

AÇÕES EXÓTICAS DE GRUPOS CÍCLICOS

SOBRE ESPAÇOS EUCLIDIANOS

JOSE LUIZ BOLDRINI

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof.Dr. Hugo Horacio Torriani

ESTE TRABALHO FOI REALIZADO COM O AUXÍLIO FINANCEIRO DA FUNDAÇÃO DE AMPARO À PESQUISA DO ESTADO DE SÃO PAULO.

Campinas, 15 de julho de 1976.

**UNICAMP**  
BIBLIOTECA CENTRAL

Para Lena

CAPÍTULO 5. O Cilindro de uma Aplicação Simplicial.

5.1. O Cilindro de uma Aplicação Simplicial . . . . .	75
5.2. O Cilindro Iterado de uma Aplicação Simplicial . . . . .	83

PARTE II

AÇÕES EXÓTICAS DE GRUPOS CÍCLICOS SOBRE ESPAÇOS EUCLIDIANOS

CAPÍTULO 6. Ações sem Pontos Fixos de Grupos Cíclicos sobre Espaços Compactos.

6.1. A aplicação $f \square g$ . . . . .	91
6.2. Ações sem Pontos Fixos de Grupos Cíclicos sobre Esferas . . . . .	104
6.3. Ações sem Pontos Fixos de Grupos Cíclicos sobre Espaços Compactos	106

CAPÍTULO 7. Ações Exóticas de Grupos Cíclicos sobre Espaços Euclidianos.

7.1. Ações Simpliciais de Grupos Cíclicos sobre Complexos Simpliciais	112
7.2. Ações $C^\infty$ de Grupos Cíclicos sobre Variedades $C^\infty$ . . . . .	125
7.3. Ações $C^\infty$ de Grupos Cíclicos sobre Espaços Euclidianos . . . . .	134

Bibliografia.	137
---------------	-----

## INTRODUÇÃO

Um dos célebres resultados obtidos por P.A. Smith por volta de 1939 diz que o conjunto dos pontos fixos de um difeomorfismo periódico primário de  $\mathbb{R}^m$  é não vazio. Por difeomorfismo periódico primário de uma variedade diferenciável entendemos aqui um autodifeomorfismo periódico dessa variedade, de período  $p^n$ , onde  $p$  é um número primo e  $n$  é algum número natural; a noção de (auto)homeomorfismo periódico primário de um espaço topológico é análoga. Smith foi então levado a conjecturar que todo difeomorfismo periódico (primário ou não) de  $\mathbb{R}^m$  tem pelo menos um ponto fixo.

Em 1958 P.E. Conner e E.E. Floyd construíram um espaço compacto (de dimensão finita) e acíclico em relação à homologia de Čech sobre os inteiros, e um autohomeomorfismo periódico não primário desse espaço sem pontos fixos. Utilizando a noção de cilindro iterado de uma aplicação simplicial, eles conseguiram também "deformar" o seu exemplo e obter um complexo simplicial localmente finito, de dimensão 4 e contrátil, e uma aplicação simplicial e periódica não primária desse complexo nele mesmo sem pontos fixos. Em seguida, eles lançaram mão da teoria das vizinhanças regulares de J.H.C. Whitehead e modificando o exemplo precedente obtiveram uma variedade topológica contrátil e um autohomeomorfismo periódico não primário dessa variedade, sem pontos fixos.

Este exemplo forneceu fortes indicações de que a conjectura de Smith seria finalmente respondida na negativa, faltando demonstrar ainda que a variedade construída por Conner e Floyd era realmente (difeomorfa a)  $\mathbb{R}^m$ , para algum  $m$ . Esta parte da construção foi com -

pletada poucos anos mais tarde por D.R.J. McMillan, E.C. Zeeman e J. Stallings. Por outro lado, G.E. Bredon observou no seu recente livro "Introduction to Compact Transformation Groups" que é possível inserir nas construções de Conner e Floyd um complexo simplicial finito  $L$  de tal maneira que o autohomeomorfismo periódico não primário em questão tenha como conjunto de pontos fixos um subespaço possuindo o mesmo tipo de homotopia que  $L$ . Em particular, se  $L$  for vazio, recupera-se o resultado principal de Conner e Floyd.

Outra observação interessante feita por Bredon é que o primeiro dos espaços construídos por Conner e Floyd serve também para assinalar limites para o campo de validade de uma das consequências do famoso teorema de ponto fixo de Lefschetz. Tal consequência é que toda autoaplicação contínua de um espaço compacto, triangulável e contrátil tem (pelo menos) um ponto fixo. Utilizando o espaço mencionado no início do segundo parágrafo desta Introdução podemos ver que esse resultado deixa de ser válido se omitirmos a hipótese de triangulabilidade e substituirmos a hipótese de contratibilidade pela de aciclicidade com relação à homologia de Čech.

Resumindo, podemos dizer que o nosso tema principal é o assinalamento de limites para o campo de validade dos teoremas de pontos fixos de Smith e de Lefschetz. Pareceu-nos que o tema, além de sua importância específica na teoria dos grupos de transformações, poderia ser de muito interesse a alunos que desejam iniciar-se nesse ou em outros ramos da topologia algébrica e, talvez ainda, a pessoas ativas em algum campo da geometria ou da topologia. A apresentação feita por Conner e Floyd no seu artigo original é contudo muito concisa, e, além disso, por assim dizer incompleta, já que o último elo

da construção só veio ser forjado por McMillan, Zeeman e Stallings quatro anos mais tarde. No seu livro, Bredon faz uma apresentação de conjunto, incluindo não somente a sua idéia de introduzir nas construções o complexo simplicial  $L$  acima relacionado, mas também mencionando contribuições posteriores devidas a J.M. Kister, Conner, D. Montgomery e especialmente a W.-C. Hsiang e W.-Y. Hsiang. Contudo o objetivo principal de Bredon não foi fazer uma análise detalhada do exemplo de Conner e Floyd, mas o de prevenir o leitor das dificuldades que surgem no estudo dos grupos de transformações, limitando-se a esboçar, em três páginas, os passos mais importantes da construção.

O objetivo desta tese é, então, apresentar, de um modo que esperamos seja considerado acessível pelos leitores, os resultados de Conner, Floyd e Bredon mencionados acima. Como o nosso desejo foi produzir um texto que pudesse ser lido sem muitas dificuldades por pessoas que se iniciam no estudo da topologia, optamos pela inclusão de todos os detalhes das construções. A organização do trabalho responde também a esse desejo. Assim, na primeira parte desta tese fazemos um resumo de alguns conceitos e resultados básicos sobre complexos, homotopia, e grupos de transformações. Na segunda parte consideramos alguns métodos de construção de espaços, principalmente limites inversos, colagens, junções, e cilindros de aplicações simpliciais. Finalmente, a terceira parte contém uma exposição detalhada do exemplo de Conner e Floyd. Nossa apresentação culmina com os teoremas (6.3.4), (7.1.10), (7.2.7) e (7.3.2). Neles, os espaços sobre os quais existem autohomeomorfismos periódicos não primários sem pontos fixos são, resumidamente (para os enunciados precisos cf. loc.

cit.), os seguintes:

(6.3.4): Espaço topológico compacto e acíclico em relação a homologia de Čech sobre os inteiros;

(7.1.10): Complexo simplicial com uma quantidade enumerável de vértices, localmente finito, contrátil, e de dimensão  $\geq 4$ ;

(7.2.7): Variedade  $C^\infty$  sem bordo, contrátil, e de dimensão  $\geq 4$ ;

(7.3.2): Espaço euclidiano  $\mathbb{R}^m$ .

Quero externar aqui meu agradecimento ao Prof. Hugo H. Torriani pela proposição do trabalho e pela orientação. Agradeço ainda ao Prof. Antonio Conde, que me orientou em 1974, e aos colegas Antonio Carlos do Patrocínio e Sueli Irene Rodrigues Costa pelas sugestões e incentivo.

Agradeço o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) através da concessão de bolsa de estudos, sem as quais este trabalho não teria sido realizado.

PARTE I

RESUMO DE ALGUNS CONCEITOS

E RESULTADOS BÁSICOS



## CAPÍTULO 1

### COMPLEXOS

#### 1.1. Complexos Simpliciais.

Referências principais: Eilenberg-Steenrod, Cap. II;  
Glaser, Cap. I.

(1.1.1) Definições. Seja  $E$  um espaço vetorial real.

i) Um conjunto finito  $\{v_0, \dots, v_n\}$  de pontos de  $E$  é dito estar em posição geral se os vetores  $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0$  são linearmente independentes. (por abuso de linguagem diremos que os pontos  $v_0, v_1, \dots, v_n$  estão em posição geral)

ii) Sejam  $n$  um número natural  $\geq 0$  e  $v_0, v_1, \dots, v_n$   $n + 1$  pontos de  $E$  em posição geral. Então o conjunto

$$[v_0, \dots, v_n] = \left\{ v \in E : v = \sum_{i=0}^n a_i v_i, \sum_{i=0}^n a_i = 1, 0 \leq a_i \leq 1 \right\}$$

é chamado o  $n$ -simplexo em  $E$  gerado pelos pontos  $v_0, v_1, \dots, v_n$ . A dimensão de um  $n$ -simplexo é o número  $n$ . Por convenção o conjunto vazio será considerado como um  $n$ -simplex em  $E$ , com  $n = -1$ , e portanto de dimensão  $-1$ .

Nas definições seguintes a expressão "Seja  $A = [v_0, \dots, v_n]$  um  $n$ -simplexo" significa "Seja  $A$  o  $n$ -simplexo em  $E$  gerado pelos pontos  $v_0, \dots, v_n$  de  $E$  em posição geral".

iii) Sejam  $A = [v_0, \dots, v_n]$  um  $n$ -simplexo e  $v$  um ponto de  $A$ . Deduz-se de (ii) que  $v$  pode ser expresso (de modo único) como  $v = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n$  com  $a_0 + a_1 + \dots + a_n = 1$  e  $0 \leq a_i \leq 1$ . Os números  $a_0, a_1, \dots, a_n$  são chamadas as coordenadas baricêntricas de  $v$ .

iv) Seja  $A = [v_0, \dots, v_n]$  um  $n$ -simplexo. O simplexo aberto associado a  $A$  é o conjunto dos pontos de  $A$  que têm todas as suas coordenadas baricêntricas estritamente positivas. O simplexo aberto associado a  $A$  será denotado com  $\langle A \rangle$  ou com  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ . Note que se  $A$  é um  $0$ -simplexo então  $\langle A \rangle = A$ .

v) Sejam  $A = [v_0, \dots, v_n]$  um  $n$ -simplexo e  $k$  um número natural tal que  $0 \leq k \leq n$ . Então o  $k$ -simplexo em  $E$  gerado por um subconjunto de  $k$  elementos de  $\{v_0, \dots, v_n\}$  é dito uma  $k$ -face de  $A$ . As  $0$ -faces de um simplexo são chamadas vértices. Convenciona-se que o conjunto vazio é a  $(-1)$ -face de qualquer simplexo. Para indicar que  $A_1$  é face de  $A_2$  escreveremos  $A_1 \leq A_2$ , e para indicar que  $A_1$  é face própria de  $A_2$ , isto é, que  $A_1$  é face de  $A_2$ , distinta de  $A_2$ , escreveremos  $A_1 < A_2$ .

(1.1.2) Observação. Segundo Eilenberg-Steenrod, p.54, um  $n$ -simplexo é um conjunto  $V = \{A_0, \dots, A_n\}$  de  $n+1$  objetos chamados vértices, juntamente com o conjunto de todas aplicações  $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $\sum_{i=0}^n \alpha(A_i) = 1$  e  $\alpha(A_i) \geq 0$  para todo  $i = 0, \dots, n$ .

Esta definição é equivalente à apresentada em (1.1.1), associando a cada ponto  $v$  de um  $n$ -simplexo  $[v_0, \dots, v_n]$  a aplicação  $\alpha: \{v_0, \dots, v_n\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\alpha(v_i) =$  coordenada baricêntrica de  $v$  em relação a  $v_i$ .

Dessa forma, as demonstrações feitas em Eilenberg-Steenrod, com a modificação acima, se aplicam à terminologia deste trabalho.

(1.1.3) Definições. Seja  $E$  um espaço vetorial real.

i) Um complexo simplicial em  $E$  é um conjunto  $K$  de sim -

plexos em E tais que:

a) Se A é um simplexo de K então todas as faces de A pertencem a K;

b) Se A e B são simplexos de K tais que  $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle \neq \emptyset$  então  $A = B$ .

(ii) Seja K como em (i). Se o conjunto K é finito (respectivamente infinito), o complexo simplicial é chamado complexo simplicial finito (respectivamente complexo simplicial infinito).

(iii) Seja K um complexo simplicial. A dimensão de K é o supremo das dimensões de seus simplexos. Denotaremos a dimensão de K com  $\dim K$ . Notemos que dimensão de K pode ir de  $-1$  até  $+\infty$ .

(iv) Seja K um complexo simplicial. Segundo o ítem (i), K não é um subconjunto de E, mas podemos associar a K o seguinte subconjunto de E:

$$|K| = \bigcup_{A \in K} A$$

Pode-se demonstrar que  $|K| = \bigcup_{A \in K} \langle A \rangle$ . Chamaremos  $|K|$  de espaço associado a |K|.

(v) Um subcomplexo de um complexo simplicial K é um complexo simplicial L tal que  $L \subset K$ . (Note que  $|L| \subset |K|$ .)

(vi) Se K é um complexo simplicial e r é um número inteiro  $\geq -1,0$  r-esqueleto de K, denotado  $K^r$ , é o conjunto

$$K^r = \{A \in K: \dim A \leq r\}$$

Prova-se que  $K^r$  é um subcomplexo de  $K$  e que  $\dim K^r \leq \dim K$ .

(1.1.4) Definições.

(i) Sejam  $A$  e  $B$  simplexos em  $E$  com vértices distintos e tais que a totalidade de seus vértices estão em posição geral. O simplexo em  $E$  gerado por estes vértices é, chamado a junção ("join") de  $A$  e  $B$  e será denotado  $A.B$ .

Note que se  $A$  é um  $p$ -simplexo e  $B$  é um  $q$ -simplexo então  $A.B$  é um  $(p+q+1)$ -simplexo.



(ii) Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais em  $E$  tais que para quaisquer  $A \in K$  e  $B \in L$ , os vértices de  $A$ , juntamente com os vértices de  $B$  estão em posição geral. Então a junção de  $K$  e  $L$  é o complexo simplicial  $K.L$  em  $E$  definido por:

$$K.L = \{A.B : A \in K, B \in L\}$$

(1.1.5) Definições. Seja  $K$  um complexo simplicial.

(i) Se  $A \in K$  então a estrela,  $St(A, K)$ , de  $A$  em  $K$  é o subcomplexo de  $K$  definido por:

$$St(A, K) = \{C \in K : \text{existe } B \in K \text{ com } A \leq B \text{ e } C \leq B\},$$

isto é,  $St(A, K)$  é o subcomplexo de  $K$  constituído de todos os simplexos de  $K$  tendo  $A$  como face, mais todas as faces desses simplexos.

(ii) A estrela aberta,  $S^{\circ}(A,K)$ , de um simplexo A de K é o conjunto

$$S^{\circ}(A,K) = \bigcup \langle B \rangle, \text{ onde } B \in \text{St}(A,K), B \cap \langle A \rangle \neq \emptyset.$$

(iii) Um complexo simplicial K é chamado localmente finito se para qualquer vértice v de K,  $\text{St}(v,K)$  é formada por um número finito de simplexos. (Note que todo complexo finito é localmente finito).

(iv) Se A é um simplexo de K então o elo ("link") de A em K é o subcomplexo:

$$\text{lk}(A,K) = \{C \in \text{St}(A,K) : A \cap C = \emptyset\}$$

(1.1.6) Definição. Sejam K e L complexos simpliciais. Dizemos que L é uma subdivisão de K, e escrevemos  $L = \alpha K$ , se:

(i)  $|K| = |L|$

(ii) Para todo  $A \in L$ , existe  $B \in K$  tal que  $A \subset B$ .

(1.1.7) Definições.

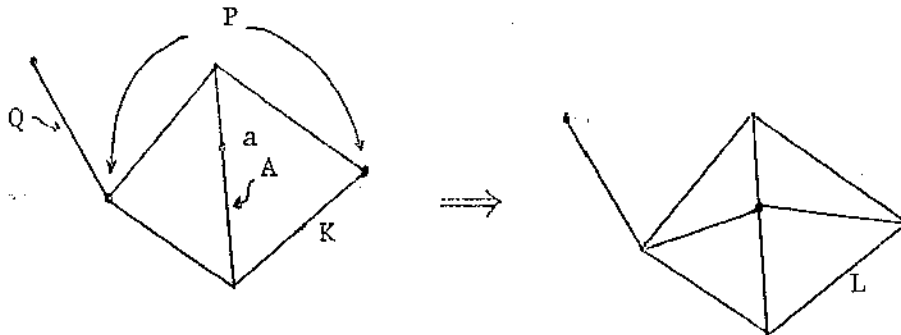
(i) Seja A um simplexo de um complexo simplicial K. O complexo complementar de A em K é o complexo simplicial definido por:

$$Q = K - \{B \in K : \langle B \rangle \subset S^{\circ}(A,K)\}$$

(ii) Seja  $\dot{A}$  o subcomplexo de K cujos simplexos são as faces próprias de A e seja  $P = \text{lk}(A,K)$ . Pode-se demonstrar que  $(A.P) \cup Q = K$  e  $(A.P \cap Q) = \dot{A}.P$ .

(iii) Sejam  $a \in \langle A \rangle$  e  $L = a.(\dot{A}.P) \cup Q$ . A mudança de K para L é chamada uma estrelação elementar de K em a. (Vide figura).

Pode-se demonstrar que  $L$  é uma subdivisão de  $K$ . Uma subdivisão estrelada de  $K$  é qualquer subdivisão de  $K$  obtida por uma sequência finita de estrelações elementares. Uma subdivisão estrelada de  $K$  será denotada com  $\sigma K$



Nas definições abaixo o item (iii) não foi encontrado nas referências.

(1.1.8) Definições

(i) Seja  $A = [a_0, \dots, a_k]$  um  $k$ -simplexo ( $k \neq -1$ ). O baricentro de  $A$  é o ponto:

$$b(A) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k a_i$$

(ii) Sejam  $K$  um complexo simplicial e  $Sd(K)$  o complexo simplicial cujos simplexos são do tipo:

$$B = [b(A_0), \dots, b(A_r)] ;$$

onde  $r$  é um número inteiro satisfazendo  $-1 \leq r \leq \dim K$  e  $A_0 < A_1 < \dots < A_r$  são simplexos de  $K$ .  $Sd(K)$  é chamado a primeira subdivisão baricêntrica de  $K$ .

Definimos, indutivamente, a  $n$ -ésima subdivisão baricêntrica de  $K$ , como o complexo simplicial:

$$Sd^n(K) = Sd(Sd^{n-1}(K)), \text{ com}$$

$$Sd^1(K) = Sd(K)$$

(iii) Sejam  $L_1$  e  $L_2$  subcomplexos de  $K$  tais que  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ .  
 Consideremos  $Sd(L_1)$  e, para cada  $A \in L_1$ , seja:

$$S_A = \{B \in K : B \in \text{lk}(A, K) \text{ e } B \notin L_1\}$$

A primeira subdivisão baricêntrica de  $K$  relativa a  $L_1$  módulo  $L_2$  é a subdivisão de  $K$  definida por:

$$Sd(K, L_1, L_2) = \bigcup_{\substack{A \in L_1 \\ B \in S_A}} (Sd(A).B) \cup \{D \in K : \text{existe } C \in K - \bigcup_{\substack{A \in L_1 \\ B \in S_A}} (A.B) \\ \text{tal que } D \leq C\}$$

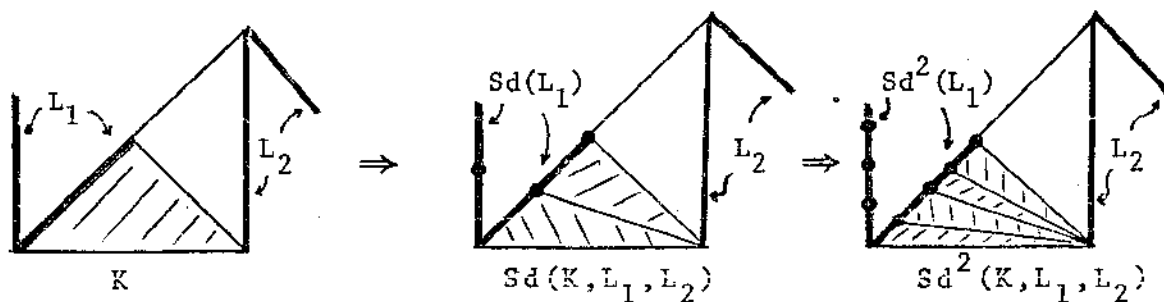
tal que  $D \leq C$

Indutivamente, definimos a  $n$ -ésima subdivisão baricêntrica de  $K$  relativa a  $L_1$  módulo  $L_2$  por:

$$Sd^n(K, L_1, L_2) = Sd(Sd^{n-1}(K, L_1, L_2), Sd^{n-1}(L_1), L_2), \text{ com}$$

$$Sd^1(K, L_1, L_2) = Sd(K, L_1, L_2)$$

Note que esta subdivisão não altera  $L_2$  (vide figura) e que  $Sd^n(L_1)$  e  $L_2$  são subcomplexos de  $Sd^n(K, L_1, L_2)$ .



A partir de agora consideraremos  $E$  como um espaço vetorial real normado, com norma  $\| \cdot \|$  (e portanto  $E$  é um espaço métrico).

(1.1.9) Definição. Sejam  $K$  um complexo simplicial e  $|K|$  (como em (1.1.3 (iv))). A topologia induzida sobre  $|K|$  pela topologia de  $E$  será chamada a topologia métrica de  $|K|$  (ou, por abuso de linguagem, de  $K$ ). O subconjunto  $|K|$  de  $E$ , munido dessa topologia, é então um subespaço topológico de  $E$ , que será denotado com  $|K|_m$ . A topologia que considera como aberto um subconjunto de  $|K|$  se e somente se a intersecção dele com cada simplexo de  $K$  é aberto em  $|A|_m$  (isto é, a intersecção é um aberto de  $A$  com a topologia induzida de  $E$ ) chamamos topologia fraca de  $K$  (ou, por abuso de linguagem, de  $K$ ). Daqui para frente, ao escrevermos  $|K|$ , estaremos entendendo o conjunto  $|K|$  munido da topologia fraca.

(1.1.10) Proposição. Seja  $K$  um complexo simplicial em  $E$  (esp. vetorial real normado).

(i) A aplicação identidade  $i: |K| \rightarrow |K|_m$  é contínua, isto é, a topologia fraca é mais fina que a métrica.

(ii) A topologia fraca e a métrica coincidem se e somente se  $K$  é localmente finito (em particular elas coincidem quando  $K$  é finito).

(iii) Se  $K$  é finito então  $|K| = |K|_m$  é compacto.

(iv) Seja  $L$  um subcomplexo de  $K$ . Então o subconjunto  $|L|$  é fechado em  $|K|$  e em  $|K|_m$ .



(v) Seja  $v$  um vértice de  $L$ . Então  $S\tilde{E}(v,K)$  é aberto em  $|K|$  e em  $|K|_m$ .

Além disso a família  $\{S\tilde{E}(v,K): v \in K^0\}$  (onde  $K^0$  é o 0-esqueleto) é uma cobertura aberta de  $|K|$  e de  $|K|_m$ .

Demonstração. Ver Eilenberg-Steenrod, p. 75.

(1.1.11) Definição. Seja  $K$  um complexo simplicial. A malha ("mesh") de  $K$  é definida por:

$$\text{mesh}(K) = \sup_{A \in K} \{\text{diâmetro de } A\}$$

Note que se  $K$  é finito então  $\text{mesh}(K) < \infty$

(1.1.12) Proposição. Seja  $K$  um complexo simplicial de dimensão  $n$  em  $E$ . Então  $\text{mesh}(Sd(K)) \leq \frac{n}{n+1} \text{mesh}(K)$ . Se  $K$  é tal que  $\text{mesh}(K) < \infty$  então  $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{mesh}(Sd^r(K)) = 0$ .

Demonstração. Ver Eilenberg-Steenrod, p. 63

(1.1.13) Definições

(i) Seja  $X$  um espaço topológico. Uma triangulação de  $X$  é um par  $(K,h)$  onde  $K$  é um complexo simplicial num espaço vetorial normado e  $h: |K| \rightarrow X$  é um homeomorfismo. Quando  $K$  é finito  $X$  é chamado poliedro.

(ii) Seja  $A$  um subespaço de  $X$ . O par  $(X,A)$  é dito triangulável se existe uma triangulação  $(K,h)$  de  $X$  e um subcomplexo  $L$  de  $K$  tal que o par  $(L,g)$ , onde  $g$  é a restrição de  $h$  a  $|L|$ , é uma triangulação de  $A$ . O par  $(X,A)$  é finitamente triangulável.

se existe uma triangulação  $(K, h)$  como acima tal que o complexo simplicial é finito. (Note que um espaço triangulável é finitamente triangulável se e somente se ele é compacto.)

(1.1.14) Proposição.  $S^n$  é triangulável

Demonstração. Ver Maunder, p. 36

(1.1.15) Proposição. O par  $(I, \partial I)$ , onde  $I = [0, 1]$  e  $\partial I = \{0, 1\}$ , é triangulável.

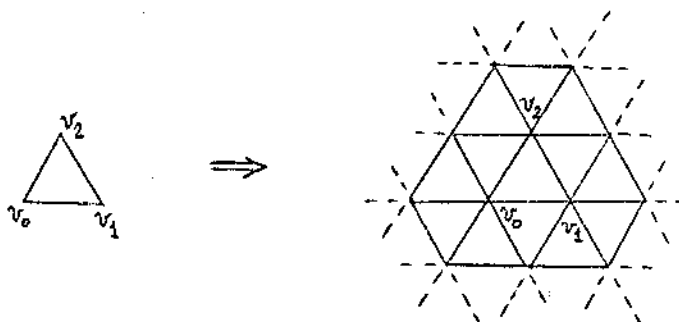
Demonstração. Basta considerarmos o complexo simplicial em  $\mathbb{R}$  gerado pelos pontos 0 e 1 e tomaremos  $h$  como a identidade.

(1.1.16) Definição. Sejam  $E$  um espaço vetorial real e  $S$  um subconjunto de  $E$ .  $S$  é chamado um n-plano se  $S = a + H$  onde  $a$  é um ponto de  $E$  e  $H$  é um subespaço  $n$ -dimensional de  $E$ .

Introduzimos agora uma estrutura simplicial em  $\mathbb{R}^n$ , conveniente para os nossos propósitos posteriores.

(1.1.17) Estrutura Simplicial Regular em  $\mathbb{R}^n$ . Sejam  $d$  um número real estritamente positivo e  $v_0, v_1, \dots, v_n$   $n+1$  pontos em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $\|v_i - v_j\| = d$  para todo par  $(i, j)$  tal que  $0 \leq i < j \leq n$ . Pode-se provar que estes pontos estão em posição geral e então determinam um  $n$  simplexo em  $\mathbb{R}^n$ . Fixemos  $n+1$  pontos nestas condições e consideremos todos os  $k$ -planos ( $0 \leq k < n$ ) determinados por estes pontos e todos os pontos obtidos por reflexão dos pontos iniciais nestes planos. Indutivamente, consideremos os  $k$ -planos ( $0 \leq k < n$ ) determinados pelos pontos já obtidos e to

dos os pontos que provêm dos anteriores por reflexão nestes planos. Temos então, construída indutivamente, uma sequência de pontos em  $\mathbb{R}^n$ . Ao complexo simplicial cujos vértices são os pontos assim determinados e cujos simplexes são aqueles gerados por vértices que estão dois a dois à distância  $d$ , chamamos estrutura simplicial regular de  $\mathbb{R}^n$ .



(1.1.18) Proposição. Seja  $A = [w_0, \dots, w_n]$  um  $n$ -simplexo da estrutura simplicial regular de  $\mathbb{R}^n$  e  $B = [w_0, \dots, w_k]$  uma  $k$ -face de  $A$ . Então o conjunto  $C$ , obtido de  $A$  por reflexão no  $k$ -plano determinado por  $B$ , é um  $n$ -simplexo da estrutura regular de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $A \cap C = B$ .

Demonstração. Se refletirmos os vértices de  $A$  no  $k$ -plano mencionado obtemos  $n+1$  pontos que estão dois a dois à distância  $d$ , pois reflexão preserva distâncias; os pontos refletidos geram um  $n$ -simplexo de  $\mathbb{R}^n$ , que pertence à estrutura simplicial regular de  $\mathbb{R}^n$  por definição. A segunda afirmação é óbvia.

(1.1.19) Definição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais. Uma aplicação  $f: |K| \rightarrow |L|$  é dita uma aplicação simplicial de  $K$  em  $L$  (e denotada geralmente por  $f: K \rightarrow L$ , a não ser quando quiser-

mos ressaltar os espaços associados, quando então escreveremos explicitamente  $f: |K| \rightarrow |L|$ .) se as condições abaixo forem satisfeitas:

- (i) Para cada vértice  $v$  de  $K$ ,  $f(v)$  é vértice de  $L$ .
- (ii) Para cada simplexo  $A$  de  $K$ ,  $f(A)$  é simplexo de  $L$ .
- (iii) Se  $v$  é um ponto do simplexo  $[v_0, \dots, v_n]$  de  $K$  e  $v = \sum a_i v_i$ , então  $f(v) = \sum a_i f(v_i)$  (isto é,  $f$  é linear nos simplexos).

(1.1.20) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais.

(i) Seja  $f$  uma aplicação simplicial de  $K$  em  $L$ . Então  $f$  é contínua tanto se considerarmos  $|K|$  e  $|L|$  ambos com a topologia fraca quanto se considerarmos ambos com a topologia métrica.

(ii) Qualquer função  $f_1: K^0 \rightarrow L$  (Ver (1.1.3(vi))) pode ser estendida por linearidade nos simplexos a uma função contínua (tanto na topologia métrica quanto na topologia fraca)  $f: |K| \rightarrow |L|$ . Se, além disso,  $f_1$  leva vértices de um simplexo de  $K$  em vértices de um simplexo de  $L$ , então  $f$  é simplicial.

Demonstração. Para (i) ver Eilenberg-Steenrod, p. 75 ; para (ii), ver op. cit, Teor. 4.4, p. 58.

(1.1.21) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais e  $f: K \rightarrow L$  uma aplicação simplicial injetora. Então  $f$  preserva a dimensão dos simplexos e leva baricentros em baricentros.

Demonstração. A primeira afirmação é trivial. Para demonstrar

a segunda notemos que se  $A = [v_0, \dots, v_n]$  é um simplexo de  $K$  então:

$$f\left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v_i\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f(v_i) = b([f(v_0), \dots, f(v_n)])$$

pois  $f(v_0), \dots, f(v_n)$  são vértices distintos de um simplexo de  $L$ . (Note que a segunda asserção pode ser expressa pela relação  $f(b(A)) = b(f(A))$ ).

A proposição seguinte será usada em (7.1.6) e (7.2.2).

(1.1.22) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais e  $f: K \rightarrow L$  uma aplicação simplicial injetora. Então  $f: Sd(K) \rightarrow Sd(L)$  é uma aplicação simplicial.

Demonstração. Pela proposição anterior  $f$  leva vértices de  $Sd(K)$  em vértices de  $Sd(L)$ . Seja agora  $x = t_0 b(A_0) + \dots + t_n b(A_n)$  um ponto de um simplexo  $[b(A_0), \dots, b(A_n)]$  de  $Sd(K)$  onde  $A_0 = [a_0, \dots, a_{n_0}]$ ,  $A_1 = [a_0, \dots, a_{k_0}, \dots, a_{k_1}]$ ,  $\dots$ ,

$$A_n = [a_0, \dots, a_{k_0}, \dots, a_{k_1}, \dots, a_{k_n}]$$

são simplexos de  $K$  com  $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_n$  e  $n \leq k_n$ . Dessa forma

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left[\left(\frac{t_0}{k_0+1}\right) \sum_0^{h_0} a_i + \dots + \left(\frac{t_n}{k_n+1}\right) \sum_0^{k_n} a_i\right] \\ &= f\left[\left(\frac{t_0}{k_0+1} + \dots + \frac{t_n}{k_n+1}\right) a_0 + \dots + \left(\frac{t_n}{k_n+1}\right) a_{k_n}\right] \\ &= \left(\frac{t_0}{k_0+1} + \dots + \frac{t_n}{k_n+1}\right) f(a_0) + \dots + \left(\frac{t_n}{k_n+1}\right) f(a_{k_n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{t_0}{k_0+1}\right) \sum_0^{h_0} f(a_i) + \dots + \left(\frac{t_n}{k_n+1}\right) \sum_0^{k_n} f(a_i) \\
 &= t_0 \left(\frac{1}{k_0+1} \sum_0^{h_0} f(a_i)\right) + \dots + t_n \left(\frac{1}{k_n+1} \sum_0^{h_n} f(a_i)\right) \\
 &= t_0 b(f(A_0)) + \dots + t_n b(f(A_n)) = t_0 f(b(A_0)) + \dots + t_n f(b(A_n)).
 \end{aligned}$$

Assim  $f$  é linear nos simplexos. Além disso se  $[b(A_0), \dots, b(A_n)]$  é um simplexo de  $Sd(K)$  então  $a_0 < A_1 < \dots < A_n$  são simplexos de  $K$ . Dessa forma  $f(A_1) < \dots < f(A_n)$  são simplexos de  $L$  pois  $f$  é simplexo de  $L$  pois  $f$  é simplicial e injetora e portanto

$$\begin{aligned}
 f[b(A_0), \dots, b(A_n)] &= [f(b(A_0)), \dots, f(b(A_n))] \\
 &= [b(f(A_0)), \dots, b(f(A_n))]
 \end{aligned}$$

é um simplexo de  $Sd(L)$ . Assim  $f$  leva simplexos de  $Sd(K)$  em simplexos de  $Sd(L)$  e portanto  $f: Sd(K) \rightarrow Sd(L)$  é simplicial.

(1.1.23) Definição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais e

$f: |K| \rightarrow |L|$  uma aplicação contínua. Uma aplicação simplicial  $g: K \rightarrow L$  é chamada uma aproximação simplicial de  $f$  se para todo  $x$  em  $|K|$  e todo simplexo  $A$  de  $L$ , o fato de  $f(x) \in \langle A \rangle$  implicar que  $g(x) \in A$ . (Note que se  $v$  é vértice de  $K$  tal que  $f(v)$  é vértice de  $L$ , então  $g(v) = f(v)$ .)

Além disso, se definirmos  $d(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in |K|\}$  temos que  $d(f, g) \leq \text{mesh}(L)$ .

A proposição seguinte será utilizada em (2.3.5).

(1.1.24) Proposição. Se  $K$  é um complexo simplicial e  $v_0, \dots, v_n$  são vértices distintos de  $K$  então  $[v_0, \dots, v_n] \in K$  se e somente

se  $\bigcap_{i=0}^n \text{st}^0(v_i, K) \neq \emptyset$ .

Demonstração. Ver Eilenberg-Steenrod, Lema 3.7, p. 57 .

(1.1.26) Teorema da Aproximação Simplicial Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais tal que  $K$  é finito e  $f: |K| \rightarrow |L|$  uma aplicação contínua. Então existem  $n \in \mathbb{N}$  e uma aplicação simplicial  $g: \text{Sd}^n(K) \rightarrow L$  que é uma aproximação simplicial de  $f$ .

Demonstração. Ver Eilenberg-Steenrod. Cor. 7.4, p. 65 .

(1.1.27) Definição . Seja  $L$  um subcomplexo de  $K$ . O subconjunto aberto  $N(L, K) = \bigcup_{v \in L} \text{st}^0(v, K)$  de  $|K|$  é chamado a vizinhança regular de  $L$  em  $K$ . Se  $k$  é um número natural, a  $k$ -ésima vizinhança regular de  $L$  em  $K$  é o subconjunto aberto  $N^k(L, K) = N(\text{Sd}^k(L), \text{Sd}^k(K))$  (note que  $N^0(L, K) = N(L, K)$ ).

(1.1.28) Definição. Seja  $L$  um subcomplexo de  $K$  .  $L$  é chamado um subcomplexo total ("full subcomplex") de  $K$  se  $L$  contém cada simplexo de  $K$  cujos vértices estão todos em  $L$ .

(1.1.29) Proposição. Sejam  $K$  um complexo simplicial e  $L$  um subcomplexo de  $L$ . Então  $\text{Sd}(L)$  é um subcomplexo total de  $\text{Sd}(K)$ .

Demonstração. Ver Eilenberg-Steenrod, Lema 9.4, p.71 .

(1.1.30) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais e  $f: K \rightarrow L$  uma aplicação simplicial tal que  $f: |K| \rightarrow |L|$  é um homeomorfismo. Então  $f^{-1}: L \rightarrow K$  é uma aplicação simplicial.

Demonstração. Ver Eilenberg-Steenrod, Teor. 4.7, p.59 .

## 1.2. Complexos Celulares

Referências: Glaser, p. 9 e Munkres , p. 71 .

(1.2.1) Definições. Sejam  $E$  um espaço vetorial real normado e  $S$  um subconjunto de  $E$ .

