconjunto qualquer de F_G, então x é elemento de $\tilde{S}$ see $\overline{[x]}$ é subconjunto de $\overline{\bigcup_{s \in S} [s]}$.

<u>*Teorema* 3. 40</u>: Se x e y são elementos quaisquer de F_G, então $x \leqslant y$ see $\overline{[y]}$ é subconjunto de $\overline{[x]}$ e $x \equiv y$ see $\overline{[x]} = \overline{[y]}$.

<u>*Teorema* 3.41</u>: Se o operador $\bar{\ }$, em G, é de tipo finito, então o operador $\tilde{\ }$, em F_G, também, o é

Observe-se que, ainda neste caso, é equivalente interpretar F_G em M, ou em E com fecho conjuntivo, no sentido anteriormente citado.

b) Considere-se o conjunto F_G obtido criativamente, por meio da operação $\vee$, a partir do conjunto G de geradores não vazio.

Seja $<_G$ a pré ordem induzida em G pelo fecho $\bar{\ }$.

<u>*Definição* 3.19</u>: A pré ordem $\sqsubseteq$, em F_G, é dada por: $s \sqsubseteq x$ see, dado um elemento a de $[s]$, existe um elemento b de $[x]$, tal que $a <_G b$.

<u>*Definição* 3.20</u>: O fecho $\llcorner\!\lrcorner$, em F_G, é dado por: x é elemento de $\overset{\llcorner\!\lrcorner}{S}$ see existe um elemento s de $\overline{S \cap G} \cup S$, tal que $s \sqsubseteq x$.

<u>*Teorema* 3.42</u>: Os fechos $\sim$ e $\llcorner\!\lrcorner$ coincidem.

Demonstração - a) Como nas demonstrações análogas, anteriormente feitas, tem-se que o fecho $\llcorner\!\lrcorner$ é um fecho disjuntivo em F_G e, além disso, induz o fecho $-$, em G.

Então, considerando-se a identidade $i: F_G \to F_G$, sendo $\sim$ o fecho do domínio de i e $\sqcup$ o fecho do conjunto de valores i, tem-se que i é interpretação e i, restrita a G, é contínua ; logo, i é contínua e, portanto, todo fechado, segundo $\sqcup$, é fechado, segundo $\sim$.

Logo, $\sim$ é mais fino que $\sqcup$.

b) Toda interpretação, cuja restrição a G é contínua, é contínua relativamente a $\sqcup$. Logo, $\sqcup$ é mais fino que $\sim$.

Teorema: 3.43: Os fechados elementares de F_G, segundo o menos fino fecho em F_G que faz com que as restrições a G das M-interpretações de F_G sejam contínuas, são da forma $\overset{\cup}{K}$, tal que x é elemento de $\overset{\cup}{K}$ see $[x] \cap K$ é não vazio, sendo K um fechado de G.

Definição: 3.21: O fecho $\vdash\!\dashv$, em F_G, é dado por : x é elemento de $\overset{\vdash\!\dashv}{S}$ see $[x] \cap K$ é não vazio, para todo fechado K de G, tal que S é subconjunto de $\overset{\cup}{K}$.

Teorema: 3.44: Os fechos $\vdash\!\dashv$ e $\sqcap$ coincidem, em F_G.

Teorema: 3.45: Os fechos $\sqcup$ e $\vdash\!\dashv$, em F_G, induzem a mesma pré-ordem $<$ dada por: $x < y$ see para todo elemento a de $[x]$, existe um elemento b de $[y]$, tal que $a <_G b$.

Observação: 3.4: O fecho $\sqcup$ é mais fino que o fecho $\vdash\!\dashv$, ou seja, $\overset{\sqcup}{S}$ é subconjunto de $\overset{\vdash\!\dashv}{S}$, para todo subconjunto S de F_G.

O fecho em G é de ordem

Definição: 3.22: O fecho $\sqcup$, em F_G, é dado por: x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ see existe s em S tal que $s \sqsubseteq x$.

Teorema: 3.46: Os fechos $\sqcup$ e $\sim$ coincidem, em F_G.

Demonstração - a) Se x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$, então existe um elemento s em S, tal que $s \sqsubseteq x$.

Suponha-se que $s = a_1 v \ldots v a_n$ e $x = b_1 v \ldots v b_p$.

Então, dado a_i, existe b_j, com $a_i <_G b_j$; logo, como h restrita a G é contínua, $h(a_i) \prec h(b_j)$.

Então, $h(s) = h(a_1) \vee \ldots \vee h(a_n)$ e $h(x) = h(b_1) \vee \ldots \vee h(b_p)$; portanto, $h(s) \prec h(x)$ e $h(x)$ é elemento de $\overline{h(S)}$.

Assim sendo, $\sqcap$ torna as interpretações contínuas.

b) Dados x e y, u é elemento de $\overset{\sqcup}{\{x \vee y\}}$ see $x \vee y \sqsubseteq u$, o que é equivalente a existir um elemento b em $[u]$, quando é dado um elemento a em $[x] \cup [y]$.

