

AÇÕES SEM PONTOS FIXOS DO GRUPO ICOSAÉDRICO  
SOBRE VARIEDADES ACÍCLICAS

YURIKO YAMAMOTO BALDIN

Dissertação apresentada  
ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação  
da Universidade Estadual de Campinas  
como requisito parcial para a obtenção do título de  
Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. HUGO HORACIO TORRIANI

Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro da Fundação  
de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo

CAMPINAS, NOVEMBRO DE 1976

**UNICAMP**  
**BIBLIOTECA CENTRAL**

## INDICE

Introdução	. . . . .	iii
Capítulo I - O Grupo Icosaédrico	. . . . .	1
Capítulo II - O Normalizador do Grupo Icosaédrico	. . . . .	15
Capítulo III - O Revestimento Universal de $SO(3)$	. . . . .	25
Capítulo IV - A Variedade $\Sigma^3$	. . . . .	35
Capítulo V - Ações Sem Pontos Fixos do Grupo Icosaédrico Sobre Variedades Acíclicas	. . . . .	47
Bibliografia	. . . . .	57

## INTRODUÇÃO

O problema de determinar se toda ação de um grupo de Lie compacto sobre um disco ou sobre um espaço euclidiano possui pontos fixos ficou em aberto até que, por volta de 1940, P.A. Smith demonstrou que a resposta é afirmativa nos casos em que o grupo atuante é um toro ou um p-grupo finito. Visando a determinar os limites para o campo de validade desses famosos resultados de Smith, E.E. Floyd e R.W. Richardson construíram em 1958 uma ação simplicial sem pontos fixos do grupo icosaédrico sobre um n-disco. Recentemente, G.E. Bredon observou no seu livro "Introduction to Compact Transformation Groups" que é possível inserir nas construções de Floyd e Richardson um complexo simplicial finito  $K$  de tal maneira que a ação em questão tenha como conjunto de pontos fixos um subespaço possuindo o mesmo tipo de homotopia que  $K$ . Em particular, se  $K$  for vazio recupera-se o exemplo de Floyd e Richardson.

Uma peça fundamental na construção desse exemplo é a definição de uma ação sem pontos fixos do grupo icosaédrico sobre uma certa variedade diferenciável  $X$  de dimensão três, compacta, conexa, com bordo, orientável, e acíclica sobre os inteiros. A passagem dessa variedade a um n-disco é feita demonstrando que essa ação é simplicial e utilizando a teoria das vizinhanças regulares de J.H.C. Whitehead. A construção da ação de  $I$  sobre  $X$  é contudo bastante delicada e possui suficiente interesse como para justificar um estudo detalhado.

O objetivo desta tese é, então, apresentar essa parte essencial da construção de Floyd e Richardson de um modo que esperamos seja considerado acessível pelos leitores. Pareceu-nos que o tema, além da sua importância específica na teoria dos grupos de transformações, poderia ser de muito interesse a alunos que desejem iniciar-se nesse ou em outros ramos da topologia algébrica e, talvez, a pessoas ativas em algum campo

da geometria ou da topologia. A apresentação feita por Floyd e Richardson do seu exemplo no seu artigo original é, contudo, muito concisa, o que dificulta a difusão desse importante resultado fora de círculos altamente especializados. No seu livro, Bredon modificou alguns detalhes, mas como seu principal objetivo ali era o de prevenir o leitor das dificuldades que surgem no estudo dos grupos de transformações, e não o de fazer uma análise detalhada do exemplo de Floyd e Richardson, ele se limitou a indicar, em duas páginas, os passos mais importantes da construção.

A redação deste trabalho respondeu assim a nosso desejo de produzir um texto que pudesse ser lido sem muitas dificuldades por pessoas que se iniciam no estudo da topologia algébrica. Levando também em conta a grande diversidade das técnicas que entram nessa construção achamos conveniente incluir muitos detalhes nas demonstrações. No que respeita a organização deste trabalho, ela é como segue. No primeiro capítulo demonstramos que o subgrupo de comutadores do grupo icosaédrico  $I$  coincide com  $I$ , e no segundo que o normalizador de  $I$  em  $SO(3)$  é o próprio  $I$ . O terceiro capítulo exhibe a esfera  $S^3$ , considerada como o grupo dos quatêrnios de norma 1, como o espaço de revestimento universal de  $SO(3)$ . No quarto capítulo se demonstra que o espaço  $SO(3)/I$  é uma variedade diferenciável de dimensão três que possui os mesmos grupos de homologia sobre os inteiros que  $S^3$ . A nossa exposição termina no quinto capítulo, onde construímos a variedade  $X$  e a ação de  $I$  sobre ela mencionadas acima. O objetivo principal desta tese aparece enunciado no Teorema (5.19).

Quero exprimir aqui meus agradecimentos ao Prof. Dr. Hugo H. Torriani pela proposição do tema deste trabalho, pela orientação, e pelo interesse e o tempo que ele devotou a corrigir

e aperfeiçoar o manuscrito. Aproveito a ocasião para agradecer ao Prof. Dr. Antonio Conde pela orientação recebida no primeiro ano de mestrado, e a inúmeros colegas e professores, em especial ao Prof. Dr. Francesco Mercuri, pelo incentivo e auxílio recebidos nos momentos difíceis.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro recebido durante todo o meu mestrado. Foi esse apoio que possibilitou a realização deste trabalho.

## CAPÍTULO I

### O GRUPO ICOSAÉDRICO

O objetivo principal deste capítulo é demonstrar que o grupo icosaédrico  $I$  é "perfeito", ou seja, que o subgrupo dos comutadores de  $I$  coincide com  $I$ . Para atingirmos esse objetivo estabeleceremos um isomorfismo entre  $I$  e o grupo das permutações pares de cinco elementos. A nossa referência básica aqui será o Capítulo III do livro de Coxeter citado na bibliografia.

Observamos que todas as construções geométricas deste capítulo são feitas no  $\mathbb{R}^3$  e que o tratamento dado é relativamente informal, o que não acontecerá nos capítulos posteriores.

(1.1) Uma congruência é uma bijeção linear de  $\mathbb{R}^3$  que preserva distâncias. Uma congruência  $T$  é dita direta ou inversa conforme o determinante da matriz de  $T$  (em relação à base canônica de  $\mathbb{R}^3$ ) seja estritamente positivo ou negativo. Cada vetor de uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  determina um eixo da base, isto é, a reta gerada por ele. Uma inversão é uma congruência obtida pela composição de uma rotação de  $\pi$  radianos segundo um eixo de uma base com a reflexão num plano perpendicular ao eixo.

(1.2) Passaremos a estudar agora os poliedros regulares. Os polígonos regulares que compõem um poliedro regular são chamados as faces do poliedro; os lados e os vértices das faces são respectivamente as arestas e os vértices do poliedro.

Dado um poliedro regular, o seu centro é o ponto do qual os vértices estão à mesma distância  $R_0$ , os lados à mesma distância  $R_1$ , e as faces à mesma distância  $R_2$ . Suporemos sempre que o centro de um poliedro regular é a origem de  $\mathbb{R}^3$ .

(1.3) Entendemos por uma simetria de um poliedro regular uma congruência que opera sobre ele, isto é, que leva o poliedro em si mesmo. O conjunto das simetrias de um poliedro regular, incluindo a identidade, forma um grupo sob a operação de composição. Esse grupo é denominado o grupo das simetrias do poliedro. É claro que o subconjunto das simetrias diretas do poliedro (isto é, as simetrias do poliedro que são congruências diretas) é um subgrupo do anterior.

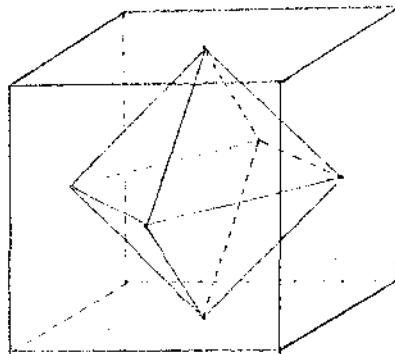
(1.4) Observemos agora que o grupo das simetrias de um poliedro regular é finito. De fato, o conjunto das simetrias é um subconjunto do conjunto das permutações dos vértices do poliedro, que são em número finito. Em (1.9) calcularemos as ordens dos grupos das simetrias diretas dos cinco poliedros regulares.

(1.5) Observemos também que as simetrias de um poliedro regular são ou todas diretas, ou metade diretas e metade inversas. Com efeito, sejam  $G$  o grupo de simetrias,  $H$  o subgrupo das simetrias diretas e  $K$  o subconjunto das simetrias inversas do poliedro, de modo que  $G=H \cup K$  (reunião disjunta). Se  $K=\emptyset$ , então  $G=H$ . Se  $K \neq \emptyset$  escolhamos  $g \in K$ ; então  $g$  não é a transformação identidade. Como a aplicação  $H \rightarrow gH$  é uma bijeção,  $H$  e  $gH$  possuem o mesmo número de elementos. Mostremos que

$gH=K$ . Se  $h \in H$  então  $gh \in K$ , pois a composição de uma simetria direta com uma inversa é uma simetria inversa. Portanto  $gH \subset K$ . Por outro lado, se  $k \in K$  temos  $g^{-1}k \in H$ , pois  $g^{-1} \in K$  e a composição de duas simetrias inversas é uma simetria direta. Como  $k = g(g^{-1}k)$  temos  $K \subset gH$ . Assim  $G = H \cup gH$  (reunião disjunta), e as simetrias de  $G$  são metade diretas e metade inversas. Em outras palavras, o grupo das simetrias diretas de um poliedro regular ou é todo o grupo das simetrias desse poliedro ou é um subgrupo de índice 2 desse grupo.

(1.6) Denotaremos por  $\{p,q\}$  um poliedro regular para o qual cada vértice é a intersecção de  $q$  polígonos regulares de  $p$  lados. Assim, o tetraedro regular será denotado por  $\{3,3\}$ , o cubo por  $\{4,3\}$ , o octaedro regular por  $\{3,4\}$ , o dodecaedro regular por  $\{5,3\}$ , e o icosaedro regular por  $\{3,5\}$ .

Seja  $\{p,q\}$  um poliedro regular com  $N_0$  vértices,  $N_1$  arestas e  $N_2$  faces. Inscrevamos  $\{p,q\}$  numa esfera e consideremos os planos tangentes à esfera nos vértices de  $\{p,q\}$ . As intersecções dos planos determinam as  $N_0$  faces de um outro poliedro que possui  $N_2$  vértices e  $N_1$  arestas. Esse processo é chamado reciprocção e o poliedro obtido é o poliedro recíproco (ou poliedro dual)  $\{q,p\}$ . Por exemplo, o cubo  $\{4,3\}$  é o poliedro recíproco ao octaedro regular  $\{3,4\}$ ; o icosaedro regular  $\{3,5\}$  é

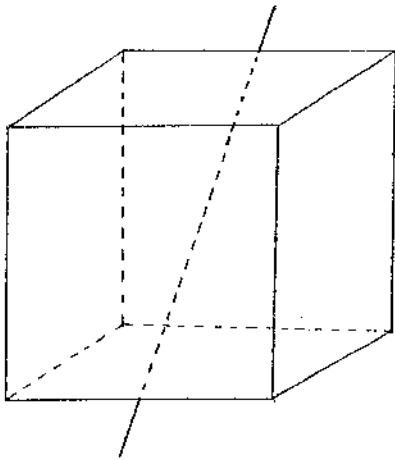




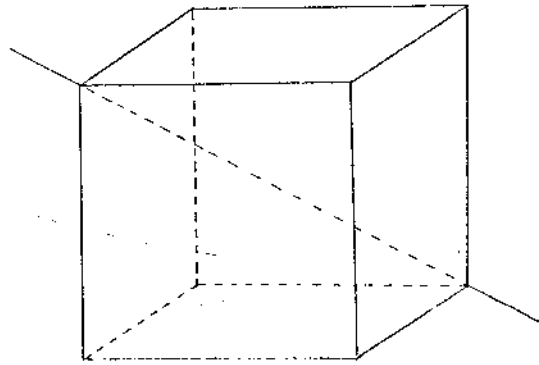
recíproco ao dodecaedro regular  $\{5,3\}$ ; e o tetraedro regular é autorecíproco.

(1.7) Utilizando o processo de reciprocação acima descrito é possível demonstrar que a cada simetria de um poliedro regular corresponde uma simetria do poliedro recíproco e vice-versa. Portanto, dois poliedros recíprocos possuem o mesmo grupo de simetrias e conseqüentemente o mesmo grupo de simetrias diretas.

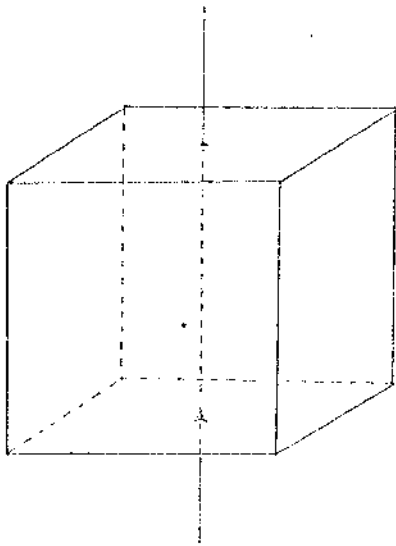
(1.8) Por outro lado, pela álgebra linear sabemos que dada uma transformação linear de  $\mathbb{R}^3$  existe uma reta passando pela origem que é deixada invariante por ela. Em particular, toda simetria direta de um poliedro regular pode ser caracterizada por um ângulo em relação a um eixo que passa pelo centro desse poliedro. Como essa simetria é um elemento de um grupo finito, ela tem período finito, logo o ângulo que a caracteriza deve ser da forma  $2\pi \frac{r}{s}$  para  $r$  e  $s$  inteiros positivos primos entre si. Portanto, o menor ângulo de rotação possível em torno de um tal eixo deve ser da forma  $\frac{2\pi}{s}$ . Com isto vemos que as rotações em torno desse eixo formam um grupo cíclico de ordem  $s$ ; dizemos então que o eixo é um eixo de  $s$ -rotação. Em particular para  $s=2,3,4$  e  $5$  os eixos (e as rotações correspondentes) são ditos digonais, trigonais, tetragonais e pentagonais, respectivamente. A figura seguinte dá alguns exemplos destes eixos no caso do cubo  $\{4,3\}$ .



um eixo de 2-rotação



um eixo de 3-rotação



um eixo de 4-rotação

(1.9) Calcularemos agora a ordem do grupo das simetrias diretas de um poliedro regular  $\{p,q\}$ . Para isso liguemos o centro do  $\{p,q\}$  (isto é, a origem de  $\mathbb{R}^3$ ) aos vértices, pontos médios das arestas e centros das faces, respectivamente, por eixos de  $q$ -rotação, 2-rotação e  $p$ -rotação. Observemos então que

o conjunto das simetrias diretas do poliedro  $\{p, q\}$  coincide com o conjunto das rotações no sentido horário em relação aos eixos acima citados com ângulos de rotação  $\frac{2k\pi}{q}$ ,  $\pi$  e  $\frac{2j\pi}{p}$  ( $k, j \in \mathbb{Z}$ ), respectivamente. Excluindo a identidade essas rotações envolvem então  $q-1$  valores distintos para  $k$  e  $p-1$  para  $j$ .

