

**Dissertação de Mestrado**

**Título: Modelos Matemáticos Determinísticos Em  
Doenças Transmissíveis.**

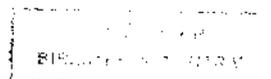
**Autor: Antonio de Padua Emerito**

**Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi**

**UNICAMP  
DEZEMBRO 1989  
Campinas-S.P.**

**Em32m**

**11659/BC**



**Modelos Matemáticos Determinísticos Em  
Doenças Transmissíveis**

Este exemplar corresponde à  
redação final da tese devida-  
mente corrigida e defendida  
por Antônio de Pádua Emérito  
e aprovada pela comissão jul-  
gadora.

Campinas, 5 de dezembro de 1989

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi  
Orientador

Dissertação apresentada ao Ins-  
tituto de Matemática, Estatís-  
tica e Ciência da Computação da  
UNICAMP, como requisito parcial  
para o título de mestre em mate-  
mática aplicada.

Para Maria, minha esposa,  
pela imensa força que me  
deu, permitindo-me concluir  
este trabalho, podendo  
assim voltar logo para  
casa.

Para Maria de Fátima e  
Matheus, meus queridos  
filhos, por compreenderem  
minha ausência.

Para as famílias de Pedro  
Emérito (meu pai) e José  
Luiz (meu sogro), das  
quais orgulhosamente faço  
parte.

## AGRADECIMENTOS:

Ao Prof. Rodney Carlos Bassanezi pela orientação segura, informal e rigorosa neste trabalho.

Ao Prof. José Wilson Campos Batista pelo incessante incentivo dado a mim nesses últimos quinze anos.

Ao Prof. Maurício Silveira por me dar coragem para que eu pudesse chegar ao final dessa jornada.

A todos os colegas do IMECC pela convivência saudável e fraterna.

Aos meus Professores de Curso de Mestrado em Matemática Aplicada do IMECC.

Aos meus colegas Professores do Departamento de Matemática da U.F.Pi.

Ao Programa Institucional de Capacitação de Docentes (PICD) pela bolsa que me foi concedida.

## INDICE

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo I:</b>	
<b>Sistemas Autônomos:</b>	
<b>Resultados Básicos</b>	
<b>1.1 Pontos Críticos e Trajetórias</b>	
<b>de Sistemas Autônomos no Plano</b>	<b>7</b>
<b>1.2 Sistemas Lineares</b>	<b>9</b>
<b>1.3 Sistemas Aproximadamente</b>	<b>12</b>
<b>Lineares (Quase Lineares)</b>	
<b>1.4 Sistemas Não Aproximadamente</b>	<b>15</b>
<b>Lineares</b>	
<b>1.5 Soluções Periódicas e</b>	<b>17</b>
<b>Ciclos Limites</b>	
<b>1.6 Bifurcação de Hopf</b>	<b>21</b>
<b>1.7 Soluções de Equações</b>	<b>24</b>
<b>Diferenciais Ordinárias:</b>	
<b>Existência e Unicidade</b>	
<b>Local/Global.</b>	
<b>Capítulo II:</b>	
<b>Modelos Epidêmicos e Periodicidade</b>	
<b>2.1 Conceitos Epidemiológicos e</b>	<b>26</b>
<b>Classificação de Modelos</b>	
<b>2.2 Modelo SI</b>	<b>32</b>
<b>2.3 Modelo SIS</b>	<b>36</b>
<b>2.4 Modelo SIR</b>	<b>39</b>
<b>2.5 Modelo SIRS</b>	<b>48</b>
<b>2.6 Modelo SIS com</b>	<b>54</b>
<b>Vítimas Fatais.</b>	
<b>2.7 Modelo SIR com</b>	<b>60</b>
<b>Transmissor Assintomático.</b>	

<b>2.8 Modelo SIS em duas Subpopulações que Interagem.</b>	<b>62</b>
<b>2.9 Periodicidade</b>	<b>65</b>
<b>2.9.1 Modelo SIS</b>	<b>66</b>
<b>2.9.2 Modelo SEIRS</b>	<b>69</b>
<b>2.9.3 Modelo SIRS</b>	<b>74</b>
<b>2.9.4 Modelo SIR</b>	<b>75</b>

### **Capitulo III:**

#### **Modelos Epidemiológicos Generalizados**

<b>3.1 Uma Generalização do Modelo Kermac-Meck Kendrick</b>	<b>76</b>
<b>3.1.1 Solução Global Existência e Unicidade</b>	<b>79</b>
<b>3.1.2 Análise Qualitativa no Plano de Fase</b>	<b>82</b>
<b>3.1.3 Um Exemplo de Aplicação</b>	<b>88</b>
<b>3.2 Taxas de Incidências Não Lineares: Análise de um Modelo do tipo SIRS</b>	
<b>3.2.1 Confinamento de Soluções</b>	<b>93</b>
<b>3.2.2 Existência de Pontos de Equilíbrios</b>	<b>95</b>
<b>3.2.3 Estabilidade</b>	<b>98</b>
<b>3.2.4 Um Exemplo de Aplicação</b>	<b>110</b>

<b>Comentários</b>	<b>114</b>
--------------------	------------

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>119</b>
-----------------------------------	------------

## INTRODUÇÃO

As especulações em torno do processo epidêmico são muito remotas. Hipócrates, por exemplo, na obra *Epidemia*, a ele atribuída, na Grécia Antiga, já manifestara essa preocupação.

A Epidemiologia, estudo da propagação de doenças transmissíveis em populações de indivíduos, teve, na verdade, um desenvolvimento bastante lento até o século XIX. Dentro desse período, já havia registros na história dando conta de que a humanidade fora vítima, por várias vezes, de epidemias marcadamente avassaladoras.

Graças às pesquisas desenvolvidas por Pasteur e Koch (na metade do século XIX), a Bacterologia atingiu um espetacular avanço e, a partir daí, certamente, é que a Epidemiologia tenha assumido os moldes de uma pesquisa científica moderna.

Progressivamente, houve uma grande evolução das pesquisas na direção de uma melhor compreensão das doenças transmissíveis em toda sua textura. Assim é que os processos etiológicos de identificação de doenças tiveram um profundo desenvolvimento.

Com esse quadro, por assim dizer, animador, fazia-se presente a imperiosa necessidade de controlar e

prever a propagação de epidemias, ou seja, era chegada a oportunidade de encarar a problemática do processo epidêmico sob o ponto de vista quantitativo.

Um marco importante no tratamento matemático do processo epidêmico, deve-se a Hamer (em 1906) que considerou a hipótese de que o curso de uma epidemia deveria depender do número de indivíduos susceptíveis e de uma taxa de contato entre indivíduos susceptíveis e infecciosos. Esta simples hipótese de Hamer, serviu de base para todas as teorias posteriores, tanto do ponto de vista determinístico, como estocástico.

Por outro lado, Ross (em 1911) desenvolveu um modelo matemático mais aprimorado, levando em conta um conjunto de parâmetros básicos, para, em seguida, descrever vários aspectos relevantes do modo como é processada a transmissão da malária.

Igualmente importante, foram os trabalhos apresentados por Kermac e McKendrick (1927-1929), com a inclusão de taxas variáveis de infecção, de recuperação, etc. Merecendo destaque o *TEOREMA DO LINIAR*, segundo o qual a inserção de qualquer número de infecciosos em uma população de susceptíveis, não acarretará nenhum surto epidêmico desde que o número inicial de susceptíveis seja inferior a um certo valor crítico.

Após a Segunda Guerra Mundial, o aparecimento dos

Computadores e o desenvolvimento ocorrido na Análise Numérica, ensejaram uma análise mais profunda dos sistemas de equações diferenciais e a introdução de simulação de dados.

Todo esse aparato técnico determinou um enorme e desejável crescimento no tratamento dos modelos matemáticos, para descrever e interpretar os fenômenos concernentes aos processos epidêmicos. Tal avanço, principalmente nos dias de hoje, tem dado importantes subsídios às autoridades sanitárias na definição de políticas de saúde e controle de doenças transmissíveis, bem como em ações de natureza profiláticas.

A tarefa, nada fácil, de construir um modelo matemático para descrever e interpretar a propagação de doenças transmissíveis em populações de indivíduos, conduz a muitas questões interessantes tanto no âmbito da Biologia, como no campo da Matemática.

Sob o ponto de vista matemático, os modelos produzidos são, em geral, *determinísticos* ou *estocásticos*. Observamos, no entanto, que a formulação determinística não implica na exclusão de algumas considerações de natureza probabilística no modelo. Como exemplo, podemos citar que em alguns modelos é possível obter-se soluções periódicas, quando introduzimos períodos de retardamentos nas classes da população considerada, através de determinadas probabilidades de transferências ([13],[14],[16],[24]).

É oportuno mencionarmos algumas características dos modelos determinísticos e estocásticos. Nos modelos determinísticos as equações são formuladas em termos dos números (ou proporções) de indivíduos em cada classe da população, no tempo  $t$ ; enquanto que nos modelos estocásticos, as equações são formuladas em termos da probabilidade de que se tenha determinado número (ou proporção) em uma dada classe na população, no tempo  $t$ ; além disso, nestes modelos obtém-se como resultado final, não um número (ou proporção) exato, mas apenas um valor médio.

Quando trabalhamos com uma grande população e estamos interessados na propagação total da doença, então os modelos determinísticos são frequentemente adotados. Se, por outro lado, estamos lidando com uma pequena população, ou temos interesse apenas em um pequeno grupo de uma grande população, então a utilização de modelos estocásticos é bem mais satisfatória.

Os modelos estocásticos parecem estar bem mais próximos da realidade do fenómeno modelado, em contrapartida o instrumental matemático utilizado atinge um nível de razoável dificuldade técnica. Esta constatação não torna os modelos determinísticos menos importantes, pois ao que tudo indica, são eles o ponto de partida na direção da formulação de modelos mais realistas. Ademais, conforme assegura Kleinbaum : "Em outras palavras, nós não necessitamos considerar a

ocorrência de doenças como um processo aleatório; nós envolvemos considerações probabilísticas para expressar nosso desconhecimento do processo causal e como observá-lo"([18]).

Nêste trabalho, trataremos tão somente de modelos determinísticos, dado que entendemos ser esse o caminho inicial para um estudo mais abrangente sobre modelagem de doenças transmissíveis. Por outro lado, o considerável volume de informações, as mais diversas, hoje publicadas acerca do referido assunto, teve uma decisiva influência para essa opção.

No Capítulo I, são listados os pré-requisitos matemáticos, tais como sistemas lineares autônomos, quase lineares, pontos de equilíbrios, estabilidade, teoremas de existência e unicidade local e global; teoremas de Bendixon, Poincaré-Bendixon, Lyapunov; a bifurcação de Hopf, necessários à abordagem dos Capítulos posteriores.

No Capítulo II, são descritos e analisados vários modelos epidêmicos, com ou sem dinâmica vital, enfatizando o comportamento assintótico das soluções. Os principais resultados matemáticos obtidos são reescritos em linguagem epidemiológica. Estabelecem-se, também, certas condições para que se tenha soluções periódicas dos sistemas que governam alguns modelos epidêmicos.

No Capítulo III, são apresentados e exaustivamente estudadas generalizações de dois dos modelos anteriormente analisados. Uma das generalizações mantém grande similaridade com o modelo originário; a outra, implica em resultados inesperados quanto à estabilidade, devido a não linearidade da taxa de incidência.

Na parte final, faz-se alguns comentários lastreados em toda leitura feita, em livros e periódicos listados nas referências bibliográficas, para realização deste trabalho, acrescidos de recentes resultados publicados em revistas da área pertinente.

## CAPITULO I

### Sistemas Autônomos: Resultados Básicos.

Nêste Capítulo, apresentaremos, sem demonstrações, os principais resultados matemáticos indispensáveis ao desenvolvimento dos Capítulos seguintes ( [2], [3], [7], [9], [17], [21], [22], [23], [25]).

#### 1.1 Pontos Críticos e Trajetórias de Sistemas Autônomos no Plano.

Seja o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = g(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = f(x,y) \end{cases} \quad (1.1.1)$$

com  $x_0 = x(t_0)$  e  $y_0 = y(t_0)$ .

O plano  $xy$  denomina-se *plano de fase* e as curvas definidas por  $(x,y)$ , onde  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  são soluções de (1.1.1) chamam-se *órbitas* ou *trajetórias*. Soluções diferentes podem ter a mesma *trajetória*.

Quando nas funções  $g(x,y)$  e  $f(x,y)$  não figura explicitamente a variável  $t$ , diz-se que o sistema acima é *autônomo*.

Se um ponto  $(x_1, y_1)$  do plano é tal que  $f(x_1, y_1) = 0$

e  $g(x_1, y_1) = 0$ , diz-se que  $(x_1, y_1)$  é um ponto crítico ou de equilíbrio.

Seja  $P = (x_1, y_1)$  um ponto de crítico isolado do sistema (1.1.1).

Seja  $\sigma = \{x=x(t), y=y(t)\}$  uma trajetória arbitrária do sistema acima e seja  $D(t) = \left[ (x(t)-x_1)^2 + (y(t)-y_1)^2 \right]^{1/2}$  a distância de um ponto arbitrário em  $\sigma$  ao ponto crítico  $(x_1, y_1)$ .

### Definição 1.

Um ponto de equilíbrio isolado  $P = (x_1, y_1)$  é dito estável se, e somente se,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que qualquer trajetória contendo o ponto  $(x(t^*), y(t^*))$ , para o qual  $D(t^*) < \delta$ , a distância  $D(t)$  é menor que  $\varepsilon$ ,  $\forall t \geq t^*$ .

### Definição 2.

Um ponto de equilíbrio  $P = (x_1, y_1)$  é dito local assintoticamente estável se, somente se, é estável e existe  $\delta^* > 0$  tal que se  $D(t^*) < \delta^*$ , então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_1 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_1$$

### Definição 3.

Um ponto de equilíbrio isolado  $P = (x_1, y_1)$  é dito global assintoticamente estável se é local assintoticamente estável

para qualquer  $\delta^* > 0$ .

#### Definição 4.

Se um ponto de equilíbrio não é estável, diz-se instável.

### 1.2 Sistemas Lineares.

Consideremos o caso particular em que o sistema (1.1) assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + ey \end{cases} \quad (1.2.1)$$

com  $a, e, b$  e  $c$  números reais tais que  $ae - bc \neq 0$ . Neste caso, o sistema (1.2.1) é denominado linear. Observamos que  $(0,0)$  é o único ponto de equilíbrio do referido sistema.

Os valores próprios da matriz  $A$  dos coeficientes, determinados por:

$$\det(mI - A) = \begin{vmatrix} m-a & -b \\ -c & m-e \end{vmatrix} = m^2 - (a+e)m + ae - bc = 0$$

com  $\Delta = (a+e)^2 - 4(ae - bc)$ , caracterizam a natureza da estabilidade do ponto crítico.

**Teorema 1.**

Seja o sistema linear (1.2.1) 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + ey \end{cases}$$

com  $ae - bc \neq 0$ , cujo único ponto de equilíbrio é  $(0,0)$ .

Então,

1- Se as raízes da equação característica são reais e negativas ou complexas com partes reais negativas, então o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.

2- Se as raízes da equação característica são reais positivas ou complexas com partes reais positivas, então o ponto de equilíbrio é instável.

3- Se as raízes da equação característica são imaginárias puras, então o ponto de equilíbrio é estável, mas não assintoticamente estável (somente neste caso ocorre solução periódica).

O quadro seguinte fornece a natureza do ponto de equilíbrio e sua estabilidade:

Natureza das raízes características	Natureza do ponto de equilíbrio	Estabilidade do ponto de equilíbrio
<p>1. Reais, desiguais e mesmo sinal.  <math>\Delta &gt; 0</math> e  <math>ae - bc &gt; 0</math>.</p>	Ponto Nodal (impróprio).	Assintoticamente estável se as raízes são negativas; instável se as raízes são positivas.
<p>2. Reais, desiguais e sinais diferentes.  <math>\Delta &gt; 0</math> e  <math>ae - bc &lt; 0</math>.</p>	Ponto de Sela.	Instável.
<p>3. Reais e iguais.  <math>\Delta = 0</math>, b e c ambos não nulos  ou  <math>\Delta = 0</math>, b = c = 0.</p>	Ponto Nodal (próprio ou impróprio).	Assintoticamente estável se as raízes são negativas; instável se as raízes são positivas.
<p>4. Imaginárias puras.  <math>\Delta &lt; 0</math>, a + e = 0  e <math>ae - bc &gt; 0</math>.</p>	Centro.	Estável, mas não assintoticamente estável.
<p>5. Complexas, mas não imaginárias puras.  <math>\Delta &lt; 0</math>, a + e = 0.</p>	Ponto Espiral.	Assintoticamente estável se a parte real das raízes é negativa; instável se a parte real das raízes é positiva.

### 1.3 Sistemas Aproximadamente Lineares (Quase Lineares)

Consideremos o seguinte sistema autônomo não linear:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = F(x,y) \end{cases}$$

Suponhamos o sistema acima tenha como ponto de equilíbrio isolado a origem  $(0,0)$ .

Assumiremos, ainda, que em uma determinada vizinhança da origem, as funções  $G$  e  $F$  podem ser escritas na forma aproximadamente linear (bastando exigir que  $G$  e  $F$  tenham derivadas parciais contínuas):

$$G(x,y) = ax + by + g(x,y)$$

$$F(x,y) = cx + ey + f(x,y)$$

tais que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x,y)}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = 0$$

Nessas condições, diz-se que o sistema é quase

linear ([25]). Além disso, podemos considerar o  $(0,0)$  como ponto de equilíbrio do sistema linear associado:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + ey \end{cases}$$

**Teorema 2.**

Consideremos o sistema quase linear autônomo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + g(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = cx + ey + f(x,y) \end{cases} \quad \text{com } ae-bc \neq 0.$$

Sejam  $m_1$  e  $m_2$  as raízes da equação característica do sistema linear associado.

Então:

1- Se  $m_1$  e  $m_2$  são reais, desiguais e de mesmo sinal, então o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é um *ponto nodal* para ambos os sistemas linear e quase linear.

2- Se  $m_1$  e  $m_2$  são reais, desiguais e de sinais diferentes, então ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é um *ponto de sela* para ambos os sistemas linear e quase linear.

3- Se  $m_1$  e  $m_2$  são complexos e não imaginários

puros, então ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é um *ponto espiral* para ambos os sistemas linear e quase linear.

4- Se  $m_1$  e  $m_2$  são reais e iguais, então ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é um *ponto nodal* para ambos os sistemas linear e quase linear, exceto quando simultaneamente  $a = e \neq 0$  e  $b = c = 0$ .

5- Se  $m_1$  e  $m_2$  são reais e iguais e simultaneamente  $a = e \neq 0$  e  $b = c = 0$ , então embora  $(0,0)$  seja um *ponto nodal* para o sistema linear, pode ser um *ponto nodal* ou um *ponto espiral* para o sistema quase linear.

6- Se  $m_1$  e  $m_2$  são imaginários puros, então embora  $(0,0)$  seja um *centro* para o sistema linear, pode ser um *centro* ou um *ponto espiral* para o sistema quase linear.

Observemos que o Teorema 2 nos dá informações apenas sobre a natureza do ponto de equilíbrio  $(0,0)$ . Quanto à sua estabilidade temos o seguinte resultado:

### **Teorema 3.**

Suponhamos que todas as hipóteses do Teorema 2 são satisfeitas pelo sistema quase linear em consideração.

Então:

1- Se  $m_1$  e  $m_2$  são reais e negativos ou complexos conjugados com parte real negativa, então  $(0,0)$  é um ponto de equilíbrio *assintoticamente estável* para ambos os sistemas

linear e quase linear.

2- Se  $m_1$  e  $m_2$  são imaginários puros, então embora  $(0,0)$  seja um ponto de equilíbrio estável para o sistema linear, não é necessariamente um ponto de equilíbrio estável para o sistema quase linear. De fato, o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  do sistema quase linear pode ser *assintoticamente estável*, *estável* mas não *assintoticamente estável* ou *instável*.

3- Se  $m_1$  e  $m_2$  são reais e positivos, ou complexos conjugados com parte real positiva, então o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é *instável* para ambos os sistemas linear e quase linear.

Observação:

Além disso, podemos garantir que se uma das raízes características é positiva ou tem parte real positiva, então o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é *instável* (consequência do Teorema de Linearização de Liapounov-Poincaré) [12].

#### 1.4 Sistemas Não Aproximadamente Lineares.

Os sistemas autônomos que não podem ser aproximados linearmente em uma vizinhança da origem (no sentido conforme a seção 1.3), diz-se que são não aproximadamente

lineares. Por conseguinte, para a análise da estabilidade de seus pontos de equilíbrios, teoremas anteriores não podem ser aplicados. No entanto, essa dificuldade será superada com o uso do teorema dado a seguir ([2]).

#### Teorema 4. (Lyapunov)

Seja  $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  um campo continuamente diferenciável, tal que  $f(0) = 0$ .

Considere o sistema autônomo  $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$ , com  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Seja  $V: \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que:

- 1-  $V(0) = 0$ .
- 2-  $V(x) > 0$ , se  $x \neq 0$ .
- 3-  $V$  satisfaz uma das seguintes condições:

- a)  $\frac{d}{dt} V(t) \leq 0$  para todo  $x \in \Omega$ ,  $x \neq 0$ .
- b)  $\frac{d}{dt} V(t) < 0$  para todo  $x \in \Omega$ ,  $x \neq 0$ .
- c)  $\frac{d}{dt} V(t) > 0$  para todo  $x \in \Omega$ ,  $x \neq 0$ .

Assim, se a função  $V$  (de Lyapunov) satisfizer a uma das condições a), b) ou c), então o ponto equilíbrio  $x = 0$  será, respectivamente:

- a) estável.
- b) assintoticamente estável.

c) *instável*.

## 1.5 Soluções Periódicas e Ciclos Limites.

Alguns sistemas autônomos podem eventualmente ter soluções periódicas. Nesta seção, enunciaremos os teoremas mais importantes sobre o referido assunto, como também, registraremos um resultado que caracteriza os conjuntos  $\omega$ -limites. Tais conjuntos serão utilizados na decisão sobre se determinados pontos de equilíbrios, de um sistema autônomo, são assintoticamente estáveis local ou globalmente ([3],[11],[25]).

Vimos na seção anterior, que quando as raízes características de um sistema autônomo linear são imaginárias puras, o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é um *centro* e, neste caso, as soluções do sistema são *periódicas* (a recíproca é também verdadeira). Por outro lado, quando consideramos um sistema quase linear autônomo, cujo sistema linear associado tem raízes características imaginárias puras, o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  do sistema quase linear tanto pode ser um *centro* como um *ponto espiral*.

Os teoremas de Poincaré-Bendixon e de Bendixon tratam da existência de soluções periódicas não apenas para sistemas autônomos quase lineares, mas para quaisquer

sistemas autônomos não lineares.

Uma curva fechada no plano de fase que tem curvas não fechadas espiralando-se em sua direção, ou por dentro ou por fora, é denominada de *ciclo limite*.

Se todas as trajetórias que começam próximas de uma trajetória fechada (ambas, por dentro e por fora) se espiralizam em direção à trajetória fechada, quando  $t \rightarrow \infty$ , dizemos que o ciclo limite é *estável*.

Se as trajetórias, em ambos os lados da trajetória fechada, espiralizam-se para longe, quando  $t \rightarrow \infty$ , dizemos que a trajetória fechada (ciclo limite) é *instável* (veja [3]).