(i) Se para quaisquer dois pontos  $x$  e  $y$  em  $S$ , o segmento de reta unindo  $x$  a  $y$  está cortado em  $S$ , dizemos que  $S$  é convexo.

(ii) Se  $S$  é um conjunto convexo, a dimensão de  $S$  é o menor  $n$  tal que existe um  $n$ -plano de  $E$  contendo  $S$ .

(1.2.2) Definição. Seja  $E$  um espaço vetorial real normado. Definimos uma célula em  $E$  por inclusão na dimensão. Uma célula de dimensão zero em  $E$  é um ponto de  $E$ . Se  $k \geq 1$ , uma célula de dimensão  $k$  em  $E$  é um subconjunto compacto, convexo e de dimensão  $k$  de  $E$ , cuja fronteira topológica (que chamaremos de bordo da célula) é a união de um número finito (não nulo) de células de dimensão  $k-1$  com interiores disjuntos (estas são chamadas as  $(k-1)$ -faces da célula). Ainda indutivamente, se  $1 < i \leq k$  uma  $(k-i)$ -face de uma célula de dimensão  $k$  é uma  $(k-i)$ -face de uma  $(k-i+1)$ -face da célula considerada. As 0-faces são chamadas vértices. (Note que se  $k \geq 0$ , um  $k$ -simplexo é uma célula).

(1.2.3) Definições. Seja  $E$  um espaço vetorial normado.

(i) Um complexo celular em  $E$  é uma coleção  $K$  de células em  $E$  satisfazendo:



- a) Se  $B \in K$  então todas as faces de  $B$  estão em  $K$ .
- b) Se  $B, D \in K$  então  $B \cap D = \emptyset$  ou  $B \cap D$  é face de  $B$  e de  $D$ .

(ii) Seja  $K$  um complexo celular em  $E$ . Associamos a  $K$  o subconjunto  $|K|$  de  $E$  definido por:

$$|K| = \bigcup_{A \in K} A$$

(iii) Seja  $K$  como em (ii). A dimensão de  $K$ , denotada  $\dim K$ , é o supremo das dimensões de suas células.

(iv) Seja  $K$  como em (ii). Um subcomplexo de  $K$  é complexo celular  $L$  em  $E$  tal que  $L \subset K$ .

(v) Seja  $K$  como em (ii) e  $r$  um número natural. O  $r$ -esquerleto de  $K$  (denotado com  $K^r$ ) é o subcomplexo de  $K$  formado pelas células de  $K$  de dimensão menor do que ou igual a  $r$ .

(1.2.4) Definição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos celulares em espaços vetoriais reais normados  $E$  e  $F$ , respectivamente. O produto cartesiano de  $K$  por  $L$  é o complexo celular  $K \times L$  em  $E \times F$ , definido por

$$K \times L = \{A \times B \subset E \times F : A \in K, B \in L\}.$$

(1.2.5) Definição. Sejam  $A$  uma célula em  $E$  e  $v_1, \dots, v_n$  os seus vértices. O baricentro de  $A$  é o ponto  $b(A)$  de  $A$  definido por:

$$b(A) = \frac{1}{n} v_1 + \dots + \frac{1}{n} v_n.$$

(1.2.6) Proposição. Sejam  $A$  e  $B$  células em espaços vetoriais reais normados  $E$  e  $F$  respectivamente. Então  $b(A \times B) = (b(A), b(B))$

Demonstração. Sejam  $v_1, \dots, v_m$  os vértices de A e  $w_1, \dots, w_n$  os vértices de B. Então  $A \times B$  tem  $m \cdot n$  vértices que são os pontos  $(v_i, w_j)$  ( $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ ). Logo:

$$\begin{aligned} b(A \times B) &= \frac{1}{n \cdot m} \sum_{i,j=1}^{m,n} (v_i, w_j) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (v_i, w_j) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (v_i, \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n w_j) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (v_i, b(B)) \\ &= (\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m v_i, b(B)) = (b(A), b(B)) . \end{aligned}$$

(1.2.7) Definição. Uma subdivisão de um complexo celular K em E é um complexo celular L em E tal que:

- (i)  $|K| = |L|$ .
- (ii) Para cada célula  $A \in L$  existe uma célula  $B \in K$ .

(1.2.8) Proposição. Sejam K e L complexos celulares em E tais que  $|K| = |L|$ .

Então K e L têm uma subdivisão comum.

Demonstração. Ver Munkres, Lema 7.7, p.74 .

(1.2.9) Proposição. Seja K um complexo celular de dimensão finita. Então K admite uma subdivisão chamada primeira subdivisão baricêntrica que é um complexo simplicial.

Esta demonstração é um caso particular daquela que se encontra em Munkres, Lema 7.8. A demonstração (que é análoga à de loc. cit.) será incluída aqui porque posteriormente (Ver (7.2.2))

necessitaremos saber exatamente como escrever um simplexo dessa subdivisão (Ver (1.2.10)).

Demonstração. Procederemos por indução sobre a dimensão  $m$  de  $K$ . Se  $m=0$  ou  $m=1$ ,  $K$  já é um complexo simplicial. Seja  $L$  a primeira subdivisão baracêntrica de  $K^{m-1}$ ; então  $L$  é um complexo simplicial. Se  $C$  é uma  $m$ -célula qualquer de  $K$ , o bordo de  $C$  está contido em  $K^{m-1}$ ; sejam  $A_1, A_2, \dots, A_k$  os simplexos de  $L$  que recobrem esse bordo. Se  $b(C)$  é o caricentro de  $C$ , acrescentamos a  $L$  os simplexos  $A_1 \cdot b(C), \dots, A_k \cdot b(C)$  (onde  $\cdot$  indica a junção). Fazendo isto para todas as  $m$ -células de  $K$ , temos um complexo simplicial que é uma subdivisão de  $K$ .

(1.2.10) Observação. Da demonstração anterior deduzimos que os simplexos da primeira subdivisão baricêntrica do complexo celular  $K$  são de forma  $[b(C_0), \dots, b(C_k)]$ , onde  $C_0 < C_1 < \dots < C_k$  são células de  $K$  e a notação  $C_i < C_j$  indica que  $C_i$  é face própria de  $C_j$ .

### 1.3. Complexos CW

Referencia: Spanier, pp. 145 e 401.

Para cada número natural  $n \geq 1$  escreveremos  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  e  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ .

(1.3.1) Definição. Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A$  um subespaço fechado de  $X$ . Dizemos que  $X$  é obtido de  $A$  por adjunção de  $n$ -células  $\{e_j^n\}$ , onde  $n \geq 0$ , se:

(i) Para cada  $j$ ,  $e_j^n$  é um subconjunto de  $X$ .

(ii) Se  $\dot{e}_j^n = e_j^n \cap A$ , então  $e_j^n - \dot{e}_j^n$  é disjunto de  $e_i^n - \dot{e}_i^n$

para  $j \neq i$ .

(iii) Para cada  $j$  há uma aplicação

$$f_j : (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (e_j^n, \dot{e}_j^n)$$

(chamada aplicação característica) tal que  $f_j(B^n) = e_j^n$ ,  $f_j$  aplica  $B^n - S^{n-1}$  homeomorficamente sobre  $e_j^n - \dot{e}_j^n$  e  $e_j^n$  tem a topologia conduzida por  $f_j$  e a aplicação inclusão  $\dot{e}_j^n \subset e_j^n$ .

(iv)  $X = A \cup \{\cup_j e_j^n\}$ , e a topologia de  $X$  é coerente com  $\{A, \{e_j^n\}\}$  (isto é, um subconjunto  $\mathcal{U}$  de  $X$  é aberto em  $X$  se e somente se  $\mathcal{U} \cap A$  é aberto em  $A$  e  $\mathcal{U} \cap e_j^n$  é aberto em  $e_j^n$  para todo  $j$ ).

### (1.3.2) Definições.

(i) Um complexo CW relativo  $(X, A)$  consiste num espaço topológico  $X$ , um subespaço fechado  $A$  e uma sequência  $\{(X, A)^k\}_{k \geq 0}$  de subespaços fechados de  $X$  tais que:

a)  $(X, A)^0$  é obtido de  $A$  por adjunção de 0-células.

b) Para  $k \geq 1$ ,  $(X, A)^k$  é obtido de  $(X, A)^{k-1}$  por adjunção de  $k$ -células.

c) 
$$X = \bigcup_k (X, A)^k$$

d) A topologia de  $X$  é coerente com  $\{(X, A)^k\}_k$  (isto é, um subconjunto  $\mathcal{U}$  de  $X$  é aberto em  $X$  se e somente se  $\mathcal{U} \cap (X, A)^k$

é aberto em  $(X,A)^k$  para todo  $k$ ).

(ii) Sejam  $X$  e  $\{(X,A)^k\}_k$  como na parte (i). Então  $(X,A)^k$  é chamado o k-esqueleto de X relativo a A.

(iii) Sejam  $X$  e  $\{(X,A)^k\}_k$  como na parte (i). Se  $X = (X,A)^n$  para algum  $n$  dizemos que a dimensão de X-A é menor do que ou igual a  $n$  e escrevemos  $\dim(X-A) \leq n$ .

(iv) Um complexo CW (absoluto) X é um complexo CW relativo  $(X,\emptyset)$ . O k-esqueleto de um complexo CW (absoluto) X é denotado  $X^k$ .

(1.3.3) Observação. Se  $(K,L)$  é um par simplicial (isto é, Se  $L$  é um subcomplexo de um complexo simplicial  $K$ ) então há um complexo CW relativo  $(|K|,|L|)$  com  $(|K|,|L|)^k = |K^k \cup L|$ . Em particular se  $K$  é um complexo simplicial então  $|K|$  é um complexo CW (absoluto). (Ver Spanier, p.401.)

=====  
=====

## CAPÍTULO 2

### HOMOTOPIA

#### 2.1. Definições e Propriedades Fundamentais

Referências principais: Conde, Eilenberg-Steenrod, Hu, Lima, Milnor, Spanier.

(2.1.1) Definições. Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f$  e  $g$  aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ .

(i) Dizemos que  $f$  é homotópica a  $g$  (notação:  $f \simeq g$ ) se existe uma aplicação contínua  $H: X \times I \rightarrow Y$  (chamada homotopia) tal que  $H(x,0) = f(x)$  e  $H(x,1) = g(x)$  para todo  $x$  em  $X$ .

(ii) Sejam  $A$  um subespaço de  $X$  e  $f$  e  $g$  tais que  $f(a) = g(a)$  para todo  $a \in A$ . Dizemos que  $f$  é homotópica a  $g$  relativamente a  $A$  (notação:  $f \simeq g \text{ rel } A$ ) se a aplicação  $H$  do ítem (i) satisfaz  $H(a,t) = f(a) = g(a)$  para todo  $a \in A$  e todo  $t \in I$ .

(iii) Se denotarmos por  $Y^X$  o conjunto das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$  então as relações " $\simeq$ " e " $\simeq \text{ rel } A$ " são relações de equivalência em  $Y^X$ .

(2.1.2) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais,

$f: |K| \rightarrow |L|$  uma aplicação contínua e  $g: K \rightarrow L$  uma aproximação simplicial de  $f$  e  $A$  o seguinte conjunto:

$$A = \{x \in |K| : g(x) = f(x)\}$$

Então  $g \simeq f \text{ rel } A$ .

Demonstração. Ver Eilenberg-Steenrod, Teor. 7.6, p.65 ; Spanier, Lema 2, p.126 .

(2.1.3) Definições.

(i) Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A$  e  $B$  subespaços de  $X$  e  $Y$ , respectivamente, e  $f: A \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Dizemos que  $f$  é deformável a  $B$  em  $Y$  se existe uma homotopia  $F: A \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(\cdot, 0) = f$  e  $F(A, 1) \subset B$ .

A aplicação  $F$  é chamada uma deformação de  $f$  a  $B$  em  $Y$ .

(ii) Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A$  e  $B$  subespaços de  $X$ . Dizemos que  $A$  é deformável a  $B$  em  $X$  se a aplicação inclusão  $j_A: A \rightarrow X$  é deformável a  $B$  em  $X$ . Dizemos que  $A$  é contrátil se  $B$  se reduz a um ponto e  $A$  é deformável a  $B$  em  $X$  (e portanto a inclusão anterior é homotópica a uma aplicação constante). Em particular o espaço  $X$  é dito contrátil se a aplicação identidade em  $X$  é homotópica a alguma aplicação constante.

(2.1.4) Definição. Dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  são ditos ter o mesmo tipo de homotopia se existem aplicações contínuas  $f: X \rightarrow Y$  e  $g: Y \rightarrow X$  tais que  $g \circ f \simeq id_X$  e  $f \circ g \simeq id_Y$ , onde  $id_X$  e  $id_Y$  são as aplicações identidade em  $X$  e em  $Y$ , respectivamente. A aplicação  $f$  (ou  $g$ ) é chamada uma equivalência de homotopia.

(2.1.5) Proposição. Sejam  $A, B$  e  $C$  espaços topológicos tais que  $A$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $B$  e  $B$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $C$ . Então  $A$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $C$ .

Demonstração. Sejam  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow A$  tais que  $f \circ g \simeq id_B$  e  $g \circ f \simeq id_A$  e  $p: B \rightarrow C$  e  $q: C \rightarrow B$  tais que  $p \circ q \simeq id_C$  e  $q \circ p \simeq id_B$ .

Então  $p \circ f: A \rightarrow C$  e  $g \circ q: C \rightarrow A$  são tais que  $(p \circ f) \circ (g \circ q) =$   
 $= p \circ (f \circ g) \circ q \simeq p \circ \text{id}_B \circ q = p \circ q \simeq \text{id}_C$  e analogamente  $(g \circ q) \circ (p \circ f) \simeq \text{id}_A$ .

(2.1.6) Proposição. Um espaço topológico é contrátil se e somente se ele tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

Demonstração. Ver Spanier, Teor. 10, p.26 .

A proposição seguinte será usada em (5.1.7)

(2.1.7) Proposição. Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A, B, C$  e  $D$  subespaços de  $X$  tais que  $B \subset C$ ,  $A$  é deformável a  $B$  em  $X$  e  $C$  é deformável a  $D$  em  $X$ .

Então  $A$  é deformável a  $D$  em  $X$ .

Demonstração. Seja  $F: A \times I \rightarrow X$  a homotopia tal que  $F(\cdot, 0)$  é a inclusão  $j_A$  de  $A$  em  $X$  e  $F(A, 1) \subset B$ . Seja  $G: C \times I \rightarrow X$  a homotopia tal que  $G(\cdot, 0)$  é a inclusão  $j_C$  de  $C$  em  $X$  e  $G(C, 1) \subset D$ . Definimos uma aplicação  $H: A \times I \rightarrow X$  por:

$$H(a, t) = \begin{cases} F(a, 2t) & \text{para } a \in A \text{ e } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(F(a, 1), 2t - 1) & \text{para } a \in A \text{ e } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Seja  $t = \frac{1}{2}$ . Como  $F(a, 1) \in C$  para  $a \in A$ , temos  $F(a, 2 \cdot \frac{1}{2}) = F(a, 1) =$   
 $= j_C(F(a, 1)) = G(F(a, 1), 2 \cdot \frac{1}{2} - 1)$ . Segue daí que  $H$  é contínua.

Além disso

$$H(\cdot, 0) = F(\cdot, 0) = j_A$$

$$H(A, 1) = G(F(A, 1), 1) \subset G(B, 1) \subset G(C, 1) \subset D$$

Portanto  $H$  é uma deformação de  $A$  a  $D$  em  $X$ .



(2.1.8) Definições. Sejam um espaço topológico  $X$ ,  $A$  um subspaço de  $X$ ,  $j_A$  a inclusão de  $A$  em  $X$ ,  $id_A$  e  $id_X$  as aplicações identidades em  $A$  e em  $X$ , respectivamente.

(i) Dizemos que  $A$  é um retrato de  $X$  se existe uma aplicação contínua  $f: X \rightarrow A$  tal que  $f \circ j_A = id_A$  (isto é,  $f(x) = x$  para todo  $x \in A$ ). A aplicação  $f$  é chamada uma retração de  $X$  em  $A$ .

(ii)  $A$  é chamado um retrato de deformação de  $X$  se existe uma retração  $f$  de  $X$  a  $A$  tal que  $j_A \circ f \simeq id_X$ . Neste caso  $f$  é chamada uma retração de deformação.

(iii)  $A$  é chamado um retrato de deformação forte de  $X$  se existe uma retração  $f$  de  $X$  a  $A$  tal que  $j_A \circ f \simeq id_X$  rel  $A$ . Neste caso  $f$  é chamada uma retração de deformação forte.

(2.1.9) Proposição. Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A$  um retrato de deformação de  $X$ . Então  $A$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $X$ .

Demonstração. Segue das definições acima.

(2.1.10) Proposição. Sejam  $K$  um complexo simplicial,  $L$  um subcomplexo total de  $K$  e  $N(L, K)$  a vizinhança regular de  $L$  em  $K$  (Ver (1.1.27)). Para cada  $x \in N(L, K)$  temos  $x = \sum_j a_j v_j$  ( $v_j$  vértice de  $N(L, K)$ ). Definimos então

$$v(x) = \sum_i a_i$$
$$f(x) = \sum_i \frac{1}{v(x)} a_i v_i$$

Em cada caso a soma é tomada sobre os vértices de  $L$ . Então  $f(x) \in |L|$

e  $f$  é uma retração de  $N(L,K)$  em  $|L|$ . Além disso a homotopia  $h: N(L,K) \times I \rightarrow N(L,K)$  definida por

$$h(x,t) = t.f(x) + (1-t)x$$

mostra que  $|L|$  é um retrato de deformação forte de  $N(L,K)$ .

Demonstração. Ver Eilenberg-Steenrod, Lema 9.3, p.70 .

(2.1.11) Definição. Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos,  $A$  um subespaço de  $X$  e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua.

(i) Uma homotopia parcial de  $f$  é uma homotopia  $F: A \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x,0) = f(x)$  para todo  $x \in A$ .

(ii)  $A$  é dito ter a propriedade da extensão de homotopia em  $X$  com respeito a  $Y$  se toda homotopia parcial  $H: A \times I \rightarrow Y$  de toda aplicação contínua  $f: X \rightarrow Y$  tem extensão contínua  $\tilde{H}: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $\tilde{H}(x,0) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .

(iii)  $A$  é dito ter a propriedade absoluta de extensão de homotopia em  $X$  se  $A$  tem a propriedade de extensão de homotopia em  $X$  com respeito a qualquer espaço  $Y$ .

(2.1.12) Proposição. Se  $(X,A)$  é um par finitamente triangulável (Ver (1.1.12 (ii))) então  $A$  tem a propriedade absoluta da extensão de homotopia em  $X$ .

Demonstração. Ver Hu, Prop. 9.2, p.14 .

(2.1.13) Definição. Sejam  $M$  e  $N$  variedades  $C^\infty$  sem bordo e  $f$  e  $g$  aplicações  $C^\infty$  de  $M$  em  $N$ . Uma homotopia  $C^\infty$  entre  $f$  e  $g$  é uma aplicação  $C^\infty$   $F: M \times I \rightarrow N$  tal que  $F(x,0) = f(x)$  e  $F(x,1) = g(x)$

para todo  $x \in M$ .

Se existe uma homotopia  $C^\infty$  entre  $f$  e  $g$  diz-se que  $f$  e  $g$  são homotópicas  $C^\infty$ .

Pode-se provar (Ver Lima, p.23) que a relação " $f$  é homotópica  $C^\infty$  a  $g$ " é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações  $C^\infty$  de  $M$  em  $N$ .

(2.1.14) Proposição. Sejam  $M$  e  $N$  variedades  $C^\infty$ , sem bordo, compactas.

(i) Toda aplicação contínua de  $M$  em  $N$  é homotópica a uma aplicação  $C^\infty$  de  $M$  em  $N$ .

(ii) Se duas aplicações  $C^\infty$  de  $M$  em  $N$  são homotópicas, elas são homotópicas  $C^\infty$ .

Demonstração. Ver Lima, p.25 .

## 2.2. Grupos de Homotopia

Referências principais: Hu, Spanier.

Se  $n$  é um número natural  $n \geq 1$ , denotaremos com  $I^n$  o cubo unitário  $n$ -dimensional e com  $\partial I^n$  o bordo de  $I^n$ . Sejam  $X$  um espaço topológico e  $x_0 \in X$ . Sejam  $\Gamma_n(X, x_0)$  o conjunto de todas as aplicações contínuas  $\alpha: I^n \rightarrow X$  tais que  $\alpha(\partial I^n) = x_0$  e  $\pi_n(X, x_0)$  o conjunto quociente de  $\Gamma_n(X, x_0)$  pela relação de equivalência "homotopia relativa a  $\partial I^n$ ". Se  $\alpha, \beta \in \Gamma_n(X, x_0)$  definimos  $\alpha * \beta: I^n \rightarrow X$  por

$$(\alpha*\beta)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \dots, t_n) & (0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq t_2, \dots, t_n \leq 1) \\ \beta(2t_1-1, t_2, \dots, t_n) & (\frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1, 0 \leq t_2, \dots, t_n \leq 1) \end{cases}$$

Se  $\alpha \in \Gamma_n(X, x_0)$  definimos  $\alpha^{-1}: I^n \rightarrow X$  por:

$$\alpha^{-1}(t_1, \dots, t_n) = \alpha(1-t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (0 \leq t_1, \dots, t_n \leq 1)$$

(2.2.1) Proposição. Sejam  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  e  $\gamma$  elementos de  $\Gamma_n(X, x_0)$ .

(i)  $\alpha*\beta \in \Gamma_n(X, x_0)$  e  $\alpha^{-1} \in \Gamma_n(X, x_0)$ .

(ii) Se  $\alpha \simeq \alpha' \text{ rel } \partial I^n$  e  $\beta \simeq \beta' \text{ rel } \partial I^n$  então  $\alpha*\beta \simeq \alpha'*\beta' \text{ rel } \partial I^n$ .

(iii)  $(\alpha*\beta)*\gamma \simeq \alpha*(\beta*\gamma) \text{ rel } \partial I^n$ .

(iv) Seja  $\xi \in \Gamma_n(X, x_0)$  tal que  $\xi(t_1, \dots, t_n) = x_0$  para todo  $(t_1, \dots, t_n) \in I^n$ .

Então  $\xi*\alpha \simeq \alpha*\xi \simeq \alpha \text{ rel } \partial I^n$ .

(v)  $\alpha*\alpha^{-1} \simeq \xi \simeq \alpha^{-1}*\alpha \text{ rel } \partial I^n$ .

Demonstração. Ver Hu, p.108 .

Se  $\alpha \in \Gamma_n(X, x_0)$  denotaremos por  $[\alpha]$  a classe de homotopia rel  $\partial I^n$  de  $\alpha$  em  $\pi_n(X, x_0)$ ; e se  $\beta \in \Gamma_n(X, x_0)$ , definimos  $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha*\beta]$ . Então, pelas propriedades acima,  $(\pi_n(X, x_0), \cdot)$  torna-se um grupo.

(2.2.2) Definição. O grupo  $\pi_n(X, x_0)$  é chamado o grupo de homotopia (absoluto) n-dimensional de X com ponto base  $s_0$ . Para  $n=1$ ,  $\pi_1(X, x_0)$  é chamado o grupo fundamental de X com ponto base  $x_0$ .

(2.2.3) Proposição. Sejam  $X, Y$  e  $Z$  espaços topológicos e  $x_0$  um ponto de  $X$ .

(i) Seja  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua tal que  $f(x_0) = y_0$ , e para cada  $n \geq 1$  seja  $f_{\#,n}: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  a aplicação definida por  $f_{\#,n}([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ . Então  $f_{\#,n}$  é um homomorfismo de grupos.

(ii) Se  $\text{id}: X \rightarrow X$  é o homeomorfismo identidade, então a aplicação  $\text{id}_{\#,n}: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  é o automorfismo identidade para todo  $n$ .

(iii) Se  $g: Y \rightarrow Z$  é uma aplicação contínua tal que  $g(y_0) = z_0$  e  $f$  é como na parte (i), então  $(g \circ f)_{\#,n} = g_{\#,n} \circ f_{\#,n}$  para todo  $n$ .

(iv) Se  $f, f': X \rightarrow Y$  são aplicações contínuas tais que  $f(x_0) = g(x_0)$  e  $f \simeq f'$  rel  $\{x_0\}$  então  $f_{\#,n} = f'_{\#,n}$  para todo  $n$ .

(v) Se  $X$  é contrátil, então  $\pi_n(X, x_0) = 0$  para todo  $n$ .

(vi) Se  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(X, x_0)$  é um grupo comutativo.

Demonstração. Ver Hu, Prop. 5.2, p.113, para (i); Properties I - II, p.114, para (ii) e (iii); Property V, p.117, para (iv); p. 109, para (v); e Prop. 2.1, p.109, para (vi).

(2.2.4) Proposição. Sejam  $n$  e  $X$  como no começo desta secção e  $\sigma: I \rightarrow X$  um caminho em  $X$  ligando  $x_0 = \sigma(0)$  a  $x_1 = \sigma(1)$ . Então  $\sigma$  induz um isomorfismo  $\sigma_n: \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  que depende so mente da classe de homotopia rel  $\{x_0, x_1\}$  de  $\sigma$ .

A demonstraco completa pode ser encontrada em Hu, p.p 126-128. Mostraremos aqui apenas como   feita a construo do isomorfismo posto que precisaremos explicitamente dele na prop. (2.2.7) abaixo.

Demonstraco. Seja  $\alpha \in \pi_n(X, x_1)$  e  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$  um representante de  $\alpha$ . O fato de ser  $f(x) = x = \sigma(1-0)$  para todo  $x \in \partial I^n$  nos leva a definir uma homotopia parcial  $\Phi: \partial I^n \times I \rightarrow X$  de  $f$  (Ver (2.1.11 (i))) por  $\Phi(x, t) = \sigma(1-t)$  para todo  $x \in \partial I^n$  e todo  $t \in I$ . Agora, como  $(I^n, \partial I^n)$    um par finitamente triangulável,  $\partial I^n$  tem a propriedade absoluta da extenso da homotopia em  $I^n$  (Ver (2.1.12)). Portanto  $\Phi$  pode ser estendida a uma aplicaco contínua  $F: I^n \times I \rightarrow X$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$  para todo  $x \in I^n$  e  $F(\partial I^n, t) = \sigma(1-t)$  para todo  $t \in I$ .

Seja agora  $g: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  a aplicaco definida por  $g(x) = F(x, 1)$  e seja  $\beta$  a classe de  $g$  em  $\pi_n(X, x_0)$ . Definamos ento  $\sigma_n(\alpha) = \beta$ . Pode-se demonstrar (Ver loc. cit.) que  $\beta$  depende somente de  $\alpha$  e da classe de homotopia  $\text{rel}\{x_0, x_1\}$  de  $\sigma$  (em particular,  $\beta$  no depende de  $f$  nem de  $F$ ), e que  $\sigma_n$    um isomorfismo.

Sejam  $X$  um espao topológico conexo por caminhos e  $x$  e  $y$  dois pontos de  $X$ . Ento existe um caminho  $\sigma: I \rightarrow X$  ligando  $x$  a  $y$  e pela proposio anterior temos um isomorfismo  $\pi_n(X, y) \cong \pi_n(X, x)$ . Portanto, se  $X$    conexo por caminhos, podemos omitir a referência aos pontos base e falar simplesmente no grupo de homotopia (absoluto)  $n$ -dimensional de  $X$ , que seja denotado  $\pi_n(X)$ .

(2.2.5) Definição. Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos conexos por caminhos e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Dizemos que  $f$  é uma equivalência fraca de homotopia se o homomorfismo induzido

$$f_{\#,n}: \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$$

é um isomorfismo para todo  $n \geq 1$ .

(2.2.6) Proposição. Uma aplicação contínua entre complexos CW é uma equivalência fraca de homotopia se e somente se é uma equivalência de homotopia (Ver (2.1.4)).

Demonstração. Ver Spanier, Cor. 24, p.405

O resultado seguinte não foi encontrado nas referências. Ele será utilizado em (5.2.4).

(2.2.7) Proposição. Sejam  $X$  um espaço topológico e  $\{X_j\}_{j \in J}$  uma família de subespaços de  $X$  indexada por um conjunto dirigido  $J$ . Suponhamos que a família satisfaça:

(i)  $X_j$  é conexo por caminhos para todo  $j$  em  $J$ .

(ii)  $X = \bigcup_{j \in J} X_j$

(iii) Para cada  $j$  em  $J$  existe um aberto  $A_j$  de  $S$  tal que  $X_j \subset A_j \subset X_k$  para todo  $k > j$ .

(iv) Para todo  $j$  em  $J$  existe  $k$  em  $J$  tal que  $k \geq j$  e  $X_j$  é contrátil a um ponto de  $X_k$  (Ver (2.1.3(ii))).

Então  $X$  é conexo por caminhos e  $\pi_n(X) = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

Demonstração. Se  $x_0$  e  $x_1$  estão em  $X$  existem  $j, k \in J$  tais que  $x_0 \in X_j$  e  $x_1 \in X_k$ . Seja  $\ell \in J$  tal que  $\ell \geq j$  e  $\ell \geq k$ . Então  $X_j \subset X_\ell$  e  $X_k \subset X_\ell$  por (iii), logo  $x_0, x_1 \in X_\ell$ . Como  $X_\ell$  é conexo por caminhos existe  $\gamma: I \rightarrow X_\ell$  ligando  $x_0$  a  $x_1$ . Se  $i_\ell$  é a inclusão de  $X_\ell$  em  $X$  então  $i_\ell \circ \gamma$  é um caminho em  $X$  ligando  $x_0$  a  $x_1$ . Portanto  $X$  é conexo por caminhos.

Sejam  $x_0$  um ponto qualquer de  $X$ ,  $j \in J$  um índice tal que  $x_0 \in X_j$ ,  $\alpha$  uma classe em  $\pi_n(X, x_0)$  e  $f: (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  um representante de  $\alpha$ . Pelas hipóteses (ii) e (iii) existe uma cobertura aberta  $\{A_j\}_{j \in J}$  de  $f(I^n)$  e como  $I^n$  é compacto e  $f$  é contínua, podemos escolher uma subfamília finita  $A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$

tal que  $f(I^n) \subset A_{j_1} \cup \dots \cup A_{j_r}$ . Como  $J$  é um conjunto dirigido existe  $k \in J$  tal que  $k \geq j_1, \dots, k \geq j_r$ , e, pela hipótese (iii),  $X_{j_1} \subset A_{j_1} \subset X_k, \dots, X_{j_r} \subset A_{j_r} \subset X_k$ ; portanto  $f(I^n) \subset X_k$ . Seja  $\ell \in J$  tal que  $\ell \geq j$  e  $\ell \geq k$ ; então  $x_0 \in X_\ell$  e  $f(I^n) \subset X_\ell$ . Pela hipótese (iv) existe  $m \in J$  tal que  $m \geq \ell$  e  $X_\ell$  é contrátil a um ponto  $y \in X_m$ . Logo existe uma homotopia  $F_\ell: X_\ell \times I \rightarrow X_m$  deformando a inclusão  $i_\ell: X_\ell \rightarrow X_m$  à aplicação  $\langle y \rangle: X_\ell \rightarrow X_m$  que leva todo ponto  $x \in X_\ell$  no ponto  $y \in X_m$  (Ver (2.1.3 (ii))). Seja  $\sigma: I \rightarrow X$  o caminho em  $X$  definido em  $X$  definido por  $\sigma(t) = F_\ell(x_0, 1-t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ).

Como  $F_\ell(x_0, 1) = \langle y \rangle(x_0) = y$  e  $F_\ell(x_0, 0) = i_\ell(x_0) = x_0$ , o caminho  $\sigma$  liga  $y$  a  $x_0$ . Seja  $\sigma_n: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, y)$  o isomorfismo induzido por  $\sigma$  (Ver (2.2.4)).

Definimos agora uma aplicação  $F: I^n \times I \rightarrow X$  por  $F(x, t) = F_\ell(f(x), t)$ .



Então  $F$  é contínua,  $F(x,0) = F_{\lambda}(f(x),0) = i_{\lambda}(f(x)) = f(x)$  para todo  $x \in I^n$  e  $F(\partial I^n, t) = F_{\lambda}(f(\partial I^n), t) = F_{\lambda}(x_0, t) = \sigma(1-t)$  para todo  $t \in I$ , pela definição de  $\sigma$ .

Pela definição de  $\sigma_n$  (Ver fim da proposição (2.2.4)) temos  $\sigma_n(\alpha) = [F(\cdot, 1)]$ . Mas para todo  $x \in I^n$  vale  $F(x,1) = F_{\lambda}(f(x),1) = y$  e portanto  $[F(\cdot, 1)] = 0$ . Assim  $\sigma_n(\alpha) = 0$  e como  $\sigma_n$  é isomorfismo temos  $\alpha = 0$ , donde  $\pi_n(X, x_0) = 0$ . Como  $X$  é conexo por caminhos concluímos que  $\pi_n(X) = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

### 2.3. O grau de uma Aplicação

Referências principais: Conde, Lima, Milnor.

Sejam  $M$  e  $N$  variedades  $C^\infty$ , orientadas e de mesma dimensão, e suponhamos que  $M$  é compacta e sem bordo. Sejam  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação  $C^\infty$  e  $y \in N$  um valor regular de  $f$  (que existe pelo teorema de Sard). Então  $f^{-1}(y)$  tem um número finito de pontos, e, se  $x \in f^{-1}(y)$  a derivada  $Df(x)$  estabelece um isomorfismo entre o espaço tangente a  $M$  em  $x$  e o espaço tangente a  $N$  em  $y$ . Seja  $n$  a dimensão comum de  $M$  e  $N$ .

Dizemos que  $f$  preserva a orientação em  $x \in f^{-1}(y)$  se quando tomamos cartas  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $x \in U$ , e  $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $y \in V$ , dos atlas que dão as estruturas de variedade  $C^\infty$  orientada de  $M$  e  $N$ , respectivamente, então o jacobiano de  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  em  $\phi(x)$  tem determinante positivo. Dizemos que  $f$  inverte a orientação em  $x \in f^{-1}(y)$  se esse determinante é negativo.

Prova-se facilmente que as definições acima não dependem das cartas tomadas. Se  $\text{sig}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é a função sinal (isto é,  $\text{sig}(x) = 1$

se  $x > 0$  e  $\text{sig}(x) = -1$  se  $x < 0$  e  $\text{sig}(0) = 0$  ) definimos então:

$$\text{sig } D f(x) = \text{sig} (\det J(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(x)}) = \begin{cases} 1 & \text{se } f \text{ preserva a orientação em } x. \\ -1 & \text{se } f \text{ inverte a orientação em } x. \end{cases}$$

onde  $\det(J(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{\phi(x)})$  indica o determinante jacobiano no ponto  $\phi(x)$ .

(2.3.1) Definição. Sejam  $M$  e  $N$  variedades  $C^\infty$ , orientadas e de mesma dimensão, e suponhamos que  $M$  é compacta e sem bordo. Seja  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação  $C^\infty$  e  $y \in N$  um valor regular de  $f$ . Então o grau de  $f$  em  $y$  é o número:

$$\text{deg}(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sig } D f(x)$$

Note que a somatória tem sentido, pois  $f^{-1}(y)$  é finito.

(2.3.2) Proposição. Sejam  $M$  e  $N$  variedades  $C^\infty$  de mesma dimensão, orientadas e sem bordo. Suponhamos que  $M$  é compacta e  $N$  é conexa. Sejam  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação  $C^\infty$  e  $y$  e  $z \in N$  valores regulares de  $f$ . Então

$$\text{deg}(f, y) = \text{deg}(f, z).$$

Demonstração. Ver Conde, p. 83.

(2.3.3) Definição. Sejam  $M$  e  $N$  variedades  $C^\infty$  de mesma dimensão, orientadas e sem bordo. Suponhamos que  $M$  é compacta e  $N$  é conexa. Sejam  $f: M \rightarrow N$  uma aplicação  $C^\infty$  e  $y \in N$  um valor regular de  $f$ . Então o grau de  $f$  é o número:

$$\deg(f) = \deg(f, y).$$

(Note que, pela proposição anterior, a definição tem sentido).

(2.3.4) Proposição. Sejam  $S^1$  a circunferência unitária no plano complexo e  $k$  um número inteiro. Então a aplicação  $f: S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $f(z) = z^k$  tem grau  $k$ .

Demonstração. Se  $k=0$  então  $f$  é constante, e tomando como valor regular um ponto de  $S^1$  distinto de  $1$ , por definição, temos  $\deg(f)=0$ . Se  $k \neq 0$ , consideremos as parametrizações  $h_1: (0, 2\pi) \rightarrow S^1$ , dada por  $h_1(t) = \exp(it) = \cos t + i \sin t$  e  $h_2: (-1, 1) \rightarrow S^1$ , dada por  $h_2(t) = \sqrt{1-t^2} + it$ , cujas imagens  $h_1(0, 2\pi) = S^1 - \{1\}$  e  $h_2(-1, 1) = \{\cos \theta + i \sin \theta : -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$  formam uma cobertura de  $S^1$ . Além disso  $h_1^{-1} \circ h_2(t) = \arcsen t$  e  $(h_1^{-1} \circ h_2)'(t) = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} > 0$  para todo  $-1 < t < 1$ . Dessa forma  $h_1$  e  $h_2$  são cartas coerentes de  $S^1$ . Observemos agora que  $h_2^{-1} \circ f \circ h_1(t) = \sen k t$  e  $h_2^{-1} \circ f \circ h_2(t) = \sen[k(\arcsen t)]$ . Se tomamos  $y=1$  na definição (2.3.1), obtemos  $f^{-1}(1) = \{\cos \theta + i \sin \theta : \theta = 0, 2\pi/k, \dots, 2\pi(k-1)/k\}$ .