Por outro lado, u é elemento de $\overset{\sqcup}{\{x\}} \cap \overset{\sqcup}{\{y\}}$ see $x \sqsubseteq u$ e $y \sqsubseteq u$, ou seja, dado a em $[x]$ e c em $[y]$, existem b em $[u]$ e d em $[u]$, tais que $a <_G b$ e $c <_G d$.

Assim sendo, $\overset{\sqcup}{\{x \vee y\}} = \overset{\sqcup}{\{x\}} \cap \overset{\sqcup}{\{y\}}$ e o fecho $\sqcup$ é disjuntivo.

c) Considere-se a identidade $i: F_G \to F_G$, domínio com fecho $\sim$ e contra-domínio com fecho $\sqcup$.

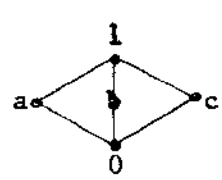
Tem-se que i é interpretação, pois a restrição de i a G é contínua, e todo o fechado de $\sqcup$, interceptado com G, é um fechado de $\sim$; i é contínua.

Portanto, $\sim$ e $\sqcup$ coincidem.

Exemplo: 3.1: Os fechos $\sqcup$ e $\vdash\!\dashv$, em F_G, são distintos.

Considere-se o reticulado G do diagrama, com o fecho do filtro gerado.

G



Tem-se que x é elemento de $\overline{\{a\vee b,\ b\vee c\}}$ see b é elemento de $[x]$ ou 1 é elemento de $[x]$; x é elemento de $\overset{\sqcup}{\{a\vee b,\ b\vee c\}}$ see $a\vee b \sqsubseteq x$ ou $b\vee c \sqsubseteq x$.

Logo, b é elemento de $\overline{\{a\vee b,\ b\vee c\}}$ e não é elemento do $\overset{\sqcup}{\{a\vee b,\ b\vee c\}}$.

c.) Seja F_G obtido por meio das operações criativas $\wedge$ e $\vee$, a partir de um conjunto G não vazio, em que está definido um operador de fecho $^{-}$, de tipo finito.

Considere-se o sistema D do § 2-4.

Definição 3.23: A relação $\leq$ em G, é dada por: $a_1 \wedge \dots \wedge a_n \leq b$ see b é elemento de $\overline{\{a_1, \dots, a_n\}}$.

Definição: 3.24: A relação $\sqsubseteq$ é dada, em F_G, por: $x \sqsubseteq y$ see $x \preccurlyeq y$ é demonstrável no sistema D.

Definição :3.25: O fecho $\sqcup$, em F_G, é dado por: x é elemento de S, see existem elementos $s_1, s_2, \dots s_n$ em $S \cup \overline{\phi}$, tais que $s_1 \wedge s_2 \wedge \dots \wedge s_n \sqsubseteq x$.

Teorema: 3.47: O fecho $\sqcup$ é fecho reticulado-distributivo, em F_G, e induz o fecho $^{-}$, em G.

Demonstração - Se x é elemento de S, então x também o é de $\overset{\sqcup}{S}$; se S é subconjunto de T, então $\overset{\sqcup}{S}$ é subconjunto de $\overset{\sqcup}{T}$; se x é elemento de $\overset{\sqcup\sqcup}{S}$, então existem $s_1, s_2, \dots s_n$ em $\overset{\sqcup}{S} \cup \overline{\phi}$, tais que $s_1 \wedge \dots \wedge s_n \sqsubseteq x$: se s_i é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$, então existem $t_{i1}, t_{i2}, \dots t_{in}$ em $S \cup \overline{\phi}$, tais que $t_{i1} \wedge \dots \wedge t_{in_i} \sqsubseteq s_i$, etc.

Portanto, $\sqcup$ é um operador de fecho em F_G.

Se b é elemento de G e de $\overset{\sqcup}{A}$, sendo A subconjunto de G, então b é elemento de $\overset{\sqcup}{A}$ see existem $s_1, s_2, \dots, s_n$ em $A \cup \overline{\phi}$, tais que $s_1 \wedge \dots \wedge s_n \sqsubseteq b$, o que só é possível no sistema se b é elemento de $\overline{\{s_1,\dots,s_n\}}$; logo, b é elemento de $\overline{A}$. Por outro lado, se b é elemento de $\overline{A}$, então b é elemento de $\overline{\{s_1,\dots,s_n\}}$.

Portanto, o fecho $\sqcup$ induz o fecho $-$.

Prove-se que $\sqcup$ é um fecho reticulado-distributivo.

De fato, u é elemento de $\overset{\sqcup}{\{x, y\}}$ see existem $s_1,\dots,s_n$ em $\overline{\Phi} \cup \{x, y\}$, tais que $s_1 \wedge \dots \wedge s_n \sqsubseteq u$; u é elemento de $\overset{\sqcup}{\{x \wedge y\}}$ see existem $s_1,\dots,s_n$ em $\overline{\Phi} \cup \{x \wedge y\}$, tais que $s_1 \wedge \dots \wedge s_n \sqsubseteq u$. Logo, $\overset{\sqcup}{\{x, y\}} = \overset{\sqcup}{\{x \wedge y\}}$.

