ZURITA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATISTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MEDIDAS VETORIAIS E REPRESENTAÇÃO DE OPERADORES

JÉSSICA RUTH GAVIA ZURITA

ORIENTADOR: PROF. DR. RAYMUNDO LUIZ ALENCAR

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de mestre.

TÍTULO DA TESE

MEDIDAS VETORIAIS E REPRESENTAÇÃO DE OPERADORES

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. JÉSSICA RUTH GAVIA ZURITA e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 19 de Novembro de 1990.

Prof. Dr. ___________________
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE EM MATEMÁTICA.

À Maria, minha mãe

INDICE

AGRADECIMENTOS

- Ao *Raymundo* pela orientação, paciencia e amizade.
- Ao Professor *Klaus Floret* pelas valiosas sugestões feitas e pela sua ajuda neste trabalho.
- Ao *CAPES* e *CNPq* pelo auxílio financiero.
- À minha mãe pelo apoio e carinho dedicado. À *Patty*, *Alejandro*, e a meus sobrinhos *Daniel* e *Catalina*.
- Aos amigos *Rosane*, *Emilia*, *Eugenia*, *Sergio*, *Gustavo*, e ao *Filidor*, pela amizade e companherismo.
- À *Dirce*, *Leni*, *Edna* e *Cidinha* pela amizade.
- Acima de tudo a *Deus* pela direção e sustentação da minha vida.

INTRODUÇÃO

A teoria das Medidas a valores vetoriais, mais que uma generalização formal, tem hoje importantes aplicações. Por exemplo, no estudo da Teoria dos Espaços de Banach, os teoremas de Radon-Nikodym para integral de Bochner, o teorema de Orlicz-Pettis, a teoria de Representação de operadores sobre espaços de funções e muitos outros resultados mostram esta importância.

Nesta dissertação, fazemos um estudo das Medidas Vetoriais e teorias de Integração Vetorial, direcionado à suas aplicações na representação de operadores e funcionais sobre espaços de funções.

O Capítulo I, versa sobre Medidas Vetoriais e conceitos associados. Também apresentamos os principais resultados das teorias de integração vetorial segundo Bartle e Bochner.

O Capítulo II, trata de duas aplicações das Medidas Vetoriais na Representação de aplicações lineares sobre espaços de funções contínuas, sendo centrais o Teorema de Bartle-Dunford-Schwartz ([4]) e o Teorema de Singer ([17]).

No Capítulo III, estudamos uma caracterização do dual do espaço de funções reais integráveis com relação a uma medida vetorial. Esta caracterização sendo um espaço do tipo L^{∞}, conforme ao caso clássico. Este estudo é baseado no trabalho ([12]) de Egghe .

Neste trabalho, além da preocupação de estudar a Teoria da Medida e Integração em níveis mais gerais tentamos escrever um texto acessível a um leitor familiarizado com os tópicos básicos em Teoria da Medida escalar, Topología Geral e Análise Funcional.

C A P Í T U L O I

MEDIDA E INTEGRAÇÃO VETORIAL

I. 1. Introdução

Neste capítulo estamos interessados em estudar duas teorias de integração vetorial: a Integral bilinear de Bartle e a Integral de Bochner. Estas generalizam a teoria clássica de Lebesgue, no sentido de considerar funções e medidas a valores em espaços de Banach.

Inicialmente, no item I.2 introduzimos as medidas vetoriais, suas propriedades, vemos alguns exemplos, e conceitos relativos. Destacamos que surgem conceitos próprios das medidas vetoriais, que não têm seu análogo na teoria das medidas escalares.

Em I.3, estudamos a teoria de Integração Bilinear de Bartle para funções a valores vetoriais com respeito a uma medida vetorial, sob hipóteses adequadas às posteriores aplicações. Neste item, vemos mediante exemplos, que em geral as extensões de alguns resultados clássicos, como o Teorema da Convergência Dominada, falham.

Esta teoria pode ser desenvolvida em níveis mais gerais (ver [2]), porém não são adequados aos objetivos deste trabalho.

Em I.4, apresentamos a Integral de Bochner de uma função a valores vetoriais com respeito a uma medida escalar. Esta integral se define sob condições mais fortes e portanto apresenta melhores propriedades que a anterior. Finalizamos este parágrafo com o desenvolvimento do conceito de espaço L^p.

I. 2. <u>Medidas vetoriais</u>

Seja Ω um conjunto não vazío, diremos que uma coleção Σ de subconjuntos de Ω é uma σ-álgebra se satisfaz as condições abaixo:

(*i*) ϕ, $\Omega \in \Sigma$.

(*ii*) Se $A \in \Sigma$, então $\Omega \setminus A \in \Sigma$.

(*iii*) Se (A_n) é uma sequência de elementos de Σ então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$.

No que segue X, Y, Z denotam espaços de Banach, e Σ representa uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

Definição 1.1.

Uma aplicação de conjuntos $F\colon\Sigma \longrightarrow X$ é chamada medida vetorial finitamente aditiva, ou simplesmente medida vetorial se dados elementos disjuntos A, $B \in \Sigma$ então,

$$F(A \cup B) = F(A) + F(B).$$

Além disso, F é dita medida vetorial σ-aditiva, se para toda sequência (A_n) de elementos disjuntos de Σ, temos:

$$F\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} F(A_n),$$ na norma de X, ou seja:

$$\lim_n \Big\| F\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) - \sum_{i=1}^{n} F(A_i) \Big\| = 0.$$

Algumas propriedades elementares das medidas escalares, continúam sendo válidas para medidas vetoriais, tais como:

(*i*) $F(\phi) = 0$.

(*ii*) $F(A \setminus B) = F(A) - F(B)$, $A, B \in \Sigma$, $A \subseteq B$.

(*iii*) Se (A_n) é uma sequência crescente $(A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots)$ de elementos de Σ, então $F\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_i F(A_i)$.

(*iv*) Se (A_n) é uma sequência decrescente de elementos de Σ, então $F\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \lim_i F(A_i)$.

Exemplos 1.2.

(*a*) Uma medida vetorial, que não é σ-aditiva

Sejam $\Omega = [0,1]$,

Σ = σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis em $[0,1]$,

μ = medida de Lebesgue em $[0,1]$,

$L_\infty(\mu)$ = espaço de Banach clássico das funções $f\colon[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, μ-mensuráveis e essencialmente limitadas. Sendo a norma dada por $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \text{ess}\, |f(t)|$.

Defina a aplicação $F\colon\Sigma \longrightarrow L_\infty(\mu)$ como $F(A) = \chi_A$, onde χ_A representa a função característica de A.

Claramente, F é uma medida vetorial finitamente aditiva, mas F não é σ-aditiva. De fato, seja (A_n) uma sequência disjunta de conjuntos não vazios de Σ e chamemos $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$, então

$$\| F(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \sum_{i=1}^{n} F(A_i) \|_\infty = \| F(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) \|_\infty = \| \chi_{B_n} \|_\infty = 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\lim_n \| F(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \sum_{i=1}^{n} F(A_i) \|_\infty \neq 0.$

(*b*) Uma medida vetorial σ-aditiva

Sejam Ω, Σ, μ como no exemplo anterior e $L_1(\mu)$ o espaço de Banach clássico das funções Lebesgue integráveis. Sejam X um espaço de Banach qualquer e $T \in \mathcal{L}(L_1(\mu), X)$.

Para cada $E \in \Sigma$ definamos $F\colon\Sigma \longrightarrow X$, como $F(A) = T(\chi_A)$.

Pela linearidade de T, é fácil ver que F é uma medida vetorial. Além disso, mostraremos que F é σ-aditiva.

Com efeito, seja uma sequência (A_n) de elementos disjuntos de Σ, se chamarmos $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i$ então

$$\|F(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) - \sum_{i=1}^{n} F(A_i)\| = \|F(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i)\| = \|T(\chi_{B_n})\| \leq \|T\| \ \mu(B_n).$$

Desde que μ é σ-aditiva, $\lim_n \|F(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i) - \sum_{i=1}^{n} F(A_i)\| = 0.$

Definição 1.3.

Seja $F: \Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial. A variação de F é a função de conjuntos $|F| : \Sigma \longrightarrow [0,\infty]$ definida como,

$$|F|(A) = sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|F(A_i)\| \right\}, \quad A \in \Sigma,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de A, em um número finito de elementos de Σ.

Diremos que F é de variação limitada, se $|F|(\Omega) < \infty$.

Proposição 1.4.

A variação de uma medida vetorial $F: \Sigma \longrightarrow X$, tem as seguintes propriedades:

(*a*) $|F|$ é uma medida aditiva, escalar e não negativa.

(*b*) Se $|F|(\Omega) < \infty$ então, $|F|$ é σ-aditiva se, e somente se, é σ-aditiva.

(*c*) $\|F(A)\| \leq |F|(A)$, $\forall \ A \in \Sigma$.

Para as provas destas propriedades ver [10], página 33.

Outra função de conjuntos associada a uma medida vetorial é a semivariação. O conceito de semivariação está diretamente relacionado com o estudo da teoria de integração bilinear relativamente a medidas vetoriais.

Para o desenvolvimiento desta teoria em maior grau de generalidade, onde por exemplo a função integrando assume valores num espaço de Banach Y, se faz necessário assumir a existência de uma aplicação bilinear contínua, definida em $X \times Y$ tomando valores num espaço vetorial Z, contornando a natural dificuldade de "multiplicar" elementos de espaços diferentes que não possuam estrutura para tal.

Como o nosso propósito é estudar alguns teoremas de representação de operadores lineares, introduzimos aqui apenas os conceitos relacionados com o tipo de integração envolvidos com aqueles teoremas.

Observação 1.5.

No que segue vamos a indicar por X e Y espaços de Banach nas condições: X é um espaço qualquer e Y é o corpo dos escalares ou Y é o dual topológico de X, ou vice-versa.

Assim, de uma maneira natural contamos com uma aplicação bilinear, contínua, definida sobre $X \times Y$, a saber: a multiplicação por escalar ou a avaliação funcional. Em ambos casos, denotamos esta aplicação pelo símbolo ".", e por Z a seu respectivo contradominio.

Definição 1.6.

Sejam X, Y espaços de Banach conforme à observação anterior, e seja $F:\Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial. A semivariação de F é a função de conjuntos $\|F\|:\Sigma \longrightarrow [0,\infty]$, dada por:

$$\|F\|(A) = sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} y_i . F(A_i) \right\| \right\},$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições finitas $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de A, em elementos de Σ e sobre todas as coleções $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de elementos de Y, tais que $\|y_i\| \leq 1$.

Diremos que F tem semivariação limitada, se $\|F\|(\Omega) < \infty$.

Proposição 1.7.

A semivariação de uma medida vetorial $F:\Sigma \longrightarrow X$, tem as seguintes propriedades:

(a) $\|F\|$ é monótona.

(b) $\|F\|$ é subaditiva, isto é: se dados conjuntos disjuntos $A,B \in \Sigma$ então $\|F\|(A \cup B) \leq \|F\|(A) + \|F\|(B)$.

(c) Se F é σ-aditiva então, $\|F\|$ é σ-subaditiva, isto é: dada uma sequência (A_n) de elementos disjuntos de Σ, temos que

$$\|F\|\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|F\|(A_i).$$

(d) $\forall\ A \in \Sigma \quad sup \{ \|F(E)\| \ /\ E \in \Sigma,\ E \subseteq A \} \leq \|F\|(A) \leq |F|(A)$.

Para as demonstrações ver [10], página 52.

No caso $Y=\mathbb{C}$, a semivariação tem ainda as seguintes propriedades:

Proposição 1.8.

Sejam $F:\Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial, e $A \in \Sigma$, então

(i) $\|F\|(A) = sup \{ |x^* F|(A) \ / \ x^* \in X^*, \ \|x^*\| \leq 1 \}$.

(ii) $sup \{ \|F(E)\| \ / \ E\in\Sigma, \ E\subseteq A\} \leq \|F\|(A) \leq 4 \ sup \{ \|F(E)\| \ / \ E\in\Sigma, \ E\subseteq A\}$.

Demonstração:

(i) Sejam $\{A_1, \ldots, A_n\}$ uma partição de A em elementos de Σ, e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ uma coleção de escalares tais que $|\alpha_i| \leq 1$.

Seja $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$ então,

$$|x^*(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(A_i))| = |\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^* F(A_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |x^* F(A_i)| \leq |x^* F|(A).$$

Logo, $\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F(A_i)\| \leq sup \{ |x^* F|(A) \ / \ x^* \in X^*, \ \|x^*\| \leq 1 \}$.

Assim, temos que $\|F\|(A) \leq sup \{ |x^* F|(A) \ / \ x^* \in X^*, \ \|x^*\| \leq 1 \}$.

Para provar a desigualdade contrária considere a função sinal, dada por $sgn\,(x) = e^{-i\,(arg\ x)}$, $x \in \mathbb{C}$. Note que $|sgn(x)| = 1$ e que $|x| = sgn(x).x$, $x \in \mathbb{C}$.

Se $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$, então

$$\sum_{i=1}^{n} |x^* F(A_i)| = \sum_{i=1}^{n} sgn(x^* F(A_i)).x^* F(A_i) = x^*(\sum_{i=1}^{n} sgn(x^* F(A_i)).F(A_i))$$

$$\leq \|\sum_{i=1}^{n} sgn(x^* F(A_i)).F(A_i)\| \leq \|F\|(A).$$

Se tomamos o supremo sobre todas as partições $\{A_1, \ldots, A_n\}$ de A, obtemos $|x^* F|(A) \leq \|F\|(A)$.