Então  $(h_2^{-1} \circ f \circ h_2)'(0) = k$  e  $(h_2^{-1} \circ f \circ h_1)'(\frac{2\pi}{k}) = k, \dots, (k_2^{-1} \circ f \circ h_1)'(2\pi \frac{k-1}{k}) = k$ . Se  $k > 0$ , em todos os pontos de  $f^{-1}(1)$ ,  $f$  preserva a orientação e portanto  $\deg(f) = 1 + \dots + 1 = k$ . Se  $k < 0$ , em todos os pontos de  $f^{-1}(1)$ ,  $f$  inverte a orientação e portanto  $\deg(f) = (-1) + \dots + (-1) = (-1)|k| = k$ .

(2.3.5) Proposição. Sejam  $M$  e  $N$  variedades  $C^\infty$  da mesma dimensão, orientadas e sem bordo. Suponhamos que  $M$  é compacta e  $N$  é conexa. Sejam  $f$  e  $g$  aplicações  $C^\infty$  de  $M$  em  $N$ . Se  $f$  e  $g$  são homotópicas  $C^\infty$  então ambas têm o mesmo grau.

Demonstração. Ver Conde, p. 85.

(2.3.6) Teorema (Hopf). Seja  $M$  uma variedade  $C^\infty$  de dimensão  $m$ , compacta, conexa, orientada e sem bordo. Então duas aplicações  $C^\infty$  de  $M$  em  $S^m$  são homotópicas  $C^\infty$  se e somente se elas têm o mesmo grau.

Demonstração. Ver Conde, p. 126.

(2.3.7) Definição. Sejam  $M$  e  $N$  variedades  $C^\infty$  de mesma dimensão, compactas, orientadas e sem bordo. Suponhamos que  $N$  é conexa. Sejam  $f:M \rightarrow N$  uma aplicação contínua e  $g:M \rightarrow N$  uma aplicação  $C^\infty$  homotópica a  $f$ . Então o grau de  $f$  é o número:

$$\deg(f) = \deg(g)$$

Note que, dada  $f$ , (2.1.14(i)) garante a existência de  $g$ ; a transitividade da homotopia, junto com (2.1.14(ii)) e (2.3.5) garantem que  $\deg(f)$  está bem definido.

(2.3.8) Teorema. Seja  $M$  uma variedade  $C^\infty$  de dimensão  $m$ , compacta, conexa, orientada e sem bordo. Então duas aplicações contínuas de  $M$  em  $S^m$  são homotópicas se e somente se elas têm o mesmo grau.

Demonstração. O resultado segue da transitividade da homotopia, de (2.1.14) e de (2.3.6).

=====

## CAPÍTULO 3

### GRUPOS DE TRANSFORMAÇÕES

#### 3.1. Grupos de Transformações.

Referência principal: Bredon, p.p. 1 e 32.

(3.1.1) Definição. Um grupo topológico é um espaço de Hausdorff  $G$  com uma multiplicação contínua  $G \times G \rightarrow G$ , a qual torna  $G$  um grupo, e tal que a aplicação  $G \rightarrow G$  que leva  $g \in G$  em  $g^{-1} \in G$  é contínua. O elemento identidade de  $G$  será denotado por  $e$ . (Pela hipótese de separação, todo grupo topológico finito necessariamente tem a topologia discreta. Por outro lado, qualquer grupo pode ser considerado um grupo topológico, tomando nele a topologia discreta).

(3.1.2) Definição. Um grupo topológico de transformações é uma terma  $(G, X, \theta)$ , onde  $G$  é um grupo topológico,  $X$  é um espaço de Hausdorff e  $\theta: G \times X \rightarrow X$  é uma aplicação contínua satisfazendo:

- (i)  $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(g \cdot h, x)$  para todo  $g, h \in G$  e  $x \in X$ ;
- (ii)  $\theta(e, x) = x$  para todo  $x \in X$ .

A aplicação  $\theta$  é chamada uma ação de  $G$  (ou uma  $G$ -ação) sobre  $X$ . O espaço  $X$  munido de uma  $G$ -ação é chamado um  $G$ -espaço (à esquerda). Usualmente escrevemos  $gx$  em vez de  $\theta(g, x)$ .

(3.1.3) Proposição. Seja  $(G, X, \theta)$  um grupo topológico de transformações. Então para todo  $g$  em  $G$ , a aplicação  $\theta_g: X \rightarrow X$  definida por  $\theta_g(x) = gx$  é um homeomorfismo de  $X$  (com inverso  $\theta_g^{-1}$ ).

Demonstração. Ver Bredon, p. 33.

(3.1.4) Definição. Um homeomorfismo  $h: X \rightarrow X$  é chamado periódico se existe um número natural  $n > 1$  tal que  $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f: X \rightarrow X$  (composição  $n$  vezes) é a aplicação identidade e  $f^m$  é diferente da identidade para todo  $m < n$ . O número  $n$  é chamado período de  $h$ .

Seja  $Z$  o grupo dos inteiros e  $n$  um número natural  $> 2$ . Usualmente denotaremos o grupo quociente  $Z/nZ$  por  $Z_n$ .

(3.1.5) Proposição. Seja  $h: X \rightarrow X$  um homeomorfismo. Então

- (i) Se  $h$  não é periódico,  $h$  induz uma ação de  $Z$  sobre  $X$ .
- (ii) Se  $h$  é periódico, de período  $n$ ,  $h$  induz uma ação de  $Z_n$  sobre  $X$ .

Demonstração. No caso (i), definiremos uma ação  $\theta: Z \times X \rightarrow X$  por  $\theta(m, x) = h^m(x)$ , onde  $h^0$  é a identidade,  $h^m$  é a composição iterada  $m$  vezes de  $h$ , se  $m > 1$ , e é a composição iterada  $|m|$  vezes de  $h^{-1}$  se  $m < 1$ . No caso (ii) define-se uma ação de maneira análoga.

(3.1.6) Definição. Sejam  $X$  e  $Y$   $G$ -espaços e  $f: X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Dizemos que  $f$  é  $G$ -equivariante se  $f(gx) = gf(x)$  para todo  $g \in G$  e  $x \in X$ .

(3.1.7) Definição. Sejam  $X$  um  $G$ -espaço e  $x$  um ponto de  $X$ . A  $G$ -órbita de  $x$  é o conjunto  $G(x) = \{gx : g \in G\}$ . Um ponto  $x \in G$  é um ponto fixo da  $G$ -ação se  $G(x) = \{x\}$ . O conjunto dos pontos fixos da ação de  $G$  sobre  $X$  será denotado por  $F(G, X)$ .

(3.1.8) Proposição. Sejam  $h: X \rightarrow X$  um homeomorfismo e  $\text{Fix}(h)$  o conjunto dos pontos fixos de  $h$ . Então a  $G$ -ação induzida por  $h$

(ver (3.1.5)) satisfaz  $F(G, X) = \text{Fix}(h)$ . Coloquemos  $G = Z$  se  $h$  não é periódico e  $G = Z_n$  se  $h$  é periódico de período  $n$ .

Demonstração. Notamos que se  $h(x) = x$  então  $h^r(x) = x$  para todo  $r \in Z$ ; portanto  $\text{Fix}(h)$  está contido no conjunto dos pontos fixos de  $h^r$  para todo  $r \in Z$ . Então:

$$\text{Fix}(h) = \{x \in X : h(x) = x\} = \bigcap_{r \in Z} \{x \in X : h^r(x) = x\} = \{x \in X : h^r(x) = x\} \text{ para todo}$$

$$r \in Z\} = F(G, X).$$

### 3.2. Ações Simpliciais

Referências principais: Bredon, p. 115.

(3.2.1) Definição. Sejam  $G$  um grupo discreto (isto é, um grupo com a topologia discreta),  $K$  um complexo simplicial num espaço normado  $E$  (Ver (1.1.3)) e  $\theta : G \times |K| \rightarrow |K|$  uma ação de  $G$  sobre  $|K|$  (Ver (1.1.9)). Dizemos que  $\theta$  é uma ação simplicial se para cada  $g \in G$  a aplicação  $\theta_g : |K| \rightarrow |K|$  definida por  $\theta_g(x) = gx$  é uma aplicação simplicial (Ver (1.1.19)). Um conjunto simplicial  $K$  munido de uma  $G$ -ação simplicial é chamado um  $G$ -complexo simplicial.

(Como, para cada  $g \in G$ ,  $\varepsilon_g$  é simplicial e também é um homeomorfismo,  $\theta_g$  leva simplexos de  $K$ , preservando a dimensão).

(3.2.2) Proposição. Seja  $K$  um  $G$ -complexo simplicial. Então a ação simplicial de  $G$  sobre  $K$  induz uma ação simplicial de  $G$  sobre a primeira subdivisão baricêntrica  $Sd(K)$ .

Demonstração. Consequência imediata de (1.1.22).

(3.2.3) Proposição. (Ver Bredon, pp. 115-116). Seja  $K$  um  $G$ -complexo simplicial. Então as afirmações (I) e (II) são equivalentes.

(I) Para qualquer  $g \in G$  e qualquer simplexo  $A \in K$ ,  $g$  deixa  $A \cap g(A)$  fixo ponto a ponto.

(II) Se  $g \in G$  e  $v$  é um vértice de  $K$  tais que  $v$  e  $gv$  pertencem a um mesmo simplexo então  $v=gv$ .

Demonstração. Suponhamos (I) verdadeira. Sejam  $g \in G$  e  $v$  um vértice de  $K$  tais que  $v$  e  $gv$  pertencem a um mesmo simplexo. Então  $[v, gv] \in K$  e portanto  $g^{-1}[v, gv] = [g^{-1}v, v] = A \in K$  e  $g(A) = [v, gv]$ . Por (I)  $g$  deixa  $A \cap g(A) = \{v\}$  fixo ponto a ponto, isto é,  $gv=v$ .

Suponhamos agora (II) verdadeira. Sejam  $g \in G$  e  $A \in K$ . Se  $A \cap g(A) = \emptyset$ , (I) vale trivialmente. Se  $A \cap g(A) \neq \emptyset$  então  $A \cap g(A)$  é um simplexo de  $K$ . Seja  $v$  um vértice de  $K$  contido em  $A \cap g(A)$ . Então  $gv \in g(A)$  e portanto  $v$  e  $gv$  pertencem a  $g(A)$ . Assim  $[v, gv]$  é face de  $g(A)$ , logo  $v$  e  $gv$  pertencem a um mesmo simplexo, donde  $v=gv$  por (II). Então  $g$  deixa fixo qualquer vértice de  $A \cap g(A)$ , e por linearidade  $g$  deixa  $A \cap g(A)$  fixo ponto a ponto.

(3.2.4) Proposição. (Ver Bredon, Prop. 1.1, p. 116). Seja  $K$  um  $G$ -complexo simplicial. Então a ação induzida na primeira subdivisão baricêntrica  $S_d(K)$  (Ver (3.2.2)) satisfaz a afirmação (I) (e portanto a afirmação (II)) da proposição (3.2.3).

Demonstração. Sejam  $g \in G$  e  $A \in S_d(K)$ , e consideremos  $A \cap g(A)$ . Se  $A \cap g(A) = \emptyset$  então (I) está satisfeita. Se  $A \cap g(A) \neq \emptyset$  então  $A \cap g(A)$  é um simplexo de  $S_d(K)$ . Seja  $w$  um vértice qualquer de  $A \cap g(A)$ . Então  $gw \in g(A)$  e portanto  $w$  e  $gw$  pertencem a  $g(A)$ . Assim  $[w, gw]$  é face de  $g(A)$ , logo um simplexo de  $S_d(K)$ . Daí segue que existem



$A_1, A_2 \in K$  tais que  $A_1 \leq A_2$  (isto é,  $A_1$  é face de  $A_2$ ), tal que  $b(A_1) = w$  e  $b(A_2) = gw$ . Então  $b(A_2) = gb(A_1) = b(g(A_1))$ , e como o bari-centro é um ponto do interior do simplexo, temos  $A_2 = g(A_1)$ . Ain-da, como  $g$  mantém a dimensão dos simplexos e  $A_1 \leq A_2 = g(A_1)$  va-le  $A_1 = g(A_1) = A_2$  e portanto  $w = b(A_1) = b(A_2) = gw$ . Então  $g$  deixa fixo todos os vértices de  $A \cap g(A)$  e, por linearidade,  $g$  deixa  $A \cap g(A)$  fixo ponto a ponto.

### 3.3 O Teorema da Aproximação Simplicial Equivariante.

Referência principal: Bredon, p. 68.

O resultado seguinte, que é uma variação de uma asser-ção que aparece no Exercício 6 de Bredon, p. 68, recebe o nome de Teorema da Aproximação Simplicial Equivariante.

(3.3.1) Teorema. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais fini-tos e  $G$  um grupo discreto agindo simplicialmente sobre  $K$  e so-bre  $L$ . Seja  $f: |K| \rightarrow |L|$  uma aplicação contínua  $G$ -equivariante. En-ção existem um número natural  $r \geq 1$  e uma aproximação simpli-cial  $\phi: Sd^r(K) \rightarrow Sd(L)$  de  $f$  que é  $G$ -equivariante e tal que  $\phi: |K| \rightarrow |L|$  é homotópica a  $f$ .

Demonstração. Consideremos  $Sd(L)$  e a cobertura aberta

$$U = \{St^0(w, Sd(L)) : w \text{ é vértice de } Sd(L)\}$$

de  $|L|$ . Então  $f^{-1}(U) = \{f^{-1}(St^0(w, Sd(L)) : w \text{ é vértice de } Sd(L)\}$  é uma cobertura aberta do espaço compacto  $|K|$  (Ver (1.1.13(ii))). Sejam  $2\epsilon > 0$  o número de Lebesgue de  $f^{-1}(U)$  e  $r$  um número natu

ral  $\geq 1$  tal que  $\text{mesh}(\text{Sd}^r(K)) < \varepsilon$  (Ver (1.1.12)). Como em  $\text{Sd}^r(K)$  existe apenas um número finito de vértices, existe apenas um número finito de  $G$ -órbitas em  $[\text{Sd}^r(K)]^0$ . Escolhamos um vértice  $v_i$  para cada órbita e chamamos  $V$  ao conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\}$  desses vértices.

Se  $A$  é um simplexo qualquer de  $\text{Sd}^r(K)$ , o seu diâmetro é menor que  $\varepsilon$  pela escolha de  $r$  (Ver (1.1.11)). Portanto, se  $v_i$  é um vértice qualquer de  $V$  e  $B_\varepsilon(v_i)$  é a bola aberta de centro  $v_i$  e raio  $\varepsilon$ , temos  $\text{St}^0(v_i, \text{Sd}^r(K)) \subset B_\varepsilon(v_i)$ . Pela escolha de  $2\varepsilon$  existe um vértice  $u_i$  de  $\text{Sd}(L)$  tal que  $B_\varepsilon(v_i) \subset f^{-1}(\text{St}^0(u_i, \text{Sd}(L)))$ . Escolhamos um desses  $u_i$  e definimos  $\phi(v_i) = u_i$ . A seguir vamos definir  $\phi$  para qualquer vértice  $v$  de  $\text{Sd}^r(K)$ . Para isso necessitaremos das considerações seguintes. Como  $v$  pertence a uma das  $G$ -órbitas em  $[\text{Sd}^r(K)]^0$ , existe  $g \in G$  tal que  $v = gv_i$ . De  $\text{St}^0(v_i, \text{Sd}^r(K)) \subset f^{-1}(\text{St}^0(u_i, \text{Sd}(L)))$ , temos  $f(\text{St}^0(v_i, \text{Sd}^r(K))) \subset \text{St}^0(u_i, \text{Sd}(L))$  e portanto  $gf(\text{St}^0(v_i, \text{Sd}^r(K))) \subset g\text{St}^0(u_i, \text{Sd}(L))$ . Como  $f$  é equivariante obtemos

$$f(g\text{St}^0(v_i, \text{Sd}^r(K))) \subset g\text{St}^0(u_i, \text{Sd}(L)) \quad (1)$$

Se agora colocamos  $A_{u_i} = \{A \in \text{Sd}(L) : u_i \in A\}$  e  $A_{gu_i} = \{B \in \text{Sd}(L) : gu_i \in B\}$  temos  $gA_{u_i} = \{gA \in \text{Sd}(L) : u_i \in A\}$ , e como  $u_i \in A$  implica que  $gu_i \in gA$  então  $gA_{u_i} \subset A_{gu_i}$ . Por outro lado  $g^{-1}A_{gu_i} = \{g^{-1}B \in \text{Sd}(L) : gu_i \in B\}$ , e como  $gu_i \in B$  implica que  $u_i \in g^{-1}B$ , temos  $g^{-1}A_{gu_i} \subset A_{u_i}$  e portanto  $A_{gu_i} \subset gA_{u_i}$ . Dessa forma  $gA_{u_i} = A_{gu_i}$ , donde

$$\bigcup_{B \in A_{u_i}} g\langle B \rangle = \bigcup_{B \in A_{u_i}} \langle gB \rangle = \bigcup_{C \in A_{gu_i}} \langle C \rangle$$

Como  $\overset{\circ}{\text{St}}(u_i, \text{Sd}(L)) = \bigcup_{B \in \mathcal{A}_{u_i}} \langle B \rangle$ , obtemos

$$B \in \mathcal{A}_{u_i}$$

$$g\overset{\circ}{\text{St}}(u_i, \text{Sd}(L)) = \overset{\circ}{\text{St}}(gu_i, \text{Sd}(L)) \quad (2)$$

Analogamente deduzimos que:

$$g\overset{\circ}{\text{St}}(v_i, \text{Sd}^r(K)) = \overset{\circ}{\text{St}}(gv_i, \text{Sd}^r(K)) \quad (3)$$

Assim, de (1), (2) e (3) obtemos

$$f(\overset{\circ}{\text{St}}(gv_i, \text{Sd}^r(K))) \subset \overset{\circ}{\text{St}}(gu_i, \text{Sd}(L)) \quad (4)$$

Agora estamos em condições de definir  $\phi(v)$ . Lembremos que  $v=gv_i$  e que  $\phi(v_i)=u_i$ . Então definimos  $\phi(v)=gu_i$ . Para demonstrar que  $\phi$  está bem definida, suponhamos que  $v=g_1v_i=g_2v_i$ . Por (4),

$$f(\overset{\circ}{\text{St}}(v, \text{Sd}^r(K))) = f(\overset{\circ}{\text{St}}(g_1v_i, \text{Sd}^r(K))) \subset \overset{\circ}{\text{St}}(g_1u_i, \text{Sd}(L))$$

e

$$f(\overset{\circ}{\text{St}}(v, \text{Sd}^r(K))) = f(\overset{\circ}{\text{St}}(g_2v_i, \text{Sd}^r(K))) \subset \overset{\circ}{\text{St}}(g_2u_i, \text{Sd}(L))$$

donde  $\phi \neq f(\overset{\circ}{\text{St}}(v, \text{Sd}^r(K))) \subset \overset{\circ}{\text{St}}(g_1u_i, \text{Sd}(L)) \cap \overset{\circ}{\text{St}}(g_2u_i, \text{Sd}(L))$ .

Por (1.1.24),  $[g_1u_i, g_2u_i]$  é simplexo de  $\text{Sd}(L)$ . Como a translação por  $g_2^{-1}$  é simplicial e preserva dimensões,  $[g_2^{-1}g_1u_i, u_i]$  é

simplexo de  $Sd(L)$ . Pela proposição (3.2.4) vem que  $g_2^{-1}g_1u_i = u_i$ ,  
donde  $g_1u_i = g_2u_i$ . Portanto  $\phi$  está bem definida. Agora estendemos  
 $\phi$  por linearidade aos simplexos de  $Sd^r(K)$ . Obtemos assim uma  
aplicação simplicial  $\phi: Sd^r(K) \rightarrow Sd(L)$  bem definida, e, por cons-  
trução  $f(S\bar{t}(v, Sd^r(K))) \subset S\bar{t}(\phi(v), Sd(L))$  para cada vértice  $v$  de  
 $Sd^r(K)$ . Então pela proposição (1.1.25),  $\phi$  é uma aproximação sim-  
plicial de  $f$ . Além disso, se  $v$  é um vértice de  $Sd^r(K)$  e  $g' \in G$  en-  
tão  $g'\phi(v) = g'(gu_i)$  para um  $g \in G$  tal que  $v = gv_i$ , enquanto que  
 $\phi(g'v) = \phi(g'gv_i) = (g'g)u_i$ ; portanto  $g'\phi(v) = \phi(g'v)$ . Assim, por li-  
nearidade,  $g'\phi(x) = \phi(g'x)$  para todo ponto  $x$  em  $|Sd^rK|$ , e então  
 $\phi$  é  $G$ -invariante. A afirmação de que  $\phi$  é homotópica a  $f$  segue  
de (2.1.2).

=====

=====

PARTE II  
ALGUNS MÉTODOS  
DE CONSTRUÇÃO DE ESPAÇOS

## CAPÍTULO 4

### LIMITES INVERSOS, COLAGENS E JUNÇÕES

#### 4.1 Limites Inversos

Referências principais: Dugundji, p. 427; Eilenberg-Steenrod, p. 212; Wallace, pp. 182 e 217.

(4.1.1) Definição. Um conjunto preordenado é um conjunto  $A$  munido de uma relação binária, denotada  $\geq$ , que é reflexiva e transitiva.

(4.1.2) Definição. Um sistema inverso de grupos é uma família de grupos abelianos  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , indexada por um conjunto preordenado  $A$ , tal que para todo par de índices  $\alpha, \beta \in A$  com  $\beta \geq \alpha$ , existe um homomorfismo  $\pi_{\alpha\beta}: G_\beta \rightarrow G_\alpha$  satisfazendo as condições:

- (i)  $\pi_{\alpha\alpha}$  é a identidade para todo  $\alpha \in A$ ;
- (ii)  $\pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma} = \pi_{\alpha\gamma}$  quando  $\gamma \geq \beta \geq \alpha$ .

Tal sistema será denotado  $\{G_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, A\}$ .

(4.1.3) Definição. O limite inverso do sistema inverso de grupos  $\{G_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, A\}$  é o subgrupo, denotado  $\varprojlim G_\alpha$ , do produto cartesiano (forte)  $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha = \{ \{g_\alpha\}_{\alpha \in A} : g_\alpha \in G_\alpha \}$  subgrupo este formado pelos elementos  $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$  cujas coordenadas  $g_\alpha$  satisfazem a relação  $g_\alpha = \pi_{\alpha\beta}(g_\beta)$  sempre que  $\beta \geq \alpha$ .

(4.1.4) Definição. Um sistema inverso de espaços topológicos é uma família de espaços topológicos  $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , indexada por um conjunto preordenado  $A$ , tal que para todo par de índices  $\alpha, \beta \in A$ , com  $\beta \geq \alpha$ , existe uma aplicação contínua  $\pi_{\alpha\beta}: E_\beta \rightarrow E_\alpha$  satisfazendo as

condições:

(i)  $\pi_{\alpha\alpha}$  é a identidade para todo  $\alpha \in A$ ;

(ii)  $\pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma} = \pi_{\alpha\beta}$  quando  $\gamma \geq \beta \geq \alpha$ .

Tal sistema será denotado  $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, A\}$ .

(4.1.5) Definição. O limite inverso do sistema inverso de espaços topológicos  $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, A\}$  é o subespaço, denotado  $\varprojlim E_\alpha$ , do produto cartesiano (forte)  $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha = \{ \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} : x_\alpha \in E_\alpha \}$ , subespaço este formado pelos elementos  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$  cujas coordenadas satisfazem a relação  $x_\alpha = \pi_{\alpha\beta}(x_\beta)$  sempre que  $\beta \geq \alpha$ . Em  $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha$  é dada a topologia produto e em  $\varprojlim E_\alpha$  é dada a topologia induzida como subespaço.

(4.1.6) Definição. Um conjunto dirigido é um conjunto preordenado  $A$  tal que para quaisquer  $\alpha, \beta \in A$  existe  $\gamma \in A$  tal que  $\gamma \geq \alpha$  e  $\gamma \geq \beta$ .

(4.1.7) Proposição. Seja  $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, A\}$  um sistema inverso de espaços topológicos. Então

(i) Se  $E_\alpha$  é Hausdorff para todo  $\alpha \in A$  então  $\varprojlim E_\alpha$  é fechado em  $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha$ .

(ii) Se  $E_\alpha$  é compacto (neste trabalho um espaço compacto é por definição Hausdorff) para todo  $\alpha \in A$ , então  $\varprojlim E_\alpha$  é compacto.

(iii) Se  $A$  é um conjunto dirigido e  $E_\alpha$  é compacto e  $E_\alpha \neq \emptyset$  para todo  $\alpha \in A$ , então  $\varprojlim E_\alpha \neq \emptyset$ .

Demonstração. Ver Dugundji, Prop. 2.4, p. 429, Eilenberg-Steenrod, pp. 216-217, Wallace, p. 218.

O resultado seguinte é um caso particular do Teorema da Conti-

nuidade na teoria de homologia de Čech.

(4.1.8) Teorema. Sejam  $A$  um conjunto dirigido e  $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}, A\}$  um sistema inverso de espaços topológicos compactos,  $\check{H}_p(E_\alpha)$  o  $p$ -ésimo grupo de homologia de Čech de  $E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}$  o homomorfismo induzido em homologia por  $\pi_{\alpha\beta}$ , e  $\varprojlim \check{H}_p(E_\alpha)$  o limite inverso de grupos  $\{\check{H}_p(E_\alpha), \pi_{\alpha\beta}, A\}$ . Então, para todo  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\check{H}_p(\varprojlim E_\alpha) = \varprojlim \check{H}_p(E_\alpha)$ .

Demonstração. Ver Wallace, Teor. 6-16, p. 227; Eilenberg-Steenrod, Theor. 3.1, p. 261.

## 4.2 Colagens

Referência principal: Dugundji, p. 127.

(4.2.1) Definição. Seja  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  uma família de espaços topológicos indexados por um conjunto de índices  $A$ . Para cada  $\alpha \in A$ , damos a  $X_\alpha \times \{\alpha\}$  a topologia produto da topologia de  $X_\alpha$  com a topologia discreta de  $\{\alpha\}$ . Então a união disjunta da família  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  é o conjunto

$$\sum_{\alpha \in A} \{X_\alpha\} = \bigcup_{\alpha \in A} (X_\alpha \times \{\alpha\})$$

com a seguinte topologia:  $U \subset \sum_{\alpha \in A} \{X_\alpha\}$  é aberto  $\Leftrightarrow U \cap (X_\alpha \times \{\alpha\})$  é aberto para todo  $\alpha \in A$ .

(4.2.2) Definição. Sejam  $\{X_\alpha\}$  uma família de espaços topológicos indexados por um conjunto  $A$ ,  $B$  um subconjunto de  $A \times A$  uma família de funções contínuas (chamadas funções de colagem) sa-



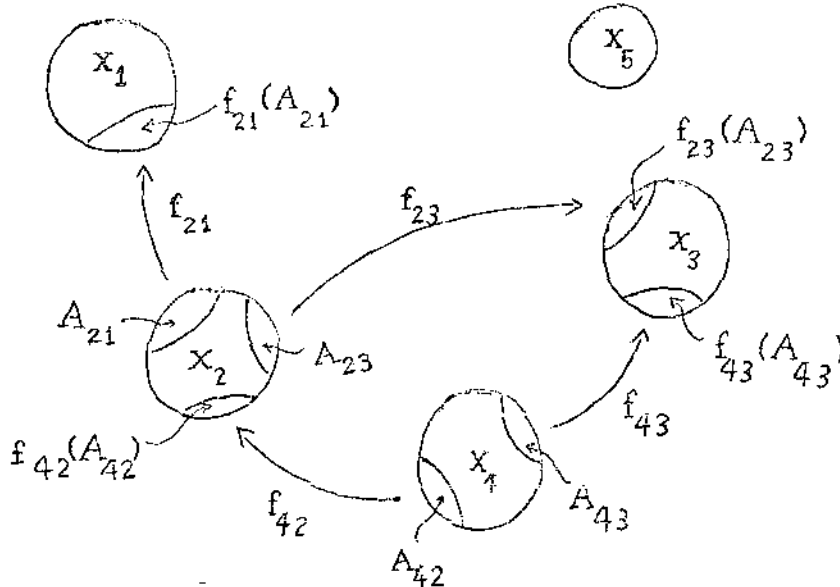
atisfazendo:

(i) Para todo  $(\alpha, \beta) \in B$  então  $f_{\alpha\beta}: A_{\alpha\beta} \rightarrow X_\beta$  onde  $A_{\alpha\beta}$  é um fecho do de  $X_\alpha$ ;

(ii) Para todo  $(\alpha, \beta) \neq (\alpha, \gamma) \in B$  então  $A_{\alpha\beta} \cap A_{\alpha\gamma} = \emptyset$ ;

(iii) Para todo  $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \beta) \in B$  então  $f_{\alpha\beta}(A_{\alpha\beta}) \cap f_{\gamma\beta}(A_{\gamma\beta}) = \emptyset$ ;

(iv) Para todo  $(\alpha, \beta) \neq (\gamma, \alpha) \in B$  então  $A_{\alpha\beta} \cap f_{\gamma\alpha}(A_{\gamma\alpha}) = \emptyset$ .



Seja  $R$  a relação de equivalência definida na união disjunta  $\sum_{\alpha \in A} \{X_\alpha\}$  por: "Se  $(x, \alpha), (y, \beta) \in \sum_{\alpha \in A} \{X_\alpha\}$  então  $(x, \alpha) R (y, \beta)$   $(x, \alpha) = (y, \beta)$  ou  $f_{\alpha\beta}(x) = y$ ."

Então o espaço de colagem da família de espaços  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  pela família de funções  $\{f_{\alpha\beta}\}_{(\alpha, \beta) \in B}$  é o espaço quociente

$$\bigcup_{\{f_{\alpha\beta}\}} \{X_\alpha\} = \frac{\sum_{\alpha \in A} \{X_\alpha\}}{R}$$

(A fim de não carregar demais as notações, identificamos  $\{X_\alpha\} \times \{\alpha\}$  com  $X_\alpha$  e um ponto  $x \in X_\alpha$  com a classe de equivalência que corresponde a ele em  $\bigcup_{\{f_{\alpha\beta}\}} \{X_\alpha\}$ ).

(4.2.3) Definição. Sejam  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  e  $\{f_{\alpha\beta}\}_{(\alpha,\beta) \in B}$  nas condições da definição (4.2.2),  $Y$  um espaço topológico, e  $F_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$  ( $\alpha \in A$ ) uma família de funções satisfazendo:

para todo  $(\alpha, \beta) \in B$ ,  $F_\alpha(x) = F_\beta(f_{\alpha\beta}(x))$ , para todo  $x \in X_{\alpha\beta}$  (isto é, as funções da família  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$  coincidem nos pontos que são identificados pela colagem.) Definimos a colagem da família de funções  $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$  como sendo a função

$$\bigcup_{\{f_{\alpha\beta}\}} \{F_\alpha\} : \bigcup_{\{f_{\alpha\beta}\}} \{X_\alpha\} \rightarrow Y$$

dada por  $(\bigcup_{\{f_{\alpha\beta}\}} \{F_\alpha\})(x) = F_\alpha(x)$  se  $x \in X_\alpha$ .

### 4.3 Junções de Espaços Topológicos

Referência principal: Bredon, pp. 58-59.

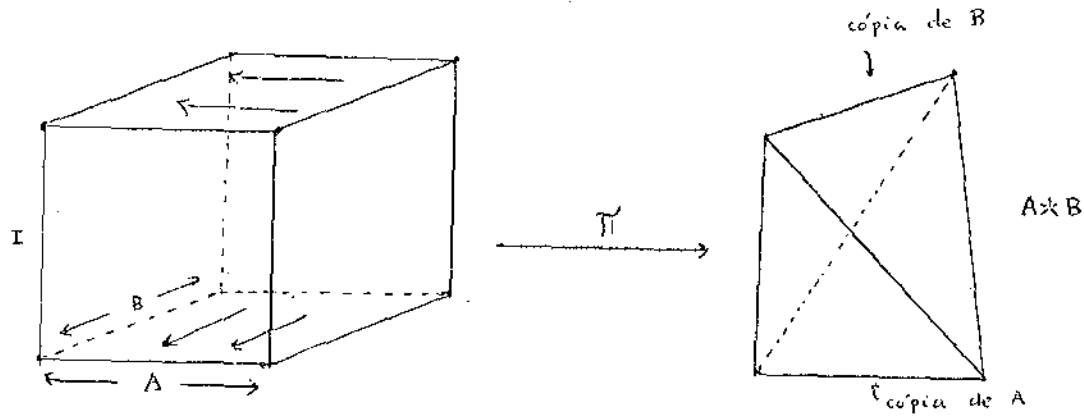
(4.3.1) Definição. Sejam  $A$  e  $B$  espaços topológicos não vazios e  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Seja  $R$  a relação de equivalência em  $A \times B \times I$  definida por  $(a, b, t) R (a', b', t')$  se e somente se

- (i)  $a = a', b = b', t = t'$  se  $t = 0$  e  $1$ ;
- (ii)  $a = a', t = t'$ , se  $t = 0$ ;
- (iii)  $b = b', t = t'$  se  $t = 1$ .

Então a junção ("join") de  $A$  e  $B$  é o espaço topológico

$$A \# B = \frac{A \times B \times I}{R}$$

Denotaremos com  $\pi$  a aplicação canônica de  $A \times B \times I$  sobre  $A \# B$ .



Damos a  $A*B$  a topologia quociente.

### Observações

(a) Seja  $\overline{(a,b,t)}$  a classe de equivalência de  $(a,b,t) \in A \times B \times I$  em  $A*B$ . Para simplificar as notações, adotaremos as seguintes convenções.

(i) Para todo  $t \in (0,1)$ , como  $\overline{(a,b,t)} = \{(a,b,t)\}$ , escrevemos  $(a,b,t)$  em vez de  $\overline{(a,b,t)}$ .

(ii) Se  $t = 0$ , como  $\overline{(a,b,0)} = \{(a,b,0) : b \in B\}$ , escrevemos  $(a,*,0)$  em vez de  $\overline{(a,b,0)}$ .

(iii) Se  $t = 1$ , como  $\overline{(a,b,1)} = \{(a,b,1) : a \in A\}$ , escrevemos  $(*,b,1)$  em vez de  $\overline{(a,b,1)}$ .

(b) Notemos que  $A*B$  contém cópias naturalmente homeomorfas a  $A$  e  $B$ , a saber  $\{(a,*,0) : a \in A\}$  e  $\{(*,b,1) : b \in B\}$  respectivamente, as quais são fechadas em  $A*B$ .

(4.3.2) Obtém-se uma sub-base para a topologia de  $A*B$  tomando

uma sub-base de  $A \times B \times I$  e passando ao quociente pela relação de equivalência  $R$ . Tomando a sub-base de  $A \times B \times I$  formada pelos abertos do tipo  $A_1 \times B_1 \times I_1$  onde  $A_1$  é um aberto de  $A$ ,  $B_1$  é um aberto de  $B$  e  $I_1$  é um aberto de  $I$  e passando ao quociente obtemos

$$\frac{A_1 \times B_1 \times I_1}{R} = \begin{cases} A_1 \times B_1 \times I_1 & \text{se } \{0,1\} \cap I_1 = \emptyset ; \\ A_1 \times B_1 \times (I_1 - \{0\}) \cup \{(a, *, 0) : a \in A_1\} & \text{se } 0 \in I_1 \text{ e } 1 \notin I_1 ; \\ A_1 \times B_1 \times (I_1 - \{1\}) \cup \{(*, b, 1) : b \in B_1\} & \text{se } 1 \in I_1 \text{ e } 0 \notin I_1 ; \\ A_1 \times B_1 \times (I_1 - \{0,1\}) \cup \{(a, *, 0) : a \in A_1\} \cup \{(*, b, 1) : b \in B_1\} & \text{se } \\ & \{0,1\} \subset I_1 \end{cases}$$

(4.3.3) Definição. Sejam  $A$  e  $B$  espaços topológicos não vazios. Então definimos

$$\begin{aligned} \phi * B &= \{(*, b, 1) : b \in B\} , \\ A * \phi &= \{(a, *, 0) : a \in A\} , \\ \phi * \phi &= \phi \end{aligned}$$

Damos a  $\phi * B$  e  $A * \phi$  as topologias que os tornam naturalmente homeomorfos a  $B$  e  $A$  respectivamente. Ainda,  $\phi * B \subset A * B$  e  $A * \phi \subset A * B$ , e  $\phi * B$  e  $A * \phi$  são exatamente as cópias homeomorfas de  $B$  e  $A$ , respectivamente, mencionadas na observação (b) de definição (4.3.1).

(4.3.4) Definição. Sejam  $A, B, C$  e  $D$  espaços topológicos não vazios e  $g: A \rightarrow B$  e  $h: C \rightarrow D$  aplicações contínuas. Definimos então  $g * h: A * C \rightarrow B * D$  por

$$(g * h) (\overline{a, c, t}) = \overline{(g(a), h(c), t)}$$

onde  $a \in A, c \in C, t \in I$ .