Além disso os vértices, pontos médios das arestas e centro das faces ocorrem em pares antipodais, exceto no caso do tetraedro regular em que cada vértice é oposto a uma face. Mas ainda nesse caso (observe-se que para o tetraedro valem  $N_0 = N_2$  e  $p=q$ ) o número total das simetrias diretas, excluindo a identidade, é dado por

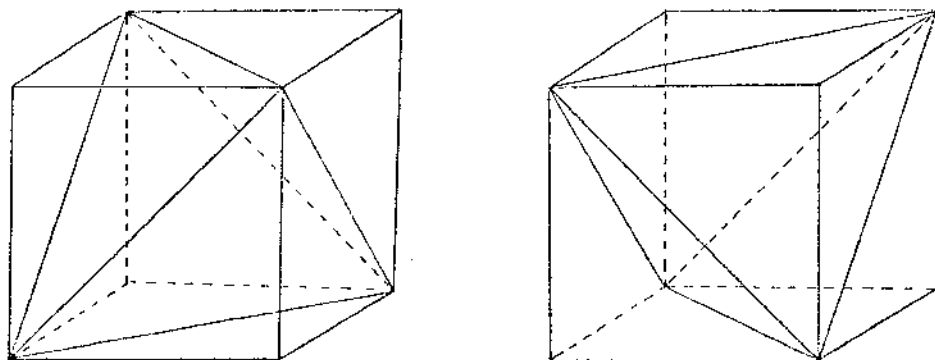
$$\frac{1}{2} [N_0(q-1) + N_1 + N_2(p-1)] .$$

Usando as fórmulas  $N_0 - N_1 + N_2 = 2$  (fórmula de Euler) e  $qN_0 = 2N_1 = pN_2$  (cf. Coxeter, p. 9 e 11), deduzimos que a ordem do grupo das simetrias diretas de um poliedro regular  $\{p, q\}$  é  $2N_1$  (cf. Coxeter, p. 47).

Em particular, se chamarmos de grupo tetraédrico, de grupo octaédrico e de grupo icosaédrico aos grupos de simetrias diretas do tetraedro, do octaedro (ou do cubo), e do icosaedro (ou do dodecaedro) regulares, vemos que esses grupos têm ordens 12, 24 e 60, respectivamente.

Estudaremos a seguir especificamente o grupo icosaédrico como o grupo das simetrias diretas de um dodecaedro regular (cf. (1.7)).

(1.10) Um composto poliédrico (ou simplesmente um composto) é um conjunto de poliedros regulares iguais com centro comum na origem de  $\mathbb{R}^3$ . Por exemplo, as diagonais das faces de um cubo são as arestas de dois tetraedros, os quais, juntos,

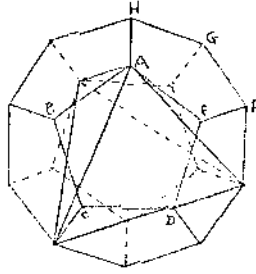


formam um composto tetraédrico.

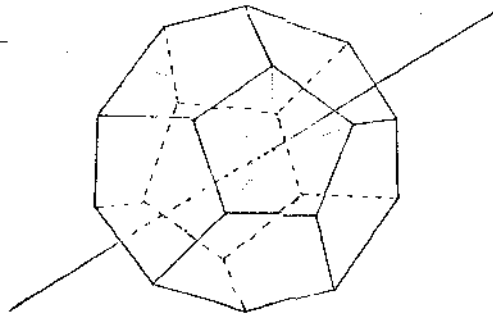
O nosso objetivo é identificar o grupo icosaédrico, isto é, o grupo das simetrias diretas do dodecaedro regular, com o grupo alternado  $A_5$ . Para isso construiremos primeiramente um composto de cinco tetraedros com os vértices num dodecaedro regular. Mostraremos em seguida que a cada simetria direta do dodecaedro corresponde uma permutação par dos tetraedros do composto. Nossa exposição segue de perto Coxeter, pp. 49-50.

(1.11) Sejam ABCDE e AEF GH duas faces adjacentes de um dodecaedro regular. (Ver figura abaixo). Os vértices BDFH formam um quadrado, cujos lados ligam vértices alternados de faces que são pentágonos regulares. Esses quatro vértices formam com suas antípodas um cubo inscrito no dodecaedro.

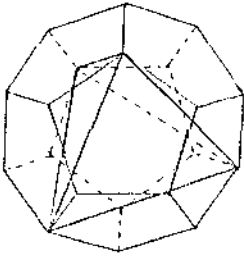
Consideremos agora um dos tetraedros inscritos nesse cubo (ver figuras em (1.10)) e a reta que liga o centro do do



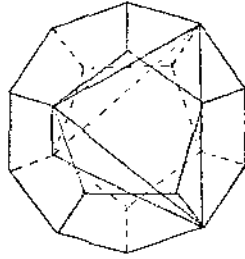
decaedro ao centro da face ABCDE. As rotações do dodecaedro



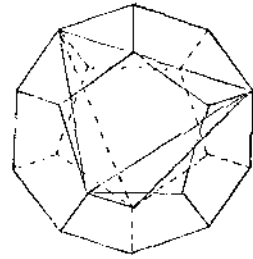
segundo este eixo são as rotações no sentido horário cujos ângulos de rotação são  $\frac{2\pi}{5}$ ,  $\frac{4\pi}{5}$ ,  $\frac{6\pi}{5}$  ou  $\frac{8\pi}{5}$ , isto é, são as rotações pentagonais. A rotação pentagonal de ângulo  $\frac{2\pi}{5}$  em relação a este eixo transforma o primeiro tetraedro da figura a baixo no segundo, a rotação de  $\frac{4\pi}{5}$  no terceiro, e as de



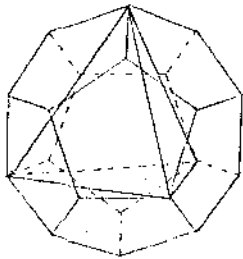
1



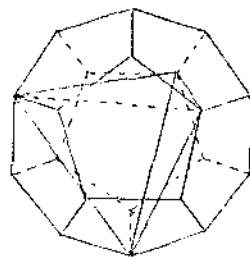
2



3



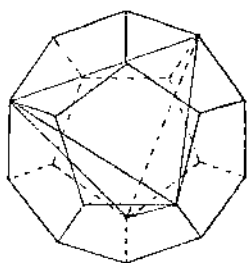
4



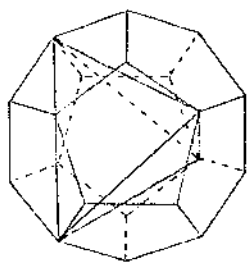
5

$\frac{6\pi}{5}$  e  $\frac{8\pi}{5}$  no quarto e no quinto tetraedros, respectivamente. Os vinte v ertices do dodecaedro são distribuidos assim em grupos de quatro sobre os cinco tetraedros.

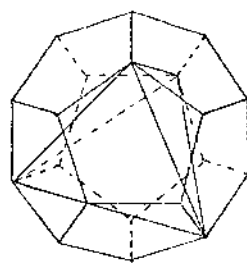
(1.12) Agora, uma invers o em  $\mathbb{R}^3$  transforma o composto tetraédrico assim obtido num segundo composto inversamente congruente a aquele. Os tetraedros do segundo composto correspondentes aos do primeiro podem ser vistos na seguinte figura.



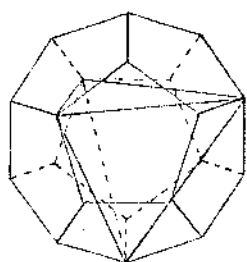
1



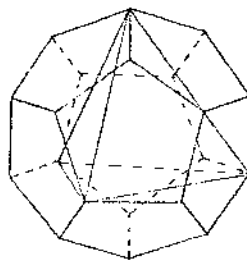
2



3

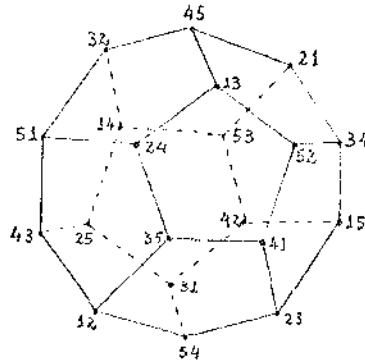


4



5

Consideremos o primeiro composto e enumeremos os v̄rtices dos tetraedros de acordo com a ordem de constrūção, isto é, os v̄rtices do primeiro tetraedro s̄o enumerados 1, os do segundo 2, e assim por diante. Enumeramos os v̄rtices do segundo composto da mesma maneira, mantendo a ordem nos tetraedros da da pela invers̄o. Isto nos d̄a uma enumerāo dos v̄rtices do dodecaedro por vinte pares ordenados  $ij$  ( $1 \leq i, j \leq 5$ ), de modo que  $ij$  é um v̄rtice do  $i$ -ésimo tetraedro do primeiro composto e do  $j$ -ésimo tetraedro do segundo composto.

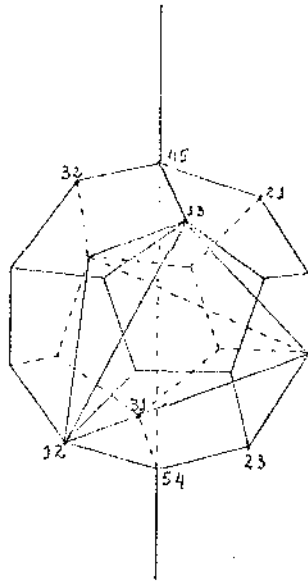


Pela própria construção do composto tetraédrico, a cada simetria direta do dodecaedro corresponde uma permutação dos tetraedros entre si. Em outras palavras, a cada simetria direta do dodecaedro corresponde uma permutação dos cinco primeiros dígitos, uma vez que os tetraedros são enumerados de 1 a 5.

(1.13) Agora mostraremos que a qualquer simetria direta do dodecaedro corresponde uma permutação par dos cinco tetraedros no primeiro composto. Isto mostrará que as simetrias diretas do dodecaedro podem ser consideradas como elementos do grupo alternado  $A_5$ .

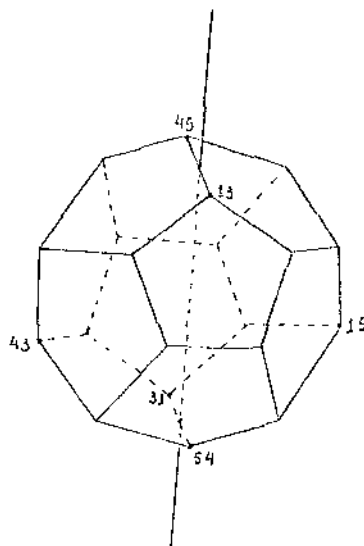
Uma rotação trigonal de ângulo  $\frac{2\pi}{3}$  em relação a um eixo que liga dois vértices antipodais permuta três tetraedros entre si. Por exemplo, uma rotação de  $\frac{2\pi}{3}$  em torno do eixo que liga os vértices 45 e 54 leva o primeiro tetraedro do primeiro composto no segundo (do mesmo composto), o segundo no terceiro, e este no primeiro.





Considerando separadamente os índices  $i$  e os índices  $j$  vemos que esta permutação é representável pelo 3-ciclo  $(123)$  de  $A_5$ .

Por outro lado, uma rotação digonal em torno de um eixo que liga os pontos médios de duas arestas antipodais permuta dois tetraedros simétricos em relação a esse eixo. Por exemplo, a rotação digonal de  $\pi$  em torno do eixo que liga os pontos médios das arestas 13-45 e 31-54 permuta os tetraedros 1 e 4, e os tetraedros 3 e 5 do primeiro composto. Logo podemos representar esta permutação por  $(14)(35)$ .



Finalmente, uma rotação pentagonal de  $\frac{2\pi}{5}$  em torno de um eixo que liga dois centros de faces antipodais permuta os cinco tetraedros do primeiro composto de tal modo que a sua representação como um 5-ciclo é (12345).

(1.14) Deste modo podemos representar todos os elementos do grupo das simetrias diretas do dodecaedro regular como permutações pares de cinco elementos. É possível demonstrar (por exemplo, considerando geradores e relações) que essa representação é injetora, e também um homomorfismo de grupos. Obtém-se então um monomorfismo do grupo icosaédrico, que denotaremos por  $I$ , no grupo alternado  $A_5$ . Como a ordem de  $I$  é 60, esse monomorfismo é um isomorfismo. Portanto podemos identificar  $I$  com  $A_5$ .

(1.15) Como uma consequência imediata desta identificação

demonstraremos a seguir que o subgrupo dos comutadores do grupo icosaédrico  $I$  é o próprio  $I$ . Para isso lembramos que o subgrupo dos comutadores  $[G, G]$  de um grupo  $G$  é o subgrupo gerado pelos elementos  $aba^{-1}b^{-1}$ , com  $a, b$  em  $G$ . O grupo  $G$  é comutativo se e somente se  $[G, G] = \{e\}$ , onde  $e$  é o elemento identidade de  $G$ .

No nosso caso, como  $I = A_5$  e  $A_5$  é simples, os únicos subgrupos normais de  $I$  são  $I$  e  $\{e\}$ ; e como  $I$  não é comutativo segue que  $[I, I] = I$ .

CAPÍTULO II  
O NORMALIZADOR DO GRUPO ICOSAÉDRICO

O objetivo deste capítulo é demonstrar que o normalizador em  $SO(3)$  do grupo icosaédrico  $I$  é o próprio  $I$ . Para atingirmos esse objetivo necessitamos da classificação dos subgrupos finitos de  $SO(3)$  e dos subgrupos infinitos fechados próprios de  $SO(3)$ . Veremos que  $I$  é o subgrupo finito maximal de  $SO(3)$  e que não está contido em nenhum subgrupo infinito fechado próprio de  $SO(3)$ . O fato de  $I$  não ser normal em  $SO(3)$  nos permitirá obter o resultado desejado na Proposição (2.14).