Consequentemente, $sup \{ |x^* F|(A) \ / \ x^* \in X^*, \ \|x^*\| \leq 1 \} \leq \|F\|(A)$.

(ii) A primeira desigualdade resulta da monotonicidade da semivariação.

Por outro lado, para cada medida escalar x^*F temos, $|x^*F|(A) \leq 4 \sup \{|x^*F(E)| \ / \ E\in\Sigma,\ E\subseteq A\}$ (ver [11], página 97).

Logo, por (i) resulta $\|F\|(A) \leq 4 \sup \{\|F(E)\| \ / \ E\in\Sigma,\ E\subseteq A\}$. $\square$

Nota: Se temos uma medida vetorial $F:\Sigma \longrightarrow X^*$, então adequando demonstração de 1.8(i), é possível provar que a semivariação está dada por

$$\|F\|(A) = \sup \{|x\circ F|(A) \ / \ x \in X,\ \|x\|\leq 1\}, \quad A \in \Sigma,$$

note que estamos considerando $x \in X \subseteq X^{**}$.

Exemplos 1.9.

(a) Uma medida vetorial de variação limitada

Considere a medida vetorial σ-aditiva $F:\Sigma \longrightarrow X$ dada no exemplo 1.2(b). Vejamos que F tem variação limitada:

Seja $\{A_1, \ldots, A_n\}$ uma partição de $[0,1]$ em elementos de Σ, então $\sum_{i=1}^{n} \|F(A_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \|T(\chi_{A_i})\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|T\| \ \mu(A_i) \leq \|T\| \ \mu([0,1]) = \|T\|$.

Assim obtemos que, $|F|([0,1]) \leq \|T\| < \infty$.

(b) Uma medida vetorial de semivariação limitada, mas com variação não limitada

Seja $F:\Sigma \longrightarrow L_\infty(\mu)$ a medida dada no exemplo 1.2(a). Veremos que F tem semivariação limitada.

Sejam $x^* \in L_\infty(\mu)^*$, $\|x^*\| \le 1$ e $\{A_1, \ldots, A_n\}$ uma partição de $[0,1]$ em elementos de Σ, logo:

$$\sum_{i=1}^{n} |x^* F(A_i)| = \sum_{i=1}^{n} |x^*(\chi_{A_i})| = \sum_{i=1}^{n} sgn(x^*(\chi_{A_i}))\, x^*(\chi_{A_i}) =$$

$$x^*\Big(\sum_{i=1}^{n} sgn(x^*(\chi_{A_i}))\, \chi_{A_i}\Big) \le \Big\| \sum_{i=1}^{n} sgn(x^*(\chi_{A_i}))\, \chi_{A_i} \Big\|_\infty =$$

$$\sup_{t\in[0,1]} \text{ess} \Big| \sum_{i=1}^{n} sgn(x^*(\chi_{A_i}))\, \chi_{A_i}(t) \Big| = 1.$$

Então, $\|F\|([0,1]) = \sup \{ |x^* F|([0,1]) \;/\; x^* \in X^*,\ \|x^*\| \le 1 \} \le 1$.

Mas F não tem variação limitada, pois se $\{A_1, \ldots, A_n\}$ é uma partição de $[0,1]$ em elementos não vazios de Σ então,

$$|F|([0,1]) \ge \sum_{i=1}^{n} \|F(A_i)\| = \sum_{i=1}^{n} \|\chi_{A_i}\|_\infty = n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $|F|([0,1]) = \infty$.

I. 3. Integral Bilinear de Bartle

Sejam X, Y e Z espaços de Banach. No sentido mais geral, esta teoria estuda a integração de funções a valores em Y com respeito a uma medida vetorial a valores em X.

O desenvolvimento tipo Lebesgue desta teoria, faz necessário supor a existência de uma aplicação bilinear, contínua, definida em $X \times Y$, a valores num espaço de Banach Z. Neste nível de generalidade várias propriedades da integral de Lebesgue são válidas, como os teoremas de Convergência de Vitali e de Convergência Limitada, embora a extensão natural do teorema da Convêrgencia Dominada (TCD) falha.

Como já mencionamos para os nossos propósitos basta considerar dois tipos de aplicações bilineares contínuas: a multiplicação por escalar e a avaliação funcional. Assim, no que segue consideramos os espaços X, Y e Z conforme à observação 1.5.

A seguir introduzimos alguns conceitos básicos da teoria da Medida vetorial.

Sejam $F\colon \Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial e (f_n) uma sequência de funções definidas em Ω com valores em Y. Diremos que,

(*i*) Um conjunto $A \in \Sigma$ é <u>F-nulo</u> se $\|F\|(A) = 0$.

(*ii*) (f_n) <u>converge pontualmente F-quase sempre</u> (F-q.s.) se existe um conjunto F-nulo N, tal que (f_n) converge pontualmente em $\Omega \setminus N$.

(*iii*) (f_n) <u>converge uniformemente F-quase sempre</u> se (f_n) converge uniformemente no complementar de um conjunto F-nulo.

(*iv*) Uma função $f:\Omega \longrightarrow Y$ é <u>F-essencialmente limitada</u> sobre $A\in\Sigma$, se existe um conjunto F-nulo N, tal que f é limitada em $A\setminus N$. Neste caso definimos o <u>supremo essencial de f sobre A</u> como,

$$\sup_{t\in A} ess \; \|f(t)\| = \operatorname{Inf}_{N} \sup_{t\in A\setminus N} \|f(t)\|.$$

(*v*) Uma função $f:\Omega \longrightarrow Y$ é chamada <u>simples</u>, se f assume apenas um número finito de elementos de Y, $\{y_1, \ldots, y_n\}$, de tal modo que $f^{-1}(y_i) \in \Sigma$. Note que f admite a representação $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{A_i}$, com $A_i \in \Sigma$ e $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i\neq j$ <u>chamada forma canônica</u>.

Denotamos por $\mathfrak{S}_Y(\Sigma)$ ao espaço vetorial das funções simples a valores em Y, com as operações habituais.

Definição 1.10.

Sejam $F:\Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial, $f:\Omega \longrightarrow Y$ uma função simples dada na forma canônica e $E \in \Sigma$, definimos a integral de f sobre E como,

$$\int_E f.F(dt) = \sum_{i=1}^{n} y_i . F(A_i \cap E).$$

$\int_E f.F(dt)$ é um elemento bem definido de Z (i.é. independe da representação de f). Para a prova deste fato ver [10], página 108.

Vejamos algumas propriedades básicas derivadas desta definição.

Proposição 1.11.

Se F é uma medida vetorial, então a integral de uma função simples satisfaz,

(a) Para cada $E \in \Sigma$, a aplicação $f \in \mathfrak{S}_Y(\Sigma) \longrightarrow \int_E f.F(dt)$ é linear.

(b) Para cada $f \in \mathfrak{S}_Y(\Sigma)$, a aplicação de conjuntos $E \in \Sigma \longrightarrow \int_E f.F(dt)$, define uma medida vetorial, a qual é σ-aditiva quando F é σ-aditiva.

(c) Se $f \in \mathfrak{S}_Y(\Sigma)$ e $E \in \Sigma$ então, $\| \int_E f.F(dt) \| \le \sup_{t \in \Omega} \| f(t) \| . \|F\|(\Omega)$.
Se F é de variação limitada temos, $\| \int_E f.F(dt) \| \le \int_E \|f\| \; |F|(dt)$.

Demonstração:

Para provar (a) e (b) basta trocarmos a multiplicação no corpo escalar pela aplicação bilinear ".": $X \times Y \longrightarrow Z$, e o módulo pela norma em Z, nas demonstrações clássicas.

(c) Sejam $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{A_i} \in \mathfrak{S}_Y(\Sigma)$, e $E \in \Sigma$.

A primeira desigualdade é óbvia se $f \equiv 0$. Então supondo $f \not\equiv 0$ e chamando $M = \sup_{t \in \Omega} \|f(t)\| > 0$ temos,

$$\left\|\int_E f.F(dt)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} y_i . F(A_i \cap E)\right\| = M \left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{M} . F(A_i \cap E)\right\| \le M \, \|F\|(\Omega).$$

Por outro lado, $\left\|\int_E f.F(dt)\right\| \le \sum_{i=1}^{n} \|y_i\| \, \|F(A_i \cap E)\| \le$ $\sum_{i=1}^{n} \|y_i\| \, |F|(A_i \cap E) = \int_E \|f\| \, |F|(dt)$, o que prova a segunda desigualdade. $\square$

A seguir assumimos que $F: \Sigma \longrightarrow X$ é uma medida vetorial σ-aditiva, de variação limitada. Vamos estender a noção de integral a uma classe maior de funções. Uma classe natural a considerar é a classe das funções que podem ser aproximadas por funções simples, isto leva a introduzir o conceito de função mensurável.

Definição 1.12

(a) A função $f: \Omega \longrightarrow Y$ é F-mensurável com respeito a F se existe uma sequência de funções em $\mathfrak{S}_Y(\Sigma)$ que converge a f F-q.s.

(b) A função $f: \Omega \longrightarrow Y$ é dita totalmente mensurável se existe uma sequência de funções em $\mathfrak{S}_Y(\Sigma)$ que converge uniformemente a f .

Denotaremos por $\mathcal{M}_Y(\Sigma)$ o espaço vetorial das funções $f:\Omega \longrightarrow Y$ totalmente mensuráveis, com as operações usuais. Se Y é o corpo escalar, usamos a notação $\mathcal{M}(\Sigma)$.

<u>Definição 1.13.</u>

Seja $F:\Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial σ-aditiva, de variação limitada. Diremos que uma função $f:\Omega \longrightarrow Y$ é <u>Bartle integrável</u> com respeito a F, se existe uma sequência (f_n) de funções simples em $\mathfrak{S}_Y(\Sigma)$ satisfazendo,

(i) (f_n) converge pontualmente a f F-q.s..

(ii) Para cada $A\in\Sigma$, a sequência de integrais $\lambda_n(A) =\int_A f_n.F(dt)$ converge na norma de Z.

O limite da sequência $(\lambda_n(A))_n$ é independiente da sequência de funções (f_n), conforme provamos abaixo. Este limite é denotado por $\int_A f.F(dt)$ e é chamado <u>integral de Bartle de f sobre A</u>.

Para provar que $\int_A f.\ F(dt)$ é bem definido faremos uso do seguinte teorema que é uma extensão de um teorema clássico.

<u>Teorema 1.14</u> (*teorema de Vitali-Hahn-Saks*)

Sejam $\mu:\Sigma \longrightarrow \mathbb{K}$ uma medida escalar e (λ_n) uma sequência de medidas vetoriais definidas sobre Σ a valores num espaço de Banach Z, nas seguintes condições,

(i) $\lim\limits_{|\mu|(A)\to 0} \lambda_n(A) = 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\lim\limits_{n} \lambda_n(A)$ existe para cada $A \in \Sigma$.

Então, $\lim\limits_{|\mu|(A)\to 0} \lambda_n(A) = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [11], página 158.

Lema 1.15

Se uma sequência de funções simples $f_n : \Omega \longrightarrow Y$ satisfaz (ii) da definição acima, então

$$\lim_{|F|(A)\to 0} \lambda_n(A) = 0 , \qquad \text{uniformemente para } n \in \mathbb{N}.$$

Frequentemente esta propriedade é enunciada dizendo que a sequência (λ_n) é uniformemente absolutamente contínua com respeito a $|F|$.

Demonstração:

Em consequência da proposição 1.11(c) temos que,

$$\lim_{|F|(A)\to 0} \int_A f_n \cdot F(dt) = 0, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

Também temos que, $\lim\limits_{n} \int_A f_n . F(dt)$ existe para cada $A \in \Sigma$.

Logo, pelo teorema de Vitali-Hahn-Saks para medidas vetoriais temos que o limite (*) é uniforme para $n \in \mathbb{N}$. □

A seguir enunciamos o teorema de Egoroff para funções a valores vetoriais.

Teorema 1.16 (*teorema de Egoroff*)

Seja $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ uma medida σ-aditiva e não negativa. Se $f_n : \Omega \longrightarrow Y$ é uma sequência de funções ν-mensuráveis, convergente pontualmente a f, então dado $\varepsilon > 0$ existe $A \in \Sigma$, com $\nu(A) < \varepsilon$ tal que (f_n) converge uniformemente a f em $\Omega \setminus A$.

Demonstração: Basta trocar módulo por norma na demonstração clássica.

Proposição 1.17

Seja $f : \Omega \longrightarrow Y$ Bartle integrável com respeito a F. Então a integral de f sobre A, está bem definida.

Demonstração:

Vamos supor primeiro que $f \equiv 0$. Neste caso, se (f_n) é uma sequência de funções simples nas condições da definição 1.13 afirmamos que $\lim_n \lambda_n(A) = 0$, onde $\lambda_n(A) = \int_A f_n \cdot F(dt)$. (1)

Com efeito, pelo lema 1.15 temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $|F|(E) < \delta$, então $\|\lambda_n(E)\| < \varepsilon$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$. (2)

Usando o teorema de Egoroff com $\nu = |F|$ obtemos um conjunto $N \in \Sigma$ com $|F|(N) < \delta$ e de modo que (f_n) converge uniformemente a zero sobre $\Omega \setminus N$.