(4.3.5) Proposição. Sejam  $A, B, C, D, E$  e  $F$  espaços topológicos não vazios.

(i) Se  $g: A \rightarrow B$  e  $h: C \rightarrow D$  são aplicações contínuas então  $g*h: A*C \rightarrow B*D$  é contínua,

(ii) Se  $g_1: A \rightarrow B, g_2: B \rightarrow C, h_1: D \rightarrow E$  e  $h_2: E \rightarrow F$  são aplicações contínuas, então  $(g_2*h_2) \cdot (g_1*h_1) = (g_2 \cdot g_1) * (h_2 \cdot h_1)$ .

(iii) Sejam  $A$  e  $B$  espaços topológicos não vazios e  $g: A \rightarrow A, h: B \rightarrow B$  aplicações contínuas e  $\text{Fix}(g), \text{Fix}(h)$  e  $\text{Fix}(g*h)$  os conjuntos dos pontos fixos de  $g, h$  e  $g*h$ , respectivamente. Então  $\text{Fix}(g*h) = \text{Fix}(g) * \text{Fix}(h)$ .

Demonstração. (i) Sejam

$$\pi_1: A \times C \times I \rightarrow A * C \quad e$$

$$\pi_2: B \times D \times I \rightarrow B * D$$

as projeções canônicas. Temos então um diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 A \times C \times I & \xrightarrow{g \times h \times \text{id}} & B \times D \times I \\
 \pi_1 \downarrow & \searrow \psi & \downarrow \pi_2 \\
 A * C & \xrightarrow{g * h} & B * D
 \end{array}$$

Como  $\psi = \pi_2 \circ (g \times h \times \text{id})$  é contínua,  $\psi = (g * h) \circ \pi_1$ , e  $A * C$  tem a topologia co-induzida por  $\pi_1$  segue que  $g * h$  é contínua.

(ii) Se  $(\overline{a, d, t}) \in A^*D$  então

$$\begin{aligned} ((g_2 \circ g_1) \circ (h_2 \circ h_1))(\overline{a, d, t}) &= (\overline{(g_2 \circ g_1)(a), (h_2 \circ h_1)(d), t}) = \\ &= (\overline{g_2(g_1(a)), h_2(h_1(d)), t}) = (g_2 \circ h_2)(\overline{g_1(a), h_1(d), t}) = \\ &= (g_2 \circ h_2) \circ (g_1 \circ h_1)(\overline{a, d, t}). \end{aligned}$$

(iii) Temos

$$\begin{aligned} \text{Fix}(g \circ h) &= \{(\overline{a, b, t}) \in A^*B : (\overline{a, b, t}) = (\overline{g(a), h(b), t})\} = \\ &= \{(\overline{a, b, t}) \in A^*B : (a, b, t) = (g(a), h(b), t) \text{ para } t \neq 0, 1\} \end{aligned}$$

$$\cup \{(a, *, 0) \in A^*B : (a, *, 0) = (g(a), *, 0)\}$$

$$\cup \{(*, b, 1) \in A^*B : (*, b, 1) = (*, h(b), 1)\} =$$

$$= \{(\overline{a, b, t}) \in A^*B : a = g(a), b = h(b) \text{ se } t \neq 0, 1\}$$

$$\cup \{(a, *, 0) \in A^*B : a = g(a)\} \cup \{(*, b, 1) \in A^*B : b = h(b)\}$$

Por outro lado

$$\text{Fix}(g) * \text{Fix}(h) = \{a \in A : a = g(a)\} * \{b \in B : b = h(b)\} =$$

$$= \{(a, b, t) \in A^*B : a = g(a), b = h(b) \text{ se } t \neq 0, 1\}$$

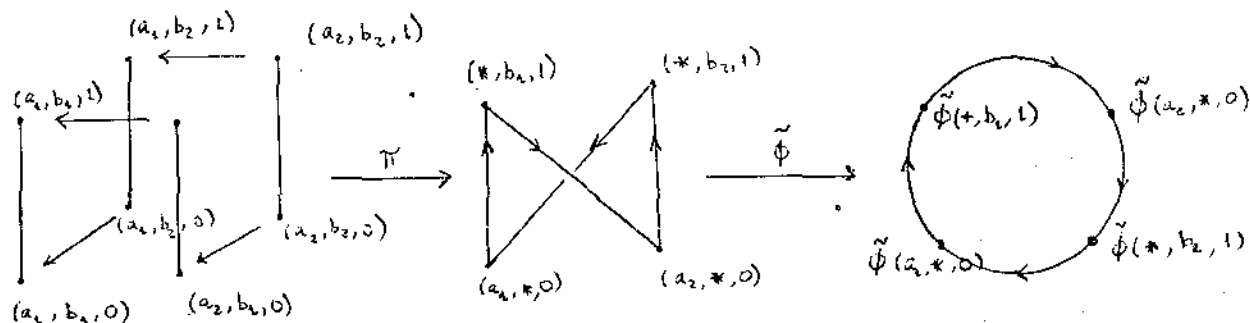
$$\cup \{(a, *, 0) \in A^*B : a = g(a)\} \cup \{(*, b, 1) \in A^*B : b = h(b)\}$$

Portanto  $\text{Fix}(g*h) = \text{Fix}(g)*\text{Fix}(h)$ .

(4.3.6) Observação. Sejam  $A$  e  $B$  espaços topológicos não vazios e  $(\overline{x_1, y_1, t_1}) \in A*B$  tal que  $t_1 \neq 0, 1$ . Pelas identificações da observação (a) da definição (4.3.1) temos  $(\overline{x_1, y_1, t_1}) = (x_1, y_1, t_1)$ . Sejam  $U_1 \subset A$ ,  $U_2 \subset B$  e  $U_3 \subset (0, 1)$  vizinhanças de  $x_1$ ,  $y_1$  e  $t_1$  respectivamente. Então  $U_1 \times U_2 \times U_3$  é uma vizinhança de  $(x_1, y_1, t_1)$ , e como  $\{0, 1\} \cap U_3 = \emptyset$  podemos fazer a identificação  $U_1 \times U_2 \times U_3 \equiv U_1 \times U_2 \times U_3$  (Ver (4.3.2)). Então  $U_1 \times U_2 \times U_3$  é identificada a uma vizinhança de  $(\overline{x_1, y_1, t_1})$ . Segue daí que qualquer aplicação contínua  $f: U_1 \times U_2 \times U_3 \rightarrow X$  induz uma aplicação  $\tilde{f}: \overline{U_1 \times U_2 \times U_3} \rightarrow X$ , também contínua, que pode ser identificada com  $f$ . Para simplificar a notação escrevemos nesse caso  $f$  em lugar de  $\tilde{f}$ .

(4.3.7) Proposição. Existe um homeomorfismo de  $S^n * S^m$  sobre  $S^{n+m+1}$ .

Demonstração. A figura abaixo indica o que deve ser feito no caso em que  $n=m=0$ . Denotamos os dois exemplares de  $S^0$  com  $\{a_1, a_2\}$  e  $\{b_1, b_2\}$ . Sejam  $\pi: S^0 \times S^0 \times I \rightarrow S^0 * S^0$  a aplicação canônica e  $\tilde{\phi}: S^0 \rightarrow S^1$  o homeomorfismo a ser construído. (Na figura  $\tilde{\phi}$  deve levar os segmentos nos arcos.)



Consideremos agora o caso geral, utilizando a mesma idéia. Seja então :  $S^n \times S^m \times I \rightarrow S^{n+m+1}$  definida por

$$\phi(x, y, t) = \left[ \underbrace{(1-t)(x, 0, \dots, 0)}_{m+1 \text{ coordenadas}} + \underbrace{t(0, \dots, 0, y)}_{n+1 \text{ coordenadas}} \right] \cdot (1-2t+2t^2)^{-1/2}$$

onde  $x \in S^n$ ,  $y \in S^m$  e  $t \in I$ .

Então  $\phi$  está bem definida para  $1-2t+2t^2 > 0$  para todo  $t \in I$  e  $||\phi(x, y, t)|| = 1$ . Além disso  $\phi$  tem as seguintes propriedades :  
 (i)  $\phi$  é contínua (óbvio!); (ii) A restrição de  $\phi$  a  $S^n \times S^m \times (0, 1)$  é injetora e valem  $\phi(x_1, y_1, 0) = \phi(x_1, y_2, 0)$  para todo  $x_1 \in S^n$  e  $y_1, y_2 \in S^m$ , e  $\phi(x_1, y_1, 1) = \phi(x_2, y_1, 1)$  para todo  $y_1 \in S^m$  e  $x_1, x_2 \in S^n$ .  
 Com efeito, sejam  $(x_1, y_1, t_1)$  e  $(x_2, y_2, t_2)$  tais que  $\phi(x_1, y_1, t_1) = \phi(x_2, y_2, t_2)$ . Então

$$\begin{aligned} & \left[ (1-t_1)(x_1, 0, \dots, 0) + t_1(0, \dots, 0, y_1) \right] \cdot (1-2t_1+2t_1^2)^{-1/2} \\ &= \left[ (1-t_2)(x_2, 0, \dots, 0) + t_2(0, \dots, 0, y_2) \right] \cdot (1-2t_2+2t_2^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Logo 
$$\frac{1-t_1}{\sqrt{1-2t_1+2t_1^2}} x_1 = \frac{1-t_2}{\sqrt{1-2t_2+2t_2^2}} x_2$$

$$\frac{t_1}{\sqrt{1-2t_1+2t_1^2}} y_1 = \frac{t_2}{\sqrt{1-2t_2+2t_2^2}} y_2$$

Tomando as normas euclidianas das igualdades acima e lembrando que  $||x_1|| = ||x_2|| = ||y_1|| = ||y_2|| = 1$  e que  $t_1, t_2, 1-t_1, 1-t_2$  são  $\geq 0$ ,



vem que

$$\frac{1-t_1}{\sqrt{1-2t_1+2t_1^2}} = \frac{1-t_2}{\sqrt{1-2t_2+2t_2^2}} \quad (1)$$

$$\frac{t_1}{\sqrt{1-2t_1+2t_1^2}} = \frac{t_2}{\sqrt{1-2t_2+2t_2^2}}$$

Das igualdades anteriores vem que  $t_1=0$  se e sô se  $t_2=0$ , e que  $t_1=1$  se e sô se  $t_2=1$ . Então  $t_1 \neq 0$  se e sô se  $t_2 \neq 0$  e  $t_1 \neq 1$  se e sô  $t_2 \neq 1$ . Seja então  $t_1 \neq 0, 1$  (e portanto  $t_2 \neq 0, 1$ ). Dividindo (1) membro a membro vem que  $\frac{t_1}{1-t_1} = \frac{t_2}{1-t_2}$  e portanto  $t_1=t_2$ . Resumindo, temos  $t_1=t_2$  em todos os casos. Temos portanto

$$(1-t_1)(x_1, 0, \dots, 0) + t_1(0, \dots, 0, y_1) = (1-t_1)(x_2, 0, \dots, 0) + t_1(0, \dots, 0, y_2).$$

Então  $(1-t_1)x_1 = (1-t_1)x_2$  e  $t_1y_1 = t_1y_2$ . Assim, para  $t_1 \neq 0, 1$  vem que  $y_1=y_2$  e  $x_1=x_2$ . Para  $t_1=0$  vem que  $(x_1, 0, \dots, 0) = \phi(x_1, y_1, 0) = \phi(x_2, y_2, 0) = (x_2, 0, \dots, 0)$  e portanto  $x_1=x_2$  e  $y_1$  e  $y_2$  são quaisquer. Para  $t_1=1$  vem que  $(0, \dots, 0, y_1) = \phi(x_1, y_1, 1) = \phi(x_2, y_2, 1) = (0, \dots, 0, y_2)$  e portanto  $y_1=y_2$  e  $x_1$  e  $x_2$  são quaisquer.

(iii)  $\phi$  é sobrejetora. Com efeito, seja  $z = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+m+2})$  em  $S^{n+m+1}$  e definamos  $w_1 = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $w_2 = (z_{n+1}, \dots, z_{n+m+2}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Então  $\|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 = 1$ . Se  $w_1 = (0, \dots, 0)$  temos  $\|w_2\| = 1$ , o que implica  $z = (0, \dots, w_2)$  com  $w_2 \in S^m$ . Tomando então  $w' \in S^{n+1}$  arbitrariamente obtemos  $\phi(w', w_2, 1) = (0, \dots, 0, w_2) = z$ .

Se  $w_2 = (0, \dots, 0)$  temos  $\|w_1\| = 1$ , o que implica  $z = (w_1, 0, \dots, 0)$  com  $w_1 \in S^n$ . Tomando então  $w'' \in S^m$  arbitrariamente, obtemos  $\phi(w_1, w'', 0) = (w_1, 0, \dots, 0) = z$ . Se  $w_1 \neq (0, \dots, 0)$  e  $w_2 \neq (0, \dots, 0)$  então  $\|w_1\| \neq 0$  e  $\|w_2\| \neq 0$ . Podemos escrever  $z = \|w_1\| \cdot \left( \frac{w_1}{\|w_1\|}, 0, \dots, 0 \right) + \|w_2\| \cdot \left( 0, \dots, 0, \frac{w_2}{\|w_2\|} \right)$ . Fazendo

$$\frac{1-t}{\sqrt{1-2t+2t^2}} = \|w_1\| \quad \text{e} \quad \frac{t}{\sqrt{1-2t+2t^2}} = \|w_2\|$$

obtemos

$$t = \frac{\|w_2\|}{\|w_1\| + \|w_2\|} \in [0, 1]$$

Então  $\phi\left(\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \frac{w_2}{\|w_1\| + \|w_2\|}\right) = (w_1, w_2) = z$ . Assim  $\phi$  é

sobrejetora.

Consideremos agora o digrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} S^n \times S^m \times I & \xrightarrow{\phi} & S^{n+m+1} \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{\phi} & \\ \frac{S^n \times S^m \times I}{R} = S^n * S^m & & \end{array}$$

onde  $\pi$  é a aplicação canônica e  $\tilde{\phi}$  é definida por  $\tilde{\phi}(\overline{(x, y, t)}) = \phi(x, y, t)$ . Então  $\tilde{\phi}$  está bem definida pois se  $t \neq 0, 1$  vale  $\overline{(x, y, t)} = \{(x, y, t)\}$ . Se  $t=0$  e  $(\overline{x_1, y_1, 0}) = (\overline{x_2, y_2, 0})$  vem que  $x_1 = x_2$  por de finição de  $R$  e, pela propriedade (ii) de  $\phi$ ,

$$\tilde{\phi}(\overline{x_1, y_1, 0}) = \phi(x_1, y_1, 0) = \phi(x_2, y_2, 0) = \tilde{\phi}(\overline{x_2, y_2, 0})$$

Se  $t=1$  e  $(x_1, y_1, 1) = (x_2, y_2, 1)$  vem que  $y_1 = y_2$  pela definição de  $R$  e pela propriedade (ii) de  $\phi$  temos,

$$\tilde{\phi}(\overline{x_1, y_1, 1}) = \phi(x_1, y_1, 1) = \phi(x_2, y_2, 1) = \tilde{\phi}(\overline{x_2, y_2, 1})$$

Ainda por (ii)  $\tilde{\phi}$  é injetora e por (iii)  $\tilde{\phi}$  é sobrejetora. Como  $S^n * S^m$  tem a topologia co-induzida por  $\pi$  e  $\phi$  é contínua então  $\tilde{\phi}$  é contínua. Como  $S^n$ ,  $S^m$  e  $I$  são compactos  $S^n \times S^m \times I$  é compacto, e como  $\pi$  é contínua  $S^n * S^m$  é compacto. Como  $S^{n+m+1}$  é Hausdorff e  $\tilde{\phi}$  é bijetora e contínua segue que  $\tilde{\phi}: S^n * S^m \rightarrow S^{n+m+1}$  é um homeomorfismo.

(4.3.8) Concluiremos esta secção analisando a estrutura de variedade diferenciável em  $S^n * S^m$ . Como  $S^{n+m+1}$  é uma variedade  $C^\infty$  conexa, compacta e orientável, e  $\tilde{\phi}: S^n * S^m \rightarrow S^{n+m+1}$  é um homeomorfismo, podemos dar a  $S^n * S^m$  uma estrutura natural de variedade  $C^\infty$  conexa, compacta e orientável pela composição de  $\tilde{\phi}$  com as cartas de  $S^{n+m+1}$ . Com esta estrutura  $\tilde{\phi}$  torna-se um difeomorfismo  $C^\infty$ .

Vamos agora escolher para  $S^n * S^m$  uma orientação que possa ser dada por cartas coerentes (isto é, cartas cujas mudanças de coordenadas tenham determinante jacobiano positivo) cartas obtidas de modo natural a partir de cartas coerentes de  $S^n$  e  $S^m$ . Sejam  $x_1, x_2 \in S^n$ ,  $y_1, y_2 \in S^m$  e  $t_1, t_2 \in (0, 1)$ . Então (Ver (4.3.6)) existem vizinhanças  $U_1, U_2, U_3, U_4, C_1, C_2$  de  $x_1, x_2, y_1, y_2, t_1$  e  $t_2$ , respec

tivamente; cartas coerentes  $\pi_1:U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\pi_2:U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $S^n$ ; e cartas coerentes,  $\pi_3:U_3 \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\pi_4:U_4 \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Sejam  $id_1:C_1 \rightarrow C_1$  e  $id_2:C_2 \rightarrow C_2$  as aplicações identidade. Como  $t_1, t_2 \neq 0, 1$ , usando as identificações de (4.3.2) temos as seguintes cartas de  $S^n * S^m$ .

- I)  $\ell_{131} = \pi_1 \times \pi_3 \times id_1: U_1 \times U_3 \times C_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}, (x_1, y_1, t_1) \in U_1 \times U_3 \times C_1.$
- II)  $\ell_{141} = \pi_1 \times \pi_4 \times id_1: U_1 \times U_4 \times C_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}, (x_1, y_2, t_1) \in U_1 \times U_4 \times C_1.$
- III)  $\ell_{231} = \pi_2 \times \pi_3 \times id_2: U_2 \times U_3 \times C_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}, (x_2, y_1, t_1) \in U_2 \times U_3 \times C_1.$
- IV)  $\ell_{241} = \pi_2 \times \pi_4 \times id_2: U_2 \times U_4 \times C_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}, (x_2, y_2, t_1) \in U_2 \times U_4 \times C_1.$
- V)  $\ell_{132} = \pi_1 \times \pi_3 \times id_2: U_1 \times U_3 \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}, (x_2, y_2, t_1) \in U_1 \times U_3 \times C_2.$
- VI)  $\ell_{142} = \pi_1 \times \pi_4 \times id_2: U_1 \times U_4 \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}, (x_2, y_2, t_2) \in U_1 \times U_4 \times C_2.$
- VII)  $\ell_{232} = \pi_2 \times \pi_3 \times id_2: U_2 \times U_3 \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}, (x_2, y_1, t_2) \in U_2 \times U_3 \times C_2.$
- VIII)  $\ell_{242} = \pi_2 \times \pi_4 \times id_2: U_2 \times U_4 \times C_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}, (x_2, y_2, t_2) \in U_2 \times U_4 \times C_2.$

Os domínios dessas cartas não cobrem pontos do tipo  $(a, *, 0)$  e  $(* , b, 1)$ , mas elas são suficientes para os propósitos posteriores (Ver 6.1.5).

Estas cartas são coerentes pois se, por exemplo,  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , então

$$\ell_{231} \circ \ell_{131}^{-1}: \ell_{131}((U_1 \cap U_2) \times U_3 \times C_1) \rightarrow \ell_{231}((U_1 \cap U_2) \times U_3 \times C_1)$$

com  $\ell_{231} \circ \ell_{131}^{-1}(x, y, t) = (\pi_2 \circ \pi_1^{-1}(x), y, t)$ , e portanto

$$J(\ell_{231} \circ \ell_{131}^{-1}) = \begin{bmatrix} J(\pi_2 \circ \pi_1^{-1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dai,  $\det(J(\ell_{231} \cdot \ell_{131}^{-1})) = \det(J(\pi_2 \cdot \pi_1^{-1})) > 0$  pois  $\pi_2$  e  $\pi_1$  são coe-  
rentes. Analogamente para os outros casos.

#### 4.4. Junções de Complexos Simpliciais

Nesta seção generalizamos a construção feita em (1.1.4(ii)).

(4.4.1) Proposição. Sejam E e F espaços vetoriais reais. En-  
tão  $\{x_0, \dots, x_q\} \subset E$  está em posição geral (Ver (1.1.1(i))) se e só  
se  $\{(x_0, 0, 0), \dots, (x_q, 0, 0)\} \subset E \times F \times \mathbb{R}$  está em posição geral. Analoga-  
mente  $\{y_0, \dots, y_r\} \subset F$  está em posição geral se e só  $\{(0, y_0, 1),$   
 $\dots, (0, y_r, 1)\} \subset E \times F \times \mathbb{R}$  está em posição geral.

Demonstração. Trivial.

(4.4.2) Proposição. Sejam E e F espaços vetoriais reais. Se  
 $\{x_0, \dots, x_q\} \subset E$  está em posição geral e  $\{y_0, \dots, y_r\} \subset F$  está em po-  
sição geral, então  $\{(x_0, 0, 0), \dots, (x_q, 0, 0), \dots, (0, y_0, 1), \dots,$   
 $(0, y_r, 1)\} \subset E \times F \times \mathbb{R}$  está em posição geral.

Demonstração. Consideremos os vetores  $(x_1, 0, 0) - (x_0, 0, 0), \dots,$   
 $(x_q, 0, 0) - (x_0, 0, 0), (0, y_0, 1) - (x_0, 0, 0), \dots, (0, y_r, 1) - (x_0, 0, 0)$ . Se

$$a_1(x_1 - x_0, 0, 0) + \dots + a_q(x_q - x_0, 0, 0) + b_0(-x_0, y_0, 1) + \dots + b_r(-x_0, y_r, 1) = (0, 0, 0)$$

então

$$\begin{cases} a_1(x_1 - x_0) + \dots + a_q(x_q - x_0) - \sum_{j=0}^r b_j x_0 = 0 \\ b_0 y_0 + \dots + b_r y_r = 0 \\ \sum_{j=0}^r b_j = 0 \end{cases}$$

Lembrando que  $(x_1 - x_0), \dots, (x_q - x_0)$  são linearmente independentes, da primeira e da terceira igualdades vem que  $a_1 = a_2 = \dots = a_q = 0$ . Portanto

$$b_0(-x_0, y_0, 1) + \dots + b_r(-x_0, y_r, 1) = (0, 0, 0) .$$

Dai

$$b_0(-x_0, y_0, 1) + \dots + b_r(-x_0, y_r, 1) - \sum_{j=0}^r b_j(-x_0, y_0, 1) = (0, 0, 0),$$

o que implica

$$b_0(0, 0, 0) + b_1(0, y_1 - y_0, 0) + \dots + b_r(0, y_r - y_0, 0) = (0, 0, 0) ,$$

ou seja,  $b_1(y_1 - y_0) + \dots + b_r(y_r - y_0) = 0$  e portanto  $b_1 = \dots = b_r = 0$ . Agora, de  $\sum_{j=0}^r b_j = 0$ , vem que  $b_0 = 0$ .

(4.4.3) Definição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais nos espaços vetoriais reais  $E$  e  $F$ , respectivamente. Então a junção de  $K$  e  $L$ , denotada  $K*L$ , é o complexo simplicial de  $ExFxIR$  definido assim:

(i) Os vértices de  $K*L$  são exatamente as triplas em  $ExFxIR$  de forma  $(a_i, 0, 0)$  onde  $a_i$  é um vértice de  $K$ , e  $(0, b_j, 1)$  onde  $b_j$  é um vértice de  $L$ ;

(ii) Os simplexos de  $K*L$  tem a forma  $[A_0, \dots, A_q, B_0, \dots, B_r]$ , onde  $A_0 = (a_0, 0, 0), \dots, A_q = (a_q, 0, 0)$  são vértices de  $K*L$  tais que  $[a_0, \dots, a_q]$  é um simplexo de  $K$  (que em particular pode ser va-

zio), e  $B_0 = (0, b_0, 1), \dots, B_r = (0, b_r, 1)$  são vértices de  $K*L$  tais que  $[b_0, \dots, b_r]$  é um simplexo de  $L$  (que em particular pode ser vazio).

Para verificar que esta é uma boa definição imponhamos que

$$A = [(v_0, 0, 0), \dots, (v_q, 0, 0), (0, w_0, 1), \dots, (0, w_r, 1)] \quad e$$

$$B = [(v'_0, 0, 0), \dots, (v'_m, 0, 0), (0, w'_0, 1), \dots, (0, w'_n, 1)]$$

estão nas condições da definição e que  $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle \neq \emptyset$ . Se  $v \in \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$  podemos escrever

$$v = a_0(v_0, 0, 0) + \dots + a_q(v_q, 0, 0) + b_0(0, w_0, 1) + \dots + b_r(0, w_r, 1)$$

$$= a'_0(v'_0, 0, 0) + \dots + a'_m(v'_m, 0, 0) + b'_0(0, w'_0, 1) + \dots + b'_n(0, w'_n, 1) \quad ,$$

onde  $a_i, a'_j, b_k, b'_\ell > 0$  para todo  $i, j, k$  e  $\ell$ , e  $\sum_{i=0}^q a_i + \sum_{j=0}^r b_j = 1$  e  $\sum_{h=0}^m a'_h + \sum_{\ell=0}^n b'_\ell = 1$ , donde

$$\sum_{j=0}^r b_j = \sum_{\ell=0}^n b'_\ell = c \neq 0 \quad e \quad \sum_{i=0}^q a_i = \sum_{k=0}^m a'_k = d \neq 0$$

$$a_0 v_0 + \dots + a_q v_q = a'_0 v'_0 + \dots + a'_m v'_m$$

$$b_0 w_0 + \dots + b_r w_r = b'_0 w'_0 + \dots + b'_n w'_n$$

Então  $y = \frac{1}{c}(b_0 w_0 + \dots + b_r w_r) = \frac{1}{c}(b'_0 w'_0 + \dots + b'_n w'_n) \in \langle w_0, \dots, w_r \rangle \cap \langle w'_0, \dots, w'_n \rangle$  e portanto  $[w_0, \dots, w_r] = [w'_0, \dots, w'_n]$  (Ver (1.1.3(i)))

e portanto  $r=n$  e, após conveniente reordenação  $w_k = w'_k$ .

Por outro lado  $x = \frac{1}{d}(a_0 v_0 + \dots + a_q v_q) = \frac{1}{d}(a'_0 v'_0 + \dots + a'_m v'_m) \in \langle v_0, \dots, v_q \rangle \cap \langle v'_0, \dots, v'_m \rangle$  e portanto  $[v_0, \dots, v_q] = [v'_0, \dots, v'_m]$ , donde  $q=m$  e, após conveniente reordenação  $v_i = v'_i$ . Assim  $A=B$  e portanto  $K*L$  é complexo simplicial.

(4.4.4) Proporção. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais.

(i) Se  $K_1$  é um subcomplexo de  $K$  e  $L_1$  é um subcomplexo de  $L$  então  $K_1 * L_1$  é um subcomplexo de  $K*L$ . Em particular  $K*L$  admite como subcomplexos cópias de  $K$  e  $L$ , a saber,  $K*\phi$  e  $\phi*L$ , respectivamente.

(ii)  $\dim(K*L) = \dim K + \dim L + 1$ .

(iii) Se  $K$  e  $L$  são complexos simpliciais não vazios então  $|K*L|$  é conexo por caminhos.

Demonstração. As propriedades (i) e (ii) seguem imediatamente de (4.4.3). Demonstremos apenas a (iii). Sejam  $x \in [A_0, \dots, A_k, B_0, \dots, B_r]$  e  $y \in [A'_0, \dots, A'_\ell, B'_0, \dots, B'_s]$  dois pontos de  $|K*L|$ . Como  $[A_0, \dots, A_k, B_0, \dots, B_r]$  é convexo,  $x$  pode ser ligado a um ponto  $z_1 \in [B_0, \dots, B_r]$  por um caminho linear. Como  $[A'_0, \dots, A'_\ell, B_0, \dots, B_r]$  é um simplexo de  $K*L$  e é convexo e como  $z_1 \in [A'_0, \dots, A'_\ell, B_0, \dots, B_r]$ ,  $z_1$  pode ser ligado a um ponto  $z_2 \in [A'_0, \dots, A'_\ell]$  por um caminho linear. Como  $z_2 \in [A'_0, \dots, A'_\ell, B'_0, \dots, B'_s]$ , que é convexo,  $z_2$  pode ser ligado a  $y$  por um caminho linear. Compondo convenientemente estes três caminhos, temos um caminho ligando  $x$  a  $y$ .

(4.4.5) Definição. Sejam  $K_1, K_2, L_1, L_2$  complexos simpliciais não vazios. Se  $f_1: |K_1| \rightarrow |L_1|$  e  $f_2: |K_2| \rightarrow |L_2|$  são aplicações então definimos  $f_1 * f_2: |K_1 * K_2| \rightarrow |L_1 * L_2|$  por

$$(f_1 * f_2) \left( \sum_i t_i (v_i, 0, 0) + \sum_j t'_j (0, w_j, 1) \right) = \sum_i t_i (f_1(v_i), 0, 0) + \sum_j t'_j (0, f_2(w_j), 1)$$



onde  $\{v_i\}$  é um conjunto (que pode ser vazio) de vértices de  $K_1$  e  $\{w_j\}$  é um conjunto (que pode ser vazio) de vértices de  $K_2$ ,  $0 \leq t_i$ ,  $t_j' \leq 1$  e  $\sum_i t_i + \sum_j t_j' = 1$ .

Como  $(f_1(v_i), 0, 0)$  e  $(0, f_2(w_j), 1)$  podem não ser vértices de  $L_1 * L_2$  devemos demonstrar que a imagem da aplicação  $f_1 * f_2$  está realmente contida em  $|L_1 * L_2|$ . Sejam, então,  $f_1(v_i) = \sum_k \lambda_{ik} a_k$ , onde os  $a_k$  são vértices de  $L_1$ ,  $0 \leq \lambda_{ik} \leq 1$  e  $\sum_k \lambda_{ik} = 1$ , e ainda  $f_2(w_j) = \sum_\ell n_{j\ell} b_\ell$ , onde os  $b_\ell$  são vértices de  $L_2$ ,  $0 \leq n_{j\ell} \leq 1$  e  $\sum_\ell n_{j\ell} = 1$ . Então

$$\begin{aligned} & \sum_i t_i (f_1(v_i), 0, 0) + \sum_j t_j' (0, f_2(w_j), 1) \\ &= \sum_i t_i \left( \sum_k \lambda_{ik} (a_k, 0, 0) \right) + \sum_j t_j' \left( \sum_\ell n_{j\ell} (0, b_\ell, 1) \right) \\ &= \sum_{i,k} t_i \lambda_{ik} (a_k, 0, 0) + \sum_{j,\ell} t_j' n_{j\ell} (0, b_\ell, 1) \end{aligned}$$

onde  $0 \leq t_i \lambda_{ik} \leq 1$ ,  $0 \leq t_j' n_{j\ell} \leq 1$  e  $\sum_{i,k} t_i \lambda_{ik} + \sum_{j,\ell} t_j' n_{j\ell} = \sum_i t_i \left( \sum_k \lambda_{ik} \right) + \sum_j t_j' \left( \sum_\ell n_{j\ell} \right) = \sum_i t_i + \sum_j t_j' = 1$ . Portanto

$$\sum_i t_i (f_1(v_i), 0, 0) + \sum_j t_j' (0, f_2(w_j), 1) \in |L_1 * L_2|$$

(4.4.6). Definição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais  $f: |K| \rightarrow |L|$  uma aplicação qualquer. Definimos a aplicação  $f * \phi: |K * \phi| \rightarrow |L * \phi|$  por  $(f * \phi)(v, 0, 0) = (f(v), 0, 0)$ .

(4.4.7) Observação. Sejam  $K_1, K_2, L_1, L_2$  complexos simpliciais e  $K_1$  e  $L_1$  não vazios. Então a notação  $f * g: |K_1 * K_2| \rightarrow |L_1 * L_2|$  será entendida no sentido da aplicação (4.4.5) quando  $K_2$  e  $L_2$  são não vazios e no sentido da definição (4.4.6) quando  $K_2$  e  $L_2$  são va-

zios.

(4.4.8) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais não vazios e  $f: |K| \rightarrow |K|$  e  $g: |L| \rightarrow |L|$  aplicações quaisquer e  $\text{Fix}(f)$ ,  $\text{Fix}(g)$  e  $\text{Fix}(f^*g)$  os conjuntos dos pontos fixos de  $f$ ,  $g$  e  $f^*g$ , respectivamente. Então,

- (i)  $\text{Fix}(f^*g) = \phi$  se  $\text{Fix}(f) = \text{Fix}(g) = \phi$
- (ii)  $\text{Fix}(f^*g) = \text{Fix}(f) \times 0 \times 0$  se  $\text{Fix}(f) \neq \phi$  e  $\text{Fix}(g) = \phi$
- (iii)  $\text{Fix}(f^*g) = 0 \times \text{Fix}(g) \times 1$  se  $\text{Fix}(f) = \phi$  e  $\text{Fix}(g) \neq \phi$
- (iv)  $\text{Fix}(f^*g) = \bigcup_{t \in I} \{(1-t)(\text{Fix}(f) \times 0 \times 0) + t(0 \times \text{Fix}(g) \times 1)\}$  se  $\text{Fix}(f) \neq \phi$  e  $\text{Fix}(g) \neq \phi$ .

Demonstração. Basta notar que

$$\begin{aligned} \sum_i t_i (v_i, 0, 0) + \sum_j t_j' (0, w_j, 1) &= (f^*g) \left( \sum_i t_i (v_i, 0, 0) + \sum_j t_j' (0, w_j, 1) \right) \\ &= \sum_i t_i (f(v_i), 0, 0) + \sum_j t_j' (0, g(w_j), 1) \end{aligned}$$

Se e somente se  $v_i = f(v_i)$  para  $t_i \neq 0$  e  $w_j = g(w_j)$  para  $t_j' \neq 0$ .

(4.4.9) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais não vazios e  $f: K \rightarrow L$  uma aplicação qualquer. Então  $\text{Fix}(f^*\phi) = \text{Fix}(f) \times 0 \times 0$ .

Demonstração. Basta notar que  $(v, 0, 0) = (f^*\phi)(v, 0, 0) = (f(v), 0, 0)$  (Ver (4.4.6)) se e somente se  $f(v) = v$ .

(4.4.10) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais não vazios e  $f: K \rightarrow L$  uma aplicação simplicial. Então  $f^*\phi: K^*\phi \rightarrow L^*\phi$  é uma aplicação simplicial. (Portanto podemos usar a notação  $f^*\phi: |K^*\phi| \rightarrow |L^*\phi|$ .)

Demonstração. Trivial.

(4.4.11) Proposição. Sejam  $K_1, K_2, L_1, L_2$  complexos simpliciais não vazios e  $f_1: K_1 \rightarrow L_1$  e  $f_2: K_2 \rightarrow L_2$  aplicações simpliciais. Então a aplicação  $f_1 * f_2: |K_1 * K_2| \rightarrow |L_1 * L_2|$  é simplicial. (Portanto podemos usar a notação  $f_1 * f_2: K_1 * K_2 \rightarrow L_1 * L_2$ .)

Demonstração. (i) Seja  $V$  um vértice de  $K_1 * K_2$ . Se  $V = (v, 0, 0)$ , onde  $v$  é um vértice de  $K_1$ , temos  $(f_1 * f_2)(v) = (f_1(v), 0, 0)$ . Como  $f_1$  é simplicial,  $f_1(v)$  é um vértice de  $L_1$ , e portanto  $(f_1 * f_2)(V)$  é um vértice de  $L_1 * L_2$ . Analogamente se  $V = (0, w, 1)$ , onde  $w$  é vértice de  $K_2$ . Assim  $f_1 * f_2$  leva vértices de  $K_1 * K_2$  em vértice de  $L_1 * L_2$ .

(ii) Seja  $A$  um simplexo de  $K_1 * K_2$ . Então  $A = |A_1 * A_2|$  onde  $A_1$  é um simplexo de  $K_1$  e  $A_2$  é um simplexo de  $K_2$ . Então

$$(f_1 * f_2)|A_1 * A_2| = \{(f_1 * f_2)(\sum t_i(v_i, 0, 0) + \sum t'_j(0, w_j, 1)) :$$

$$0 \leq t_i, t'_j \leq 1, \sum t_i + \sum t'_j = 1, [v_0, \dots, v_k] = A_1, [w_0, \dots, w_r] = A_2\} =$$

$$= \{\sum t_i(f_1(v_i), 0, 0) + \sum t'_j(0, f_2(w_j), 1) :$$

$$0 \leq t_i, t'_j \leq 1, \sum t_i + \sum t'_j = 1, [v_0, \dots, v_k] = A_1, [w_0, \dots, w_r] = A_2\} =$$

$$= \left\{ \sum t_i (a_i, 0, 0) + \sum t'_j (0, b_j, 1) \right\} :$$

$$0 \leq t_i, t'_j \leq 1, \sum t_i + \sum t'_j = 1, [a_0, \dots, a_\ell] = f_1(A_1), [b_0, \dots, b_s] = f_2(A) =$$

$$= |f_1(A_1) * f_2(A_2)|.$$

Como  $f_1$  e  $f_2$  são simpliciais,  $f_1(A_1)$  é um simplexo de  $L_1$  e  $f_2(A_2)$  é um simplexo de  $L_2$ , e portanto  $|f_1(A_1) * f_2(A_2)|$  é um simplexo de  $L_1 * L_2$ . Assim  $(f_1 * f_2)$  leva simplexos em simplexos.