Começamos por lembrar que se  $H$  é um subgrupo de um grupo  $G$ , o normalizador  $N_G(H)$  de  $H$  em  $G$  é definido por

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\} .$$

Pela definição,  $H$  é um subgrupo normal de  $N_G(H)$ . Se  $H$  é normal em  $G$  então  $N_G(H) = G$ . Quando o grupo  $G$  é um grupo topológico e  $H$  é um subgrupo fechado então  $N_G(H)$  é um subgrupo fechado. De fato, para cada  $h \in H$ , a aplicação  $\rho_h : G \rightarrow G$  definida por  $\rho_h(g) = ghg^{-1}$  é contínua. Como  $H$  é fechado,  $\rho_h^{-1}(H)$  é fechado para cada  $h \in H$ , e como

$$N_G(H) = \bigcap_{h \in H} \rho_h^{-1}(H) ,$$

$N_G(H)$  resulta fechado.

Quando não houver possibilidade de confusão denotaremos  $N_G(H)$  por  $N(H)$ .

A seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em Wolf, pp. 86-87, nos fornece a classificação dos sub

grupos finitos de  $SO(3)$ .

(2.1) Proposição: Os únicos subgrupos finitos de  $SO(3)$  são os cíclicos, os diedrais, o tetraédrico, o octaédrico e o icosaédrico, a menos de isomorfismos.

A seguir classificaremos os subgrupos fechados, próprios e infinitos de  $SO(3)$ .

Utilizaremos para isso a estrutura de grupo de Lie de  $SO(3)$  (cf. Chevalley, p. 129). Da teoria geral de tais grupos sabemos que todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é também um grupo de Lie (op. cit., Cor., p. 135; ou Helgason, Theor. 2.3, p. 105). Como  $SO(3)$  é compacto (cf. Chevalley, Theor. 1, p. 4) o problema se resume em classificar os subgrupos de Lie compactos próprios e infinitos de  $SO(3)$ , a menos de isomorfismos.

(2.2) Proposição: Seja  $H$  um subgrupo fechado, próprio e infinito de  $SO(3)$  e coloquemos  $d = \dim H$ . Então  $d = 1$  ou  $d = 2$ .

Demonstração: Como  $\dim SO(3) = 3$  (cf. Chevalley, Prop. 6, p. 8) temos  $0 \leq d \leq 3$ . Se fosse  $d = 0$ ,  $H$  seria um espaço topológico discreto, e como ele é compacto resultaria que  $H$  é finito. Logo  $d > 0$ .

Seja agora  $\phi: H \rightarrow SO(3)$  a inclusão e  $p$  um ponto qualquer de  $H$ . Se fosse  $d = 3$ ,  $H$  seria uma subvariedade (definida como em Chevalley, p. 85, ou Helgason, p. 23) de  $SO(3)$  tal que a dimensão dos espaços tangentes  $H_p$  e  $SO(3)_{\phi(p)}$  é a mesma. Como  $d\phi_p: H_p \rightarrow SO(3)_{\phi(p)}$  é injetora ela resulta ser um isomorfismo, e pelo teorema da função inversa (cf. Prop. 3.1 de Helgason,

p. 23) deduzimos que  $\phi$  é uma aplicação aberta. Assim  $\phi(H)$  é um subespaço aberto, fechado e não vazio do espaço conexo  $SO(3)$  (cf. Chevalley, Prop. 3, p. 37), e portanto  $\phi(H)$  (ou seja,  $H$ ) coincide com  $SO(3)$ . Logo  $d < 3$ .

As únicas possibilidades para  $d$  são então  $d = 1$  ou  $d = 2$ , como queríamos.

Antes de analisar o caso  $d = 1$  enunciaremos alguns resultados que necessitaremos, dando referências bibliográficas precisas.

(2.3) Lema: Seja  $G_0$  a componente conexa do elemento neutro e de um grupo topológico  $G$ . Então  $G_0$  é um subgrupo normal fechado, e a componente conexa de um elemento  $g \in G$  é  $gG_0$ .

A demonstração deste fato pode ser vista em Rodrigues, p. 14.

As definições (2.4) e (2.6) e o lema (2.7) podem ser encontrados em Husemoller, pp. 169-170.

(2.4) Definição: O toro n-dimensional, denotado por  $T^n$ , é o grupo topológico quociente  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ . Um n-toro é qualquer grupo topológico topologicamente isomorfo a um toro n-dimensional.

(2.5) Lema: Um grupo de Lie compacto, conexo e abeliano, de dimensão  $n$ , é isomorfo como grupo topológico ao toro n-dimensional  $T^n$ .

Para a demonstração cf. Chevalley, Prop. 1, p. 212.

(2.6) Definição: Um subgrupo  $T$  de um grupo compacto  $G$  é um toro maximal de  $G$  se  $T$  é um toro e  $G = \bigcup_{s \in G} s T s^{-1}$ .

(2.7) Lema: Sejam  $G$  grupo topológico compacto e  $T$  um toro maximal de  $G$ . Se  $T'$  é um toro de  $G$  então  $T' \subset s T s^{-1}$  para al gum  $s \in G$ . Ainda mais,  $T'$  é um toro maximal de  $G$  se e somente se  $T' = s T s^{-1}$ .

A seguinte definição pode ser encontrada em Husemoller, p. 172.

(2.8) Definição: O grupo de Weyl de um grupo compacto  $G$  é  $N_G(T)/T$  onde  $T$  é um toro maximal de  $G$  e  $N_G(T)$  é o normaliza dor do  $T$  em  $G$ .

A demonstração do seguinte fato decorre do Theor. 7.1 de Husemoller, p. 182.

(2.9) Lema: Um toro maximal de  $SO(3)$  é  $S^1$ , e o grupo de Weyl de  $SO(3)$  é  $Z_2$ .

Com o auxílio destas informações classificaremos os subgrupos de Lie compactos, próprios e infinitos de  $SO(3)$  de dimensão 1.

(2.10) Proposição: Seja  $H$  um subgrupo de Lie compacto e infinito de  $S0(3)$  de dimensão 1. Então  $H$  é topologicamente isomorfo a  $S0(2)$  ou a  $0(2)$ .

Demonstração: Consideremos a componente conexa  $H_0$  da identidade e de  $H$ . Por (2.3)  $H_0$  é um subgrupo fechado (e portanto de Lie) e normal de  $H$ . Se a dimensão de  $H_0$  fosse nula,  $H_0$  seria o conjunto unitário  $\{e\}$ . Como, por (2.3) as componentes conexas de  $H$  são da forma  $gH_0$ , com  $g \in H$ , o conjunto unitário  $\{g\}$  seria a componente conexa de cada  $g \in H$ . Isso tornaria  $H$  um conjunto discreto infinito de elementos, o que é um absurdo, pois  $H$  é compacto. Logo  $\dim H_0 = 1$ , e então  $H_0$  é localmente isomorfo ao grupo abeliano  $\mathbb{R}$ . Como  $H_0$  é conexo,  $H_0$  é abeliano, e como é também compacto,  $H_0$  é isomorfo a  $S^1$  por (2.5).

Como  $H_0 = S^1$  é normal em  $H$ , o normalizador  $N_H(S^1)$  de  $S^1$  em  $H$  é o próprio  $H$ . Sendo  $H$  um subgrupo de  $S0(3)$  temos  $H = N_H(S^1) \subset N_{S0(3)}(S^1)$ , logo  $H/S^1 \subset N_{S0(3)}(S^1)/S^1$ . Por (2.3), a cada elemento de  $H/S^1$  corresponde uma componente conexa de  $H$ . Mas, por (2.9), o grupo de Weyl  $N_{S0(3)}(S^1)/S^1$  é igual a  $Z_2$ . Logo  $H$  possui no máximo duas componentes conexas.

Se  $H$  é conexo temos  $H = H_0 = S^1$ , logo  $H$  é topologicamente isomorfo a  $S0(2)$ . Suponhamos então que  $H$  tenha exatamente duas componentes conexas. Como  $S0(2)$  é a componente conexa da identidade de  $0(2)$ ,  $S0(2)$  é um subgrupo normal de  $0(2)$ , logo  $0(2) \subset N_{S0(3)}(S^1)$ . Como  $S0(2)$  é um subgrupo de índice 2 de  $0(2)$  temos

$$Z_2 = 0(2)/S^1 \subset N_{S0(3)}(S^1)/S^1 = Z_2 .$$

Isto prova que  $0(2) = N_{S0(3)}(S^1)$ , e como  $H \subset N_{S0(3)}(S^1)$ , segue que  $H \subset 0(2)$ . Tomemos  $g \in H$  tal que  $g \notin H_0$ . Então  $gS0(2)$  é a componente conexa que não contém a identidade para ambos  $H$  e  $0(2)$ , por (2.3) e o fato que  $H_0 = S0(2)$ . Portanto  $H = 0(2)$ . Isto



completa a demonstração.

Para estudar o caso  $d = 2$  usaremos algumas noções sobre álgebras de Lie. Sabemos que um grupo de Lie conexo  $G$  é abeliano se e somente se a sua álgebra de Lie  $L$  é abeliana, isto é,  $[A, B] = 0$  para todo  $A$  e  $B$  em  $L$ . (cf. Hausner-Schwartz, Theor. 11, p. 77). Também sabemos que a álgebra de Lie de  $SO(3)$  é o espaço vetorial das matrizes reais anti-simétricas de ordem 3 (cf. Chevalley, Prop. 5, p. 8). Por outro lado lembremos (cf. Jacobson, p. 11) que se  $L$  é álgebra de Lie de dimensão 2 não abeliana então existem geradores  $x$  e  $y$  de  $L$  tais que  $[x, y] = x$ . Temos também que existe uma correspondência biunívoca entre os subgrupos de Lie conexos de um grupo de Lie  $G$  e as subálgebras das álgebras de Lie de  $G$  (cf. Chevalley, Theor. 1, p. 109; ou Helgason, Theor. 2.1, p. 102). Estes fatos serão utilizados na seguinte observação e na Prop. (2.12).

(2.11) Lema: Seja  $L$  a álgebra de Lie de  $SO(3)$ . Então  $L$  não possui subálgebras de Lie não abelianas de dimensão 2.

Demonstração: Seja  $Q$  uma subálgebra de Lie de  $L$  não abeliana de dimensão 2. Pelo dito acima  $Q$  admite geradores  $A_1$  e  $A_2$  tais que  $[A_1, A_2] = A_1$ . Como  $A_1$  e  $A_2$  são antisimétricas podemos escrever

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Logo

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] &= A_1 A_2 - A_2 A_1 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & c_1 b_2 - b_1 c_2 & -c_1 a_2 + a_1 c_2 \\ -c_1 b_2 + b_1 c_2 & 0 & b_1 a_2 - a_1 b_2 \\ c_1 a_2 - a_1 c_2 & -b_1 a_2 + a_1 b_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A relação  $[A_1, A_2] = A_1$  nos fornece o seguinte sistema

$$\begin{cases} c_1 b_2 - b_1 c_2 = a_1 \\ -c_1 a_2 + a_1 c_2 = b_1 \\ b_1 a_2 - a_1 b_2 = c_1 \end{cases}$$

Se fixarmos  $A_1$ , sabemos que  $A_2$  é uma solução deste sistema linear com coeficientes  $a_1, b_1, c_1$ . Como  $A_1$  é um gerador,  $a_1, b_1$  e  $c_1$  não são simultaneamente nulos. Supondo por exemplo  $c_1 \neq 0$  e usando operações elementares sobre as linhas da matriz dos coeficientes

$$\begin{bmatrix} 0 & c_1 & -b_1 & a_1 \\ -c_1 & 0 & a_1 & b_1 \\ b_1 & -a_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

se demonstra que ela é equivalente à matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & c_1 & -b_1 & a_1 \\ -c_1 & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \end{bmatrix}$$

Portanto o sistema linear acima admite soluções somente quando  $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 0$ . Então, em particular,  $c_1 = 0$ , contradição. Logo não existem subálgebras de Lie de  $L$  não abelianas de dimensão 2.

O seguinte resultado completa a descrição dos subgrupos fechados próprios infinitos de  $S0(3)$ .

(2.12) Proposição:  $S0(3)$  não tem nenhum subgrupo fechado, próprio e infinito de dimensão 2.

Demonstração: Seja  $H$  um subgrupo fechado, próprio e infinito de  $S0(3)$  de dimensão 2. É claro que a componente conexa da identidade  $H_0$  de  $H$  tem dimensão 2. Se  $H$  é abeliano,  $H_0$  é um 2-toro por (2.5). Mas por (2.9) e (2.7) os toros maximais de  $S0(3)$  têm dimensão 1. Logo  $H$  não é abeliano. Por outro lado, já vimos em (2.11) que a álgebra de Lie de  $S0(3)$  não tem subálgebras não abelianas de dimensão 2. Isto completa a demonstração.

Resumimos agora o conteúdo de (2.2), (2.10) e (2.12) como segue.

(2.13) Proposição: Os únicos subgrupos fechados, próprios e infinitos de  $S0(3)$  são  $O(2)$  e  $S0(2)$ .

Chegamos assim ao objetivo principal deste capítulo.

(2.14) Proposição: Sejam  $I$  o grupo icosaédrico e  $N(I)$  o normalizador de  $I$  em  $SO(3)$ . Então  $N(I) = I$ .

Demonstração: Primeiramente demonstraremos que  $I$  não é um subgrupo normal de  $SO(3)$ . Consideremos para isso uma base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que o eixo  $x$  gerado por  $e_1$  seja um eixo diagonal de rotação no dodecaedro regular. A idéia é considerar uma reflexão do dodecaedro em relação ao eixo  $x$  e conjugá-la por uma rotação no  $\mathbb{R}^3$  de ângulo suficientemente pequeno em relação ao eixo  $z$ , observando que esse eixo, ortogonal ao eixo diagonal, não é um eixo de rotação no dodecaedro. Demonstraremos assim que essa conjugação não pode pertencer a  $I$ .

De fato seja

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a matriz da reflexão do dodecaedro regular em relação ao eixo  $x$ . Tomemos um  $g \in SO(3)$  cuja matriz em relação à base fixada seja

$$g = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $\theta$  é tal que  $0 < \theta < \frac{2\pi}{10}$ ; isto é,  $g$  é uma matriz de rotação de  $\theta$  radianos em torno do eixo  $z$ . Temos

$$ghg^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta & 0 \\ \text{sen } 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e observamos que esta última matriz é igual ao produto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \text{sen } 2\theta & 0 \\ -\text{sen } 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = hg'.$$

Então  $ghg^{-1} = hg'$ , onde  $g'$  é a matriz indicada acima. Se  $ghg^{-1}$  pertencesse a  $I$  teríamos  $h^{-1}ghg^{-1} \in I$ , pois  $h \in I$ . Mas então  $g'$  pertenceria a  $I$ , o que é impossível, pois pela nossa escolha de  $\theta$  vale  $0 < 2\theta < \frac{2\pi}{5}$ , e o menor ângulo de rotação do dodecaedro regular que o deixa invariante é  $\frac{2\pi}{5}$ . Portanto  $I$  não é um subgrupo normal de  $SO(3)$  e  $N(I)$  está contido estritamente em  $SO(3)$ .