Seja $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n(t)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{|F|(\Omega)}$, $\forall\ n \geq n_o$, $\forall\ t \in \Omega \setminus N$.

Como a proposição 1.11(c) garante que $\|\lambda_n(A \setminus N)\| \leq \varepsilon$, $\forall\ n \geq n_o$, e em vista de (2) temos $\|\lambda_n(N)\| < \varepsilon$, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, então segue que

$$\|\lambda_n(A)\| < \|\lambda_n(A \setminus N)\| + \|\lambda_n(N)\| < 2\varepsilon, \qquad \forall\ n \geq n_o.$$

Isto prova a afirmação (1), em outras palavras o limite da sequência $(\lambda_n(A))$ independe da sequência de funções (f_n).

No caso $f \not\equiv 0$ é fácil ver que a integral de Bartle de f sobre A está bem definida, pois se (f_n) e (g_n) são sequências de funções simples satisfazendo as condições (i) e (ii) da definição 1.13, reduzimos ao caso anterior tomando $h_n = f_n - g_n$. □

Observação 1.18

Nas condições da definição 1.13 a demonstração anterior mostra que $\lim_n \lambda_n(A)$ é uniforme para $A \in \Sigma$. Isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$, tal que $\forall$ n, m $\geq n_o$, $\forall A \in \Sigma$ $\|\lambda_n(A) - \lambda_m(A)\| < \varepsilon$.

Denotaremos por $\mathfrak{L}_B(F,Y)$ a classe das funções $f: \Omega \longrightarrow Y$, Bartle integráveis com respeito à medida vetorial $F: \Sigma \longrightarrow X$. Se $Y = \mathbb{R}$ escrevemos $\mathfrak{L}_B(F)$. Notemos que $\mathfrak{L}_B(F,Y)$ é um espaço vetorial com as operações habituais.

Proposição 1.19

Se $F: \Sigma \longrightarrow X$ é uma medida vetorial σ-aditiva, de variação limitada, então a integral de Bartle com respeito a F tem as seguintes propriedades:

(a) Para cada $A \in \Sigma$ a aplicação $f \in \mathfrak{L}_B(F,Y) \longrightarrow \int_A f.F(dt)$ é um operador linear.

(b) Para cada $f \in \mathfrak{L}_B(F,Y)$, a aplicação de conjuntos $A \in \Sigma \longrightarrow \int_A f.F(dt)$ é uma medida vetorial (ou escalar) σ-aditiva.

(c) Se $f:\Omega \longrightarrow Y$ é F-mensurável e F-essencialmente limitada sobre Ω e $A \in \Sigma$ então,

$$f \in \mathfrak{L}_{B}(F,Y) \quad \text{e} \quad \left\| \int_A f.\,F(dt) \right\| \leq \sup_{t\in\Omega} ess \|f(t)\| \; \|F\|(A).$$

(d) Se $f \in \mathfrak{L}_{B}(F,Y)$ então $\displaystyle\lim_{|F|(A)\to 0} \int_A f.\,F(dt) = 0.$

(e) Seja $Y=\mathbb{K}$. Se $f \in \mathfrak{L}_{B}(F,Y)$, $A \in \Sigma$ e $T \in \mathcal{L}(X,Z)$, então f é Bartle integrável com relação à medida vetorial $T\circ F$ e $T(\int_A f.\; F(dt)) = \int_A f.\; T\circ F(dt)$.

Demonstração:

(a) e (b) são consequências da validade dessas asserções para funções simples.

(c) Primeiro provaremos que f é Bartle integrável. Como f é F-mensurável podemos tomar uma sequência de funções simples (f_n) que converge pontualmente a f, F-q.s.

Sejam, $M = \sup_{t\in\Omega} ess \|f(t)\|$ e $N=M+1$.

Definimos a sequência $$f_n^N(t) = \begin{cases} f_n(t), & \text{se } \|f_n(t)\| \leq N. \\ 0 \quad , & \text{se } \|f_n(t)\| > N. \end{cases}$$

Afirmamos que (f_n^N) converge pontualmente a f, F-q.s. De fato, seja S o conjunto F-nulo, tal que (f_n) convirja pontualmente a f em $\Omega\setminus S$.

Dado um número positivo $\varepsilon < 1$ e $t \in \Omega\setminus S$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$.

Desde que $\|f_n(t)\| \leq \|f_n(t) - f(t)\| + \|f(t)\| < M + 1 = N$, $\forall\, n \geq n_0$, temos que $f_n^N(t) = f_n(t)$, $\forall\, n \geq n_0$.

Logo $\|f_n^N(t) - f(t)\| = \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$, o que prova a afirmação.

Agora, pelo teorema de Egoroff, dado $\eta > 0$ existe $S \in \Sigma$ com $|F|(S) < \eta$ tal que a sequência (f_n^N) converge uniformemente em $\Omega \setminus S$.

Logo, $\|\int_A (f_n^N - f_m^N).F(dt)\| \leq \|\int_{A\setminus S} (f_n^N - f_m^N).F(dt)\| +$

$\|\int_S (f_n^N - f_m^N).\ F(dt)\| \leq \int_{A\setminus S} \|f_n^N - f_m^N\|\ |F|(dt) + 2N\eta.$

Segue que, $(\int_A f_n^N\ .F(dt))_n$ é uma sequência de Cauchy e portanto converge em Z.

Assim, a condição (ii) da definição 1.13 é satisfeita, portanto f é Bartle integrável.

Em segundo lugar, sejam $\delta > 0$ e (f_n^N) a sequência de funções simples (f_n^N) tal que $N = M + \delta$.

Logo, $\|\int_A f.F(dt)\| \leq \|\int_A (f - f_n^N).F(dt)\| + \|\int_A f_n^N.F(dt)\| \leq$

$\|\int_A (f - f_n^N).F(dt)\| + (M+\delta)\ \|F\|(A)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Fazendo $n \to \infty$ obtemos, $\|\int_A f.F(dt)\| \leq (M+\delta)\ \|F\|(A)$.

Como $\delta > 0$ é arbitrário, então $\|\int_A f.F(dt)\| \leq M\ \|F\|(A)$.

(d) Seja (f_n) a sequência de funções simples dada na definição 1.13.

Seja $\varepsilon > 0$, pela observação 1.18 podemos escolher $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\int_A (f - f_{n_0}).F(dt)\| < \varepsilon$, $\forall\, A \in \Sigma$.

Além disso temos $\|\int_A f_{n_\circ}.F(dt)\| \leq \sup_{t\in\Omega} \|f_{n_\circ}(t)\|\ |F|(A)$.

Da desigualdade $\|\int_A f.F(dt)\| \leq \|\int_A (f - f_{n_\circ}).F(dt)\| + \|\int_A f_{n_\circ}.F(dt)\|$, resulta que $\overline{\lim}_{|F|(A)\to 0} \|\int_A f.F(dt)\| \leq \varepsilon$.

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário concluímos que,

$$\lim_{|F|(A)\to 0} \|\int_A f.F(dt)\| = 0.$$

(e) Claramente, $T\circ F : \Sigma \longrightarrow Z$ é uma medida vetorial σ-aditiva, a qual satisfaz $\|T\circ F\|(A) \leq \|T\|\ \||F|\|(A)$, $\forall\ A \in \Sigma$. $(*)$

Agora provaremos que f é Bartle integrável. Efetivamente, se (f_n) é a sequência de funções simples da definição 1.13 então, em virtude de $(*)$ podemos dizer que (f_n) converge pontualmente a f $T\circ F$-q.s..

Como, $\|\int_A (f_n - f_m).\ T\circ F(dt)\| = \|\ T\ \{\int_A (f_n - f_m).F(dt)\}\ \| \leq \|T\|\ \|\int_A (f_n - f_m).F(dt)\|$, então $(\int_A f_n.\ T\circ F(dt))_n$ converge. Isto prova que $f \in \mathfrak{L}_B(T\circ F)$.

Por último, pela continuidade de T, segue que,

$$\int_A f.\ T\circ F(dt) = \lim_n \int_A f_n.\ T\circ F(dt) = \lim_n T\ \{\int_A f_n.F(dt)\} = T\ (\int_A f.\ F(dt)).\ \square$$

Ao contrário do que acontece com as funções Lebesgue integráveis, a função norma de uma função Bartle integrável não é necessariamente integrável. É o que mostra o próximo exemplo.

Exemplo 1.20

Sejam $\Omega = [0,1]$,

Σ = σ-álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis,

μ = medida de Lebesgue em $[0,1]$, e

$X = Y = \mathbb{R}^2$ e $Z = \mathbb{R}$, onde a aplicação bilinear em $X\times Y$ é dada pelo produto interno usual.

Denotemos por e_1, e_2 os vetores da base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Definimos uma medida vetorial F por, $F(A) = \mu(A)e_1$ e consideramos a função $g(t) = t^{-1}e_2$.

Nestas condições, temos que $g \in \mathfrak{L}_B(F, \mathbb{R}^2)$ e $\int_A g\cdot F(dt) = 0$, mas $\|g(t)\| = t^{-1}$ não é integrável com respeito a $|F| = \mu$.

A seguir estudamos a convergência no espaço $\mathfrak{L}_B(F, Y)$ onde um resultado importante é a extensão do teorema clássico da Convergência de Vitali. O seguinte lema nos auxiliará na prova.

Lema 1.21

Seja $f_n\colon \Omega \longrightarrow Y$ uma sequência de funções simples que converge pontualmente a uma função f F-q.s.. Se a sequência de integrais $\lambda_n(A) = \int_A f_n \cdot F(dt)$ é uniformemente absolutamente contínua com respeito a $|F|$, então $(\lambda_n(A))_n$ converge.

Demonstração: O resultado se segue, usando as técnicas da demonstração 1.17.

Teorema 1.22 (*teorema da Convergência de Vitali*)

Seja $F\colon \Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial, σ-aditiva, de variação limitada. Se $f_n : \Omega \longrightarrow Y$ é uma sequência de funções Bartle integráveis que converge a uma função $f : \Omega \longrightarrow Y$ F-q.s., tal que a sequência $\lambda_n(A) = \int_A f_n . F(dt)$ é uniformemente absolutamente contínua com respeito a $|F|$, então f é Bartle integrável e,

$$\int_A f \, . F(dt) = \lim_n \int_A f_n . F(dt).$$

Demonstração:

Como cada f_n é integrável, para cada n temos uma sequência de funções simples nas condições da definição 1.13. Logo, em virtude do teorema de Egoroff, existem um conjunto $N_n \in \Sigma$ com $|F|(N_n) < 2^{-n}$, e uma função simples g_n de modo que,

$$\| f_n(t) - g_n(t) \| < 2^{-n}, \quad \forall \ t \in \Omega \setminus N_n .$$

Sejam, $M_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} N_i$ e $M = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$. Note que $\|F\|(M) \leq \|F\|(M_k) \leq \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = 2^{1-k}$ $\forall$ k $\in \mathbb{N}$, logo temos que $\|F\|(M) = 0$.

Afirmamos que a sequência de funções simples (g_n) converge pontualmente a f F-q.s. De fato, se $t \notin M$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t \notin M_{k_0}$, isto é $\| f_n(t) - g_n(t) \| < 2^{-n}$, $\forall$ $n \geq k_0$. Logo, como $\| f(t) - g_n(t) \| \leq \| f(t) - f_n(t) \| + \| f_n(t) - g_n(t) \|$ temos que $(g_n(t))$ converge a $f(t)$, para t fora de um conjunto F-nulo.

Agora provaremos que a sequência $\nu_n(A) = \int_A g_n . \ F(dt)$ converge na norma de Z. De fato, pela uniformidade do limite (observação 1.18) para cada n podemos tomar a função simples (g_n) satisfazendo $\| \nu_n(A) - \lambda_n(A) \| < 2^{-n}$, $\forall$ $A \in \Sigma$. (1)

Logo $\|\nu_n(A)\| \leq \|\lambda_n(A)\| + 2^{-n}, \quad \forall A \in \Sigma.$ (2)

Desta desigualdade, e desde que $(\lambda_n(A))$ é uniformemente absolutamente contínua com respeito a $|F|$, é claro que $(\lambda_n(A))$ também tem esta propriedade. Segue-se do lema 1.21 que $(\lambda_n(A))$ converge.

Portanto f é Bartle integrável e $\int_A f.F(dt) = \lim_n \nu_n(A)$. (3)

Finalmente, aplicando (1) e (3) na desigualdade abaixo:

$$\| \int_A f.F(dt) - \lambda_n(A)\| \leq \| \int_A f.F(dt) - \nu_n(A)\| + \|\nu_n(A) - \lambda_n(A)\|,$$

obtemos, $\int_A f.F(dt) = \lim_n \lambda_n(A) = \lim_n \int_A f_n.F(dt)$. □

Lamentavelmente, nesta teoria não é possível estender o teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (TCD), como se verifica no exemplo seguinte.

Exemplo 1.23

Sejam, F a medida vetorial descrita no exemplo 1.20,

$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a sequência dada por $f_n(t) = t^{-1+\frac{1}{n}} e_1$,

$g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função $g(t) = t^{-1} e_2$, se $t \in (0,1]$

e $g(0) = 0$.

Temos que g e cada f_n são integráveis, e $\|f_n(t)\| \leq \|g(t)\|$, $\forall$ $t \in [0,1]$. Mas o limite da sequência (f_n) é a função $f(t) = t^{-1} e_1$, a qual não é integrável.