(iii) Seja  $x$  um ponto do simplexo  $[V_0, \dots, V_k, \dots, V_m]$  de  $K_1 * K_2$ . Então  $x = \sum_{i=0}^m \lambda_i V_i$  onde  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  e  $\sum \lambda_i = 1$ . Reordenando convenientemente podemos escrever  $V_0 = (v_0, 0, 0), \dots, V_k = (v_k, 0, 0), V_{k+1} = (0, w_{k+1}, 1), \dots, V_m = (0, w_m, 1)$  onde  $\{v_i\}$  é um conjunto (que pode ser vazio) de vértices de  $K_1$  e  $\{w_j\}$  é um conjunto (que pode ser vazio) de vértices de  $K_2$ . Então

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2) \left( \sum \lambda_i V_i \right) &= (f_1 * f_2) \left( \sum_{i=0}^k \lambda_i (v_i, 0, 0) + \sum_{i=k+1}^m \lambda_i (0, w_i, 1) \right) = \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda_i (f_1(v_i), 0, 0) + \sum_{i=k+1}^m \lambda_i (0, f_2(w_i), 1) = \\ &= \sum_{i=0}^k \lambda_i (f_1 * f_2)(v_i, 0, 0) + \sum_{i=k+1}^m \lambda_i (f_1 * f_2)(0, w_i, 1) = \sum_{i=0}^m \lambda_i (f_1 * f_2)(V_i). \end{aligned}$$

Assim  $f_1 * f_2$  é linear nos simplexos.

(4.4.12) Proposição: Sejam  $K_1, L_1, M_1, K_2, L_2$  e  $M_2$  complexos simpliciais não vazios e  $f_1: K_1 \rightarrow L_1, g_1: L_1 \rightarrow M_1, f_2: L_2 \rightarrow M_2$  aplicações simpliciais. Então  $(g_1 \circ f_1) * (g_2 \circ f_2) = (g_1 * g_2) \circ (f_1 * f_2)$ .

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
 & |(g_1 * g_2) \circ (f_1 * f_2)| \left( \sum_i t_i(v_i, 0, 0) + \sum_j t'_j(0, w_j, 1) \right) = \\
 & = (g_1 * g_2) \left( \sum_i t_i(f_1(v_i), 0, 0) + \sum_j t'_j(0, f_2(w_j), 1) \right) = \\
 & = \sum_i t_i(g_1 \circ f_1)(v_i), 0, 0) + \sum_j t'_j(0, (g_2 \circ f_2)(w_j), 1) = \\
 & = |(g_1 \circ f_1) * (g_2 \circ f_2)| \left( \sum_i t_i(v_i, 0, 0) + \sum_j t'_j(0, w_j, 1) \right)
 \end{aligned}$$

para  $v_i$  vértice de  $K_1$  e  $w_j$  vértice de  $L_1$ .

(4.4.13) Proposição. Sejam  $K$ ,  $L$  e  $M$  complexos simpliciais e  $f: K \rightarrow L$  e  $g: L \rightarrow M$  aplicações simpliciais. Então  $(g \circ f) * \phi = (g * \phi) \circ (f * \phi)$ .

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned}
 & |(g * \phi) \circ (f * \phi)| (v, 0, 0) = (g * \phi)(f(v), 0, 0) = \\
 & = ((g \circ f)(v), 0, 0) = ((g \circ f) * \phi)(v, 0, 0) .
 \end{aligned}$$

(4.4.14) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais, com  $K$  não vazio, e  $h_1: K \rightarrow K$  e  $h_2: L \rightarrow L$  aplicações simpliciais tais que  $h_1: |K| \rightarrow |K|$  e  $h_2: |L| \rightarrow |L|$  são homeomorfismos periódicos. Então  $h_1 * h_2: K * L \rightarrow K * L$  é uma aplicação simplicial (Ver (4.4.11)) tal que  $h_1 * h_2: |K * L| \rightarrow |K * L|$  é um homeomorfismo periódico cujo período é o mínimo múltiplo comum dos períodos de  $h_1$  e  $h_2$ .

Demonstração. Segue de (4.4.12) se  $L \neq \emptyset$  e de (4.4.13) se  $L = \emptyset$ .

(4.4.15) Proposição. Sejam A e B espaços topológicos trianguláveis (Ver (1.1.13)) e  $(K, h)$  uma triangulação de A e  $(L, g)$  uma triangulação de B. Seja  $h\Delta g: |K*L| \rightarrow A*B$  a aplicação definida por

$$(h\Delta g)(\sum t_i(v_i, 0, 0) + \sum t'_j(0, w_j, 1)) = \begin{cases} \overline{\left( h\left(\frac{\sum t_i v_i}{\sum t_i}, g\left(\frac{\sum t'_j w_j}{\sum t'_j}\right), \sum t'_j \right)} & \text{se } \sum t'_j \neq 0, 1 \\ \left( h\left(\sum t_i v_i\right), *, 0 \right) & \text{se } \sum t'_j = 0 \\ \left( *, g\left(\sum t'_j w_j\right), 1 \right) & \text{se } \sum t'_j = 1 \end{cases}$$

onde os  $v_i$  são vértices de K e os  $w_j$  são vértices de L. Então  $(K*L, h\Delta g)$  é uma triangulação de  $A*B$ .

Demonstração. Sabemos que  $h: |K| \rightarrow A$  e  $g: |L| \rightarrow B$  são homeomorfismos e portanto  $h^{-1}$  e  $g^{-1}$  existem e são contínuas. Verificamos facilmente que a aplicação inversa de  $h\Delta g$  é a aplicação  $(h\Delta g)^{-1}: A*B \rightarrow |K*L|$  definida por

$$(h\Delta g)^{-1}(a, b, t) = \begin{cases} (1-t)(h^{-1}(a), 0, 0) + t(0, g^{-1}(b), 1) & \text{se } t \neq 0, 1 \\ (h^{-1}(a), 0, 0) & \text{se } t = 0 \\ (0, g^{-1}(b), 1) & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

Lembremos agora (Ver (4.3.2)) que uma subbase para os abertos de  $A*B$  é formada pelos conjuntos do tipo  $\overline{A_1 \times B_1 \times I_1}$ , onde  $A_1$  é um aberto de A,  $B_1$  é um aberto de B e  $I_1$  é um aberto de I. Observe

mos também que os abertos básicos de  $|K*L|$  são os abertos do tipo

$$\bigcup_{t \in I_1} \{(1-t)(M_1 \times 0 \times 0) + t(0 \times M_2 \times 1)\}$$

onde  $I_1$  é um aberto de  $I$ ,  $M_1$  é um aberto de  $|K|$  e  $M_2$  é um aberto de  $|L|$ . (Ver (4.4.3)). Então

$$(h\Delta g)^{-1}(\overline{A_1 \times B_1 \times I_1}) = \bigcup_{t \in I_1} \{(1-t)(h^{-1}(A_1) \times 0 \times 0) + t(0 \times g^{-1}(B_1) \times 1)\}$$

onde  $h^{-1}(A_1)$  é um aberto de  $|K|$  e  $g^{-1}(B_1)$  é um aberto de  $|L|$  pois  $h$  e  $g$  são homeomorfismos. Assim a imagem inversa por  $h\Delta g$  de um aberto sub básico é um aberto. Logo  $h\Delta g$  é contínua.

Por outro lado,

$$(h\Delta g)\left(\bigcup_{t \in I_1} \{(1-t)(M_1 \times 0 \times 0) + t(0 \times M_2 \times 1)\}\right) = \overline{h(M_1) \times g(M_2) \times I_1}.$$

Assim  $h\Delta g$  leva abertos em abertos e portanto  $h\Delta g$  é uma aplicação aberta. Então  $h\Delta g$  é homeomorfismo, e  $(K*L, h*g)$  é uma triangulação de  $A*B$ .

(4.4.16) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais e  $n$  um número natural  $\geq 1$ . Então (Ver (1.1.8(iii)))

$$Sd^n(K*L, K*\phi, \phi*L) = Sd^n(K)*L$$

e similarmente

$$Sd^n(K*L, \phi*L, K*\phi) = K*Sd^n(L).$$

Demonstração. Temos que  $K^*\phi = Kx0x0$  e  $\phi^*L = 0xLx1$  (Ver (4.4.4(i))).  
Então  $(K^*\phi) \cap (\phi^*L) = \phi$  e tem sentido falar na  $n$ -ésima subdivisão ba-  
ricêntrica de  $K^*L$  relativa a  $K^*\phi$  módulo  $\phi^*L$ . Por (1.1.8 (ii)) te-  
mos

$$\begin{aligned} Sd(K^*L, K^*\phi, \phi^*L) &= \\ &= \bigcup_{\substack{A \in K \\ B \in S_{Ax0x0}}} \{Sd(Ax0x0) \cdot B\} \cup \{D \in K^*L : c \in (K^*L) - \bigcup_{\substack{A \in K \\ B \in S_{Ax0x0}}} \{(Ax0x0) \cdot B\} \text{ com } D \subseteq C\} \end{aligned}$$

onde o ponto  $\cdot$  indica a junção definida em (1.1.4) e  $S_A$  é o conjunto defini-  
do em (1.1.8(iii)). Mas em  $K^*L$ , se  $A \in K$  temos

$$1k(Ax0x0, K^*L) \supset 0xLx1 = \phi^*L$$

Então, como  $\phi^*L$  é disjunto de  $K^*\phi$ , vem que

$$S_{Ax0x0} = \{B \in 1k(Ax0x0, K^*L) : B \not\subseteq K^*\phi\} \supset \phi^*L$$

Daí

$$\begin{aligned} (K^*L) - \bigcup_{\substack{A \in K \\ B \in S_{Ax0x0}}} \{(Ax0x0) \cdot B\} &\subset (K^*L) - \bigcup_{\substack{A \in K \\ B \in \phi^*L}} \{(Ax0x0) \cdot B\} = \\ &= (K^*L) - (K^*L) = \phi \end{aligned}$$

Portanto  $(K^*L) - \bigcup_{\substack{A \in K \\ B \in S_{Ax0x0}}} \{(Ax0x0) \cdot B\} = \phi$  e então

$$\begin{aligned} Sd(K^*L, K^*\phi, \phi^*L) &= \bigcup_{\substack{A \in K \\ B \in 0xLx1}} \{Sd(Ax0x0) \cdot B\} = \\ &= \bigcup_{\substack{A \in K \\ B \in L}} \{Sd(A) \cdot B\} = Sd(k) \cdot L. \end{aligned}$$



$$= \bigcup_{\substack{A \in K \\ B \in L}} \{Sd(A) * B\} = Sd(K) * L.$$

Por indução (Ver (1.1.8 (ii))) temos

$$\begin{aligned} Sd^n(K * L, K * \phi, \phi * L) &= \\ &= Sd(Sd^{(n-1)}(K * L, K * \phi, \phi * L), Sd^{(n-1)}(K * \phi), \phi * L) \\ &= Sd(Sd^{(n-1)}(K) * L, Sd^{(n-1)}(K) * \phi, \phi * L) \\ &= Sd(Sd^{n-1}(K)) * L = Sd^n(K) * L. \end{aligned}$$

=====

=====

## CAPÍTULO 5

### O CILINDRO DE UMA APLICAÇÃO SIMPLICIAL

#### 5.1. O Cilindro de uma Aplicação Simplicial

Referência principal: Conner-Floyd.

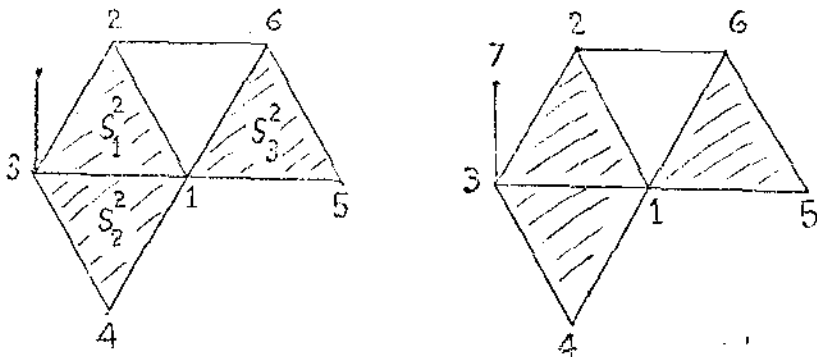
(5.1.1) Proposição. Seja  $K$  um complexo simplicial finito. Então os vértices de  $K$  podem ser parcialmente ordenados de tal forma que os vértices de qualquer simplexo fixam totalmente ordenados.

Demonstração. Seja  $\dim K = n$ . Consideremos os simplexos de  $K$  de dimensão  $n$  dispostos numa sequência qualquer  $S_1^n, \dots, S_{k_n}^n$  (existe um número finito  $k_n$  de tais simplexos). Tomamos  $S_1^n$  e damos arbitrariamente uma ordem total a seus vértices. Tomamos a seguir  $S_2^n$ ; aos vértices deste simplexo que não pertencem a  $S_1^n$  damos arbitrariamente uma ordem total e dizemos que eles são maiores que todos os vértices de  $S_1^n$ . Procedendo por indução, suponhamos que todos os vértices de  $S_1^n \dots S_i^n$  ( $i < k_n$ ) já tenham sido ordenados totalmente. Tomamos então  $S_{i+1}^n$ ; aos vértices deste simplexo que não pertencem a  $S_1^n \dots S_i^n$  damos arbitrariamente uma ordem total, e dizemos que eles são maiores que todos os vértices de  $S_1^n \dots S_i^n$ . Então os vértices de  $S_1^n \dots S_{i+1}^n$  estão ordenados totalmente, e portanto num número finito de passos todos os vértices da sequência  $S_1^n \dots S_{k_n}^n$  estarão ordenados totalmente.

Consideremos agora os simplexos de dimensão  $n-1$  dados

numa sequência arbitrária  $S_1^{n-1}, \dots, S_{k_n}^{n-1}$ . Tomamos os vértices de  $S_1^{n-1}$  que ainda não foram ordenados e lhes damos arbitrariamente uma ordem total considerando-os maiores que todos os vértices já ordenados. Seguimos agora para esta sequência o mesmo processo que para a sequência  $S_1^n, \dots, S_{k_n}^n$ , terminando então por ordenar todos os vértices de simplexes de dimensão  $n-1$  de  $K$ .

(Ver figura)



Considerando, sucessivamente as sequências de simplexes de dimensão  $n-2, n-3, \dots, 1$ , e aplicando em cada caso o procedimento anterior terminamos por ordenar totalmente os vértices de  $K$ .

(5.1.2) Definição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais finitos e  $f:K \rightarrow L$  uma aplicação simplicial. Seja  $<$  uma ordem parcial nos vértices de  $K$  que satisfaça a propriedade da proposição (5.1.1). Então o cilindro da aplicação simplicial  $f$  é o subcomplexo de  $K*L$  (Ver (4.3.3)) obtido pela união

- (i) dos simplexes de  $K*\phi = K \times 0 \times 0$ ;
- (ii) dos simplexes de  $\phi*L = 0 \times L \times 1$ ;

(iii) dos simplexos gerados por

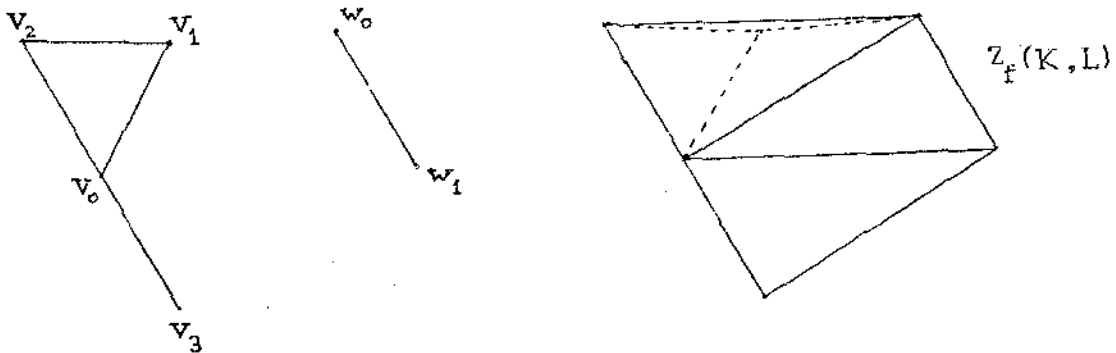
$$(v_0, 0, 0), \dots, (v_k, 0, 0), (0, f(v_k), 1), \dots, (0, f(v_n), 1), \quad (1)$$

onde  $v_0 < v_1 < \dots < v_n$  são v\u00e9rtices de um simplexo de  $K$  e  $0 \leq k \leq n$ . Note que se  $f(v_i) = f(v_j)$  para algum  $i$  e  $j$  tais que  $0 \leq i < j \leq n$  a lista (1) ter\u00e1 repeti\u00e7\u00f5es).

(iv) dos simplexos que s\u00e3o faces dos simplexos definidos em (iii).

O cilindro da aplica\u00e7\u00e3o simplicial  $f: K \rightarrow L$  ser\u00e1 denotado  $Z_f(K, L)$ . Os subcomplexos  $K * \phi$  e  $\phi * L$  ser\u00e3o chamados o in\u00edcio e o final do cilindro, respectivamente.

Exemplo. Sejam  $K$  e  $L$  os complexos da figura abaixo, onde a ordem dos v\u00e9rtices de  $K$  \u00e9  $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$ , e seja  $f: K \rightarrow L$  a aplica\u00e7\u00e3o simplicial definida nos v\u00e9rtices por  $f(v_0) = w_0$ ,  $f(v_1) = w_0$ ,  $f(v_2) = w_0$  e  $f(v_3) = w_1$ .



(Note que  $Z_f(K, L)$  depende da ordem considerada no seu in\u00edcio. Observe ainda que se  $K = Sd(M)$  para algum complexo simplicial  $M$  ent\u00e3o podemos considerar a seguinte ordem parcial dos v\u00e9rtices de  $K$ : sejam  $v$  e  $w$  v\u00e9rtices de  $K$ , ent\u00e3o  $v < w$  se e s\u00f3 se  $v = b(A)$  e

$w=b(B)$  onde  $A$  e  $B$  são simplexos de  $M$  tais que  $A$  é face própria de  $B$ . Esta ordem parcial tem a propriedade enunciada em (5.1.1) e pode ser utilizada para a construção de cilindros de aplicações simpliciais. Tal ordem terá papel essencial em (7.1.4)).

(5.1.3) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais finitos e  $f: K \rightarrow L$  uma aplicação simplicial. Então

$$\dim Z_f(K,L) = \max \{ 1 + \dim K, \dim L \} .$$

Demonstração. Trivial.

(5.1.4) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais finitos tais que  $|K|$  e  $|L|$  são conexos por caminhos;  $f: K \rightarrow L$  uma aplicação simplicial. Então  $|Z_f(K,L)|$  é conexo por caminhos.

Demonstração. Como  $|K * \phi|$  é homeomorfo a  $|K|$  e  $|\phi * L|$  é homeomorfo a  $|L|$ , então  $|K * \phi|$  e  $|\phi * L|$  são conexos por caminhos. Dessa forma, se  $z_1$  e  $z_2$  pertencem os dois a  $|K * \phi|$  ou a  $|\phi * L|$ , existe um caminho unindo  $z_1$  a  $z_2$ . Sejam agora  $z_1$  e  $z_2$  pontos de  $|K * L|$  tais que

$$z_1 \in [(v_0, 0, 0), \dots, (v_k, 0, 0), (0, f(v_k), 1), \dots, (0, f(v_n), 1)]$$

e

$$z_2 \in [(w_0, 0, 0), \dots, (w_\ell, 0, 0), (0, f(w_\ell), 1), \dots, (0, f(w_m), 1)]$$

onde  $v_0, \dots, v_n$  e  $w_0, \dots, w_m$  são como em (5.1.2(iii)) e  $0 \leq k \leq n$  e  $0 \leq \ell \leq m$ . Como os simplexos são convexos e portanto conexos por caminho, existe um caminho unindo  $z_1$  ao vértice  $(0, f(v_n), 1)$  de

$\phi * L$ . Como  $(0, f(v_n), 1)$  e  $(0, f(w_n), 1)$  pertencem a  $\phi * L$  então existe um caminho unindo  $(0, f(v_n), 1)$  a  $(0, f(w_n), 1)$ . Agora, como  $(0, f(w_n), 1)$  e  $z_2$  pertencem a um mesmo simplexo existe um caminho ligando  $(0, f(w_n), 1)$  a  $z_2$ . Então existe um caminho unindo  $z_1$  a  $z_2$ .

(5.1.5) Proposição. Se  $K_1, K_2, L_1$  e  $L_2$  são complexos simpliciais finitos não vazios e  $f: K_1 \rightarrow L_1$  e  $g: K_2 \rightarrow L_2$  são aplicações simpliciais então  $|Z_{f*g}(K_1 * K_2, L_1 * L_2)|$  é conexo por caminhos.

Demonstração. Por (4.4.11),  $f*g: K_1 * K_2 \rightarrow L_1 * L_2$  é uma aplicação simplicial e tem sentido falar no cilindro de  $f*g$ . Por (4.4.4 (iii)),  $|K_1 * K_2|$  e  $|L_1 * L_2|$  são conexos por caminhos. Pela proposição anterior  $|Z_{f*g}(K_1 * K_2, L_1 * L_2)|$  é então conexo por caminhos.

(5.1.6) Observação. Se  $K$  e  $L$  são complexos simpliciais finitos não vazios e  $f: K \rightarrow L$  é uma aplicação simplicial então  $f*\phi: K*\phi \rightarrow L*\phi$  é uma aplicação simplicial (Ver (4.4.10) e podemos então construir  $Z_{f*\phi}(K*\phi, L*\phi)$ . Notemos que  $|Z_{f*\phi}(K*\phi, L*\phi)|$  é homeomorfo a  $|Z_f(K, L)|$  pelo homeomorfismo  $h: |Z_{f*\phi}(K*\phi, L*\phi)| \rightarrow |Z_f(K, L)|$  definido nos vértices de  $Z_{f*\phi}(K*\phi, L*\phi)$  por  $h((v, 0, 0), 0, 0) = (v, 0, 0)$  para todo vértice  $v$  de  $K$  e  $h((0, (w, 0, 0), 1) = (0, w, 1)$  para todo vértice  $w$  de  $L$  e por linearidade nos simplexos de  $Z_{f*\phi}(K*\phi, L*\phi)$ . Além disso esse homeomorfismo leva homeomorficamente o início e o final de  $Z_{f*\phi}(K*\phi, L*\phi)$ , respectivamente no início e no final de  $Z_f(K, L)$ .

Para não sobrecarregar a notação, a partir de agora es

crevemos  $Z_{f*g}(K_1 * K_2, L_1 * L_2)$  tanto para a situação quando  $K_2$  e  $L_2$  são não vazios, e  $g: K_2 \rightarrow L_2$  está bem definida, quanto para a situação em que  $K_2 = L_2 = \phi$  e neste caso  $f*g$  representa a aplicação  $f*\phi$ .

(5.1.7) Proposição. Sejam  $f: K_1 \rightarrow L_1$ ,  $g: K_2 \rightarrow L_2$  aplicações simpliciais entre complexos simpliciais finitos. Então  $Z = Z_{f*g}(K_1 * K_2, L_1 * L_2)$  é deformável ao seu final  $\phi*(L_1 * L_2)$ . Se  $f$  é homotópica a uma constante então o início  $(K_1 * K_2)*\phi$  de  $Z$  pode ser contraído a um ponto do final  $\phi*(L_1 * L_2)$  de  $Z$ . Os mesmos resultados valem quando  $K_2 = L_2 = \phi$  entendendo  $Z_{f*g}(K_1 * K_2, L_1 * L_2)$  no sentido da observação (5.1.6).

Demonstração. Consideremos a ordem total nos vértices de  $Z$  dada por

(i) Nos vértices do tipo  $(v, 0, 0)$ , onde  $v$  é um vértice de  $K_1 * K_2$ , definimos a ordem  $(v_1, 0, 0) < (v_2, 0, 0)$  se e somente se  $v_1 < v_2$ , onde esta última ordem é aquela considerada na construção do cilindro da aplicação simplicial  $f*g$ . (Ver (5.1.2)).

(ii) Nos vértices do tipo  $(0, w, 1)$ , onde  $w$  é um vértice de  $L_1 * L_2$ , tomamos uma ordem total qualquer e definimos  $(v, 0, 0) < (0, w, 1)$  para todo vértice  $v$  de  $K_1 * K_2$  e todo vértice  $w$  de  $L_1 * L_2$ .

No simplexo  $I = [0, 1]$  em  $\mathbb{R}$  de vértices  $\{0\}$  e  $\{1\}$ , damos a ordem total  $\{0\} < \{1\}$ .

Podemos considerar então o complexo simplicial  $Z \times I$  com simplexos gerados por  $V_0 \times \{0\}, \dots, V_k \times \{0\}, V_k \times \{1\}, \dots, V_n \times \{1\}$ , onde  $V_0 < V_1 < \dots < V_n$  geram um simplexo de  $Z$ , e  $0 \leq k \leq n$ .

Definimos agora  $F: |Z \times I| = |Z| \times I \rightarrow |Z|$  por

$$F(V \times \{0\}) = V \text{ para todo vértice } V \text{ de } Z,$$

$$F(V \times \{1\}) = V \text{ para todo vértice } V \text{ de } \phi^*(L_1 * L_2)$$

$$F(V \times \{t\}) = (0, f * g(v), t) \text{ para todo vértice } V = (v, 0, 0) \text{ de } (K_1 * K_2) * \phi.$$

Como  $f * g$  é simplicial,  $F$  leva vértices de  $Z \times I$  em vértices de  $Z$ , e então  $F$  pode ser estendida a  $|Z \times I|$  por linearidade nos simplexos. Obtemos assim uma aplicação contínua  $F: |Z \times I| = |Z| \times I \rightarrow |Z|$  tal que  $F(x, 0) = x$  e  $F(x, 1) \in \phi^*(L_1 * L_2)$  para todo  $x \in |Z|$ . Portanto  $F$  deforma  $|Z|$  ao seu final  $\phi^*(L_1 * L_2)$ . (Ver (2.1.3)).

Suponhamos agora  $f$  homotópica a uma aplicação constante  $\langle p \rangle: |K_1| \rightarrow |L_1|$  (onde  $p \in |L_1|$  é a imagem de  $\langle p \rangle$ ) e seja  $h: |K_1| \times I \rightarrow |L_1|$  a homotopia entre  $f$  e  $\langle p \rangle$ . Então, se  $K_2$  e  $L_2$  são não vazios consideramos a homotopia  $H: |K_1 * K_2| \times I \rightarrow |L_1 * L_2|$  entre  $f * g$  e  $\langle p \rangle * g$  definida por

$$H(\sum t_i (v_i, 0, 0) + \sum t_j (0, w_j, 1), \tau) = \sum t_i (h(v_i, \tau), 0, 0) + \sum t_j (0, g(w_j), 1),$$

onde os  $v_i$  são vértices de  $K_1$  e os  $w_j$  são vértices de  $K_2$ . Se  $K_2 = L_2 = \phi$ , consideramos a homotopia entre  $f * \phi$  e  $\langle p \rangle * \phi$  (Ver (4.4.6)) dada por

$$H((v, 0, 0), \tau) = (h(v, \tau), 0, 0)$$

para todo  $v \in |K_1|$ .



Em ambos os casos obtemos uma homotopia entre  $f^*g$  e  $\langle p \rangle^*g$ . (Ver (5.1.6)).

Consideremos agora a restrição  $F_1$  da homotopia  $F$ , obtida anteriormente, a  $|(K_1 * K_2)^* \phi| \times I$ . Então  $F_1(V \times \{0\}) = V$  para todo vértice  $V$  de  $(K_1 * K_2)^* \phi$  e  $F_1(V \times 1) = (0, (f^*g)(v), 1)$  para todo vértice  $v$  de  $(K_1 * K_2)^* \phi$ . Então a aplicação  $F_2: |(K_1 * K_2)^* \phi| \times I \rightarrow |Z|$  definida por:

$$F_2((x, 0, 0), \tau) = \begin{cases} F_1((x, 0, 0), 2\tau) & \text{para } 0 \leq \tau \leq 1/2 \\ (0, H(x, 0, 0), 2\tau - 1), 1) & \text{para } 1/2 \leq \tau \leq 1 \end{cases}$$

está bem definida e é contínua. Ainda,  $F_2(\cdot, 0)$  é a inclusão de  $|(K_1 * K_2)^* \phi|$  em  $|Z|$  e

$$F_2(|(K_1 * K_2)^* \phi|, 1) = 0x(\langle p \rangle^*g)(|K_1 * K_2|) \times 1 \subset 0x|p^*L_2| \times 1.$$

Ou seja,  $|(K_1 * K_2)^* \phi|$  é deformável, em  $|Z|$ , ao conjunto  $0x|p^*L_2| \times 1$ .

Entretanto o conjunto  $0x|p^*L_2| \times 1$  pode ser contraído, em  $|Z|$ , a um ponto  $(0, q, 1)$ , onde  $q = (p, 0, 0) \in |p^*L_2|$ , pela homotopia  $G: (0x|p^*L_2| \times 1) \times I \rightarrow |Z|$  dada por

$$\begin{aligned} G((0, t(p, 0, 0) + \sum_j t_j^i(0, w_j, 1), 1), \tau) &= \\ &= (0, (1-\tau)(t(p, 0, 0) + \sum_j t_j^i(0, w_j, 1)) + \tau(p, 0, 0), 1) \end{aligned}$$

onde  $t + \sum_j t_j^i = 1$  e  $0 \leq t, t_j^i \leq 1$ . Com efeito,  $G(\cdot, 0)$  é a inclu-

são de  $0x |p*L_2 |x1$  em  $|Z|$  e

$$G(0x |p*L_2 |x1, 1) = \{(0, (p, 0, 0), 1)\} = \{(0, q, 1)\} \in |\phi^*(L_1 * L_2)|.$$

Então, como  $|(K_1 * K_2) * \phi|$  é deformável a  $0x |p*L_2 |x1$  e este é, por sua vez, contrátil ao ponto  $(0, q, 1)$  de  $|\phi^*(L_1 * L_2)|$ , pela proposição (2.1.7),  $|(K_1 * K_2) * \phi|$  é contrátil a esse ponto.

## 5.2. O Cilindro Iterado de uma Aplicação Simplicial

Referência principal: Conner-Floyd

(5.2.1) Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais finitos e  $f: |K| \rightarrow |K|$  e  $g: |L| \rightarrow |L|$  aplicações para as quais existem números naturais  $n$  e  $m$  tais que  $f: Sd^n(K) \rightarrow K$  e  $g: Sd^m(L) \rightarrow L$  são aplicações simpliciais. Podemos então construir o cilindro  $Z = Z_{f*g}(Sd^n(K) * Sd^m(L), K * L)$  de  $f * g$ . (Ver (5.1.6) se  $L = \phi$ ). Então o início de  $Z$  é  $(Sd^n(K) * Sd^m(L)) * \phi$  e o final de  $Z$  é  $\phi * (K * L)$ .

Consideremos agora  $Sd^n(Z, \phi * (K * \phi))$ ,  $[(Sd^n(K) * Sd^m(L)) * \phi] \cup [\phi * (\phi * (\phi * L))]$  (Ver (1.1.8)). Isto fornece um complexo simplicial  $Z^1$  que tem como início  $(Sd^n(K) * Sd^m(L)) * \phi$  e como final

$$\begin{aligned} Sd^n(\phi * (K * L), \phi * (K * \phi), \phi * (\phi * L)) &= \\ &= \phi * Sd^n(K * L, K * \phi, \phi * L) = \phi * (Sd^n(K) * L), \end{aligned}$$

por (4.4.16).

Consideremos agora  $Sd^m(Z^1, \phi * (\phi * L))$ ,  $[(Sd^n(K) * Sd^m(L)) * \phi] \cup [\phi * (Sd^n(K) * \phi)]$ . Isto fornece um complexo simplicial  $Z^2$  que

tem como início  $(Sd^n(K) * Sd^m(L)) * \phi$  e como final

$$\begin{aligned}
& Sd^m(\phi*(Sd^n(K)*L), \phi*(\phi*L), \phi*(Sd^n(K)*\phi)) = \\
& = \phi*Sd^m(Sd^n(K)*L, \phi*L, Sd^n(K)*\phi) = \\
& = \phi*(Sd^n(K)*Sd^m(L))
\end{aligned}$$

por (4.416).

Se  $|K|$  está em um espaço vetorial  $E_1$  e  $|L|$  está em um espaço vetorial  $E_2$ , então  $|K*L| = |Sd^n(K)*Sd^m(L)| \subset E_1 \times E_2 \times \mathbb{R} = E$ .

Consideremos então  $S: ExEx\mathbb{R} \rightarrow ExEx\mathbb{R}$  o homeomorfismo de de finido por

$$S(x,y,t) = (-y,x,t) + (0,0,1)$$

Seja  $S^0$  a identidade de  $ExEx\mathbb{R}$  e coloquemos  $S^p = S \circ \dots \circ S$  (composiçãõ iterada  $p$  vezes) para todo número natural  $p \geq 1$ . Seja  $S^p(Z^2)$  o complexo simplicial obtido de  $Z^2$  pela aplicação de  $S^p$  nos simplexos de  $Z^2$ . Então

$$(a) |S^p(Z^2)| \subset ExEx|p,p+1|$$

$$\begin{aligned}
(b) S((Sd^n(K)*Sd^m(L))*\phi) &= S((Sd^n(K)*Sd^m(L)) \times 0 \times 0) = \\
&= 0 \times (Sd^n(K)*Sd^m(L)) \times 1 = \phi*(Sd^n(K)*Sd^m(L))
\end{aligned}$$

isto é,  $S$  leva o início de  $Z^2$  sobre o final de  $Z^2$ .

(c) De (a) e (b) vem portanto que  $S^p(Z^2) \cap S^q(Z^2) = \emptyset$  para  $|p-q| \geq 2$  e  $S^p(Z^2) \cap S^{p+1}(Z^2) = S^p((Sd^n(K) * Sd^m(L)) * \phi) = S^{p-1}(\phi * (Sd^n(K) * Sd^m(L)))$ .

De (a), (b) e (c) deduzimos que

$$Z_{f*g}^\infty = \bigcup_{p=0}^{\infty} S^p(Z^2)$$

é um complexo simplicial.

(5.2.2) Definição. O complexo simplicial  $Z_{f*g}^\infty$  construído acima é chamado o cilindro iterado de  $f*g$ .

(5.2.3) Proposição. Seja  $Z^\infty$  o cilindro iterado  $Z_{f*g}^\infty$  de  $f*g$

- (i)  $Z^\infty$  é localmente finito.
- (ii)  $Z^\infty$  tem um número contável de vértices.
- (iii)  $|Z^\infty|$  é conexo por caminhos se  $|Z^2| = |Z_{f*g}(Sd^n(K) * Sd^m(L), K * L)|$  é conexo por caminhos.
- (iv)  $\dim Z^\infty = \dim Z^2 = \dim Z_{f*g}(Sd^n(K) * Sd^m(L), K * L)$ .

Demonstração. As partes (i) e (ii) vêm do fato de ser  $Z^2$  um complexo simplicial finito. A parte (iii) vem do fato de que  $S^p(Z^2) \cap S^{p+1}(Z^2) \neq \emptyset$  para todo número natural  $p$ . A parte (iv) segue trivialmente da construção de  $Z^\infty$ .

(5.2.4) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais finitos onde  $K \neq \emptyset$  e  $|K|$  é conexo por caminhos, e  $f: |K| \rightarrow |K|$  e  $g: |L| \rightarrow |L|$  aplicações para as quais existem números naturais  $m$  e  $n$  tais que  $f: Sd^n(K) \rightarrow K$  e  $g: Sd^m(L) \rightarrow L$  são aplicações simpliciais. Se  $f$  é homotópica a uma aplicação constante então

o espaço do cilindro iterado  $|Z^\infty|$  de  $f^*g$  é contrátil. (Se  $L=\emptyset$  entendemos que  $f^*g = f^*\phi$ ).

Demonstração. Seja  $Z^2$  o complexo simplicial obtido em (5.2.1) e para cada número natural  $q \geq 0$  seja  $X_q = |Z^2| \cup |S(Z^2)| \cup \dots \cup |S^q(Z^2)|$ . Como  $|K|$  é conexo por caminhos,  $|K*L|$  é conexo por caminhos se  $L=\emptyset$ , pois é homeomorfo a  $|K|$ ; se  $L \neq \emptyset$ ,  $|K*L| = |Sd^n(K)*Sd^n(L)|$  é conexo por caminhos por (4.4.4(iii)). Pela proposição (5.1.4),  $|Z_{f^*g}(Sd^n(K)*Sd^m(L), K*L)| = |Z^2|$  é conexo por caminhos em qualquer caso. Dessa forma, como  $S^p(Z^2) \cap S^{p+1}(Z^2) \neq \emptyset$  para cada número natural  $p \geq 0$ ,  $X_q$  é conexo por caminhos.