Por (2.1),  $I$  é o subgrupo finito maximal de  $SO(3)$  e não está contido em  $SO(2)$  ou  $O(2)$ , que por (2.13) são os únicos subgrupos fechados, próprios e infinitos de  $SO(3)$ . Como  $N(I)$  é fechado e contém  $I$ , temos  $N(I) = I$ , como queríamos.

### CAPÍTULO III

#### O REVESTIMENTO UNIVERSAL DE $SO(3)$

O objetivo deste capítulo é obter o espaço de revestimento universal de  $SO(3)$ . Para atingirmos este objetivo introduzimos algumas noções sobre a álgebra dos quatêrnios e identificamos a esfera unitária  $S^3$  de  $\mathbb{R}^4$  com o grupo multiplicativo dos quatêrnios de norma 1. Esse procedimento nos permite obter uma representação ortogonal  $f: S^3 \rightarrow SO(3)$  que resulta ser uma aplicação de revestimento. A nossa exposição segue de perto Chevalley, pp. 38-39. O resultado final aparece enunciado na Proposição (3.11).

(3.1) Definição: A álgebra dos quatêrnios, denotada por  $H$ , é a álgebra sobre o corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais definida por uma base de quatro elementos  $e_0, e_1, e_2, e_3$  que satisfazem

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i \quad (0 \leq i \leq 3) ;$$

$$e_i^2 = -e_0 \quad (1 \leq i \leq 3) ;$$

$$e_1 e_2 = e_3, \quad e_2 e_3 = e_1 \quad e \quad e_3 e_1 = e_2 .$$

Todo quatêrnio  $q$  pode ser expresso de uma maneira única como

$$q = \sum_{i=0}^3 a_i e_i$$

com coeficientes  $a_i$  reais, e é óbvio que  $H$  é uma álgebra de dimensão 4 sobre  $\mathbb{R}$ . O quatêrnio  $e_0$  é o elemento unidade de  $H$

e a multiplicação acima é associativa mas não comutativa. Se  $q$  é como acima, as condições  $q e_i = e_i q$  para  $0 \leq i \leq 3$  implicam  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ . Logo o centro da álgebra  $H$  coincide com  $\mathbb{R} e_0$ .

(3.2) Definição: Dado um quatérnio

$$q = a_0 e_0 + \sum_{i=1}^3 a_i e_i$$

definimos a conjugada  $\bar{q}$  (ou  $q^-$ ) de  $q$  por

$$\bar{q} = a_0 e_0 - \sum_{i=1}^3 a_i e_i .$$

As propriedades seguintes decorrem da definição:

- a)  $(aq+bq')^- = a\bar{q}+b\bar{q}'$  para todo  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $q, q' \in H$ ;
- b)  $(qq')^- = \bar{q}'\bar{q}$  para todo  $q, q' \in H$  ;
- c)  $\bar{\bar{q}} = q$  para todo  $q \in H$  .

(3.3) Definição: Dado um quatérnio

$$q = \sum_{i=0}^3 a_i e_i$$

definimos a norma  $N(q)$  de  $q$  por

$$N(q) = \sum_{i=0}^3 a_i^2 .$$

É óbvio que  $N(q)$  é um número real não negativo e que

$N(q) = 0$  se e somente se  $q = 0$ ; e é fácil verificar que  $N(qq') = N(q)N(q')$  (cf. Chevalley, p. 17). A existência da norma implica que  $H$  é uma álgebra de divisão, isto é, para cada quatérnio não nulo  $q$  existe um (único) quatérnio  $q^{-1}$  tal que  $qq^{-1} = q^{-1}q = e_0$ . De fato, o quatérnio  $(N(q))^{-1}\bar{q}$  é a inversa de  $q \in H, q \neq 0$ .

Notemos também que se  $B$  é o produto interno usual no espaço vetorial real subjacente a  $H$  temos  $B(q, q) = N(q)$  para todo  $q \in H$ . Se escrevemos  $B(q, q) = \|q\|^2$  temos então  $N(q) = \|q\|^2$  para todo  $q \in H$ .

(3.4) Definição: Um grupo de transformações é uma terna  $(G, X, \theta)$ , onde  $G$  é um grupo topológico,  $X$  é um espaço de Hausdorff e  $\theta: G \times X \rightarrow X$  é uma aplicação contínua tal que:

$$(1) \theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x) \text{ para todo } g, h \in G \text{ e } x \in X;$$

$$(2) \theta(1, x) = x \text{ para todo } x \in X, \text{ onde } 1 \text{ é a identidade de } G.$$

A aplicação  $\theta$  é chamada uma ação de  $G$  sobre  $X$ . O espaço  $X$  com uma ação  $\theta$  de  $G$  é chamado um G-espaço. Para cada  $x \in X$ , o subespaço

$$G(x) = \{\theta(g, x) \in X \mid g \in G\}$$

é chamado a órbita de  $x$  sob a ação de  $G$ .

Sejam agora  $H^*$  o grupo multiplicativo dos quatérnios não nulos e  $K$  o subgrupo dos quatérnios de norma 1. É claro que podemos identificar  $K$  com a esfera unitária  $S^3$  de  $\mathbb{R}^4$ . Por outro lado, seja  $H_p$  o subespaço dos quatérnios puros de  $H$ , ou seja, o gerado por  $e_1, e_2$  e  $e_3$ .



(3.5) Lema: Seja  $\theta: S^3 \times H \rightarrow H$  a aplicação definida por  $\theta(q, q') = qq'q^{-1}$  para todo  $q \in S^3$  e todo  $q' \in H$ . Então  $\theta$  é uma ação ortogonal sobre o espaço vetorial real  $H$  que deixa invariante  $H_p$ .

Demonstração: É óbvio que  $\theta$  é contínua e satisfaz as condições de (3.4), logo  $\theta$  é uma ação de  $S^3$  sobre  $H$ . Para cada  $q \in S^3$  seja agora  $\theta_q: H \rightarrow H$  a aplicação definida por  $\theta_q(x) = \theta(q, x)$  para cada  $x \in H$ . Como

$$N(\theta_q(x)) = N(qxq^{-1}) = N(q)N(x)N(q^{-1}) = N(q)N(q)^{-1}N(x) = N(x)$$

para todo  $q \in S^3$  e  $x \in H$ , e como  $N(y) = \|y\|^2$  para todo  $y \in H$ , vemos que cada  $\theta_q$  preserva a norma usual  $\| \cdot \|$  de cada vetor em  $H$ . Logo cada  $\theta_q$  é uma transformação ortogonal deste espaço vetorial real; isto é,  $\theta$  é uma ação ortogonal de  $S^3$  sobre  $H$ . Além disso, para todo  $a_0 \in \mathbb{R}$  e  $q \in S^3$  temos

$$\theta(q, a_0 e_0) = q(a_0 e_0)q^{-1} = a_0 qq^{-1}e_0 = a_0 e_0.$$

Assim  $\theta$  fixa o subespaço de  $H$  gerado por  $e_0$ , de modo que o complemento ortogonal deste subespaço, isto é,  $H_p$ , é invariante sob esta ação.

O nosso próximo passo é mostrar que a ação  $\theta$  fornece uma representação ortogonal do grupo topológico  $S^3$ .

(3.6) Lema: Existe um homomorfismo contínuo  $f: S^3 \rightarrow SO(3)$  de grupos topológicos.

Demonstração: Como  $\theta$  é ortogonal e o subespaço gerado por  $e_0$  é fixado por  $\theta$ , para cada quatérnio  $q$  de norma 1 a matriz da aplicação  $\theta_q$  em relação à base ortonormal  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  é uma

soma direta  $|1| \oplus A_q$  onde  $|1|$  é o número 1 considerado como matriz e  $A(q)$  é a matriz ortogonal de ordem 3 da restrição de  $\theta_q$  ao subespaço dos quatérnios puros. Podemos então definir uma aplicação  $f: S^3 \rightarrow O(3)$  por  $f(q) = A(q)$ . Como  $\theta_{qq'} = \theta_q \circ \theta_{q'}$ , para todo  $q, q' \in S^3$ , temos  $A(qq') = A(q)A(q')$ , logo  $f$  é um homomorfismo de grupos. Na base fixada, para cada  $q = (a_0, a_1, a_2, a_3) \in S^3$ ,  $A(q)$  se escreve como

$$A(q) = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 & 2(a_1a_2 - a_0a_3) & 2(a_0a_2 + a_1a_3) \\ 2(a_1a_2 + a_0a_3) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & 2(a_2a_3 - a_0a_1) \\ 2(a_1a_3 - a_0a_2) & 2(a_0a_1 + a_2a_3) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \end{bmatrix}.$$

Como cada elemento da matriz  $A(q)$  depende continuamente de  $q$  deduzimos que  $f$  é contínuo.

O subespaço  $S^3$  de  $\mathbb{R}^4$  é conexo (cf. Chevalley, Lemma 1, p. 36), e como  $f$  é um homomorfismo contínuo,  $f(S^3)$  está contido na componente conexa da identidade de  $O(3)$ ; isto é,  $f(S^3) \subset SO(3)$ . Logo  $f$  é uma representação ortogonal contínua de  $S^3$ .

(3.7) Lema: O homomorfismo  $f: S^3 \rightarrow SO(3)$  é sobrejetor.

Demonstração: Consideremos o quatérnio  $q = (\cos\lambda)e_0 + (\sin\lambda)e_1$ , de  $S^3$  onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Um cálculo simples nos mostra que a matriz de  $\theta_q$  na base  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  é da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\lambda & -\sin 2\lambda \\ 0 & 0 & \sin 2\lambda & \cos 2\lambda \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$f(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\lambda & -\operatorname{sen} 2\lambda \\ 0 & \operatorname{sen} 2\lambda & \cos 2\lambda \end{bmatrix},$$

e  $f(q)$  é uma matriz de rotação no  $\mathbb{R}^3$  em torno do eixo  $x_1$  gerado por  $e_1$ . Como  $\lambda$  foi tomado arbitrariamente,  $f(S^3)$  contém o grupo  $G_1$  de todas as matrizes de rotações em torno desse eixo. Analogamente,  $f(S^3)$  contém o grupo  $G_2$  das matrizes de rotações em torno do eixo  $x_2$  gerado por  $e_2$ . Basta observar que, para elementos de  $S^3$  da forma  $q' = (\cos \lambda)e_0 + (-\operatorname{sen} \lambda)e_2$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , obtemos

$$f(q') = \begin{bmatrix} \cos 2\lambda & 0 & -\operatorname{sen} 2\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} 2\lambda & 0 & \cos 2\lambda \end{bmatrix}$$

Provaremos que os grupos  $G_1$  e  $G_2$  geram  $SO(3)$ , o que implicará que  $f(S^3) = SO(3)$ .

A idéia é análoga à utilizada em mecânica clássica para fatorizar, mediante os ângulos de Euler, uma rotação qualquer como produto de três rotações que possuem uma expressão matricial simples. Sejam  $r \in SO(3)$  e  $M$  o ponto  $(1, 0, 0)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Se  $r(M) = \pm M$ , então  $r \in G_2$ . Suponhamos  $r(M) \neq \pm M$ . O eixo  $x_1$  e a reta determinada pela origem e  $r(M)$  determinam um plano que intersecciona o plano  $x_2x_3$  segundo uma reta  $\ell$  que faz um ângulo  $\alpha$  com o eixo  $x_3$ . Se

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

então  $s_1$  é um elemento de  $G_1$  tal que  $s_1(r(M))$  é um ponto do

plano  $x_1x_3$ . Esse ponto está a uma distância unitária da origem, e a reta determinada por ele e a origem forma um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x_1$ . Então

$$s_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

é um elemento de  $G_2$  tal que  $s_2(s_1(r(M))) = M$ . Isto quer dizer que  $s_2s_1r$  é um elemento de  $G_1$ , porque  $G_1$  é o subgrupo de  $S0(3)$  formado pelas rotações que deixam  $M$  invariante. Logo existe  $s'_1 \in G_1$  tal que  $s_2s_1r = s'_1$ , ou seja,  $r = s_1^{-1}s_2^{-1}s'_1$ . Portanto  $r$  pertence ao grupo gerado por  $G_1$  e  $G_2$ . Assim o homomorfismo  $f: S^3 \rightarrow S0(3)$  é sobrejetor, como desejávamos.

(3.8) Lema: O núcleo do epimorfismo  $f: S^3 \rightarrow S0(3)$  é isomorfo a  $Z_2$ .

Demonstração: Seja

$$q = a_0 e_0 + \sum_{i=1}^3 a_i e_i$$

um elemento do núcleo  $\text{Ker}(f)$  de  $f$ . Então  $f(q)$  é a matriz identidade  $I_3$  de ordem 3, e por (3.6) a restrição de  $\theta_q$  ao subespaço dos quatérnios puros é a aplicação idêntica. Portanto, para todo quatérnio  $r$ , temos  $qrq^{-1} = \theta_q(r) = r$ , donde  $qr = rq$ . Isto é,  $q$  pertence ao centro de  $H$ , e pelo que foi dito antes de (3.2) temos  $q = a e_0$ . Como  $N(q) = 1$ , devemos ter  $a = \pm 1$ . Portanto  $\text{Ker}(f)$  é isomorfo a  $Z_2$ , como queríamos.

Demonstraremos agora que o epimorfismo contínuo  $f: S^3 \rightarrow S0(3)$  é uma aplicação de revestimento. Observemos primeiramente que

$S^3$  e  $SO(3)$  são conexos (cf. Chevalley, Lemma 1, p. 36, e Prop. 3, p. 37) e que  $SO(3)$  é localmente conexo por ser localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^3$  (op.cit., Prop. 6, p. 8).

(3.9) Lema: A aplicação contínua  $f: S^3 \longrightarrow SO(3)$  é um homeomorfismo local.