Em certos casos, quando por exemplo $Y = \mathbb{R}$, é válido o teorema mencionado (ver [41]). Embora em geral não vale o TCD, existe a seguinte versão dele:

Teorema 1.24 (*teorema da Convergência Dominada*)

Sejam $F:\Omega \longrightarrow X$ uma medida vetorial σ-aditiva, de variação limitada, e $f_n:\Omega \longrightarrow Y$ uma sequência de funções Bartle integráveis com respeito a F, que converge a uma função $f:\Omega \longrightarrow Y$ F-q.s..

Se existe uma função integrável g, tal que,

$$\left\|\int_A f_n\cdot F(dt)\right\| \leq \left\|\int_A g\cdot F(dt)\right\|, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, A \in \Sigma.$$

Então, f é Bartle integravel e,

$$\int_A f\cdot F(dt) = \lim_n \int_A f_n\cdot F(dt), \qquad \forall\, A \in \Sigma.$$

Demonstração:

Pelo teorema de Convergência de Vitali, é suficiente provar que a sequência $\lambda_n(A) = \int_A f_n\cdot F(dt)$ é uniformemente absolutamente contínua com relação a $|F|$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, pela proposição 1.19(*d*) existe $\delta > 0$ tal que $|F|(A) < \delta$ implica $\left\|\int_A g\cdot F(dt)\right\| < \varepsilon$, $\forall\, A \in \Sigma$.

Logo, $\left\|\int_A f_n\cdot F(dt)\right\| < \varepsilon$, $\forall\, A \in \Sigma$ com $|F|(A) < \delta$, e $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Em outras palavras, $(\lambda_n(A))$ é uniformemente absolutamente contínua com respeito a $|F|$. $\square$

Até aqui têm sido essenciais as hipóteses de σ-aditividade e variação limitada da medida vetorial F. Queremos destacar que para definir o conceito de integral de uma função totalmente mensurável, estas condições não são necessárias, basta que a medida vetorial seja de semivariação limitada, como vemos abaixo.

Suponhamos que $F:\Sigma \longrightarrow X$ seja uma medida vetorial de semivariação limitada, isto é $\|F\|(\Omega) < \infty$.

Introduzimos no espaço $\mathcal{M}_Y(\Sigma)$ das funções $f:\Omega \longrightarrow Y$ totalmente mensuráveis a topología da convergência uniforme determinada pela norma $\|f\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} \|f(t)\|$, $f \in \mathcal{M}_Y(\Sigma)$. Desta forma, temos que $\mathcal{M}_Y(\Sigma)$ é um espaço de Banach contendo $\mathfrak{S}_Y(\Sigma)$ como um subespaço denso.

Definamos o operador $T : \mathfrak{S}_Y(\Sigma) \longrightarrow Z$ por $T(f) = \int_\Omega f.F(dt)$, onde $\int_\Omega f.F(dt)$ é dada como na definição 1.10, e portanto T está bem definido.

É fácil ver o operador T é linear e contínuo, mas ainda temos que $\|T\| = \sup \left\{ \|\int_\Omega f.F(dt)\| \,/\, f\in \mathfrak{S}_Y(\Sigma),\ \sup_{t\in\Omega} \|f(t)\| \le 1 \right\}$ $= \|F\|(\Omega)$.

Logo T tem uma única extensão linear, contínua e com igual norma, ao espaço $\mathcal{M}_Y(\Sigma)$, a qual denotaremos por $\tilde{T}$.

<u>Definição 1.25</u>

Sejam, $F:\Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial de semivariação limitada e $f:\Omega \longrightarrow Y$ uma função totalmente mensurável. Definimos a integral de f, também chamada <u>integral elementar de Bartle de f</u> como:

$$\int_\Omega f.F(dt) = \tilde{T}(f).$$

Se $A \in \Sigma$, naturalmente definimos, $\int_A f.F(dt) = \int_\Omega f\ \chi_A.\ F(dt)$.

<u>Nota:</u> Se F é uma medida vetorial, σ-aditiva, de variação limitada, então esta integral coincide com a Integral de Bartle (definição 1.13).

Assim, se verificam as seguintes propriedades:

(*i*) A integral elementar de Bartle herda as propriedades de linearidade do operador $\tilde{T}$.

(*ii*) Para cada $f \in \mathcal{M}_Y(\Sigma)$, a aplicação $A \in \Sigma \longrightarrow \int_A f.F(dt)$, determina uma medida vetorial limitada. É fácil verificar esta afirmação pois ela se mantém para funções simples.

(*iii*) Da continuidade do operador T resulta que $\forall\ f \in \mathcal{M}_Y(\Sigma)$,

$$\| \int_\Omega f.F(dt) \| \leq \|F\|(\Omega) \sup_{t\in\Omega} \|f(t)\|.$$

(*iv*) Se $Y=\mathbb{C}$, então $x^*(\int_\Omega f.F(dt)) = \int_\Omega f\ x^*F(dt)$, $x^* \in X^*$, $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$.

Desde que esta propriedade é verdadeira para funções simples, logo pela densidade de $\mathfrak{S}(\Sigma)$ em $\mathcal{M}(\Sigma)$, obtemos a validade para toda $f \in \mathcal{M}(\Sigma)$.

I. 4. <u>Integral de Bochner</u>

Para este parágrafo, Y denotará um espaço de Banach e $(\Omega,\Sigma,\ \mu)$ será um espaço de medida não negativa, finita e σ-aditiva.

Algumas definições básicas são as seguintes:

Sejam $f : \Sigma \longrightarrow Y$ uma função e $f_n : \Omega \longrightarrow Y$ uma sequência de funções. Diremos que :

(i) Um conjunto $N \in \Sigma$, é <u>μ-nulo</u> se $\mu(N) = 0$.

(ii) (f_n) <u>converge pontualmente à f μ-quase sempre</u>, se existe um conjunto μ-nulo N, tal que $\lim_n \|f(t) - f_n(t)\| = 0$, $\forall\ t \in \Omega \setminus N$.

(iii) (f_n) <u>converge uniformemente à f μ-quase sempre</u>, se existe um conjunto μ-nulo, tal que (f_n) converge uniformemente em $\Omega \setminus N$.

(iv) (f_n) <u>converge μ-quase uniformemente à f</u>, se dado $\varepsilon > 0$ existe um conjunto $A \in \Sigma$ com $\mu(A) < \varepsilon$ tal que (f_n) converge uniformemente à f em $\Omega \setminus A$.

(v) f é <u>elementar</u> se existe uma sequência (y_i) em Y e uma sequência disjunta (E_i) em Σ tais que, $f = \sum_{i=1}^{\infty} y_i\ \chi_{E_i}$.

Agora, apresentaremos alguns conceitos relacionados com mensurabilidade com respeito à medida escalar μ.

<u>Definição 1.26</u>

Seja a função $f : \Omega \longrightarrow Y$. Diremos que:

(i) <u>f é μ-mensurável</u> se existe uma sequência de funções simples que converge pontualmente à f μ-q.s..

(ii) <u>f é fracamente μ-mensurável</u> se para cada $y^* \in Y^*$ a função escalar y^*f é μ-mensurável.

(iii) f tem imagem <u>μ-essencialmente separável</u>, se existe um conjunto $E \in \Sigma$ com $\mu(E) = 0$ e tal que $f(\Omega \setminus E)$ é um subconjunto separável de Y.

<u>Observações 1.27</u> :

(a) Toda função μ-mensurável f é fracamente μ-mensurável. De fato, sejam $y^* \in Y^*$ e (f_n) uma sequência de funções simples convergindo pontualmente à f μ-q.s.. Então, y^*f_n é uma função simples e desde que $\|y^*f(t) - y^*f_n(t)\| \leq \|y^*\| \, \|f(t) - f_n(t)\|$, temos que $(y^*f_n)_n$ converge pontualmente a y^*f. Portanto f é fracamente μ-mensurável.

(b) Claramente toda função simples é μ-mensurável. Além disso é fácil ver que as funções elementares também são μ-mensuráveis. Com efeito, se f é elementar, podemos representar f como, $f = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \, \chi_{E_i}$ onde a sequência (E_i) em Σ é disjunta, e (y_i) é uma sequência em Y. Tomando as funções simples $f_n = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{E_i}$, vemos que (f_n) converge pontualmente à f. Portanto f é μ-mensurável.

<u>Proposição 1.28</u>

A soma finita e o limite pontual μ-q.s. de funções μ-mensuráveis é μ-mensurável. Em consequência, uma série pontualmente convergente de funções μ-mensuráveis também é μ-mensurável.

Demonstração:

Claramente a soma finita de funções μ-mensuráveis é μ-mensurável.

Agora, provaremos que se (f_n) é uma sequência de funções μ-mensuráveis, que converge a uma função f μ-q.s., então f é μ-mensurável.

Com efeito, desde que cada f_n é μ-mensurável, por uma aplicação do teorema de Egoroff, temos para cada $n \in \mathbb{N}$ uma função simples g_n e um conjunto $A_n \in \Sigma$ com $\mu(A_n) < 2^{-n}$, tais que $\|f_n(t) - g_n(t)\| < 2^{-n}$, $\forall\ t \in \Omega \setminus A_n$.

Tomemos $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=i}^{\infty} A_n \in \Sigma$, então $\mu(A) \le \sum_{n=i}^{\infty} \mu(A_n) \le 2^{1-i}$, $\forall\ i \in \mathbb{N}$ ou seja, $\mu(A) = 0$.

Desta forma $\lim_n \|f_n(t) - g_n(t)\| = 0$, $\forall\ t \in \Omega \setminus A$. (1)

Chamemos B ao conjunto μ-nulo tal que $\lim_n \|f_n(t) - f(t)\| = 0$, $\forall\ t \in \Omega \setminus B$. (2)

Considere agora $N = A \cup B$. Portanto usando (1) e (2) na desigualdade, $\|f(t) - g_n(t)\| \le \|f(t) - f_n(t)\| + \|f_n(t) - g_n(t)\|$ obtemos $\lim_n \|f(t) - g_n(t)\| = 0$, $\forall\ t \in \Omega \setminus N$.

Dessa forma provamos que, f é μ-mensurável. □

A seguir, apresentamos dois resultados que caracterizam as funções μ-mensuráveis. A demostração do teorema enunciado abaixo aparecem em [9], pág. 42.

Teorema 1.29 (*teorema da Mensurabilidade de Pettis*)

Uma função $f:\Omega \longrightarrow Y$ é μ-mensurável se, e somente se,

(*i*) f tem imagem μ-essencialmente separável.

(*ii*) Para cada $y^* \in Y^*$, a função $y^* f$ é μ-mensurável.

Proposição 1.30

Uma função $f:\Omega \longrightarrow Y$ é μ-mensurável se, e somente se, f é limite uniforme μ-q.s. de uma sequência de funções elementares.

A demonstração desta proposição segue da prova do teorema 1.29.

Definição 1.31

Uma função μ-mensurável $f:\Omega \longrightarrow Y$ é dita Bochner integrável se existe uma sequência de funções simples $f_n:\Omega \longrightarrow Y$ tais que :

$$\lim_n \int_A \|f_n - f\| \,\mu(dt) = 0.$$

Notamos que para todo $A \in \Sigma$, a sequência $(\int_A f_n \,\mu(dt))_n$ é de Cauchy em Y e portanto converge. Naturalmente aqui a integral de uma função simples está dada na forma usual (definição 1.10). Assim, podemos definir a integral de Bochner de f sobre A, como:

$$\int_A f \,\mu(dt) = \lim_n \int_A f_n \,\mu(dt).$$

Nota: É fácil ver que esta definição independe da sequência tomada, pois se tomarmos outra sequência (g_n) nas mesmas condições de (f_n) então,

$$\left\| \int_A (f_n - g_n) \ \mu(dt) \right\| \leq \int_A \| f_n - g_n \| \ \mu(dt) \leq \int_A \| f_n - f \| \ \mu(dt) +$$

$$\int_A \| g_n - f \| \ \mu(dt).$$

Logo, $\lim_n \left\| \int_A (f_n - g_n) \ \mu(dt) \right\| = 0.$

Ou seja, $\lim_n \int_A f_n \ \mu(dt) = \lim_n \int_A g_n \ \mu(dt).$

Denotaremos por $\mathfrak{L}^1(\mu, Y)$ ao espaço das funções Bochner integráveis com relação a μ. Claramente $\mathfrak{L}^1(\mu, Y)$ é um espaço vetorial com as operações usuais.

O seguinte teorema revela que as condições de integrabilidade são mais fortes que no caso da integral de Bartle.

Teorema 1.32

Uma função μ-mensurável $f : \Omega \longrightarrow Y$ é Bochner integrável se, e somente se, $\int_\Omega \|f\| \ \mu(dt) < \infty$.

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Seja (f_n) a sequência de funções simples dada na definição 1.31. Notemos que $\|f(t)\| = \lim \|f_n(t)\|$ μ-q.s., então a função $\|f\|$ é μ-mensurável.

Assim, $\int_\Omega \|f\| \ \mu(dt) \leq \int_\Omega \|f - f_n\| \ \mu(dt) + \int_\Omega \|f_n\| \ \mu(dt) < \infty,$ quando n é suficientemente grande.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\int_{\Omega} \|f\| \, \mu(dt) < \infty$.