#### Teorema 5. (Poincaré-Bendixon)

Consideremos o sistema autônomo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = F(x,y) \end{cases}$$

onde as funções  $G$  e  $F$  têm derivadas parciais contínuas num domínio  $D$ . Seja  $D_1$  um subdomínio de  $D$  e seja  $R$  a região consistindo de  $D_1$  e sua fronteira, tal que nenhum ponto de equilíbrio do sistema pertença a  $R$ .

Se existe um solução  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  do sistema e um valor  $t = t_0$  tal que  $x(t), y(t) \in R$  para todo  $t \geq t_0$ , então

ou  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  é uma trajetória fechada, isto é, uma solução periódica, ou  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  se espiraliza em direção a uma trajetória fechada, quando  $t \rightarrow \infty$ . Em qualquer caso o sistema dado tem uma solução periódica.

**Teorema 6. (Bendixon)**

Seja o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = F(x, y) \end{cases}$$

Suponhamos que as funções  $G$  e  $F$  têm derivadas parciais contínuas num domínio simplesmente conexo  $D$ . Se  $\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}$  tem o mesmo sinal ao longo de  $D$ , então não existe nenhuma solução periódica do sistema dado, inteiramente dentro de  $D$ .

O teorema seguinte é bastante útil na investigação sobre a existência de soluções periódicas de um dado sistema ((12)).

**Teorema 7.**

Suponhamos que  $P$  e  $Q$  são continuamente diferenciáveis em uma região aberta e conexa  $D$ , tal que nenhuma trajetória do sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases}$$

deixa  $D$ , e que  $D$  contém pelo menos um ponto de equilíbrio do sistema dado. Se existe um função  $B(x,y)$  continuamente diferenciável em  $D$  e tal que a expressão  $\frac{\partial}{\partial x}(BP) + \frac{\partial}{\partial y}(BQ)$  tem o mesmo sinal ao longo de  $D$ , então não existe trajetória fechada (solução periódica) em  $D$ .

O teorema seguinte caracteriza os conjuntos  $\omega$ -limites no plano ([11]).

Seja o sistema autônomo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = F(x,y) \end{cases}$$

Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  uma trajetória (órbita) do sistema acima.

Seja  $\gamma^+ = \{ \gamma(t) / t \geq 0 \}$  semi-órbita de  $\gamma(t)$ .

Conjunto  $\omega$ -limite da semi-órbita  $\gamma^+$  é o conjunto  $\omega(\gamma^+) = \{ Z \in \mathbb{R}^2 / \exists t_n \longrightarrow +\infty \text{ tal que } Z = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) \}$ .

Conjunto  $\alpha$ -limite da semi-órbita  $\gamma^+$  é o conjunto  $\alpha(\gamma^+) = \{ Z \in \mathbb{R}^2 / \exists t_n \longrightarrow -\infty \text{ tal que } Z = \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(t_n) \}$ .

### Teorema 8.

Seja  $\gamma^+$  uma semi-órbita em um subconjunto fechado e limitado  $K$  de  $\mathbb{R}^2$  e suponha que  $K$  tenha somente um número finito de pontos de equilíbrios. Então apenas uma das seguintes condições é satisfeita:

- 1-  $\omega(\gamma^+)$  é um ponto de equilíbrio.
- 2-  $\omega(\gamma^+)$  é uma órbita periódica.
- 3-  $\omega(\gamma^+)$  contém um número finito de pontos de equilíbrio e um conjunto de órbitas  $\gamma_i$  com  $\omega(\gamma_i)$  e  $\alpha(\gamma_i)$  consistindo de um ponto crítico para cada órbita.

### 1.6 Bifurcação de Hopf.

Seja o seguinte sistema dependendo do parâmetro  $p$ :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = G(x,y,p) \\ \frac{dy}{dt} = F(x,y,p) \end{cases}$$

onde as funções  $G$  e  $F$  têm derivadas contínuas até a terceira ordem.

Assumamos que  $(x_0, y_0, p_0)$  seja um ponto equilíbrio do sistema dado.

A matriz jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} G_x & G_y \\ F_x & F_y \end{bmatrix}$$

no ponto  $(x_0, y_0, p_0)$  tenha o par de imaginários puros  $\pm w i$  ( $w > 0$ ) como valores próprios.

O teorema da função inversa nos garante que em uma vizinhança de  $(x_0, y_0, p_0)$  existe uma curva de equilíbrio suave  $(x(p), y(p), p)$  com  $x(p_0) = x_0$  e  $y(p_0) = y_0$ .

Os valores próprios  $\lambda(p)$  e  $\bar{\lambda}(p)$  de  $J$ , os quais são  $\pm w i$  em  $p = p_0$ , variam suavemente com  $p$ .

Se, além disso,  $\frac{d}{dp} \text{Re}[\lambda(p_0)] = k \neq 0$ , então existe uma *bifurcação de Hopf*, isto é, existirão soluções periódicas em uma pequena vizinhança de  $(x_0, y_0, p_0)$  para um, e somente um, dos três casos  $p > p_0$ ,  $p < p_0$ , ou  $p = p_0$ .

Se  $k > 0$ , isto é,  $\text{Re}[\lambda(p)] > 0$  quando  $p > p_0$ , e se as soluções periódicas aparecem para  $p > p_0$ , isto é, elas aparecem quando os pontos de equilíbrios se tornam instáveis, então as soluções periódicas são estáveis e a bifurcação é dita *supercrítica*.

Se  $k > 0$ , e se as soluções periódicas aparecem para  $p < p_0$ , isto é, elas aparecem quando os pontos de equilíbrios são estáveis, então as soluções periódicas são instáveis e a bifurcação é dita *subcrítica*.

Se  $k < 0$ , então a bifurcação *supercrítica*

(*subcrítica*) é definida para a existência de soluções periódicas quando  $p < p_0$  ( $p > p_0$ ).

Assim, para bifurcação *supercrítica* as soluções periódicas são estáveis e para bifurcação *subcrítica* elas são instáveis.

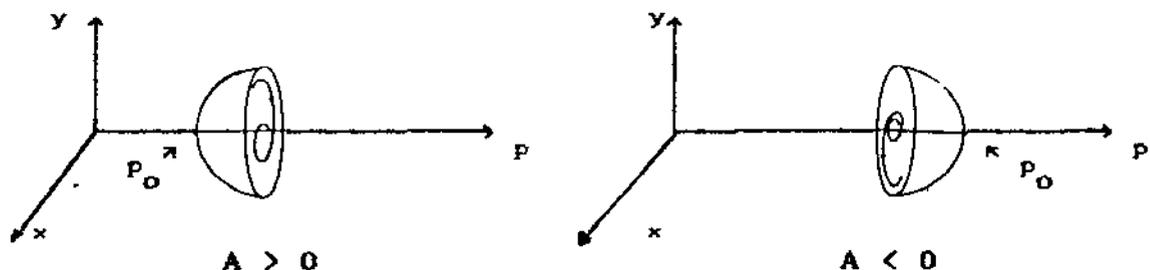
Nêste trabalho, teremos a oportunidade de lidar com o caso em que  $\frac{d}{dp} \text{Re}[\lambda(p_0)] = -1 < 0$ . Além disso,  $x = I$ ,  $y = R$ ,  $G(I,R) = aI^2(N_0 - I - R)^q - I$  e  $F(I,R) = r(I - R/h)$ .

O critério para decidir se a bifurcação de Hopf é *supercrítica* ou *subcrítica* depende do valor da expressão  $A$ , dada por:

$$A = (y/r)G_{III} + (2/h)G_{IIR} + G_{IRR} + (G_{II}/h + G_{IR})[(y/r)G_{II} + (2/h)G_{IR} + G_{RR}]/(y - r/h^2).$$

Se  $A < 0$ , então a bifurcação é *supercrítica*; se  $A > 0$  então a bifurcação é *subcrítica* ([20]).

As figuras abaixo são ilustrativas:



**1.7 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias.  
Existência e Unicidade de Soluções  
Local/Global.**

Nesta secção, enunciaremos alguns teoremas sobre existência e unicidade de soluções locais e globais de sistemas de equações diferenciais, os quais serão utilizados nos capítulos posteriores ([7],[11]).

**Teorema 9. (Existência Local)**

Seja  $\dot{x} = f(t,x)$ , onde  $f: A \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  e  $A$  aberto.

Se  $f(t,x)$  é contínua, então dado  $(t_0, x_0) \in A$  existe uma solução passando por  $(t_0, x_0)$ , isto é, existe um intervalo  $I$ , com  $t_0 \in I$ , e uma função  $x: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\dot{x}(t) = f(t,x)$  para todo  $t \in I$  e  $x(t_0) = x_0$ .

**Teorema 10.**

Se  $f(t,x)$  for contínua e localmente Lipschitziana em relação à  $x$ , então a solução da equação  $\dot{x} = f(t,x)$  (assegurada pelo teorema anterior) é única.

**Teorema 11.**

Seja  $f : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $A$  aberto. As soluções de  $\dot{x} = f(t,x)$  tendem para o bordo do conjunto  $A$ , isto é, se  $x(t)$  é solução com intervalo maximal  $(\alpha, \beta)$ , então  $x(t) \longrightarrow \partial A$ , quando  $t \longrightarrow \alpha$  e  $t \longrightarrow \beta$ .

**Teorema 12.**

Seja  $\dot{x} = f(t,x)$ . Se  $A = \mathbb{R}^{n+1}$  e dada uma solução  $x(t)$  tal que  $|x(t)| \leq K$ , então  $x(t)$  está definida para todo  $t > 0$ .

## CAPITULO II

### MODELOS EPIDÊMICOS E PERIODICIDADE.

Nêste Capítulo, estudaremos alguns modelos matemáticos de epidemias, destacando-se a análise qualitativa dos sistemas de equações diferenciais que os descrevem. Por outro lado, procuraremos observar as eventuais mudanças, quanto ao comportamento assintótico, provocado em alguns sistemas pela inclusão da *dinâmica vital* ([10], [12]).

Dado que, na prática, comprova-se a existência de epidemias que têm ocorrências periódicas, apresentaremos determinados modelos que, sob certas condições específicas, admitem um comportamento dotado de periodicidade assim, por certo, capazes de bem representar tais processos epidêmicos ([6], [20], [24]).

#### 2.1 Conceitos Epidemiológicos e Classificação de Modelos.

Antes de descrevermos com detalhes alguns modelos, vamos definir alguns termos epidemiológicos, dada as diferentes nomenclaturas existentes na literatura especializada.

**Epidemiologia** é o estudo do comportamento de doenças transmissíveis em uma população de indivíduos.

**Epidemia** é a ocorrência de uma doença excedendo a expectativa normal.

**Endemia** é a ocorrência de uma doença por um período considerável de tempo.

**Susceptíveis** são aqueles indivíduos *não infectados* que podem contrair a doença.

**Expostos** são aqueles indivíduos *infectados* que ainda não são capazes de transmitir a doença.

**Infecciosos** são aqueles indivíduos *infectados* que ativamente transmitem a doença.

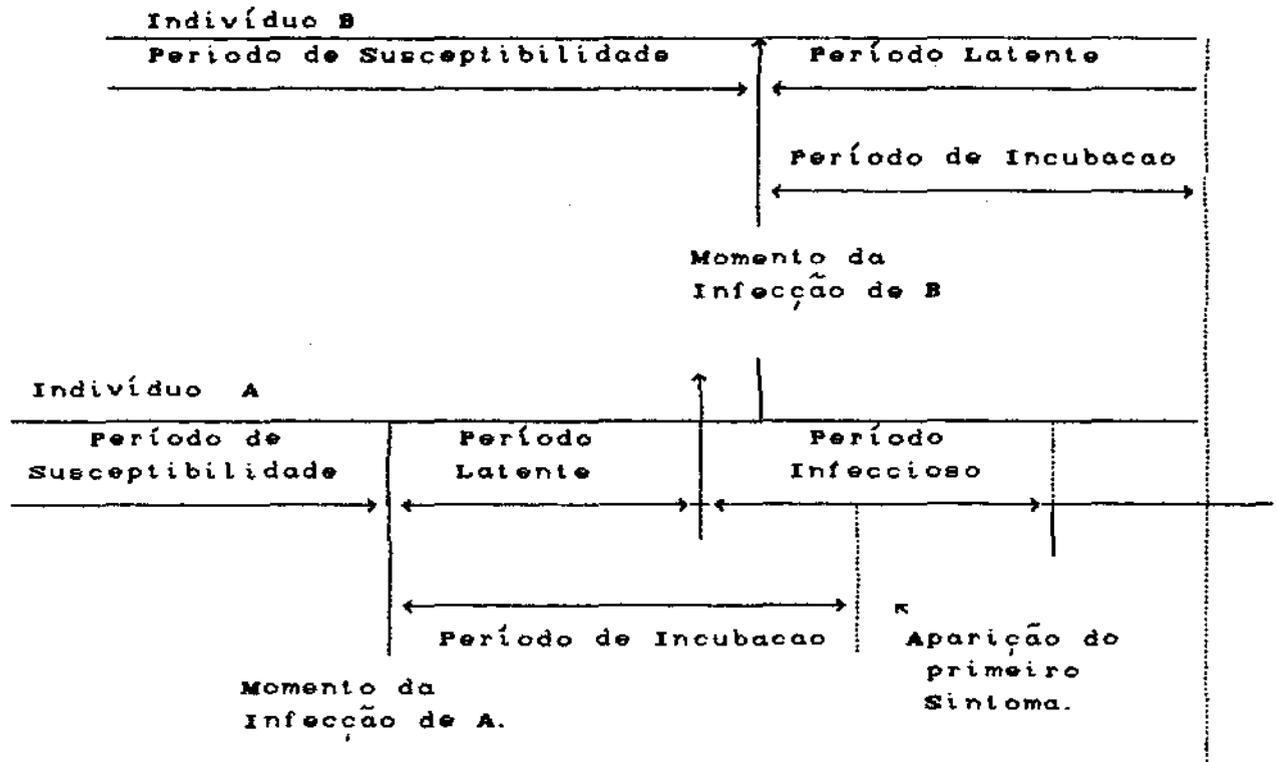
**Removidos** são aqueles indivíduos retirados da interação suscetível-infeccioso por recuperação com imunidade (temporária ou permanente), por isolamento até a cura e a conquista da imunidade, ou por morte.

**Período Latente** é o intervalo de tempo entre o momento da infecção e a existência material da infecção no organismo de um indivíduo suscetível.

**Período Infeccioso** é o período que subsegue imediatamente ao período latente.

**Período de Incubação** é o intervalo de tempo entre o momento da infecção e a aparição de sintomas. Somente após este período é que medidas tanto curativas como preventivas podem ser adotadas.

O diagrama abaixo, ilustra as épocas distintas na infecção de um indivíduo A e a propagação da infecção para um indivíduo B (8).



A população na qual estudaremos o processo epidêmico, de uma maneira geral, está dividida em classes disjuntas de susceptíveis, expostos, infecciosos e removidos, as quais variam com o tempo; onde  $S(t)$ ,  $E(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$  denotam as proporções (quantidades) destas classes na população total, respectivamente.

Se a recuperação da doença (que não seja letal e sem isolamento) não confere imunidade o modelo é denominado de SIS. Pois um indivíduo é movido da classe dos susceptíveis para a classe dos infecciosos e, tão logo esteja recuperado, retorna à classe dos susceptíveis. Os modelos SIS são apropriados para algumas doenças com agente bacterial, tais como *menigites* e *doenças venéreas*; e para doenças com agente protozoário, tal como a *malária*.

Se os indivíduos se recuperam com imunidade, então o modelo é dito SIR. Em geral, os modelos SIR são apropriados para doenças com agente viral, tais como *sarampo*, *caxumba* e *variola*.

Se os indivíduos não se recuperam, então o modelo é chamado SI. Este não é apropriado para nenhuma doença por conta do seu excessivo irrealismo, como veremos na próxima secção.

Os modelos aqui tratados satisfazem às seguintes hipóteses:

H1-A população considerada tem um tamanho fixo  $N$ , o qual é suficientemente grande tal que em cada classe as variáveis podem ser tomadas como contínuas, em lugar de variáveis discretas. Se o modelo inclui dinâmica vital, então estamos considerando que os *nascimentos* e *mortes* ocorrem com taxas iguais e todos os recém-nascidos são considerados susceptíveis. Indivíduos são retirados de cada classe por

morte com uma taxa propocional ao tamanho da classe e cuja constante de propocionalidade é  $\delta$ , a qual denominamos de taxa de remoção diária (poderíamos ter tomado outra unidade de tempo). O tempo médio de vida é  $1/\delta$ .

H2-A população é uniforme e homogeneamente distribuida. A taxa de *contato* diária  $\lambda$  é o número médio de *contatos* por infeccioso por dia. Um *contato* de um infeccioso é uma interação a qual resulta na infecção de um indivíduo se ele for susceptível. Assim, o número médio de susceptíveis infectados por um infeccioso, por dia, é  $\lambda S$ . O número médio de susceptíveis infectados pela classe de infecciosos com tamanho  $NI$ , é  $\lambda NIS$ , por dia. A taxa de *contato* diária  $\lambda$  é fixa e não varia de acordo com a época. O tipo de *contato* direto ou indireto depende especificamente da doença.

H3-Indivíduos se recuperam e são transferidos da classe dos infecciosos para a classe dos removidos com uma taxa propocional ao número de infecciosos e cuja constante de propocionalidade é  $\gamma$ , denominada de taxa diária de remoção por recuperação. O período latente é nulo, isto é, os indivíduos infectados tornam-se imediatamente infecciosos. O período médio de infecciosidade é  $1/\gamma$ .

Quando se diz que indivíduos são transferidos de uma classe A para uma classe B, a uma taxa propocional ao número de indivíduos da classe A, cuja constante de propocionalidade é  $\theta$ , equivale a afirmar que: a probabilidade

de que um indivíduo que esteja em A no tempo  $t_0$ , permaneça nesta mesma classe no tempo  $(t+t_0)$  é  $\exp(-\theta t)$ . O tempo médio de permanência na classe A é  $1/\theta$ . Esta interpretação nos permite regular a transferência de indivíduos de uma classe para outra, utilizando-se outros tipos de probabilidades (atendendo a certas condições específicas) determinando, muitas vezes, que o sistema de equações diferenciais, representativo do modelo, admita soluções periódicas ([13], [14],[15],[20]).

A taxa de remoção a partir da classe dos infecciosos por recuperação e morte é  $\gamma+\delta$ , assim o período médio de infecciosidade tendo em conta a morte é  $1/(\gamma+\delta)$ . Desse modo, o número médio de *contatos* (com susceptíveis e outros) de um infeccioso durante o seu período de infecciosidade é  $\sigma=\lambda/(\gamma+\delta)$ , o qual é denominado de *número de contatos infecciosos*. Como o número médio de susceptíveis infectados por um infeccioso durante o seu período de infecciosidade é  $\sigma S$ , esta quantidade é chamada de *número de infecciosos substituídos*.

## 2.2 MODELO SI.

É o caso hipotético de uma epidemia, na qual nenhum infeccioso se recupera. Desta forma, em uma população de tamanho fixo  $N$ , a taxa de crescimento dos infecciosos é a mesma responsável pelo decréscimo dos susceptíveis.

Seja  $S(t)$  a proporção em  $N$  dos susceptíveis e  $I(t)$  a proporção em  $N$  dos infecciosos.

Consideremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} [NS(t)]' = -\lambda NS \\ [NI(t)]' = \lambda NI \end{cases} \quad (2.2.1)$$

onde as condições iniciais  $NS_0$  e  $NI_0$  são dadas por:

$$NS(0) = NS_0 > 0$$

$$NI(0) = NI_0 > 0 \quad \text{e} \quad NS(t) + NI(t) = N$$

com  $\lambda$  positivo.

O termo  $-\lambda NS$  dá a taxa de movimentação da classe dos susceptíveis de tamanho  $NS(t)$  para a classe dos infecciosos de tamanho  $NI(t)$ .

Quando dividimos cada igualdade de (2.2.1) pelo tamanho  $N$  da população, temos então o seguinte problema de valor inicial normalizado:



$$\begin{cases} S(t)' = -\lambda IS \\ I(t)' = \lambda IS \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0 \quad \text{e} \quad S(t) + I(t) = 1$$

No sistema (2.2.2) não figura explicitamente o tamanho da população.

Da igualdade  $S(t) = 1 - I(t)$  concluímos que para resolver o sistema (2.2.2), basta resolver a seguinte equação:

$$\begin{cases} I'(t) = \lambda I(1 - I) \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Integrando-se (2.2.3), obtemos:

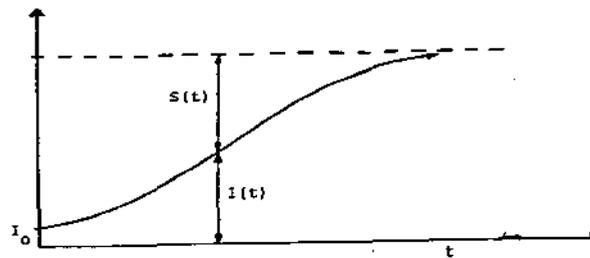
$$I(t) = \frac{e^{\lambda t}}{(e^{\lambda t} - 1) + 1/I_0} \quad (2.2.4)$$

Logo,

$$S(t) = 1 - \frac{e^{\lambda t}}{(1 - S_0)[e^{\lambda t} - 1] + 1/(1 - S_0)} \quad (2.2.5)$$

Observamos que  $I(t) \longrightarrow 1$  e  $S(t) \longrightarrow 0$ , quando  $t$  cresce.

Assim, temos um gráfico do tipo abaixo:



No caso em que se tem uma pequena proporção de infecciosos no início do processo epidêmico (isto é,  $I_0 \ll 1$ ), vemos que a epidemia (sendo medida pela proporção de infecciosos) primeiro cresce exponencialmente, e como poucos susceptíveis estão disponíveis, a taxa de crescimento decresce. No entanto, a epidemia não se extingue até que todos indivíduos da população tenham contraído a doença. Esta é a característica que torna o modelo em apreciação bastante distante da realidade, pois nem mesmo nas epidemias da Idade Média uma dada população foi totalmente infectada ([10]).

Por outro lado, mesmo tendo sido possível obter expressões analíticas para  $I(t)$  e  $S(t)$ , na prática estas quantidades nem sempre são conhecidas em cada instante, quando usamos modelos mais aperfeiçados. O elemento usual para essa informação é dado pela curva de epidemia, na qual se tem o registro da taxa com que a doença se propaga na população.

Para o presente modelo, a curva de epidemia,  $W(t)$ , é a taxa de mudança na proporção dos infecciosos:

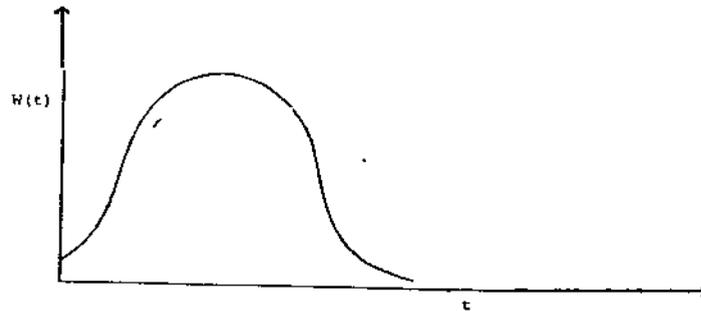
$$W(t) = I'(t) = \lambda IS \quad (2.2.6)$$

Substituindo-se os valores de  $I(t)$  e  $S(t)$  de (2.2.4)

e (2.2.5) em (2.2.6), temos:

$$W(t) = \frac{\lambda(1 - I_0)I_0 e^{\lambda t}}{[1 - I_0(1 - e^{\lambda t})]^2} \quad (2.2.7)$$

Abaixo, temos uma representação típica de  $W(t)$ :



É possível incluir no modelo SI a dinâmica vital, isto é, apesar de manter  $N$  fixo, há um fluxo na classe dos susceptíveis, os recém-nascidos. Resultados obtidas a partir desta modificação resultam, como um caso particular, do modelo a ser tratado na secção seguinte.