Demonstração: Consideremos a aplicação contínua  $g: S^3 \times S^3 \times S^3 \longrightarrow S^3$  dada por  $g(a,b,c) = abc^{-1}$ . Como  $S^3$  é um espaço  $T_1$  existe uma vizinhança  $W$  de  $e_0$  que não contém  $-e_0$ . Por ser uma vizinhança,  $W$  contém um aberto  $W'$  que contém  $e_0$ . Pela continuidade de  $g$  em  $(e_0, e_0, e_0)$  existe um aberto  $Z$  de  $S^3 \times S^3 \times S^3$  que contém  $(e_0, e_0, e_0)$  tal que  $g(Z) \subset W'$ . Consideremos agora vizinhanças fechadas  $Z_1, Z_2, Z_3$  de  $e_0$  tais que  $Z_1 \times Z_2 \times Z_3 \subset Z$ . Então  $V = Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3$  é uma vizinhança fechada em  $S^3$ . Como  $S^3$  é compacto,  $V$  é uma vizinhança compacta de  $e_0$  em  $S^3$  tal que  $g(V, V, V) = VVV^{-1}$  não contém  $-e_0$ . Se  $q, q' \in V$  são tais que  $f(q) = f(q')$ , vale  $f(qq'^{-1}) = I_3$ , donde  $qq'^{-1} = \pm e_0$  por (3.8). Mas  $qq'^{-1} = e_0 qq'^{-1}$  pertence a  $VVV^{-1}$ . Logo  $qq'^{-1} = e_0$ , donde  $q = q'$ . Portanto, a restrição  $f|_V$  de  $f$  a  $V$ , que é contínua por (3.6), é também injetora. Como  $V$  é compacta,  $f|_V$  é uma aplicação fechada de  $V$  sobre  $f(V)$  e é portanto um homeomorfismo sobre  $f(V)$ .

Mostremos agora que  $f(V)$  é uma vizinhança da matriz identidade  $I_3$  em  $SO(3)$ . Consideremos para isso uma vizinhança aberta  $V_1$  de  $e_0$  em  $S^3$  tal que  $V_1 \subset V$ . Então  $A = S^3 - (V_1 \cup (-e_0)V_1)$  é compacto, porque  $V_1 \cup (-e_0)V_1$  é um aberto e  $S^3$  é um compacto. Seja  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  a família de todas as vizinhanças compactas de  $I_3$  em  $SO(3)$ . Recordemos (cf. Kelley, p. 135) que uma família  $\mathcal{C}$  de conjuntos tem a propriedade de interseção finita se e somente se a interseção dos membros de cada subfamília finita de  $\mathcal{C}$  é não vazia. Como  $A$  é compacto, se a família  $\{f^{-1}(U_i) \cap A\}_{i \in I}$  de fechados de  $A$  tivesse a propriedade de in-

terseção finita existiria um elemento  $q$  em  $A$  tal que  $f(q)$  pertenceria a  $U_i$ , para todo índice  $i$  (cf. op. cit., Theor. 1, p. 136). Logo teríamos  $f(q) = I_3$ , o que é impossível pois  $A$  não contém  $\text{Ker}(f)$ . Portanto  $\{f^{-1}(U_i) \cap A\}_{i \in I}$  não tem a propriedade de interseção finita. Observamos que toda interseção finita de conjuntos  $f^{-1}(U_i) \cap A$  é novamente um conjunto desta forma; com efeito,

$$\bigcap_{i \in J} (f^{-1}(U_i) \cap A) = (\bigcap_{i \in J} f^{-1}(U_i)) \cap A = (f^{-1}(\bigcap_{i \in J} U_i)) \cap A,$$

e se  $J$  é finito,  $\bigcap_{i \in J} U_i$  é uma vizinhança (compacta) de  $I_3$  em  $SO(3)$ . Logo, existe uma vizinhança compacta  $U$  de  $I_3$  em  $SO(3)$  tal que  $f^{-1}(U) \cap A = \emptyset$ . Portanto,

$$f^{-1}(U) \subseteq V_1 \cup (-e_0)V_1 \subseteq V \cup (-e_0)V,$$

e daí segue que

$$U = f(f^{-1}(U)) \subseteq f(V_1) \cup f((-e_0)V_1) \subseteq f(V) \cup f((-e_0)V).$$

Como  $\text{Ker}(f) = \{\pm e_0\}$  por (3.8), temos  $f(V_1) = f((-e_0)V_1)$  e  $f(V) = f((-e_0)V)$ . Portanto  $f(V_1)$ , e a fortiori  $f(V)$ , contém a vizinhança  $U$  de  $I_3$ . Logo  $f(V)$  é, por sua vez, uma vizinhança de  $I_3$  em  $SO(3)$ . Além disso,  $f|_{V_1}: V_1 \rightarrow f(V_1)$  é um homeomorfismo entre vizinhanças abertas de  $e_0$  em  $S^3$  e de  $I_3$  em  $SO(3)$ ; ou seja,  $f$  é um homeomorfismo local em  $e_0$ .

Se agora  $q \in S^3$ ,  $qV_1$  é uma vizinhança aberta de  $q$  em  $S^3$ . Como  $f(qV_1) = f(q)f(V_1)$  e  $f(V_1)$  é uma vizinhança aberta de  $I_3$  em  $SO(3)$ ,  $f(qV_1)$  é uma vizinhança aberta de  $f(q)$ . A aplicação  $f|_{(qV_1)}: qV_1 \rightarrow f(qV_1)$  é uma bijeção sobre  $f(qV_1)$  pois  $f|_{V_1}$  é uma bijeção, e é contínua pois é restrição da aplicação contínua  $f: S^3 \rightarrow SO(3)$ . Além disso, se  $V'$  é um aberto em  $qV_1$ ,  $V'$  é da forma  $qV_2$  para um aberto  $V_2$  em  $V_1$ . Como a restrição  $f|_{V_1}$

é um homeomorfismo sobre  $f(V_1)$ , ela é uma aplicação aberta, donde  $f(V_2)$  é aberto em  $f(V_1)$ . Portanto  $f(qV_2) = f(q)f(V_2)$  é aberto em  $f(q)f(V_1)$ . Então  $f|(qV_1)$  é uma aplicação aberta e portanto um homeomorfismo. Em outras palavras,  $f$  é um homeomorfismo local, como queríamos.

(3.10) Lema: A tripla  $(S^3, f, SO(3))$  é um revestimento universal de duas folhas.

Demonstração: Utilizando (3.6), (3.7), o que foi dito antes de (3.9), e o fato de ser  $S^3$  simplesmente conexo (cf. Lyra, Teor. 10.4, p. 50), vemos que basta provar que para cada  $A \in SO(3)$  existe uma vizinhança aberta  $W$  de  $A$  em  $SO(3)$  tal que  $f^{-1}(W)$  é uma reunião disjunta de abertos  $W_1, W_2$  em  $S^3$  tais que  $f|_{W_i}: W_i \rightarrow W$  sejam homeomorfismos para  $i=1,2$ .

Sejam  $A$  um elemento de  $SO(3)$  e  $q \in f^{-1}(A)$ . Se  $q' \in S^3$ , a relação  $f(q) = f(q')$  implica  $q q'^{-1} \in \text{Ker}(f) = \{\pm e_0\}$ , donde  $q' = q$  ou  $q' = -q$ . Como  $f$  é um homeomorfismo local por (3.9), usando a notação desse lema temos os homeomorfismos  $f|_{qV_1}: qV_1 \rightarrow Af(V_1)$  e  $f|_{(-q)V_1}: (-q)V_1 \rightarrow Af(V_1)$ , onde  $Af(V_1)$  é uma vizinhança aberta  $W$  de  $A$ . Os abertos  $W_1 = qV_1$  e  $W_2 = (-q)V_1$  são disjuntos, pois  $qy_1 = (-q)y_2$  implicaria  $y_1 = -y_2$  para  $y_1, y_2 \in V_1$ , donde  $e_0 y_1 y_2^{-1} = -e_0$ , isto é,  $-e_0 \in VVV^{-1}$ , uma contradição. Logo  $f$  é uma aplicação de revestimento de duas folhas.

Podemos resumir o conteúdo deste capítulo da seguinte maneira.

(3.11) Proposição: Existe uma representação ortogonal  $f: S^3 \rightarrow SO(3)$  tal que a tripla  $(S^3, f, SO(3))$  é um revestimento universal de duas folhas.

CAPÍTULO IV  
A VARIEDADE  $\Sigma^3$

Neste capítulo mostraremos que o espaço  $\Sigma^3 = SO(3)/I$  é uma variedade  $C^\infty$  de dimensão 3, orientável, e com a mesma homologia sobre os inteiros que a esfera usual  $S^3$ . Em (4.1) a (4.5) utilizaremos algumas técnicas algébricas para mostrar que  $I'/[I', I'] = 0$ , onde  $I' = f^{-1}(I)$  e  $f: S^3 \rightarrow SO(3)$  é a aplicação de revestimento do Cap. III. Este resultado fornecerá em (4.21) o primeiro grupo de homologia singular de  $\Sigma^3$ . Em (4.6) a (4.18) usaremos alguns fatos sobre revestimentos e orientabilidade para mostrar que  $\Sigma^3$  é uma variedade  $C^\infty$  de dimensão 3 e orientável. Finalmente, em (4.19) a (4.27) utilizaremos alguns teoremas fundamentais da teoria de homologia para calcular os grupos de homologia de  $\Sigma^3$  sobre os inteiros.

(4.1) Sejam  $f: S^3 \rightarrow SO(3)$  a aplicação de revestimento estudada no Capítulo III e  $I'$  a imagem inversa de  $I \subset SO(3)$  por  $f$ . Lembrando que  $(S^3, f, SO(3))$  é um revestimento de duas folhas (cf. (3.10)) e que  $I$  tem ordem 60 (cf. (1.9)), deduzimos que  $I' = f^{-1}(I)$  é um subgrupo de  $S^3$  de ordem 120.

(4.2) Recordemos que  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  foi tomado como uma base ortonormal da álgebra  $H$  dos quatêrnios sobre os reais, e que  $\{e_1, e_2, e_3\}$  é a base do subespaço  $H_p$  dos quatêrnios puros (cf. (3.4)). Como vimos em (3.6), para cada quatêrnio  $q$  de  $S^3$ ,  $f(q) \in SO(3)$  é a transformação dada por  $f(q)q' = qq'q^{-1}$  para todo  $q' \in \mathbb{R}^3$ .

Observamos agora que



$$f(e_1)e_1 = e_1e_1e_1^{-1} = e_1 \quad ,$$

$$f(e_1)e_2 = e_1e_2e_1^{-1} = -e_2 \quad ,$$

$$f(e_1)e_3 = e_1e_3e_1^{-1} = -e_3 \quad .$$

Isto significa que  $f(e_1)$  é a rotação de  $180^\circ$  no  $\mathbb{R}^3$  em torno do eixo  $x_1$  gerado por  $e_1$ . Analogamente  $f(e_2)$  e  $f(e_3)$  são rotações de  $180^\circ$  no  $\mathbb{R}^3$  em torno dos eixos  $x_2$  e  $x_3$  gerados respectivamente por  $e_2$  e  $e_3$ .

(4.3) Em (1.11) construímos um cubo inscrito no dodecaedro regular. Segue dessa construção que o grupo das simetrias diretas do dodecaedro contém o grupo das simetrias diretas do cubo inscrito, e portanto que  $I$  contém as rotações de  $180^\circ$  em torno dos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ . Pela conclusão de (4.2) deduzimos então que  $f(e_i) \in I$ , donde  $e_i \in f^{-1}(I) = I' (1 \leq i \leq 3)$ .

Por outro lado, o comutador de  $e_1$  e  $e_2$  pertence a  $[I', I']$ . Como  $e_1e_2e_1^{-1}e_2^{-1} = -e_0$ , deduzimos que  $[I', I']$  contém  $\{\pm e_0\} = \text{Ker}(f)$ . É óbvio que  $\text{Ker}(f)$  é um subgrupo normal de  $S^3$ .

A seguinte asserção, cuja demonstração pode ser vista em Rotman, Th. 2.17, p. 27, será utilizada em (4.5).

(4.4) Lema: Sejam  $K$  um subgrupo normal de um grupo  $G$  e  $p: G \rightarrow G/K$  a projeção natural. Então  $p$  define uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os subgrupos de  $G$  que contêm  $K$  e o conjunto de todos os subgrupos de  $G/K$ . Se o subgrupo de  $G/K$  correspondente a  $S \subset G$  é denotado por  $S^*$ , valem:

(i)  $S^* = S/K = p(S)$  ;

(ii)  $T \subset S$  se e somente se  $T^* \subset S^*$ , e então  $(S:T) = (S^*:T^*)$  ;

(iii)  $T$  é normal em  $S$  se e somente se  $T^*$  é normal em  $S^*$ , e então  $S/T = S^*/T^*$ .

(4.5) Por (i) e (iii) de (4.4) temos  $I'/[I',I'] \cong I'^*/[I',I']^*$ , onde  $I'^* \cong I'/\{\pm e_0\}$  e  $[I',I']^* = [I',I']/\{\pm e_0\}$ . Pela própria definição de  $I'$  temos  $I'^* = I$ . Por outro lado, como  $I'/[I',I']$  é abeliano,  $I'^*/[I',I']^*$  é abeliano e como  $[I,I]$  é o menor subgrupo  $H$  de  $I$  tal que  $I/H$  é abeliano, vale  $[I,I] \subset [I',I']^*$ . Suponhamos que exista um subgrupo  $L$  de  $I$  tal que  $[I,I] \subset L \subsetneq [I',I']^*$ . Então existiria um subgrupo  $L'$  de  $I'$  que, pela biunivocidade da correspondência mencionada em (4.4), satisfaria  $L' \subsetneq [I',I']$ . Como  $I/L$  é abeliano se teria  $I'/L'$  abeliano, contradizendo o fato que  $[I',I']$  é o menor subgrupo  $H'$  de  $I'$  tal que  $I'/H'$  é abeliano. Logo um tal grupo  $L$  não pode existir, e então  $[I,I] = [I',I']^*$ .

Portanto,  $I'/[I',I'] \cong I/[I,I]$ , e como este último grupo é trivial por (1.15), temos  $I'/[I',I'] = 0$ .

Consideraremos agora o espaço quociente  $\Sigma^3 = SO(3)/I$ . Para atingir o objetivo descrito no início do capítulo utilizaremos o seguinte resultado da teoria de revestimentos, cuja demonstração pode ser vista em Lyra, Exemplo 3, p. 98.

(4.6) Lema: Sejam  $G$  um grupo topológico conexo e localmente conexo por caminhos e  $H$  um subgrupo discreto de  $G$ . Então a

projeção natural  $p: G \rightarrow G/H$  é uma projeção de revestimento.

