SOBRE O PROBLEMA DE DIRICHLET N-DIMENSIONAL PARA EQUAÇÃO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM DOMÍNIOS COM FRONTEIRA SINGULAR

RODNEY CARLOS BASSANEZI

Tese de Doutorado
Apresentada À UNICAMP
no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
Para a obtenção do Grau de
Doutor em Matemática

CAMPINAS
1976

A minha família...

a quem devo mais do que

posso me expressar

PREFÁCIO

A todas as pessoas que efetivaram este trabalho, através de uma colaboração direta ou simplesmente por meio de incentivos, apresentamos nossos agradecimento, com destaque

ao Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrósio, nosso orientador, que nos proporcionou sempre os meios indispensáveis para atingir nosso objetivo;

ao Prof. Dr. Mario Miranda que nos propos tal problema durante suas conferências na UNICAMP em 1974, e nos estimulou a resolvê-lo;

ao Prof. Dr. Umberto Massari com quem trabalhamos e sem o qual dificilmente conseguiríamos transpor os obstáculos;

aos Professores Drs. Mario T. Teixeira e Ayrton Badelucci que nos iniciaram em Matemática e nos servem de modelo de dedicação e despreendimento.

aos Professores Ivam Resina e Ricardo Bacci que nos auxiliavam com sugestões oportunas.

ao Sr. Raul dos Santos por seu excelente trabalho de datilografia do manuscrito.

Campinas, 1976 Rodney C. Bassanezi

1 - INTRODUÇÃO

O problema clássico de Dirichlet para a equação das superficies mínimas consiste em:

"*Dado um aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e uma função* g *contínua sobre a fronteira* $\partial\Omega$ *de* Ω, *encontrar uma função* $u=u(x)$ *satisfazendo*

a) $u \in C^o(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$;

b) $Lu = \sum\limits_{h,k=1}^{n} [(1+|Du|^2)\delta_{hk} - D_h u\, D_k u] D_{hk}\, u = 0$ em Ω ;

c) $u(x) = g(x)$, $\forall x \in \partial\Omega$ ".

Aqui, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são pontos de $\mathbb{R}^n$,

$$Du = \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = (D_1 u, D_2 u, \ldots, D_n u),$$

$$|Du|^2 = \nabla^2 u = D_1^2 u + D_2^2 u + \ldots + D_n^2 u \qquad \text{e}$$

$$D_{hk} u = \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}$$

Se S é a classe das funções g definidas sobre $\partial\Omega$, o problema de Dirichlet é *bem posto para o dado na fronteira na classe* S se é univocante resolvido para toda $g \in S$.

Quando n=2, existe solução do problema de Dirichlet para toda $g \in C^o(\partial\Omega)$ desde que Ω seja convexo - A prova deste resultado foi obtida sucessivamente por Bernstein (1910), Haar (1927), J. Douglas (1930) e o principal teorema por Radó(1) (1930). Em

(1) T. Radó - "The problem of the last area and the problem of Plateau". Math. Zeit. (32), 1930

1965, Finn[2] mostrou que para todo domínio Ω não-convexo de $\mathbb{R}^2$ existe um dado contínuo g para o qual o problema não tem solução.

Assim, para n=2 o problema de Dirichlet é bem posto para dados contínuos arbitrários se, e somente se, Ω é convexo.

Em dimensão maior que 2, pensou-se inicialmente, que a condição natural para que o problema de Dirichlet fosse bem posto também seria a convexidade de Ω. Gilbarg[3] e Stampacchia[4] (1963) mostraram que o problema tem solução para domínio Ω estritamente convexo (isto é, com curvaturas principais positivas) com fronteira $\partial\Omega$ suave.

Em 1968, Jenkins e Serrin[5] provaram que a convexidade do domínio não é uma generalização apropriada da situação bidimensional, mas que a *curvatura média* da fronteira é o ponto fundamental, mais especificamente: "*Se Ω é um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$ e $\partial\Omega \in C^2$, então o problema de Dirichlet para equação das superfícies mínimas é bem posto para dados g na classe $C^2(\partial\Omega)$ se, e somente se, a curvatura média de $\partial\Omega$ é não-negativa em todo $x \in \partial\Omega$*".

---

(2) R. Finn - "Remarks relevant to minimal surfaces and to surfaces of constant mean curvature" - J.D'Analyse. Math. (14), 1965. Teor. 4 e Teor. 4a, pp. 145 a 148.

(3) D. Gilbarg - "Boundary value Problems for non linear elliptic equations in n variables", Univ. of Wiscounsin Press, 1963.

(4) G. Stampacchia - "On Some Regular Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations". Comm. Pure. Appl. Math. (16), 1963. pp. 383-421.

(5) H. Jenkins e J. Serrin - "The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimension". J. Reine Angew. Math., (229) - 1968. pp. 170-187.

— Miranda(6), em 1971, usando a formulação variacional do problema de Dirichlet e a Teoria dos Perímetros, enfraqueceu a hipótese de regularidade sobre $\partial\Omega$, mostrando que o problema tem solução única com $\partial\Omega$ *lipschitziana* e Ω *localmente pseudo-convexo*. Esta hipótese é uma generalização da curvatura média não-negativa, no caso em que a fronteira é apenas lipschitiziana.

O objetivo deste nosso trabalho é resolver o problema de Dirichlet para Equação das Superfícies mínimas em domínios limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ localmente pseudo-convexos sem a hipótese de que $\partial\Omega$ seja lipschitiziana. Tal resultado, demonstrado no parágrafo 5, pode ser obtido com o auxílio de um Princípio de Máximo (§4, Teor. 4.1) que dispensa a hipótese da fronteira $\partial\Omega$ ser lipschitziana; O Princípio de Máximo Forte Generalizado, como o chamamos, foi demonstrado à luz de alguns resultados obtidos por Miranda(7) em 1975 e resultados clássicos da Teoria dos Perímetros.

O parágrafo 2 contém a generalização do conceito de área introduzido por Miranda e que está intimamente relacionado com o perímetro do conjunto associado (Teor. 3.5), assim resolvemos por bem colocar neste trabalho um resumo dos principais resultados da Teoria (§§ 2 e 3).

---

(6) M. Miranda - "Un Principio di Massimo forte per le frontiere...". Rend. Sem. Mat. Un. Padova, Vol. XLV, 1971. pp. 355-366.

(7) ———— - "Superfice Minime Illimitate", a ser publicado in Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa.

2 - MEDIDA DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

O estudo de superfícies de curvatura média $H=0$ no espaço euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$, que têm representação não-paramétrica $u = u(x)$, é equivalente ao estudo das soluções da equação elítica quase-linear:

$$(1) \qquad \sum_{h,k=1}^{n} \left[(1+|Df|^2)\delta_{kh} - D_h f\, D_k f\right] D_{hk} f = 0 \quad .$$

Lagrange observou que soluções de (1) em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ têm a propriedade variacional importante que é a de minimizar o funcional

$$\int_\Omega \sqrt{1+|Df|^2}\, dx \qquad \text{com} \qquad f\colon \Omega \to \mathbb{R} \ ,$$ onde a integral exprime a medida do conjunto

$$\operatorname{graf}_\Omega f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \ , \quad x \in \Omega\} \quad .$$

Definição 2.1 - Chamaremos *medida do gráfico de* f e indicaremos por $|\operatorname{graf}_\Omega f|$ ao valor da integral, isto é,

$$|\operatorname{graf}_\Omega f| = \int_\Omega \sqrt{1+|Df|^2}\, dx \quad , \quad f \in C^1(\Omega) \quad .$$

A definição 2.1 foi generalizada por Lebesgue no caso em que $f \in C^0(\Omega)$;

Definição 2.1' - (Área de Lebesgue)

$$|\mathrm{graf}_\Omega f| = \inf\{\min \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \sqrt{1+|Df_n|^2}\, dx;\ f_n \in \mathrm{Lip}(\bar{\Omega}) \text{ e } f_n \to f \text{ uniformemente em } \bar{\Omega}\}.$$

Obs: $|\mathrm{graf}_\Omega f|$ é *semicontínuo inferiormente* em relação à convergência uniforme, isto é, se

$$f_n \to f \text{ uniformemente} \Rightarrow |\mathrm{graf}_\Omega f| \leq \min \lim_{n\to\infty} |\mathrm{graf}_\Omega f_n| .$$

Definição 2.2 - f tem *gráfico de medida mínima sobre* Ω se

$$|\mathrm{graf}_{\mathrm{spt}\, g} f| \leq |\mathrm{graf}_{\mathrm{spt}\, g} (f+g)| \quad , \forall g \in C_0^1(\Omega) \quad ;$$

Quando $|\mathrm{graf}_\Omega f| < +\infty$ esta definição é equivalente a

$$|\mathrm{graf}_\Omega f| \leq |\mathrm{graf}_\Omega (f+g)| \quad , \forall g \in C_0^1(\Omega) \ .$$