Vimos que um problema detectado no modelo ora analisado era o fato de que todos na população terminariam por se infectarem. Isto é uma decorrência de que infecciosos assim o permanecem indefinidamente, enquanto que os susceptíveis se extinguem.

Alguma epidemia pode ter essa característica num pequeno intervalo de tempo, mas a história tem mostrado que sempre aparece um ou outro mecanismo que modifica essa dinâmica (vacina, retração da população, etc). Existem doenças

nas quais os infecciosos se recuperam, com imunidade (permanente ou temporária) ou sem imunidade; tais possibilidades serão analisadas nos modelos seguintes.

### 2.3 MODELO SIS.

O modelo aqui formulado envolve, inicialmente, as quantidades das classes na população total.

O problema de valor inicial para o modelo SIS com dinâmica vital é o seguinte:

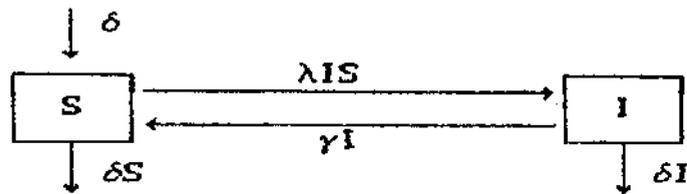
$$\begin{cases} [NS(t)]' = -\lambda NS + \gamma NI + \delta N - \delta NS \\ [NI(t)]' = \lambda NS - \gamma NI - \delta NI \\ NS(0) = NS_0 > 0, NI(0) = NI_0 > 0 \text{ e } NS(t) + NI(t) = N \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Façamos uma análise do sistema (2.2.8):

O termo  $-\lambda NS$  dá a taxa de movimento a partir da classe dos susceptíveis, de tamanho  $NS(t)$ , para a classe dos infecciosos, de tamanho  $NI(t)$ . O termo  $-\gamma NI$  dá a taxa com que os infecciosos se recuperam (sem imunidade) e retornam à classe dos susceptíveis. O termo  $\delta N$  corresponde aos recém-nascidos; enquanto que  $-\delta NS$  e  $-\delta NI$  correspondem às mortes nas classes dos susceptíveis e infecciosos, respectivamente.

Quando dividimos as igualdades de (2.2.8) pelo

tamanho  $N$  da população, temos seguinte sistema normalizado:



$$\begin{cases} S(t)' = -\lambda IS + \gamma I + \delta - \delta S \\ I(t)' = \lambda IS - \gamma I - \delta I \\ S(0) = S_0, I(0) = I_0, S(t) + I(t) = 1 \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Dado que é sempre possível obter  $S(t)$  a partir da igualdade  $S(t) + I(t) = 1$ , em lugar do problema de valor inicial (2.2.9), basta considerar a equação:

$$\begin{cases} I(t)' = [\lambda - (\gamma + \delta)]I - \lambda I^2 \\ I(0) = I_0 \end{cases} \quad (2.2.10)$$

Cuja solução é:

$$I(t) = \begin{cases} \frac{e^{kt}}{\lambda(e^{kt} - 1) + 1/I_0}, & k \neq 0 \\ \frac{1}{\lambda t + 1/I_0}, & k = 0 \end{cases} \quad (2.2.11)$$

onde  $k = \lambda - (\gamma + \delta)$

Considerando-se (2.2.11), podemos enunciar o seguinte resultado:

### TEOREMA 1

A solução  $I(t)$  de (2.2.9) aproxima-se de  $1 - 1/\delta$ , quando  $t$  cresce se  $\sigma = \lambda/(\gamma + \delta) > 1$  e aproxima-se de zero, quando  $t \longrightarrow \infty$  se  $\sigma \leq 1$ .

Sempre que possível reescreveremos os Teoremas numa linguagem epidemiológica, com a denominação de Bio-Teoremas.

### BIO-TEOREMA 1

Em uma doença, sem imunidade, com qualquer proporção inicial de infecciosos, a proporção de infecciosos aproxima-se de um valor epidêmico constante se o número de contatos infecciosos excede um. Caso contrário, a proporção de infecciosos aproxima-se de zero.

### OBSERVAÇÕES:

1- No Teorema 1 o valor crítico  $\sigma = \lambda/(\gamma + \delta)$  é o valor limite que nos dá informações sobre o comportamento assintótico da solução. Quando procedemos mudanças nos parâmetros é possível garantir a extinção da epidemia.

2-O número de infecciosos substituídos é igual a um, no ponto de equilíbrio  $(\frac{\gamma + \delta}{\lambda}, 1 - \frac{\gamma + \delta}{\lambda})$ .

3-Quando  $\gamma = 0$ , temos o modelo SI com dinâmica vital. Desse modo, obtemos um valor limiar  $\sigma = 1/\delta$  para o referido modelo com dinâmica vital.

4-Quando fazemos  $\delta = 0$ , temos o modelo SIS, sem dinâmica vital.

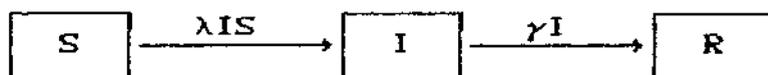
5-Há uma certa semelhança do modelo SIS com ou sem dinâmica vital. Em outras palavras, o valor limiar é dado pelo número de contatos infecciosos em ambos os casos.

## 2.4 Modelo SIR.

Embora o comportamento assintótico das soluções no modelo SIS, com ou sem dinâmica vital, tenha uma certa semelhança, isto não acontece com o modelo SIR, conforme demonstraremos a seguir.

Vamos começar considerando o problema de valor inicial para o modelo SIR sem dinâmica vital, envolvendo as proporções das classes na população total.

Assim, temos:



$$\begin{cases}
 S(t)' = -\lambda IS \\
 I(t)' = \lambda IS - \gamma I \\
 R(t)' = \gamma I
 \end{cases} \quad (2.4.12)$$

$S_0 > 0, I_0 > 0, R_0 = 0. \quad S(t) + I(t) + R(t) = 1$

onde todos os parâmetros são positivos.

Uma vez que  $R(t)$  sempre pode ser encontrado usando-se a igualdade  $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$ , é suficiente considerar somente o problema de valor inicial no plano  $(S, I)$ .

Portanto, (2.4.12) pode ser reduzido ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} S(t)' = -\lambda IS \\ I(t)' = \lambda IS - \gamma I \\ S_0 > 0, I_0 > 0 \text{ e } S(t) + I(t) + R(t) = 1 = S_0 + I_0 \end{cases} \quad (2.2.13)$$

Donde obtemos:

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\lambda IS - \gamma I}{-\lambda IS} = -1 + \frac{\gamma}{\lambda S} = -1 + \frac{1}{\sigma S}$$

onde  $\sigma = \lambda/\gamma$  é o número de contatos infecciosos.

Integrando-se, temos:

$$I(S) = -S + (1/\sigma)\ln(S) + K \quad (2.2.14)$$

Em  $t = 0$ ,  $S(0) = S_0$ ,  $I(0) = I_0$  e  $S_0 + I_0 = 1$ .

Fazendo-se  $t = 0$  em (2.2.14), obtemos:

$$I_0 = -S_0 + (1/\sigma)\ln(S_0) + K \Rightarrow K = 1 - (1/\sigma)\ln(S_0)$$

Logo,

$$I(S) = 1 - S + (1/\sigma)\ln(S/S_0). \quad (2.2.15)$$

Como  $\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{1}{\sigma S}$ , onde  $\sigma = \lambda/\gamma$ , temos:

$\frac{dI}{dS} < 0$ , se  $\sigma S > 1$ . Portanto,  $I(S)$  é uma função decrescente de  $S$ , quando  $\sigma S > 1$ .

$\frac{dI}{dS} > 0$ , se  $\sigma S < 1$ . Portanto,  $I(S)$  é uma função crescente de  $S$ , quando  $\sigma S < 1$ .

Ademais, quando  $\sigma S = 1$ ,  $I = 1 - (1/\sigma) - (1/\sigma)\ln(\sigma S_0)$  é o valor máximo de  $I$ .

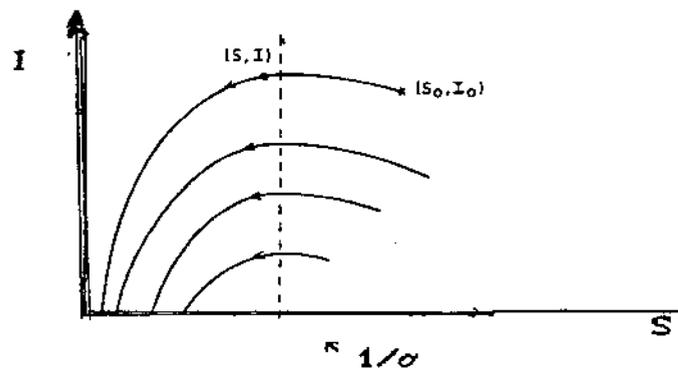
Por outro lado, quando  $t$  cresce,  $S(t)$  decresce.

Da equação (2.2.15), temos:

$I \longrightarrow -\infty$ , quando  $S \longrightarrow 0^+$ .

Como  $I_0 > 0$ , existe  $S_\infty$ ,  $0 < S_\infty < S_0$  tal que  $I(S_\infty) = 0$  ou seja,  $1 - (1/\sigma) + (1/\sigma)\ln(S_\infty/S_0) = 0$ .

Podemos, assim, ter a seguinte configuração para  $I(S)$ .



O número  $1/\sigma$  é chamado *limiar da epidemia*.

Temos, portanto, o seguinte resultado:

#### Teorema 2.

Seja  $(S(t), I(t))$  uma solução do sistema (2.2.12). Se  $\sigma S_0 \leq 1$ , então  $I(t)$  decresce para zero, quando  $t \longrightarrow \infty$ . Se  $\sigma S_0 > 1$ , então  $I(t)$  primeiramente cresce, até atingir o valor máximo igual à  $1 - (1/\sigma) - (1/\sigma)\ln(\sigma S_0)$ , e em seguida decresce para zero. A proporção de susceptíveis  $S(t)$  é uma função decrescente e o valor limite  $S_\infty$  é a única raiz no intervalo

$(0, 1/\sigma)$  da equação  $1 - S + (1/\sigma)\ln(S/S_0) = 0$ .

### Bio-Teorema 2.

Em uma doença, sem dinâmica vital, na qual a recuperação confere imunidade, se o número inicial de *infecciosos substituídos* é maior que um, então a proporção de *infecciosos* cresce, atinge um valor máximo, e depois decresce para zero; caso contrário, simplesmente decresce tendendo zero. A infecção cessa porque o número de *infecciosos substituídos* torna-se menor que um, quando  $S(t)$  se torna pequeno; entretanto, a proporção final de susceptíveis é não nula.

É importante enfatizar que se o número de *infecciosos substituídos* é menor que um, seja qual for a proporção de *infecciosos*, a tendência é que a doença diminua sua intensidade e atinja a extinção.

Medidas profiláticas objetivam manter o número inicial de *infecciosos substituídos* menor que um, ou seja,  $\sigma S_0 < 1$ . Ora, é desejável que  $1/\sigma = \gamma/\lambda$  seja o maior possível. Mantendo-se  $\gamma$  fixo é suficiente diminuirmos  $\lambda$ . Como  $\lambda$  é a taxa de *contato*, podemos diminuir o valor de  $\lambda$  através de programas de vacinações e medidas sanitárias.

Como observamos anteriormente, temos interesse em conhecer a *curva de epidemia*, que neste modelo é dada por  $\frac{dR}{dt}$ .

$$\text{Mas } \frac{dR}{dt} = \gamma I, \text{ com } I = 1 - R - S.$$

$$\text{Logo } \frac{dR}{dt} = \gamma(1 - R - S)$$

$$\text{Por outro lado, } \frac{dS}{dR} = -\sigma S. \text{ Portanto, } S(R) = S_0 e^{-\sigma R}.$$

$$\text{Assim, } \frac{dR}{dt} = \gamma(1 - R - S_0 e^{-\sigma R}) \quad (2.2.16)$$

Embora, seja possível resolver a equação acima, obtém-se R como uma função explícita de t, mas numa forma demasiadamente complicada. Daí, em lugar de resolver exatamente a equação dada acima, resolveremos uma equação aproximada. Toda dificuldade reside no termo  $e^{-\sigma R}$ .

Tomemos no desenvolvimento da série de Taylor de  $e^{-\sigma R}$  até o termo quadrático, isto é:

$$e^{-\sigma R} \approx 1 - \sigma R + (1/2)(\sigma R)^2, \text{ cujo erro é menor ou igual a } (1/6)(\sigma R)^3.$$

A conveniência do truncamento até o termo quadrático decorre das seguintes considerações:

-se tomamos até o termo linear em R, então obtemos R como uma função crescente de t, o que naturalmente contraria as hipóteses do modelo;

-se o termo de terceira ordem está incluso nos termos eventualmente tomados, teríamos uma certa complicação no processo de integração.

Por outro lado, quando se trata de uma epidemia que não seja de grandes proporções, podemos supor que  $\sigma R$  é pequeno e, portanto, bem menor será o erro cometido com o truncamento

(9),(10).

Dessa maneira, podemos tomar:

$$S(R) = S_0 [1 - \sigma R + (1/2)(\sigma R)^2]$$

Substituindo-se esse valor de  $S(R)$  em

(2.2.16), temos:

$$\frac{dR}{dt} = \gamma [1 - R - S_0 (1 - \sigma R + (1/2)(\sigma R)^2)] \quad (2.2.17)$$

A solução de (2.2.17) é da forma:

$$R(t) = \frac{1}{\sigma^2 S_0} [\sigma S_0 - 1 + \alpha \operatorname{tgh}[(1/2)\alpha \gamma t - \phi]] \quad (2.2.18)$$

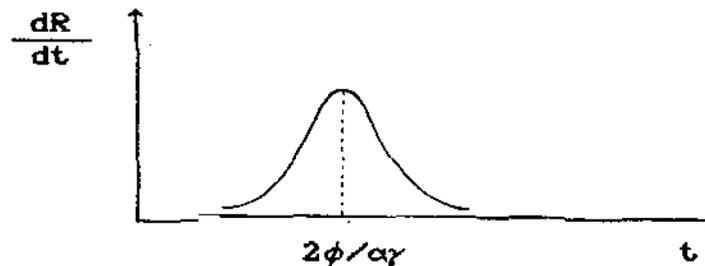
$$\text{onde } \alpha = [(\sigma S_0 - 1)^2 - 2S_0(1 - S_0)\sigma^2]^{1/2}$$

$$\phi = \operatorname{tgh}^{-1}[(\sigma S_0 - 1)/\alpha]$$

De (2.2.18) obtos:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\alpha^2 \gamma}{2S_0 \sigma^2} [\operatorname{sech}[(1/2)\alpha \gamma t - \phi]]^2 \quad (2.2.19)$$

A equação (2.2.19) tem a seguinte configuração:



Esta curva corrobora a realidade quando traduz que o número de ocorrências identificadas no processo epidêmico aumenta à medida que o tempo passa, até atingir seu valor máximo e depois decresce até a extinção.

O Teorema de Kermac e Mckendrick afirma que a função  $I(S)$  é simétrica em relação à reta  $S = 1/\sigma$ , para valores próximos de  $1/\sigma$  ([9],[10]). Ou ainda, supondo que  $S_0$  é maior que  $1/\sigma$ , mas não muito maior, isto é,  $S_0 = 1/\sigma + k$ , onde  $k \ll 1/\sigma$ ; se uma epidemia ocorrer pela presença de um pequeno número de infecciosos, então no final a proporção de susceptíveis é  $S_\infty = 1/\sigma - k$ .

Aqui, estamos supondo que  $S_0 \approx 1$ , pois  $I_0$  é muito pequeno e  $R_0 = 0$ .

Quando só há remoção após contrair a doença (isto é,  $R_0=0$ ), podemos dizer que a intensidade de uma epidemia é  $R_\infty$ , pois no final do processo epidêmico  $I_\infty = 0$ .

De (2.2.16), resulta:

$$1 - R_\infty - S_0 e^{-\sigma S_\infty} = 0.$$

$$\text{Tomando-se } e^{-\sigma R_\infty} \approx 1 - \sigma R_\infty + (1/2)[\sigma R_\infty]^2$$

Temos,

$$1 - R_\infty - S_0 \left[ 1 - \sigma R_\infty + (1/2)[\sigma R_\infty]^2 \right] \approx 0$$

Como  $S_0 \approx 1$  e  $\sigma = \lambda/\gamma$ , obtemos:

$$1 - R_\infty - \left[ 1 - \frac{\lambda}{\gamma} R_\infty + (1/2) \left[ \frac{\lambda}{\gamma} \right]^2 R_\infty^2 \right] \approx 0$$

$$R_\infty \left[ \left( \frac{\lambda}{\gamma} - 1 \right) - (1/2) \left[ \frac{\lambda}{\gamma} \right]^2 R_\infty \right] \approx 0$$

$$R_\infty \approx 2 \left[ \frac{\lambda}{\gamma} \right]^2 \left( \frac{\lambda}{\gamma} - 1 \right)$$

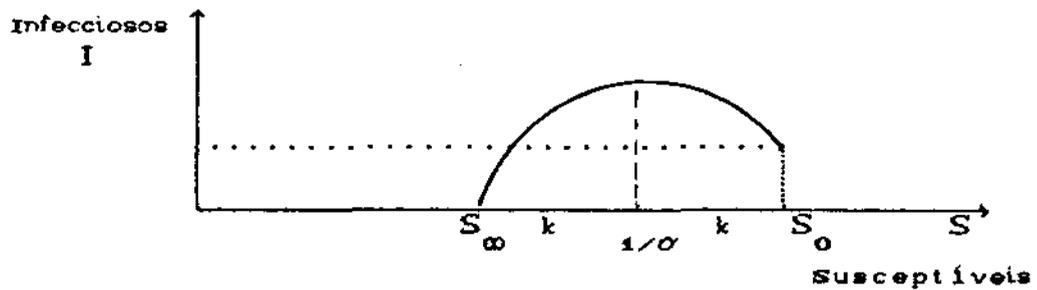
$$R_{\infty} \approx 2 \frac{\gamma}{\lambda} \left( 1 - \frac{\gamma}{\lambda} \right)$$

Como  $S_0 \approx \frac{1}{\sigma} = \frac{\gamma}{\lambda}$  e  $S_0 \approx 1$ , temos que  $\frac{\gamma}{\lambda} \approx 1$ .

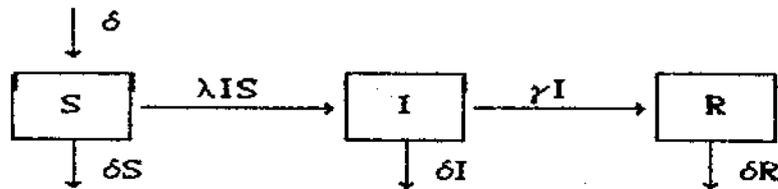
$$\text{Logo } R_{\infty} \approx 2 \left( 1 - \frac{\gamma}{\lambda} \right) \approx 2 \left( S_0 - \frac{1}{\sigma} \right) \therefore R_{\infty} \approx 2k$$

Como  $S_{\infty} = S_0 - R_{\infty}$ , temos  $S_f = \frac{1}{\sigma} + k - 2k$ , ou seja  $S_{\infty} = \frac{1}{\sigma} - k$ .

O gráfico abaixo é ilustrativo:



Consideremos, agora, o problema de valor inicial para o modelo SIR com dinâmica vital:



$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda IS + \delta - \delta S \\ I'(t) = \lambda IS - \gamma I - \delta I \\ R(t) = 1 - S(t) - I(t) \\ S_0 > 0, I_0 > 0 \text{ e } R_0 \geq 0. \end{cases} \quad (2.4.20)$$

O comportamento assintótico de (2.4.20) no triângulo

$D = \{(S,I) \mid S \geq 0, I \geq 0 \text{ e } S + I \leq 1\}$  é um caso particular do Teorema (2.5.1) da secção seguinte.

Temos, portanto, o seguinte resultado:

#### Teorema (2.4.1)

Seja  $(S(t), I(t))$  uma solução de (2.4.20). Se  $\sigma > 1$ , então  $D = \{(S,I) \mid 0 \leq S \leq 1\}$  é uma região assintoticamente estável para o ponto de equilíbrio  $(1/\sigma, \delta(\sigma - 1)/\lambda)$ , onde  $\sigma = \lambda/(\gamma + \delta)$ . Se  $\sigma \leq 1$ , então  $D$  é uma região assintoticamente estável para o ponto de equilíbrio  $(1,0)$ .

#### Bio-Teorema (2.4.1)

Em uma doença com dinâmica vital, na qual a recuperação confere imunidade, se o número de contatos infecciosos excede um, então as proporções de susceptíveis e infecciosos aproximam-se finalmente de valores endêmicos constantes positivos, exceto no caso trivial onde não existem infecciosos. Se o número de contatos é menor que um, então a proporção de infecciosos aproxima-se de zero, assim como a proporção de removidos (devido à morte de indivíduos removidos). Assim toda população é conseqüentemente susceptível (devido ao contínuo nascimento de novos susceptíveis).

Desse modo, em que comprovamos a observação feita, inicialmente, de que o comportamento assintótico das soluções do modelo SIR é diferente caso seja ou não incluída a dinâmica

vital.

O modelo SIR sem dinâmica vital pode ser apropriado para descrever a propagação de doenças em pequenos intervalos de tempo, enquanto que o modelo SIR com dinâmica vital é adequado para descrição da propagação de doenças por um longo período de tempo. Doenças com agente viral, tais como sarampo, varíola, caxumba, gripe e catapora podem ter uma longa propagação ocasional em certas comunidades e ainda serem endêmicas, em baixo nível, em grandes grupos de populações.

Uma consequência imediata dos Teoremas (2.3.1) e (2.4.1) é que o número de contatos infecciosos é um critério limiar para determinar se uma doença com dinâmica vital permanece endêmica, tal critério é o mesmo para doenças com ou sem dinâmica vital. Entretanto, a proporção de infecciosos aproximada assintoticamente, para um tempo bastante longo, é superior para doenças sem imunidades do que para doenças com imunidades.

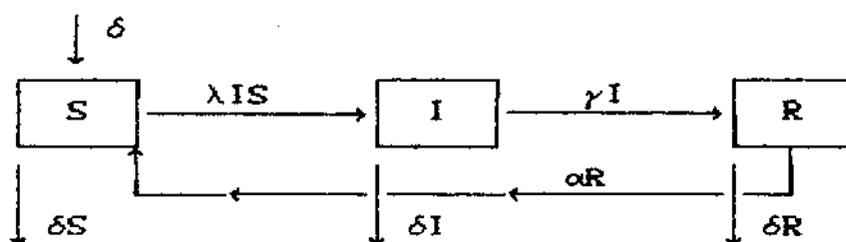
## 2.5 Modelo SIRS.

Neste modelo, com dinâmica vital, a recuperação confere apenas imunidade temporária. Este modelo pode ser apropriado para descrever doenças tais como varíola, tétano, gripe, cólera e febre tifóide.