(4.7) Definamos agora uma aplicação contínua  $f^*: S^3/I' \rightarrow SO(3)/I$  de modo que no diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S^3 & \xrightarrow{f} & SO(3) \\
 P_1 \downarrow & & \downarrow P_2 \\
 S^3/I' & \xrightarrow{f^*} & SO(3)/I
 \end{array}$$

onde  $p_1$  e  $p_2$  são projeções de revestimento por (4.6), valha  $f^* \circ p_1 = p_2 \circ f$ . Coloquemos para isso  $f^*(gI') = f(g)I$ , onde  $g \in S^3$ . Como  $I' = f^{-1}(I)$ , é claro que  $f^*$  está bem definida, é injetora, e torna o diagrama comutativo. Além disso  $f^*$  é sobrejetora, contínua e aberta, pois  $f$ ,  $p_1$  e  $p_2$  possuem estas propriedades por (3.10), (4.6) e a Prop. 14.2 de Lyra, p. 97. Portanto  $f^*$  é um homeomorfismo.

(4.8) Consideremos agora a aplicação  $\theta: I' \times S^3 \rightarrow S^3$  definida por  $\theta(g, x) = gx$  para todo  $g \in I'$  e todo  $x \in S^3$ , onde a justaposição indica o produto quaterniônico em  $S^3$ . É imediato verificar que  $\theta$  é uma ação de  $I'$  sobre  $S^3$  e que para cada  $g \in I'$  a aplicação  $\theta_g: S^3 \rightarrow S^3$  definida por  $\theta_g(x) = \theta(g, x)$  é um difeomorfismo de  $S^3$  (cf. Bredon, p. 33).

(4.9) Definição: Uma ação  $\theta: G \times X \rightarrow X$  é dita propriamente descontínua se cada ponto  $x \in X$  possui uma vizinhança  $U$  tal que  $U \cap (gU) = \emptyset$  para todos os elementos  $g$  de  $G$  diferentes da identidade  $e$ . Se esta condição é satisfeita dizemos também que o

grupo  $G$  age (ou atua) de maneira propriamente descontínua sobre  $X$ .

Decorre de Lyra, Exemplo 3, pp. 98-99, que a ação  $\theta$  de  $I'$  sobre  $S^3$  definida em (4.8) é propriamente descontínua.

(4.10) Como  $S^3$  é simplesmente conexo (cf. Lyra, Teor.10.4, p. 50) o revestimento  $(S^3, p_1, S^3/I')$  é universal. Utilizando o Cor. 17.8, p. 124, e o Teor. 17.14, p. 127, de Lyra, e a asserção incluída em (4.9), deduzimos que  $\pi_1(S^3/I')=I'$ . Por (4.7) temos então  $\pi_1(\Sigma^3)=I'$ .

Os resultados que seguem serão utilizados para munir  $\Sigma^3$  de uma estrutura de variedade  $C^\infty$  orientável. A nossa referência principal a este respeito é Brickell-Clark, pp. 119 e seguintes.

(4.11) Definição: Seja  $M$  uma variedade  $C^\infty$ . Dizemos que  $M$  é orientável no sentido da geometria diferencial (ou simplesmente, orientável) se existe um atlas  $A$  sobre  $M$  tal que para todo par  $(U, \phi), (V, \psi)$  de elementos de  $A$  vale  $\det D(\psi\phi^{-1}) > 0$  sobre  $\phi(U \cap V)$ . Um par  $(M, A)$  é denominado uma variedade orientada. Uma orientação sobre  $M$  é uma escolha de atlas  $A$  sobre  $M$  que satisfaz a condição acima.

(4.12) Definição: Sejam  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita  $n$  e  $B=\{e_1, \dots, e_n\}$  e  $B'=\{e'_1, \dots, e'_n\}$  duas bases de  $V$ , de modo que

$$e_j' = \sum_{i=1}^n A_{ji} e_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

onde  $A = (A_{ji})$  é uma matriz real não singular. A relação de equivalência " $B \sim B'$ " se e somente se  $\det A > 0$ " nos fornece uma partição do conjunto das bases de  $V$  em duas classes de equivalência. Cada uma dessas classes é chamada uma orientação de  $V$ .

(4.13) Lema: Seja  $M$  uma variedade  $C^\infty$  de dimensão  $n$ . Então uma carta local  $(U, h)$  de  $M$ , onde  $U$  é conexa e  $h = (h^1, \dots, h^n)$ , determina para cada  $\omega \in U$  uma orientação no espaço tangente  $T_\omega M$ , dada pela base  $\{(\partial/\partial h^1)_\omega, \dots, (\partial/\partial h^n)_\omega\}$  desse espaço. Além disso,  $M$  é orientável se e somente se existe um atlas  $A$  sobre  $M$  tal que para todo par  $(U, \phi), (V, \psi)$  de elementos de  $A$  com  $U \cap V \neq \emptyset$ , o determinante da matriz mudança de bases determinadas por  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  em  $T_\omega M$ ,  $\omega \in U \cap V$ , for estritamente positivo.

Demonstração: A primeira asserção decorre das definições. Suponhamos  $M$  orientável. Por (4.11) existe um atlas  $A$  sobre  $M$  tal que para todo par  $(U, \phi), (V, \psi)$  de elementos de  $A$  vale  $\det D(\psi\phi^{-1}) > 0$  sobre  $\phi(U \cap V)$ . Mas por (4.12) isto quer dizer que as bases determinadas em  $T_\omega M$ ,  $\omega \in U \cap V$ , por  $(U, \phi)$  e  $(V, \psi)$  pertencem à mesma orientação de  $T_\omega M$ . A recíproca é análoga.

(4.14) Definição : Seja  $M$  uma variedade  $C^\infty$ . Uma orientação sobre  $M$  é uma aplicação  $\theta$  que associa a cada  $m \in M$  uma base do espaço tangente  $T_m M$  determinada como em (4.13) por uma carta local  $(U, \phi)$  tal que  $U$  é conexa e  $m \in U$ . Chamamos o par  $(M, \theta)$  de variedade orientada.

Por (4.13) as definições que acabamos de dar são equiva-

lentes às introduzidas em (4.11).

(4.15) Definição: Sejam  $M$  uma variedade  $C^\infty$  orientada (no sentido de (4.14)) e  $\Phi$  um difeomorfismo de  $M$  sobre si mesmo. Dizemos que  $\Phi$  preserva a orientação de  $M$  se para cada  $m \in M$  o isomorfismo  $d\Phi_m: T_m M \rightarrow T_{\Phi(m)} M$  associa a cada base de  $T_m M$  da orientação de  $M$  uma base de  $T_{\Phi(m)} M$  da mesma orientação.

(4.16) Lema: Seja  $\theta: I' \times S^3 \rightarrow S^3$  a ação de  $I'$  sobre  $S^3$  dada em (4.8). Então para cada  $g \in I'$ , o difeomorfismo  $\theta_g: S^3 \rightarrow S^3$  preserva a orientação de  $S^3$ .

Demonstração:  $S^3$  é orientada por e.g. Brickell-Clark, Example 7.4.3, p. 120. Fixemos uma orientação sobre  $S^3$ .

Por (4.8) temos  $\theta_g(x) = gx$  para todo  $g \in I'$  e todo  $x \in S^3$ , onde a justaposição indica o produto quaterniônico. Escrevamos  $g = (g_0, g_1, g_2, g_3)$  e  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  na base  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  do Capítulo III. Então, definindo  $\tilde{\theta}_g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  por  $\tilde{\theta}_g(x) = gx$ ,  $\tilde{\theta}_g$  é uma extensão de  $\theta_g$  a  $\mathbb{R}^4$  e

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_g(x) &= gx = (g_0, g_1, g_2, g_3)(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ &= (g_0 x_0 - g_1 x_1 - g_2 x_2 - g_3 x_3, \\ &\quad g_1 x_0 + g_0 x_1 - g_3 x_2 + g_2 x_3, \\ &\quad g_2 x_0 + g_3 x_1 + g_0 x_2 - g_1 x_3, \\ &\quad g_3 x_0 - g_2 x_1 + g_1 x_2 + g_0 x_3) \end{aligned}$$

Observamos que a matriz jacobiana de  $\tilde{\theta}_g$  é dada por

$$\begin{bmatrix} g_0 & -g_1 & -g_2 & -g_3 \\ g_1 & g_0 & -g_3 & g_2 \\ g_2 & g_3 & g_0 & -g_1 \\ g_3 & -g_2 & g_1 & g_0 \end{bmatrix}$$

O determinante  $\Delta$  desta matriz vale  $(g_0^2 + g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)^2$  para qualquer  $(g_0, g_1, g_2, g_3) \in I'$ . Como  $I' \subset S^3$  temos  $\Delta=1$ , logo  $\tilde{\theta}_g$  é uma transformação ortogonal de  $\mathbb{R}^4$  sobre si mesmo.

Sejam  $x \in S^3$  e  $B_x = \{v_{x1}, v_{x2}, v_{x3}\}$  uma base de  $T_x S^3$  pertencente à orientação fixada no início. Complete-mos  $B_x$  a uma base  $\tilde{B}_x = \{v_{x1}, v_{x2}, v_{x3}, x\}$  de  $T_x \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4$ , onde  $x$  é um vetor unitário que pode ser visualizado como "apontando para o exterior" de  $S^3$ . Seja agora  $g \in I'$ . Como  $\tilde{\theta}_g$  é uma transformação ortogonal de  $\mathbb{R}^4$  sobre si mesmo,  $\tilde{\theta}_g$  preserva orientações neste espaço vetorial, e a matriz  $(\tilde{\theta}'_g(x))$  da derivada

$$\tilde{\theta}'_g(x) : T_x \mathbb{R}^4 \longrightarrow T_{\tilde{\theta}_g(x)} \mathbb{R}^4$$

com respeito às bases  $\tilde{B}_x$  de  $T_x \mathbb{R}^4$  e  $\tilde{B}_{\tilde{\theta}_g(x)}$  de  $T_{\tilde{\theta}_g(x)} \mathbb{R}^4$  tem determinante positivo.

Por outro lado,  $\tilde{\theta}'_g(x) = \tilde{\theta}_g$  pois  $\tilde{\theta}_g$  é uma transformação linear. Como  $x$  é normal a  $T_x S^3$  e a transformação  $\tilde{\theta}'_g(x)$  é ortogonal, o vetor  $\tilde{\theta}'_g(x)x = gx$  é normal a  $T_{\tilde{\theta}_g(x)} S^3$ . Logo a matriz  $\tilde{\theta}'_g(x)$  é da forma

$$\begin{bmatrix} (\tilde{\theta}'_g(x)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $(\theta'_g(x))$  é a matriz de  $\theta'_g(x)$  com respeito à base  $B_x$  de  $T_x S^3$  e à base de  $T_{\theta_g(x)} S^3$  composta pelos três primeiros vetores de  $\bar{B}_{\theta_g(x)}$ . Então  $\det(\bar{\theta}'_g(x)) = \det(\theta'_g(x))$ , donde  $\det(\theta'_g(x)) > 0$  pois  $\det(\bar{\theta}'_g(x)) > 0$ . Como a restrição de  $\bar{\theta}'_g(x)$  a  $T_x S^3$  coincide com  $\theta'_g(x)$ , deduzimos que a base

$$B_{\theta_g(x)} = \{\theta'_g(x)v_{x1}, \theta'_g(x)v_{x2}, \theta'_g(x)v_{x3}\}$$

de  $T_{\theta_g(x)} S^3$  pertence à mesma orientação de  $S^3$  que  $B_x$ . Logo cada  $\theta_g$  preserva a orientação de  $S^3$ , como queríamos.

A demonstração do seguinte resultado pode ser achada em Brickell-Clark, Prop. 6.5.1, p. 98, e Prop. 7.4.6, p. 122.

(4.17) Lema: Sejam  $M$  uma variedade  $C^\infty$  e  $G$  um grupo de transformações que atua de maneira propriamente descontínua sobre  $M$ . Então o espaço quociente  $M/G$  é uma variedade  $C^\infty$  da mesma dimensão que  $M$  e sem bordo. Seja  $\theta$  a ação de  $G$  sobre  $M$  e para cada  $g \in G$  seja  $\theta_g$  o difeomorfismo de  $M$  definido como em (4.8). Então  $M/G$  é orientável se e somente se existe uma orientação sobre  $M$  que é preservada por cada  $\theta_g$ .

(4.18) Por (4.9), (4.16) e (4.17) temos que  $S^3/I'$  é uma variedade  $C^\infty$  de dimensão 3, sem bordo e orientável. Transportando a  $\sum^3$  a estrutura de variedade  $C^\infty$  de  $S^3/I'$  por meio do homeomorfismo  $f^*$  de (4.7) deduzimos que  $\sum^3$  possui uma estrutura de variedade  $C^\infty$  e que  $f^*$  é um difeomorfismo. (De passo, observemos que por ser  $\sum^3$  de dimensão 3 a estrutura de variedade  $C^\infty$  que acabamos de definir é equivalente à definida sobre  $\sum^3$  por



meio de  $p_2$  e a primeira asserção de (4.17); cf. Lima, p. 175). Portanto,  $\Sigma^3$  é uma variedade  $C^\infty$  de dimensão 3, sem bordo e orientável. Notemos também que  $\Sigma^3$  é conexa (logo conexa por caminhos) e compacta.

Passaremos agora a estudar os grupos de homologia singular de  $\Sigma^3$  com coeficientes inteiros.

(4.19) Como  $\Sigma^3$  é conexo por caminhos, por Vick, Prop. 1.4, p. 9, obtemos  $H_0(\Sigma^3, Z) = Z$ .

O cálculo de  $H_1(\Sigma^3, Z)$  segue do resultado seguinte, cuja demonstração pode ser achada em Greenberg, Theor. 12.1, p.48.

(4.20) Lema: Existe um homomorfismo de grupos  $X: \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X, Z)$  que leva cada classe de homotopia de um laço  $\gamma$  na classe de homologia do 1-simplexo singular  $\gamma$ . Se  $X$  é conexo por caminhos,  $X$  é sobrejetor e o seu núcleo é o subgrupo dos comutadores de  $\pi_1(X, x_0)$ .

(4.21) Segue de (4.20) que se  $X$  é conexo por caminhos temos um isomorfismo

$$H_1(X, Z) \cong \pi_1(X, x_0) / [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$$

Como  $\pi_1(\Sigma^3) = I'$  por (4.10) e  $I' / [I', I'] = 0$  por (4.5), temos  $H_1(\Sigma^3, Z) = I' / [I', I'] = 0$ .

No cálculo de  $H_2(\Sigma^3, Z)$  e  $H_3(\Sigma^3, Z)$  serão utilizados os três resultados seguintes. A demonstração do primeiro deles pode ser encontrada em Husemoller, Theor. 4.3, p. 251.