Como f é μ-mensurável, usando a proposição 1.30, obtemos uma sequência (g_n) de funções elementares com $\|f - g_n\| < \frac{1}{n}$ e em consequência, $\int_{\Omega} \|f - g_n\| \, \mu(dt) < \frac{\mu(\Omega)}{n}$. (1)

Seja $g_n = \sum_{m=1}^{\infty} y_{nm} \, \chi_{E_{nm}}$, onde (E_{nm}) é uma sequência disjunta em Σ e $y_{nm} \in Y$, $\forall$ n, m $\in \mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ a função real $t \longrightarrow \|g_n(t)\|$ é Lebesgue integrável, ou seja $\int_{\Omega} \|g_n\| \, \mu(dt) < \infty$. Isto pois, $\|g_n(t)\| < \|f(t)\| + \frac{1}{n}$.

Dessa forma, existe $p_n \in \mathbb{N}$ tal que se $A = \bigcup_{m=p_n+1}^{\infty} E_{nm}$, então $\int_A \|g_n\| \, \mu(dt) < \frac{\mu(\Omega)}{n}$.

Logo se definimos funções simples f_n como $f_n = \sum_{m=1}^{p_n} y_{nm} \, \chi_{E_{nm}}$, temos que $\int_{\Omega} \|f_n - g_n\| \, \mu(dt) = \int_A \|g_n\| \, \mu(dt) < \frac{\mu(\Omega)}{n}$. (2)

Por (1) e (2) resulta,

$$\int_{\Omega} \|f_n - f\| \, \mu(dt) \leq \int_{\Omega} \|f_n - g_n\| \, \mu(dt) < 2 \, \frac{\mu(\Omega)}{n} .$$

Isto é, $\lim_n \int_{\Omega} \|f_n - f\| \, \mu(dt) = 0$. Portanto f é Bochner integrável. $\square$

Na seguinte proposição mostramos algumas propriedades que possui a integral de Bochner .

Proposição 1.33

Seja $f : \Omega \longrightarrow Y$ uma função Bochner integrável, então valem as seguintes propriedades:

(i) Para cada $A \in \Sigma$, a aplicação $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, Y) \longrightarrow \int_A f \; \mu(dt)$ é linear.

(ii) $\| \int_A f \; \mu(dt) \| \leq \int_A \|f\| \; \mu(dt)$, $\forall \; A \in \Sigma$.

(iii) $\lim\limits_{\mu(A)\to 0} \int_A f \; \mu(dt) = 0$.

(iv) A aplicação $G : \Sigma \longrightarrow Y$, dada por $G(A) = \int_A f \; \mu(dt)$ é uma medida vetorial σ-aditiva.

(v) Se $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$, então a função $T \circ f : \Sigma \longrightarrow Z$ é Bochner integrável e $\int_A T \circ f \; \mu(dt) = T \left(\int_A f \; \mu(dt) \right)$, $\forall \; A \in \Sigma$.

Demonstração:

(i) É imediato, uma vez que vale para funções simples.

(ii) Seja (f_n) a sequência de funções simples da definição 1.31. Como a função $t \longrightarrow \|f(t)\|$ é Lebesgue integrável então,

$$\int_A | \|f(t)\| - \|f_n(t)\| | \quad \mu(dt) \leq \int_A \|f(t) - f_n(t)\| \quad \mu(dt).$$

Isto implica que, $\int_A \|f\| \; \mu(dt) = \lim\limits_{n} \int_A \|f_n\| \; \mu(dt)$. (*)

Por outro lado,

$$\| \int_A f \; \mu(dt) \| \leq \| \int_A (f - f_n) \; \mu(dt) \| + \| \int_A f_n \; \mu(dt) \|.$$

$$\leq \| \int_A (f - f_n) \; \mu(dt) \| + \int_A \|f_n\| \; \mu(dt).$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$, e usando (*) obtemos,

$$\left\| \int_A f \ \mu(dt) \right\| \le \int_A \|f\| \ \mu(dt)$$

(iii) Desde que a função norma de f é Lebesgue integrável, temos que, $\lim\limits_{\mu(A)\to 0} \int_A \|f\| \ \mu(dt) = 0.$

Pela desigualdade anterior, $\lim\limits_{\mu(A)\to 0} \int_A f \ \mu(dt) = 0.$

(iv) É fácil ver que G é aditiva.

Agora seja (E_n) uma sequência de elementos disjuntos de Σ chamamos $A_n = \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} E_i$.

Logo, $\left\| G\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right) - \sum\limits_{i=1}^{n} G(E_i) \right\| = \left\| G\left(\bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} E_i\right) \right\| = \left\| \int_{A_n} f \ \mu(dt) \right\| \le \int \|f \chi_{A_n}\| \ \mu(dt).$

Segue do T.C.D. clássico que,

$$\lim_n \left\| G\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) - \sum_{i=1}^{n} G(E_i) \right\| = 0.$$

Portanto G é uma medida vetorial σ-aditiva.

(v) Claramente a função $T\circ f : \Omega \longrightarrow Z$ é μ-mensurável.

Como $\|T\circ f(t)\| \le \|T\| \ \|f(t)\|$, então pelo teorema 1.32 temos que $T\circ f$ é Bochner integrável.

Sejam (f_n) a sequência de funções simples da definição 1.3 e um conjunto $A \in \Sigma$.

Usando (ii) verificamos que a sequência $\int_A T\circ f_n \ \mu(dt)$ converge a $\int_A T\circ f \ \mu(dt)$.

Por outro lado, como $\int_A T\circ f_n\ \mu(dt) = T(\int_A f_n\ \mu(dt))$ e desde que T é contínuo temos que $\int_A T\circ f_n \mu(dt)$ converge a $T(\int_A f\mu(dt))$.

Portanto

$$\int_A T\circ f\ \mu(dt) = T\ (\int_A f\ \mu(dt)). \qquad \square$$

A seguir demonstramos o teorema da Convergência Dominada para a integral de Bochner, na hipótese de convergência em medida.

Definição 1.34

Diremos que uma sequência (f_n) de funções definidas em Ω a valores em Y, <u>converge em medida a uma função f</u>, quando

$$\lim_n \mu\left\{ t \in \Omega \ / \ \|f_n(t) - f(t)\| \geq \varepsilon \right\} = 0, \qquad \forall\ \varepsilon > 0.$$

Teorema 1.35 (*teorema da Convergência Dominada*)

Seja (f_n) uma sequência de funções Bochner integráveis, definidas em Ω a valores em Y, as qual converge a f em medida.

Se existe uma função Lebesgue integrável $g:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|f_n\| \leq g$ μ-q.s., então f é Bochner integrável e,

$$\int_E f\ \mu(dt) = \lim_n \int_E f_n\ \mu(dt), \qquad \forall\ E \in \Sigma.$$

Demonstração:

Em consequência do teorema clássico da Convergência Dominada ([3]), temos que a função $\|f(t)\|$ é Lebesgue integrável e portanto f é Bochner integrável.

Por outro lado, tomando as funções reais $h_n(t) = \|f_n(t)-f(t)\|$ as quais convergem a zero em medida, e como $h_n(t) \le g(t) + \|f(t)\|$, temos pelo teorema do caso escalar que,

$$\lim_n \int_E \|f_n - f\| \; \mu(dt) = 0, \quad \forall\, E \in \Sigma.$$

Portanto segue-se que $\int_E f \; \mu(dt) = \lim_n \int_E f_n \; \mu(dt), \quad \forall\, E \in \Sigma.$ □

De forma análoga ao caso clássico, podemos desenvolver o conceito de espaço L^p (o teorema 1.32 já sugere a forma de definir este conceito).

Com efeito, se $1 \le p < \infty$, o símbolo $\mathfrak{L}^p(\mu, Y)$ denotará o espaço de funções Bochner integráveis, tais que $\int_\Omega \|f\|^p \; \mu(dt) < \infty$.

Como $\|f\|_p = (\int_\Omega \|f\|^p \mu(dt))^{\frac{1}{p}}$ define uma seminorma em $\mathfrak{L}^p(\mu, Y)$, de forma natural definimos o espaço de Banach $L^p(\mu, Y) = \mathfrak{L}^p(\mu, Y)/N$, onde $N = \{ f \in \mathfrak{L}^p(\mu, Y) \;/\; f \equiv 0 \;\; \mu\text{-q.s.} \}$.

No caso $p = \infty$, definimos $L^\infty(\mu, Y) = \mathfrak{L}^\infty(\mu, Y)/M$ onde $\mathfrak{L}^\infty(\mu, Y)$ é o espaço das funções Bochner integráveis essencialmente limitadas e M é o subespaço de $\mathfrak{L}^\infty(\mu, Y)$ das funções nulas μ-q.s.. Resulta então, que $L^\infty(\mu, Y)$ é um espaço de Banach.

CAPITULO II

REPRESENTAÇÃO DE FUNCIONAIS SOBRE $C(K,X)$

E OPERADORES SOBRE $C(K)$

II. 1. Introdução

A representação de operadores sobre espaços de funções contínuas tem sido um tema clássico de estudo em Análise, e como veremos, as medidas vetoriais tem aqui uma importante aplicação.

No caso escalar, se K é um conjunto compacto de Hausdorff, $C(K)$ representa as funções escalares, contínuas, e se $M(K)$

representa o espaço das medidas escalares, regulares, σ-aditivas e de variação limitada, definidas sobre a σ-álgebra de Borel de K, temos o teorema de Representação de Riesz ([6]), para funcionais sobre $C(K)$, que enunciamos abaixo

Teorema de Representação de Riesz

O dual do espaço $C(K)$ é isomorfo e isométrico ao espaço de medidas $\mathbf{M}(K)$. Se $\varphi \in C(K)^*$ e $\mu \in \mathbf{M}(K)$, então a isometría vem dada por,

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_K f \ \mu(dt), \qquad f \in C(K).$$

Em forma natural surgem as seguintes questões:

Existe um teorema de representação tipo Riesz para aplicações lineares contínuas, da forma:

(*i*) $T: C(K) \longrightarrow X$, onde X é um espaço de Banach qualquer,

(*ii*) $T: C(K,X) \longrightarrow \mathbb{C}$, onde $C(K, X)$ representa as funções contínuas definidas em K, a valores em X ?.

Neste capítulo, apresentamos dois resultados que respondem estas questões, a saber o teorema de Bartle-Dunford-Schwartz ([4]) para o primeiro caso, e o teorema de Singer ([17]) no segundo caso.

II. 2. Representação de operadores lineares em $C(K)$

II.2.1 Conjuntos fracamente compactos em $ca(\Sigma)$

Seja Σ uma σ-álgebra de subconjuntos de um conjunto Ω. Denotamos por $ca(\Sigma)$ o espaço das medidas a valores no corpo escalar, σ-aditivas, definidas sobre Σ.

$ca(\Sigma)$ é um espaço de Banach com norma dada pela variação, isto é $\|\lambda\| = |\lambda|(\Omega)$, $\lambda \in ca(\Sigma)$.

Observação 2.1:

A convergência fraca de uma sequência (λ_j) no espaço de Banach $ca(\Sigma)$ implica que a sequência de escalares $(\lambda_j(E))_j$ converge para cada $E \in \Sigma$. isto é devido ao fato que a aplicação $\varphi_E(\lambda) = \lambda(E)$ define um funcional em $ca(\Sigma)^*$, logo $\varphi_E(\lambda_j) = \lambda_j(E)$ converge no corpo escalar.

Definição 2.2

Seja E um espaço de Banach, e seja $A \subseteq E$. Diremos que A é relativamente fracamente compacto se o fecho de A na topología fraca é compacto.

O teorema de Eberlein-Smulian, ([6]) garante que num espaço de Banach E, um subconjunto A de E é relativamente fracamente compacto se, e somente se, ele é sequencialmente fracamente compacto. Isto é, toda sequência (x_n) em A, contém uma subsequência fracamente convergente em E. Em consequência disto, como $ca(\Sigma)$ é um espaço de Banach, usaremos indistintamente esses conceitos de compacidade fraca e sequencial.

Se μ e ν são medidas complexas definidas numa álgebra Σ, escreveremos $\mu \ll \nu$ para indicar que μ é absolutamente contínua com respeito a ν ou ν-absolutamente contínua, isto é $\lim\limits_{|\nu|(E)\to 0} \mu(E) = 0$.

Se considerarmos Σ como uma σ-álgebra e $\mu,\ \nu \in ca(\Sigma)$, temos que $\mu \ll \nu$ se, e somente se, $\mu(E) = 0$ cada vez que $|\nu|(E) = 0$ (ver [11], página 131).

<u>Lema 2.3</u>

Se (λ_i) é uma sequência em $ca(\Sigma)$, então existe uma medida positiva $\nu \in ca(\Sigma)$, tal que $\lambda_i \ll \nu$, $i = 1, 2, \ldots$.

<u>Demonstração</u>

Definamos uma medida $\nu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^+$ da forma,

$$\nu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{|\lambda_i|(E)}{1 + |\lambda_i|(\Omega)}, \qquad E \in \Sigma.$$

Obviamente ν é uma medida σ-aditiva e limitada, portanto $\nu \in ca(\Sigma)$.

Notemos que se $\nu(E) = 0$ então $|\lambda_i|(E) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$.

Por comentário acima isto implica que $\lim\limits_{\nu(E)\to 0} |\lambda_i|(E) = 0$.