Proposição 2.1 -"*Se* $f \in C^2(\Omega)$, f *tem gráfico de medida mínima em* Ω *se, e somente se,*

$$\mathrm{div}\left(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right) = 0 \text{ "}$$

Prova: ($\Longrightarrow$) Para todo $t \in \mathbb{R}$, seja

$$(1) \quad \phi(t) = \int_\Omega \sqrt{1+|D(f+tg)|^2}\, dx \ , \ g \in C_0^1(\Omega) \quad ;$$

Como f tem gráfico de medida mínima, $\phi(t)$ tem mínimo para $t=0$ e portanto $\phi'(0) = 0$; Agora,

$$(2) \quad \phi'(t) = \int_\Omega \frac{D(f+tg).Dg}{\sqrt{1+|D(f+tg)|^2}}\,dx \quad \Longrightarrow$$

$$(3) \quad \phi'(0) = \int_\Omega \frac{Df.Dg}{\sqrt{1+|Df|^2}} = 0\ , \quad \forall g \in C_o^1(\Omega),\ \text{ou seja,}$$

a $1^{\underline{a}}$ *Variação de medida do gráfico de* f *é nula* - Este fato implica, graças a alguns trabalhos clássicos de Morrey[8] e Hopf, que f é *analítica* sobre Ω, isto é, $f \in C^{\omega}(\Omega)$.

Aplicando o Teorema de Green em (3), podemos escrever:

$$(4) \quad -\int_\Omega g(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{1+\sum(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2}}\right) dx = 0\ , \quad \forall g \in C_o^1(\Omega)\ ,$$

e portanto

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})^2}}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right) = 0\ , \quad \forall x \in \Omega\ .$$

Obs: A equação (5) é denominada *equação das superfícies mínimas* ou *Equação de Euler.*

$\Longleftarrow$ Reciprocamente, suponhamos que

$$\operatorname{div}\left(\frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right) = 0 \quad \text{em } \Omega\ ;$$

---

(8) C.B. Morrey Jr. - "Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations and Related Topics". Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1960

É claro que $\emptyset'(0) = 0$ e para concluir a prova resta mostrar a convexidade de $\emptyset(t)$:

$$\emptyset''(t) = \int_\Omega \Big[\frac{Dg.Dg}{\sqrt{1+|D(f+tg)|^2}} - \frac{[D(f+tg).Dg]^2}{(1+|D(f+tg)|^2)^{3/2}} \Big] dx =$$

$$= \int_\Omega \{ |Dg|^2 \left[1+|D(f+tg)|^2\right] - \left[D(f+tg).Dg\right]^2 \} (1+|D(f+tg)|^2)^{-3/2} dx$$

Portanto,

$$\emptyset''(t) \geq \int_\Omega |Dg|^2 (1+|D(f+tg)|^2)^{-3/2} dx \geq 0 \ , \ \forall g \in C^1_o(\Omega).$$

Logo, $\emptyset(t) = |\mathrm{graf}(f+tg)|$ é uma função *estritamente convexa*;

cqd.

Definição 2.3 - *Medida do gráfico de uma função* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ -

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $a(x)$ uma função vetorial $a(x) = (a_o(x), \ldots, a_n(x))$ contínua em Ω juntamente com suas derivadas primeiras e com suporte compacto em Ω.

Para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, definimos (9)

(9) Esta definição de área generalizada é dada por M. Miranda em "Superfici Cartesiane Generalizzate ed insiemi di Perimetro finito sui Prodotti Cartesiani" Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa - 1964.

$$(7)\quad |\mathrm{graf}_\Omega f| = \sup_a\Big\{\int_\Omega \Big[a_o(x) + f \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}\Big] dx \;;$$

$$;\; a \in \Big[C_o^1(\Omega)\Big]^{n+1} \;,\; |a| \leq 1 \quad \forall x \in \Omega\Big\} .$$

Esta definição de medida do gráfico de uma função generaliza as demais. Coincide com a integral

$$\int_\Omega \sqrt{1+\sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\Big)^2}\, dx \;,\text{ no caso em que } f \in C^1(\Omega).$$

Um pouco mais trabalhoso[10] é verificar que, no caso em que $f \in C^o(\Omega)$, a definição 3 coincide com a definição de Lebesgue, (Def. 2.1').

Definição 2.4 - Uma função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tem *gráfico de medida finita* se

$$|\mathrm{graf}_\Omega f| < +\infty \;.$$

Ésta definição equivale às n+1 condições:

$$7')\quad \begin{cases} \sup\Big\{\displaystyle\int_\Omega f(x)\, \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}\, dx \;;\quad a_i \in C_o^1(\Omega),\ |a_i| \leq 1\ \forall x \in \Omega\Big\} < +\infty , \\ \qquad i = 1,2,\ldots,n \;. \\ \mathrm{med}(\Omega) < +\infty \;. \end{cases}$$

---

(10) cf. [13], Teorema 1.8, pp. 522-524.

Pelo Teorema de Riesz, sobre representação do funcionais lineares contínuos, as n primeiras condições de (7) equivalem à existência de n medidas relativas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ com variação total finita sobre Ω[11], tais que

$$(8) \qquad \int_\Omega f(x) \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i} \, dx = - \int_\Omega a_i(x) \, d\mu_i(x) \quad , \ \forall a_i \in C_o^1(\Omega) \ -$$

Dizemos que as μ_i são as *derivadas primeiras de* f, no sentido das distribuições, e escrevemos $\mu_i = D_i f$, $i=1,\ldots,n$.

Portanto, podemos dizer que f tem gráfico de medida finita sobre Ω se:

Med $\Omega < +\infty$ e existem n medidas relativas de variações totais finitas sobre Ω , $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, verificando (8).

Definição 2.5 - Diremos que $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tem *gráfico de medida mínima* se vale:

$$\begin{cases} |\mathrm{graf}_\Omega f| < +\infty \\ |\mathrm{graf}_\Omega f| < |\mathrm{graf}_\Omega (f+g)| \quad , \quad \forall g \in L_o^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Um resultado fundamental sobre a regularidade de funções que têm gráfico de medida mínima é o seguinte:

---

(11) Uma medida relativa com variação total finita sobre Ω é uma função real definida sobre os borelianos de Ω e completamente aditiva.

Teorema 2.1 - "*Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e limitado, se* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tem gráfico de medida mínima finita sobre* Ω, *então* f *é analítica em* Ω"

Para a demonstração deste teorema se utiliza a majoração do gradiente das superfícies minimais (12) e resultados de regularidade para fronteiras minimais (13).

3 - CONJUNTO DE PERIMETRO LOCALMENTE FINITO

Apontaremos aqui alguns resultados clássicos da Teoria dos Perímetros (14), que são fundamentais para a resolução do problema de Dirichlet para Equações das Superfícies mínimas, quando se utiliza o método variacional (15).

Considerações Gerais:

— Indicamos por $A \Delta B$ a *diferença simétrica* entre dois conjuntos A e B, isto é,

$$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$$

— B é *relativamente compacto em* A, se $B \subset A$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $\bar{B}$ é compacto com $\mathrm{dist}(B, \partial A) > 0$, onde ∂A é a fronteira topológica de A. Denotamos por $B \subset\subset A$.

---

(12) E. Bombieri, E. De Giorgi, M. Miranda - "Una Maggiorazione a priori..." - Arch. Rat. Mec. Analysis, Vol. 32, 1969.

(13) E. De Giorgi - "Frontiere Orientate di Misura Minima" - Sem. Mat. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1960-61.

(14) E. De Giorgi - "Su una teoria generale della misura..." Ann. Di Mat. Pura Appl., Vol. 36, serie IV, 1954.

(15) M. Miranda - "Distribuzioni aventi derivale misure..." Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Vol 18, 1964.

— Seja $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de E e

$$\alpha: \mathcal{F} \longrightarrow [0,+\infty]$$

dizemos que $B \subseteq E$ é *α-mensurável* (ou mensurável segundo Carathéodory) se para todo $F \in \mathcal{F}$ tem-se

$$\alpha(F) = \alpha(F \cap B) + \alpha(F - B) \quad .$$

— Seja (B_h) uma família de abertos mensuráveis, dizemos que (B_h) *converge a um conjunto* B *em* $L^1(A)$, e escrevemos $B_h \longrightarrow B$ em $L^1(A)$, se

$$\lim_{h\to+\infty} \text{med}\left[(B_h \Delta B) \cap A\right] = 0 \text{ , ou seja, se}$$

$$\lim_{h\to+\infty} \int_\Omega |\phi_{B_h}(x) - \phi_B(x)|\,dx = 0 \;,$$ onde $\phi_B(x)$ é a função característica do conjunto B.

— (B_h) *converge a* B *em* $L^1_{loc}(A)$ se para todo $K \subset\subset A$, $B_h \longrightarrow B$ em $L^1(K)$.