(4.22) Lema: Seja  $M$  uma variedade  $C^\infty$ . Então as duas condições seguintes são equivalentes:

i)  $M$  é orientável no sentido da geometria diferencial; cf. (4.11).

ii)  $M$  é orientável no sentido da topologia algébrica; para a definição deste conceito nos referimos a op. cit., Def. 4.1, p. 251, ou a Greenberg, pp. 111 e seguintes.

O segundo dos resultados que usaremos é essencialmente o teorema da dualidade de Poincaré, para o qual nos referimos a Spanier, Theor. 18, p. 297.

(4.23) Lema: Seja  $X$  uma variedade topológica de dimensão  $n$ , compacta, orientável e sem bordo. Então para todo inteiro  $q$  ( $0 \leq q \leq n$ ) existe um isomorfismo  $H_q(X, Z) \cong H^{n-q}(X, Z)$ .

O terceiro dos resultados que utilizaremos é o seguinte corolário do teorema dos coeficientes universais para cohomologia; cf. Greenberg, Cor. (23.14), p. 134.

(4.24) Lema: Se  $H_{q-1}(X, Z)$  é livre temos um isomorfismo  $H^q(X, Z) \cong (H_{q-1}(X, Z))^*$ , onde  $A^*$  denota o grupo dual  $\text{Hom}(A, Z)$  do grupo abeliano  $A$ .

(4.25) Calculemos agora o grupo  $H_2(\Sigma^3, Z)$ . Por (4.18) e (4.22) podemos aplicar (4.23) e obter um isomorfismo  $H_2(\Sigma^3, Z) \cong H^1(\Sigma^3, Z)$ ; e por (4.24) temos um isomorfismo  $H^1(\Sigma^3, Z) \cong (H_1(\Sigma^3, Z))^*$  pois  $H_0(\Sigma^3, Z) \cong Z$  é livre. Mas  $H_1(\Sigma^3, Z) = 0$  por (4.21), logo  $H_2(\Sigma^3, Z) = 0$ .

No cálculo de  $H_3(\Sigma^3, Z)$  utilizaremos o seguinte resultado, que decorre do Cor. (22.28) de Greenberg, p. 121.

(4.26) Lema: Seja  $X$  uma variedade topológica de dimensão  $n$ , compacta, conexa, orientável e sem bordo. Então  $H_n(X, Z) \cong Z$ .

(4.27) De (4.18), (4.22) e (4.26) deduzimos que  $H_3(\Sigma^3, Z) \cong Z$ .

Resumiremos agora o conteúdo deste capítulo na seguinte proposição, cuja demonstração decorre de (4.18), (4.19), (4.21), (4.25), (4.27) e de e.g. Greenberg, Cor. (15.5), p. 62.

(4.28) Proposição: Sejam  $I$  o grupo icosaédrico e  $\Sigma^3$  o espaço  $SO(3)/I$ . Então  $\Sigma^3$  é uma variedade  $C^\infty$  de dimensão 3, compacta, conexa, orientável e sem bordo, que possui a mesma homologia sobre os inteiros que a esfera usual  $S^3$ .

CAPITULO V  
 AÇÕES SEM PONTOS FIXOS DO GRUPO ICOSAÉDRICO  
 SOBRE VARIEDADES ACÍCLICAS

Começamos este capítulo considerando a ação natural do grupo icosaédrico  $I$  sobre a variedade  $\Sigma^3 = SO(3)/I$  estudada no Capítulo IV. Utilizando o resultado principal do Capítulo II mostramos primeiramente que o único ponto fixo dessa ação é  $I$ . A seguir observamos que essa ação conserva a métrica riemanniana de  $\Sigma^3$ , de modo que existe um 3-disco aberto  $U$  em  $\Sigma^3$  centrado em  $I$  que é deixado invariante. Isto nos permite obter uma ação sem pontos fixos do grupo icosaédrico sobre a variedade  $C^\infty$ , compacta e com bordo  $\Sigma^3 - U$ . Na parte final deste capítulo demonstramos que esta variedade é acíclica sobre os inteiros.

Como foi mencionado na Introdução deste trabalho, a ação do grupo icosaédrico estudada aqui é uma peça fundamental na construção, devida a E.E. Floyd e R.W. Richardson, de uma ação sem pontos fixos desse grupo sobre um disco em um espaço euclidiano. Para mais detalhes a respeito desse exemplo referimo-nos a Bredon, pp. 57-58.

(5.1) Definição: Seja  $(G, X, \theta)$  um grupo de transformações. Um ponto  $x \in X$  é um ponto fixo da ação  $\theta$  se  $\theta(g, x) = x$  para todo  $g \in G$ . A ação  $\theta$  é livre (ou sem pontos fixos) se  $\theta(g, x) = x$  implica  $g = I$ , para todo  $x \in X$ .

(5.2) Proposição: Existe uma ação de  $I$  sobre  $\Sigma^3$  cujo único ponto fixo é  $I$ .

Demonstração: Consideremos a ação  $\phi: I \times \Sigma^3 \rightarrow \Sigma^3$  de  $I$  sobre  $\Sigma^3$  dada por  $\phi(g', gI) = (g'g)I$ . Então um ponto  $gI$  de  $\Sigma^3$  é fi

xado por essa ação se e somente se  $g \in N(I)$ . De fato, a relação  $(g'g)I = gI$  para  $g' \in I$  e  $g \in \Sigma^3$  significa que  $g \in N(I)$ . Mas por (2.14) temos  $N(I) = I$ . Logo  $I \in \Sigma^3$  é o único ponto fixo da ação  $\phi$ .

Agora estudaremos a estrutura riemanniana que pode ser colocada na variedade  $\Sigma^3$  através da projeção de revestimento  $p: SO(3) \rightarrow \Sigma^3$ . (Em (4.7) esta aplicação foi chamada  $p_2$ ). As nossas principais referências para esta parte são Bishop-Crittenden, Cap. 7, e Lima, Cap. 9.

(5.3) Definição: Uma variedade riemanniana é uma variedade de  $C^\infty$  e conexa  $M$  munida em cada  $m \in M$  de uma forma bilinear simétrica positiva definida  $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ , definida no espaço tangente  $T_m M$ , tal que para qualquer carta local  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $M$  em  $m$  as funções  $g_{ij} = \langle (\partial/\partial x^i)_m, (\partial/\partial x^j)_m \rangle_m$  são  $C^\infty$ . A correspondência  $m \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_m$  é chamada uma métrica riemanniana sobre  $M$ .

(5.4) Definição: Seja  $M$  uma variedade riemanniana. A distância intrínseca  $d(p, q)$  entre dois pontos  $p, q \in M$  é definida como

$$d(p, q) = \inf l(\alpha) ,$$

onde  $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$  é uma curva  $C^1$  por partes em  $M$  ligando  $p$  e  $q$ , e

$$l(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)}} dt .$$

Se  $M$  é uma variedade  $C^\infty$  conexa com uma métrica riemanniana, a distância intrínseca acima definida é uma métrica sobre  $M$ , e a topologia dada por ela coincide com a topologia original de  $M$  (cf. loc. cit.). Sabemos também que toda variedade pa racompacta admite uma métrica riemanniana.

(5.5) Definição: Um revestimento riemanniano é um revestimento  $(E, p, X)$  onde  $E$  e  $X$  são variedades riemannianas,  $p$  é uma aplicação  $C^\infty$ , e para cada  $\omega \in E$  e todo  $x, y \in T_\omega E$  vale

$$\langle x, y \rangle_\omega = \langle dp(x), dp(y) \rangle_{p(\omega)} .$$

(5.6) Seja  $(E, p, X)$  um revestimento, onde  $E$  é uma variedade  $C^\infty$ ,  $p$  uma aplicação  $C^\infty$  e  $X$  uma variedade riemanniana. Então  $E$  admite uma métrica riemanniana natural induzida pela projeção  $p$  de tal maneira que  $(E, p, X)$  se torna riemanniano. De fato, para cada ponto  $\omega$  de  $E$  definimos um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  em  $T_\omega E$  por  $\langle x, y \rangle_\omega = \langle dp(x), dp(y) \rangle_{p(\omega)}$ . Como  $p$  é  $C^\infty$  e o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{p(\omega)}$  depende diferenciavelmente de  $p(\omega)$ , a correspondência  $\omega \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  é uma métrica riemanniana sobre  $E$ .

Um problema menos trivial surge quando  $(E, p, X)$  é um revestimento onde  $E$  é uma variedade riemanniana,  $X$  é uma variedade  $C^\infty$ ,  $p$  é uma aplicação  $C^\infty$  e desejamos uma métrica sobre  $X$  tal que o revestimento seja riemanniano. Para resolver esse problema utilizaremos a seguinte definição.

(5.7) Definição: Sejam  $E$  uma variedade riemanniana e  $G$  um grupo agindo diferenciavelmente sobre  $E$ . Dizemos que a ação de

$G$  sobre  $E$  é dada por isometrias se para todo  $g \in G$ , cada  $\omega \in E$  e todo  $x, y \in T_\omega E$  vale  $\langle x, y \rangle_\omega = \langle d\theta_g(x), d\theta_g(y) \rangle_{\theta_g(\omega)}$ .

(5.8) Se  $G$  age por isometrias sobre a variedade riemanniana  $E$ , cada difeomorfismo  $\theta_g (g \in G)$  é uma isometria do espaço métrico  $(E, d)$ , onde  $d$  é a distância intrínseca sobre  $E$  (cf.(5.4)). De fato, sejam  $p$  e  $q$  pontos de  $E$ ,  $\alpha : [0, 1] \rightarrow E$  uma curva  $C^1$  por partes em  $E$  ligando  $p$  e  $q$ , e  $g$  um elemento de  $G$ . Então  $\theta_g \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow E$  é uma curva  $C^1$  por partes em  $E$  ligando  $\theta_g(p)$  e  $\theta_g(q)$ , e pelo teorema da função composta temos

$$\begin{aligned} \ell(\theta_g \circ \alpha) &= \int_0^1 \sqrt{\langle d\theta_g(\alpha'(t)), d\theta_g(\alpha'(t)) \rangle_{\theta_g(\alpha(t))}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle_{\alpha(t)}}}{\alpha'(t)} dt = \ell(\alpha) \end{aligned}$$

Portanto  $d(\theta_g(p), \theta_g(q)) = d(p, q)$ , como queríamos.

(5.9) Proposição: Seja  $(E, p, X)$  um revestimento onde  $E$  é uma variedade de riemanniana,  $X$  é uma variedade  $C^\infty$  e  $p$  é uma aplicação  $C^\infty$ . Suponhamos que a ação do grupo  $\text{Aut}(E, p, X)$  sobre  $E$  seja propriamente descontínua e dada por isometrias. Então existe uma métrica riemanniana induzida naturalmente sobre  $X$  que torna  $(E, p, X)$  um revestimento riemanniano.

Demonstração: Seja  $m$  um elemento arbitrário de  $X$  e  $U$  uma vizinhança admissível de  $m$ . Então  $p^{-1}(U)$  é uma reunião disjunta de abertos de  $E$  cada um deles contendo apenas um elemento da fibra  $p^{-1}(m)$  sobre  $m$ . Chamando um desses elementos de  $\omega$  os outros elementos de  $p^{-1}(m)$  são da forma  $g(\omega)$  onde  $g$  pertence ao grupo  $\text{Aut}(E, p, X)$  dos automorfismos de revestimento  $(E, p, X)$ .

Com efeito, por ser a ação de  $\text{Aut}(E,p,X)$  propriamente descontínua, o revestimento  $(E,p,X)$  é regular (cf. Lyra, Teor.17.14, p. 127), logo  $\text{Aut}(E,p,X)$  age transitivamente sobre  $p^{-1}(m)$  (cf. op. cit., Teor. 17.9, p. 124). Denotando por  $V$  a vizinhança de  $\omega$  que é difeomorfa a  $U$ , podemos denotar os demais abertos de  $p^{-1}(U)$  por  $g(V)$  para  $g \in \text{Aut}(E,p,X)$ .

Como  $p$  é um difeomorfismo local, a aplicação  $dp_{\omega}:T_{\omega}E \rightarrow T_m X$  é um isomorfismo para todo  $\omega' \in p^{-1}(m)$ , logo qualquer vetor tangente de  $T_m X$  é da forma  $dp_{\omega'}(z)$  para um (único)  $z \in T_{\omega'}E$ . Agora em  $T_{\omega}E$ , onde  $\omega$  é o elemento de  $p^{-1}(m)$  escolhido acima, está definido o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega}$  da estrutura riemanniana de  $E$ . Definamos em  $T_m X$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$  por

$$\langle \xi, \eta \rangle_m = \langle x, y \rangle_{\omega}$$

para cada  $\xi, \eta \in T_m X$ , onde  $x, y \in T_{\omega}E$  são tais que  $\xi = dp_{\omega}(x), \eta = dp_{\omega}(y)$ . Devemos demonstrar que esta definição não depende da escolha de  $\omega$ . Seja então  $\omega' = g(\omega)$  um elemento na fibra  $p^{-1}(m)$ , e  $x', y' \in T_{\omega'}E$  tais que  $\xi = dp_{\omega'}(x'), \eta = dp_{\omega'}(y')$ . Como  $p = p \circ g$  vale  $dp_{\omega} = dp_{\omega'} \circ dg_{\omega}$ , logo  $dp_{\omega'}(dg_{\omega}(x)) = \xi = dp_{\omega'}(x')$ , e como  $dp_{\omega'}$  é um isomorfismo resulta  $x' = dg_{\omega}(x)$ . Analogamente  $y' = dg_{\omega}(y)$ , e como  $\text{Aut}(E,p,X)$  age por isometrias temos  $\langle x', y' \rangle_{\omega'} = \langle dg_{\omega}(x), dg_{\omega}(y) \rangle_{\omega'} = \langle x, y \rangle_{\omega}$ . Portanto, o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$  sobre  $T_m X$  está bem definido.

Além disso, a correspondência  $m \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_m$  é  $C^{\infty}$ , logo é uma métrica riemanniana sobre  $X$ . Assim, o revestimento  $(E,p,X)$  é riemanniano, como desejávamos.

(5.10) Corolário: O revestimento  $(S^3, p, \Sigma^3)$  de (4.7) é riemanniano.