Um resultado importante, aqui obtido, é que a imunidade temporária, ao contrário da imunidade permanente, não muda o critério *limiar*, havendo, contudo, uma alteração no nível dos infecciosos.

Suponhamos que a taxa com a qual os indivíduos perdem suas imunidades e retornam à classe dos susceptíveis seja proporcional ao número de infecciosos removidos, com uma constante de proporcionalidade igual a  $\alpha$ , denominada *taxa diária de perda de imunidade*. O período médio de imunidade é  $1/\alpha$ . Quando a imunidade é permanente  $\alpha = 0$ .

Temos, assim, o seguinte problema de valor inicial:



$$\begin{cases}
 S'(t) = -\lambda IS + \delta - \delta S + \alpha R \\
 \quad = -\lambda IS + (\delta + \alpha) - (\delta + \alpha)S - \alpha I \\
 I'(t) = \lambda IS - \gamma I - \delta I \\
 R(t) = 1 - S(t) - I(t) \\
 S_0 > 0, I_0 > 0 \text{ e } R_0 > 0.
 \end{cases} \tag{2.5.1}$$

onde  $\lambda, (\lambda + \delta)$  e  $(\delta + \alpha)$  são positivos.

A suposição de que  $(\gamma + \delta) > 0$  significa que há um

fluxo para fora da classe dos infecciosos, enquanto que  $(\delta + \alpha) > 0$  significa que existe um fluxo para dentro da classe dos susceptíveis.

Sejam  $\sigma = \lambda / (\gamma + \delta)$  e

$$D = \{ (S, I) \mid S \geq 0, I \geq 0 \text{ e } S + I \leq 1 \}$$

#### **Teorema (2.5.1)**

Seja  $(S(t), I(t))$  uma solução de (2.5.1). Se  $\sigma > 1$ , então  $D = \{ (S, 0) \mid 0 \leq S \leq 1 \}$  é uma região assintoticamente estável para o ponto de equilíbrio  $\left( 1/\sigma, \frac{(\delta + \alpha)(\sigma - 1)}{\lambda + \alpha\sigma} \right)$ . Se  $\sigma \leq 1$ , então  $D$  é uma região assintoticamente estável para o ponto de equilíbrio  $(1, 0)$ .

#### **Bio-Teorema (2.5.1)**

Em uma doença, na qual a recuperação confere imunidade temporária, se o número de contatos infecciosos excede um, então as proporções de susceptíveis e infecciosos aproximam-se de valores endêmicos constantes, para um tempo longo; caso contrário, a proporção de susceptíveis cresce e proporção de infecciosos decresce para zero, consequentemente toda população é susceptível.

#### **Demonstração do Teorema (2.5.1)**

Mostremos que nenhuma solução de (2.5.1) deixa o triângulo D:

$I = 0$  é uma solução, para  $S = 0$ .

$S = 0 \rightarrow S'(t) = \delta + \alpha(1 - I) > 0$ . Isto significa que nenhuma solução cruza a fronteira  $S = 0$ , pois assim a proporção de susceptíveis estaria crescendo, o que é um absurdo.

$I + S = 1 \rightarrow R = 0$ . Substituindo-se esse valor em (2.5.1), temos  $S' + I' = -\gamma I < 0$ . Por outro lado, derivando-se  $S + I = 1$ , tem-se  $S' + I' = 0$ . Assim, chegamos a um absurdo, portanto, nenhuma solução cruza a reta  $S + I = 1$ .

Os pontos de equilíbrios do sistemas (2.5.1) são:

$$A = (1,0) \text{ e } C = \left( 1/\sigma, \frac{(\delta + \alpha)(\sigma - 1)}{1 + \alpha\sigma} \right)$$

Analisemos inicialmente a estabilidade do ponto A:

Transladando-se o ponto A para a origem, temos:

$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda(S + 1) + (\delta + \alpha) - (\delta + \alpha)(S + 1) - \alpha I \\ I'(t) = \lambda(S + 1) - \gamma I - \delta I \end{cases}$$

cujo sistema linearizado correspondente é:

$$\begin{cases} S'(t) = -(\delta + \alpha)S - (\lambda + \alpha)I \\ I'(t) = (\lambda - \gamma - \delta)I \end{cases}$$

As raízes características do sistema linearizado são:  $-(\delta + \alpha)$  e  $(\lambda - \gamma - \delta)$ .

Se  $\sigma < 1$ , ambas as raízes são negativas, então A é

assintoticamente estável (ponto nodal).

Se  $\sigma > 1$ , as raízes são de sinais diferentes, então A é instável (ponto de sela).

Façamos, agora, uma análise sobre a estabilidade do ponto C:

Se  $\sigma > 1$ , então o ponto de equilíbrio C está no interior de D.

Transladando-se o ponto C para a origem, as raízes características do sistema linear associado são negativas. Logo o ponto C é assintoticamente estável (ponto nodal).

Pelo Teorema (1.5.3), fazendo-se  $B = 1/I$ , podemos garantir que não existe ciclos limites em D. O eixo dos S é uma linha atratora para o ponto de sela (1,0); enquanto a direção repulsora tem inclinação  $1 - \gamma/(\lambda + \delta)$ , a qual está no interior do triângulo D. Portanto, D menos o eixo dos S é uma região assintoticamente estável para o ponto C, quando  $\sigma > 1$ .

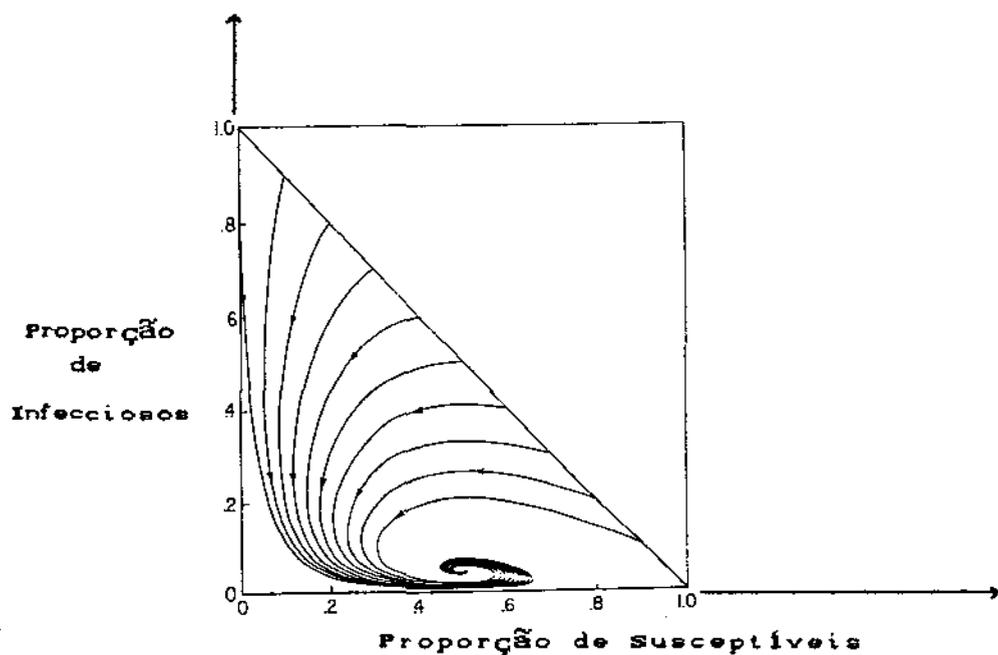
Se  $\sigma < 1$ , o ponto A = (1,0) é o único ponto de equilíbrio no triângulo D. Logo toda trajetória em D deve aproximar-se de (1,0).

Se  $\sigma = 1$ , então uma das raízes características é nula e a outra é negativa, logo o método de análise feito através do sistema linear associado não pode ser empregado.

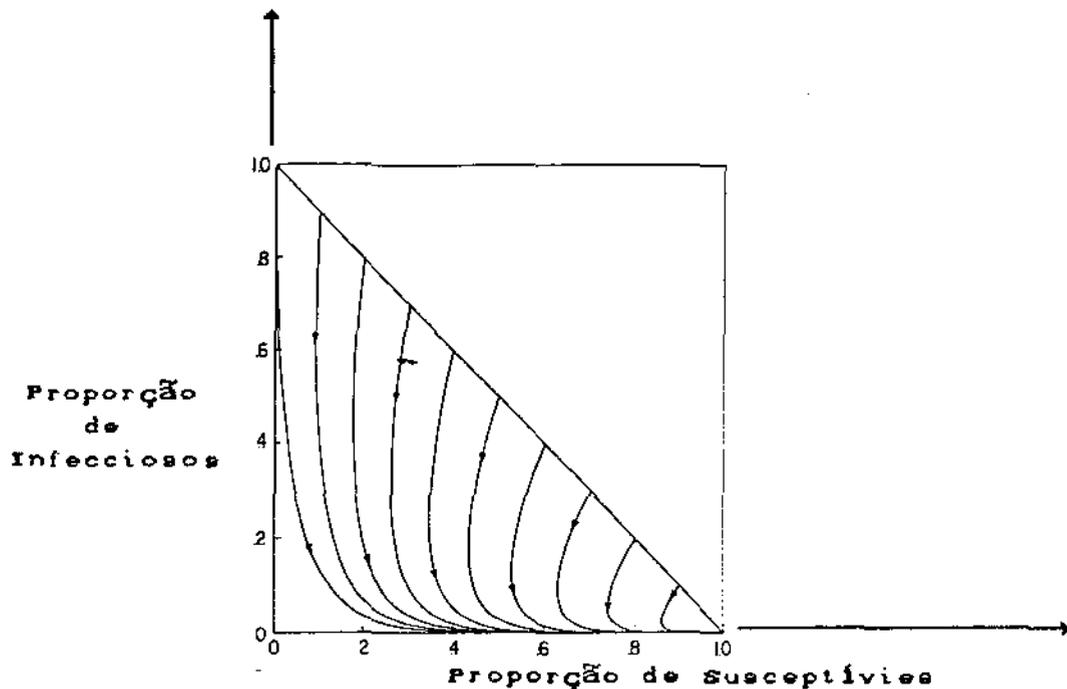
Contudo,  $\sigma = 1$  implica que  $\lambda = \gamma + \delta$  e, portanto,  $I'(t) = \lambda(I - 1) \leq 0$  em D, com a igualdade válida somente se  $I = 0$ . Assim todas as trajetórias aproximam-se de  $I = 0$ , desde

que  $I = 0$  é uma solução para  $S = 1$ , resulta que todas as trajetórias aproximam-se de  $(1,0)$ . Por conseguinte,  $D$  é uma região assintoticamente estável para o ponto de equilíbrio  $(1,0)$ , se  $\sigma \leq 1$ .

As figuras abaixo ilustram o Teorema (2.5.1):



$$\sigma = 2, \lambda = 0.4, \gamma = 0.2, \delta = 0.0001 \text{ e } \alpha = 0.02$$



$$\sigma = 0.5, \lambda = 0.1, \gamma = 0.2, \delta = 0.0001 \text{ e } \alpha = 0.02$$

Observação: O Teorema (2.4.1), está demonstrado, bastando fazer  $\alpha=0$ .

## 2.6 Modelo SIS Com Vítimas Fatais.

Tomemos um modelo SIS, com dinâmica vital, onde  $NR(t)$  seja o número de indivíduos que estão mortos, no tempo  $t$ , devido à doença.

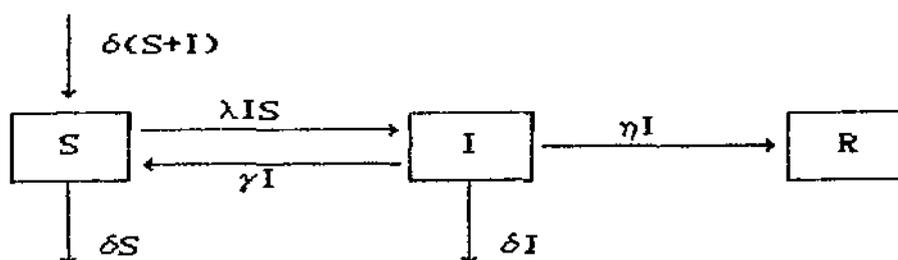
Esse modelo pode ser apropriado para descrever doenças tais como tuberculose e sífilis.

Uma doença cuja recuperação não confere imunidade, em geral, permanece endêmica. Entretanto, mostraremos que se existe uma relação doença/fatalidade, conseqüentemente a

doença chega à extinção, deixando uma proporção positiva de susceptíveis.

Suponhamos que a taxa de remoção de infecciosos por morte devido à doença é proporcional ao número de infecciosos, cuja constante de proporcionalidade seja igual a  $\eta$ , a qual é denominada de taxa relativa de mortandade.

Temos, assim, o seguinte problema de valor inicial:



$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = -\lambda IS + \gamma I + \delta(S+I) - \delta S = -\lambda I(S - 1/\sigma) \\ I'(t) = \lambda IS - \gamma I - \delta I - \eta I \\ R(t) = 1 - S(t) - I(t) \end{array} \right. \quad (2.6.1)$$

$$S_0 > 0, I_0 > 0 \text{ e } R_0 = 0.$$

$$\text{onde } \lambda, \eta > 0; \sigma = \lambda/(\gamma+\delta), \varepsilon = \eta/(\gamma+\delta)$$

$$D = \{ (S, I) \mid S \geq 0, I \geq 0 \text{ e } S + I \leq 1 \}.$$

#### Teorema (2.6.1)

Seja  $(S(t), I(t))$  uma solução de (2.6.1).

Se  $1 < \delta S_0 < 1 + \varepsilon$ , então  $I(t)$  decresce para zero, quando  $t \rightarrow \infty$ . Se  $\delta S_0 > 1 + \varepsilon$ , então  $I(t)$  primeiramente cresce até atingir o valor máximo igual a

$1 - \frac{1 + \varepsilon}{\sigma} + \frac{\varepsilon}{\sigma} \ln \frac{\varepsilon}{\sigma S_0 - 1}$  e, em seguida, decresce para zero, quando  $t \rightarrow \infty$ . A proporção de susceptíveis decresce e o valor limite  $S_\infty$  é a única raiz, no intervalo  $(1/\sigma, (1 + \varepsilon)/\sigma)$ , de

$$1 - S + \frac{\varepsilon}{\sigma} \ln \frac{\sigma S - 1}{\sigma S - 1} = 0. \quad (2.6.2)$$

Se  $0 \leq \sigma S_0 \leq 1$ , então  $I(t)$  decresce para zero, quando  $t \rightarrow \infty$  e  $S_\infty$  é a única raiz de (2.6.2) no interv.  $(0, 1/\sigma)$ .

#### Bio-Teorema 2.6.1.

Uma doença, sem imunidade, causando morte para alguns infecciosos, sempre chegará à extinção e a proporção final de susceptíveis é positiva.

#### Demonstração do Teorema (2.6.1)

Todo ponto de eixo dos  $S$  é um ponto de equilíbrio do sistema (2.6.1).

Vamos separar a demonstração em duas partes:

a- Se  $\sigma S_0 > 1$ , então a translação  $U = S - 1/\sigma$  transforma (2.6.1) no seguinte sistema (semelhante ao sistema (2.4.1)).

$$\begin{cases} U'(t) = -\lambda IU \\ I'(t) = \lambda IU - \eta I \\ R'(t) = \eta I \end{cases} \quad (2.6.3)$$

com  $U_0 = S_0 - 1/\sigma > 0$ ,  $I_0 > 0$ ,  $R_0 = 0$  e  
 $U(t) + I(t) + R(t) = 1 - 1/\sigma$

A partir de (2.6.3), obtemos:

$$\frac{dI}{dU} = -1 + \frac{1}{\rho U} \quad \text{onde } \rho = \lambda/\eta.$$

Donde,  $I = -U + (1/\rho)\ln(U) + K$ .

Como  $R_0 = 0$ , temos  $I_0 = -U_0 + (1/\rho)\ln(U_0)$

Portanto,  $K = I_0 + U_0 - (1/\rho)\ln(U_0)$

Logo,  $I = 1 - \frac{1}{\sigma} - U + (1/\sigma)\ln(U/U_0)$  (2.6.4)

Pelo Teorema (2.4.1), temos:

1- Se  $\rho U_0 \leq 1$ , então  $I(t)$  decresce para zero, quando  $t \rightarrow \infty$ . Por outro lado,

$$\rho U_0 \leq 1 \Rightarrow \frac{\lambda}{\eta}(S_0 - (1/\sigma)) \Rightarrow \frac{\lambda}{\eta\sigma}(\sigma S_0 - 1) \leq 1$$

Como  $\delta = \lambda/(\gamma + \delta)$  e  $\epsilon = \eta/(\gamma + \delta)$ , temos

$$\frac{1}{\epsilon}(\sigma S_0 - 1) \leq 1 \Rightarrow 0 < \sigma S_0 \leq 1 + \epsilon.$$

Ou seja,  $I(t)$  decresce para zero, quando  $t \rightarrow \infty$ , se  $0 < \sigma S_0 < 1 + \epsilon$ .

2- Se  $\sigma S_0 > 1$ , então  $I(t)$  cresce até atingir um valor máximo igual a  $1 - (1/\sigma) - (1/\rho) + (1/\rho)\ln[1/\rho U_0]$ , em seguida decresce para zero, quando  $t \rightarrow \infty$ .

Ora, como  $\sigma = \lambda/(\gamma + \delta)$ ,  $\epsilon = \eta/(\gamma + \delta)$ ,  $\rho = \lambda/\eta$  e  $U_0 = S_0 - 1/\sigma$ , temos:

$$i) \rho U_0 = \frac{1}{\varepsilon} (\sigma S_0 - 1) \rightarrow \frac{1}{\rho U_0} = \frac{\varepsilon}{\sigma S_0 - 1}$$

$$ii) -\frac{1}{\rho} = -\frac{\eta}{\lambda} = -\frac{\varepsilon}{\sigma}$$

$$iii) \rho U_0 > 1 \rightarrow \sigma S_0 > 1 + \varepsilon.$$

Ou seja:

Se  $\sigma S_0 > 1 + \varepsilon$ , então  $I(t)$  cresce até um valor máximo igual a  $1 - \frac{1 + \varepsilon}{\sigma} + (\varepsilon/\sigma) \ln \left[ \frac{\varepsilon}{\sigma S_0 - 1} \right]$  e, em seguida, decresce para zero, quando  $t \rightarrow \infty$ .

3-  $U_\infty$  é a única raiz, no intervalo  $(0, 1/\rho)$ , da equação  $1 - (1/\sigma) - u + (1/\rho) \ln[U/U_0] = 0$ .

Observemos que:

$$U = 0 \rightarrow S - (1/\sigma) = 0 \rightarrow S = 1/\sigma.$$

$$U = 1/\rho \rightarrow S - 1/\sigma = 1/\rho \rightarrow S = 1/\sigma + 1/\rho \rightarrow S = \frac{1 + \varepsilon}{\sigma}.$$

$$\text{Ou seja, } U \in (0, 1/\rho) \text{ é o mesmo que } S \in (1/\sigma, \frac{1 + \varepsilon}{\sigma}).$$

Escrevamos, agora,  $U_\infty / U_0$  em função de  $S_\infty$  e  $S_0$ :

$$U_\infty = S_\infty - (1/\sigma) = \frac{\sigma S_\infty - 1}{\sigma}$$

$$U_0 = S_0 - (1/\sigma) = \frac{\sigma S_0 - 1}{\sigma}$$

$$\text{Logo, } \frac{U_\infty}{U_0} = \frac{\sigma S_\infty - 1}{\sigma S_0 - 1}.$$

Desse modo, podemos assegurar que  $S_\infty$  é a única

solução, no intervalo  $(1/\sigma, (1 + \varepsilon)/\sigma)$ , da equação

$$1 - S + (\varepsilon/\sigma) \ln \left[ \frac{\sigma S - 1}{\sigma S_0 - 1} \right] = 0.$$

b- Suponhamos, agora, que  $\sigma S_0 \leq 1$ .

Como  $S$  é decrescente, resulta que  $\sigma S \leq \sigma S_0 \leq 1$ .

No sistema (2.6.1), temos que:

$$I' = \lambda IS - \gamma I - \delta I - \eta I \rightarrow \frac{I'}{\gamma + \delta} = \sigma IS - I - \varepsilon I, \text{ ou}$$

$$\text{ainda, } \frac{I'}{\gamma + \delta} = I(\sigma S - 1 - \varepsilon).$$

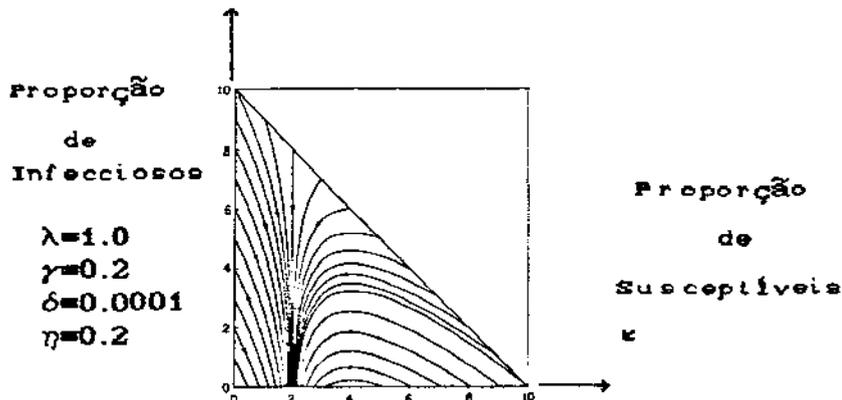
Como  $\sigma S - 1 \leq 0$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $\gamma + \delta > 0$ , temos que  $I' \leq 0$  e, portanto,  $I$  decrescente, a menos que  $I = 0$ ; logo  $I_\infty = 0$ .

Por outro lado,

$$S'(t) = -\lambda I(S - 1/\sigma), \text{ ou ainda, } S'(t) = -\lambda I \left[ \frac{\sigma S - 1}{\sigma} \right].$$

Dado que  $\sigma S - 1 \leq 0$ , então  $S$  é crescente e limitada por  $1/\sigma$ , uma vez que  $S = 1/\sigma$  é uma solução. Por conseguinte  $S_\infty$  existe e é solução da equação (2.6.2).

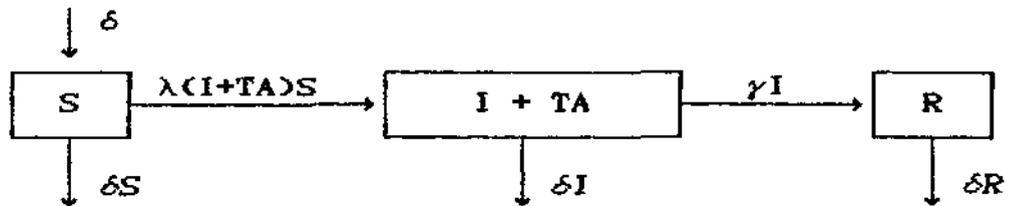
O abaixo ilustra o Teorema (2.6.1):



## 2.7 Modelo SIR Com Transmissor Assintomático.

Nêste modelo, com dinâmica vital, vamos supor que existe um número fixo TA de transmissores sem nenhum sintoma clínico da doença. É possível que se tenha indivíduos infecciosos com essa característica clínica em doenças tais como hepatite, polio, difteria, febre tifóide e colera.