Neste caso, escrevemos

$$B_h \longrightarrow B \text{ em } L^1_{loc}(A).$$

— Se $\lim_h \phi_{B_h}(x) = \phi_B(x)$, indicamos simplesmente por

$$B_h \longrightarrow B$$

Definição 3.1 - Seja A um aberto de $\mathbb{R}^n$ e B um boreliano de $\mathbb{R}^n$, chamamos *perímetro de* B *em* A e denotamos por $P(B,A)$ o seguinte:

$$P(B,A) = \sup_g \{ \int_A \phi_B(x) \operatorname{div} g(x)dx \; ; \; g \varepsilon \left[C_o^1(A) \right]^n \text{ e } |g| \leq 1 \; , \; \forall x \varepsilon A \}$$

Obs: $P(B, \mathbb{R}^n)$ será indicado simplesmente por $P(B)$ e é denominado *perímetro de B*.

Proposição 3.1 - "*Se para todo* $K \subset\subset A$ *tem-se* $P(B,K) < +\infty$, *então a função* $\phi_B(x)$ *admite derivada medida e vale*

$$P(B,K) = \int_K |D\phi_B| \text{"} \quad .$$

$\int_K |D\phi_B|$ é a variação total da medida vetorial $\alpha_i = D_i\phi_B(x)$.

Neste caso dizemos que B tem *perímetro localmente finito em A*.

Proposição: 3.2 - "*Se* $\operatorname{med}\left[(B \Delta E) \cap K\right] = 0$, *então*

$$\int_K |D\phi_B| = \int_K |D\phi_E| \text{"}$$

Em particular, se $\operatorname{med}(B \cap K) = 0$, então

$$\int_K |D\phi_B| = 0$$

Proposição 3.3 - a) *Se* K *e* K' *são abertos disjuntos, então*

$$\int_{K \cup K'} |D\phi_B| = \int_K |D\phi_B| + \int_{K'} |D\phi_B|$$

b) *Se* K e K' *são abertos com* $K' \subset K$ *e* $\mathrm{dist}(B, K-K')>0$ *então*

$$\int_K |D\phi_B| = \int_{K'} |D\phi_B| \text{ "} .$$

Proposição 3.4 - (De Giorgi)(16) "*Se* $P(\Omega)<+\infty$ *e* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *então existe um boreliano* $\partial^*\Omega\subset\partial\Omega$ *e para todo* $x\in\partial^*\Omega$ *existe* $\nu(x)\in\mathbb{R}^n$ *com* $|\nu(x)| = 1$ *tal que*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, g(x)\,dx = \int_{\partial^*\Omega} g(x)\nu(x)\,dH_{n-1} \quad (17)$$

e portanto

$$H_{n-1}(\partial^*\Omega) = \int_{\mathbb{R}^n} |D\phi_\Omega| = P(\Omega)\text{"}$$

O conjunto $\partial^*\Omega$ é chamado *fronteira reduzida de* Ω .

Teorema 3.1 - (compacidade)(18) "*Seja* (B_h) *uma família de conjuntos satisfazendo*

$$\int_K |D\phi_{B_h}| \leq \sigma(K) < +\infty \;, \; \forall K\subset\subset\Omega, \; \Omega \textit{ aberto de } \mathbb{R}^n .$$

---

(16) E. De Giorgi - "Su una teoria generale..."

(17) A medida de Hausdorff k-dimensional em $\mathbb{R}^n$, $0<k\leq n$ é definida por

$$H_k(F) = 2^{-k}\omega_k \lim_{\rho\to 0^+} \inf\{\sum_{h=1}^{\infty} (\mathrm{diam}\, F_h)^k;\ \bigcup_{h=1}^{\infty} F_h \supset F \text{ e } \mathrm{diam}\, F_h<\rho\};$$ H_k restrita aos borelianos é completamente aditiva.

(18) A prova deste teorema é baseada no teorema clássico de Ascoli-Arzelá, cf. [12], Teorema 1.6, pp. 7-8.

Então existe uma subfamília (B_{h_j}) *tal que*

$$B_{h_j} \longrightarrow B \text{ em } L^1_{loc}(\Omega)" \,.$$

Teorema 3.2 -(Semicontinuidade). "*Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* (B_h) *uma família de conjuntos tal que*

$$B_h \longrightarrow B \text{ em } L^1_{loc}(\Omega) \,.$$

Então,

$$\int_\Omega |D\phi_B| \leq \liminf_h \int_\Omega |D\phi_{B_h}| \text{ "} \,.$$

A medida do gráfico de uma função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ pode ser calculada através do perímetro de um conjunto associado, mais precisamente, temos:

Proposição 3.5 - "*Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$|\text{graf}_\Omega f| < +\infty \,. \quad \textit{Se}$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \,;\, x \in \Omega \;\; e \;\; y < f(x)\} \,, \textit{ então vale}$$

$$|\text{graf}_K f| = \int_{K \times \mathbb{R}} |D\phi_E| \quad, \forall K \subset\subset \Omega. \text{ "}$$

Definição 3.2 - Um conjunto E tem *fronteira de medida mínima em* $\Omega \times \mathbb{R}$, Ω *aberto de* $\mathbb{R}^n$, *se valem:*

a) $\int_K |D\phi_E| < +\infty$, $\forall K \subset\subset \Omega \times \mathbb{R}$;

b) $\int_K |D\phi_E| \leq \int_K |D\phi_M|$, $\forall K \subset\subset \Omega \times \mathbb{R}$, $\forall M$ com $M \Delta E \subset\subset K$.

Uma função $f: \Omega \to [-\infty, +\infty]$ é chamada *solução generalizada da equação das superfícies mínimas* sobre um aberto Ω, se f for mensurável segundo Lebesgue e o conjunto

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \; ; \quad x \in \Omega \text{ e } y < f(x)\}$$

tiver fronteira de medida mínima em $\Omega \times \mathbb{R}$.

Obs.: Os valores de uma tal função f podem ser modificados sobre um conjunto de medida nula sem que isto tenha influência na validade de a) e b) da definição 3.2. Portanto, as soluções generalizadas da equação das superfícies mínimas são consideradas definidas a menos de um conjunto de medida nula.

Assim, graças à possibilidade de se poder redefinir f, podemos supor que:

1) Se $\rho > 0$, $\text{med}[B_\rho(x,y) \cap E] = \text{med}\, B_\rho(x,y) \Longrightarrow (x,y) \in E$.

2) Se $\rho > 0$, $\text{med}[B_\rho(x,y) \cap E] = 0 \Longrightarrow (x,y) \notin E$.

Em relação à regularidade da fronteira de medida mínima, recordamos alguns resultados fundamentais:

Teorema 3.3 [19] - (De Giorgi): *"Se* E *é um conjunto de fronteira de medida mínima em um aberto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *e valem 1) e 2) para* E, *então existe um aberto* $A_o \subset A$ *tal que* $\partial E \cap A_o$ *é localmente gráfico de uma função analítica de (n-1)-variáveis, solução da equação das superfícies mínimas e*

$$H_{n-1}(A-A_o) = 0 \text{ "}$$

Nas mesmas hipóteses do Teorema de De Giorgi, Federer [20] em 1970 provou que

$$H_s(A-A_o) = 0 \quad , \forall \; s \text{ } \textit{real com} \text{ } s > n-8 .$$

A parte regular da fronteira de E, isto é, $A_o \cap \partial E$ é a fronteira reduzida de E.

No caso que nos interessa, ou seja, quando

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \in \Omega \quad e \quad y<f(x)\}$$

tem-se que o versor normal $\gamma(x,y)$ nos pontos $(x,y)\in\partial^*E$, orientado de modo "a sair" de E, forma com o eixo-y um ângulo não superior a $\pi/2$ e portanto tem-se

$\gamma_{n+1}(x,y) \geq 0$, onde $\gamma_{n+1}(x,y)$ é o cosseno de tal ângulo.

No que segue introduziremos alguns resultados obtidos por Miranda em 1975 [21] que serão úteis na demonstração do Princípio do Máximo Forte gereralizado (Teor. 4.1) do próximo capítulo.

Seja Ω_j uma sucessão não-decrescente de abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Consideremos (f_j) uma sucessão de soluções genera-

---

(19) cf. [4], Teorema 4, p. 17.

(20) H. Federer - "The singular sets of area minimizing..." Bull. Am. Math. Soc., 1970.

(21) M. Miranda - "Superfice minime illimitale" - a ser publicado.

lizadas da equação das superfícies mínimas, isto é,

$f\colon \Omega_j \to [-\infty,+\infty]$ e cada $E_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ x\in\Omega_j \text{ e } y<f_j(x)\}$

satisfaz: $\int_K |D\phi_{E_j}| < +\infty$, $\forall K \subset\subset \Omega_j \times \mathbb{R}$,

e $\int_K |D\phi_{E_j}| \leq \int_K |D\phi_M|$, $\forall K\subset\subset\Omega_j \times \mathbb{R}$, $\forall M$ com $M \Delta E_j \subset\subset K$.