Temos ainda que  $|Z^\infty| = \bigcup_{q=0}^{\infty} X_q$  e que  $X_q \subset X_{q+1}$  para todo  $q$ . Além disso, para cada  $q$ , o conjunto  $A_q = |Z^\infty| \cap (ExEx(-\infty, q + \frac{3}{2}))$  é um aberto de  $|Z^\infty|$  tal que  $X_q \subset A_q \subset X_{q+1}$ . Usando  $q$  vezes as proposições (5.1.7) e (2.1.7), deduzimos que  $X_q$  é deformável ao final de  $|S^q(Z^2)|$ , que é o início de  $|S^{q+1}(Z^2)|$ . Como  $f$  é homotópica a uma constante, pela proposição (5.1.7) este último espaço é contrátil a um ponto de  $|S^{q+1}(Z^2)| \subset X_{q+1}$ . Usando a proposição (2.1.7), obtemos que  $X_q$  é contrátil a um ponto de  $X_{q+1}$ . Temos então satisfeitas as condições da proposição (2.2.7). Portanto  $\pi_m(|Z^\infty|) = 0$  para todo  $m \geq 1$ .

Como  $Z^\infty$  e um ponto  $\{y\}$  são complexos simpliciais então  $|Z^\infty|$  e  $\{y\}$  são complexos CW (Ver (1.3.3)). Por outro lado, a aplicação  $h: |Z^\infty| \rightarrow \{y\}$  definida por  $h(x) = y$  para todo  $x \in |Z^\infty|$  é tal que  $h_{\#,m}: \pi_m(Z^\infty) \rightarrow \pi_m(\{y\})$  é um isomorfismo para todo  $m \geq 1$ , já que  $\pi_m(Z^\infty) = 0$  e  $\pi_m(\{y\}) = 0$ . Então  $h$  é uma equivalência fra

ca de homotopia e, usando a proposição (2.2.6),  $h$  é uma equivalência de homotopia. Assim  $|Z^\infty|$  é homotopicamente equivalente a um ponto e portanto  $|Z^\infty|$  é contrátil.

(5.2.5) Proposição. Sejam  $K$  e  $L$  complexos simpliciais finitos onde  $K \neq \emptyset$  e  $f: |K| \rightarrow |K|$  e  $g: |L| \rightarrow |L|$  aplicações para as quais existem números naturais  $m$  e  $n$  tais que  $f: Sd^n(K) \rightarrow K$  e  $g: Sd^m(L) \rightarrow L$  são aplicações simpliciais. Sejam  $(A)$  a cardinalidade de um conjunto  $A$  e  $k = \#(\text{vértices de } Sd^n(K)) + \#(\text{vértices de } Sd^m(L))$ . Então o cilindro iterado  $Z^\infty$  de  $f * g$  pode ser mergulhado linearmente (isto é, existe uma aplicação simplicial injetora que é um homeomorfismo sobre sua imagem) como um subcomplexo da estrutura simplicial regular de  $\mathbb{R}^{2k-1}$ .

Demonstração. Consideremos em  $\mathbb{R}^{2k-1}$  a estrutura simplicial regular (Ver (1.1.17)) tal que a distância entre dois vértices de um simplexo é  $d$ . Consideremos agora o complexo simplicial  $Z^2$  utilizado na construção de  $Z$  (Ver (5.2.1)). Então  $k$  é o número de vértices do início de  $Z^2$  e também o número de vértices do final de  $Z^2$ . Notemos agora que qualquer vértice de  $Z^\infty$  pode ser escrito de forma única como  $S^p(v)$ , para algum número natural  $p \geq 0$  e algum vértice  $v$  do início de  $Z^2$ . Seja  $<$  uma ordem total qualquer nos vértices do início de  $Z^2$ . A partir dessa ordem consideramos a seguinte ordem total nos vértices de  $Z^\infty$ : se  $v_i$  e  $v_j$  são vértices do início de  $Z^2$ , então  $S^m(v_i) < S^m(v_j)$  se e só se  $v_i < v_j$  e  $S^m(v_i) < S^n(v_j)$  para todo  $n > m$ . Temos então os vértices de  $Z^\infty$  dispostos numa sequência  $\{w_i\}_{i=1}^\infty$  tal que  $w_i < w_j$  para  $i < j$ .

Consideremos agora um  $(2k-1)$ -simplexo,  $A_1 = [w_1, \dots, w_{2k}]$ , da estrutura simplicial regular de  $\mathbb{R}^{2k-1}$  e a  $(k-1)$ -face  $[w_{k+1}, \dots, w_{2k}]$  de  $A_1$ . Como  $\mathbb{R}^{2k-1}$  tem a estrutura simplicial regular podemos considerar o  $(2k-1)$ -simplexo  $A_2 = [w_{k+1}, \dots, w_{2k}, w_{2k+1}, \dots, w_{3k}]$  obtido de  $A_1$  por reflexão no  $(k-1)$ -plano determinado pelo  $(k-1)$ -simplexo  $[w_{k+1}, \dots, w_{2k}]$ . Notemos que  $A_1 \cap A_2 = [w_{k+1}, \dots, w_{2k}]$ . Seja agora  $A_3 = [w_{2k+1}, \dots, w_{3k}, w_{3k+1}, \dots, w_{4k}]$  o  $(2k-1)$ -simplexo obtido de  $A_2$  por reflexão no  $(k-1)$ -plano determinado pelo  $(k-1)$ -simplexo  $[w_{2k+1}, \dots, w_{3k}]$ . Notemos que  $A_2 \cap A_3 = [w_{2k+1}, \dots, w_{3k}]$  e  $A_1 \cap A_3 = \phi$  pois os v\u00e9rtices de  $A_1$  est\u00e3o a uma dist\u00e2ncia maior ou igual a  $d$  dos v\u00e9rtices de  $A_3$ .

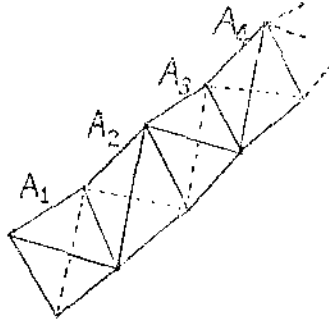
Indutivamente sejam

$$A_m = [w_{(m-1)k+1}, \dots, w_{mk}, w_{mk+1}, \dots, w_{(m+1)k}]$$

um  $(2k-1)$ -simplexo j\u00e1 obtido e

$$A_{m+1} = [w_{mk+1}, \dots, w_{(m+1)k}, w_{(m+1)k+1}, \dots, w_{(m+2)k}]$$

o  $(2k-1)$ -simplexo obtido de  $A_m$  por reflex\u00e3o no  $(k-1)$ -plano determinado pelo  $(k-1)$ -simplexo  $[w_{mk+1}, \dots, w_{(m+1)k}]$ . Notemos que  $A_m \cap A_{m+1} = [w_{mk+1}, \dots, w_{(m+1)k}]$  e que  $A_n \cap A_{m+1} = \phi$  para todo  $n$  tal que  $0 \leq n \leq m-1$ , pois, nestas condi\u00e7\u00f5es os v\u00e9rtices de  $A_n$  est\u00e3o a uma dist\u00e2ncia maior do que ou igual a  $d$  dos v\u00e9rtices de  $A_m$ .



Temos então uma seqüência de vértices  $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$  da estrutura simplicial regular de  $\mathbb{R}^{2k-1}$ . Definimos o mergulho  $h: |Z^{\infty}| \rightarrow \mathbb{R}^{2k-1}$  por  $h(w_i) = w_i$  para todo  $i \geq 1$  e por linearidade nos simplexes de  $Z^{\infty}$ . Então, por construção,  $h(Z^{\infty})$  é um subcomplexo da estrutura regular de  $\mathbb{R}^{2k-1}$ .

=====

=====



PARTE III

AÇÕES EXÓTICAS DE GRUPOS CÍCLICOS

SOBRE ESPAÇOS EUCLIDIANOS

## CAPÍTULO 6

### AÇÕES SEM PONTOS FIXOS DE GRUPOS CÍCLICOS SOBRE ESPAÇOS EUCLIDIANOS

#### 6.1. A aplicação $f \square g$ .

Referência principal: Bredon, p. 59.

O objetivo desta secção será a construção de uma aplicação, com propriedades convenientes, a partir de duas aplicações dadas. Tal aplicação terá papel central nas construções a seguir.

Sejam  $A$  e  $B$  espaços topológicos não vazios e  $f: A \rightarrow A$  e  $g: B \rightarrow B$  aplicações contínuas. Consideremos as junções  $A*B$  e  $B*A$  (Ver (4.3.1)) e a família de espaços  $X_1 = A*B$ ,  $X_2 = B*A$  e  $X_3 = A*B$ . Façamos a colagem desta família (Ver (4.2.1)) pelas aplicações

$$C_{12}: \phi*B \subset A*B \rightarrow B*\phi \subset B*A ,$$

definida por  $C_{12}(*,b,1) = (b,*,0)$ , e

$$C_{23}: \phi*A \subset B*A \rightarrow A*\phi \subset A*B ,$$

definida por  $C_{23}(*,a,1) = (a,*,0)$ .

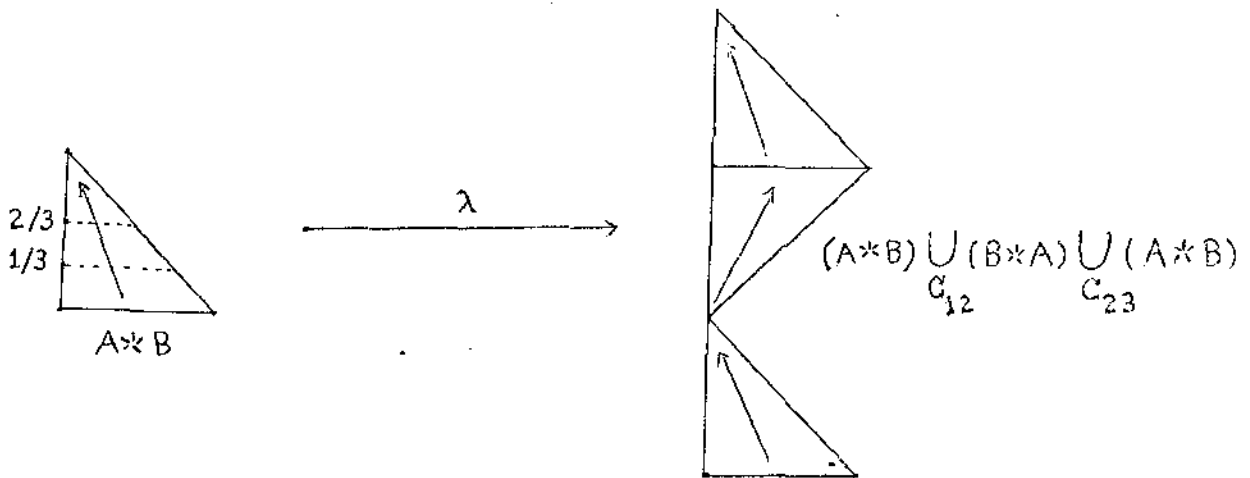
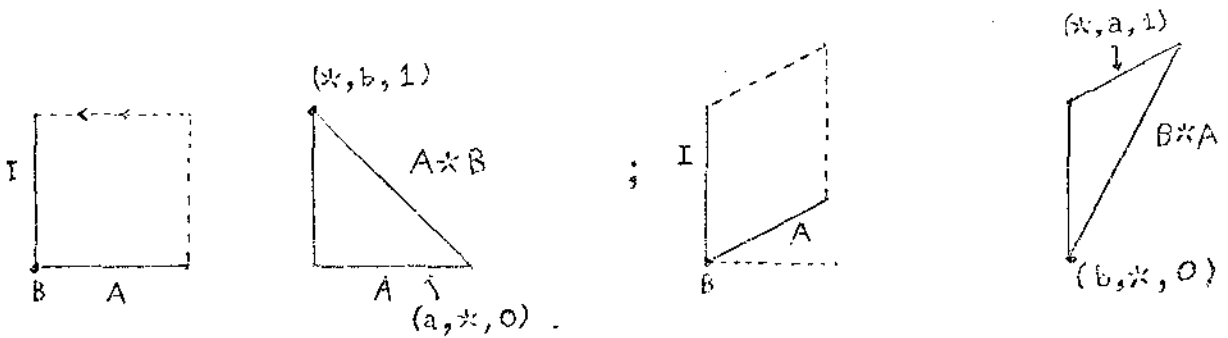
Obtemos então o espaço  $(A*B) \bigcup_{C_{12}} (B*A) \bigcup_{C_{23}} (A*B)$ , no qual existem as identificações  $(*,b,1) \equiv (b,*,0)$  e  $(*,a,1) \equiv (a,*,0)$ .

Definimos agora a aplicação

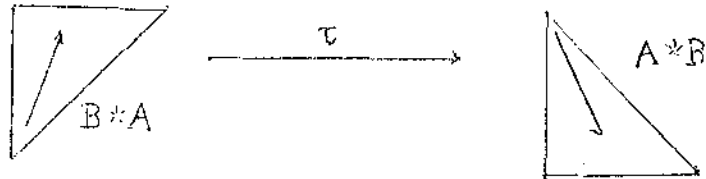
$$\lambda : A * B \rightarrow (A * B) \cup_{C_{12}} (B * A) \cup_{C_{23}} (A * B)$$

$$\lambda(\overline{a, b, t}) = \begin{cases} (\overline{a, b, 3t}) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (\overline{b, a, 3t-1}) & \text{para } \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3} \\ (\overline{a, b, 3t-2}) & \text{para } \frac{2}{3} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

O espaço obtido pela colagem e a aplicação  $\lambda$ , podem ser interpretados geometricamente pelas figuras abaixo; onde  $A = [0, 1]$  e  $B = \{0\}$



Seja ainda  $\tau: B^*A \rightarrow A^*B$  a aplicação definida por  $\tau(\overline{b,a,t}) = \overline{(a,b,1-t)}$ . Usando as figuras anteriores esta aplicação pode ser visualizada

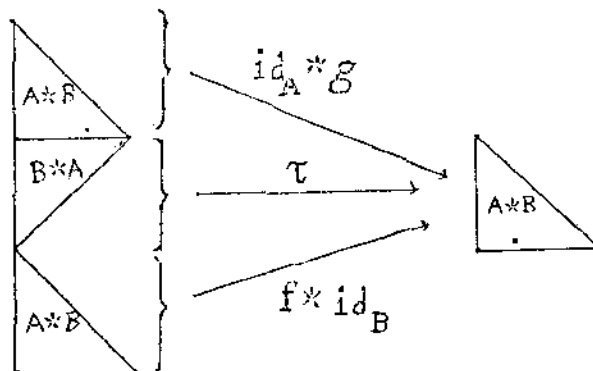


Definimos então  $f*id_B: A^*B \rightarrow A^*B$  por  $(f*id_B)(\overline{a,b,t}) = \overline{(f(a),b,t)}$  e  $id_A*g: A^*B \rightarrow A^*B$  por  $(id_A*g)(\overline{a,b,t}) = \overline{(a,g(b),t)}$  e notamos que  $(f*id_B)(*,b,1) = (*,b,1) = \tau(b,*,0) = \tau(C_{12}(*,b,1))$  e ainda  $(id_A*g)(a,*,0) = (a,*,0) = \tau(*,a,1) = \tau(C_{23}(a,*,0))$ .

Por (4.2.3) podemos então definir a aplicação

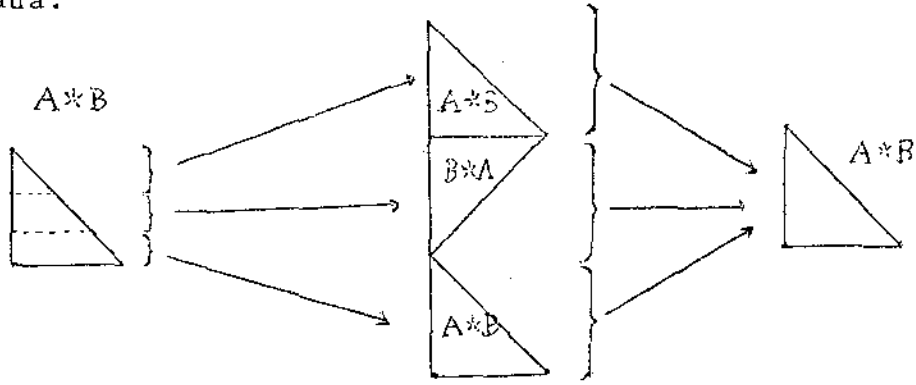
$$(f*id_B) \cup_{C_{12}} \tau \cup_{C_{23}} (id_A*g): (A^*B) \cup_{C_{12}} (B^*A) \cup_{C_{23}} (A^*B) \rightarrow A^*B .$$

Usando as figuras anteriores, esta aplicação pode ser visualizada assim:



Chegamos agora à definição central desta secção:

(6.1.1) Definição. Com as notações anteriores, definimos uma aplicação  $f \square g: A * B \rightarrow A * B$  por  $f \square g = [(f * id_B) \cup_{C_{12}} \tau \cup_{C_{23}} (id_A * g)] \circ \lambda$ . Usando as figuras anteriores, esta aplicação pode ser visualizada.



Fazendo as composições temos que  $f \square g: A * B \rightarrow A * B$  tem por expressão  $(f \square g)(\overline{a, b, t}) = \overline{f(a), b, 3t}$  se  $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ ;  $(f \square g)(\overline{a, b, t}) = \overline{a, b, 2-3t}$  se  $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$  e  $(f \square g)(\overline{a, b, t}) = \overline{a, g(b), 3t-2}$  se  $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$ .

(6.1.2) Proposição. A aplicação  $f \square g: A * B \rightarrow A * B$  é contínua.

Demonstração. Sejam  $\pi: A \times B \times I \rightarrow A * B$  a projeção canónica e

$$X_1 = \{(a, b, t) \in A \times B \times I : 0 \leq t \leq \frac{1}{3}\} ;$$

$$X_2 = \{(a, b, t) \in A \times B \times I : \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\} ;$$

$$X_3 = \{(a, b, t) \in A \times B \times I : \frac{2}{3} \leq t \leq 1\} ;$$

uma cobertura fechada finita de  $A \times B \times I$ . Então

$$\tilde{X}_1 = \{(\overline{a,b,t}) \in A*B: 0 \leq t \leq \frac{1}{3}\} ;$$

$$\tilde{X}_2 = \{(a,b,t) \in A*B: \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\} ;$$

$$\tilde{X}_3 = \{(a,b,t) \in A*B: \frac{2}{3} \leq t \leq 1\} .$$

é uma cobertura fechada finita de  $A*B$ .

Por outro lado sejam  $h_i: X_i \rightarrow AxBxI$  ( $i=1,2,3$ ) as aplicações definidas por  $h_1(a,b,t) = (f(a), b, 3t)$ ;  $h_2(a,b,t) = (a, b, 2-3t)$  e  $h_3(a,b,t) = (a, g(b), 3t-2)$ . Então os diagramas seguintes são comutativos.

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{h_i} & AxBxI \\ \pi|_{X_i} \downarrow & & \downarrow \pi \\ \tilde{X}_i & \xrightarrow{(f \square g)|_{\tilde{X}_i}} & A*B \end{array} \quad (i = 1,2,3)$$

Como as  $h_i$  ( $i=1,2,3$ ) são contínuas, as  $\pi \circ h_i$  são contínuas. Por outro lado o  $\tilde{X}_i$  tem a topologia conduzida pelas  $\pi|_{X_i}$ , logo as restrições  $(f \square g)|_{\tilde{X}_i}$  são contínuas. Como  $[(f \square g)|_{\tilde{X}_i}](x) = [(f \square g)|_{\tilde{X}_j}](x)$  para todo  $x \in \tilde{X}_i \cap \tilde{X}_j$ , e a cobertura  $\{\tilde{X}_i\}$  é fechada e finita, então  $f \square g$  é contínua.

A partir de agora estamos interessados no caso em que  $A$  e  $B$  são esferas e portanto variedades diferenciáveis. Nestes casos  $A*B$  é homeomorfa a uma esfera (Ver (4.3.7)), sendo a estrutura de variedade diferenciável de  $A*B$  dada por (4.3.8).

(6.1.3) Proposição. Se  $f: S^p \rightarrow S^p$  e  $g: S^q \rightarrow S^q$  são aplicações  $C^\infty$  então a aplicação  $f \square g: S^p * S^q \rightarrow S^p * S^q$  é  $C^\infty$  nos pontos  $(\overline{a,b,t}) \in S^p * S^q$

tais que  $t \neq 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ .

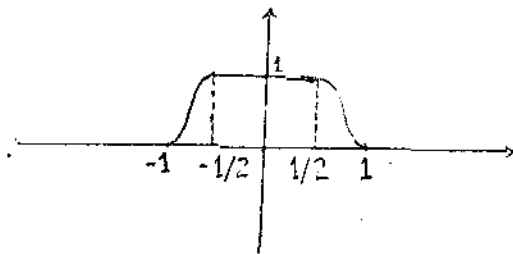
Demonstração. De fato, com as identificações de (4.3.6) temos

$$f \square g(a, b, t) = \begin{cases} (f(a), b, 3t) & \text{se } 0 < t < \frac{1}{3} \\ (a, b, 2-3t) & \text{se } \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3} \\ (a, g(b), 3t-1) & \text{se } \frac{2}{3} < t < 1 \end{cases} ,$$

e cada coordenada é  $C^\infty$ .

(6.1.4) Proposição. Se  $f: S^p \rightarrow S^p$  e  $g: S^q \rightarrow S^q$  são aplicações  $C^\infty$  então a aplicação  $f \square g: S^p * S^q \rightarrow S^p * S^q$  é homotópica a uma aplicação  $C^\infty F: S^p * S^q \rightarrow S^p * S^q$  que é idêntica a  $f \square g$  fora de uma vizinhança dos pontos  $(x, y, t) \in S^p * S^q$  onde  $t=0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ .

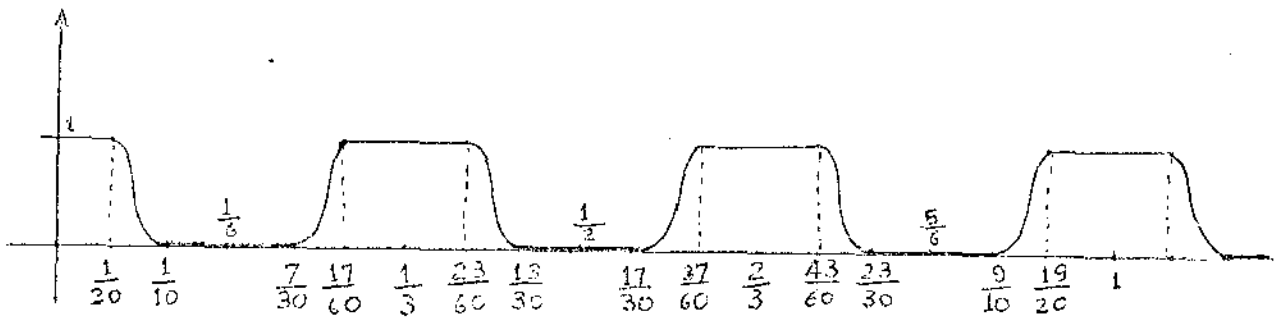
Demonstração. Seja  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação  $C^\infty$  cujo gráfico é como o desenhado na seguinte figura. ("bump function").



e seja  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação  $C^\infty$  definida por

$$\alpha(t) = \psi(10t) + \psi(10(t - \frac{1}{3})) + \psi(10(t - \frac{2}{3})) + \psi(10(t-1)) ,$$

cujo gráfico é



Seja ainda  $\tilde{\phi}: S^P * S^Q \rightarrow S^{P+Q+1}$  o difeomorfismo  $C^\infty$ , construído em (4.3.7) e (4.3.8). Escolhemos um ponto  $a \in S^P$  e um ponto  $b \in S^Q$  e definimos  $F: S^P * S^Q \rightarrow S^P * S^Q$  por

$$F(\overline{x, y, t}) = \tilde{\phi}^{-1} \left( \frac{(1-\alpha(t)) [\tilde{\phi}_0(f \square g)](x, y, t) + \alpha(t) \cdot \tilde{\phi}(a, b, \frac{1}{2})}{\sqrt{(1-\alpha(t))^2 + \alpha^2(t)}} \right)$$

Seja  $M = \{(\overline{x, y, t}) \in S^P * S^Q : t = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \text{ ou } 1\}$

$$U_1 = [0, \frac{1}{20}) \cup (\frac{17}{60}, \frac{23}{60}) \cup (\frac{37}{60}, \frac{43}{60}) \cup (\frac{19}{20}, 1] ,$$

$$U_2 = [0, \frac{1}{10}) \cup (\frac{7}{30}, \frac{13}{30}) \cup (\frac{17}{30}, \frac{23}{30}) \cup (\frac{9}{10}, 1] ,$$

e  $V_1 = \{(\overline{x, y, t}) \in S^P * S^Q : t \in U_1\}$

$$V_2 = \{(\overline{x, y, t}) \in S^P * S^Q : t \in U_2\}$$

Então  $M \subset V_1 \subset V_2$  e  $V_1$  e  $V_2$  são vizinhanças abertas de  $M$ . Além disso  $F \equiv f \square g$  em  $S^P * S^Q - V_2$  pois  $\alpha(t) = 0$  se  $t \notin U_2$  e  $F \equiv \tilde{\phi}(a, b, \frac{1}{2})$  é uma aplicação constante em  $V_1$  pois  $\alpha(t) = 1$  se  $t \in U_1$ . Assim  $F$  é



uma aplicação  $C^\infty$  pois fora de uma vizinhança de  $M$  ela coincide com  $f \square g$ , é composição de aplicações  $C^\infty$  em  $V_2 - V_1$  e é constante em  $V_1$ .

Além disso  $F$  é homotópica a  $f \square g$ . Com efeito, a aplicação  $G: S^p * S^q \times I \rightarrow S^p * S^q$  definida por

$$G((x,y,t), \tau) = \tilde{\phi}^{-1} \left( \frac{(1-\tau, \alpha(t) \mid \tilde{\phi}_*(f \square g) \mid (\overline{x,y,t}) + \tau, \alpha(t) \mid \tilde{\phi}(a,b, \frac{1}{2}))}{\sqrt{(1-\tau, \alpha(t))^2 + \tau^2 \alpha^2(t)}} \right)$$

é contínua e satisfaz  $G((x,y,t), 0) = (f \square g)(x,y,t)$  e  $G((x,y,t), 1) = F(x,y,t)$ .

O resultado seguinte é uma peça essencial na construção do exemplo de Conner e Floyd (Ver Conner-Floyd; Bredon, p. 59).

(6.1.5) Proposição. Se  $f: S^p \rightarrow S^p$  e  $g: S^q \rightarrow S^q$  são aplicações  $C^\infty$  então

$$\deg(f \square g) = \deg(f) + \deg(g) - 1.$$

Demonstração. Tem sentido falar em  $\deg(f \square g)$  pois  $f \square g$  é contínua (Ver (2.3.7)). Seja  $F$  a aplicação construída na proposição anterior tomando como  $a_1$  e  $b_1$  valores regulares de  $f$  e  $g$  em  $S^p$  e  $S^q$ , respectivamente ( $a_1$  e  $b_1$  existem pelo teorema de Sard). Na construção de  $F$  tomamos então  $a = -a_1$  e  $b = -b_1$ . Como  $F$  é homotópica a  $f \square g$  temos  $\deg F = \deg(f \square g)$  (Ver (2.3.8)). Vamos portanto calcular  $\deg F$ .

Tomemos então o ponto  $(a_1, b_1, \frac{1}{2}) \in S^p * S^q$  e mostramos que é um valor regular de  $F$ . Calculemos  $F^{-1}(a_1, b_1, \frac{1}{2})$ . Para que  $(\overline{x,y,t}) \in F^{-1}(a_1, b_1, \frac{1}{2})$  devemos ter

$$\tilde{\phi}^{-1} \left( \frac{(1-\alpha(t)) [\tilde{\phi}_0(f \square g)] (\overline{x,y,t}) + \alpha(t) \tilde{\phi}(-a_1, -b_1, \frac{1}{2})}{\sqrt{(1-\alpha(t))^2 + \alpha^2(t)}} \right) = \overline{(a_1, b_1, \frac{1}{2})}$$

Se  $\alpha(t) = 1$  teríamos  $\overline{(-a_1, -b_1, \frac{1}{2})} = \overline{(a_1, b_1, \frac{1}{2})}$  o que é absurdo. Logo  $\alpha(t) \neq 1$ , donde  $t \neq 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ . (Ver figura precedente). Pela relação anterior e as definições de  $\tilde{\phi}$  e  $\phi$  (4.3.7) temos

$$\frac{(1-\alpha(t)) [\tilde{\phi}_0(f \square g)] (\overline{x,y,t}) + \alpha(t) \tilde{\phi}(-a_1, -b_1, \frac{1}{2})}{\sqrt{(1-\alpha(t))^2 + \alpha^2(t)}} = \tilde{\phi}(a_1, b_1, \frac{1}{2}) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} a_1, \frac{\sqrt{2}}{2} b_1 \right) \quad (*)$$

Temos então as possibilidades:

(a) Para  $0 < t < \frac{1}{3}$ , a igualdade (\*) se torna (Ver(6.1.1) e (4.3.7))

$$\frac{(1-\alpha(t)) [(1-3t)(f(x), 0) + 3t(0, y)] \frac{1}{\sqrt{1-6t+18t^2}} + \alpha(t) \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} a_1, -\frac{\sqrt{2}}{2} b_1 \right)}{\sqrt{(1-\alpha(t))^2 + \alpha^2(t)}} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} a_1, \frac{\sqrt{2}}{2} b_1 \right)$$

Portanto,

$$\frac{(1-\alpha(t)) \cdot (1-3t) \cdot f(x)}{\sqrt{1-6t+18t^2} \cdot \sqrt{(1-\alpha(t))^2 + \alpha^2(t)}} - \frac{\alpha(t) \sqrt{2} a_1}{2 \sqrt{(1-\alpha(t))^2 + \alpha^2(t)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} a_1$$

e

$$\frac{(1-\alpha(t)) \cdot 3t \cdot y}{\sqrt{1-6t+18t^2} \cdot \sqrt{(1-\alpha(t))^2 + \alpha^2(t)}} - \frac{\alpha(t) \sqrt{2} b_1}{2 \sqrt{(1-\alpha(t))^2 + \alpha^2(t)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} b_1$$

Daí vem que

$$\frac{(1-3t)}{\sqrt{1-6t+18t^2}} \cdot \frac{(1-\alpha(t))}{\sqrt{(1-\alpha(t))^2 + \alpha^2(t)}} f(x) = \left( \frac{\alpha(t)}{\sqrt{(1-\alpha(t))^2 + \alpha^2(t)}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) a_1$$

e

$$\frac{3t}{\sqrt{1-6t+18t^2}} \cdot \frac{(1-\alpha(t))}{\sqrt{(1-\alpha(t))^2+\alpha^2(t)}} y = \left( \frac{\alpha(t)}{\sqrt{(1-\alpha(t))^2+\alpha^2(t)}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \right) b_1$$

Tomando as normas destas duas últimas igualdades lembrando que  $||f(x)|| = ||y|| = ||a_1|| = ||y_1|| = 1$  e dividindo membro a membro vem  $\frac{1-3t}{3t} = 1$  e portanto  $t = \frac{1}{6}$ . Como  $\alpha(\frac{1}{6}) = 0$  (Ver figura precedente) deduzimos que

$$\overline{F(x,y,\frac{1}{6})} = \overline{(f \square g)(x,y,\frac{1}{6})} = \overline{(f(x),y,\frac{1}{2})} = \overline{(a_1,b_1,\frac{1}{2})} .$$

Portanto,  $x \in f^{-1}(a_1)$ ,  $y = b_1$  e  $t = \frac{1}{6}$ .

(b) Para  $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$ , procedendo de modo totalmente análogo ao anterior obtemos  $t = \frac{1}{2}$ , donde  $\alpha(\frac{1}{2}) = 0$ . Então

$$\overline{F(x,y,\frac{1}{2})} = \overline{(f \square g)(x,y,\frac{1}{2})} = \overline{(x,y,\frac{1}{2})} = \overline{(a_1,b_1,\frac{1}{2})} .$$

Portanto,  $x=a_1$ ,  $y=b_1$  e  $t=\frac{1}{2}$ .

(c) Para  $\frac{2}{3} < t < 1$ , procedendo de modo totalmente análogo ao caso (a) obtemos  $t=\frac{5}{6}$ , donde  $\alpha(\frac{5}{6}) = 0$ . Então

$$\overline{F(x,y,\frac{5}{6})} = \overline{(f \square g)(x,y,\frac{5}{6})} = \overline{(x,g(y),\frac{1}{2})} = \overline{(a_1,b_1,\frac{1}{2})} .$$

Portanto  $x=a_1$ ,  $y \in g^{-1}(b_1)$  e  $t=\frac{5}{6}$ .

Resumindo,

$$F^{-1}(\overline{a_1, b_1, \frac{1}{2}}) = \overline{\{(x, b_1, \frac{1}{6}) : x \in f^{-1}(a_1)\}} \cup \{(a_1, b_1, \frac{1}{2})\} \cup \{(a_1, y, \frac{5}{6}) : y \in g^{-1}(b_1)\}$$

Calculemos agora o jacobiano de  $F$  nos pontos de  $F^{-1}(\overline{a_1, b_1, \frac{1}{2}})$ .

Se  $v \in F^{-1}(\overline{a_1, b_1, \frac{1}{2}})$  existe uma vizinhança de  $v$  na qual  $F$  é idêntica a  $f \square g$ . Então nos pontos de  $F^{-1}(\overline{a_1, b_1, \frac{1}{2}})$  o jacobiano de  $F$  coincide com o jacobiano de  $f \square g$ . Calculemos então estes jacobianos.

(a) Em pontos do tipo  $(x, b_1, \frac{1}{6})$ , com  $x \in f^{-1}(a_1)$ , temos  $(f \square g)(x, b_1, \frac{1}{6}) = (a_1, b_1, \frac{1}{2})$  e podemos tomar (por exemplo), cartas do tipo  $\ell_{131}$  em  $(x, b_1, \frac{1}{6})$  e do tipo  $\ell_{232}$  em  $(a_1, b_1, \frac{1}{2})$  (Ver (4.3.8)). Daí

$$\begin{aligned} (\ell_{232} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1})(w_1, w_2, t) &= [(\pi_2 \times \pi_3 \text{id}_2) \circ (f \square g) \circ (\pi_1^{-1} \times \pi_3^{-1} \text{id}_1^{-1})](w_1, w_2, t) = \\ &= [(\pi_2 \times \pi_3 \text{id}_2) \circ (f \square g)](\pi_1^{-1}(w_1), \pi_3^{-1}(w_2), t) = (\pi_2 \times \pi_3 \text{id}_2)((f \circ \pi_1^{-1})(w_1), \pi_3^{-1}(w_2), 3t) \\ &= ((\pi_2 \circ f \circ \pi_1^{-1})(w_1), w_2, 3t) \end{aligned}$$

Então, nestes pontos

$$J(\ell_{232} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1}) = \begin{bmatrix} J(\pi_2 \circ f \circ \pi_1^{-1}) & 0 \\ & \mathbb{1} \\ 0 & 3\mathbb{1} \end{bmatrix}$$

donde

$$\det(J(\ell_{232} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1})) = 3 \det(J(\pi_2 \circ f \circ \pi_1^{-1})) \neq 0$$

pois  $a_1$  é valor regular de  $f$ . Além disso

$$\text{sig} [\det(J(\ell_{232} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1}))] = \text{sig} [\det(J(\pi_2 \circ f \circ \pi_1^{-1}))]$$

Ou seja, (Ver (2.3))  $f \square g$  preserva a orientação num ponto do tipo  $(x_1, b_1, \frac{1}{6})$ , onde  $x \in f^{-1}(a_1)$ , se e somente se  $f$  preserva a orientação no ponto  $x$ .

(b) Para o ponto  $(a_1, b_1, \frac{1}{2})$ , temos  $(f \square g)(a_1, b_1, \frac{1}{2}) = (a_1, b_1, \frac{1}{2})$  e então podemos tomar, por exemplo, certas do tipo  $\ell_{131}$  em  $(a_1, b_1, \frac{1}{2})$  (Ver (4.3.8)). Daí

$$\begin{aligned} (\ell_{131} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1})(w_1, w_2, t) &= [(\pi_1 \times \pi_3 \times \text{id}_1) \circ (f \square g) \circ (\pi_1^{-1} \times \pi_3^{-1} \times \text{id}_1^{-1})](w_1, w_2, t) = \\ &= [(\pi_1 \times \pi_3 \times \text{id}_1) \circ (f \square g)](\pi_1^{-1}(w_1), \pi_3^{-1}(w_2), t) = (\pi_1 \times \pi_3 \times \text{id}_1)(\pi_1^{-1}(w_1), \pi_3^{-1}(w_2), 2-3t) = \\ &= (w_1, w_2, 2-3t) . \end{aligned}$$

Então, nesse ponto

$$J(\ell_{131} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1}) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & & 0 \\ & \mathbb{1} & \\ 0 & & -3\mathbb{1} \end{bmatrix} ,$$

donde

$$\det(J(\ell_{131} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1})) = -3 \neq 0$$

pois  $b_1$  é valor regular de  $g$ . Além disso

$$\text{sig}[\det(J(\ell_{142} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1}))] = \text{sig}[\det(J(\ell_{142} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1}))]$$

Ou seja, (Ver (2.3)),  $f \square g$  preserva a orientação num ponto do tipo  $(a_1, y_1, \frac{5}{6})$ , onde  $y \in g^{-1}(b_1)$ , se, e só se  $g$  preserva a orientação no ponto  $y$ .