Assim, temos o seguinte problema de valor inicial:



$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda(I + TA)S + \delta - \delta S \\ I'(t) = \lambda(I + TA)S - \gamma I - \delta I \\ R(t) = 1 - S(t) - I(t); \quad S_0 > 0, I_0 > 0, R_0 > 0 \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Sejam  $\sigma = \lambda/(\gamma + \delta)$  e o triângulo

$$D = \{(S, I) \mid S \geq 0, I \geq 0 \text{ e } S + I \leq 1\}.$$

Determinemos os pontos críticos de (2.7.1):

$$\begin{cases} -\lambda(I + TA)S + \delta - \delta S = 0 \\ \lambda(I + TA)S - \gamma I - \delta I = 0 \end{cases} \rightarrow S = 1 - \left( \frac{\gamma + \delta}{\delta} \right) I$$

$$\rightarrow (\lambda/\gamma)I^2 - \left[ 1 - (\lambda/\delta)(I + TA) - 1 \right]I - \sigma(I + TA) = 0$$

A única solução não negativa da equação acima é:

$$I^* = \frac{\sigma - 1 - \frac{\gamma}{\delta} + \left[ \left( \sigma - 1 - \frac{\lambda}{\delta}(I+TA) \right)^2 + \frac{4\lambda\sigma}{\delta} \right]^{1/2}}{2\lambda/\sigma}$$

Dai, o valor correspondente a S é:

$$S^* = 1 - (\lambda/\delta\sigma)I^*.$$

#### Teorema (2.7.1)

Considerando-se o sistema (2.7.1), o triângulo D é uma região assintoticamente estável para o ponto de equilíbrio  $(S^*, I^*)$ .

#### Bio-Teorema (2.7.1)

Uma doença com transmissores assintomáticos, com dinâmica vital, na qual a recuperação confere imunidade, sempre permanece endêmica.

#### Demonstração do Teorema (2.7.1).

Fazendo-se uma translação do ponto de equilíbrio  $(S^*, I^*)$  para a origem, as raízes características do sistema linear associado são reais e negativas, por conseguinte o referido ponto é assintoticamente estável.

Nenhuma solução deixa o triângulo D. Quando fazemos  $B = 1/SI$  no Teorema (1.5.3), concluímos que não existem ciclos limites em D. Portanto, toda solução se aproxima de  $(S^*, I^*)$ .

## 2.8 Modelo SIS em duas Sub- Populações que Interagem

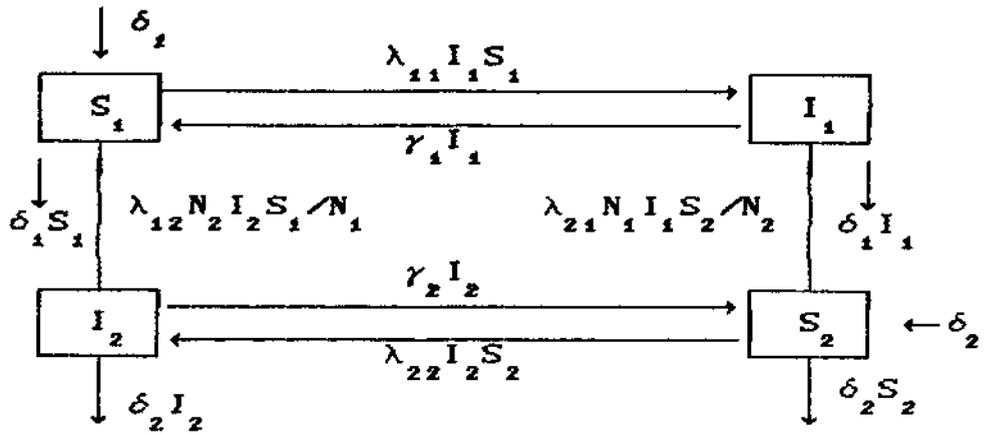
A estratificação social e faixas etárias separam, naturalmente, uma dada população em subpopulações com parâmetros, quase sempre, bem diferentes. Como exemplo, podemos citar que nas pré-escolas e escolas as taxas de contatos, certamente, são bem maiores que entre adultos e idosos.

Quando um modelo leva em conta a existência de subpopulações com características diferentes, parece ter um ganho significativo no sentido de ser mais realista. Por outro lado, tem-se uma certa complicação sob o ponto de vista matemático, dado que as interações nas classes são em maior número do que quando se tem uma única população.

A seguir, apresentamos um modelo do tipo SIS, com dinâmica vital, com duas subpopulações (veja demonstração em [12]).

A gonorreia é uma doença que pode ser modelada via esse esquema ([12]).

Seja seguinte problema de valor inicial:



$$\left. \begin{aligned}
 S_1'(t) &= -\lambda_{11} I_1 S_1 - \lambda_{12} N_2 I_2 S_1 / N_1 + \delta_1 - \delta_1 S_1 + \gamma_1 I_1 \\
 I_1'(t) &= \lambda_{11} I_1 S_1 + \lambda_{21} N_1 I_1 S_2 / N_2 - \gamma_1 I_1 - \delta_1 I_1 \\
 S_2'(t) &= -\lambda_{22} I_2 S_2 - \lambda_{21} N_1 I_1 S_2 / N_2 + \delta_2 - \delta_2 S_2 + \gamma_2 I_2 \\
 I_2'(t) &= \lambda_{22} I_2 S_2 + \lambda_{12} N_2 I_2 S_1 / N_2 - \delta_2 I_2 - \gamma_2 I_2
 \end{aligned} \right\} \quad (2.8.1)$$

$$S_1(0) > 0, I_1(0) > 0, S_2(0) > 0, I_2(0) > 0$$

$$S_1 + I_1 = S_2 + I_2 = 1$$

Onde  $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{22}, \lambda_{21}, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$  são constantes positivas.

Cada parâmetro  $\lambda_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) é o número médio de contatos infecciosos de um infeccioso na subpopulação  $j$  com indivíduos na população  $i$ . Desde que  $1/(\gamma_j + \delta_j)$  é o período médio de infecciosidade, levando em conta a morte, para um

indivíduo infeccioso da subpopulação  $j$ ,  $\sigma_{ij} = \lambda_{ij} / (\gamma_j + \delta_j)$  é o número médio de indivíduos (susceptíveis e infecciosos) contatados por infeccioso da subpopulação  $j$ , durante seu período de infecciosidade.

Sejam  $a = \lambda_{11} - \gamma_1 - \delta_1$ ,  $b = \lambda_{12} N_2 / N_1$ ,  $c = \lambda_{21} N_1 / N_2$ ,  $d = \lambda_{22} - \gamma_2 - \delta_2$  e o retângulo  $D$  limitado pelos eixos  $I_1$  e  $I_2$  e retas  $I_1 = 1$  e  $I_2 = 1$ .

#### Teorema (2.8.1)

Para o sistema (2.8.1), se  $ad - bc \geq 0$ , então  $D$  é uma região assintoticamente estável para o ponto de equilíbrio  $(0,0)$ ; caso contrário, existe um único ponto de equilíbrio no interior de  $D$ , para o qual  $D - \{(0,0)\}$  é uma região assintoticamente estável.

#### Bio-Teorema (2.8.1)

Para uma doença, com dinâmica vital, em duas subpopulações que interagem, se os números de contatos infecciosos  $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$  são menores que um, então a interação entre as duas subpopulações pode implicar em que a doença permaneça endêmica nas duas populações. Se um dos números de contatos infecciosos é menor que um e o outro é maior que um, então a interação as duas populações inevitavelmente causará endemia em ambas as subpopulações.

## 2.9 Periodicidade.

Algumas doenças transmissíveis, tais como sarampo, caxumba e catapora, podem ter uma incidência periódica no tempo. Por exemplo, constatou-se que na cidade de New York, durante os anos 1929-1970, existiu anualmente a propagação de caxumba e catapora e bienalmente a propagação de sarampo.

Esses dados foram cuidadosamente analisados por London e Yorke ([6]). Eles atribuem a periodicidade do número de casos registrados à periodicidade nas taxas de contatos. Muitas taxas de contatos variam bastante durante o ano devido a fatores periódicos, tais como variações metereológicas e, também, o fato de que crianças estão na escola somente durante determinados meses do ano.

Não há dúvida que muitas doenças têm taxas de contatos periódicas, como por exemplo, o resfriado comum e algumas doenças sexualmente transmissíveis.

Entretanto, outras razões podem implicar em que certas doenças tenham ocorrências periódicas, além da simples periodicidade das taxas de contatos. No Capítulo III, veremos o exemplo de um modelo cuja taxa de incidência é não linear e é possível, sob certas condições, existir soluções periódicas para o sistema que governa o referido modelo. Hethcote et alii ([14]), registram que certos modelos, com taxas de incidências lineares, admitem soluções periódicas, quando se atribui

determinados valores particulares aos parâmetros.

Nesta secção, estabelecemos certas condições para que se tenha periodicidade em alguns modelos.

### 2.9.1 Modelo SIS.

Vimos na secção 2.3 que o modelo SIS, com ou sem dinâmica vital, não admite periodicidade, uma vez que a doença ou se extingue ou se mantém em um certo nível endêmico. Este resultado foi obtido na hipótese de que o referido modelo admite uma taxa de contato constante.

Quando acrescentamos ao modelo SIS, sem dinâmica vital, a hipótese de que um indivíduo infeccioso permanece na classe dos infecciosos por um período de tempo constante  $\tau$ , mantendo-se ainda a taxa de contato igual a uma constante, podemos mostrar que não existe solução periódica para o sistema associado ao referido modelo. Na verdade, nesse modelo, qualquer retardamento incluso na classe dos infecciosos em nada modificará a situação da não existência de periodicidade ([5]).

Por outro lado, mantendo-se um período de retardamento constante  $\tau$  na classe dos infecciosos e, agora, considerando-se uma taxa de contato periódica  $a(t)$ , obtém-se

uma solução periódica para o sistema associado ao modelo em análise. Vamos, a seguir, enunciar um teorema que nos dá a garantia de uma tal solução periódica.

A equação que nos permite obter a proporção de infecciosos no tempo  $t$  é a seguinte:

$$I'(t) = a(t)I(t)S(t) - a(t-\tau)I(t-\tau)S(t-\tau).$$

Como  $S(t) + I(t) = 1$ , temos:

$$I'(t) = a(t)I(t)[1 - I(t)] - a(t-\tau)I(t-\tau)[1 - I(t-\tau)]$$

Façamos  $f(t,I) = a(t)I(t)[1 - I(t)]$ , assim:

$$I'(t) = f(t, I(t)) - f(t-\tau, I(t-\tau)), \text{ que pode ser}$$

escrita na forma integral:

$$I'(t) = \int_{t-\tau}^t f(\eta, I(\eta)) d\eta.$$

Cooke e Kaplan ([6]) dão uma resposta quanto à existência de soluções periódicas para o sistema que governa o modelo em estudo, considerando uma função  $f(t,x)$  periódica em  $t$ .

Vale ressaltar que na formulação do nosso modelo a função  $f(t,x)$  é do tipo  $f(t,I) = a(t)I(1 - I)$ , porque o contato de pessoa a pessoa é suposto ser estabelecido pela lei de ação de massa. Outras taxas de incidência podem ser consideradas e a vantagem do teorema, dado a seguir, é que a função  $f(t,I)$  pode ser bastante genérica.

**Teorema (2.9.1).**

" Suponhamos que  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $f(t,0) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e existem constantes  $M$  e  $w$  tais que:

$$0 \leq f(t,x) \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \geq 0 \quad \text{e}$$

$$f(t+w,x) = f(t,x) \quad \forall t,x \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos, ainda, que exista um número  $x_1$ , tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}$  existe e é contínua para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq x \leq x_1$ , e satisfaz a seguinte condição:

$$\inf_{t \in (0,w)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = \inf_{t \in (0,w)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,0) = \alpha > 0, \quad \text{onde } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ é}$$

a derivada parcial à direita.

Se  $\alpha \tau > 1$ , então existe uma solução não trivial periódica da equação

$$x(t) = \int_{t-\tau}^t f(\eta, x(\eta)) d\eta, \quad \text{de período } w \text{ e}$$

positiva  $\forall t \in \mathbb{R}$ ."

Observamos que o número  $\alpha$  pode ser interpretado como o número de contatos por infeccioso, e como  $\tau$  é o período de infecciosidade, podemos dizer que  $\alpha \tau$  é o número mínimo de contatos infecciosos durante seu período de infecciosidade.

**Bio-Teorema (2.9.1)**

Em uma doença, sem dinâmica vital, na qual a

recuperação confere imunidade e há um período de retardamento  $\tau$  na classe dos infecciosos, se o número mínimo de contatos infecciosos  $\alpha\tau$  de um infeccioso, durante o seu período de infecciosidade, excede um, então a proporção de infecciosos varia periodicamente.

Observamos que o Teorema (2.9.1) tem uma característica limitante, desde que a doença permanece endêmica e periódica na população, bastando para isso que o parâmetro  $\alpha\tau$  seja maior que o valor crítico um.

## 2.9.2 Modelo SEIRS.

No modelo anterior lidamos apenas com as classes dos susceptíveis e dos infecciosos. Não foram consideradas outras possibilidades, tais como a ocorrência de imunidade temporária, inclusão de um período latente e/ou período de incubação.

Nesta secção, enunciaremos um teorema que garante a existência de solução periódica para um modelo do tipo SEIRS, caso um certo valor limitante seja excedido. É importante observar que o valor limitante, acima referido, depende da taxa de contato, dos períodos de incubação e infecciosidade e independe da duração da imunidade temporária ([25]).

Suponhamos que a propagação da doença satisfaz as seguintes hipóteses:

(H1)- A taxa de transferência de susceptíveis expostos para a classe dos infecciosos, no tempo  $t$ , é dada por  $a(t)I(t)S(t)$ , onde  $a(t)$  é uma função periódica de período  $w$ .

(H2)- Um indivíduo exposto no tempo  $t-\tau_1$ , torna-se infeccioso no tempo  $t$ . Desse modo, o período latente é o tempo de permanência na classe E e é exatamente  $\tau_1$  unidades de tempo.

(H3)- Um indivíduo infeccioso permanece precisamente  $\tau_2$  unidades de tempo na classe dos infecciosos para, em seguida, deslocar-se para a classe R dos removidos.

(H4)- Um indivíduo recuperado tem imunidade  $\tau_3$  unidades de tempo e, em seguida, torna-se susceptível.

Assim, o modelo tem a seguinte formulação:

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = -a(t)I(t)S(t) + \\ \quad a(t-\tau_1-\tau_2-\tau_3)I(t-\tau_1-\tau_2-\tau_3)S(t-\tau_1-\tau_2-\tau_3) \\ E'(t) = a(t)I(t)S(t) - a(t-\tau_1)I(t-\tau_1)S(t-\tau_1) \\ I'(t) = a(t-\tau_1)I(t-\tau_1)S(t-\tau_1) - \\ \quad a(t-\tau_1-\tau_2)I(t-\tau_1-\tau_2)S(t-\tau_1-\tau_2) \\ R'(t) = a(t-\tau_1-\tau_2)I(t-\tau_1-\tau_2)S(t-\tau_1-\tau_2) - \\ \quad a(t-\tau_1-\tau_2-\tau_3)I(t-\tau_1-\tau_2-\tau_3)S(t-\tau_1-\tau_2-\tau_3) \end{array} \right.$$

Com  $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = 1$ .

As equações acima podem ser reescritas em termos de

integrais:

$$S(t) = 1 - \int_{t-\tau_1-\tau_2-\tau_3}^t a(\eta)I(\eta)S(\eta)d\eta \quad (2.9.1)$$

$$E(t) = \int_{t-\tau_1}^t a(\eta)I(\eta)S(\eta)d\eta$$

$$I(t) = \int_{t-\tau_1-\tau_2}^{t-\tau_1} a(\eta)I(\eta)S(\eta)d\eta \quad (2.9.2)$$

$$R(t) = \int_{t-\tau_1-\tau_2-\tau_3}^{t-\tau_1-\tau_2} a(\eta)I(\eta)S(\eta)d\eta$$

As constantes de integração foram corretamente escolhidas, pois basta notar que a primeira integral representa as proporções daqueles indivíduos, os quais tendo deixado a classe dos susceptíveis no intervalo  $[t-\tau_1-\tau_2-\tau_3, t]$ , não podem retornar à classe dos susceptíveis antes do tempo  $t$ . Logo essa integral representa de fato as proporções de todos aqueles indivíduos nas classes E, I e R, no tempo  $t$ .

Agora, é suficiente considerar apenas as equações (2.9.1) e (2.9.2).

Fazendo-se a seguinte mudança de variáveis:

$x_1(t) = 1 - S(t)$  e  $x_2(t) = I(t)$ , assim temos:

$$x_1(t) = \int_{t-\tau_1-\tau_2-\tau_3}^t a(\eta) f(x_1(\eta), x_2(\eta)) d\eta \quad (2.9.3)$$

$$x_2(t) = \int_{t-\tau_1-\tau_2}^{t-\tau_1} a(\eta) f(x_1(\eta), x_2(\eta)) d\eta \quad (2.9.4)$$

onde  $f(x_1, x_2) = x_2(1 - x_2)$ , se  $0 \leq x_1 \leq 1$   
 $= 0$ , se  $x_1 \geq 1$

Observamos que se  $a(t)I(t)S(t)$  (taxa de infecção resultante da lei de massa) é substituída pela função  $a(t)H(S(t), I(t))$ , com a mudança de variáveis  $x_1 = 1 - S$  e  $x_2 = I$ ,

obtemos:  $f(x_1, x_2) = H(1 - x_1, x_2)$ , se  $0 \leq x_1 \leq 1$   
 $= 0$ , se  $x_1 \geq 1$

A função  $H$ , naturalmente, deve satisfazer a algumas exigências tanto do ponto vista matemático como epidemiológico (este último traduzido matematicamente):

- 1-  $H(S, 0) = H(0, I) = 0$ ,  $\forall S, I \geq 0$ .  $H(S, I) > 0$ ,  $\forall S, I > 0$
- 2-  $H$  cresce quando  $S(I)$  cresce.
- 3-  $\frac{\partial H}{\partial I}(1, 0) = 1$ .

As seguintes hipóteses são necessárias para o estabelecimento do teorema dado a seguir ([25]):

- $h_1$ )  $a(t)$  é uma função positiva, contínua e de

período  $w$ , definida em  $\mathbb{R}$ .

$h_2$ )  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$  é contínua e tal que:

1.  $f(x_1, 0) = 0$ , se  $x_1 > 0$ .  $f(x_1, x_2) = 0$ , se  $x_1 \geq 1$ .

2.  $f$  decresce em  $x_2$ , para  $x_1$  fixo.

3.  $f$  é continuamente diferenciável em

$[0, 1] \times [0, 1]$ , com

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 1.$$

4.  $f(x_1, x_2) > 0$  para  $x_1, x_2 \in (0, 1)$ .

$h_3$ ) as constantes  $\tau_1, \tau_2$  e  $\tau_3$  são números reais positivos.

**Teorema (2.9.2).**

Se  $h_1, h_2$  e  $h_3$  são válidas, então:

- a. existe um valor crítico  $\tau_2^* > 0$  do parâmetro  $\tau_2$ , dependendo somente da função  $a(t)$  e do parâmetro  $\tau_1$ , tal que  $\tau_2 > \tau_2^*$ ;
- b. (2.9.3) e (2.9.4) têm pelo menos uma solução não nula  $w$ -periódica  $(x_1(t), x_2(t))$  com  $0 < x_2(t) \leq x_1(t) < 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ;
- c. as soluções não nulas  $w$ -periódicas se bifurcam a partir da  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  quando  $\tau_2 = \tau_2^*$ .

### 2.9.3 Modelo SIRS.

Veremos, no Capítulo III, que quando a taxa de incidência é da forma  $\lambda I^p S^q$ , com  $p > 0$ , é possível existir uma solução periódica para o modelo SIRS.

Quando a taxa de contato é periódica associada a períodos constantes de infecciosidade e imunidade, o modelo SIRS admite oscilações periódicas, como foi visto na secção (2.9.2).

Quando a taxa de incidência é bilinear e não se tem nenhum período de retardamento, com ou sem dinâmica vital, provamos, na secção 2.5, que a doença ou se mantém endêmica ou se extingue; conseqüentemente não há periodicidade.

Hethcote et alii ([14]) fazem referência a resultados que dão conta de que o modelo SIRS, com taxa de incidência bilinear, dois períodos de retardamentos e para certos valores constantes dos parâmetros, é possível admitir soluções periódicas (a prova desses resultados envolve bifurcação de Hopf e técnicas numéricas). No mesmo artigo é estudada a inclusão de um período de retardamento no modelo SIRS e foi provado que, quando o retardamento recai na classe dos infecciosos, não há, definitivamente, oscilações periódicas.

#### 2.9.4 Modelo SIR.

Vimos, na secção 2.4, que o modelo SIR com taxa de contato constante e taxa de infecção bilinear, com ou sem dinâmica vital, não admite oscilações periódicas.

Quando consideramos a taxa de contato periódica e a inclusão de períodos de retardamentos, apresentamos na secção 2.9.2, um resultado que nos garante haver oscilações periódicas no referido modelo.

Hethcote et ali ([13]), fazem referência de que no modelo SIR com dinâmica vital e uma taxa de contato constante, a introdução de períodos de retardamentos não muda o comportamento assintótico das soluções nem tampouco os valores limiares da epidemia. No mesmo artigo há o registro de uma *conjetura* (até então) de que "um modelo (em uma população uniforme e homogeneamente distribuída) com parâmetros constantes tem solução periódica para alguns valores dos parâmetros se, e somente se, o modelo é cíclico com imunidade temporária de tal modo que os indivíduos podem ser retardados significativamente na classe dos removidos".

## CAPITULO III

### Modelos Epidemiológicos Generalizados.

Neste Capítulo, primeiramente analisaremos uma generalização do modelo clássico SIR (modelo Kermac-McKendrick), sem dinâmica vital. Estabeleceremos uma comparação entre os dois modelos, clássico e generalizado ([4]). Em seguida, faremos um estudo exaustivo do modelo SIRS no qual se tem uma taxa de incidência não bilinear, enfatizando que, quando a população considerada varia dentro de certos limites, pode ocorrer, através da bifurcação de Hopf, uma solução periódica ([20]).

#### 3.1 Uma Generalização do Modelo de Kermac-McKendrick.

Vimos, na secção 2.4 do Capítulo II, o modelo SIR sem dinâmica vital. O referido modelo é governado pelo sistema (2.4.12):

$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda IS \\ I'(t) = \lambda IS - \gamma I \\ R'(t) = \gamma I \end{cases}$$

com  $S_0 > 0$ ,  $I_0 > 0$ ,  $R_0 = 0$  e  $S(t) + I(t) + R(t) = N$

No sistema (2.4.12) vemos que a taxa  $\lambda IS$  de incidência da doença é uma função linear do número de infecciosos  $I$ . Essa taxa de incidência pode ser adequada para o caso em que se tem um pequeno número de infecciosos, entretanto, torna-se, por certo, inadequada quando se trata de um número elevado de infecciosos. A principal razão dessa inadequação no modelo é proveniente de fatores de ordem psicológica e de auto-defesa por parte dos indivíduos na população considerada.

É natural que, ante a notícia de um surto epidêmico, os indivíduos, de modo proposital, diminuam o contato entre si. Esse fato não pode ser desprezado na modelagem, por isso é que num modelo mais adequado a taxa de incidência pode ser dada por  $\lambda g(I)$ :

Sendo  $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$  contínua e limitada, satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $g(x) \geq 0$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$

Sempre que houver contato, existe um risco de contaminação.

2.  $g(0) = 0$

Se não há nenhum elemento infeccioso, não haverá epidemia.

3.  $\exists c > 0$  tal que  $g(x) \leq c$

Haverá sempre um número limitado de infecciosos.