Por outro lado, u é elemento de $\overset{\sqcup}{\{x\}} \cap \overset{\sqcup}{\{y\}}$ see existem $s_1,\dots,s_n$ em $\overline{\Phi} \cup \{x\}$, tais que $s_1 \wedge \dots \wedge s_n \sqsubseteq u$ e existem $t_1, \dots, t_p$ em $\overline{\Phi} \cup \{y\}$, tais que $t_1 \wedge \dots \wedge t_p \sqsubseteq u$; u é elemento de $\overset{\sqcup}{\{x \vee y\}}$ see existem $s_1,\dots,s_n$ em $\{x \vee y\} \cup \overline{\Phi}$, tais que $s_1 \wedge \dots \wedge s_n \sqsubseteq u$.

Logo, $\overset{\sqcup}{\{x\}} \cap \overset{\sqcup}{\{y\}} = \overset{\sqcup}{\{x \vee y\}}$.

Observe-se ainda, que a pré-ordem tirada do fecho $\sqcup$, em F_G, é dada por $x \prec y$ see $x \sqsubseteq y$.

Então, do sistema D e da pré-ordem $\prec$, segue a distributividade na estrutura algebrizada $F_G/\equiv$.

Teorema 3.48: As interpretações de F_G são contínuas, relativamente ao fecho $\sqcup$.

Demonstração - Se x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$, então existem elementos $s_1,\dots,s_n$ em $S \cup \overline{\Phi}$, com $s_1 \wedge \dots \wedge s_n \sqsubseteq x$.

Se $s_1 \wedge \dots \wedge s_n \preccurlyeq x$ é tal que x é elemento de $\overline{\{s_1,\dots,s_n\}}$ como uma interpretação h restrita a G é contínua, então h(x) é elemento $\overline{h(\{s_1,\dots,s_n\})}$ e h(x) é elemento de $\overline{h(S)}$; se é da forma $x \wedge y \preccurlyeq x$, tem-se que $h(x) \wedge h(y) \prec h(x)$ e portanto, h(x) é elemento de $\overline{h(S)}$.

Assim, sucessivamente.

Teorema 3.49: Os fechos $\smile$ e $\sim$ coincidem.

Considere-se o conjunto F_G obtido, a partir de G, por meio das operações criativas $-$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$.

Seja o operador $\ulcorner$, em F_G, o menos fino fecho que torna contínuas as M-interpretações cujas restrições a G são contínuas, sendo M considerado com fecho booleano.

Teorema 3.50: O fecho $\ulcorner$, em F_G, induz o fecho $-$, em G.

Teorema 3.51: Se o fecho $-$, em G, é de tipo finito e H é o conjunto formado pelos elementos da forma $(b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n) \supset b$, com $b, b_1, b_2, \ldots, b_n$, elementos em G e b elemento em $\overline{\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}}$, então $h(H)$ e $h(\overline{\Phi})$ são subconjuntos de N, para toda M-interpretação h.

Demonstração - Se $b, b_1, b_2, \ldots b_n$, são elementos de G e $(b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_n) \supset b$ é elemento de H, então $h(b)$ é elemento de $\overline{h(\{b_1, \ldots, b_n\})}$; portanto, $h(b_1) \wedge \ldots \wedge h(b_n) \leq h(b)$ em M, ou seja, $h((b_1 \wedge \ldots \wedge b_n) \supset b) = 1$. Logo, $h(H)$ é subconjunto de N.

Por outro lado, como $h^{-1}(N)$ é um fechado em F_G para toda M-interpretação h, $\overline{\Phi}$ é subconjunto de $h^{-1}(N)$ e, portanto, $h(\overline{\Phi})$ é subconjunto de N.

Teorema 3.52: A restrição a G de uma M-interpretação h de F_G é contínua see $h(\overline{\Phi} \cup H)$ é subconjunto de N, sendo o fecho em G, $-$, de tipo finito e H o conjunto definido no teorema anterior.

Demonstração - a) Se h/G é contínua, então $h^{-1}(N) \cap G$ é um fechado de G. Portanto, se x é elemento de $\overline{\Phi} \cup H$, então x é elemento de $\overline{\Phi}$, ou de H; se x é elemento de $\overline{\Phi}$, então $h(x) = 1$; se x é elemento de H, então $x = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \supset b$, com b elemento de $\overline{\{a_1, \ldots a_n\}}$ e $h(b)$ elemento de $\overline{\{h(a_1), \ldots, h(a_n)\}}$; portanto, como $h(x) = h(a_1) \wedge \ldots \wedge h(a_n) \supset h(b)$, $h(x) = 1$.

b) Se $h(\overline{\Phi} \cup H)$ é subconjunto de N, mostre-se que $h^{-1}(N) \cap G$ é fechado em G.

De fato, se $h^{-1}(N) \cap G = \overline{\Phi}$, então $\overline{\Phi} = \phi$, pois se $\overline{\Phi}$ é não vazio tem-se uma contradição. Se $h^{-1}(N) \cap G$ é não vazio, considere-se um elemento b de $\overline{h^{-1}(N) \cap G}$: b é elemento de $\overline{\{a_1, \ldots, a_n\}}$, sendo $a_1, \ldots a_n$, elementos de $h^{-1}(N) \cap G$, logo $(a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) \supset b$ é elemento de H e $h(a_1) = h(a_2) = \ldots = h(a_n) = 1$. Logo, $h(b) = 1$ e b é elemento de $h^{-1}(N) \cap G$.