Concluimos portanto que  $(a_1, b_1, \frac{1}{2})$  é valor regular de  $F$  e, por (2.3.1) temos:

$$\begin{aligned} \deg(F, (a_1, b_1, \frac{1}{2})) &= \sum_{p \in F^{-1}(a_1, b_1, 1/2)} \text{sig}[\det(J(F)_p)] = \\ &= \sum_{\substack{p=(x, b_1, 1/6) \\ x \in f^{-1}(a_1)}} \text{sig}[\det(J(\ell_{232} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1})_p)] \\ &+ \text{sig}[\det(J(\ell_{131} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1})_{(a_1, b_1, 1/2)})] \\ &+ \sum_{\substack{p=(a_1, y, 5/6) \\ y \in g^{-1}(b_1)}} \text{sig}[\det(J(\ell_{142} \circ (f \square g) \circ \ell_{131}^{-1})_p)] \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(a_1)} \text{sig}[\det(J(\pi_2 \circ f \circ \pi_1^{-1})_x)] + (-1) + \\ &+ \sum_{y \in g^{-1}(b_1)} \text{sig}[\det(J(\pi_4 \circ g \circ \pi_3^{-1})_y)] \\ &= \deg(f, a_1) - 1 + \deg(g, b_1) \end{aligned}$$

Pela definição (2.3.3) e a relação  $\deg(f \square g) = \deg F$ , obtida

no começo desta demonstração, deduzimos que

$$\deg(f \square g) = \deg(f) + \deg(g) - 1 .$$

## 6.2. Ações sem Pontos Fixos de Grupos Cíclicos sobre Esferas

Neste parágrafo mostraremos que sobre esferas de dimensão ímpar sempre é possível estabelecer uma ação sem pontos fixos de um grupo cíclico finito. Dessa forma concluiremos que sobre esferas de dimensão ímpar existem autohomeomorfismos periódicos que não têm pontos fixos.

(6.2.1) Primeiramente construiremos uma ação sem pontos fixos de um grupo cíclico finito sobre  $S^1$ .

Consideremos  $S^1$  como a circunferência unitária no plano complexo e seja  $w_n: S^1 \rightarrow S^1$  a aplicação definida por  $w_n(z) = z \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , onde  $n$  é um número natural  $\geq 2$ . Então temos

(a)  $w_n$  é um autohomeomorfismo de  $S^1$ . Com efeito, o seu inverso é dado por  $w_n^{-1}(z) = z \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}$ .

(b)  $w_n$  é periódico (Ver (3.1.4)), de período  $n$ . De fato,  $(w_n)^n(z) = (z) \cdot e^{\frac{2\pi i}{n} \cdot n} = z$ , e  $(w_n)^m \neq$  identidade para todo  $m < n$ .

(c)  $w_n$  não tem pontos fixos. Com efeito, se  $z = w_n(z) = z \cdot e^{\frac{2\pi i}{n}}$ , então  $e^{\frac{2\pi i}{n}} = 1$  e daí  $n = \pm 1$ , o que contraria a nossa escolha de  $n$ .

Então, por (3.1.5) e (3.1.8),  $w_n$  induz uma ação sem pontos fixos de  $Z_n$  sobre  $S^1$ .

(6.2.2) A seguir construiremos uma ação sem pontos fixos de  $Z_n$  (onde  $n$  é como acima) sobre uma esfera de dimensão ímpar  $S^{2m+1}$ . Procederemos por indução. Por (6.2.1) já sabemos que tais ações existem quando  $m=0$ . Suponhamos que existe uma ação de  $Z_m$  sobre  $S^{2m-1}$  e que  $w'_n: S^{2m-1} \rightarrow S^{2m-1}$  é um gerador dessa ação. Seja  $w_n: S^1 \rightarrow S^1$  o autohomeomorfismo construído em (6.2.1), e  $w_n * w'_n: S^1 * S^{2m-1} \rightarrow S^1 * S^{2m-1}$  a aplicação definida como em (4.3.4). Então temos

(a)  $w_n * w'_n$  é um autohomeomorfismo de  $S^{2m+1}$ . Com efeito,  $S^1 * S^{2m-1}$  é homeomorfo a  $S^{2m+1}$  por (4.3.7). Além disso,  $w_n * w'_n$  é contínua por (4.3.5(i)), e por (4.3.5(ii)) vale  $(w_n * w'_n)^{-1} = w_n^{-1} * (w'_n)^{-1}$ .

(b)  $w_n * w'_n$  é periódico de período  $n$ . De fato, por (4.3.5(ii)) valem  $(w_n * w'_n)^n = (w_n)^n * (w'_n)^n = \text{id} * \text{id} = \text{id}$  e  $(w_n * w'_n)^k = (w_n)^k * (w'_n)^k \neq \text{id} * \text{id} = \text{id}$  se  $0 < k < n$ .

(c)  $w_n * w'_n$  não tem pontos fixos. Com efeito, por (4.3.5(iii)) temos

$$\text{Fix}(w_n * w'_n) = \text{Fix}(w_n) * \text{Fix}(w'_n) = \emptyset * \emptyset = \emptyset$$

Então, por (3.1.5) e (3.1.8),  $w_n * w'_n$  induz uma ação sem pontos fixos de  $Z_n$  sobre  $S^{2m+1}$ .

Resumindo, temos:

(6.2.3) Proposição. Sejam  $m$  um número natural e  $n$  um número natural  $\geq 2$ . Então existe uma ação sem pontos fixos de  $Z_n$  sobre  $S^{2m+1}$ .



### 6.3. Ações sem Pontos Fixos de Grupos Cíclicos sobre Espaços Compactos

Neste parágrafo mostraremos que dado um grupo cíclico finito  $Z_r$ , que não é um  $p$ -grupo, existem um espaço compacto e acíclico  $X$  e uma ação sem pontos fixos de  $Z_r$  sobre  $X$ . Dessa forma teremos assinalados limites para possíveis generalizações dos célebres resultados de P.A. Smith sobre ações de  $p$ -grupos (Ver (6.3.5)).

(6.3.1) Sejam  $p$  e  $q$  números naturais  $> 2$  e primos entre si, e seja  $r = p \cdot q$ . Começaremos por construir uma ação sem pontos fixos de  $Z_r$  sobre  $S^3$ . Sejam  $S^1$  a circunferência unitária no plano complexo e  $w_p: S^1 \rightarrow S^1$  e  $w_q: S^1 \rightarrow S^1$  as aplicações definidas por  $w_p(z) = z \cdot e^{\frac{2\pi i}{p}}$  e  $w_q(z) = z \cdot e^{\frac{2\pi i}{q}}$ . Como em (6.2.1) temos:

- (a)  $w_p$  e  $w_q$  são autohomeomorfismos de  $S^1$ .
- (b)  $w_p$  e  $w_q$  são periódicos de períodos  $p$  e  $q$  respectivamente.
- (c) Nem  $w_p$  nem  $w_q$  têm pontos fixos.

Então a aplicação  $T = w_p * w_q: S^1 * S^1 \rightarrow S^1 * S^1$  tem as propriedades seguintes:

- (i)  $T$  é um autohomeomorfismo de  $S^3$  (Ver (6.2.2(a))).
- (ii)  $T$  é periódico de período  $r = p \cdot q$ . (Ver (6.2.2(b))).
- (iii)  $T$  não tem pontos fixos (Ver (6.2.2(c))).

Então, novamente por (3.1.5) e (3.1.8),  $T$  induz uma ação sem pontos fixos de  $Z_{pq}$  sobre  $S^3$ .

(6.3.2) A seguir construiremos uma aplicação  $h: S^3 \rightarrow S^3$ , homotópica a uma aplicação constante e que é equivariante com respeito à ação de (6.3.1). Como  $p$  e  $q$  são primos entre si, existem inteiros  $m$  e  $n$  tais que  $np+mq=-1$ . Sejam então  $f: S^1 \rightarrow S^1$  e  $g: S^1 \rightarrow S^1$  as aplicações definidas por  $f(z) = z^{np+1}$  e  $g(z) = z^{mq+1}$ . Por (2.3.4),  $\deg(f) = np+1$  e  $\deg(g) = mq+1$ . Com estas aplicações construamos a aplicação  $f \square g: S^1 * S^1 \rightarrow S^1 * S^1$ , conforme (6.1.1). Por (6.1.5) temos

$$\deg(f \square g) = \deg(f) + \deg(g) - 1 = np+1 + mq+1 - 1 = 0.$$

Por (2.3.8) temos que  $f \square g: S^3 \rightarrow S^3$  é homotópica a uma aplicação constante  $c: S^3 \rightarrow S^3$ .

Se  $w_p$  e  $w_q$  são como em (6.3.1) temos

$$(f \circ w_p)(z) = f(z \cdot e^{\frac{2\pi i}{p}}) = \left( z \cdot e^{\frac{2\pi i}{p}} \right)^{np+1} = z^{np+1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{p}(np+1)} = w_p(f(z)) = (w_p \circ f)(z)$$

Isto é,  $f$  e  $w_p$  comutam. Além disso

$$(g \circ w_q)(z) = g(z \cdot e^{\frac{2\pi i}{q}}) = \left( z \cdot e^{\frac{2\pi i}{q}} \right)^{mq+1} = z^{mq+1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{q}(mq+1)} = w_q(g(z)) = (w_q \circ g)(z)$$

Isto é,  $g$  e  $w_q$  comutam.

Sejam agora  $(z_1, z_2, t)$  um ponto de  $S^1 * S^1$  e  $T = w_p * w_q$  (Ver (6.3.1)). Usando a expressão de  $f \square g$  obtida (6.1.1) vemos que (Ver (4.3.4))

$$(I) \text{ Se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$$

$$(T \circ (f \square g))(z_1, z_2, t) = (w_p * w_q)(f(z_1), z_2, 3t) = (w_p(f(z_1)), w_q(z_2), 3t) =$$

$$= \overline{(f(w_p(z_1)), w_q(z_2), 3t)} = (f \square g) \overline{(w_p(z_1), w_q(z_2), t)} = ((f \square g) \circ T) \overline{(z_1, z_2, t)};$$

(II) Se  $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} (T \circ (f \square g)) \overline{(z_1, z_2, t)} &= \overline{(w_p * w_q)(z_1, z_2, 2-3t)} = \overline{(w_p(z_1), w_q(z_2), 2-3t)} = \\ &= (f \square g) \overline{(w_p(z_1), w_q(z_2), t)} = ((f \square g) \circ T) \overline{(z_1, z_2, t)}; \end{aligned}$$

(III) Se  $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} T \circ (f \square g) \overline{(z_1, z_2, t)} &= \overline{(w_p * w_q)(z_1, g(z_2), 3t-2)} = \overline{(w_p(z_1), w_q(g(z_2)), 3t-2)} = \\ &= \overline{(w_p(z_1), g(w_q(z_2)), 3t-2)} = (f \square g) \overline{(w_p(z_1), w_q(z_2), t)} = ((f \square g) \circ T) \overline{(z_1, z_2, t)} \end{aligned}$$

Portanto  $T \circ (f \square g) = (f \square g) \circ T$ , e como  $T$  é o gerador da ação,  $f \square g$  é equivariante. Então  $h = f \square g$  é a aplicação procurada.

(6.3.3) Proposição. Sejam  $N$  o conjunto dos números naturais e  $h$  a aplicação de (6.3.2). Seja  $\{E_n, \pi_{nm}, N\}$  o sistema inverso de espaços topológicos onde  $E_n = S^3$  para todo  $n \in N$  e  $\pi_{mn} = h^{n-m}$  para  $n \geq m$  (Ver (4.1.4)), e seja  $E = \varprojlim E_n$  o limite inverso desse sistema inverso. Então  $E$  é não vazio, Hausdorff, compacto, e acíclico em relação à homologia de Čech.

Demonstração. Como  $E_n = S^3$ , que é não vazios, Hausdorff e compacto,  $E$  é não vazio, Hausdorff e compacto por (4.1.6). Como  $h$  é homotópica a uma aplicação constante por (6.3.2), os morfismos  $h_*: \check{H}_j(S^3) \rightarrow \check{H}_j(S^3)$  que  $h$  induz em homologia são triviais para todo  $j \in N$ . Portanto todos os endomorfismos  $(\pi_{mn})_* = (h^{n-m})_* = h_*^{n-m}$  de  $\check{H}_j(S^3)$  (onde  $j, m, n \in N$  e  $m \leq n$ ) são triviais.

Por (4.1.3) temos

$$\begin{aligned} \varprojlim \check{H}_j(S^3) &= \{ \{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} \in \varprojlim_{m \in \mathbb{N}} \check{H}_j(S^3) : x_m = h_*^{n-m}(x_n) \text{ para } n \geq m \} \\ &= \{ \{x_m\}_{m \in \mathbb{N}} : x_m = 0 \} = \{0\} \end{aligned}$$

Por (4.1.7) vale  $\check{H}_j(\varprojlim S^3) = \varprojlim \check{H}_j(S^3)$ , donde  $\check{H}_j(E) = 0$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Portanto  $E$  é acíclico em relação à homologia de Čech.

(6.3.4) Teorema. Se  $r \in \mathbb{N}$  não é a potência de um primo, então existe um espaço compacto e acíclico com relação à homologia de Čech que admite uma ação sem pontos fixos de  $Z_r$ .

Demonstração. Seja  $E$  o espaço compacto e acíclico em relação à homologia de Čech construído na proposição (6.3.3). Façamos  $r = p \cdot q$ , onde  $p, q \in \mathbb{N}$  são primos entre si maiores que 1, e consideremos a aplicação  $T: S^3 \rightarrow S^3$  construída em (6.3.1). Seja  $T_1: E \rightarrow E$  a aplicação definida por

$$T_1(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Como  $x_m = h^{n-m}(x_n)$  para  $n \geq m$ , vale  $T(x_m) = T(h^{n-m}(x_n)) = h^{n-m}(T(x_n))$  (Ver (6.3.2)). Portanto  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in E$  implica que  $\{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in E$ , donde a imagem de  $T_1$  está efetivamente contida em  $E$ . Além disso,

(a)  $T_1$  possui inversa definida por  $T_1^{-1}(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{T^{-1}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ . A demonstração que a imagem de  $T_1$  está contida em  $E$  é análoga à que acabamos de ver. Basta notar que  $T^{-1} = T^{r-1}$  e portanto comuta com  $h$ .

Por outro lado,  $T_1$  e  $T_1^{-1}$  são contínuas, pois são as restrições a  $E$  das aplicações contínuas  $\prod_{n \in \mathbb{N}} T: \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n$  e  $\prod_{n \in \mathbb{N}} T^{-1}$  :  
 $\prod_{n \in \mathbb{N}} E_n \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n$ , respectivamente, definidas por  $\prod_{n \in \mathbb{N}} T(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) = \{T(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\prod_{n \in \mathbb{N}} T^{-1}(\{x_n\}) = \{T^{-1}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  onde  $E_n = S^3$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Portanto  $T_1$  é um automorfismo de  $E$ .

(b)  $T_1$  é periódico, de período  $r$ , pois cada coordenada tem período  $r$ .

(c)  $T_1$  não tem pontos fixos. Com efeito,

$$\begin{aligned} \text{Fix}(T_1) &= \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in E : \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = T_1(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}) \} \\ &= \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} : x_n = T(x_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \} = \emptyset, \end{aligned}$$

pois  $T$  não tem pontos fixos.

Então, por (3.1.5) e (3.1.8),  $T_1$  induz uma ação sem pontos fixos de  $Z_r$  sobre  $E$ . (Ver Bredon, Teor. 8-2, p.60).

(6.3.5) Um caso particular de um dos famosos resultados de P.A. Smith diz que se  $X$  é um espaço compacto (de dimensão finita) e acíclico com relação à homologia de Čech, e  $T$  é um autohomeomorfismo periódico de  $Z$ , de período  $p^n$  (onde  $p$  é um número primo), então  $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ . O teorema (6.3.4), devido a Conner e Floyd, mostra que esse resultado deixa de ser válido se o período de autohomeomorfismo não é uma potência de um número primo.

(6.3.6) É interessante observar (Ver Bredon, Remarque, p. 60)

que como subproduto das construções de Conner e Floyd podem-se assinalar limites para o campo de validade do célebre teorema de ponto fixo de Lefschetz. Com efeito, seja  $E$  um espaço triangulável compacto (Ver (1.1.13(ii))) e suponhamos que  $E$  é contrátil (donde  $E$  é acíclico em relação à homologia singular e também com relação à homologia de Čech; ver Eilenberg-Steenrod, Teor. 10.1, p. 201, e Teor. 9.3, p. 250). Uma consequência do teorema de ponto fixo de Lefschetz (ver Spanier, Cor. 8, p.196) diz que toda aplicação contínua  $h: E \rightarrow E$  (e, em particular, todo automorfismo periódico) tem (pelo menos) um ponto fixo. Por (6.3.4) esta asserção deixa de ser válida se omitimos a hipótese da triangulabilidade sobre  $E$  e substituimos a hipótese de  $E$  ser contrátil pela de ser acíclico com relação à homologia de Čech (Ver também (7.1.11)).

=====

=====

## CAPÍTULO 7

### AÇÕES EXÓTICAS DE GRUPOS CÍCLICOS SOBRE ESPAÇOS EUCLIDIANOS

#### 7.1. Ações Simpliciais de Grupos Cíclicos sobre Complexos Simpliciais

Sejam  $p$  e  $q$  números naturais  $> 2$  primos entre si e seja  $r=p.q$ . Seja  $K$  o complexo simplicial em  $\mathbb{C}$  determinado pelos vértices

$$1, e^{\frac{2\pi i}{r}}, \dots, e^{\frac{2\pi i}{r}(r-1)}$$

e cujos 1-simplexos são segmentos retilíneos da forma

$$\left[ e^{\frac{2\pi i \cdot k}{r}}, e^{\frac{2\pi i \cdot (k-1)}{r}} \right].$$

Então  $|K|$  é o polígono regular de  $r$  lados inscrito na circunferência unitária em  $\mathbb{C}$ . Seja  $\lambda: |K| \rightarrow S^1$  a projeção radial, isto é,  $\lambda(x) = x/|x|$ . Notemos que  $\lambda(e^{\frac{2\pi i \cdot k}{r}}) = e^{\frac{2\pi i \cdot k}{r}}$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ . É claro que  $(K, \lambda)$  é uma triangulação de  $S^1$ . Pela proposição (4.4.15),  $(K * K, \lambda \Delta \lambda)$  é uma triangulação de  $S^1 * S^1 \approx S^3$ .

(7.1.2) Proposição. Sejam  $r$  e  $K$  como acima. Então existe uma ação simplicial sem pontos fixos de  $Z_r$  sobre  $Sd(K * K)$ .

Demonstração. Sejam  $\lambda$  como acima,  $T: S^1 * S^1 \rightarrow S^1 * S^1$  o autohomeomorfismo periódico, de período  $r$  e sem pontos fixos construído em (6.3.1), e  $T_2: |K * K| \rightarrow |K * K|$  a única aplicação que torna comutativo o diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 |K * K| & \xrightarrow{\lambda \Delta \lambda} & S^1 * S^1 \\
 \downarrow T_2 & & \downarrow T \\
 |K * K| & \xrightarrow{\lambda \Delta \lambda} & S^1 * S^1
 \end{array}$$

Então  $T_2$  é um autohomeomorfismo periódico, de período  $r$ , e sem pontos fixos. Por (3.1.5) e (3.1.8),  $T_2$  gera uma ação sem pontos fixos de  $Z_r$  sobre o espaço topológico  $|K * K|$ .

Por outro lado, os autohomeomorfismos  $w_p$  e  $w_q$  de  $S^1$  definidos em (6.2.1) satisfazem  $w_p(e^{\frac{2\pi i}{r}k}) = e^{\frac{2\pi i}{r}(k+q)}$  e  $w_q(e^{\frac{2\pi i}{r}k}) = e^{\frac{2\pi i}{r}(k+p)}$ . Então  $T = w_p * w_q$  satisfaz  $T(e^{\frac{2\pi i}{r}k}, *, 0) = (e^{\frac{2\pi i}{r}(k+q)}, *, 0) = (e^{\frac{2\pi i}{r}(k+p)}, *, 0)$  e  $T(*, e^{\frac{2\pi i}{r}k}, 1) = (*, e^{\frac{2\pi i}{r}(k+p)}, 1)$ . (Ver (4.3.4)).

Além disso, os vértices de  $K * K$  que são pontos do tipo  $(e^{\frac{2\pi i}{r}k}, 0, 0)$  ou  $(0, e^{\frac{2\pi i}{r}k}, 1)$  são levados por  $\lambda \Delta \lambda$  (Ver (4.4.5)) nos pontos  $(\lambda(e^{\frac{2\pi i}{r}k}), *, 0) = (e^{\frac{2\pi i}{r}k}, *, 0)$  ou  $(*, \lambda(e^{\frac{2\pi i}{r}k}), 1) = (*, e^{\frac{2\pi i}{r}k}, 1)$ , respectivamente (Ver definição de  $\lambda \Delta \lambda$  acima). Portanto, pela comutatividade do diagrama  $T_2$  leva vértices de  $K * K$  em vértices de  $K * K$ .

Temos então

$$T_2 \left[ (1-t) \left( e^{\frac{2\pi i}{r}m}, 0, 0 \right) + t \left( e^{\frac{2\pi i}{r}(m+1)}, 0, 0 \right) \right]$$



$$\begin{aligned}
 &= [(\lambda\Delta\lambda)^{-1} \circ T] \left( \lambda \left[ (1-t) e^{\frac{2\pi i}{r} m} + t e^{\frac{2\pi i}{r} (m+1)} \right], *, 0 \right) \\
 &= (\lambda\Delta\lambda)^{-1} ((w_p \circ \lambda) \left[ (1-t) e^{\frac{2\pi i}{r} m} + t e^{\frac{2\pi i}{r} (m+1)} \right], *, 0) \\
 &= (\lambda\Delta\lambda)^{-1} \left( w_p \left( \frac{(1-t) e^{\frac{2\pi i}{r} m} + t e^{\frac{2\pi i}{r} (m+1)}}{\sqrt{(1-t)^2 + t^2}} \right), *, 0 \right) \\
 &= (\lambda\Delta\lambda)^{-1} \left( \frac{(1-t) e^{\frac{2\pi i}{r} (m+q)} + t e^{\frac{2\pi i}{r} (m+q+1)}}{\sqrt{(1-t)^2 + t^2}}, *, 0 \right) \\
 &= (1-t) \left( e^{\frac{2\pi i}{r} (m+q)}, 0, 0 \right) + t \left( e^{\frac{2\pi i}{r} (m+q+1)}, 0, 0 \right)
 \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
 &T_2 \left[ (1-t) \left( 0, e^{\frac{2\pi i}{r} m}, 1 \right) + t \left( 0, e^{\frac{2\pi i}{r} (m+1)}, 1 \right) \right] \\
 &= (1-t) \left( 0, e^{\frac{2\pi i}{r} (m+p)}, 1 \right) + t \left( 0, e^{\frac{2\pi i}{r} (m+p+1)}, 1 \right)
 \end{aligned}$$

Ainda

$$\begin{aligned}
 &T_2 \left[ (1-t) \left( e^{\frac{2\pi i}{r} m}, 0, 0 \right) + t \left( 0, e^{\frac{2\pi i}{r} n}, 1 \right) \right] \\
 &= (\lambda\Delta\lambda)^{-1} \circ T \left( \lambda \left( e^{\frac{2\pi i}{r} m}, e^{\frac{2\pi i}{r} n}, t \right) \right) \\
 &= (\lambda\Delta\lambda)^{-1} \circ T \left( e^{\frac{2\pi i}{r} m}, e^{\frac{2\pi i}{r} n}, t \right) \\
 &= (\lambda\Delta\lambda)^{-1} \left( w_p \left( e^{\frac{2\pi i}{r} m}, w_q \left( e^{\frac{2\pi i}{r} n}, t \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\lambda\lambda\lambda)^{-1} \left( e^{\frac{2\pi i}{r}(m+q)}, e^{\frac{2\pi i}{r}(n+p)}, t \right) \\
 &= (1-t) \left( e^{\frac{2\pi i}{r}(m+1)}, 0, 0 \right) + t \left( 0, e^{\frac{2\pi i}{r}(n+p)}, 1 \right) .
 \end{aligned}$$

Portanto  $T_2$  leva simplexos em simplexos e é linear nos simplexos. Assim  $T_2$  é uma aplicação simplicial.

Concluimos então que  $T_2$  gera uma ação simplicial sem pontos fixos de  $Z_r$  sobre  $K*K$ . Por (3.2.2), esta ação induz uma ação simplicial sem pontos fixos sobre  $Sd(K*K)$ , ainda sem pontos fixos.

(7.1.3) Proposição. Sejam  $r, K$  e  $\lambda$  como em (7.1.2). Então existem  $n \in \mathbb{N}$  e uma aplicação  $\gamma: |Sd(K*K)| = |K*K| \rightarrow |Sd(K*K)| = |K*K|$  tal que:

- (i)  $\gamma$  é homotópica a uma aplicação constante;
- (ii)  $\gamma$  é equivariante em relação à ação de  $Z_r$  sobre  $Sd(K*K)$  construída em (7.1.2);
- (iii)  $\gamma: Sd^n(Sd(K*K)) \rightarrow Sd(K*K)$  é simplicial.

Demonstração. Seja  $h: S^1 * S^1 \rightarrow S^1 * S^1$  a aplicação simplicial construída em (6.3.2) e  $h': |K*K| \rightarrow |K*K|$  a única aplicação que torna comutativo o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 |K*K| & \xrightarrow{\quad} & S^1 * S^1 \\
 \downarrow h' & & \downarrow h \\
 |K*K| & \xrightarrow{\quad} & S^1 * S^1
 \end{array}$$

Como  $\lambda\Delta\lambda$  é um homeomorfismo e  $h$  é homotópica a uma aplicação constante,  $h'$  é homotópica a uma aplicação constante. Além disso

$$\begin{aligned} h' \circ T_2 &= (\lambda\Delta\lambda)^{-1} \circ h \circ (\lambda\Delta\lambda) \circ (\lambda\Delta\lambda)^{-1} \circ T_0 \circ (\lambda\Delta\lambda) \\ &= (\lambda\Delta\lambda)^{-1} \circ (h \circ T) \circ (\lambda\Delta\lambda) = (\lambda\Delta\lambda^{-1}) \circ (T \circ h) \circ (\lambda\Delta\lambda) = \\ &= (\lambda\Delta\lambda)^{-1} \circ T_0 \circ (\lambda\Delta\lambda) \circ (\lambda\Delta\lambda)^{-1} \circ (\lambda\Delta\lambda) = T_2 \circ h' \end{aligned}$$

pois  $h$  é equivariante. Assim, como  $h'$  comuta com o gerador da ação de (7.1.2),  $h'$  é  $Z_r$ -equivariante. Como  $|K*K| = |Sd(K*K)|$  temos então uma aplicação contínua  $h': |Sd(K*K)| \rightarrow |Sd(K*K)|$  que é  $Z_r$ -equivariante e homotópica a uma aplicação constante.

Por (3.3.1) existem  $n \in \mathbb{N}$  e uma aplicação simplicial  $\gamma: Sd^n(Sd(K*K)) \rightarrow Sd(K*K)$ ,  $Z_r$ -equivalente, e tal que  $\gamma: |Sd(K*K)| \rightarrow |Sd(K*K)|$  é homotópica a  $h'$  e portanto homotópica a uma aplicação constante.

(7.1.4) Nosso próximo objetivo é construir uma ação induzida por  $T_2$  num cilindro iterado. Para que isto seja feito necessitaremos ordenar convenientemente os vértices de  $Sd^n(Sd(K*K)) * L$  onde  $K$  e  $n$  são os fornecidos pela proposição (7.1.2) e  $L$  é um complexo simplicial finito qualquer.

Consideremos em  $Sd^n(Sd(K*K))$  a seguinte ordenação: se  $v$  e  $w$  são vértices de  $Sd(Sd^n(K*K))$  então  $v < w$  se e só se  $v = b(A)$  e  $w = b(B)$ , onde  $A$  e  $B$  são simplexos de  $Sd^n(K*K)$  tais que  $A$  é face própria de  $B$ . Esta ordem tem a propriedade enunciada

em (5.1.1). (Ver a observação final em (5.1.2).) Então, pela definição dos simplexes de  $Sd^n(Sd(K*K))$ . (Ver 1.1.8) como sendo aqueles do tipo  $[b(\Lambda_0), \dots, b(\Lambda_n)]$ , onde  $A_i$  é face própria de  $A_{i+1}$  ( $0 \leq i \leq n-1$ ), vemos que os vértices de um simplexo qualquer de  $Sd^n(Sd(K*K))$  estão totalmente ordenados.

Damos agora aos vértices de  $L$  uma relação de ordem parcial satisfazendo a propriedade enunciada em (5.1.1), e aos vértices de  $Sd^n(Sd(K*K))*L$  a seguinte ordenação: se  $v$  e  $w$  são vértices de  $Sd^n(Sd(K*K))$  e  $u_1, u_2$  vértices de  $L$ ,

$$(v, 0, 0) < (w, 0, 0) \text{ se e só se } v < w;$$

$$(0, u_1, 1) < (0, u_2, 1) \text{ se e só se } u_1 < u_2;$$

$(v, 0, 0) < (0, u, 1)$  para quaisquer vértices  $v$  de  $Sd^n(Sd(K*K))$  e  $u$  de  $L$ .

Esta é uma relação de ordem sobre os vértices de  $Sd^n(Sd(K*K))*L$  tal que os vértices de cada simplexo estão totalmente ordenados. Temos então todas as condições para a construção do cilindro iterado  $Z^\infty$  (Ver (5.2.2)) da aplicação  $\gamma*id: |Sd(K*K)*L| \rightarrow |Sd(K*K)*L|$  onde  $\gamma: |Sd(K*K)| \rightarrow |Sd(K*K)|$  é a aplicação construída em (7.1.3) e  $id: L \rightarrow L$  é a identidade.

(7.1.5) Proposição. Seja  $Z^\infty$  o cilindro iterado de  $\gamma*id: |Sd(K*K)*L| \rightarrow |Sd(K*K)*L|$ . Então

- (i)  $|Z^\infty|$  é conexo por caminhos e contrátil
- (ii)  $\dim Z^\infty = 5 + \dim(L) \geq 4$ .

Demonstração. (i) Como  $K \neq \emptyset$  então  $|K*K|$  é conexo por caminhos

por (4.4.4(iii)). Se  $L = \emptyset$ ,  $|Z_{\gamma * \phi}(Sd^{n+1}(K * K) * \phi, Sd(K * K) * \phi)|$  é homeomorfo a  $|Z_{\gamma}(Sd^{n+1}(K * K), Sd(K * K))|$  que é conexo por caminhos por (5.1.4). Se  $L \neq \emptyset$ , como  $K * K \neq \emptyset$ , então  $|Z_{\gamma * id}(Sd^{n+1}(K * K) * L, Sd(K * K) * L)|$  é conexo por caminhos por (5.1.5). Então, em qualquer caso, o cilindro iterado  $|Z^{\infty}|$  é conexo por caminhos por (5.2.3(iii)). Como  $\gamma$  é homotópica a uma aplicação constante por (7.1.3(i)),  $|Z^{\infty}|$  é contrátil por (5.2.4).

(ii) Por (5.2.3(iv)) e (5.1.3) sabemos que  $\dim Z^{\infty} = \dim(Sd^{n+1}(K * K) * L) + 1 = \dim(K * K) + \dim L + 2 = 2\dim(K) + 3 = 5 + \dim L \geq 4$ , pois  $\dim K = 1$  e  $\dim L \geq -1$ .

(7.1.6) Proposição. Seja  $T_2: Sd(K * K) \rightarrow Sd(K * K)$  o gerador da ação simplicial de  $Z_r$  sobre  $Sd(K * K)$  construído em (7.1.2) e  $id: L \rightarrow L$  a identidade sobre um complexo simplicial finito  $L$ . Então

$T_2 * id: Sd^{n+1}(K * K) * L \rightarrow Sd^{n+1}(K * K) * L$  é uma aplicação simplicial que preserva a ordem dos vértices dada em (7.1.4). Além disso  $T_2 * id$  é um autohomeomorfismo periódico de período  $r$ .

Demonstração. A aplicação  $T_2: Sd(K * K) \rightarrow Sd(K * K)$  é simplicial (Ver (7.1.2)) e é um autohomeomorfismo periódico de período  $r$ . Então, aplicando  $n$  vezes a proposição (1.1.22) deduzimos que  $T_2: Sd^{n+1}(K * K) \rightarrow Sd^{n+1}(K * K)$  é simplicial e é um autohomeomorfismo periódico de período  $r$ . Então, por (4.4.10) e (4.4.11)

$$T_2 * id: Sd^{n+1}(K * K) * L \rightarrow Sd^{n+1}(K * K) * L$$

é uma aplicação simplicial e por (4.4.14)  $T_2 * id$  é um homeomor-

fismo periódico de período  $r$ .

Sejam agora  $(v,0,0)$  e  $(w,0,0)$  vértices de  $Sd^{n+1}(K*K)*L$  tais que  $(v,0,0) < (w,0,0)$ . Então  $v=b(A)$  e  $w=b(B)$ , onde  $A$  e  $B$  são simplexos de  $Sd^n(K*K)$  e  $A$  é uma face própria de  $B$ . Além disso  $T_2(b(A)) = b(T_2(A))$ ,  $T_2(b(B)) = b(T_2(B))$  e  $T_2(A)$  é face própria de  $T_2(B)$ , pois  $T_2$  é uma aplicação simplicial injetora. (Ver (1.1.21)). Então

$$\begin{aligned} (T_2 * id)(v,0,0) &= (T_2(b(A)),0,0) = (b(T_2(A)),0,0) < (b(T_2(B)),0,0) \\ &= (T_2(b(B)),0,0) = (T_2 * id)(w,0,0) . \end{aligned}$$

Se  $(0,u_1,1) < (0,u_2,1)$ , onde  $u_1$  e  $u_2$  são vértices de  $L$ , então

$$(T_2 * id)(0,u_1,1) * (0, id(u_1), 1) < (0, id(u_2), 1) = (T_2 * id)(0,u_2,1) .$$

Se  $(v,0,0) < (0,u,1)$ , onde  $v$  é um vértice de  $Sd^{n+1}(K*K)$  e  $u$  é um vértice de  $L$ , então

$$(T_2 * id)(v,0,0) = (T_2(v),0,0) < (0, id(u), 1) = (T_2 * id)(0,u,1) .$$

Assim  $T_2 * id$  preserva a ordem dos vértices dada em (7.1.4).

(7.1.7) Proposição. Seja  $Z^\infty$  o cilindro iterado de  $\gamma * id$ . Então existe uma aplicação simplicial  $T_3: Z^\infty \rightarrow Z^\infty$  que é um auto-homeomorfismo periódico, de período  $r$ .

Demônstração. Seja  $x$  um ponto de  $|Z^\infty|$ . Por (5.2.1) existem um número natural  $m$  e números reais  $t_1, \dots, t_k, t'_1, \dots, t'_s$  com  $0 \leq t_i, t_j \leq 1, \sum t_i + \sum t'_j = 1$  com  $t_1, \dots, t_k$  não simultaneamente nulos tais que  $x$  pode ser escrito de modo único na forma

$$x = \sum_{i=0}^k t_i S^m(U_i, 0, 0) + \sum_{j=k}^s t'_j S^m(0, (\gamma * id)(U_j), 1)$$

onde os  $U_n$  são vértices de um simplexo de  $Sd^{n+1}(K * K) * L$  tais que  $U_n \leq U_{n+1}$  ( $0 \leq n \leq s-1$ ). Seja  $T_2 * id$  a aplicação de (7.1.6) e definamos  $T_3: Z^\infty \rightarrow Z^\infty$  por

$$\begin{aligned} T_3 \left( \sum_{i=0}^k t_i S^m(U_i, 0, 0) + \sum_{j=k}^s t'_j S^m(0, (\gamma * id)(U_j), 1) \right) \\ = \sum_{i=0}^k t_i S^m((T_2 * id)(U_i), 0, 0) + \sum_{j=k}^s t'_j S^m(0, (T_2 * id) \circ (\gamma * id)(U_j), 1) \end{aligned}$$

Como as aplicações  $\gamma * id$  e  $S^m$  levam vértices em vértices  $T_3$  leva vértices em vértices. Seja

$$A = [S^m(U_0, 0, 0), \dots, S^m(U_k, 0, 0), S^m(0, (\gamma * id)(U_k), 1), \dots, S^m(0, (\gamma * id)(U_s), 1)]$$

um simplexo de  $Z^\infty$ , onde os  $U_n$  são tais que  $U_n < U_{n+1}$  ( $0 \leq n \leq s-1$ ). Lembrando (4.4.12), (4.4.13) e o fato que  $\gamma$  comuta com  $T_2$  (Ver (7.1.3)) temos

$$\begin{aligned} T_3(A) &= [S^m((T_2 * id)(U_0), 0, 0), \dots, S^m((T_2 * id)(U_k), 0, 0), \\ &\quad S^m(0, (T_2 * id) \circ (\gamma * id)(U_k), 1), \dots, S^m(0, (T_2 * id) \circ (\gamma * id)(U_s), 1)] \\ &= [S^m((T_2 * id)(U_0), 0, 0), \dots, S^m((T_2 * id)(U_k), 0, 0), \\ &\quad S^m(0, (\gamma * id) \circ (T_2 * id)(U_k), 1), \dots, S^m(0, (\gamma * id) \circ (T_2 * id)(U_s), 1)] \end{aligned}$$

Como  $T_2 * id$  é simplicial, os  $(T_2 * id)(U_n)$  são vértices. Além disso, por (7.1.6),

$T_2 * id$  preserva a ordem das vértices e portanto  $(T_2 * id)(U_n) < (T_2 * id)(U_{n+1})$  ( $0 \leq n \leq s-1$ ). Daí segue que  $T_3(A)$  é um simplex de  $Z^\infty$ . Dessa forma  $T_3$  leva simplexos em simplexos e por definição é linear nestes simplexos. Assim  $T_3$  é uma aplicação simplicial de  $Z^\infty$  em  $Z^\infty$ .