4.  $g' : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$  , derivada de  $g$ , existe e é

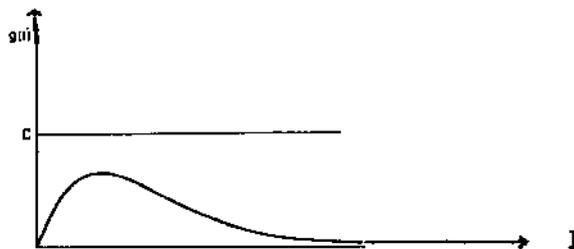
limitada em qualquer compacto de  $\mathbb{R}_+$ ,  $g'(0) > 0$ .

A função  $g$  é crescente quando o número de infecciosos é pequeno.

5.  $\forall x \in \mathbb{R}_+$ , tem-se  $g(x) \leq g'(0)x$ .

A maior variação da taxa de  $g$  ocorre quando o número de infecciosos é pequeno, depois tende a zero quando esse número cresce.

A função  $g(I)$  tem uma configuração semelhante à dada abaixo:



O modelo cuja taxa de infecção é dada por  $g(I)S$ , denominado por  $SIR_{(g)}$ , é descrito pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} S'(t) = -g(I)S \\ I'(t) = g(I)S - \gamma I \\ R'(t) = \gamma I \end{cases} \quad (3.1.1)$$

com  $S_0 > 0$ ,  $I_0 > 0$ ,  $R_0 = 0$  e  $S(t) + I(t) + R(t) = N$ .

### 3.1.1 Solução Global.

#### Existência e Unicidade

Devido às condições satisfeitas pela função  $g(I)$ , podemos garantir que existe uma solução  $W(t)=(S(t),I(t),R(t))$  continuamente diferenciável do sistema (3.1.1), em algum intervalo  $[0,t] \subset \mathbb{R}_+$  ([2],[7],[11]).

Mostra-se que existe uma única solução global (isto é, estendida para todo  $\mathbb{R}_+$ ) para o sistema (3.1.1). Além disso, dada as condições do modelo, faz-se necessário garantir a não negatividade da referida solução.

A seguir, demonstraremos dois lemas e enunciaremos um teorema sobre a globalidade da solução, dando uma versão do referido teorema no plano de fase ([4],[7],[11]).

#### Lema 3.1.1

Se  $W(t) = (S(t),I(t),R(t))$  é uma solução contínua do sistema (3.1.2), em algum intervalo  $J \subset \mathbb{R}_+$ , então:

1.  $S(t) \geq 0$  ,  $I(t) \geq 0$  e  $R(t) \geq 0$  ,  $\forall t \in J$ .

2. Se  $S(0) = S_0 > 0$  e  $I(0) = I_0 > 0$  , então:

$$S(t) > 0 , I(t) > 0 \text{ e } R(t) > 0 \quad \forall t \in J - \{0\}.$$

Demonstração:

Dado que as duas primeiras equações do sistema (3.1.2) independem de  $R(t)$  e  $R_0 = 0$ , podemos considerar tão somente o seguinte sistema:

$$\begin{cases} S'(t) = -g(I)S & t > 0 \\ I'(t) = g(I)S - \gamma I \end{cases} \quad (3.1.2)$$

$$S_0 > 0, I_0 > 0 \text{ e } S(t) + I(t) \leq S_0 + I_0 = N$$

Mostremos que toda solução do sistema (3.1.2) está confinada no seguinte conjunto:

$$D_+^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 > 0 \text{ e } z_2 > 0\}$$

Suponhamos que  $S_0 = 0$ , logo  $I_0 = N$ .

Assim,  $S(t) \equiv 0$  e  $I(t) = N e^{-\gamma t}$ ,  $\forall t \geq 0$  é uma solução do sistema (3.1.2). Daí parte do semi-eixo positivo dos  $I$ , isto é, o intervalo  $[0, N]$ , ser uma trajetória do sistema considerado.

Sejam  $z_0 = (S_0, I_0)$ , com  $S_0$ , um ponto inicial e  $z(t) = (S(t), I(t))$  a solução correspondente satisfazendo a condição inicial do problema.

A trajetória de  $z$  é denotada por:

$$\Gamma(z_0) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}_+ \text{ tal que } z(t) = (S(t), I(t)) \text{ e } z_0 = (S_0, I_0)\}$$

Além disso, todos os pontos do eixo dos  $S$ , isto é  $(S_0, 0) \in \mathbb{R}_+ \times \{0\}$ , são pontos de equilíbrios do sistema (3.1.3). Assim, cada ponto  $(S_0, 0)$ , sendo uma solução, é também uma trajetória e, portanto, todo semi-eixo não negativo dos  $S$  é a união de trajetórias do nosso sistema.

Por outro lado, como as trajetórias não se

interceptam; se  $S(0) > 0$  e  $I(0) > 0$ , então a trajetória correspondente à solução com valor inicial  $(S_0, I_0)$  não pode deixar o conjunto  $D_+^*$ .

Do sistema (3.1.1), temos que :

$$R'(t) = \gamma I \Rightarrow R(t) = R(0) + \int_0^t \gamma I(\eta) d\eta$$

Como  $I(\eta) \geq 0$ , então  $R(t) \geq 0$ .

Quando  $I_0 > 0$ , então  $I(t) > 0$  e, portanto,  $R(t) > 0 \forall t \in J - \{0\}$ . O que demonstra o lema.

**Lema (3.1.2)**

$$\forall t \in J, ||W(t)|| = |S(t)| + |I(t)| + |R(t)| = \\ = S(t) + I(t) + R(t) = N$$

Ou seja, a solução  $W(t) = (S(t), I(t), R(t))$  é uniformemente limitada para  $t \in J$ .

Com os Lemas dados anteriormente, podemos enunciar o seguinte resultado ([4],[7],[11]):

**Teorema 3.1.1**

Existe uma única solução continuamente diferenciável  $W(t) = (S(t), I(t), R(t))$  do sistema (3.1.1)  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ , tal que:

$$W(t) \in D_+ \text{ com } ||W(t)|| = N \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Se  $S_0 > 0$  e  $I_0 > 0$ , então  $W(t) \in D_+^*$ ,  $\forall t > 0$ , onde:

$$D_+ = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \text{ e } u_3 \geq 0\} \text{ e}$$

$$D_+^* = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u_1 > 0, u_2 > 0 \text{ e } u_3 > 0\}.$$

Tendo-se em vista o sistema (3.1.2), podemos estabelecer o seguinte resultado:

### Corolário 3.1.1

Existe uma única solução continuamente diferenciável  $z(t) = (S(t), I(t))$  do sistema (3.1.2)  $\forall t \in \mathbb{R}_+$ , tal que:

$$z(t) \in D_+^2 \text{ com } \|z(t)\| = |S(t)| + |I(t)| = N, \forall t \in \mathbb{R}_+$$

Se  $z_0 = (S(0), I(0)) \in D_+^{2*}$ , então  $z(t) \in D_+^{2*}, \forall t > 0$

$$\text{onde } D_+^2 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 \geq 0 \text{ e } z_2 \geq 0\} \text{ e}$$

$$D_+^{2*} = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 > 0 \text{ e } z_2 > 0\}$$

Observamos que por conta do Corolário 3.1.1, podemos assegurar que toda trajetória do sistema (3.1.2) está confinada no conjunto:

$$T = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 \geq 0, z_2 \geq 0 \text{ e } z_1 + z_2 \leq N\}.$$

### 3.1.2 Análise Qualitativa No Plano De Fase (S,I).

Retomenos o sistema (3.1.2):

$$\begin{cases} S'(t) = -g(I)S & t > 0 \\ I'(t) = g(I)S - \gamma I \\ S_0 > 0, I_0 > 0 \text{ e } S(t) + I(t) \leq S_0 + I_0 = N; \text{ cujas} \end{cases}$$

soluções têm as trajetórias confinadas no conjunto T.

O sistema (3.1.2) pode ser reescrito na forma:

$$\frac{d}{dt} z(t) = f(z(t)) \text{ com } t > 0. \quad (3.1.3)$$

onde  $f(z) = (f_1(z), f_2(z)) = (-g(z_2)z_1, g(z_2)z_1 - \gamma z_2)$  com  $z \in T$ .

Os pontos de equilíbrios do sistema (3.1.4) estão em T e são da forma  $z_0 = (S_1, 0)$  tal que  $S_1 \in [0, N]$ .

Linearizando-se o sistema (3.1.3) e tomando-se a matriz jacobiana correspondente no ponto  $z_0$ , temos:

$$J(z_0) = \begin{bmatrix} 0 & -g'(0)S_1 \\ 0 & g'(0)S_1 - \gamma \end{bmatrix}$$

Se  $S_1 > \rho^* = \gamma/g'(0)$ , então os pontos da forma  $(S_1, 0)$  são instáveis.

Se  $S_1 \leq \rho^* = \gamma/g'(0)$ , então a análise feita através do sistema linear associado não pode ser aplicada nesse caso, dado que se tem um valor próprio nulo e o outro negativo. Usemos um outro argumento.

$$\text{Seja } T^* = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 > 0 \text{ e } z_2 > 0\}.$$

Retomemos o sistema  $\frac{d}{dt} z(t) = f(z(t))$  com  $t > 0$ , onde  $f(z) = (f_1(z), f_2(z)) = (-g_1(z_2)z_1, g_2(z_2)z_1 - \gamma z_2)$ ,  $z \in T$ .

Assim, podemos escrever:

$$S'(t) = f_1(S, I) > 0 \quad \forall (S, I) \in T^* \quad (3.1.5)$$

$$I'(t) = f_2(S, I) < 0 \quad \forall (S, I) \in T^* \text{ com } S < \frac{\gamma I}{g(I)} \quad (3.1.6)$$

$$I'(t) = f_2(S, I) > 0 \quad \forall (S, I) \in T^* \text{ com } S > \frac{\gamma I}{g(I)} \quad (3.1.7)$$

$$I'(t) = f_2(S, I) = 0 \quad \forall (S, I) \in T^* \text{ com } S = \frac{\gamma I}{g(I)} \quad (3.1.8)$$

Tendo em conta as relações acima, podemos conferir à curva  $S = \frac{\gamma I}{g(I)}$  uma característica do tipo *limiar*, no plano de

fase (S,I).

Observamos, também:

1- Se o ponto inicial  $(S_0, I_0) \in T^*$  está do lado esquerdo da curva  $S = \frac{\gamma I}{g(I)}$ , então, como  $I'(t) < 0$ ,  $I(t)$  é uma função decrescente de  $t$ .

2- Se o ponto inicial  $(S_0, I_0) \in T^*$  está do lado direito da curva  $S = \frac{\gamma I}{g(I)}$ , então, como  $I'(t) > 0$ ,  $I(t)$  é uma função crescente de  $t$ , a qual tão logo atinja o seu valor máximo sobre a curva  $S = \frac{\gamma I}{g(I)}$ , passa a decrescer.

3- O número de susceptíveis  $S(t)$  é uma função decrescente de  $t$ , uma vez que  $S'(t)$  é constantemente negativa.

No modelo  $SIR_{(g)}$  a curva  $S = \frac{\gamma I}{g(I)}$  desempenha o mesmo papel que a reta  $S = \gamma/\lambda$  no modelo SIR.

Notemos, por outro lado, que  $S = \frac{\gamma I}{g(I)} \geq \rho^* = \gamma/g'(0)$  (consequência da propriedade 5. da função  $g(I)$ ).

Além disso, a curva  $S = \frac{\gamma I}{g(I)}$  intercepta a reta  $S = \rho^*$  pelo menos no ponto  $(\rho^*, 0)$ , pois  $\lim_{I \rightarrow 0^+} \frac{\gamma I}{g(I)} = \rho^*$ .

Seja  $T_1 = \{z = (S, I) \mid S > \rho^* \text{ e } I = 0\}$ . O conjunto  $T_1$  é invariante para o sistema (3.1.4), isto é: se o ponto inicial  $z_0 = (S_0, I_0) \in T_1$ , então a trajetória correspondente  $\Gamma(z_0)$  está contida em  $T_1$  (esta afirmação é uma consequência do Lema (9.1.1)).

O que estamos fazendo é simplesmente criando

condições para aplicarmos o Teorema de Lyapunov sobre estabilidade (14).

Definamos a seguinte função  $V$  de Lyapunov no conjunto  $T_1$ :

$$V(z) = (S - \rho^*)H(S - \rho^*) + I \quad \text{com } z = (S, I) \in T_1,$$

onde  $H$  é a função de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

A função  $V$ , acima definida, satisfaz as seguintes propriedades:

$$1) - V(z) = 0 \quad \text{se } z \in G = (\{0, \rho^*\} \times \{0\}) \cap T_1.$$

$$z \in G \Rightarrow S \leq \rho^* \text{ e } I = 0 \Rightarrow (S - \rho^*)H(S - \rho^*) = 0$$

$$\Rightarrow V(z) = 0 \quad \forall z \in G.$$

$$2) - V(z) > 0 \quad \text{se } z \in T_1 - G.$$

$$z \in T_1 - G \Rightarrow z = (S, I) \text{ com } S \geq \rho^* \text{ e } I > 0 \text{ ou}$$

$$z = (S, I) \text{ com } S < \rho^* \text{ e } I > 0$$

Como  $(S - \rho^*)H(S - \rho^*) \geq 0$  e  $I > 0$ , temos que  $V(z) > 0$ .

3) -  $V$  é estritamente decrescente ao longo de qualquer trajetória contida em  $T_1 - G$ .

Seja  $z_0 = (S_0, I_0) \in T_1 - G$  o ponto inicial cuja trajetória correspondente é  $\Gamma(z_0)$ .

$$1) \text{ Suponhamos que } S_0 \leq \rho^*.$$

$$\text{Logo } (S - \rho^*)H(S - \rho^*) = 0 \text{ para } S \leq S_0.$$

Portanto,  $V = I \rightarrow V'(t) = I'(t)$ . Nessas condições,  $V(S, I) \in \Gamma(z_0)$  temos que  $S < \frac{\gamma I}{g(I)}$ , logo  $I'(t) < 0$  e assim  $V'(t) < 0$ .

ii) Suponhamos que  $S_0 > \rho^*$ .

Quando  $S \leq \rho^*$ , tem-se  $V'(t) < 0$  (caso anterior).

Quando  $S_0 \geq S > \rho^*$ , tem-se que  $V = S - \rho^* + I$ , logo  $V'(t) = S'(t) + I'(t) = -\gamma I < 0$ , pois  $I > 0$ .

Como  $T_1$  é invariante para o sistema (3.1.3), pelo Teorema de Lyapunov (Capítulo I) temos que o conjunto  $G$  é *assintoticamente estável* com respeito a  $T_1$ .

De posse dessas informações podemos enunciar o seguinte resultado:

#### Teorema (3.1.2)

No plano de fase  $(S, I)$ , todos os pontos  $z_0 = (S_1, 0)$ , com  $z_0 \in [0, N] \times \{0\}$  sobre o eixo dos  $S$  são pontos de equilíbrios para o sistema (3.1.3). Os pontos para os quais  $S_1 > \rho^* = \frac{\gamma I}{g(I)}$  são *instáveis*; enquanto que os pontos pertencentes ao conjunto  $G = (\{0, \rho^*\} \times \{0\}) \cap T$  são *assintoticamente estáveis*.

No caso em que  $\rho^* > N$ , todos os pontos do eixo dos  $S$  em  $T$  são *estáveis*.

A partir do sistema (3.1.3), obtemos:

$$I'(S) = -1 + \frac{\gamma I}{g(I)S}, \quad 0 < S < S_0 \quad \text{e} \quad I > 0, \quad \text{com valor}$$

inicial  $I(S_0) = I_0$ .

De  $g(I) \leq g'(0)I$ , resulta que  $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{I}{g(I)}$  com  $\lambda = g'(0)$ .

Assim,  $-1 + \frac{\gamma}{\lambda S} \leq -1 + \frac{\gamma I}{g(I)S} = I'(S)$ . Nesta desigualdade, de um lado temos a variação do número de infecciosos, no modelo SIR, com respeito a S; do outro lado, temos a variação do número de infecciosos, no modelo  $SIR_{(G)}$ , com respeito a S. A partir desse ponto somos induzidos a proceder uma comparação entre os dois modelos.

Tomando-se o modelo SIR, obtemos:

$\hat{I}(S) = -1 + \frac{\gamma}{\lambda S}$ ,  $0 < S < S_0$  e  $I > 0$ , com valor inicial  $\hat{I}(S_0) = I_0$ .

Portanto,  $I'(S) \geq \hat{I}'(S)$ ,  $I(S_0) = \hat{I}(S_0) = I_0$ .

Logo  $I(S) \leq \hat{I}(S)$  para  $0 < S < S_0$ .

Como  $\hat{I}(S) = N - S + \frac{\gamma}{\lambda} \ln(S/S_0)$  temos que:

$I(S) \leq \hat{I}(S) = N - S + \frac{\gamma}{\lambda} \ln(S/S_0)$ ,  $0 < S < S_0$  e  $I \geq 0$

A desigualdade acima nos diz que no plano de fase SI a trajetória  $I(S)$  do modelo  $SIR_{(G)}$  está abaixo da trajetória  $\hat{I}(S)$  do modelo SIR, com valor inicial  $I(S_0) = \hat{I}(S_0) = I_0$ .

Como  $G$  é assintoticamente estável com respeito a  $T_1$ , quando  $t \rightarrow \infty$ , a trajetória iniciada em  $(S_0, I_0) \in T^*$  findará em um ponto da forma  $(S_\infty, 0) \in G$ , tal que:

$S_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq \hat{S}_\infty$ , onde  $(\hat{S}_\infty, 0)$  é o ponto limite da trajetória correspondente no modelo SIR.

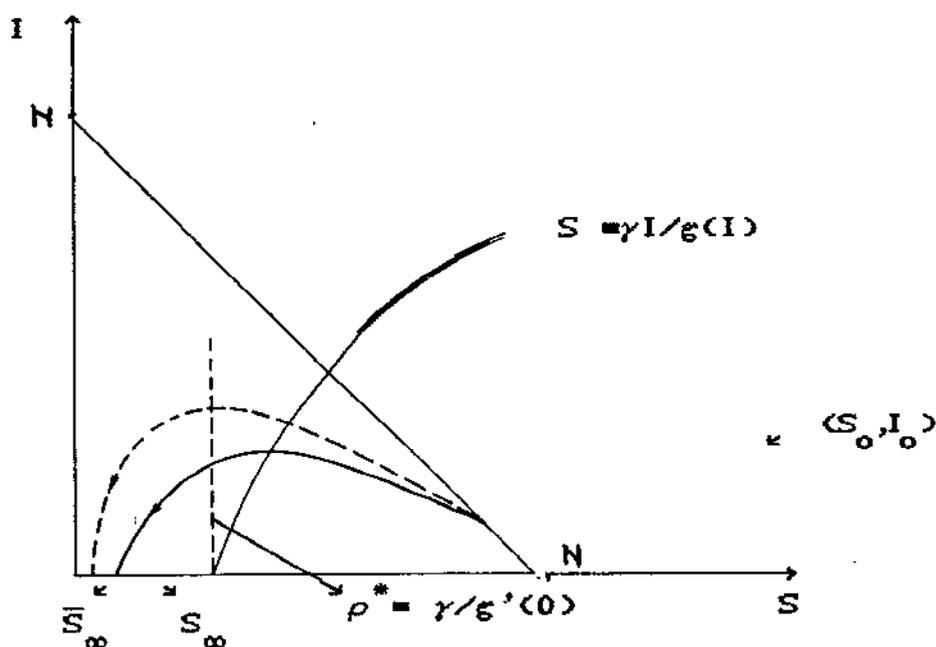
No modelo SIR sabemos que a propagação da doença

cessa não por falta de susceptíveis, o mesmo ocorre com o modelo generalizado  $SIR_{(g)}$ :

Como  $R_{\infty}$  mede a extensão da epidemia (só há remoção após a infecção) temos:

$R_{\infty} = N - S_{\infty} - I_{\infty} = N - S_{\infty} \leq N - \hat{S}_{\infty} = \hat{R}_{\infty}$ , ou seja, a extensão da epidemia no modelo generalizado  $SIR_{(g)}$  é sempre menor que a extensão no modelo SIR.

O gráfico abaixo ilustra todas essas considerações:



### 3.1.3 Um Exemplo de Aplicação.

Vamos ilustrar a generalização, feita anteriormente, com um exemplo, tomando-se a função  $g$  na seguinte forma:

$$g(I) = \lambda \frac{I}{1 + I/\alpha} \quad \text{com } I \in \mathbb{R}_+ \text{ e } \lambda, \alpha > 0.$$

A função  $g$  satisfaz todas as propriedades anteriormente exigidas.

Observamos que quando  $\alpha \longrightarrow +\infty$ ,  $g(I) \longrightarrow \lambda I$ ; assim o modelo  $SIR_{(g)}$  é transformado no modelo SIR.

O sistema  $SIR_{(g)}$  toma a seguinte forma:

$$\begin{cases} S'(t) = -\lambda \frac{I}{1 + I/\alpha} S \\ I'(t) = \lambda \frac{I}{1 + I/\alpha} S - \gamma I, \quad t > 0 \\ R'(t) = \gamma I \end{cases} \quad (3.1.3)$$

$S_0 > 0$ ,  $I_0 > 0$ ,  $R_0 > 0$ ,  $S(t) + I(t) + R(t) = N$  e  $\lambda, \alpha, \gamma > 0$ .

O sistema (3.1.3) normalizado é transformado no seguinte sistema:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta \frac{I}{1 + I/\alpha^*} S \\ I'(t) = \beta \frac{I}{1 + I/\alpha^*} S - \gamma I, \quad t > 0 \\ R'(t) = \gamma I \end{cases} \quad (3.1.6)$$

$S_0 > 0$ ,  $I_0 > 0$ ,  $R_0 = 0$  e  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$

com  $\alpha^* = \alpha/N$  e  $\beta = \lambda N$ ; onde consideramos, por simplicidade, as proporções  $S(t)/N$ ,  $I(t)/N$  e  $R(t)/N$ , respectivamente, por  $S(t)$ ,  $I(t)$  e  $R(t)$ .

Aplicando-se os resultados obtidos, na secção anterior, no plano de fase SI, obtemos a seguinte curva limite:

$$S = \frac{\frac{\gamma}{I}}{\beta \frac{1 + I/\alpha^*}} = \frac{\gamma}{\beta \alpha^*}, \text{ ou ainda, } S = \rho(\alpha^* + I)$$

$$\text{onde } \rho = \frac{\gamma}{\beta \alpha^*} = \frac{\gamma}{(\lambda N)(\alpha/N)} = \frac{\gamma}{\lambda \alpha}$$

A intersecção da curva limite, acima obtida, com o eixo dos S é o ponto  $P^* = (\rho^*, 0)$ , onde  $\rho^* = \rho \alpha^* = \gamma/\beta$  como no modelo SIR.