Teorema 3.53: Se o fecho $^-$, em G, é de tipo finito, então x é elemento de $\overset{\frown}{S}$ see existem $a_1, a_2, \ldots a_n$ elementos em $\overline{\Phi} \cup H \cup S$, tais que $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \supset x$ é tautologia em F_G.

Demonstração - a) Suponha-se que h(S) é subconjunto de N, para alguma M-interpretação h, e demonstre-se que h(x) é elemento de N, considerando-se, por hipótese, que existem $a_1, a_2, \ldots a_n$, elementos em $\overline{\Phi} \cup H \cup S$, tais que $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \supset x$ é tautologia.

De fato, se h(S) é subconjunto de N, como $h(a_1) \wedge \ldots \wedge h(a_n) \leq h(x)$, tem-se que $h(x) = 1$.

b) Seja x elemento de $\overset{\frown}{S}$ e h uma M-interpretação tal que $h(S \cup H \cup \overline{\Phi})$ é subconjunto de N.

Pelo teorema anterior, h/G é contínua e, como h(S) é subconjunto de N, é imediato que $h(x) = 1$.

e) Assim sendo, dado um conjunto E qualquer, com operador de fecho $-$, é possível imergir E num conjunto F_E com fecho $\sim$, gerado a partir de E, de modo que, para elementos a e b quaiquer de E, $a \wedge b$ seja não vazio, ou $a \vee b$, $a \wedge b$, $a \supset b$ e $\neg a$ sejam não vazios: basta que se obtenha F_E, a partir de E, do mesmo modo que se obteve F_G , nos quatro casos anteriores, a partir de G.

Além disso, dados G e F_G, com fechos $\bar{\ }$ e $\tilde{\ }$, respectivamente, se E tem fecho conjuntivo, ou disjuntivo, ou reticulado-distributivo, ou booleano e f é uma funçaõ contínua de G em E, então existe uma interpretação h, tal que h é prolongamento de f.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & E \\ & F_G \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

§ 5 - *Decidibilidade*

5.1- *Quadros Semânticos* - Nos quatro casos em que interpretar F_G num conjunto E é equivalente a interpretar F_G em M, no sentido considerado, dado um elemento x qualquer de F_G, é possível determinar, de modo sistemático, as interpretações h de F_G tais que $h(x) = 1$ e as interpretações k, tais que $k(x) = 0$.

Sabe-se que, para x e y elementos quaisquer de F_G:

a) $h(x \wedge y) = 1$ see $h(x) = 1$ e $h(y) = 1$, se $\wedge$ é uma das operações que geram F_G;

b) $h(x \vee y) = 1$ see $h(x) = 1$ ou $h(y) = 1$, se $\vee$ é uma das operações que geram F_G;

c) $h(x \supset y) = 1$ see $h(x) = 0$ ou $h(y) = 1$, se $\supset$ é uma das operações que geram F_G;

d) $h(-x) = 1$ see $h(x) = 0$, se $-$ é uma das operações que geram F_G.

Usando sucessivamente tais observações, determinam-se todas as interpretações h tais que $h(x) = 1$ para qualquer elemento x de F_G.

Um processo para a obtenção de tais interpretações é o dos quadros semânticos:

$$\begin{array}{c} V\ \ x \wedge y \\ \hline V\ x \\ V\ y \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{F\ \ x \wedge y} \\ \hline Fx & Fy \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{V\ \ x \vee y} \\ \hline V\ x & Vy \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} F\ \ x \vee y \\ \hline Fx \\ Fy \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{V\ \ x \supset y} \\ \hline Fx & Vy \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} F\ \ x \supset y \\ \hline Vx \\ Fy \end{array}$$

$$\begin{array}{c} V\ -x \\ \hline Fx \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} F\ -x \\ \hline Vx \end{array}$$

Exemplo: 3.2: Determinem-se as interpretações h tais, que $h(a \wedge (b \wedge a)) = 1$.

Tem-se que $h(a \wedge (b \wedge a)) = 1$ see $h(a) = 1$ e $h(b \wedge a) = 1$, o que é equivalente a $h(a) = 1$ e $h(b) = 1$.

Em quadros semânticos:

$$\begin{array}{l} \underline{V \quad a \wedge (b \wedge a)} \\ \qquad V\,a \\ \qquad V\,b \end{array}$$

Exemplo: 3.3: Determinem-se as interpretações h tais que $h(-(a \wedge b) \vee c) = 1$

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{\underline{V \quad -(a \wedge b) \vee c}} \\ V \quad -(a \wedge b) & V\,c \\ \quad F\ (a \wedge b) & \\ \quad Fa \ \mid\ Fb & \end{array}$$

Assim sendo, para verificar se $x \prec y$ em F_G, basta observar que $V x$ e Fy dão uma contradição no quadro semântico.