Demonstração: Por Lima, Exemplo 2, p. 252, sabemos que  $S^3$  possui uma métrica riemanniana natural, a saber, a indu-



zida pela métrica euclidiana de  $\mathbb{R}^9$ . Seja  $\psi: I \times SO(3) \rightarrow SO(3)$  a ação de  $I$  sobre  $SO(3)$  dada por  $\psi(g, x) = gx$ . Cada elemento  $g \in I \subset SO(3)$  é uma transformação linear ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  e portanto preserva o produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$ . Como o produto interno usual de  $T_\omega SO(3) = \mathbb{R}^3$  (cf. Chevalley, Prop. 6, p. 8) é o induzido pelo produto interno usual de  $\mathbb{R}^9$  para cada  $\omega \in SO(3)$ ,  $\psi$  é dada por isometrias. Usando o fato de que  $I = \text{Aut}(SO(3), p, \Sigma^3)$  (cf. Lyra, Teor. 17.14, p. 127) o resultado segue de (5.9).

(5.11) Proposição: Seja  $\phi: I \times \Sigma^3 \rightarrow \Sigma^3$  a ação de  $I$  sobre  $\Sigma^3$  da Prop. (5.2). Então existe um 3-disco aberto  $U$  de  $\Sigma^3$  centrado no ponto fixo  $I$  da ação  $\phi$  e invariante sob esta ação.

Demonstração: Sejam  $d_o$  e  $d$  as distâncias intrínsecas das variedades riemannianas  $SO(3)$  e  $\Sigma^3$ , respectivamente. Como  $p: SO(3) \rightarrow \Sigma^3$  é uma projeção de revestimento riemanniano por (5.10), ela é uma isometria local. Portanto existe  $\epsilon' > 0$  tal que se

$$B_{\epsilon'}(I) = \{g \in \Sigma^3 : d(g, I) < \epsilon'\}$$

é o disco aberto em  $\Sigma^3$  centrado em  $I$  e de raio  $\epsilon'$ , a restrição  $p|_{p^{-1}(B_{\epsilon'}(I))}$  é uma isometria de  $p^{-1}(B_{\epsilon'}(I))$  sobre  $B_{\epsilon'}(I)$ . Logo, para quaisquer elementos  $gI, g'I$  de  $B_{\epsilon'}(I)$  temos

$$d(gI, g'I) = d_o(g, g') \quad (1)$$

Para cada  $\gamma \in I$  a aplicação  $\phi_\gamma: \Sigma^3 \rightarrow \Sigma^3$  definida por  $\phi_\gamma(gI) = \gamma gI$  para cada  $g \in \Sigma^3$  é contínua sobre  $\Sigma^3$ , e em particular no ponto  $I = \gamma I$ . Portanto, para cada  $\gamma$  e  $\epsilon'$  como acima existe  $\delta_\gamma > 0$  tal que  $d(gI, I) < \delta_\gamma$  implica

$$d(\phi_\gamma(gI), \phi_\gamma(I)) = d(\gamma gI, I) < \epsilon' \quad (2)$$

Seja agora  $\epsilon > 0$  tal que  $\epsilon < \min\{\epsilon', \min\{\delta_\gamma, \gamma \in I\}\}$  e tão pequeno que  $B_{2\epsilon}(I)$  esteja contido numa carta local em  $I$ . Tal  $\epsilon$  existe por  $I$  ser finito. Demonstraremos que  $U = B_\epsilon(I)$  é invariante sob a ação de  $I$ , isto é (cf. Bredon, p. 33) que  $\phi_\gamma(U) = U$  para todo  $\gamma \in I$ . Sejam então  $\gamma \in I$  e  $g \in U$ , de modo que  $d(g, I) < \epsilon < \epsilon'$ . Por (1) temos

$$d_0(g, \gamma) = d(g, \gamma I) = d(g, I) < \epsilon. \quad (3)$$

Por outro lado, como  $d(g, I) < \epsilon < \delta_\gamma$ , temos  $d(\gamma g, I) < \epsilon'$  por (2), donde  $d(\gamma g, \gamma^2 I) = d_0(\gamma g, \gamma^2)$  novamente por (1). Mas  $d_0(\gamma g, \gamma^2) = d_0(g, \gamma)$  porque a ação de  $I$  sobre  $S^0(3)$  é dada por isometrias (cf. (5.10) e (5.8)). Logo temos

$$d(\gamma g, I) = d(\gamma g, \gamma^2 I) = d_0(g, \gamma) < \epsilon$$

por (3). Isto mostra que  $\gamma g \in U$ , donde  $\phi_\gamma(U) \subset U$ . Como  $\gamma \in I$  era qualquer, vale também  $\phi_{\gamma^{-1}}(U) \subset U$ , ou seja  $U \subset \phi(U)$ . Então  $\phi_\gamma(U) = U$ , como queríamos demonstrar.

A Prop. (5.11) nos permite restringir a ação  $\phi$  ao espaço  $\sum^3 - U$ . É evidente que essa ação de  $I$  sobre  $\sum^3 - U$  é sem pontos fixos e que  $\sum^3 - U$  é uma variedade  $C^\infty$  de dimensão 3, compacta e com bordo.

(5.12) Definição: Um espaço topológico  $X$  conexo por caminhos é dito acíclico sobre os inteiros se  $H_0(X, Z) = Z$  e  $H_q(X, Z) = 0$  para todo  $q \geq 1$ .

No que se segue escreveremos simplesmente  $H_q(X)$  e  $H^q(X)$  em lugar de  $H_q(X, Z)$  e  $H^q(X, Z)$ , respectivamente.

(5.13) O espaço  $\Sigma^3 - U$  é conexo por caminhos porque é foi escolhido de maneira que  $B_{2\varepsilon}(I)$  estivesse contido numa carta local  $(V, h)$  de  $I$  em  $\Sigma^3$ , onde  $V$  é um aberto de  $\Sigma^3$  homeomorfo a um aberto de  $\mathbb{R}^3$  conexo por caminhos. Logo  $V - U$  é conexo por caminhos, donde  $\Sigma^3 - U$  também o é. Decorre então de e.g. Vick, Prop. 1.4, p. 9, que  $H_0(\Sigma^3 - U) = \mathbb{Z}$ .

(5.14) Para calcular  $H_1(\Sigma^3 - U)$  utilizamos a sequência de Mayer-Vietoris. Esta sequência fornece a homologia de um espaço  $X$  em termos da homologia das componentes de uma certa cobertura de  $X$  (cf. Vick, pp. 23-25). Sejam  $d, \varepsilon, U, B_{\varepsilon/2}(I)$  e  $B_{3\varepsilon/2}(I)$  como em (5.11) e consideremos os subconjuntos  $A_1 = \Sigma^3 - B_{\varepsilon/2}(I)$  e  $A_2 = B_{3\varepsilon/2}(I)$  de  $\Sigma^3$ . Então  $\overset{\circ}{A}_1 \cup \overset{\circ}{A}_2 = \Sigma^3$ , onde  $\overset{\circ}{A}$  denota o interior de  $A$ , e  $A_1 \cap A_2 = \{gI \in \Sigma^3 : \varepsilon/2 \leq d(gI, I) < 3\varepsilon/2\}$ . Observamos agora que  $\Sigma^3 - U$  é um retrato de deformação de  $A_1$  e que  $U$  é um retrato de deformação de  $A_2$ . Além disso,  $A_1 \cap A_2$  é do mesmo tipo de homotopia que  $S^2$ . A sequência de Mayer-Vietoris pode então ser escrita na forma

$$\dots \rightarrow H_1(S^2) \rightarrow H_1(\Sigma^3 - U) \oplus H_1(U) \rightarrow H_1(\Sigma^3) \rightarrow \dots$$

Como  $H_1(S^2) = 0$  e  $H_1(\Sigma^3) = 0$  (cf. (4.21)) temos  $H_1(\Sigma^3 - U) \oplus H_1(U) = 0$ . Portanto  $H_1(\Sigma^3 - U) = 0$ .

No cálculo de  $H_2(\Sigma^3 - U)$  e  $H_3(\Sigma^3 - U)$  utilizaremos o seguinte fato.

(5.15) Lema: Sejam  $X$  um espaço conexo por caminhos,  $A$  um subespaço de  $X$  não vazio e conexo por caminhos, e  $B$  um grupo abeliano. Então a inclusão  $i: A \rightarrow X$  induz um isomorfismo

$$i^*: H^0(X, B) \longrightarrow H^0(A, B).$$

Demonstração: Por e.g. Vick, p. 93, sabemos que  $H^0(X, B) = Z^0(X, B)$  e que se  $X$  é conexo por caminhos  $Z^0(X, B)$  se identifica com o conjunto das funções constantes sobre  $X$  com valores em  $B$ . Seja  $i^*: H^0(X, B) \rightarrow H^0(A, B)$  a aplicação definida por  $i^*(\phi) = \phi \circ i$  para cada  $\phi \in H^0(X, B)$ . Se  $\psi \in H^0(X, B)$  temos  $i^*(\phi + \psi) = (\phi + \psi) \circ i = (\phi \circ i) + (\psi \circ i)$ , o que mostra que  $i^*$  é um homomorfismo de grupos. Seja  $\phi \in H^0(X, B)$  tal que  $i^*(\phi) = \phi \circ i = 0$ . Então  $\phi|_A = 0$ , e como  $\phi$  é constante sobre  $X$  temos  $\phi = 0$ , logo  $i^*$  é um monomorfismo. Finalmente, seja  $\psi \in H^0(A, B)$ , coloquemos  $b = \psi(A)$ , e definamos  $\phi \in H^0(X, B)$  por  $\phi(x) = b$  para todo  $x \in X$ . Então  $\psi = \phi|_A = \phi \circ i = i^*(\phi)$ , donde  $i^*$  é um epimorfismo, como queríamos.

Também utilizaremos o seguinte resultado, que é essencialmente o teorema de dualidade de Lefschetz (cf. Spanier, Theor. 20, p. 298). Lembramos antes (cf. op. cit., p. 297) que uma variedade topológica  $n$ -dimensional  $X$  com bordo  $\dot{X}$  é dita orientável se e somente se  $X - \dot{X}$  é orientável.

(5.16) Lema: Seja  $X$  uma variedade topológica  $n$ -dimensional, compacta, orientável e com bordo  $\dot{X}$ . Então existem isomorfismos  $H_q(X) \approx H^{n-q}(X, \dot{X})$  para todo  $q$  ( $0 \leq q \leq n$ ).

(5.17) Como  $(\Sigma^3 - U) - (\Sigma^3 - U)^\circ$  é uma subvariedade aberta da variedade orientável  $\Sigma^3$ , ela é orientável, e portanto  $\Sigma^3 - U$  é orientável. Como o bordo  $(\Sigma^3 - U)^\circ$  é homeomorfo a  $S^2$ , (5.16) fornece isomorfismos

$$H_2(\Sigma^3 - U) \approx H^1(\Sigma^3 - U, S^2)$$

$$H_3(\Sigma^3-U) \approx H^0(\Sigma^3-U, S^2) \quad .$$

A sequência exata de cohomologia do par  $(\Sigma^3-U, S^2)$  é

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\Sigma^3-U, S^2) \xrightarrow{g} H^0(\Sigma^3-U) \xrightarrow{h} H^0(S^2) \\ \xrightarrow{\delta} H^1(\Sigma^3-U, S^2) \rightarrow H^1(\Sigma^3-U) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Mas, como em (4.24), temos  $H^1(\Sigma^3-U) \approx (H_1(\Sigma^3-U))^*$ , desde que  $H_0(\Sigma^3-U) = \mathbb{Z}$  é livre. Como  $H_1(\Sigma^3-U) = 0$  por (5.14), deduzimos que  $H^1(\Sigma^3-U) = 0$ . Agora essa sequência é exata e  $h$  é um epimorfismo por (5.15), logo  $\delta$  é a aplicação nula e  $H^1(\Sigma^3-U, S^2) = 0$ . Pelo primeiro dos isomorfismos acima temos então  $H_2(\Sigma^3-U) = 0$ . Por outro lado, é claro que  $g$  é injetora, e como  $h$  é um monomorfismo por (5.15),  $g$  é a aplicação nula. Logo  $H^0(\Sigma^3-U, S^2) = 0$ , e pelo segundo desses isomorfismos deduzimos que  $H_3(\Sigma^3-U) = 0$ .

Por (5.13), (5.14) e (5.17) temos o seguinte resultado.

(5.18) Proposição: O espaço  $\Sigma^3-U$  é acíclico sobre os inteiros.

O seguinte teorema, que decorre de (5.18) e da observação feita antes de (5.12), sintetiza todo nosso trabalho.

(5.19) Teorema (Floyd-Richardson): Existe uma ação sem pontos fixos do grupo icosaédrico sobre uma variedade  $C^\infty$  de dimensão 3, compacta, orientável, com bordo, e acíclica sobre os inteiros.

## BIBLIOGRAFIA

- Bishop, R.L. and Crittenden, R.J., "Geometry of Manifolds", Academic Press, New York - London, 1964.
- Bredon, G.E., "Introduction to Compact Transformation Groups", Academic Press, New York - London, 1972.
- Brickell, F. and Clark, R.S., "Differentiable Manifolds", Van Nostrand Reinhold Co., London, 1970.
- Chevalley, C., "The Theory of Lie Groups I", Princeton University Press, Princeton, N. J., 1960.
- Coxeter, H.S.M., "Regular Polytopes", The McMillan Co., New York, 1962.
- Floyd, E.E. and Richardson, R.W., "An Action of a Finite Group on an  $n$ -cell Without Stationary Points", Bull. Amer. Math. Soc., 65 (1959), 73-76.
- Greenberg, M., "Lectures on Algebraic Topology", W.A. Benjamin, Inc., Menlo Park, California, 1971.
- Hausner, M. and Schwartz, J.T., "Lie Groups; Lie Algebras", Gordon and Breach, New York, 1968.
- Helgason, S., "Differential Geometry and Symmetric Spaces", Academic Press, New York, 1962.
- Husemoller, D., "Fibre Bundles", McGraw Hill Book Co., New York, 1966.
- Jacobson, N., "Lie Algebras", Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, New York, 1962.
- Kelley, J., "General Topology", D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1970.
- Lima, E.L., "Variedades Diferenciáveis", Monografias de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.
- Lyra, C.B., "Grupo Fundamental e Revestimentos", Publicações Universidade de São Paulo, 1969.
- Rodrigues, A.A.M., "Introdução à Teoria dos Grupos de Lie", 7º Colôquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1969.

Rotman, J., "The Theory of Groups: An Introduction", Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1965.

Spanier, E.H., "Algebraic Topology", McGraw-Hill Book Co., New York, 1966.

Vick, J.W., "Homology Theory", Academic Press, New York-London, 1973.

Wolf, J.A., "Spaces of Constant Curvature", 2nd. ed., Publish or Perish, Inc., Boston, 1974.