A partir do sistema (3.1.4), obtemos:

$$I'(S) = -1 + \rho(\alpha^* + I) \frac{1}{S}, \text{ cuja solução é:}$$

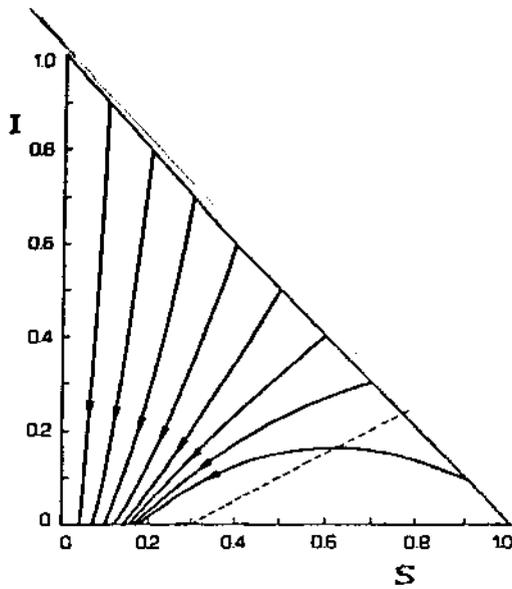
$$I(S) = cS^\rho + \frac{1}{\rho - 1} S - \alpha^*, \text{ se } \rho \neq 1$$

$$I(S) = cS - S[\ln(S)] - \alpha^*, \text{ se } \rho = 1, \text{ onde } c \text{ é}$$

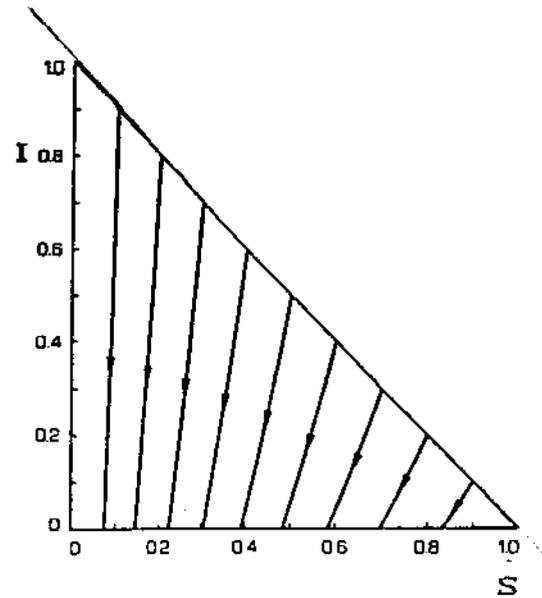
obtido através das condições iniciais.

No plano de fase SI, o comportamento de uma população depende essencialmente dos valores dos parâmetros  $\rho^*$  e  $\alpha^*$  ( $\rho = \rho^*/\alpha^*$ ).

A seguir, apresentamos alguns gráficos nos quais as trajetórias são obtidas na medida em que variamos os valores iniciais, isto é, variando-se o valor de c.

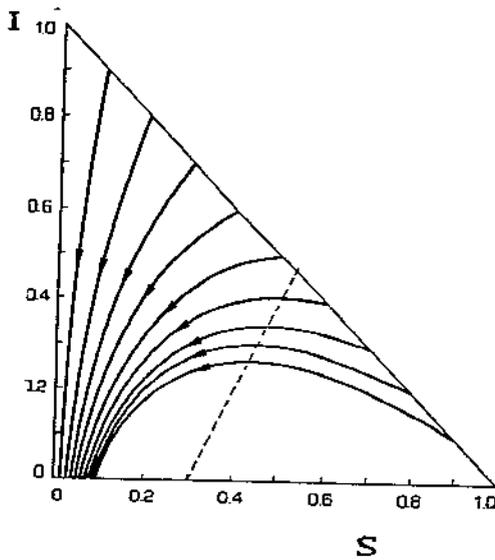


$$\rho^* = 0.3, \alpha^* = 0.15 \text{ e } \rho = 2.0$$

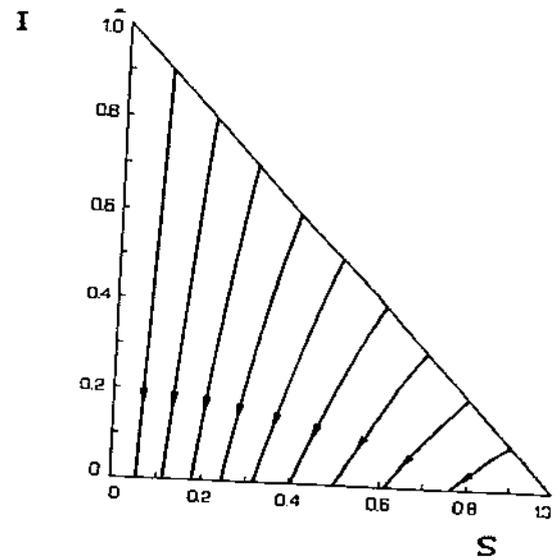


$$\rho = 2.0, \alpha^* = 1.0 \text{ e } \rho^* = 2.0$$

Em ambos os casos  $\rho > 1$



$$\rho^* = 0.3, \alpha^* = 0.6 \text{ e } \rho = 0.5$$



$$\rho = 0.5, \alpha^* = 2.8 \text{ e } \rho^* = 1.4$$

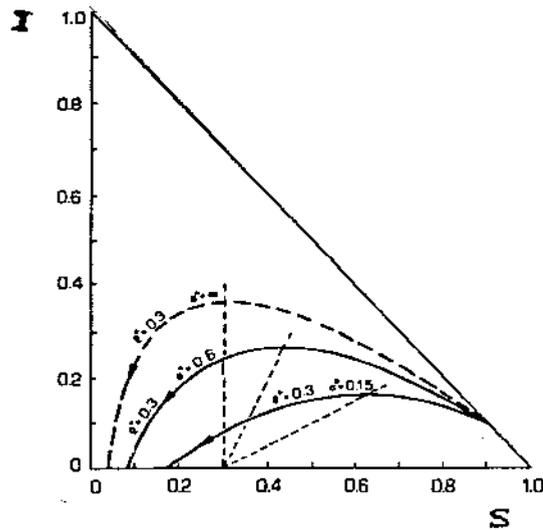
Em ambos os casos  $\rho < 1$

Na equação  $S = \rho(\alpha^* + 1)$  tomamos  $\rho = \gamma/\beta\alpha^*$ .

Assim  $S = \gamma(1 + 1/\alpha^*)/\beta$ . Quando  $\alpha^* \rightarrow \infty$ , então

$$S = \gamma/\beta = \rho^*$$

Observemos a figura abaixo:



Com a mesma condição inicial, o mesmo valor de  $\rho^*$  com valores crescente de  $\alpha^*$ . A curva com  $\alpha^* = +\infty$  corresponde ao modelo clássico SIR (KMK).

### 3.2 Taxas de Incidências Não Lineares. Análise de um Modelo do Tipo SIRS.

No Capítulo II, quando estudamos o modelo SIRS ficou estabelecido que a doença chega à extinção ou permanece endêmica. A taxa média da proporção de indivíduos susceptíveis transferidos para a classe dos infecciosos é da forma  $\lambda IS$ , linear em  $S$  e  $I$  (ou bilinear), a qual denominamos de taxa de incidência da doença.

Nesta seção, relaxaremos a hipótese de que a taxa de incidência seja bilinear para propormos uma nova taxa da forma  $kI^p S^q$ , onde  $k$ ,  $p$  e  $q$  são positivos, conforme o modelo apresentado por Liu et alii ([20]). Veremos que essa mudança, aparentemente simples, poderá provocar profundas modificações no comportamento e na natureza das soluções, haja vista ser possível existir uma *bifurcação de Hopf* para soluções periódicas. O papel desempenhado pela potência  $p$  é preponderante, enquanto a potência  $q$  tem uma influência secundária.

Observamos que, na seção 3.1, trabalhamos com um modelo cuja taxa de incidência é da forma  $\lambda g(IS)$ , mas exigimos que  $g'(0) > 0$ . Desse modo, as taxas de incidência do tipo  $\lambda I^p S$ , para  $p \neq 1$ , estão excluídas da formulação anteriormente estudada.

Taxas de incidências não bilineares podem ter uma tradução epidemiológica.

Um exemplo seria o caso em que se tendo um número bastante elevado de infecciosos, a exposição ante o agente infeccioso seria realmente certa e, por conseguinte, a taxa de incidência responderia mais lentamente que a linear em I. Isso ocorre como uma medida de preservação por parte dos indivíduos susceptíveis.

Outra situação seria aquela em que para determinadas doenças transmitidas por vírus, os susceptíveis serão infectados somente quando a concentração de vírus, no meio, atingir um certo nível limiar. Quando a densidade de infecciosos é muito pequena, a concentração limiar nunca é atingida, daí porque no caso de haver um estado cooperativo entre os infecciosos ter-se a possibilidade de exceder o referido valor limiar. Nesse caso, a taxa de incidência é seguramente mais rápida que a linear em I.

Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} S'(t) = -kI^p S^q - bS + \gamma R + bN_0 \\ I'(t) = kI^p S^q - \nu I - bI \\ R'(t) = \nu I - \gamma R - bR \end{cases} \quad (3.2.1)$$

$$S \geq 0, I \geq 0, R \geq 0 \text{ e } S + I + R = N_0$$

onde os parâmetros  $k$ ,  $p$  e  $q$  são positivos. Além disso,  $b > 0$  é a taxa de mortalidade e natalidade;  $\nu$  e  $\gamma$  são, respectivamente, as taxas de recuperação e perda

e imunidade.

Por razões de natureza técnica, trabalharemos, com o sistema , dado a seguir, obtido do anterior por um reescalamiento do tempo pela mudança de variável  $T = (b + v)t$ .

$$\begin{cases} I'(T) = aI^p S^q - I \\ R'(T) = r(I - R/h) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

$$I \geq 0, R \geq 0 \text{ e } S = N_0 - I - R$$

onde  $r = v/(b + v)$ ,  $h = v/(b + \gamma)$  e  $a = k/(b + v)$ .

Notemos que  $r < 1$ . Além disso, "a" pode ser visto como um reescalamiento da taxa de contato, obtido pela multiplicação de  $k$  pelo tempo em que o indivíduo permanece infeccioso. No reescalamiento do tempo, o tempo médio de infecciosidade torna-se igual a uma unidade.

### 3.2.1 Confinamento de Soluções.

Seja  $\Omega = \{(I, R) \mid I \geq 0, R \geq 0 \text{ e } S = N_0 - I - R \geq 0\}$

O conjunto  $\Omega$  é positivamente invariante para o sistema (3.2.1), isto é, qualquer solução que começa dentro de  $\Omega$  aí permanece confinada.

Se  $S = 0$ , então  $S'(t) > 0$ . Logo nenhuma solução pode sair de  $\Omega$  através da fronteira  $S = 0$ .

Como  $R'(t) > 0$ , para  $R = 0$  e  $I > 0$ , nenhuma solução pode deixar  $\Omega$  através da fronteira  $R = 0$  e  $I > 0$ .

Se  $I = 0$ , então:  $I'(t) = 0$ ;  $R'(t) > 0$ , para  $R > 0$  e

$I = 0$ . Além disso,  $I = 0$ ,  $R = 0$  e  $S = N_0$  é um ponto fixado. Quando  $p \geq 1$ , o fato de que nenhuma solução pode deixar  $\Omega$  através da fronteira  $I = 0$  decorre da unicidade de soluções. No interior de  $\Omega$ , como as funções do lado direito de (3.2.2) são continuamente diferenciáveis está garantida a unicidade de soluções, exceto em  $I = 0$  para  $p < 1$  e em  $S = 0$  para  $q < 1$ .

Vimos inicialmente que nenhuma solução pode deixar  $\Omega$  através da fronteira  $S = 0$ , cujo argumento independe do valor de  $q$ . Portanto, a única dificuldade é quando  $I = 0$  para  $p < 1$ .

Com a mudança de variável:  $U = I^{p-1}$ , o sistema (3.2.2) assume a seguinte forma:

$$\begin{cases} U'(T) = (1-p)(aS^q - U) \\ I'(T) = r(U^{1/(1-p)} - R/h) \end{cases} \quad (3.2.3)$$

onde  $S = N_0 - U^{1/(1-p)} - R$ .

As funções do lado direito de (3.2.3) são continuamente diferenciáveis em  $U$  e  $R$ , exceto para  $S = 0$ , quando  $q < 1$ . Logo, nenhuma solução pode deixar a região factível  $U \geq 0$ ,  $R \geq 0$  e  $S \geq 0$  e, por conseguinte, nenhuma solução de (3.2.2) pode deixar  $\Omega$ , tornando-o positivamente invariante.

Dado que, a seguir, faremos uma demorada análise sobre pontos de equilíbrios e suas respectivas estabilidades, é conveniente listarmos os principais resultados a serem

obtidos, em nome de uma boa clareza.

-O ponto  $(I,R) = (0,0)$  é um ponto de equilíbrio do sistema (3.2.2), correspondente ao equilíbrio livre da doença.

-Quando  $p < 1$ , existe um único ponto de equilíbrio não trivial, o qual é um atrator global (ponto nodal) para as soluções que se iniciam no interior de  $\Omega$ .

-Se  $N_0 < a^{-1/q}$ , então quando  $p$  tende a 1, a partir de valores inferiores, então o ponto de equilíbrio não trivial aproxima-se do ponto de equilíbrio trivial, transferindo a estabilidade para este.

-Se  $N_0 > a^{-1/q}$ , então quando  $p$  excede o valor 1 surge um segundo ponto de equilíbrio não trivial, ponto de sela. Ao ponto de sela corresponde um baixo nível de infecção e ao ponto nodal corresponde um alto nível de infecção.

-O ponto de equilíbrio trivial é sempre localmente estável.

-Quando  $p > 1$ , existem tanto um nóculo (aqui entendido como um ponto de equilíbrio cujos valores próprios têm partes reais de mesmo sinal, isto é, ou é um ponto nodal ou um ponto espiral) como um ponto de sela desde que:

$$N_0 > N^* = a^{-1/(p+q-1)}(1+z) [(1+h)/z]^{z/(1+z)},$$

onde  $z = (p-1)/q$ . Além disso,  $N^*$  tende para  $a^{-1/q}$ , quando  $p$  tende para 1.

-Quando  $1 < p < 1 + r(1+h)/h^2$ , o nóculo é estável.

-Quando  $p > 1 + r(1+h)/h^2$ , o nóculo é estável

somente se  $N_0 > N^{**} = (1 + h + q/y)a^{-1/(p+q-1)}(y/q)^{q/(p+q-1)}$ ,  
 onde  $y = p - 1 - r/h$ .

Além disso,  $N^{**} > N^*$  se  $p > 1 + r(1 + h)/h^2$ .

Se  $N_0 < N^{**}$  o nóculo é instável e uma bifurcação de Hopf ocorre em  $N_0 = N^{**}$ . A estabilidade da solução periódica bifurcada é decidida pelo sinal de uma expressão que envolve as derivadas até a terceira ordem de uma determinada função.

-Quando  $N_0 < N^*$  (com  $p > 1$ ), o ponto de equilíbrio não trivial atrator desaparece e a solução torna-se global assintoticamente estável.

### 3.2.2. Existência de Pontos de Equilíbrios.

Retomemos o sistema:

$$\begin{cases} I'(T) = aI^p S^q - I \\ R'(T) = r(I - R/h) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

$$I \geq 0, R \geq 0 \text{ e } S = N_0 - I - R$$

O ponto  $(I, R) = (0, 0)$  é um ponto de equilíbrio do sistema acima e corresponde, pela inexistência de infecciosos, a um ponto de equilíbrio livre da doença.

Um ponto de equilíbrio não trivial, do referido sistema, deve satisfazer ao sistema algébrico dado abaixo:

$$\begin{cases} aI^{p-1}(N_0 - I - R)^q = 1 \\ R = hI \end{cases} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } (N_0 - I - R)^q &= a^{-1} I^{1-p} \rightarrow N_0 - I - R = a^{-1/q} I^{(1-p)/q} \\ &\rightarrow N_0 = I + R + a^{-1/q} I^{-(p-1)/q} \end{aligned}$$

Façamos  $z = (p - 1)/q$  e substituamos  $R$  por  $hI$ .

$$\text{Portanto, } N_0 = (1 + h)I + a^{-1/q} I^{-z}.$$

$$\text{Tomemos } f(I) = (1 + h)I + a^{-1/q} I^{-z}.$$

Assim, um ponto de equilíbrio não trivial do sistema (3.2.2) é determinado pelas raízes positivas da equação  $N_0 = (1 + h)I + a^{-1/q} I^{-z}$ , onde  $N_0$  é dado.

Como  $N_0 = I + R + S = I + hI + a^{-1/q} I^{-z}$ , temos que  $R = hI$  e  $S = a^{-1/q} I^{-z}$ .

Consideremos a equação:

$$N_0 = (1 + h)I + a^{-1/q} I^{-z} = f(I) \quad (3.2.5)$$

onde  $z = (p - 1)/q$ .

1) Se  $z < 0$  (ou seja  $p < 1$ ), então  $f(I)$  é monotonicamente crescente em  $I$ .

Para  $I = 0$ , temos  $f(0) = f(I) = 0$  e, além disso, quando  $I \rightarrow \infty$ , também  $f(I) \rightarrow \infty$ .

Assim, para  $N_0 > 0$  existe uma única raiz da equação (3.2.5) e esta determina uma solução não trivial do sistema (3.2.2).

Sabemos, por (3.2.4) que:

$$N_0 = (1 + h)I + a^{-1/q} I^{-z} = f(I)$$

$$\text{Se } N_0 < a^{-1/q}, \text{ então } a^{-1/q} > (1 + h)I + a^{-1/q} I^{-z}$$

$$\rightarrow (1 + h)I < a^{-1/q}(1 - I^{-z})$$

como  $(1+h)I > 0 \Rightarrow I < 1$ .

Derivando-se (3.2.4) com respeito à  $p$ , obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial I} \cdot \frac{dI}{dp} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dp} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dp} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial p}}{\frac{\partial f}{\partial I}}$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial I} = (1+h) - z(a^{-1/q})I^{-z-1}$  e

$$\frac{\partial f}{\partial p} = (-1/q)(a^{-1/q})I^{-z} \ln(z), \text{ temos:}$$

$$\frac{dI}{dp} = \frac{(a^{-1/q})I^{-z} \ln(z)}{[(1+h) - z(a^{-1/q})I^{-z-1}]}, \text{ onde } z=(p-1)/q.$$

Observamos que  $\frac{dI}{dp} < 0$ , uma vez que  $0 < I < 1$  e  $z < 0$ .

Desse modo,  $I$  decresce monotonicamente quando  $p$  (e  $z$ ) crescem. Além disso,  $I$  tem limite quando  $z \rightarrow 0^-$ , porque quando  $z \rightarrow 0^-$  temos que  $p \rightarrow 1^-$ .

Afirmamos que  $\lim_{z \rightarrow 0} I_- = 0$ .

Suponhamos que  $\lim_{z \rightarrow 0} I_- =$  número positivo. Como  $I^{-z} \rightarrow 1$  e  $(1+h)I \rightarrow$  número positivo, quando  $z \rightarrow 0^-$ ; de  $N_0 = (1+h)I + a^{-1/q} I^{-z}$  concluímos que  $N_0 > a^{-1/q}$ , o que constitui um absurdo dado que supusemos inicialmente que  $N_0 < a^{-1/q}$ . Assim,  $I \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow 0^-$ .

Observamos que quando  $z \rightarrow 0^-$  ocorre a junção do ponto de equilíbrio não trivial com o ponto de equilíbrio trivial.

2) Se  $z = 0$  ( $p = 1$ ), então  $f(I)$  é monotonicamente crescente a partir do valor  $a^{-1/q}$  (quando  $I = 0$ ) e tende para infinito quando  $I$  cresce ilimitadamente.

Assim, para  $p = 1$  existe um único ponto de equilíbrio não trivial (com  $I > 0$ ) se  $N_0 > a^{-1/q}$  e nenhum se  $N_0 \leq a^{-1/q}$ .

3) Se  $z > 0$  ( $p > 1$ ), então  $f(I)$  tende para infinito, quando  $I$  tende para zero ou para infinito.

Calculemos a derivada de  $f(I)$  com respeito à  $I$ :

$$f'(I) = (1 + h) - z(a^{-1/q})I^{-(z+1)}$$

$$f'(I) = 0 \rightarrow I = I^* = \left[ \frac{z}{1+h} (a^{-1/q}) \right]^{1/(1+z)}$$

Desse modo,  $f$  é monotonicamente decrescente para  $I < I^*$  e monotonicamente crescente para  $I > I^*$ .

A função  $f$  atinge o seu valor máximo em  $N^*$ , onde

$$f(I^*) = N^* = a^{-1/(p+q-1)} (1 + z) \left[ \frac{1 + h}{z} \right]^{z/(1+z)}$$

Assim: se  $N_0 < N^*$ , então não existe nenhum ponto de equilíbrio não trivial; se  $N_0 = N^*$ , então existe exatamente um ponto de equilíbrio não trivial; se  $N_0 > N^*$ , então existem precisamente dois pontos de equilíbrios não triviais.

Notemos que quando  $z \rightarrow 0^-$ , tem-se  $N^* \rightarrow a^{-1/q}$ ,

além disso, os dois pontos de equilíbrios não triviais se juntam ao ponto de equilíbrio correspondente ao caso  $z = 0$ .

### 3.2.3. Estabilidade.

Na secção anterior, analisamos a existência dos pontos de equilíbrios do sistema (3.2.2), agora vamos proceder um estudo quanto a estabilidade de tais pontos.

$$(I) \quad \boxed{0 < p < 1 .}$$

Não é possível examinar a estabilidade do ponto trivial através do método de linearização do sistema (3.2.2), dado que o termo  $aI^p S^q$  é descontínuo em  $(0,0)$ , quando  $0 < p < 1$ .

Entretanto, no sistema transformado (3.2.3) observamos que  $U = R = 0$  não é ponto de equilíbrio, logo o ponto  $(0,0)$  é um ponto de equilíbrio instável para o sistema (3.2.2). Portanto, soluções próximas do ponto  $(0,0)$ , no sistema (3.2.2), não tendem assintoticamente para este ponto.

Retomemos o sistema (3.2.2):

$$\begin{cases} I'(T) = aI^p S^q - I \\ R'(T) = r(1 - R/h) \end{cases}$$

$$\text{com } S = N_0 - I - R .$$

Suponhamos que  $(I,R)$  seja um ponto de equilíbrio não

trivial do sistema acima, isto é, vale (3.2.4):

$$\begin{cases} aI^{p-1}(N_0 - I - R)^q = 1 \\ R = hI \end{cases}$$

Escrevamos a matriz jacobiana do sistema linearizado correspondente:

$$J(I,R) = \begin{bmatrix} p - 1 - q(I/S) & -q(I/S) \\ r & -r/h \end{bmatrix}$$

Assim, obtemos:

$$\text{Tr} = \text{Tr}(J) = p - 1 - r/h - q(I/S)$$

$$\text{Det} = \text{Det}(J) = r \left[ (1 + h)q(I/S) - (p - 1)/h \right]$$

$$\text{com } I/S = a^{1/q} I^{1+2}.$$

Quando  $0 < p < 1$ , no ponto de equilíbrio não trivial o Tr é negativo e o Det é positivo, por conseguinte, o referido ponto é local assintoticamente estável.

Na verdade esse ponto é global assintoticamente estável para qualquer solução que se inicia no interior da região factível. Provemos essa afirmativa:

Do sistema (3.2.3), obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial U} \left( \frac{dU}{dT} \right) = -qa(S^{q-1})U^{p/(p-1)} - (1-p) < 0$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{dR}{dT} \right) = -r/h < 0$$

Pelo Teorema 9 do Capítulo I, podemos afirmar que

não existe nenhum ciclo limite. Sabemos que os conjuntos  $\omega$ -limites de um fluxo limitado no plano consistem apenas de um dos seguintes casos ([20]):

1. ponto de equilíbrio
2. órbitas periódicas
3. órbitas ligando pontos de equilíbrios (órbitas homóclinas e heteróclinas).