Teorema 3.4 - *"Nas hipóteses acima, existe uma sucessão crescente de índices* $j(s)$ *e uma função* $f\colon\Omega \to [-\infty,+\infty]$ *solução generalizada da equação das superfícies mínimas tais que*

$$\lim_{s\to+\infty} f_{j(s)}(x) = f(x) \quad \textit{para quase todo } x \in \Omega \text{"}.$$

Demonstração: Cada $E_j = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1};\ x\in\Omega_j \text{ e } y<f(x)\}$ tem fronteira de medida mínima em $\Omega_j \times \mathbb{R}$, e portanto, se $x\in\Omega_j$ e $0<\rho<\mathrm{dist}(x,\partial\Omega_j)$ então,

$$H_n(\partial E_j \cap B_\rho(x,y)) = \int_{B_\rho} |D\phi_{E_j}| \leq (n+1)\omega_{n+1}\, \rho^n. \quad (22)$$

Portanto, podemos aplicar o teorema da compacidade (Teor. 3.1), o que implica que existe uma sequência crescente de inteiros e um conjunto E Lebesgue-mensurável tal que

---

(22) cf. [6], Teorema 2.7, p. 51.

ω_{n+1} indica a medida da bola unitária (n+1) dimensional e $H_{n+1}(\partial E_j \cap B_\rho)$ é a medida dimensionalde Hausdorff da fronteira de E_j em $B_\rho(x,y)$.

$$\lim_{s} \phi_{E_{j(s)}}(x,y) = \phi_E(x,y) \text{ , pqt}(x,y)\varepsilon\,\Omega \times \mathbb{R} \text{ .}$$

Definimos agora

$$A = \{(x,y)\varepsilon\,\Omega \times \mathbb{R} \;;\; \lim_{s} \phi_{E_{j(s)}}(x,y) = 1\}$$

$$B = \{(x,y)\varepsilon\,\Omega \times \mathbb{R} \;;\; \lim_{s} \phi_{E_{j(s)}}(x,y) = 0\}$$

A e B têm a seguinte propriedade:

Seja $t\,\varepsilon\,\mathbb{R}$ tal que $(x,t)\,\varepsilon\,E$, então existe $n\,\varepsilon\,\mathbb{N}$ com

$$\phi_{E_{j(s)}}(x,t) = 1 \quad \forall t>n \implies (x,t)\,\varepsilon\,E_{j(s)} \text{ e } t<f_{j(s)}(x)$$

$$\implies t \le \liminf_{s\to\infty} f_{j(s)}(x) \quad ;$$

e portanto,

$$\sup\,\{t\,\varepsilon\,\mathbb{R} : (x,t)\,\varepsilon\,A\} \le \liminf_{s\to\infty} f_{j(s)}(x) \text{ .}$$

Analogamente, em relação ao conjunto B se pode provar que

$$\inf\{t\,\varepsilon\,\mathbb{R}: (x,t)\,\varepsilon\,B\} \ge \limsup_{s} f_{j(s)}(x) \text{ .}$$

Seja agora $(x,t)\,\varepsilon\,E$ e $(x,\zeta)\,\varepsilon\,B$, então existe $s\,\varepsilon\,\mathbb{N}$ tal que

$$(x,t)\,\varepsilon\,E_{j(s)} \text{ e } (x,\zeta) \notin E_{j(s)} \implies t<f_{j(s)}(x)\le\zeta \;;$$

Portanto,

$$m(x)=\inf\{t\,\varepsilon\,\mathbb{R}:(x,t)\varepsilon B\} \ge \sup\{t\,\varepsilon\,\mathbb{R}:(x,t)\varepsilon A\} = M(x) \text{ .}$$

Nos pontos $x\varepsilon\Omega$ onde $m(x) = M(x)$ temos $\liminf_{s} f_{j(s)}(x) = \limsup_{s} f_{j(s)}(x)$ e portanto existe $\lim_{s\to\infty} f_{j(s)}(x)$ para estes valores de x.

Seja agora o conjunto

$$D = \{x \varepsilon \Omega \; : \; M(x) < m(x)\}$$

Do fato de

$H_{n+1}(\Omega \times \mathbb{R} - A \cup B) = 0$, segue-se que se $x \varepsilon D$ e $M(x) < t < m(x)$, então

$\lim_{s} \phi_{E_{j(s)}}(s)$ não existe $\Longrightarrow$ med(D) = 0 . Logo,

$f_{j(s)}(x)$ tem limite para quase todo $x \varepsilon \Omega$.

A propriedade de mínimo para fronteira, se mantém para o conjunto $E = \{(x,y) \varepsilon \mathbb{R}^{n+1} : x \varepsilon \Omega$ e $y < f(x)\}$ (23) e portanto f é uma solução generalizada da equação das superfícies mínimas, cqd.

Consideremos agora, os seguintes conjuntos:

$$P = \{x \varepsilon \Omega : \lim_{s} f_{j(s)}(x) = +\infty\}$$

$$N = \{x \varepsilon \Omega : \lim_{s} f_{j(s)}(x) = -\infty\}$$

$$G = \Omega - (\tilde{P} \cup \bar{N})$$

Tais conjuntos têm propriedades interessantes, senão vejamos:

---

(23) M. Miranda - "Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali" Rend. Sem. Mat. Padova, 1967. Teorema 3, pp. 244-250.

Proposição 3.6 - "*O conjunto* P *tem fronteira de medida mínima em* Ω *e satisfaz:*

$$\text{Se } x \in P \Longrightarrow \liminf_{\rho \to o^+} \rho^{-n} H_n(B_\rho(x) \cap P) > 0 \quad ;$$

$$\text{Se } x \in (\Omega - P) \Longrightarrow \liminf_{\rho \to o^+} \rho^{-n} H_n(B_\rho(x) - P) > 0\text{"}.$$

Obs: Mudando a sequência $f_{j(s)}$ na sequência $-f_{j(s)}$, o conjunto P é transformado no conjunto N e então, cada propriedade de P é também satisfeita por N.

— Se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^2$, então $\partial P \cap \Omega$ é a união de segmentos de reta.

— Se $x \in \Omega \cap \partial P \Longrightarrow \forall \rho > o$, $o < H_n(B_\rho(x) \cap P) < H_n(B_\rho(x))$ ou seja, a fronteira topológica de P coincide com sua fronteira essencial.

— $H_n[(\partial N \cup \partial P) \cap \Omega] = 0$

Proposição 3.7 - "*Seja* B *uma bola aberta de* $\mathbb{R}^n$ *e* $B \subset \Omega$. *Temos:*

a) Se $B \cap \partial P \cap \partial N = \emptyset$, *então existe um aberto* $G_B \subset B$ *tal que* $f(x) = \lim_s f_{j(s)}(x)$ *é uma função real analítica em* G_B *e solução da equação das superfícies mínimas em* G_B *com*

$$\partial E \cap (B \times \mathbb{R}) = \{(x, f(x)) : x \in G_B\}.$$

b) Se $B \cap \partial P \cap \partial N \neq \emptyset$, *então*

$$B \subset P \cup N \cup (\partial P \cap \partial N) \text{ e } (\partial E \cap B) \times \mathbb{R} = (\partial P \cap \partial N \cap B) \times \mathbb{R}$$

Os resultados precedentes podem ser resumidos no seguinte:

Teorema 3.5- "*Existe um aberto* $G \subsetneq \Omega$ *e uma função analítica* $f: G \to \mathbb{R}$, *solução da equação das superfícies mínimas tal que a sequência das superfícies mínimas* $\mathrm{graf}_{\Omega_{j(s)}} f_{j(s)}$ *converge à superfície mínima* $[(\partial P \cap \partial N \cap \Omega) \times \mathbb{R}] \cup \mathrm{graf}_G f$ *e cada cilindro do tipo* $B \times \mathbb{R}$, B *bola em* Ω, *pode interseccionar somente uma das superfícies* $(\partial P \cap \partial N \cap \Omega) \times \mathbb{R}$ *ou* $\mathrm{graf}_\Omega f$."

Observação: Se $x \in \partial G \cap \Omega$, então $(x,t) \notin \partial E$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Se $(x,t) \in E$, $\forall t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{y \to x} f(y) = +\infty$.

Se $(x,t) \notin E$, $\forall t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{j \to x} f(y) = -\infty$.