Exemplo: 3.4: Verifique-se que $x \wedge (y \wedge z) \prec x \wedge y$

$$\begin{array}{l} V \quad x \wedge (y \wedge z) \\ \underline{F \quad x \ \wedge \ y} \\ \qquad\quad Vx \\ \qquad\quad Vy \\ \qquad\quad Vz \\ \qquad Fx \ \mid\ Fy \end{array}$$

Exemplo: 3.5: Mostre-se que $x \wedge z \prec x \wedge (y \wedge z)$ não se verifica em F_G

$$\begin{array}{l} Vx \wedge z \\ \underline{Fx \wedge (y \wedge z)} \\ \qquad Vx \\ \qquad Vy \\ \quad Fx \mid Fy \wedge z \\ \qquad\quad Fy \mid Fz \end{array}$$

De fato, não se obtêm contradição, no caso $V x, V y$ e Fz.

Para verificar se um elemento x de F_G é elemento de S, basta encontrar as interpretações h tais que $h(S) = \{1\}$ e verificar se $h(x)$ 1.

5.2 -*Casos restantes* - No caso em que F_G é obtido a partir de G por meio das operações $\wedge$ e $\vee$, e E é considerado com fecho reticulado, é possível determinar um sistema R' que não tem a regra-transitiva, tèticamente equivalente ao sistema R.

Tal sistema é dado pela axiomática:

I) $x \preccurlyeq x$

R_1) $\dfrac{x \preccurlyeq y}{u \wedge x \preccurlyeq y}$

R_2) $\dfrac{x \preccurlyeq y}{x \wedge v \preccurlyeq y}$

R_3) $\dfrac{u \preccurlyeq x \quad u \preccurlyeq y}{u \preccurlyeq x \wedge y}$

R_4) $\dfrac{x \preccurlyeq y}{x \preccurlyeq u \vee y}$

R_5) $\dfrac{x \preccurlyeq y}{x \preccurlyeq y \vee v}$

R_6) $\dfrac{u \preccurlyeq x \quad v \preccurlyeq x}{u \vee v \preccurlyeq x}$

Observe-se que a demonstração da equivalência dos sistemas R e R' é feita por indução sôbre o número de vezes que as regras R_3 e R_6 são aplicadas numa demonstração, antes da primeira aplicação da regra transitiva R_1 do sistema R.

Neste caso então, um método de decisão é obtido, através do sistema R'.

Nos casos em que F_G é interpretado em fechos condicionais e intuicionistas e fechos negação , o problema da decidibilidade foi estudado no trabalho /7/ mencionado na Bibliografia.

§ 6 - *Outro Tipo de Interpretação*

Pode-se introduzir outro tipo de interpretação de um conjunto F_G.

Definição 3.26: Dado F_G, obtido criativamente a partir de um conjunto G não vazio de geradores, uma interpretação de F_G é:

a) um fecho conjunto em F_G, se F_G é obtido por meio da operação binária $\wedge$;

b) um fecho disjuntivo em F_G, se F_G é obtido por meio da operação binária $\vee$;

c) um fecho reticulado em F_G, se F_G é obtido por meio das operações binárias $\wedge$ e $\vee$;

d) um fecho reticulado-distributivo em F_G, se F_G é obtido por meio das operações binárias $\wedge$ e $\vee$;

e) um fecho booleano em F_G, se F_G é obtido por meio das operações $-$, $\wedge$, $\vee$ e $\supset$;

f) um fecho condicional em F_G, se F_G é obtido por meio da operação $\supset$;

g) um fecho intuicionista em F_G, se F_G é obtido por meio das operações $\neg$, $\vee$, $\wedge$ e $\supset$;

h) um fecho negação em F_G, se F_G é obtido por meio da operação $\neg$.

Definição 3.27: Se existir uma interpretação em F_G, mais fina que todas as outras, ela diz-se " fecho padrão " em F_G, em cada um dos casos citados na definição anterior.

Teorema 3.54: Existe fecho padrão em F_G, em qualquer um dos casos da definição3.26.

Demonstração - Mostre-se que o menos fino fecho em F_G que torna as interpretações contínuas (o fecho $\tilde{}$, § 1) é o fecho padrão. Analise-se o caso dos fechos conjuntivos.

Seja $\frown$ um fecho conjuntivo em F_G. Pode-se interpretar em F_G com o fecho $\frown$: seja a interpretação identidade $i:F_G \longrightarrow F_G$, sendo $\tilde{}$ o fecho do domínio.

Então, todo fechado segundo o fecho $\frown$ conjuntivo, tomado arbitràriamente, é fechado segundo o fecho $\tilde{}$. Logo, $\tilde{}$ é mais fino que qualquer fecho conjuntivo em F_G.

A mesma demonstração é válida para os outros tipos de fechos, decorrentes das operações através das quais F_G é gerado.

Assim sendo, o mais fino fecho conjuntivo em F_G, quando F_G é gerado por meio da operação criativa $\wedge$, coincide com o menos fino fecho qua torna as interpretações de F_G contínuas, interpretações estas no sentido da definição 3.1.