Como não existem ciclos limites nem órbitas homóclinas ou heteróclinas, o ponto de equilíbrio considerado é global assintoticamente estável.

$$(II) \quad \boxed{p = 1}$$

Quando  $p = 1$  e  $N_0 < N^*$  (isto é,  $N_0 < a^{-1/q}$ ) existe somente o ponto de equilíbrio trivial.

Do sistema (3.2.2):

$$\begin{cases} I'(T) = aIS - I \\ R'(T) = r(I - R/h) \end{cases}$$

$$S = N_0 - I - R, \text{ resulta:}$$

$$J(I,R) = \begin{bmatrix} aS^q - qaS^{q-1}I - 1 & -qaI^pS^{q-1} \\ r & -r/h \end{bmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} aN_0^q - 1 & 0 \\ r & -r/h \end{bmatrix}$$

Como  $N_0 < a^{-1/q}$ , temos que  $aN_0^q < 1$  e daí os valores próprios de  $J(0,0)$  são negativos.

Logo o ponto trivial é local assintoticamente estável. Usando-se o argumento anterior, podemos assegurar que  $(0,0)$  é global assintoticamente estável.

Quando  $N_0 > N^*$  ( $N^* = a^{-1/q}$ ), o ponto de equilíbrio trivial é instável, pois  $aN_0^q - 1 > 0$ .

Por outro lado, existe um ponto de equilíbrio não trivial, no qual o  $\text{Tr}$  é negativo e  $\text{Det}$  é positivo; logo trata-se de um ponto local assintoticamente estável.

Mostremos que esse ponto é global assintoticamente estável: tomando-se  $I$  e  $R$  suficientemente pequenos, podemos considerar  $N_0 \approx N_0 - I - R$ .

$$\begin{aligned} \text{Assim, } aIS^q &= a(N_0 - I - R)^q \\ &\approx aIN_0^q > I, \text{ pois } N_0 > a^{-1/q}. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } I'(T) = aIS^q - I \Rightarrow I'(T) \approx aIN_0^q - I > 0$$

Por conseguinte, nenhuma solução iniciada no interior da região factível pode aproximar-se de  $(0,0)$ .

Usando-se o Teorema B do Capítulo I, para  $C = I^{-1}$ ,

mostra-se que não existe ciclo limite.

Portanto, o ponto de equilíbrio não trivial considerado é global assintoticamente estável no interior da região factível.

$$(III) \quad \boxed{p > 1} \quad (\text{ou seja, } z > 0)$$

Se  $N_0 < N^*$ , então o único ponto de equilíbrio é o trivial. O ponto de equilíbrio trivial é global assintoticamente estável, pois:

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ r & -r/h \end{bmatrix}$$

Suponhamos que  $N_0 > N^*$ .

Retomemos a equação  $N_0 = (1+h)I + a^{-1/q} I^{-z} = f(I)$

Façamos  $W = a^{-1/(p+q-1)} I$ , logo:

$$N_0 = a^{-1/(p+q-1)} \left[ (1+h)W + W^{-z} \right] = g(W)$$

onde  $W^{1+z} = I/S = a^{1/q} I^{1+z}$ .

Calculando-se  $f(Wa^{-1/(p+q-1)})$ , temos que:

$$f(Wa^{-1/(p+q-1)}) = g(W).$$

Derivando-se a função  $g(W)$ , com respeito a  $W$ ,

$$\text{obtemos: } g'(W) = a^{-1/(p+q-1)} \left[ (1+h) - zW^{-1-z} \right].$$

Temos que  $g'(W_0) = 0$ , quando  $W_0 = \left[ \frac{z}{1+h} \right]^{1/(1+z)}$

Calculando-se  $g(W_0)$ , obtemos  $g(W_0) = N^* = f(I^*)$ .

Ou seja, as funções  $f$  e  $g$  têm o mesmo valor mínimo nos pontos  $I^*$  e  $\left[ \frac{z}{1+h} \right]^{1/(1+z)}$ , respectivamente.

Se  $N_0 = N^*$ , então  $W = \left[ \frac{z}{1+h} \right]^{1/(1+z)}$ .

Donde resulta  $W^{1+z} = \frac{z}{1+h}$ .

Como  $W^{1+z} = I/S$ , obtemos  $I/S = \frac{z}{1+h}$ .

Logo, quando  $N_0 = N^*$  temos:

$$I/S = \frac{z}{1+h} = \frac{p-1}{q(1+h)}.$$

Sabemos que  $\text{Det} = \left[ (1+h)q(I/S) - (p-1)/h \right]$ .

Assim,  $\text{Det} > 0$  se, e somente,  $I/S > \frac{z}{1+h}$ .

Portanto, a condição  $I/S = \frac{z}{1+h} = \frac{p-1}{q(1+h)}$

define simultaneamente as condições  $N_0 = N^*$  e  $\text{Det} = 0$ .

Vimos que quando  $N_0 > N^*$ , existem dois pontos de equilíbrios não triviais: um corresponde ao menor valor de  $I$  (chamado menor valor de equilíbrio); o outro, corresponde ao maior valor de  $I$  (chamado maior valor de equilíbrio).

Para o menor valor de equilíbrio temos  $I/S < \frac{z}{1+h}$  e assim  $\text{Det} < 0$ ; para o maior valor de equilíbrio temos  $I/S > \frac{z}{1+h}$ , portanto  $\text{Det} > 0$ .

Logo, ao menor valor de equilíbrio corresponde um ponto de sela, pois um valor próprio é negativo e o outro é positivo. Ao maior valor de equilíbrio corresponde um nóduo, que é assintoticamente estável, pois  $\text{Tr} < 0$ .

Retornemos à análise do nóduo.

$$\text{Seja } g(W) = a^{-1/(p+q-1)} \left[ (1+h)W + W^{-z} \right].$$

$$W > \left[ \frac{z}{1+h} \right]^{1/(1+z)} \rightarrow W^{1+z} = I/S > \frac{z}{1+h} \text{ e como}$$

$[z/(1+h)]^{1/(1+z)}$  é um ponto de mínimo de  $g(W)$ , podemos

garantir que  $g(W)$  cresce com  $W$ , sempre que  $W > \left[ \frac{z}{1+h} \right]^{1/(1+z)}$ .

Se supusermos que  $N_0$  é um parâmetro que pode tomar diferentes valores, então  $I/S$  é uma função crescente de  $N_0$ , pois quando  $N_0$  cresce,  $W$  também cresce e, por conseguinte,  $I/S$  cresce.

Desse modo,  $\text{Tr} = p - 1 - r/h - q(I/S)$  decresce quando  $N_0$  cresce.

$$\text{Vimos que quando } N_0 = N^*, \text{ temos } I/S = \frac{p-1}{q(1+h)} \text{ e}$$

$$\text{consequentemente } \text{Tr} = \text{Tr}^* = \frac{p-1}{q(1+h)} - r/h.$$

Dessa maneira, se  $p-1 < \frac{r(1+h)}{h^2}$ , então  $\text{Tr}$  é

sempre negativo e o nóculo é estável.

Por outro lado, se  $p - 1 > \frac{r(1+h)}{2}$ , então  $Tr$  é sempre positivo para  $I/S < (p - 1 - r/h)/q$ , o que corresponde a  $N_0 < N^{**}$ . Vejamos que nossa afirmação é verdadeira.

Como  $p - 1 > r(1+h)/h^2$  e  $I/S > (p - 1)/q(1+h)$  temos:  $p - 1 > r(1+h)/h^2 \rightarrow (p - 1 - r/h)/q > (p - 1)/q(1+h)$

Logo podemos tomar  $I/S$  tal que:

$$(p - 1 - r/h)/q > I/S > (p - 1)/q(1+h).$$

Façamos  $y = p - 1 - r/h$ .

Sabemos que  $W^{1+z} = I/S$ .

De  $(p - 1 - r/h)/q > I/S > (p - 1)/q(1+h)$ , resulta que  $y/q > W^{1+z}$ .

De  $y/q > W^{1+z}$  concluímos que  $(y/q)^{1/(1+z)} > W$ .

Como  $1/(1+z) = q/(p+q-1)$ , temos:

$$W_1 = (y/q)^{q/(p+q-1)} > W_0 = [z/(1+h)]^{1/(1+z)}.$$

Ora, como  $W_1 > W_0$  e  $g$  é crescente, resulta:

$$N^{**} = g(W_1) > g(W_0) = N_0 \rightarrow N^{**} > N_0. \text{ O que}$$

demonstra nossa afirmativa.

Assim, para  $N_0 > N^{**}$  o nóculo é estável; para  $N_0 < N^{**}$  o nóculo é instável.

Quando  $N_0 = N^{**}$ , existe uma bifurcação de Hopf; a estabilidade da solução periódica bifurcada é determinada pelo sinal da seguinte expressão:

$$A = (y/r)F_{III} + (2/h)F_{IIR} + F_{IRR} + \frac{(F_{II}/h + F_{IR})(y/r)F_{II} + (2/h)F_{IR} + F_{RR}}{y - r/h^2}$$

onde  $y = p - 1 - r/h$ ,  $F(I,R) = aI^p(N_0 - I - R)^q$  e todas as derivadas são calculadas no nóduo.

Se  $A < 0$ , então a bifurcação de Hopf é *supercrítica*, isto é, o ciclo limite é estável e aparece para  $N_0 < N^{**}$ .

Se  $A > 0$ , então a bifurcação de Hopf é *subcrítica*, ou seja, o ciclo limite é instável e aparece para  $N_0 > N^{**}$ .

### 3.2.4 Um Exemplo de Aplicação.

Fazendo-se  $p = 2$  e  $q = 1$ , temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} I'(T) = aI^2S - I \\ R'(T) = r(I - R/h) \end{cases}$$

$$S = N_0 - I - R$$

Por outro lado,

$$z = (p - 1)/q = 1, \quad y = p - 1 - r/h = 1 - r/h.$$

Calculemos  $N^*$  e  $N^{**}$ :

$$N^* = a^{-1/(p+q-1)}(z + 1) [(1 + h)/z]^{z/(1+z)}$$

$$N^* = 2 a^{-1/2}(1 + h)^{1/2}$$

$$N^{**} = (1 + h + q/y)a^{-1/(p+q-1)}(y/q)^{q/(p+q-1)}$$

$$N^{**} = a^{-1/2}(1 - r/h)^{-1/2}[1 + (1 + h)(1 - r/h)].$$

Para que se tenha uma bifurcação de Hopf é suficiente que  $p - 1 > r(1 + h)/h^2$ , ou seja  $r/h < h/(1 + h)$ .

A natureza da bifurcação é dada pelo sinal de  $A$  que é igual ao sinal de  $A' = r/h - (h-2)/(h+1)$ .

Portanto,

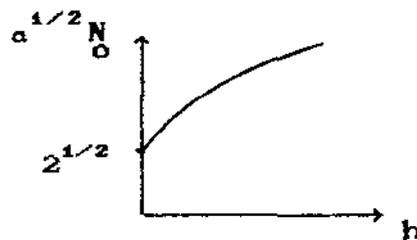
se  $h < 2$  ou se  $h > 2$  e  $r/h > (h-2)/(h+1)$ , então a solução periódica bifurcada é instável;

se  $h > 2$  e  $r/h > (h-2)/(h+1)$ , então a solução periódica bifurcada é estável quando  $N_0$  é ligeiramente menor que  $N^{**}$ .

Notemos que  $a^{1/2}N^*$  e  $a^{1/2}N^{**}$  dependem somente de  $r$  e  $h$ .

Consideremos o plano  $(a^{1/2}N_0, h)$ .

Façamos o gráfico de  $N_0 = a^{-1/2}(1+h)^{1/2}$ .



Notemos que  $N^* \leq N^{**}$  e  $N^* = N^{**}$  quando

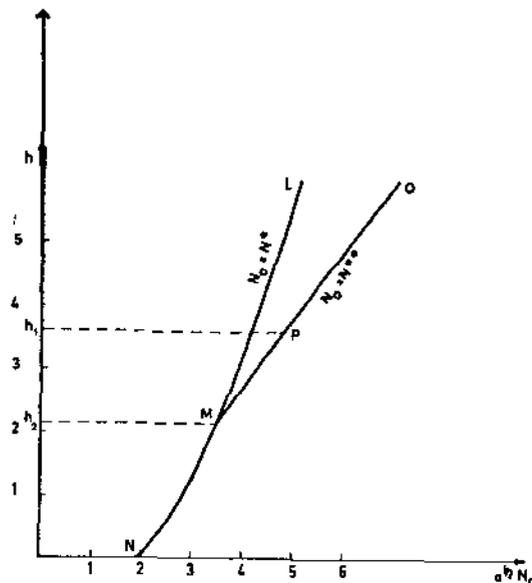
$$h = h_2 = [r + (r^2 + 4r)^{1/2}]/2.$$

Por outro lado,  $(h-2)/(h+1) = r/h$

$$\Rightarrow h = h_1 = [2 + h + (4 + 4r^2 + 8r)^{1/2}]/2.$$

Logo,  $(h-2)/(h+1) < r/h$  quando  $h < h_1$ .

Consideremos o seguinte gráfico:



Observemos:

- No lado esquerdo da curva LMN ( $N_0 < N^*$ ) não existe ponto de equilíbrio não trivial e o ponto de equilíbrio trivial é globalmente estável.

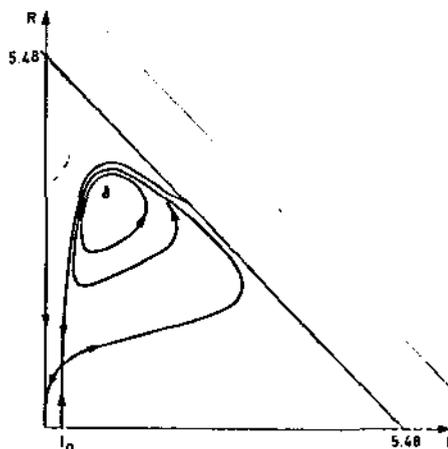
- No lado direito da curva QMN, um dos pontos de equilíbrio não trivial é estável.

- Sobre a curva MP, onde  $h_1 < h < h_2$ , isto é  $(h-2)/(h+1) < r/h < h/(1+h)$ , com  $N_0 = N^{**}$  uma bifurcação de Hopf subcrítica ocorre. Um ciclo limite instável aparece à direita de MP.

- Sobre a curva PQ, onde  $h > h_2$ , isto é,  $r/h < (h-2)/(h+1)$ , com  $N_0 = N^{**}$  uma bifurcação de Hopf supercrítica ocorre. Um ciclo limite aparece à esquerda de PQ.

Na figura abaixo. temos  $h = 4$ ,  $h > h_1$  e  $r = 0.997$ .

Quando  $N_0$  é ligeiramente menor que  $N^{**}$  com  $N^* < N_0 < N^{**}$ , temos que o nóculo é uma fonte e existe um ciclo limite estável.



## COMENTARIOS:

- Liu et alí (1987) fizeram um estudo completo do modelo SEIRS, com dinâmica vital, investigando pontos de equilíbrios e estabilidade do sistema que governa o referido modelo, utilizando a mesma técnica empregada no artigo [20], por nós estudado no Capítulo III. Em alguns casos podem ocorrer soluções periódicas pela bifurcação de Hopf, para valores críticos dos parâmetros.

O sistema analisado por Liu et alí ([21]) é o seguinte:

$$\begin{cases} S' = -\lambda I^p S^q + \mu - \mu S + \delta R \\ E' = \lambda I^p S^q - (\xi + \mu)E \\ I' = \xi E - (\gamma + \mu)I \\ R' = \gamma I - (\delta + \mu)R \end{cases}$$

$$S + E + I + R = 1$$

onde  $\lambda$ ,  $p$  e  $q$  são positivos.

Além disso, temos:

$\mu$ - taxa de nascimento e morte

$\xi$ - taxa com que os expostos se tornam infecciosos

$\gamma$ - taxa com que os infecciosos são removidos

$\delta$ - taxa com que os removidos perdem a imunidade.

Interessante é a forma como é estabelecida a relação vários modelos e o modelo SEIRS.

Por exemplo, o modelo SIRS é obtido a partir do modelo SEIRS quando não existe período latente, isto é, não existe a classe dos expostos E. Como o período médio latente é  $1/\xi$ , não resta outra alternativa senão fazer  $\xi \rightarrow \infty$ .

A seguinte tabela permite ter uma boa ideia de como alguns modelos são obtidos a partir do modelo SEIRS.

MODELO	RELAÇÃO
SIS	Limite do SIRS quando $\delta \rightarrow \infty$ Limite do SEIS quando $\xi \rightarrow \infty$
SIR	SIRS quando $\delta = 0$
SIRS	Limite do SEIRS quando $\xi \rightarrow \infty$
SEIS	Limite do SEIRS quando $\delta \rightarrow \infty$
SEIR	SEIRS quando $\delta = 0$

Hethcote et al (1989) mostraram que quando é feita uma associação entre uma taxa de incidência não bilinear da forma  $\beta I^p S$  e um período de retardamento na classe dos indivíduos removidos no modelo SIRS, é possível existir, através da bifurcação de Hopf, soluções periódicas para determinados valores dos parâmetros ([17]).

No mesmo artigo há o registro de que Hethcote et al (1981) mostraram que, quando a taxa de incidência é da forma  $\beta IS$  e se tem um período de retardamento na classe dos indivíduos removidos no modelo SIRS, é possível existirem soluções periódicas, através da bifurcação de Hopf, para certos valores dos parâmetros. Se, no entanto, o período de retardamento é tomado na classe dos indivíduos infecciosos não é possível existir solução periódica.

#### COMENTÁRIOS FINAIS

São incontáveis as dificuldades que cercam a modelagem da propagação de doenças transmissíveis em populações humanas, principalmente quando se deseja propor um modelo que, tanto quanto possível, seja bastante abrangente e retrate a realidade.

Como parece natural, estrutura-se inicialmente um

modelo, muitas vezes, visivelmente grosseiro para, a partir daí se originarem as devidas reparações.

São diversas as considerações feitas em um modelo no sentido de torná-lo representativo da realidade.

Para modelos epidêmicos podemos citar, como exemplo, as seguintes considerações:

- Inclusão da dinâmica vital. Importante quando se tem um período mais ou menos longo para a doença, onde não é possível desprezar os nascimentos e óbitos no referido período.

- Taxas de incidências não bilineares, as quais levam em conta: influências psicológicas decorrentes da possibilidade de contágio; mecanismos próprios de infecção por vírus, para a qual existe uma concentração limiar viral; relaxamento da hipótese de que a população seja uniforme e homogeneamente distribuída.

Isso nos leva a concluir que nenhum modelo está definitivamente acabado, existe sempre a possibilidade para modificá-lo; uma boa razão seria a pergunta: "e se?".

Esse quadro de questionamentos naturais da modelagem de processos epidêmicos, em pelo menos dois importantes jornais de epidemiologia: *American Journal of Epidemiology* (publicação mensal) e *International Journal Epidemiology* (publicação trimestral) onde o percentual de artigos publicados sobre epidemias utilizando modelagem pode ser

considerado como razoavelmente significativo (19).

Observemos o quadro abaixo:

Jornal	Numero total de artigos publicados	Percentual de artigos de doencas transmissiveis	Percentual de artigos de doencas transmissiveis usando modelos
American Journal of Epidemiology			
1976-1980	696	35	5.4
1981-1985	909	24	11.4
International Journal of Epidemiology			
1976-1980	240	20	14.6
1980-1985	358	15	27.9

Como palavras finais, gostaríamos de consignar aos muitos serviços de vigilância sanitária do País muito incentivo e recomendar todo empenho no registro dos casos epidêmicos, pois esses dados são notoriamente importantes para estudos posteriores e o conseqüente estabelecimento de políticas de saúde pública.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BAILEY,N.T.J. The Mathematical Theory of Diseases and Its Application. Chales Griffen. London and High Wycome. 1975.
- [2] BASSANEZI,R. G. & FERREIRA Jr,W. C. Equações Diferenciais com Aplicações. São Paulo. Harbra. 1988.
- [3] BOYCE,William.E. & DIPRIMA,Richard.C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno.3<sup>a</sup> edição. Rio de Janeiro. Guanabara. 1977.
- [4] Copasso,V;Serio,G.: A generalization of the Kermac/Meckendrick deterministic epidemic model. Math. Biosci.42:41-61, 1978.
- [5] Cooke,K.L.; Yorke,J.A.: Some equations modelling growth processes and gonorrhea epidemics. Math. Biosci. 31:75-101, 1978.
- [6] Cooke,K.L.; Kaplan,J.L.: A periodicity Threshold theorem for and population growth. Math. Biosci. 31:87-104,1976.
- [7] Corduneann,C. Principles of Differential and Integral

Equations. Boston. Allyn and Bacon. 1971.

- [8] Dietz, K.: Epidemics and Rumours: A survey.  
J.R. Statist. Soc., Ser A, 130:505-528, 1967.
- [9] Figueiredo, D.G. Equações Diferenciais Aplicadas. 12<sup>o</sup>  
Colóquio Brasileiro de Matemática. Poços de Caldas. 1979.
- [10] Fruental, J.C. Mathematical Modeling in Epidemiology. New  
York. Springer-Verlag. 1980.
- [11] Hale, J.K. Ordinary Differential Equations. New York.  
Wiley-Interscience. 1969.
- [12] Hethcote, H.W. Qualitative Analyses of Communicable Disease  
Models. Math. Biosci. 28:335-356, 1976.
- [13] Hethcote, H.W. and Tudor, D.W.: Integral Equation Models  
for Endemic Infections Diseases. J. Math. Biology.  
9:37-47, 1980.
- [14] Hethcote, H.W.; Stech, H.W. and Van Den Driessche, P.  
Nonlinear Oscillations in Epidemic Models.  
SIAM. J. Appl. Math. 40(1) :1-9, 1981.
- [15] ———, Stability Analysis for Models of Diseases Without  
Immunity. J. Math. Biology. 13:185-198, 1981.

- [16] ———, Periodicity and Stability in Epidemic Models: a survey. In: Cooke, K.L. (ed) Differential Equations and Applications in Ecology, Epidemic and Population Problems. pp 65-82. New York. Academic Press, 1981.
- [17] Hethcote, H.W.; Lewis, M.A. and Van Den Driessche, P. An Epidemiological Model with a Delay and Nonlinear Incidence Rate. J. Math. Biology. 27:49-64, 1989.
- [18] Honlich, B. and Koont S. Epidemics Birkhausen, Coleção UMAP, 1980.
- [19] King, M.E and Soskolne, C.L. Reviews and Commentary. Use of modelling in infections disease epidemiology. American J. of Epidemiology. 128(5):949-361, 1988.
- [20] Liu, Wei-min; Levin, S.A. and Iwasa, Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models. J. Math. Biology. 23:187-204, 1986.
- [21] Liu, Wei-min; Hethcote, H.W. and Levin, S.A. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates, J. Math. Biology. 25:359-380, 1987.

- [22] Petrovski,I.G. Ordinary Differential Equations.  
Englewood. Prentice Hall 1966.
- [23] Rand,R.H. Upadhyaya,S.K.and Storti,D.W. Hopf Bifurcation  
in a Stomacal Oscillation. J.Math. Biology. 12:1-11, 1981.
- [24] Sanches,O. Modelos Matemáticos em Doenças Transmissíveis.  
(Aula ministrada no XVIII Congresso da Soc.Bras.de Med.  
Tropical).
- [25] Smith,H. Periodic for Class of Epidemic Equations. J.Math.  
Anal.and Applications. 64:467-479,1978.
- [26] Wylie,C.R. Differential Equations. New York. McGraw-Hill.  
1978.