4 - PRINCÍPIO DO MÁXIMO FORTE GENERALIZADO

Domínios pseudo-convexos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteiras $\partial\Omega$ lipschitzianas generalizam o conceito de curvatura média não-negativa - Miranda, usando tal formulação, mostrou um Princípio de Máximo Forte Generalizado (24), onde o fato da fronteira ser lipschitziana é de importância fundamental em sua demonstração. Nosso objetivo aqui, é obter um resultado equivalente dispensando a hipótese da fronteira $\partial\Omega$ ser lipschitziana. Usaremos para tal alguns resultados recentes (§. 3) do próprio Miranda;

(24) cf. [17], pp. 357-359.

Definição 4.1 - Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é *pseudo-convexo* em um ponto $x_o \in \partial\Omega$, se existe um aberto A de $\mathbb{R}^n$ com $x_o \in A$, satisfazendo

$$\int_A |D\phi_\Omega| \leq \int_A |D\phi_{\Omega\cup E}| \quad , \forall E \subset\subset A \quad , \quad E \text{ mensurável e limitado.}$$

Ω é *localmente pseudo-convexo* se for pseudo-convexo em todos os pontos de $\partial\Omega$.

Observação: Os conjuntos localmente pseudo-convexos com fronteiras lipschitzianas podem ser considerados uma generalização dos conjuntos com curvatura média não-negativa:

De fato, suponhamos que Ω seja pseudo-convexo em $x_o \in \partial\Omega$ e exista um aberto $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ e uma função lipschitziana $f: B \to \mathbb{R}$ tal que o conjunto

$$\text{graf}_B f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \; ; \; x \in B \text{ e } y = f(x)\} \subset A \text{ (A aberto}$$

que contém x_o) onde

$$\Omega \cap A = \{(x,y) \in A \cap (B \times \mathbb{R}) \; , \; x \in B \quad \text{e} \quad y > f(x)\}$$

Temos que

$$(1) \qquad \int_A |D\phi_\Omega| \leq \int_A |D\phi_{\Omega\cup E}| \quad , \forall E \subset\subset A \quad ,$$

pois Ω é pseudo-convexo em x_o -

Por outro lado,

$$\int_A |D\phi_\Omega| = \int_B \sqrt{1+|Df|^2}\ dx = |graf_B f|$$

Logo, $\forall\phi \in C_o^1(B)$, $\phi \leq 0$ temos

$$\int_B \sqrt{1+|Df|^2}\ dx \leq \int_B \sqrt{1+|D(f+\phi)|^2}\ dx \text{ , e portanto}$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \int \frac{D_i f \,.\, D_i \phi}{\sqrt{1+|Df|^2}}\ dx \geq 0 \quad \forall\phi\varepsilon C_o^1(B) \ , \ \phi \leq 0 \ .$$

Devido à estrita convexidade do funcional da área, desigualdade (2) é equivalente à desigualdade (1).

Agora, no caso de $f \in C^2(B)$ então (2) implica que

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} D_i \frac{D_i f(x)}{\sqrt{1+|Df(x)|^2}} \geq 0 \ , \quad \forall x \in B.$$ (25)

A desigualdade (3) expressa a não-negatividade da curvatura média de $\partial\Omega \cap A$. Na notação vetorial escrevemos (3) de uma maneira mais simples:

$$\operatorname{div} \frac{Df}{\sqrt{1+|Df|^2}} \geq 0 \quad \text{em } B.$$

---

(25) Conforme demonstração da proposição 2.1 do parágrafo 2.

De uma maneira geral, temos que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aberto e limitado: Ω convexo $\Longrightarrow$ curvatura média de $\partial\Omega$ não-negativa $\Longrightarrow$ Ω localmente pseudo-convexo.

Entretanto, no caso em que n=2, estes conceitos são equivalentes. Não é ainda claro que para $2<n\leq 7$ exista conjunto localmente pseudo-convexo cuja fronteira não seja lipschitziana - Bombieri, De Giorgi e Giusti (26) demonstraram que o cone

$$E = \{x \in \mathbb{R}^8 : \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \sum_{i=5}^{8} x_i^2\}$$ tem fronteira de medida mínima em $\mathbb{R}^8$. Portanto, E é localmente pseudo-convexo, no entanto E não tem fronteira lipschitziana em x=0.

Princípio do Máximo forte Generalizado -

Teorema 4.1 - "*Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto pseudo-convexo em* $x_o \in \partial\Omega$. *Seja* A *um conjunto com fronteira mínima em uma bola aberta* $B_R(x_o)$ *de centro* x_o *e raio* R. *Suponhamos que*

$$A \cap B_R(x_o) \subset \bar{\Omega} \cap B_R(x_o) \quad com \quad x_o \in \partial A \quad .$$

Então, existe r *com* $o<r<R$ *tal que*

$$\partial A \cap B_r(x_o) = \partial\Omega \cap B_r(x_o)"$$

Para a demonstração deste teorema, necessitamos de alguns resultados precedentes:

---

(26) E. Bombieri - E. De Giorgi - E. Giusti - "Minimal cones and the Bernstein Problem" Inv. Math, 1969. Recentemente, Miranda obteve uma demonstração mais simples deste resultado - "Non linear solutions for the minimal surface equation in $\mathbb{R}^8$" - Rio de Janeiro, 1976.

Lema 1 - "*Seja* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *aberto e* E,L *conjuntos mensuráveis de* $\mathbb{R}^n$. *Então vale a seguinte desigualdade:*

$$\int_\Omega |D\phi_{E\cup L}| + \int_\Omega |D\phi_{E\cap L}| \leq \int_\Omega |D\phi_E| + \int_\Omega |D\phi_L| \text{"}$$

Prova: Existem sequências regularizantes (ϕ_h) e (ψ_h) com ϕ_h e $\psi_h \in C^1(\Omega)$, $\forall h$, tais que

$$\lim_{h\to\infty} \phi_h(x) = \phi_E(x) \quad \text{e} \quad \lim_{h\to\infty} \psi_h(x) = \phi_L(x) \quad \forall x\in\Omega \text{ ,}$$

satisfazendo

$$0 \leq \phi_h(x) \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \psi_h(x) \leq 1 \quad \text{e,}$$

$$\lim_{h\to\infty} \int_\Omega |D\phi_h(x)|dx = \int_\Omega |D\phi_E| \quad ; \quad \lim_{h\to\infty} \int_\Omega |D\psi_h(x)|dx = \int_\Omega |D\phi_L|$$ (27)

Temos que

$(\phi_h + \psi_h - \phi_h\, \psi_h)$ converge pontualmente a $\phi_{E\cup L}$ e

$(\phi_h\, \psi_h)$ converge pontualmente a $\phi_{E\cap L}$ em Ω ;

Logo, cf. Teor. 3.2 - Cap. 3, segue-se

$$\int_\Omega |D\phi_{E\cup L}| \leq \liminf_h \int_\Omega |D(\phi_h+\psi_h-\phi_h\, \psi_h)|dx$$

e

$$\int_\Omega |D\phi_{E\cap L}| \leq \liminf_h \int_\Omega |D(\phi_h\psi_h)|dx$$

---

(27) A construção de sequências regularizantes é clássica e resolvemos por bem colocá-la no parágrafo seguinte.

Como

$$|D(\phi_h+\psi_h-\phi_h\ \psi_h)| \leq (1-\phi_h)\ |D\psi_h| + (1-\psi_h)|D\phi_h|$$

e $\qquad |D(\phi_h\psi_h)| \leq \phi_h|D\psi_h| + \psi_h|D\phi_h|$, segue-se que

$$\int_\Omega |D\phi_{E\cup L}| + \int_\Omega |D\phi_{E\cap L}| \leq \int_\Omega |D\phi_E| + \int_\Omega |D\phi_L|$$

Lema 2 - "*Seja* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, *pseudo-convexo em* $x_o \in \partial\Omega$. *Então, existe uma bola aberta* $B_R(x_o)$ *e um conjunto* E *mínimo para o funcional*

$$\mathcal{F}_R(F) = \int_{B_R} |D\phi_F| + \int_{\partial B_R} |\phi_\Omega - \phi_F|\ dH_{n-1}$$

com $E\cap B_\rho(x_o) \subset \Omega\cap B_\rho(x_o)$, $\forall o<\rho<R$."