Conclusões análogas devem ser tiradas nos casos dos outros tipos de fecho.

§ 7 -*Exemplo Algébrico*

7.1 - Seja F_G construído, a partir de um conjunto G não vazio de geradores e da constante o, por meio da operação binária criativa $+$.

Seja E um monóide comutativo ordenado, em que todo elemento é maior ou igual a 0(zero). Isto é, E é um conjunto em que está definida a operação $+$, que é associativa, comutativa, tem 0 como elemento neutro e tal que, se $a \leq b$ e $c \leq d$, então $a + c \leq b + d$.

Definição 3.28: O fecho $\bar{\ }$, em E, é dado por: x é elemento de $\bar{S}$ see existe um elemento r, em S, tal que $r \leq x$.

Tal fecho é um fecho de ordem.

Definição 3.29: Uma interpretação de F_G é uma aplicação $h: F_G \to E$, tal que $h(0) = 0$ e $h(x + y) = h(x) + h(y)$, para todo par (x,y) de elementos de F_G.

Definição 3.30: O fecho $\bar{\ }$ é o menos fino fecho em F_G que torna as interpretações todas contínuas.

Teorema 3.55: O elemento x está em $\bar{S}$ see $h(x) \geq \lambda$, quando $h(s) \geqslant \lambda$ para todo elemento s de S, quaisquer que sejam a interpretação h e o elemento λ em E.

Definição 3.31: O índice de a em x, que é denotado por ind (a,x), é o número de vezes que o gerador a, de G, participa na construção de x, elemento de F_G.

Como consequência da definição anterior, $h(x) = \sum_{a \in G} \text{ind}\,(a,x) \cdot h(a)$; pois $h(x) \geq 0$, para todo elemento x de F_G.

Teorema 3.56: $h(x) \leq h(y)$, para toda interpretação h, see ind $(a,x) \leq$ ind (a,y), para todo elemento a em G.

Demonstração - a) Se ind $(a,x) \leq$ ind (a,y), para todo elemento a em G, é imediato que $h(x) \leq h(y)$ para toda interpretação h.

b) Seja $h(x) \leq h(y)$

Por absurdo, suponha-se que existe um elemento a_o, em G, tal que ind $(a_o, x) >$ ind (a_o, y) ; se h é definida por $h(a_o) = \lambda_1$, com $\lambda_1 \neq 0$ e $h(b) = 0$, para tôdo elemento b, de G, diferente de a_o, então $h(x) =$ ind $(a_o,x)\ \lambda_1$ e $h(y) =$ ind$(a_o,x)\lambda_1$, o que acarreta $h(x) > h(y)$, que é uma contradição.

Logo, ind $(a,x) \leq$ ind (a,y), para todo o elemento a em G.

Teorema 3.57: y é elemento de $\{\tilde{x}\}$ see $h(x) \leq h(y)$, para toda interpretação h.

Demonstração - a) Se $h(x) \leq h(y)$, para toda interpretação h, e $h(x) \geq \lambda$, para qualquer λ de E, tem-se que $h(y) \geq \lambda$. Logo, y é elemento de $\{\tilde{x}\}$.

b) Seja y elemento de $\{\tilde{x}\}$.

Se existir a_o, tal que ind $(a_o,x) = m$ e ind $(a_o, y) = n$ com $m > n$, seja a interpretação h tal que $h(a_o) = \lambda_1$ e $h(b) = 0$, para b elemento de G, com $b \neq a_o$; então, $h(x) = m\ \lambda_1$, e $h(y) = n.\lambda_1$ e, portanto, $h(y) \leq m\ \lambda_1$, o que é um absurdo.

Logo, ind $(a,x) \leq$ ind (a,y), para todo elemento a de G e, portanto, $h(x) \leq h(y)$, para toda interpretação de h.

Teorema 3.58: Se $\preccurlyeq$ é a pré-ordem associada ao fecho $\tilde{}$, em F_G, então $x \preccurlyeq y$ see ind $(a,x) \leq$ ind (a,y), para todo elemento de a de G; se " $\equiv$ " é a equivalência associada ao fecho $\tilde{}$, em F_G, então $x \equiv y$ see ind $(a,x) =$ ind (a,y), para todo elemento a de G e $x \equiv y$ see $h(x) = h(y)$, para toda interpretação h.

Definição 3.32: O fecho $\sqcup$, em F_G, é definido por: x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ see existe um elemento s em S, tal que $s \preccurlyeq x$.

Teorema 3.59: O fecho $\sqcup$ é de tipo finito e os fechos $\tilde{}$ e $\sqcup$ coincidem, em F_G.

Demonstração - a) O fecho $\sqcup$, em F_G, é um fecho de ordem e de tipo finito. Considere-se a aplicação identidade $i: F_G \to F_G$ sendo $\tilde{}$ o fecho do domínio, e $\sqcup$ o fecho do contra-domínio. É imediato que todo fechado de F_G, segundo $\sqcup$, é fechado segundo $\tilde{}$.

b) Se x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$, então existe s em S, tal que $h(s) \leq h(x)$ e, portanto, $h(x)$ é elemento $\overline{h(\tilde{S})}$. Logo, toda interpretação é contínua, com relação ao operador $\sqcup$.