Verifica-se facilmente que a aplicação inversa de  $T_3$  é a aplicação

$$\begin{aligned} T_3^{-1} \left( \sum_{i=0}^k t_i S^m(U_i, 0, 0) + \sum_{j=k}^s t_j S^m(0, (\gamma * id)(U_j), 1) \right) = \\ = \sum_{i=0}^k t_i S^m((T_2^{r-1} * id)(U_i), 0, 0) + \sum_{j=k}^s t_j S^m(0, (T_2^{r-1} * id)_o(\gamma * id)(U_j), 1) . \end{aligned}$$

Além disso demonstra-se de modo inteiramente análogo ao anterior que  $T_3^{-1}$  é simplicial, donde concluímos que  $T_3$  é um autohomeomorfismo sobre  $|Z^\infty|$ . Que  $T_3$  é periódico, de período  $r$ , é imediato dos fatos de que  $T_2$  é periódico de período  $r$  e que

$$\begin{aligned} T_3^n \left( \sum_{i=0}^k t_i S^m(U_i, 0, 0) + \sum_{j=k}^s t_j S^m(0, (\gamma * id)(U_j), 1) \right) = \\ = \sum_{i=0}^k t_i S^m(T_2^n * id)(U_i), 0, 0) + \sum_{j=k}^s t_j S^m(0, T_2^n * id)_o(\gamma * id)(U_j), 1) . \end{aligned}$$

(7.1.8) Proposição.. Seja  $T_3: Z^\infty \rightarrow Z^\infty$  o autohomeomorfismo da proposição anterior. Então o conjunto dos pontos fixos de  $T_3$  é exatamente o cilindro iterado da aplicação  $\phi * id: \phi * L \rightarrow \phi * L$ , isto é,  $Fix(T_3) = |Z_{\phi * id}^\infty|$ .

Demonstração. Se  $U_i$  ( $0 \leq i \leq s$ ) são vértices de  $Sd^{n+1}(K * K) * L$ ,



temos

$$\begin{aligned} & \sum t_i S^m(U_i, 0, 0) + \sum t_j S^m(0, (\gamma * id)(U_j), 1) \\ &= T_3 \left( \sum t_i S^m(U_i, 0, 0) + \sum t_j S^m(0, (\gamma * id)(U_j), 1) \right) \\ &= \sum t_i S^m((T_2 * id)(U_i), 0, 0) + \sum t_j S^m(0, (T_2 * id) \circ (\gamma * id)(U_j), 1) \\ &= \sum t_i S^m((T_2 * id)(U_i), 0, 0) + \sum t_j S^m(0, (\gamma * id) \circ (T_2 * id)(U_j), 1) \end{aligned}$$

Por (4.4.12), (4.4.13) e pelo fato de que  $\gamma$  comuta com  $T_2$ . Então, como existe um modo único de escrever um ponto de  $|Z^\infty|$ , temos que  $U_i = (T_2 * id)(U_i)$  ( $0 \leq i \leq s$ ).

Se  $U_i = (v, 0, 0)$ , onde  $v$  é um vértice de  $Sd^{n+1}(K * K)$ , então  $(v, 0, 0) = (T_2 * id)(v, 0, 0) = (T_2(v), 0, 0)$ , donde  $v = T_2(v)$ , o que é absurdo pois  $T_2$  não tem pontos fixos. Se  $U_i = (0, w, 1)$ , onde  $w$  é um vértice de  $L$ , então  $(T_2 * id)(0, w, 1) = (0, id(w), 1) = (0, w, 1)$  e  $U_i$  é ponto fixo de  $T_3$ . Assim  $U_i = (T_2 * id)(U_i)$  se e só se  $U_i = (0, w, 1)$ , onde  $w$  é um vértice de  $L$ , ou seja, se e somente se  $U_i$  é um vértice de  $\phi * L$ . Portanto os pontos fixos de  $T_3$  são os pontos do tipo

$$\sum_{i=0}^k t_i S^m(U_i, 0, 0) + \sum_{j=k}^s t_j S^m(0, (\gamma * id)(U_j), 1)$$

onde  $U_n = (0, w, 1)$  é vértice de  $\phi * L$  ( $0 \leq n \leq s$ ). Daí  $(\phi * id)(U_n) = (0, id(w), 1) = (\phi * id)(U_n)$ . Então os pontos fixos de  $T_3$  são pontos do tipo

$$\sum_{i=0}^k t_i S^m(U_i, 0, 0) + \sum_{j=0}^s t_j^! (0, (\phi * id)(U_j), 1)$$

onde os  $U_n$  ( $0 \leq n \leq s$ ) são vértices de  $\phi * L$ . Portanto, o conjunto dos pontos fixos de  $T_3$  coincide com o cilindro iterado da aplicação  $\phi * id: \phi * L \rightarrow \phi * L$ .

(7.1.9) Proposição. Seja  $Z_{\phi * id}^{\infty}$  o cilindro da aplicação  $\phi * id: \phi * L \rightarrow \phi * L$  e  $M = |Z_{\phi * id}^{\infty}|$ . Então  $M$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ .

Demonstração. Seja  $E$  o espaço vetorial real normado onde  $|\phi * L| \subset |Sd^{n+1}(K * K) * L| \subset E$ . Então  $M \subset E \times E \times \mathbb{R}$ , e podemos definir uma aplicação  $H: M \rightarrow E \times E \times \mathbb{R}$  por  $H(S^m(v, 0, 0)) = (v, 0, n)$  para todo vértice  $v$  de  $\phi * L$  e por linearidade nos simplexes de  $Z_{\phi * id}^{\infty}$ . Então  $H$  é um homeomorfismo sobre sua imagem  $H(M)$  e portanto  $M$  e  $H(M)$  têm o mesmo tipo de homotopia.

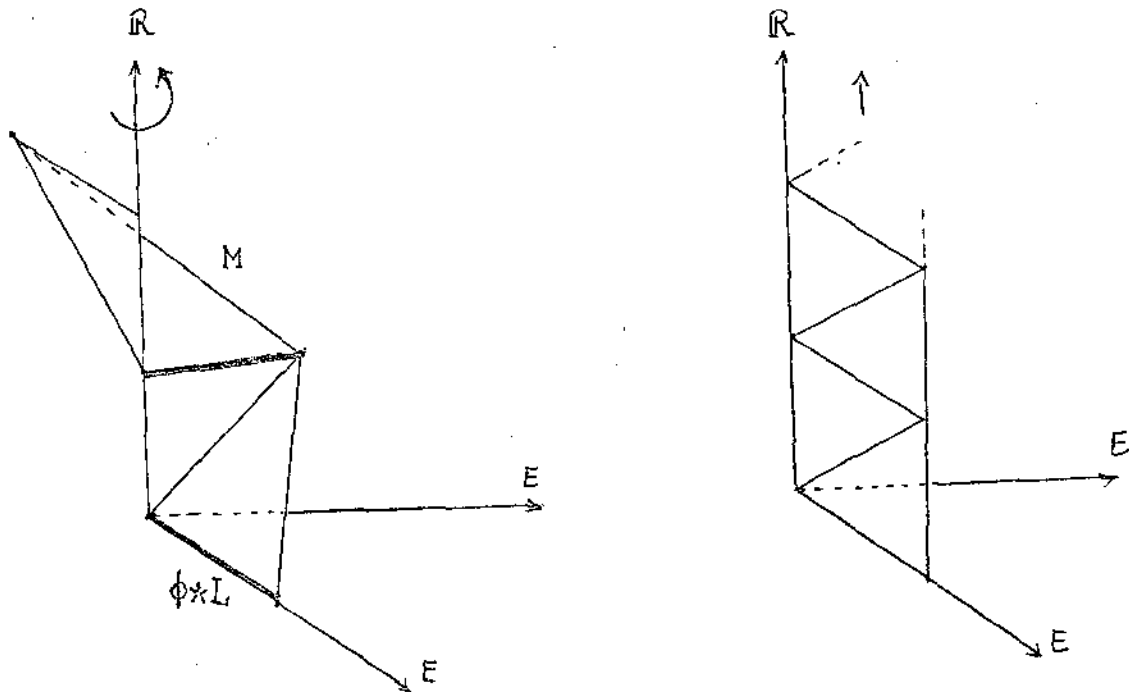
Sejam agora  $A = [U_0, \dots, U_m]$  um simplexo de  $\phi * L$  com  $U_0 < U_1 < \dots < U_m$  (a ordem é a induzida pela ordem nos vértices de  $Sd^{n+1}(K * K) * L$ ) e  $B$  um simplexo de  $Z_{\phi * id}^{\infty}$  gerado por  $A$ , isto é,  $B = [S^n(U_0, 0, 0), \dots, S^n(U_k, 0, 0), S^n(0, U_k, 1), \dots, S^n(0, U_m, 1)]$  para  $k, n \in \mathbb{N}$  e  $0 \leq k \leq m$ . Então

$$H(B) = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i (v_i, 0, n) + \sum_{j=k}^m t_j^! (v_j, 0, n+1) : \sum t_i + \sum t_j^! = 1, 0 \leq t_i, t_j^! \leq 1 \right\}$$

donde

$$\bigcup_{\substack{B \text{ gerado} \\ \text{por } A}} H(B) = \bigcup_{\substack{0 \leq k \leq m \\ n \in \mathbb{N}}} \{ \sum t_i (v_i, 0, n) + \sum t_j^! (v_j, 0, n+1) \} = A \times \{0\} \times \mathbb{R}$$

$$\text{Portanto } H(M) = \bigcup_{A \in \phi * L} (Ax\{0\} \times \mathbb{R})$$



A aplicação  $F: H(M) \times I \rightarrow H(M)$  dada por  $F((v, 0, t), \tau) = (v, 0, t + \tau)$  está bem definida e é uma homotopia entre a identidade de  $H(M)$  e uma retração de  $H(M)$  sobre  $|(\phi * L) * \phi| \approx |L|$ . Então  $H(M)$  tem o mesmo tipo de homotopia de  $|L|$ . Portanto  $M$  tem o mesmo tipo que  $|L|$ .

(7.1.10) Teorema. Sejam  $r$  um número natural que não é uma potência de um primo e  $L$  um complexo simplicial finito (que em particular pode ser vazio). Então existem um complexo simplicial infinito, com quantidade enumerável de vértices, localmente finito, contrátil e de dimensão maior do que ou igual a 4; e uma ação simplicial de  $Z_r$  sobre este complexo cujo conjunto de

pontos fixos tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$  (se  $L=\emptyset$  a ação não tem pontos fixos).

Demonstração. Basta tomar o complexo simplicial  $Z^\infty$  construído em (7.1.5), a ação gerada pela aplicação  $T_3: Z^\infty \rightarrow Z^\infty$  construída em (7.1.7). Por (7.1.8) e (7.1.9), o conjunto dos pontos fixos da ação tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ .

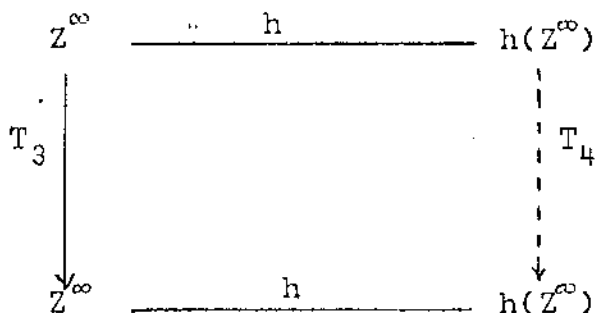
(7.1.11) Tomando  $L=\emptyset$  vemos que (7.1.10) fornece um exemplo de um espaço triangulável e contrátil e de uma aplicação contínua  $h: E \rightarrow E$  (a saber  $E=|Z^\infty|$  e  $h=T_3$ ) sem pontos fixos. Portanto, a consequência do teorema do ponto fixo de Lefschetz mencionada em (6.3.6) também deixa de ser válida se, mantendo as hipóteses de triangulabilidade (localmente finita) e contratibilidade sobre  $E$ , admitimos que  $E$  seja não compacto.

## 7.2. Ações $C^\infty$ de Grupos Cíclicos sobre Variedades $C^\infty$ .

(7.2.1) Conservamos as notações de (7.1.10). Seja  $\#(A)$  a cardinalidade de um conjunto  $A$  e  $k=\#(\text{vértices de } Sd^{n+1}(K*K) + \#(\text{vértices de } L))$ .

Por (5.2.5) existem uma estrutura simplicial em  $\mathbb{R}^{2k-1}$  e um mergulho linear  $h: Z^\infty \rightarrow \mathbb{R}^{2k-1}$  que mergulha a  $Z^\infty$  como um subcomplexo dessa estrutura simplicial. Então  $h: Z^\infty \rightarrow h(Z^\infty)$  é uma aplicação simplicial que é um homeomorfismo e portanto  $h^{-1}: h(Z^\infty) \rightarrow Z^\infty$  é também uma aplicação simplicial (Ver(1.1.30)).

Seja agora  $T_4: h(Z^\infty) \rightarrow h(Z^\infty)$  a única aplicação que torna comutativo o diagrama:



Então (a)  $T_4$  é simplicial pois  $T_3$ ,  $h$  e  $h^{-1}$  são simpliciais.

(b)  $T_4$  é homeomorfismo periódico, de período  $r$ , pois  $T_3$  o é e  $h$  é homeomorfismo.

(c)  $\text{Fix}(T_4) = h(\text{Fix}(T_3))$ , e como  $h$  é um homeomorfismo e  $\text{Fix}(T_3)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$  (Ver (7.1.10)), então  $\text{Fix}(T_4)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ .

(d)  $|h(Z^\infty)|$  é contrátil pois  $|Z^\infty|$  é contrátil (Ver(7.1.5)).

(7.2.2) Proposição. Sejam  $r, k$  e  $T_4$  como em (7.2.1). Consideremos em  $\mathbb{R}^{r \cdot (2k-1)} = \mathbb{R}^{2k-1} \times \dots \times \mathbb{R}^{2k-1}$  (o produto cartesiano  $r$  vezes) a estrutura simplicial dada pela primeira subdivisão bariocêntrica da decomposição celular de  $\mathbb{R}^{r \cdot (2k-1)}$ , cujas células são  $A_1 \times \dots \times A_r$ , onde  $A_1, \dots, A_r$  são simplexes de  $\mathbb{R}^{2k-1}$ . Então a aplicação  $\phi: \text{Sd}(h(Z^\infty)) \rightarrow \mathbb{R}^{r \cdot (2k-1)}$  definida por  $\phi(x) = (x, T_4(x), \dots, T_4^{r-1}(x))$  é simplicial e um homeomorfismo sobre um subcomplexo contrátil  $P$  de  $\mathbb{R}^{r \cdot (2k-1)}$ .

Demonstração. Obviamente  $\phi$  é um homeomorfismo sobre sua imagem pois cada coordenada é um homeomorfismo sobre sua imagem. Mostremos então que  $\phi$  é uma aplicação simplicial. Como as

$T_4^j: h(Z^\infty) \rightarrow h(Z^\infty)$  ( $0 \leq j \leq r-1$ ) são aplicações simpliciais e homeomorfismos, as  $T_4^j: Sd(h(Z^\infty)) \rightarrow Sd(h(Z^\infty)) \subset Sd(\mathbb{R}^{2k-1})$  são aplicações simpliciais (Ver (1.1.22)) e portanto são lineares em cada simplexo de  $Sd(h(Z^\infty))$ . Se  $A_1, \dots, A_r$  são simplexos de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$  então  $b(A_1 \times \dots \times A_r) = (b(A_1), \dots, b(A_r))$  (Ver (1.2.6)) e como  $T_4$  é uma aplicação simplicial injetora  $T_4(b(A)) = b(T_4(A))$  para  $A \in Sd(h(Z^\infty))$  (Ver (1.1.21)). Daí, para cada vértice  $b(A)$  de  $Sd(h(Z^\infty))$  temos  $\Phi(b(A)) = (b(A), T_4(b(A)), \dots, T_4^{r-1}(b(A)))$

$$(b(A)) = (b(A), T_4(b(A)), \dots, T_4^{r-1}(b(A)))$$

$$= (b(A), b(T_4(A)), \dots, b(T_4^{r-1}(A)))$$

$$= b(A \times T_4(A) \times \dots \times T_4^{r-1}(A)) .$$

Mas  $A \times T_4(A) \times \dots \times T_4^{r-1}(A)$  é uma célula de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$  e portanto  $b(A \times T_4(A) \times \dots \times T_4^{r-1}(A))$  é um vértice da estrutura simplicial considerada em  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$  (Ver (1.2.9)). Assim  $\Phi$  leva vértices em vértices.

Mostremos agora que  $\Phi$  leva simplexos de  $Sd(h(Z^\infty))$  em simplexos de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$ . Seja  $A = [b(B_0), \dots, b(B_m)]$  um simplexo de  $Sd(h(Z^\infty))$  onde  $B_0 < B_1 < \dots < B_m$ . Então

$$\Phi(A) = \Phi([b(B_0), \dots, b(B_m)]) = [\Phi(b(B_0)), \dots, \Phi(b(B_m))] ,$$

onde  $\Phi(b(B_i)) = b(B_i \times T_4(B_i) \times \dots \times T_4^{r-1}(B_i))$  ( $0 \leq i \leq m$ ). Como  $T_4$  é uma aplicação simplicial injetora,  $T_4$  preserva dimensões. Assim,

para  $B_i < B_{i+1}$ , temos

$$B_i \times T_4(B_i) \times \dots \times T_4^{r-1}(B_i) < B_{i+1} \times T_4(B_{i+1}) \times \dots \times T_4^{r-1}(B_{i+1})$$

Chamando  $C_i = B_i \times T_4(B_i) \times \dots \times T_4^{r-1}(B_i)$  ( $0 \leq i \leq m$ ) temos que  $\Phi([b(B_0), \dots, b(B_m)]) = [b(C_0), \dots, b(C_m)]$  com  $C_0 < C_1 < \dots < C_m$ , e como  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$  tem a primeira subdivisão baricêntrica,  $[b(C_0), \dots, b(C_m)]$  é um simplexo de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$  (Ver (1.2.10)). Daí segue que  $\Phi$  é simplicial e assim  $P = \Phi(\text{Sd}(h(Z^\infty)))$  é um subcomplexo de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$ . Além disso  $|P|$  é contrátil pois  $|\text{Sd}(h(Z^\infty))| = |h(Z^\infty)|$  é contrátil (Ver (7.2.1(d))) e  $\Phi$  é homeomorfismo.

(7.2.3) Proposição. Suponhamos que  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$  tem a estrutura simplicial definida em (7.2.2). Então a aplicação  $T_5: \mathbb{R}^{r(2k-1)} \rightarrow \mathbb{R}^{r(2k-1)}$  definida por  $T_5(x^1, \dots, x^r) = (x^2, \dots, x^r, x^1)$  é uma aplicação simplicial que é um autohomeomorfismo periódico, de período  $r$ .

Demonstração. Obviamente  $T_5$  é um homeomorfismo linear de período  $r$ ; basta demonstrar então que  $T_5$  é uma aplicação simplicial. Por (1.2.6) vale

$$\begin{aligned} T_5(b(A_1 \times \dots \times A_r)) &= T_5(b(A_1), \dots, b(A_r)) = (b(A_2), \dots, b(A_r), b(A_1)) \\ &= b(A_2 \times \dots \times A_r \times A_1) \end{aligned}$$

Logo  $T_5$  leva vértices em vértices. Por outro lado, seja

$[b(C_0), \dots, b(C_m)]$  um simplexo de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$ , onde  $C_0 < C_1 < \dots < C_m$  são células de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$ . Então  $C_i = B_i^0 x \dots x B_i^r$  ( $0 \leq i \leq m$ ) onde  $B_i^q < B_j^q$  para  $i < j$ , e daí

$$\begin{aligned} T_5([b(C_0), \dots, b(C_m)]) &= [T_5(b(C_0)), \dots, T_5(b(C_m))] \\ &= [b(T_5(C_0)), \dots, b(T_5(C_m))] \end{aligned}$$

Mas  $T_5(C_i) = T_5(B_i^0 x \dots x B_i^r) = B_i^1 x \dots x B_i^r x B_i^0 <$

$$B_j^1 x \dots x B_j^r x B_j^0 = T_5(B_j^0 x B_j^1 x \dots x B_j^r) = T_5(C_j)$$

para  $j > i$ . Assim, por (12.10),  $[b(T_5(C_0)), \dots, b(T_5(C_m))]$  é um simplexo de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$ , donde  $T_5$  leva simplexos em simplexos. Finalmente  $T_5$  é linear nos simplexos, pois é linear em geral.

(7.2.4) Proposição. Seja  $T_5: \mathbb{R}^{r(2k-1)} \longrightarrow \mathbb{R}^{r(2k-1)}$  a aplicação construída em (7.2.3). Então

$$\text{Fix}(T_5) = \{(x, \dots, x) \in \mathbb{R}^{r(2k-1)} : x \in \mathbb{R}^{r(2k-1)}\}$$

e além disso  $\text{Fix}(T_5)$  é o espaço associado a um subcomplexo  $Q$  de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$ .

Demonstração. De fato,  $(x^1, \dots, x^r) \in \mathbb{R}^{r(2k-1)}$  é um ponto fixo de  $T_5$  se e só se

$$(x^1, \dots, x^r) = T_5(x^1, \dots, x^r) = (x^2, \dots, x^r, x^1)$$



o que acontece se e s $\bar{o}$  se  $x^1=x^2=\dots=x^r$ . Para demonstrar a segunda afirmação, basta tomar o subcomplexo Q de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$  formado pela primeira subdivisão baricêntrica do complexo simplicial cujos vértices são  $(v_i, \dots, v_i)$  (r componentes) e cujos simplexes são do tipo  $[(v_i, \dots, v_i), (v_{i+1}, \dots, v_{i+1})]$  onde  $v_i$  e  $v_{i-1}$  são tais que  $[v_i, v_{i+1}]$  é simplexo de  $\mathbb{R}^{2k-1}$ . Então  $Q = \text{Fix}(T_5)$ .

(7.2.5) Proposição. Sejam  $T_4$ ,  $\Phi$  e  $T_5$  definidas em (7.2.1), (7.2.2) e (7.2.3), respectivamente, e sejam  $P = \Phi(h(Z^\infty))$  e  $\Phi|_{h(Z^\infty)}$  a restrição de  $\Phi$  a  $h(Z^\infty)$ . Então  $T_{50}(\Phi|_{h(Z^\infty)}) = \Phi \circ T_4$  e  $T_5(|P|) = |P|$ .

Demonstração. Seja  $x \in |Sd(h(Z^\infty))|$ . Então

$$\begin{aligned} (T_{50}\Phi)(x) &= T_5(x, T_4(x), \dots, T_4^{r-1}(x)) = (T_4(x), \dots, T_4^{r-1}(x), x) \\ &= (T_4(x), \dots, T_4^{r-1}(x), T_4^r(x)) = \Phi(T_4(x)) = (\Phi \circ T_4)(x) \end{aligned}$$

Ainda

$$\begin{aligned} T_5(|P|) &= T_5(\Phi(|h(Z^\infty)|)) = (T_{50}\Phi)(|h(Z^\infty)|) = (T_{40}\Phi)(|h(Z^\infty)|) \\ &= \Phi(|h(Z^\infty)|) = |\Phi(h(Z^\infty))| = |P| \end{aligned}$$

(7.2.6) Proposição. A aplicação  $T_5|P:P \rightarrow P$  está bem definida, é simplicial e é um homeomorfismo periódico de período r. Além disso  $\text{Fix}(T_5|P)$  é o espaço associado a um subcomplexo  $P_1$  de P e tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ .

Demonstração. Por (7.2.5) a aplicação está bem definida e então vale a comutatividade do diagrama (onde  $\Phi$  e a aplicação de finida em (7.2.2))

$$\begin{array}{ccc}
 h(Z^\infty) & \xrightarrow{\Phi} & P = \Phi(h(Z^\infty)) \subset \mathbb{R}^{r(2k-1)} \\
 \downarrow T_4 & & \downarrow T_5|P \\
 h(Z^\infty) & \xrightarrow{\Phi} & P
 \end{array}$$

Por (7.2.1) e pela comutatividade do diagrama,  $T_5|P$  é simplicial e é um homeomorfismo periódico de período  $r$ . Pela comutatividade do diagrama vale  $\text{Fix}(T_5|P) = \Phi(\text{fix}(T_4))$  e como por (7.2.1)  $\text{Fix}(T_4)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$  então  $\text{Fix}(T_5|P)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ . Além disso  $\text{Fix}(T_5|P) = \text{Fix}(T_5) \cap |P|$ . Mas por (7.2.4),  $\text{Fix}(T_5) = |Q|$ , onde  $Q$  é um subcomplexo de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$ . Assim  $\text{Fix}(T_5|P) = |Q| \cap |P| = |Q \cap P|$  pois  $Q$  e  $P$  são ambos subcomplexos de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$ , o que também implica que  $P_1 = Q \cap P$  é subcomplexo de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$ .

(7.2.7) Teorema. Dados um número natural  $r$  que não é uma potência de um primo e um complexo simplicial finito  $L$ , existem uma variedade  $C^\infty$  (sem bordo)  $M$ , contrátil e de dimensão maior do que ou igual a 4, e uma ação  $C^\infty$  de  $Z_r$  sobre  $M$  cujo conjunto de pontos fixos temo mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ .

Demonstração. Consideremos a estrutura simplicial de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$  como em (7.2.2) e os subcomplexos  $P$ ,  $Q$  e  $P_1$  de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$ , construídos em (7.2.2), (7.2.4) e (7.2.6), respectivamente. Por

(1.1.29),  $Sd(P_1)$  é um subcomplexo total de  $Sd(Q)$  e por sua vez  $Sd(P)$  e  $Sd(Q)$  são subcomplexos totais de  $Sd(\mathbb{R}^{r(2k-1)})$ . Dessa forma a vizinhança regular  $M=N(Sd(P); Sd(\mathbb{R}^{r(2k-1)}))$  é um aberto de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$  (Ver (1.1.27)), e como  $|Sd(P)|$  é um retrato de deformação forte de  $M$  (Ver (2.1.10)),  $M$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $|Sd(P)|$ . Mas  $|Sd(P)|=|P|$  é contrátil (Ver (7.2.2)), logo  $M$  é contrátil. Assim  $M$  é uma variedade  $C^\infty$ , sem bordo, contrátil, de dimensão

$$r \cdot (2k-1) \geq 2k-1 \geq k$$

$$= \#(\text{vértices de } Sd^{n+1}(K*K)) + \#(\text{vértices de } L)$$

$$\geq \dim(Z^\infty) = 5 + \dim L \geq 4.$$

(Ver (7.2.1) e (7.1.5)).

Seja agora  $T_5$  a aplicação definida em (7.2.3). Por (1.1.27) temos

$$T_5(M) = T_5\left(\bigcup_{\substack{v \\ \text{vértice de} \\ Sd(P)}} St(v, Sd(\mathbb{R}^{r(2k-1)}))\right) = \bigcup_{\substack{v \\ \text{vértice de} \\ Sd(P)}} St(T_5(v), Sd(\mathbb{R}^{r(2k-1)})),$$

e como  $T_5$  é simplicial e também é um homeomorfismo tal que  $T_5(|P|) = |P|$ , vem que

$$T_5(M) = \bigcup_{\substack{w \\ \text{vértice de} \\ Sd(P)}} St(w, Sd(\mathbb{R}^{r(2k-1)})) = M$$

Dessa forma  $T_5|_M: M \rightarrow M$  é um difeomorfismo periódico, de período  $r$  (pois  $T_5$  é uma permutação e portanto um difeomorfismo e  $M$  é um aberto de  $\mathbb{R}^{r(2k-1)}$ ).

Além disso, por (7.2.4)

$$\begin{aligned} \text{Fix}(T_5|_M) &= \text{Fix}(T_5) \cap M = |Q| \cap N(\text{Sd}(P), \text{Sd}(\mathbb{R}^{r(2k-1)})) \\ &= |\text{Sd}(Q)| \cap \left\{ \bigcup_{\substack{v \\ \text{vértice de} \\ \text{Sd}(P)}} \text{St}^0(v, \text{Sd}(\mathbb{R}^{r(2k-1)})) \right\} \end{aligned}$$

Como  $P_1 = P \cap Q$ , se  $v$  é vértice de  $\text{Sd}(P)$  que não é vértice de  $\text{Sd}(P_1)$  então

$$|\text{Sd}(Q)| \cap \text{St}^0(v, \text{Sd}(\mathbb{R}^{r(2k-1)})) = \emptyset,$$

logo

$$\begin{aligned} \text{Fix}(T_5|_M) &= |\text{Sd}(Q)| \cap \left\{ \bigcup_{\substack{v \\ \text{vértice de} \\ \text{Sd}(P_1)}} \text{St}^0(v, \text{Sd}(\mathbb{R}^{r(2k-1)})) \right\} \\ &= \bigcup_{\substack{v \\ \text{vértice de} \\ \text{Sd}(P_1)}} \text{St}^0(v, \text{Sd}(Q)) = N(\text{Sd}(P_1), \text{Sd}(Q)). \end{aligned}$$

Mas  $|\text{Sd}(P_1)| = |P_1|$  é um retrato de deformação forte de  $N(\text{Sd}(P_1), \text{Sd}(Q))$ . Portanto  $\text{Fix}(T_5|_M)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $|P_1|$  que, por sua vez, tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$  (Ver (7.2.6)). Assim  $\text{Fix}(T_5|_M)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ .

Utilizando agora (3.1.5) e (3.1.8) deduzimos que  $T_5|_M$

induz uma ação  $C^\infty$  (pois  $T_5|M$  é  $C^\infty$ ) de  $Z_r$  sobre  $M$ , cujo conjunto de pontos fixos tem o mesmo tipo de homotopia que  $L$ .

### 7.3. Ações $C^\infty$ de Grupos Cíclicos sobre Espaços Euclidianos.

(7.3.1) Proposição. Sejam  $r$  um número natural que não é uma potência de um primo,  $n$  um número natural positivo,  $L$  um complexo simplicial finito e  $T_5|M: M \rightarrow M$  o gerador da ação construída em (7.2.7). Então a aplicação  $\text{idx}(T_5|M): \mathbb{R}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}^n \times M$ , definida por  $(\text{idx}(T_5|M))(x,y) = (x, (T_5|M)y)$  é um difeomorfismo periódico, de período  $r$ , cujo conjunto de pontos fixos tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ .

Demonstração. Que  $\text{idx}(T_5|M)$  é um difeomorfismo periódico, de período  $r$ , é trivial pois  $\text{id}$  e  $T_5|M$  são difeomorfismos e  $T_5|M$  é periódico de período  $r$ , por construção. Ainda

$$\text{Fix}(\text{idx}(T_5|M)) = \text{Fix}(\text{id}) \times \text{Fix}(T_5|M) = \mathbb{R}^n \times \text{Fix}(T_5|M),$$

e a aplicação contínua  $F: \mathbb{R}^n \times \text{Fix}(T_5|M) \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \text{Fix}(T_5|M)$ , definida por  $F(x,y,t) = (t.x, y)$  é uma retração de deformação forte de  $\mathbb{R}^n \times \text{Fix}(T_5|M)$  a  $\{0\} \times \text{Fix}(T_5|M)$ . Assim,  $\mathbb{R}^n \times \text{Fix}(T_5|M)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $\text{Fix}(T_5|M)$  que, por sua vez, tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$  (Ver (7.2.7)).

(7.3.2) Teorema. Sejam  $r$  um número natural que não é a potência de um primo e  $L$  um complexo simplicial finito (que em particular pode ser vazio). Então existem um número natural  $m$  e uma ação  $C^\infty$  de  $Z_r$  sobre  $\mathbb{R}^m$  cujo conjunto de pontos fixos tem

o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ . (Se  $L = \emptyset$  a ação não tem pontos fixos).

Demonstração. Seja  $\text{idx}(T_5 | M) : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow \mathbb{R}^n \times M$  o difeomorfismo periódico, de período  $r$ , construído em (7.3.1).  $\mathbb{R}^n$  é uma variedade de  $C^\infty$ , sem bordo, contrátil, de dimensão  $n \geq 1$  e  $M$  é uma variedade  $C^\infty$ , sem bordo, contrátil, de dimensão maior do que ou igual a 4. (Ver (7.2.7)). Utilizaremos agora o seguinte resultado (Ver Stallings, Cor. 5.3, p. 487):

Se  $X$  e  $Y$  são variedades  $C^\infty$ , sem bordo, contráteis, de dimensões  $x$  e  $y$  respectivamente, onde  $x \geq 1$  e  $x+y \geq 5$ , então  $X \times Y$  é difeomorfa a  $\mathbb{R}^{x+y}$ .

Fazendo  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $Y = M$ ,  $x = n$ ,  $y = \dim M$  e  $m = n + \dim M$  temos  $m \geq 5$ , concluimos que existe um difeomorfismo  $h$  de  $\mathbb{R}^n \times M$  sobre  $\mathbb{R}^m$ .

Seja agora  $T_6$  a única aplicação que torna comutativo o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^n \times M & \xrightarrow{\text{idx}(T_5 | M)} & \mathbb{R}^n \times M \\
 \downarrow h & & \downarrow h \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{T_6} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Então, pela comutatividade do diagrama e as propriedades de  $\text{idx}(T_5 | M)$  (Ver (7.3.1)),  $T_6$  é um difeomorfismo periódico, de período  $r$ , e  $\text{Fix}(T_6) = h(\text{Fix}(T_5 | M))$ . Como  $h$  é difeomorfismo e  $\text{Fix}(T_5 | M)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ , então  $\text{Fix}(T_6)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ . Assim, por (3.1.5) e

(3.1.8),  $T_c$  gera uma ação  $C^\infty$  de  $Z_r$  sobre  $\mathbb{R}^m$  cujo conjunto de pontos fixos tem o mesmo tipo de homotopia que  $|L|$ .

(7.3.3) Um caso particular de um dos célebres resultados obtidos por P.A. Smith por volta de 1939 (Ver Smith) diz que se  $T$  é um difeomorfismo periódico de  $\mathbb{R}^m$ , de período  $p^n$  (onde  $p$  é um número primo), então  $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ . Smith conjecturou que todo difeomorfismo periódico de  $\mathbb{R}^m$  tem (pelo menos) um ponto fixo. O exemplo de Conner e Floyd desenvolvido neste trabalho, e o teorema de Stallings mencionado em (7.3.2), vieram (mais de 20 anos depois) a responder na negativa a conjectura de Smith. De fato, tomamos um número natural  $r$  que não é uma potência de um número primo, e suponhamos agora que  $L = \emptyset$ . Por (7.3.2) existem um número natural  $m \geq 5$  e um difeomorfismo periódico  $T_6$  de  $\mathbb{R}^m$ , de período  $r$ , tal que  $\text{Fix}(T_6) = \emptyset$ .

=====

=====

Bibliografia

G.E. Bredon, "Introduction to Compact Transformation Groups", Academic Press, New York, 1972.

A. Conde, "Introdução à Topologia Diferencial", 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

P.E. Conner e E.E. Floyd, "On the construction of periodic maps without fixed points", Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 354-360.

J. Dugundji, "Topology", Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

S. Eilenberg e N. Steenrod, "Foundations of Algebraic Topology", Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952.

E.E. Floyd, "Fixed points of compact abelian Lie groups of transformation", Ann. of Math. 66 (1957), 30-35.

L.C. Glaser, "Geometric Combinatorial Topology", Vol. I, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1970.

S.-T. Hu, "Homotopy Theory", Academic Press, Inc., New York, 1971.

E.L. Lima, "Introdução à Topologia Diferencial", IMPA, Rio de Janeiro, 1961.

C.R.F. Maunder, "Algebraic Topology", Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.

J. Milnor, "Topology from the Differential Viewpoint", University of Virginia Press, Charlottesville, Va., 1965.

J.R. Munkres, "Elementary Differential Topology", Princeton University Press, Princeton, N.J., 1966.

P.A. Smith, "Fixed point theorems for periodic maps", Amer. J. Math. 63 (1941), 1-8.

E.H. Spanier, "Algebraic Topology", Mc-Graw-Hill Book Company, New York, 1966.



J. Stallings, "The piecewise-linear structure of Euclidean space",  
Proc. of Cambridge Philos. Soc. 58 (1962), 481-488.

J.W. Vick, "Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology",  
Academic Press, New York and London, 1973.

A.H. Wallace, "Algebraic Topology, Homology and Cohomology", W.A.  
Benjamin, Inc., New York, 1970.