Prova. Do fato de Ω ser pseudo-convexo em $x_o\varepsilon\partial\Omega$, segue-se que existe $B_R(x_o)$ satisfazendo:

$$(1) \qquad \int_{B_R} |D\phi_\Omega| \leq \int_{B_R} |D\phi_{\Omega\cup F}| \quad , \quad \forall F\subset\subset B_R(x_o).$$

Consideremos agora a bola aberta $B_\rho(x_o)$, $\rho<R$. Então, existe E_o (boreliano de $B_\rho(x_o)$) mínimo do funcional

$$(2) \qquad \mathcal{F}_\rho(F) = \int_{B_\rho} |D\phi_F| + \int_{\partial B_\rho} |\phi_\Omega-\phi_F|dH_{n-1} \quad (28)$$

Assim, como E_o e Ω têm o mesmo traço em $\partial B_\rho(x_o)$, pode-

(28) cf. [16], Teorema 1, pp. 1-2.

mos escrever, usando (2):

$$(3) \qquad \int_{B_\rho} |D\phi_{E_o}| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_{E_o \cap \Omega}|$$

Por outro lado, usando o conjunto E_o em (1), vem

$$(4) \qquad \int_{B_\rho} |D\phi_\Omega| < \int_{B_\rho} |D\phi_{\Omega \cup E_o}|$$

As desigualdades (3) e (4) implicam que

$$(5) \qquad \int_{B_\rho} |D\phi_{E_o}| + \int_{B_\rho} |D\phi_\Omega| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_{E_o \cap \Omega}| + \int_{B_\rho} |D\phi_{E_o \cup \Omega}|, \forall \rho < R.$$

Agora, usando o Lema 1 juntamente com (5), podemos escrever:

$$(6) \qquad \int_{B_\rho} |D\phi_{E_o}| = \int_{B_\rho} |D\phi_{E_o \cap \Omega}|$$

Ou seja, o conjunto $E = E_o \cap \Omega$ minimiza também $\mathcal{F}_\rho$ e

$E \cap B_\rho(x_o) \subset \Omega \cap B_\rho(x_o)$, $\forall \rho < R$. cqd.

Lema 3 - "*Seja* Ω *um conjunto pseudo-convexo em* $x_o \in \partial\Omega$ *e* A *um conjunto com fronteira de medida mínima em* $B_R(x_o)$, *isto é*,

$$\int_{B_R} |D\phi_A| \leq \int_{B_R} |D\phi_F| \ , \ \forall F, F \Delta A \subset\subset B_R(x_o) \text{ e } x_o \in \partial A.$$

Então, para todo ρ *tal que* $o<\rho<R$, *existe um conjunto* E

mínimo do funcional

$$\mathscr{F}_\rho(F) = \int_{B_\rho} |D\phi_F| + \int_{\partial B_\rho} |\phi_\Omega - \phi_F| dH_{n-1} \quad ,$$

tal que $x_o \in \partial E \cap \partial\Omega$, $E \subset B_\rho(x_o) \cap \bar{\Omega}$ e $A \cap B_\rho(x_o) \subset E \cap B_\rho(x_o)$."

Prova: Seja $F' = (F \cap B(x_o)) \cup (A - B(x_o))$ com $\rho < R$.

Logo,

$F' \Delta A \subset\subset B_R(x_o)$ e portanto

$\int_{B_R} |D\phi_A| \leq \int_{B_R} |D\phi_{F'}|$, o que implica (29) em

$$\int_{B_R} |D\phi_A| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_F| + \int_{B_R - \bar{B}_\rho} |D\phi_A| + \int_{\partial B_\rho} |\phi_F - \phi_A| dH_{n-1} \implies$$

$$\int_{B_\rho} |D\phi_A| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_F| + \int_{B_\rho} |\phi_F - \phi_A| dH_{n-1} \text{ , } \forall \rho < R \text{ e } \forall F, F\Delta A \subset\subset B_R(x_o).$$

Portanto,

$$\int_{B_\rho} |D\phi_A| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_{A\cap E_1}| + \int_{\partial B_\rho} |\phi_{A\cap E_1} - \phi_A| dH_{n-1} \quad .$$

---

(29) cf. [9], Teorema do Traço, pp. 5.12 - 5.17 .

Considerando $E_1 = \Omega \cap E_o$ (do Lema 2), temos que A e $A \cap E_1$ têm o mesmo traço sobre $\partial B_\rho(x_o)$, logo

$$(1) \qquad \int_{B_\rho} |D\phi_A| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_{A\cap E_1}|$$

Por outro lado, como E_1 é mínimo para $\mathcal{F}_\rho$ (cf. Lema 2), segue-se que

$$(2) \qquad \int_{B_\rho} |D\phi_{E_1}| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_{A\cup E_1}|$$

Agora, usando (1),(2) e a desigualdade do Lema 1, vem

$$\int_{B_\rho} |D\phi_{E_1}| = \int_{B_\rho} |D\phi_{E_1 \cup A}|$$, isto é, E_1 e $E_1 \cup A$

têm o mesmo perímetro em $B_\rho(x_o)$ e ainda

$$A \cap B_\rho(x_o) \subset (E_1 \cup A) \cap B_\rho(x_o) \quad , \forall \rho < R .$$

Agora, basta considerar $E = E_1 \cup A = (E_o \cap \Omega) \cup A$, cqd.

Demonstração do Teorema 4.1 :

Seja A um conjunto com fronteira de medida mínima em uma bola $B_R(x_o)$, $x_o \in \partial\Omega$ e tal que $A \cap B_R(x_o) \subset \bar{\Omega} \cap B_R(x_o)$.

Seja E um conjunto que minimiza o funcional

$$\mathcal{F}_\rho(F) = \int_{B_\rho} |D\phi_F| + \int_{\partial B_\rho} |\phi_\Omega - \phi_F| dH_{n-1} \quad , \text{ tal que}$$

$A \cap B_\rho(x_o) \subset E \cap B_\rho(x_o) \subset \Omega \cap B_\rho(x_o)$ com $x_o \varepsilon \partial E \cap \partial A \cap \partial\Omega$.

A existência de um conjunto E nestas condições é devida ao Lema 3.

Consideramos agora a sequência (f_j) de soluções da equação das superfícies mínimas em $B_\rho(x_o)$, verificando:(30)

$$|f_j(x)| \leq j \quad , \forall x \in B_\rho(x_o) \quad ;$$

$$f_j(x) = j \quad \text{se} \quad x \varepsilon (\partial B_\rho - \bar{\Omega}) = \Gamma_+$$

$$f_j(x) = -j \quad \text{se} \quad x \varepsilon (\partial B_\rho \cap A) = \Gamma_-$$

Pelo Teorema de Compacidade (Teor. 3.4), existe uma subsequência j(k) de índices tal que

$$\lim_{k\to+\infty} f_{j(k)} = f(x) \quad \text{qtp } B_\rho(x_o).$$

Ainda, $f: B_\rho(x_o) \longrightarrow [-\infty,+\infty]$ é solução da equação das superfícies mínimas em $B_\rho(x_o)$.

---

(30) Uma sequência (f_j) satisfazendo as condições impostas, podem ser obtidas, por exemplo, minimizando o funcional.

$$\int_{B_\rho} \sqrt{1 + |Df|^2} + \int_{\Gamma_+} |f-j| d\, H_{n-1} + \int_{\Gamma_-} |f+j| d\, H_{n-1} \ .$$

Se indicarmos com

$$P = \{x \in B_\rho(x_o) \quad : \quad \lim_k f_{j(k)} = +\infty\} \qquad \text{e}$$

$$N = \{x \in B_\rho(x_o) \quad : \quad \lim_k f_{j(k)} = -\infty\} \quad \text{, temos que}$$

P e N são conjuntos com fronteiras de medida mínima em $B_\rho(x_o)$, e cada ponto de P ou N tem densidade positiva.(31)

Podemos pois concluir que

$$\partial P \cap B_\rho(x_o) \supseteq \partial E \cap B_\rho(x_o)$$

$$\partial N \cap B_\rho(x_o) \supseteq \partial A \cap B_\rho(x_o)$$

Temos, por hipótese que $x_o \varepsilon \partial E \cap \partial A \cap \partial \Omega \Longrightarrow x_o \varepsilon \partial P \cap \partial N$.

Da proposição 3.7, segue-se que para todo $r \leq \rho$,

$$B_r(x_o) \subset P \cup N \cup (\partial P \cap \partial N) \quad \text{e} \quad \partial E \cap B_\rho(x_o) \cap \bar{\Omega} = \partial A \cap B_\rho(x_o) \cap \bar{\Omega}.$$

Logo, $\quad A = E \quad$ em $\quad B_\rho(x_o) \cap \bar{\Omega}$.

Como E e Ω têm o mesmo traço em $B_\rho(x_o)$, segue-se que

$$\int_{\partial B_\rho} |\phi_A - \phi_\Omega| = 0 \qquad \text{e portanto}$$

$$\partial A \cap B_\rho(x_o) = \partial \Omega \cap B_\rho(x_o)$$

cqd.

(31) cf. Proposição 3.6 do parágrafo 3.

5 - PROBLEMA DE DIRICHLET PARA EQUAÇÃO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Usaremos o Princípio do Máximo Forte Generalizado na resolução do problema de contorno, com dado contínuo, para a equação das superfícies mínimas sobre abertos limitados e localmente pseudo-convexos, sem impor que a fronteira seja lipschitziana.