É interessante observar então que, considerar em F_G o menos fino fecho que faz com que as interpretações fiquem contínuas, é equivalente a considerar o fecho de ordem $\sqcup$.

Além disso, passando-se F_G ao quociente $F_G/\equiv$, a pré-ordem $\lesssim$ induz a ordem $\leq$ e tem-se que $\pi(a) \leq \pi(b)$ see $a \lesssim b$, para todo par (a,b) de elementos F_G; definindo-se a operação " + " em $F_G/\equiv$, por $\pi(a) + \pi(b) = \pi(a+b)$, é imediato que ($F_G/\equiv$, +) tem estrutura de monóide comutativo ordenado, com unidade π (0).

Induz-se, em $F_G/\equiv$, o fecho de F_G e, se A é subconjunto de $F_G/\equiv$, e $x \lesssim y$ com x elemento de $\overset{\sqcup}{A}$, então y é também elemento de $\overset{\sqcup}{A}$.

7.2 - Pode-se analisar o que foi feito em 7.1, sob outro ponto de vista.

Considere-se um subconjunto J do conjunto de interpretações de F_G e defina-se a relação : $x \equiv_J y$ see $h(x) = h(y)$, para toda interpretação h em J.

Se for considerado o fecho $\tilde{}$, menos fino em F_G, tal que as interpretações do conjunto J sejam contínuas, é imediato que a relação $\equiv_J$ é a relação de equivalência induzida, em F_G, pelo fecho $\tilde{}$.

De fato, $\overline{\{x\}} = \widetilde{\{y\}}$ see $x \equiv_J y$.

Assim são gerados os $F_{G;J} = F_{G/\equiv_J}$, que são monóides comutativos ordenados, com elementos maiores ou iguais a $\pi_J(0)$.

APÊNDICE

Vários outros resultados podem ainda ser obtidos e pesquisados.

1. Os resultados obtidos no Capítulo I- §3 sugerem que se considere $\mathcal{M}$ como uma classe de objetos da categoria $\mathcal{C}$ e se procure definir interpretação.

   Assim, pode-se definir interpretação como toda aplicação $h: F_G \to M$, sendo M elemento de $\mathcal{M}$.

   Do mesmo modo que no Capítulo I, podem ser considerados o conjunto I e os $F_{G;J}$.

   Diz-se que $\mathcal{M}$ separa os objetos de $\mathcal{C}$ see, dado um objeto A qualquer de $\mathcal{C}$, e elementos a e b distintos em A, existem um elemento M em $\mathcal{M}$ e uma interpretação h tal que $h(a) \neq h(b)$.

   Se $\mathcal{C}$ é a categoria $F_{G;J}$ e dos morfismos, então objetos de $\mathcal{M}$ são objetos de $\mathcal{C}$ e os objetos de $\mathcal{C}$ são os de $\mathcal{C}$ que são separados por $\mathcal{M}$.

   Se $\mathcal{M}$ é um conjunto, então A é objeto de $\mathcal{C}$ see A é isomorfo a um sub-produto de um produto $\prod_{M \in \mathcal{N}} (\prod_{i \in I_M} M_i)$, sendo $\mathcal{N}$ subconjunto de $\mathcal{M}$.

2. Do mesmo modo que se analisou Geração de Categorias e Funções Associadas, nos casos das interpretações em fechos conjuntivos, disjuntivos, reticulado -distributivos e booleanos, seria conve-

niente tentar analisar tais ítens nos outros quatro casos estudados neste trabalho.

Também tentar caracterizar, nestes quatro casos o fecho $\tilde{\ }$, quando em G está definido um fecho $\bar{\ }$,

3. Seria interessante um estudo mais detalhado do outro tipo de interpretação, introduzido no Capítulo III- §6.

Seria bom verificar se tais interpretações estão bem definidas, quando definidas em G.

4. No caso do Exemplo Algébrico (Capítulo III-§7), seria também interessante analisar o caso em que G tem fecho $\bar{\ }$.

Parece que uma caracterização para o fecho $\tilde{\ }$ é dada pelo fecho $\sqcup$,definido como o menos fino fecho em F_G para o qual valem:

a) $\sqcup$ induz $\bar{\ }$, em G.

b) Se x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ e ind (a,y) $\geqslant$ ind (a,x), para todo a, elemento em G, então y é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$.

c) Se x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$, então y é elemento de $\overset{\sqcup}{S+u}$, para todo y tal que ind (a,y)=ind (a,x+u) para todo a em G; ou seja, y é elemento de $\overset{\sqcup}{T}$, tal que t é elemento de T see existe s em S com ind (a,t)=ind (a,s+u), para todo a em G.

5. Outro problema que surge, é tentar verificar se é possível a geração de todos os fechos de um determinado tipo, a partir dos fechos padrões em F_G.

Parece possível. Por exemplo, veja-se o caso da obtenção dos fechos conjuntivos:

a) Obtenção canônica de novos fechos conjutivos a partir de um dado.