Logo desde que, $|\lambda_i(E)| \leq |\lambda_i|(E)$ temos $\lim\limits_{\nu(E)\to 0} \lambda_i(E) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Ou seja $\lambda_i \ll \nu$, $i = 1, 2, \ldots$. $\square$

Teorema 2.4

Seja K um subconjunto de $ca(\Sigma)$ então, K é relativamente fracamente compacto se, e somente se, satisfaz as condições abaixo:

(i) K é limitado.

(ii) Para toda sequência decrescente (E_i) em Σ, com interseção vazia temos que $\lim_i \lambda(E_i) = 0$, uniformemente para $\lambda \in K$.

Demonstração:

($\rightarrow$) Por um lado, sabemos que toda sequência fracamente convergente é limitada, logo desde que K é sequencialmente fracamente compacto temos que toda sequência em K tem uma subsequência limitada. Por absurdo se mostra que K deve ser limitado, assim a condição (i) é satisfeita.

Agora suponhamos que (ii) não é válida, ou seja existe uma sequência (E_i) em Σ que decresce ao conjunto vazio e tal que o limite da sequência $(\lambda(E_i))$ não é uniforme. Em consequência, existem $\varepsilon > 0$ e subsequências $(E_{i(j)})_j$ de (E_i) e (λ_j) em K, tais que $|\lambda_j(E_{i(j)})| \geq \varepsilon$, $j = 1, 2, \ldots$. (1)

Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que (λ_j) é fracamente convergente, e em virtude da observação 2.1 temos que $(\lambda_j(E))_j$ converge para cada $E \in \Sigma$.

Além disso, sendo a medida ν como no lema 2.3, temos que cada λ_j é ν-absolutamente contínua.

Com estas condições sobre (λ_j) e pelo teorema de Vitali-Hahn-Saks (teorema 1.14) segue-se que $\lim_{\nu(E)\to 0} \lambda_j(E) = 0$, uniformemente para $j = 1, 2, \ldots$.

Consequentemente $\lim_j \lambda_j(E_{i(j)}) = 0$, o qual contradiz (1).

(⇐) Reciprocamente seja (λ_j) uma sequência arbitrária em K, desejamos provar que (λ_j) possui uma subsequência fracamente convergente em $ca(\Sigma)$. (2)

Seja ν uma medida como no lema anterior. É fácil ver que o espaço das medidas em $ca(\Sigma)$ as quais são ν-absolutamente contínuas é um subespaço fechado de $ca(\Sigma)$ contendo (λ_j).

Logo por uma aplicação do teorema de Hahn-Banach, (2) é equivalente a provar que (λ_j) possui uma subsequência fracamente convergente no subespaço das medidas ν-absolutamente contínuas.

O teorema de Radon-Nikodym ([3]) estabelece uma isometria entre o subespaço das medidas ν-absolutamente contínuas e o espaço clássico $L^1(\Omega,\Sigma,\nu)$, logo existe uma sequência (f_j) em $L^1(\Omega,\Sigma,\nu)$ de tal modo que $\lambda_j(E) = \int_E f_j \, \nu(dt)$.

Seja $\{ G_n : n=1,2, .. \}$ uma base da topología no corpo escalar. Definamos a σ-álgebra Σ_1 como sendo gerada pelos conjuntos $E_{j(n)} = f_j^{-1}(G_n)$ $n=1,2, ..$ $j=1,2, ...$. Notemos que cada $f_j \in L^1(\Omega,\Sigma,\nu)$ ainda pertence a $L^1(\Omega,\Sigma_1,\nu)$ o qual é um subespaço fechado. Em consequência para concluir a demonstração basta provar que a sequência (f_j) possui uma subsequência fracamente convergente em $L^1(\Omega,\Sigma_1,\nu)$.

Com efeito, seja Σ_2 a álgebra gerada pelos conjuntos $E_{j(n)}$ $n=1,2, ..$ $j=1,2, ...$ Desde que Σ_2 é uma coleção enumerável, podemos escolher (usando o processo diagonal) uma subsequência tal que as sequências de escalares $(\lambda_{j(k)}(E))_k$ convergem para cada

$E \in \Sigma_2$. Considere a coleção $\Sigma_3 = \{E \in \Sigma_1 \,/\, (\lambda_{j(k)}(E))_k \text{ converge}\}$, então temos as inclusões $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_3 \subseteq \Sigma_1$. Veremos que a familia Σ_3 é uma σ-álgebra:

Se $E \in \Sigma_3$ então $\lambda_{j(k)}(\Omega \setminus E) = \lambda_{j(k)}(\Omega) - \lambda_{j(k)}(E)$, logo $(\lambda_{j(k)}(\Omega \setminus E))_k$ converge, ou seja $\Omega \setminus E \in \Sigma_3$.

Por outro lado, seja (E_i) uma sequência em Σ_3, chamamos $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Notemos que $(A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i)_n$ decresce ao conjunto vazio, logo por (ii) da hipótese temos que $\lim_n \lambda_{j(k)}(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \lambda_{j(k)}(A)$, uniformemente para $k \in \mathbb{N}$. Além disso, $\lim_k \lambda_{j(k)}(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)$ existe para cada $n \in \mathbb{N}$. Isto garante a existência de $\lim_k \lambda_{j(k)}(A)$, portanto $A \in \Sigma_3$.

Assim, Σ_3 é uma σ-álgebra e consequentemente $\Sigma_3 = \Sigma_1$.

Tomando $x^* \in L^1(\Omega, \Sigma_1, \nu)^*$ e pelo teorema de Representação de Riesz, existe $g \in L^\infty(\Omega, \Sigma_1, \nu)$ tal que $x^*(f_{j(k)}) = \int_\Omega f_{j(k)} g \; \nu(dt)$.

Por argumentos de convergência e linearidade, basta analisar a convergência de $(x^* f_{j(k)})_k$ assumindo que g é uma função característica. Deste modo, seja $g = \chi_E$ com $E \in \Sigma$ então, $x^*(f_{j(k)}) = \int_E f_{j(k)} \chi_E \; \nu(dt) = \lambda_{j(k)}(E)$, portanto converge. Provamos desta forma que $(\lambda_{j(k)})_k$ é fracamente convergente em $L^1(\Omega, \Sigma_1, \nu)$. □

Consideremos agora uma medida vetorial $G: \Sigma \longrightarrow X$, tal que para cada $x^* \in X^*$, $x^* G$ define uma medida escalar, σ-aditiva, ou seja $x^* G \in ca(\Sigma)$. Desta definição, resultam as seguintes consequências para G.

Proposição 2.5

Se $G: \Sigma \longrightarrow X$ é uma medida vetorial, tal que $x^{*}G \in ca(\Sigma)$, para todo funcional $x^{*} \in X^{*}$, então

(*i*) G tem semivariação limitada.

(*ii*) G é uma medida vetorial σ-aditiva. (*teorema de Orlicz-Pettis*)

Demonstração:

(*i*) Como $x^{*}G$ é limitada, logo para cada $x^{*} \in X^{*}$

$$\sup \left\{ \, |x^{*}G(A)| \ / \ A \in \Sigma \, \right\} < \infty \, .$$

Então pelo Principio de Limitação Uniforme, temos que

$$\sup \left\{ \, \| G(A) \| \ / \ A \in \Sigma \, \right\} < \infty \, .$$

Da proposição 1.8, vemos que $\|G\|(\Omega) < \infty$.

(*ii*) a demonstração deste teorema, aparece em [11], página 318.

Agora como aplicação do teorema 2.4 temos o seguinte resultado.

Corolário 2.6

O conjunto $S = \left\{ \, x^{*}G \ / \ \|x^{*}\| \le 1 \, \right\}$ é relativamente fracamente compacto em $ca(\Sigma)$.

Demonstração:

Provemos que S satisfaz as condições do teorema 2.4,

(*i*) Pela proposição 2.5 (*i*), vemos claramente que S é limitado pois $\|x^*G\| = |x^*G|(\Omega) \leq \|G\|(\Omega)$, $\forall\, x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$.

(ii) Seja (E_i) uma sequência decrescente com interseção vazia.

Pela proposição 2.5(ii) G é σ-aditiva, logo $\lim_i G(E_i) = 0$.

Como $|x^*G(E_i)| \leq \|G(E_i)\|$, $\forall\, x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$ $\forall\, i \in \mathbb{N}$ (1)

segue que $\lim_i x^*G(E_i) = 0$ uniformemente para $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$.

Então pelo teorema 2.4 temos que S é relativamente fracamente compacto em $ca(\Sigma)$. □

II.2.2. Representação de operadores lineares em $C(K)$

K denotará um conjunto compacto e Hausdorff. Indicaremos por $C(K)$ o espaço das funções contínuas com a norma do supremo. $M(K)$ denotará o espaço das medidas escalares, σ-aditivas, regulares, definidas sobre a σ-álgebra dos subconjuntos de Borel de K.

Definição 2.7

Sejam X, Y espaços de Banach e $T: X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado.

(a) Diremos que *T é fracamente compacto* se $T(B)$ é um conjunto relativamente fracamente compacto em Y, onde B é a bola unitaria fechada em X.

(b) Chamamos *adjunto de T* ao operador $T^*: Y^* \longrightarrow X^*$ onde para $y^* \in Y^*$ o elemento $T^*(y^*) \in X^*$ está dado por:

$$\langle T^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, T(x)\rangle, \quad x \in X.$$

A seguir enunciamos alguns resultados sobre operadores fracamente compactos, que serão de grande utilidade para nosso propósito. As provas deles se encontram em [11].

Teorema 2.8

Seja T um operador linear, limitado. Então, T é fracamente compacto se, e somente se, T^* é fracamente compacto.

Teorema 2.9

Seja $T: X \longrightarrow Y$ um operador linear limitado. Então T é fracamente compacto se, e somente se, o operador $T^{**}: X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ leva X^{**} em Y. (onde Y é identificado como subespaço de Y^{**} pela inclusão natural).

O seguinte resultado fornece uma representação integral de um operador linear, limitado, $T: C(K) \longrightarrow X$.

Teorema 2.10

Se $T: C(K) \longrightarrow X$ é um operador linear limitado, então existe uma única medida vetorial com semivariação limitada $G: \Sigma \longrightarrow X^{**}$, satisfazendo

(a) Para cada $x^* \in X^*$, $x^* \circ G \in M(K)$, (note que $x^* \in X^* \subseteq X^{***}$, então, $x^* \circ G(E) = \langle G(E), x^* \rangle$).

(b) A aplicação que leva $x^* \in X^* \longrightarrow x^* \circ G \in M(K)$ é contínua, onde X^* e $M(K)$ têm as topologías fraca estrela respectivas.

(c) $x^{*}T(f) = \int_K f\,(x^{*}\circ G)(dt)$, para todo $x^{*}\in X^{*}$ e $f \in C(K)$.

(d) $\|T\| = \|G\|(K)$.

Reciprocamente, se $G:\Sigma \longrightarrow X^{**}$ é uma medida vetorial de semivariação limitada satisfazendo (a) e (b), então (c) define um operador $T: C(K) \longrightarrow X$ linear limitado, com norma dada por (d).

<u>Demonstração:</u>

Observemos que o operador $T^{*}:\ X^{*}\longrightarrow C(K)^{*}$ leva $x^{*}\longrightarrow x^{*}T$.

Logo pelo teorema de Riesz $C(K)^{*} = M(K)$, então $T^{*}(x^{*})$ determina uma única medida $\lambda_{x^{*}} \in M(K)$.

Para cada $E \in \Sigma$, consideremos o funcional $\phi_E \in M(K)^{*}$ dado por $\phi_E(\lambda) = \lambda(E)$.

Definamos $G:\Sigma \longrightarrow X^{**}$ como $G(E) = T^{**}(\phi_E)$.

Isto significa que para cada $E \in \Sigma$ e $x^{*}\in X^{*}$ temos, $\langle G(E),\ x^{*}\rangle = \langle \phi_E,\ T^{*}(x^{*})\rangle = \lambda_{x^{*}}(E)$, por conseguinte $x^{*}\circ G \in M(K)$ e também, $T(f) = \langle T^{*}(x^{*}),\ f\rangle = \int_{\Omega} f\,(x^{*}\circ G)(dt)$, isto prova (a) e (c).

Por outro lado, é claro que o operador adjunto $T^{*}: X^{*} \longrightarrow C(K)^{*}$ é continuo, com as topologías fraca estrela sobre X^{*} e $C(K)^{*}$, logo como $T^{*}(x^{*})$ se identifica com $x^{*}\circ G$, podemos dizer que a aplicação dada em (b) é contínua.

Para provar (d) note que, $\|T\| = \|T^{*}\| = sup\left\{|T^{*}(x^{*})| \ / \ \|x^{*}\| \le 1\right\} = sup\left\{|x^{*}\circ G|(K) \ / \ \|x^{*}\| \le 1\right\}$, logo pela nota após a proposição 1.18 temos que $\|T\| = \|G\|(K)$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente suponha que (a) e (b) estejam satisfeitas.

Pela continuidade da aplicação dada em (b), temos que para cada $f \in C(K)$ o funcional linear $x^* \in X^* \to \int_K f\, (x^* \circ G)(dt)$ (3) é fraca estrela-contínuo. Logo existe um único elemento $x_f \in X$, tal que o funcional (3) é da forma $x^* \in X^* \to \langle x^*, x_f \rangle$. ([5])

Assim (c) define um único operador $T: C(K) \to X$ dado por $T(f) = x_f$. É fácil ver que T é linear.