Provaremos inicialmente o seguinte teorema:

Teorema 5.1 - "*Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto, limitado e localmente pseudo-convexo e seja* $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *diferenciável. Então existe uma única função* $u=u(x)$, $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{\omega}(\Omega)$, *solução da equação das superfícies mínimas em* Ω *tal que* $u(x) = g(x)$ *sobre* $\partial\Omega$".

Demonstração: Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e estritamente convexo tal que $\Omega \subset\subset B$. Consideremos o funcional

$$F(f) = \{ \int_B \sqrt{1+|Df|^2}\, dx \; : \; f \in BV(B)^{(32)} \quad e \quad f(x)=g(x) \;\; \forall x \in B-\bar{\Omega} \}$$

Observemos que $\inf F(f) < +\infty$ pois $F(g)$ é finito.
Seja (f_n) uma sequência de funções minimizantes, i.é, $f_n \in BV(B)$, $f_n = g$ em $B - \bar{\Omega}$ para todo n e,

$$\lim_n \int_B \sqrt{1+|Df_n|^2} = \inf F(f)$$

---

(32) $BV(\Omega)$ é o espaço das funções $L^1(\Omega)$ que têm derivada medida com variação total finita sobre Ω. Em outras palavras, $f \in BV(\Omega) \iff |graf_{\Omega} f| < +\infty$.

Desde que g é limitada sobre $\partial\Omega$, podemos supor que cada f_n seja limitada por

$$\min_{x\in\partial\Omega} g(x) \le f_n(x) \le \max_{x\in\partial\Omega} g(x) \qquad , \forall n \; .$$

Portanto, existe uma subsequência $(f_{n(j)})$ que converge uniformemente a u, com $u\in BV(B)$.

Como

$$\int_B \sqrt{1+|Du|^2}\, dx \;\le\; \liminf_{j\to+\infty} \int_B \sqrt{1+|Df_{n(j)}|^2}\, dx = \inf F(f),$$

segue-se que u é o mínimo para o funcional F.

Logo, u = u(x) é uma função real analítica em Ω, solução da equação das Superfícies mínimas (33), e u=g em $B-\bar{\Omega}$.

Resta demonstrar que u=g em $\partial\Omega$ e $u\in C^0(\bar{\Omega})$;

Seja $\quad E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1} : x\in B \;\text{ e }\; y<u(x)\}$,

E tem fronteira de medida mínima em $B\times\mathbb{R}$ (34), isto é,

$$\int_{B\times\mathbb{R}} |D\phi_E| \;\le\; \int_{B\times\mathbb{R}} |D\phi_M| \qquad \forall M\subset\mathbb{R}^{n+1} \;,\; M\Delta E \subset\subset B\times\mathbb{R} \;:$$

Como em $B-\bar{\Omega}$ cada $f_n = g$, segue-se

$$\int_{\bar{\Omega}\times\mathbb{R}} |D\phi_E| \;\le\; \int_{\bar{\Omega}\times\mathbb{R}} |D\phi_M| \qquad \forall M\subset\mathbb{R}^{n+1}, \quad M\Delta E\subset\subset\bar{\Omega}\times\mathbb{R} \quad .$$

Agora, para cada $x_0\in\partial\Omega$, consideramos uma sequência (x_h) de Ω

---

(33) cf. [17], Teorema 3 do Apêndice ou Teor. 2.1 do parágrafo 2.

(34) M. Miranda - "Analiticità delle superfici di area minima in $\mathbb{R}^4$". Rend. Acc. Naz. Lincei, Vol. 37, 1965.

de modo que

$$\lim_{h \to +\infty} x_h = x_o$$

Como u é limitada em $\bar{\Omega}$, existe uma subsequência (x_{h_j}) tal que

$$\lim_j u(x_{h_j}) = y_o \quad \text{e portanto } (x_o, y_o) \varepsilon \partial E.$$

Suponhamos que $y_o > g(x_o)$ e consideremos o ponto $(x_o, y_o) \varepsilon \partial\Omega \times \mathbb{R}$.

Existe uma bola $B_\rho(x_o, y_o) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\Omega \times \mathbb{R}$ é pseudo-convexo em $B_\rho(x_o, y_o)$, isto é, $(\Omega \times \mathbb{R}) \cap B_\rho(x_o, y_o)$ é pseudo-convexo nos pontos $(x,y) \varepsilon \partial\Omega \times \mathbb{R} \cap B(x_o, y_o)$, e

$$E \cap B_\rho(x_o y_o) \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \quad \text{com}$$

$$\int_{(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) \cap B_\rho} |D\phi_E| \leq \int_{(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}) \cap B_\rho} |D\phi_M| \quad \forall M \subset \mathbb{R}^{n+1},\ M \Delta E \subset\subset (\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) \cap B_\rho$$

Afirmamos que:

$$\int_{B_\rho} |D\phi_E| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_M| \qquad \forall M, M \Delta E \subset\subset B_\rho(x_o, y_o) .$$

De fato:

(a)
$$\int_{B_\rho} |D\phi_E| = \int_{B_\rho - (\bar{\Omega}\times\mathbb{R})} |D\phi_E| + \int_{B_\rho \cap (\bar{\Omega}\times\mathbb{R})} |D\phi_E| = \int_{B_\rho \cap (\bar{\Omega}\times\mathbb{R})} |D\phi_E|$$

$$\Longrightarrow \int_{B_\rho} |D\phi_E| \leq \int_{B_\rho \cap (\bar{\Omega}\times\mathbb{R})} |D\phi_M| \qquad \forall M \subset \mathbb{R}^{n+1},\ M \Delta E \subset\subset B_\rho \cap (\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$$

$$\text{(b)} \qquad \int_{B_\rho} |D\phi_M| = \int_{B_\rho - (\bar\Omega \times \mathbb{R})} |D\phi_M| + \int_{B_\rho \cap (\bar\Omega\times\mathbb{R})} |D\phi_M| =$$

$$\int_{B_\rho - (\bar\Omega\times\mathbb{R})} |D\phi_M| + \int_{B_\rho \cap (\Omega\times\mathbb{R})} |D\phi_{M\cap\Omega\times\mathbb{R}}| + \int_{(\partial\Omega\times\mathbb{R})\cap B_\rho} |D\phi_M| =$$

$$= \int_{B_\rho - (\bar\Omega\times\mathbb{R})} |D\phi_M| + \int_{(\bar\Omega\times\mathbb{R})\cap B_\rho} |D\phi_{M\cap\Omega\times\mathbb{R}}| - \int_{(\partial\Omega\times\mathbb{R})\cap B_\rho} |D\phi_{M\cap\Omega\times\mathbb{R}}| + \int_{(\partial\Omega\times\mathbb{R})\cap B_\rho} |D\phi_M|$$

Usando a) em b) , temos

$$\text{(c)} \quad \int_{B_\rho} |D\phi_M| \geq \int_{B_\rho - (\bar\Omega\times\mathbb{R})} |D\phi_M| + \int_{B_\rho} |D\phi_E| + \int_{(\partial\Omega\times\mathbb{R})\cap B_\rho} |D\phi_M| - \int_{(\partial\Omega\times\mathbb{R})\cap B_\rho} |D\phi_{M\cap\Omega\times\mathbb{R}}|$$

Por outro lado, como $(\Omega\times\mathbb{R})\cap B_\rho$ é localmente pseudo-convexo, vem

$$\int_{B_\rho} |D\phi_{\Omega\times\mathbb{R}}| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_{(\Omega\times\mathbb{R})\cup M}| \qquad \forall M,\ M \subset\subset B_\rho .$$

Usando o Lema 1 do § . 4, segue-se

$$\int_{B_\rho} |D\phi_{(\Omega\times\mathbb{R})\cup M}| \leq -\int_{B_\rho} |D\phi_{(\Omega\times\mathbb{R})\cap M}| + \int_{B_\rho} |D\phi_{\Omega\times\mathbb{R}}| + \int_{B_\rho} |D\phi_M| =$$

$$= -\int_{B_\rho \cap (\partial\Omega\times\mathbb{R})} |D\phi_{(\Omega\times\mathbb{R})\cap M}| - \int_{\Omega\times\mathbb{R}\cap B_\rho} |D\phi_M| + \int_{B_\rho} |D\phi_{\Omega\times\mathbb{R}}| + \int_{B_\rho - (\bar\Omega\times\mathbb{R})} |D\phi_M| +$$

$$\int_{(\partial\Omega\times\mathbb{R})\cap B_\rho} |D\phi_M| + \int_{(\Omega\times\mathbb{R})\cap B_\rho} |D\phi_M| \implies$$

$$\text{(d)} \qquad 0 \leq - \int_{B_\rho \cap \partial\Omega\times\mathbb{R}} |D\phi_{(\Omega\times\mathbb{R} \cap M}| + \int_{B_\rho - (\bar{\Omega}\times\mathbb{R})} |D\phi_M| + \int_{(\partial\Omega\times\mathbb{R}) \cap B_\rho} |D\phi_M|$$

Substituindo (d) em (c), vem

$$\int_{B_\rho} |D\phi_E| \leq \int_{B_\rho} |D\phi_M| \qquad \forall M \subset \mathbb{R}^{n+1}, M \Delta E \subset\subset B_\rho(x_o,y_o) .$$

Resumindo:

— $(\Omega \times \mathbb{R}) \cap B_\rho(x_o,y_o)$ é pseudo-convexo em (x_o,y_o) ;

— $(x_o,y_o) \in (\partial\Omega \times \mathbb{R}) \cap \partial E$;

— E tem fronteira de medida mínima em $B_\rho(x_o,y_o)$.