Seja E com fecho conjuntivo $^-$: uma relação de equivalência $\equiv$ em E diz-se compatível com $^-$, se a família $\mathscr{C}$ dos fechados que são saturados para $\equiv$ determina um fecho conjuntivo em E.

Tome-se então uma relação de equivalência $\equiv$, compatível com $^-$, e seja $\mathscr{C}$ a família dos fechados saturados correspondentes.

Em $F = E/_\equiv$ tomem-se como fechados conjuntos de classes cuja reunião dá um elemento de $\mathscr{C}$.

Tais fechados determinam um fecho conjuntivo em F.

b) Seja E com fecho conjuntivo e tome-se o fecho padrão em F_E. Seja $h: F_E \to E$ a interpretação que prolonga a identidade de E e tome-se como $\mathscr{C}$ a família dos fechados de F_E da forma $h^{-1}(C)$, onde C é fechado em E. A equivalência $\equiv$ é definida por $x \equiv y$ see $h(x) = h(y)$.

Então, $\equiv$ é compatível com $^-$ e $F_{E/\equiv}$, com fecho definido como em (a), é homeomorfo a E. O Homeomorfismo é dado por h, definido naturalmente em $F_{E/\equiv}$.

6. Um outro caso pode ser estudado, em detalhe.

Seja D um conjunto não vazio e G formado pela aplicação de uma família de funções criativas de uma variável em D.

Seja F_G construído, a partir de G, por meio da operação binária criativa $\wedge$ e por meio de $\wedge$, que se aplica a certas partes de-

F_G, segundo:

a) Se x é elemento de G, então x é elemento de F_G.

b) Se x e y são elementos de F_G, então $x \wedge y$ é elemento de F_G.

c) Se a construção de x depende de a, então Λ se aplica ao conjunto $\{x\ (b)\}_{b \in D}$, tendo-se que $\underset{\alpha}{\Lambda}\ x(\alpha)$ é elemento de F_G.

Uma interpretação de F_G é uma aplicação $h: F_G \to E$, sendo E considerado com fecho conjuntivo $\bar{}$, tal que:

a) $h(x \wedge y)$ é elemento de $h(x) \wedge h(y)$

b) $h(\underset{\alpha}{\Lambda}\ x\ (\alpha)\ )$ é elemento de $\Lambda\ \{h\ (x\ (b)),\ b \in D\}$, sendo x elemento de ΛA, em E, see $\overline{\{x\}} = \bar{A}$.

Seja $\bar{}$ o menos fino fecho que torna todas as interpretações contínuas.

Se x é elemento de F_G, define-se $[x]$, indutivamente, por:

a) $[f\ (a)] = \{f\ (a)\}$

b) $[x \wedge y] = [x] \cup [y]$

c) $[\underset{\alpha}{\Lambda}\ x\ (\alpha)] = \bigcup_{b \in D} [x\ (b)]$

Defina-se o fecho $\sqcup$, por: x é elemento de $\overset{\sqcup}{S}$ see $[x]$ é subconjunto de $\bigcup_{s \in S} [s]$.

Os fechos $\bar{}$ e $\sqcup$ parecem coincidir.

7. Se, na geração de F_G, a partir de G, forem consideradas operações criativas com quantidade não finita de argumentos, pode-se estudar o Cálculo de Predicados, sob esse ponto de vista.

BIBLIOGRAFIA

/1/ CURRY, H. B. Foundations of mathematical logic. New York, McGraw-Hill /c1963/ 408p. (McGraw-Hill Series in Higher Mathematics)

/2/ FITTING, G. M. Intuitionistic logic; model theory and forcing. Amsterdan, North-Holland, 1970.

/3/ HENKIN, L. La structure algébrique des théories mathématiques. Paris, Gauthier-Villars, 1956. 52p. (Collection de Logic Mathématique, Serie A, v.11)

/4/ HU, S. T. Elements of modern algebra. San Francisco, Holden-Day, 1965. 208p. (Holden-Day Series in Mathematics)

/5/ KLEENE, S. C. Introduction to metamathematics. Princeton, Van-Nostrand /1967/ 550p. (The University Series in Higher Mathematics)

/6/ KREISEL, G. & KRIVINE, J. L. Elements of mathematical logic; model theory. Amsterdam, North-Holland, 1971. 231p. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)

BC

/7/ LEME, B. T. Completamento e decibilidade. São Carlos, Inst. C. Mat. de São Carlos U.S.P, 1972. 88p. Tese (Dicertação de Mestrado) - Inst. C. Mat. de São Carlos U.S.P.

/8/ MAC LANE, S. & BIRKHOFF, G. Algebra. New York, MacMillan - /1968/ 598p.

/9/ MENDELSON, E. Introduction to mathematical logic. Princeton Van Nostrand /c1964/ 300p. (The University Series in - Undergraduate Mathematics)

/10/ MONTEIRO, A. Filtros e ideais. Rio de Janeiro, IMPA, 1959; 2v. 130p. (Notas de Matemática Nº5)

/11/ RASIOWA, H. & SIKORSKI, R. Mathematics of metamathematics. Warszwa, PWN, 1968.