Observe que, $\|T\| = sup \left\{ Sup \left\{ |x^* T(f)| \ / \ \|x^*\| \leq 1 \right\} \ / \ \|f\|_\infty \leq 1 \right\}$ $= sup \left\{ \|x^* T\| \ / \ \|x^*\| \leq 1 \right\} = sup \left\{ |x^* \circ G|(K) \ / \ \|x^*\| \leq 1 \right\} = \|G\|$.

Portanto T é um operador limitado, com norma dada por (d). □

Definição 2.11

Se $T: C(K) \to X$ é um operador limitado, então a medida G que satisfaz (a)-(c) do teorema 2.10 é chamada medida representante de T.

O próximo exemplo mostra que o teorema 2.10 não pode ser melhorado, no sentido que em geral, a medida $G: \Sigma \to X^{**}$ não é σ-aditiva nem toma valores em X.

Exemplo 2.12

Mostraremos um operador linear limitado cuja medida representante não é σ-aditiva nem toma valores em X.

Sejam $K = [0,1]$,

Σ = a σ-álgebra dos conjuntos borelianos em $[0,1]$, e

$X = c_0 = \left\{ (x_n) \ / \ \lim_n x_n = 0 \right\} \subseteq \ell_\infty$.

Defina $T(f) = \left(f\left(\frac{1}{n} \right) - f(0) \right)_n \in c_0$.

Claramente T é um operador linear limitado, logo T é representado por uma medida vetorial $G:\Sigma \longrightarrow c_\circ^{**} = \ell_\infty$, definida por $\langle G(E), x^*\rangle = \phi_E(T^*(x^*))$.

Tomemos a base canônica $\{e_n : n=1, 2, \ldots\}$ de ℓ_1.

E fácil ver que o operador $T^*(e_n) \in C(K)^*$ é representado pela medida escalar $\nu_n(E) = \chi_E(\frac{1}{n}) - \chi_E(0)$.

Logo $\langle G(E), e_n\rangle = \phi_E(T^*(e_n)) = \chi_E(\frac{1}{n}) - \chi_E(0) = \nu_n(E)$.

Assim, $G(E) = (\chi_E(\frac{1}{n}) - \chi_E(0))_n$ é a medida representante de T.

Agora veremos que G não toma valores em $c_\circ$. Efetivamente, tomando o conjunto boreliano $E = \{ \frac{1}{2i} \ / \ i = 1, 2, \ldots\} \subseteq [0,1]$ temos que $G(E) = (0, 1, 0, 1, \ldots) \in \ell_\infty$, mas $G(E) \not\in c_\circ$.

Por outro lado, temos que G não é σ-aditiva. Para provar esta afirmação considere a sequência disjunta de elementos de Σ $E_i = \{ \frac{1}{i} \}$ $i = 1,2,\ldots$.

Logo $G(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = (1, 1, \ldots)$, mais $G(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ não converge quando $n \to \infty$. Portanto G não é σ-aditiva.

<u>Teorema 2.13</u> (*Bartle-Dunford-Schwartz*)

Se $T: C(K) \longrightarrow X$ é um operador linear, limitado, fracamente compacto, então existe uma única medida vetorial σ-aditiva, de semivariação limitada $G:\Sigma \longrightarrow X$, que satisfaz:

(*a*) $T(f) = \int_K f.G(dt)$, $f \in C(K)$, onde a integral está dada segundo a definição 1.25.

(*b*) $\|T\| = \|G\|(K)$.

Reciprocamente, se $G:\Sigma \longrightarrow X$ é uma medida vetorial σ-aditiva e se T está definido por (a), então $T: C(K) \longrightarrow X$ é um operador fracamente compacto cuja norma está dada por (b).

<u>Demonstração:</u>

Suponhamos que T é fracamente compacto. Seja G a medida definida no teorema 2.10.

Pelo teorema 2.9, $T^{**}(C(K)^{*}) \subseteq X$, e como $G(E) = T^{**}(\phi_E)$ (veja a demonstração do teorema 2.10), então G toma valores em X.

Da parte (a) do teorema 2.10, segue que $x^{*}G \in M(K)$, $x^{*}\in X^{*}$; em particular $x^{*}G \in ca(\Sigma)$, $\forall\ x^{*}\in X^{*}$. Logo, pela proposição 2.5 decorre que G é σ-aditiva, e tem semivariação limitada.

Desde que $x^{*}T(f) = \int_K f\ x^{*}G(dt)$, $\forall\ x^{*} \in X^{*}$, temos que $T(f) = \int_K f.G(dt)$.

Reciprocamente, seja $G:\Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial σ-aditiva e seja T definido por (a).

Note que $T^{*}(x^{*}) = x^{*}T \in C(K)^{*}$ é representado pela medida $x^{*}G \in M(K) \subseteq ca(\Sigma)$. Logo pelo corolário 2.6, o conjunto $\{T^{*}(x^{*}) \ /\ x^{*}\in X^{*},\ \|x^{*}\| \le 1\}$ é relativamente fracamente compacto em $ca(\Sigma)$. Portanto T^{*} e consequentemente T, são fracamente compactos. □

II. 3. <u>Representação de funcionais em $C(K,X)$</u>

Sejam X um espaço de Banach e K um conjunto compacto de

Hausdorff. $C(K)$ representará o espaço de Banach das funções complexas, contínuas sobre K com a norma usual. Por $C(K,X)$ denotaremos ao espaço de Banach das funções contínuas, definidas sobre K, a valores em X, com a norma dada por

$$\|f\|_{\infty} = Sup \left\{ \|f(t)\| \ / \ t \in K \right\}.$$

II. 3. 1. O espaço $C(K)\otimes X$

Vamos introduzir algumas noções básicas sobre o produto tensorial.

Sejam E, F, G espaços de Banach denotaremos por $B(E,F,G)$ ao espaço das aplicações bilineares contínuas sobre $E\times F$ em G, e por $B(E,F)$ ao espaço das formas bilineares contínuas sobre $E\times F$.

Consideremos a aplicação $\chi : E\times F \longrightarrow B(E,F)^*$, dada por $\chi(x,y) = u_{xy}$, onde $B(E,F)^*$ representa o dual topológico de $B(E,F)$ e o elemento $u_{xy} \in B(E,F)^*$ está dado por $u_{xy}(f) = f(x,y)$, $f \in B(E,F)$. χ é chamada aplicação bilinear canônica.

Definição 2.14

O Produto Tensorial de E e F, é o espaço gerado por $\chi(E\times F)$, ou seja

$$E\otimes F = [\ \chi(E\times F)\ ].$$

Denotando o elemento u_{xy} por $x\otimes y$, podemos descrever o produto tensorial como

$$E\otimes F = \left\{ u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \;/\; x_i \in E,\ y_i \in F \right\}.$$

Se percebe facilmente que a representação de cada elemento $u \in E\otimes F$, não é única.

Uma das principais vantagens do produto tensorial é que ele permite considerar espaçõs vetoriais de aplicações bilineares como espaçõs vetoriais de aplicações lineares. A seguinte proposição estabelece esta propriedade.

Proposição 2.15 (*Propriedade Universal*)

Seja $f\colon E\times F \longrightarrow G$ uma aplicação bilinear, então existe uma única aplicação linear $h\colon E\otimes F \longrightarrow G$ tal que o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} E\times F \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\chi"'] & & G \\ & E\otimes F \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Em particular, se $G = \mathbb{C}$ podemos dizer que existe um isomorfismo entre os espaços $(E\otimes F)^{*}$ e $B(E,F)$.

Observações 2.16

(*a*) O espaço $E\otimes F$ pode ser considerado como subespaço de $B(E^{*},F^{*})$, identificando cada elemento $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E\otimes F$ com a forma bilinear sobre $E^{*}\times F^{*}$, dada por

$$u(x^{*},y^{*}) = \sum_{i=1}^{n} x^{*}(x_i)\ y^{*}(y_i); \qquad x^{*} \in E^{*},\ y^{*} \in F^{*}.$$

(*b*) Pela própia definição, $E\otimes F$ é um subespaço linear de $B(E,F)^{*}$.

Estas observações são úteis para introduzir uma estrutura de espaço normado em $E\otimes F$.

Definições 2.17

(*a*) Denotamos por ε à norma induzida sobre $E\otimes F$, pelo espaço de Banach $B(E^*, F^*)$. Assim, se $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ então $\varepsilon(u)$ está dada por

$$\varepsilon(u) = Sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} x^*(x_i) y^*(y_i) \right| \; / \; x^* \in E^*, \; \|x^*\| \le 1; \; y^* \in F^*, \; \|y^*\| \le 1 \right\}.$$

O completamento do espaço $(E\otimes F, \varepsilon)$ é chamado Produto Tensorial Injetivo e este completado indicamos por $E \hat{\otimes}_{\varepsilon} F$.

(*b*) Denotamos por π à norma induzida sobre $E\otimes F$ pelo espaço de Banach $B(E,F)^*$. Se $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, então $\pi(u)$ está dada por

$$\pi(u) = Sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \right| \; / \; f \in B(E,F), \; \|f\| \le 1 \right\}.$$

O completamento do espaço $(E\otimes F, \pi)$ é chamado Produto Tensorial Projetivo e é denotado por $E \hat{\otimes}_{\pi} F$.

No que segue estudamos o caso particular $E = C(K)$ e $F = X$.

Dado $t \in K$, definimos o funcional $\delta_t \in C(K)^*$ por $\delta_t(f) = f(t)$.

Claramente δ_t é um funcional linear sobre $C(K)$. Desde que $|\delta_t(f)| = |f(t)| \le \|f\|_\infty$, verificamos que δ_t é contínuo e em particular $\|\delta_t\| \le 1$. Notamos também que

$$\|f\|_\infty = Sup \left\{ |\delta_t(f)| \; / \; t \in K \right\}.$$

Proposição 2.18

Seja $u = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i \in C(K) \otimes X$, então

$$\varepsilon(u) = \mathrm{Sup} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \delta_t(f_i)\ \psi(x_i) \right| \ / \ t \in K,\ \psi \in X^*,\ \|\psi\| \leq 1 \right\}.$$

Demonstração:

Desde que $\delta_t \in C(K)^*$ e $\|\delta_t\| \leq 1$, temos da definição de ε que

$$\varepsilon(u) \geq \mathrm{Sup} \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \delta_t(f_i)\ \psi(x_i) \right| \ / \ t \in K,\ \psi \in X^*,\ \|\psi\| \leq 1 \right\}.$$

Por outro lado, para todo $\psi_\circ \in X^*$, $\|\psi_\circ\| \leq 1$

$\mathrm{Sup}\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \delta_t(f_i)\psi(x_i) \right| \ / \ t \in K,\ \psi \in X^*,\ \|\psi\| \leq 1 \right\} \geq \mathrm{Sup}\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \delta_t(f_i)\psi_\circ(x_i) \right| \ / \right.$ $\left. t \in K \right\} = \mathrm{Sup}\left\{ \left| \delta_t\left(\sum_{i=1}^{n} \psi_\circ(x_i) f_i \right) \right| \ / \ t \in K \right\} = \left\| \sum_{i=1}^{n} \psi_\circ(x_i) f_i \right\|_\infty =$ $\mathrm{Sup}\left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi(f_i)\ \psi_\circ(x_i) \right| \ / \ \varphi \in C(K)^*,\ \|\varphi\| \leq 1 \right\}.$

Tomando supremo sobre os funcionais $\psi_\circ \in X^*$, $\|\psi_\circ\| \leq 1$, temos a desigualdade contrária. □

Teorema 2.19

O espaço $C(K) \hat{\otimes}_\varepsilon X$ é isometricamente isomorfo a $C(K,X)$.

Demonstração:

Seja $u = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i \in C(K) \otimes X$, definamos $\varphi_u : K \longrightarrow X$ como $\varphi_u(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) x_i$, $t \in K$. Claramente $\varphi_u \in C(K,X)$.

Considere a aplicação $\varphi : C(K) \otimes_\varepsilon X \longrightarrow C(K,X)$ dada por $\varphi(u) = \varphi_u$, $u \in C(K) \otimes_\varepsilon X$, e verifiquemos que

(i) φ é bem definida:

Isto é claro se observarmos que $\varphi_u(t) = u(h_t)$ onde h_t é a aplicação bilinear tal que $h_t(f,x) = f(t)x$, $f \in C(K)$, $x \in X$.

(ii) φ é injetora:

Seja $u = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes x_i$, tal que $\varphi_u \equiv 0$.

Sempre podemos supor que os vetores $x_1, x_2, \dots, x_n$ são $l.i.$ e desde φ_u independe da representação de u, então

$\varphi_u(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\ x_i = 0$, $\forall\ t \in K$, logo $f_i(t) = 0$, $\forall\ i=1, \dots, n$; $\forall\ t \in K$. Portanto $u = 0$.

(iii) φ é uma isometría sobre sua imagem:

$$\|\varphi_u\|_\infty = Sup\ \{\|\varphi_u(t)\|\ /\ t \in K\} = Sup\ \{\|\sum_{i=1}^{n} f_i(t)x_i\|\ /\ t \in K\}$$

$$= Sup\ \{\ |x^*(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)x_i)|\ /\ t \in K,\ x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leq 1\}$$

$$= Sup\ \{|\sum_{i=1}^{n} \delta_t(f_i)\ x^*(x_i)|\ /\ t \in K,\ x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leq 1\}.$$

Logo pela proposição anterior $\|\varphi_u\| = \varepsilon(u)$.