Portanto, podemos usar o Princípio do Máximo Forte (Teor.4.1) e afirmar que existe $0<r<\rho$, tal que

$$\partial E \cap B_r(x_o,y_o) = (\partial\Omega\times\mathbb{R}) \cap B_r(x_o,y_o) \;;$$

Logo, existe j_o tal que se $j \geq j_o$, então

$(x_{h_j}, u(x_{h_j})) \in \partial\Omega\times\mathbb{R}$ - absurdo, uma vez que $x_{h_j} \notin \partial\Omega$ para todo h_j .

Para $y_o < g(x_o)$ a demonstração por contradição é análoga. Assim, $\forall x_o \in \partial\Omega$, $u(x_o) = g(x_o)$. cqd.

Definição 5.1 - Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos uma sequência (f_h) de *funções regularizantes de* f da seguinte maneira:

Seja $\psi(x) \geq 0$, $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ com spt $\psi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ e ψ normalizada no sentido que

$$\int \psi(x)\,dx = 1$$

Definimos, para todo $h \in \mathbb{N}$ as funções

$$\psi_h(x) = h^n\,\psi(hx)$$

Temos:

$$\psi_h \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \psi_h(x) \geq 0 \quad ;$$

$$\text{spt } \psi_h \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \frac{1}{h}\} \quad ;$$

$$\int \psi_h(x)\,dx = 1$$

A sequência (f_h) definida por

$$f_h(x) = (f * \psi_h)(x) = \int f(y)\,\psi_h(x-y)\,dy \quad \text{é}$$

denominada *sequência regularizante para* f .

Obs:. Se $f \in C^o(\mathbb{R}^n)$ então (f_h) converge uniformemente a f sobre todo compacto de $\mathbb{R}^n$. (35)

Teorema 5.2 - "*Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto, limitado e localmente pseudo-convexo e* $g: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $\partial\Omega$. *Então,*

(35) cf. [9], Teor. 1.1, p. 5.2 .

existe uma única função $u=u(x)$, $u \in C^{o}(\bar{\Omega}) \cap C^{\omega}(\Omega)$, *solução da equação das superfícies mínimas sobre* Ω, *tomando o dado* g *em* $\partial\Omega$".

Demonstração: Seja $\tilde{g}$ a extensão de g a todo $\mathbb{R}^n$ com $\tilde{g}$ contínua e satisfazendo

$$\sup\{|\tilde{g}(x)| : x \in \mathbb{R}^n\} = \sup\{|g(x)| : x \in \partial\Omega\} .$$ [36]

Consideremos uma sequência (g_h) de funções regularizantes de $\tilde{g}$, como na definição 5.1 .

Do fato da $\tilde{g}$ ser contínua sobre $\bar{\Omega}$, compacto de $\mathbb{R}^n$, temos que (g_h) converge uniformemente a $\tilde{g}$ em $\bar{\Omega}$.

Para todo $h \in \mathbb{N}$, seja $u_h = u_h(x)$ a solução da equação das superfícies mínimas em Ω com dado g_h sobre $\partial\Omega$. Pelo Teor. 5.1, $u_h \in C^{o}(\bar{\Omega}) \cap C^{\omega}(\Omega)$ e $u_h(x) = g_h(x)$ em $\partial\Omega$.

A sequência (u_h) é limitada em $\bar{\Omega}$ e portanto, possui uma subsequência convergente (u_{h_j}),

$$u_{h_j} \longrightarrow u \quad \text{em} \quad L^1_{loc}(\Omega) \qquad \text{e}$$

u é solução da equação das superfícies mínimas em Ω. [37]

Desde que para cada h_j, u_{h_j} é real analítica em Ω e contínua em $\partial\Omega$, temos:

---

(36) cf. Teorema de Extensão de Tietze.

(37) cf. [15]; Teorema 3, p. 244.

$$\sup\{|u_{h_j}(x)-u_{h_i}(x)|: x\varepsilon\Omega\} = \sup\{|u_{h_j}(x)-u_{h_i}(x)|: x\varepsilon\partial\Omega\} =$$

$= \sup\{|g_{h_j}(x) - g_{h_i}(x)|: x\varepsilon\partial\Omega\}$ e portanto u_{h_j} converge uniformemente a u em $\bar{\Omega}$, o que implica que u é contínua em $\bar{\Omega}$ e portanto $u \varepsilon C^o(\bar{\Omega}) \cap C^\omega(\Omega)$ (38) ;

Ainda, $u(x_o) = \lim_{j\to\infty} u_{h_j}(x_o) = \lim_{j\to\infty} g_{h_j}(x_o) = \tilde{g}(x_o) = g(x_o)$

$\forall x_o \varepsilon \partial\Omega$.

cqd.

Observação: Salientamos que a existência e regularidade de soluções da equação das superfícies mínimas independe da configuração da fronteira $\partial\Omega$ do domínio considerado. Entretanto, a condição imposta a Ω para que seja localmente pseudo-convexo garante a unicidade da solução com dado g contínuo sobre $\partial\Omega$.

---

(38) cf. [9], Teorema 5.1, p. 2.14 .

B I B L I O G R A F I A

[1] Bombieri, E. - De Giorgi, E. - Giusti, E. - "Minimal cones and the Bernstein Problem" in Inv. Math, 1969.

[2] Bombieri, E. - De Giorgi, E. - Miranda, M. - "Una Maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche", in Arch. Rat. Mec. Analysis, vol. 32, 1969.

[3] De Giorgi, E. - "Su una teoria generale della misura (r-1) dimensionale in uno spazio ad r dimensioni", in Ann. di Mat. Pura Appl., Vol. 36, Serie IV, 1954.

[4] ——— "Complementi alla teoria della misura (n-1) dimensionale in uno spazio n-dimensionale" in Sem. Mat. Sc. Norm. Sup., Pisa, 1960-61.

[5] ——— "Frontiere Orientate di Misura Minima", in Sem. Mat. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1960-61.

[6] De Giorgi, E. - Colombini, F. - Piccinini, L.C. - *Frontiere Orientate di Misura Minima e Questioni Collegate* - Pubbl. cl. Scienze, S.N. Sup - Pisa, 1972.

[7] Federer, H. - "The singular sets of area minimizing retifiable currents with codimention one...", in Bull. Am. Math. Soc., 1970.

[8] Finn, R. - "Remarks Relevant to Minimal Surfaces and to surfaces of constant mean curvature", in Journ. d'Analyse Math., vol. 14, 1965.

[9] Giaquinta, M. e outros - *Note sul Problema di Plateau* - Ed. Tecnico Scientifica, Pisa, 1974.

[10] Gilbarg, D. - "Boundary Value Problems for non linear elliptic equations in n variables", in Univ. of Wisconsin Press, 1963.

[11] Jenkins, H. e Serrin, J. - "The Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in Higher Dimension", in J. Reine Angew. Math, vol. 229, 1968.

[12] Miranda, M. - "Distribuzioni aventi derivate Misure, insiemi di perimetro localmente finito", in Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, vol 18, 1964.

[13] ——— "Superfici Cartesiane Generalizzate ed insiemi di Perimetro finito sui Prodotti cartesiani", in Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1964.

[14] ——— "Analiticita delle superfici di area minima in $\mathbb{R}^4$," in Rend. Acc. Naz. Lincei, vol 38, 1965.

[15] ——— "Comportamento delle successioni convergenti di frontiere Minimali", in Rend. Sem. Mat. Padova, 1967.

[16] ——— "Existence and Regularity of Hypesurfaces of $\mathbb{R}^n$ with Prescribed mean curvature", in Ann. Univ. Ferrara - 1971

[17] ——— "Un Principio di Massimo forte per le frontiere minimali e una sua applicazione alla resoluzione del problema al contorno pel l'equazione delle superfici di area minima", in Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1971.

[18] ——— "Superfici Minime Illimitate", a ser publicado in Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa.

[19] Morrey, C.B. Jr. - "Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations and related Topics", in Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1960.

[20] Radó, T. - "The Problem of the Last area and the problem of Plateau", in Math. Z., vol 32, 1930.

[21] Stampacchia, G. - "On some multiple integral problems in the Calculus of Variations", in Comm. Pure Appl. Math, vol. 16, 1963.

Campinas, Outubro de 1976