Pela densidade de $C(K) \otimes_\varepsilon X$ em $C(K) \hat{\otimes}_\varepsilon X$ podemos considerar $\tilde{\varphi}$: $C(K) \hat{\otimes}_\varepsilon X \longrightarrow C(K,X)$ a extensão contínua de φ ao espaço completado $C(K) \hat{\otimes}_\varepsilon X$. Logo, para provar que $\tilde{\varphi}$ é sobreyetiva basta mostrar que $\varphi(C(K)\otimes X)$ é denso em $C(K,X)$.

Com efeito, sejam $f \in C(K,X)$ e $\eta > 0$.

Como $f(K) \subseteq X$ é compacto, então existem um número finito de bolas abertas em X, digamos $B(x_1,\eta)$, $B(x_2,\eta)$, $\dots$, $B(x_n,\eta)$ as quais cobrem $f(K)$. Fazendo uso do teorema da Partição da unidade ([6]), obtemos uma coleção de funções contínuas $h_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que: $0 \leq h_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} h_i \equiv 1$, onde o suporte de cada h_i está contido na bola $B(x_i, \eta)$.

Definido $g_i = h_i \circ f$, é fácil ver que $g_i \in C(K)$, $0 \leq g_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} g_i \equiv 1$.

Seja agora $u \in C(K) \otimes X$ dado por $u = \sum_{i=1}^{n} g_i \otimes x_i$, então $\varphi_u(t) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t) x_i$, $t \in K$. Mostraremos que $\| f - \varphi_u \|_\infty < \eta$.

Efetivamente,

$$\|f(t) - \varphi_u(t)\| = \| \sum_{i=1}^{n} g_i(t) f(t) - \sum_{i=1}^{n} g_i(t) x_i \| \leq \sum_{i=1}^{n} |g_i(t)| \|f(t) - x_i\|.$$

Como $|f(t) - x_i| \leq \eta$ quando $f(t) \in B(x_i, \eta)$ e $|g_i(t)| = 0$, se $f(t) \notin B(x_i, \eta)$, então $|f(t) - \varphi_u(t)| \leq \eta$, $\forall\ t \in K$. Portanto $\|f - \varphi_u\|_\infty \leq \eta$, isto prova que $f(C(K) \otimes X)$ é denso em $C(K, X)$. $\square$

II. 3. 2. <u>O dual do espaço $C(K, X)$</u>

Indicaremos por Σ a σ-álgebra dos subconjuntos de Borel de K.

<u>Observação 2.20</u>

Seja uma medida vetorial $m: \Sigma \longrightarrow X^*$. Para cada $x \in X$, representaremos por m_x à medida escalar dada por

$$m_x(A) = \langle m(A), x \rangle, \quad A \in \Sigma.$$

É fácil verificar que m_x herda as seguintes propriedades de m:

(a) Se m é σ-aditiva então m_x é σ-aditiva.

(b) Se m é de variação limitada então m_x é de variação limitada e $|m_x|(A) \leq \|x\| \; |m|(A)$.

Como consequência direta da linearidade de cada funcional $m(A)$, temos que

(c) $m_{x+y} = m_x + m_y$ e

$m_{\alpha x} = \alpha m_x$, $\forall \; x, \; y \in X; \; \alpha \in \mathbb{C}$.

(d) Sejam $m: \Sigma \longrightarrow X^*$ e $n: \Sigma \longrightarrow X^*$ medidas vetoriais, então

$$(m + n)_x = m_x + n_x, \quad \forall \; x \in X.$$

Definição 2.21

Seja $m: \Sigma \longrightarrow X^*$ uma medida vetorial. Diremos que

(a) m é completamente aditiva, se m_x é σ-aditiva $\forall \; x \in X$.

(b) m é completamente regular, se m_x é regular, $\forall \; x \in X$.

Representamos por $\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ à classe de todas as medidas $m: \Sigma \longrightarrow X^*$ completamente aditivas, completamente regulares e de variação limitada. Desta forma, $\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ é um espaço linear normado com a norma dada por $\|m\| = |m|(K)$.

Proposição 2.22

$(\mathfrak{M}(\Sigma, X^*), \; \| \; \|)$ é um espaço de Banach.

Demonstração:

$\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ é um subespaço do espaço das medidas vetoriais de variação limitada $bv(\Sigma, X^*)$, e desde que este é um espaço de Banach então basta provar que $\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ é fechado.

Seja (m_j) uma sequência em $\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ que converge a $m \in bv(\Sigma, X^*)$.

Sejam (A_i) uma sequência disjunta em Σ, $x \in X$ e chamemos $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Desde que $|(m_j)_x(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) - m_x(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)| = |(m_j - m_x)(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)| \le \|x\|\ |m_j - m|(K)$, temos que

$\lim_j (m_j)_x(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = m_x(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$, uniformemente para todo $n \in \mathbb{N}$. (1)

Além disso, notamos que $\lim_n (m_j)_x(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = (m_j)_x(A)$, e em particular existe para cada $j \in \mathbb{N}$. (2)

De (1) e (2) resulta que

$$m_x(A) = \lim_j (m_j)_x(A) = \lim_n m_x(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m_x(A_i).$$

Portanto m_x é σ-aditiva.

Agora veremos que m_x é uma medida regular. Com efeito, observe que

$|m_x(S)| \le |m_x(S) - (m_j)_x(S)| + |(m_j)_x(S)| \le \|x\|\ \|m - m_j\| + |m_{jx}(S)|$, $\forall\ S \in \Sigma$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$.

Dado $A \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|m - m_N\| \le \frac{\varepsilon}{2\|x\|}$.

Como $(m_N)_x$ é regular, então existem conjuntos F, $O \subseteq K$, onde F é fechado, O é aberto e $F \subseteq A \subseteq O$, tais que $|(m_N)_x(S)| \le \frac{\varepsilon}{2}$, $S \subseteq O \setminus F$.

Logo $|m_x(S)| < \varepsilon$, $\forall\ S \subseteq O \setminus F$. Isto prova que m_x é regular.

Portanto temos que $m \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$. $\square$

Teorema 2.23 ($\mathcal{I}$. $\mathcal{S}$inger)

$C(K, X)^*$ é isomorfo e isométrico ao espaço $\mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$. Onde a isometría é dada por,

$$\langle\phi, f\rangle = \int_K f\cdot m(dt), \quad \phi \in C(K, X)^*, \quad m \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*).$$

A integral considerada aqui é a integral elementar de Bartle (ver capítulo I).

Demonstração:

Pela densidade de $C(K)\otimes_\varepsilon X$ em $C(K, X)$ (teorema 2.19), basta provar que $(C(K)\otimes_\varepsilon K)^* \cong \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$.

Seja pois, $\phi \in (C(K)\otimes_\varepsilon X)^*$. Para cada $x \in X$, consideremos o funcional $\phi_x \in C(K)^*$ definido por $\langle\phi_x, f\rangle = \langle\phi, f\otimes x\rangle$. Notemos que $\phi_x \in C(K)^*$ e que $\|\phi_x\| \leq \|x\|\ \|\phi\|$, logo pelo teorema de representação de Riesz (ver II.1), existe uma única medida escalar μ_x σ-aditiva, regular e tal que

$$\langle\phi_x, f\rangle = \int_K f\ \mu_x(dt), \quad \forall\ f \in C(K). \tag{1}$$

Definamos a aplicação de conjuntos $m_\Phi : \Sigma \longrightarrow X^*$ por,

$$\langle m_\Phi(A), x\rangle = \mu_x(A), \quad A \in \Sigma,\ x \in X.$$

Observamos que m_Φ está bem definida, pois a medida μ_x é única. Agora verificaremos que efetivamente m_Φ toma valores em X^*.

De fato, dados $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ notamos que,

$$\int_K f\ \mu_{\alpha x+y}(dt) = \langle\phi, f\otimes(\alpha x+y)\rangle = \alpha\langle\phi, f\otimes x\rangle + \langle\phi, f\otimes y\rangle$$

$$= \alpha\int_K f\ \mu_x(dt) + \int_K f\ \mu_y(dt) = \int_K f\ (\alpha\mu_x+\mu_y)(dt), \quad \forall\ f\in C(K).$$

Logo pela unicidade da representação integral, resulta que $\mu_{\alpha x+y} = \alpha\mu_x + \mu_y$. Isto prova que $m_\Phi(A)$ é um funcional linear.

Por outro lado, $|\langle m_\Phi(A), x\rangle| = |\mu_x(A)| \le |\mu_x|(K) = \|\phi_x\| \le \|\phi\|\ \|x\|$. Logo $\|m_\Phi(A)\| \le \|\phi\| < \infty$, portanto $m_\Phi(A)$ é contínuo.

Assim temos provado que $m_\Phi(A) \in X^*$.

Mais ainda, afirmamos que $m_\Phi \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$. Levando em conta que $m_\Phi x = \mu_x$ segue que m_Φ é completamente aditiva e completamente regular. Além disso, se $A_1, \ldots, A_n$ é uma partição de K em elementos disjuntos de Σ, então dado $\varepsilon > 0$ existem $x_1, \ldots, x_n \in X$ com $\|x_i\| = 1$, $i=1, 2, \ldots, n$ e tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \|m_\Phi(A)\| - \varepsilon \le \sum_{i=1}^{n} |\langle m_\Phi(A), x_i\rangle| = \sum_{i=1}^{n} \langle m_\Phi(A), z_i\rangle.$$

A última igualdade é válida, se escolhermos convenientemente x_i ou $-x_i$.

Note que $\langle m_\Phi(A_i), z_i\rangle = \mu_{z_i}(A_i) = \int_K \chi_{A_i} \mu_{z_i}(dt)$, $i = 1, \ldots, n$,

logo $$\sum_{i=1}^{n} \|m_\Phi(A_i)\| - \varepsilon \le \sum_{i=1}^{n} \int_K \chi_{A_i} \mu_{z_i}(dt). \qquad (2)$$

Por outro lado, o espaço $C(K)$ é denso em cada um dos espaços clássicos $L^1(\mu_{z_i})$, $i = 1, \ldots, n$, em consequência, existem sequências (g_j^1), (g_j^2), $\ldots$, (g_j^n) de funções em $C(K)$ tais que,

$$\int_K \chi_{A_i} \mu_{z_i}(dt) = \lim_j \int_K g_j^i\ \mu_{z_i}(dt), \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (3)$$

Usando (3) e (1) em (2), temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \|m_\Phi(A_i)\| - \varepsilon \le \lim_j \sum_{i=1}^{n} \int_K g_j^i\ \mu_{z_i}(dt) = \lim_j \sum_{i=1}^{n} \phi_{z_i}(g_j^i) =$$

$$\lim_j \sum_{i=1}^{n} \phi(g_j^i \otimes z_i) = \lim_j \phi\Big(\sum_{i=1}^{n} g_j^i \otimes z_i\Big) \le \|\phi\| \lim_j \Big\|\sum_{i=1}^{n} g_j^i \otimes z_i\Big\|_\infty.$$

Para obter $|m_\Phi|(K) \le \|\phi\|$, é suficiente construir sequências (h_j^1), $\ldots$, (h_j^n) em $C(K)$, satisfazendo (3) e tais que

$$\| \sum_{i=1}^{n} h_j^i \otimes z_i \|_\infty \leq 1, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}. \qquad (4)$$

Considerando $\nu = \sum_{i=1}^{n} |\mu_{z_i}|$ e a densidade de $C(K)$ em $L^1(\nu)$ podemos supor que (g_j^i) converge pontualmente ν-q.s. a χ_{A_i} (passando a uma subsequência se for necessário). Note que convergência ν-q.s. implica na convergência μ_{z_i}-q.s. de (g_j^i) para cada $i = 1, \ldots, n$.

Definamos as funções h_j^i, da seguinte forma:

$$h_j^i(t) = \frac{g_j^i(t)}{\frac{1}{j} + \| \Sigma_{i=1}^{n} g_j^i \otimes z_i \|_\infty}, \quad t \in K, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Por um lado temos que h_j^i satisfaz,

$$\| \sum_{i=1}^{n} h_j^i \otimes z_i \|_\infty = \frac{\| \Sigma_{i=1}^{n} g_j^i \otimes z_i \|_\infty}{\frac{1}{j} + \| \Sigma_{i=1}^{n} g_j^i \otimes z_i \|_\infty} \leq 1, \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, para cada $i = 1, \ldots, n$

$$\lim_j h_j^i(t) = \frac{\chi_{A_i}(t)}{\| \Sigma_{i=1}^{n} \chi_{A_i} z_i \|_\infty} = \chi_{A_i}(t), \quad \mu_{z_i} - \text{q. s.}.$$

Logo, pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos

$$\int_K \chi_{A_i} \mu_{z_i}(dt) = \lim_j \int_K h_j^i \, \mu_{z_i}(dt), \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Assim, h_j^i satisfaz as condições desejadas, em consequência $|m_\Phi|(K) \leq \|\phi\|$, e em particular m_Φ tem variação limitada.

Desta forma, temos uma medida vetorial $m_\Phi \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ e temos que se verifica $\langle \phi, f\rangle = \int_K f\cdot m_\Phi(dt)$, $\forall f \in C(K)\otimes X$.

Agora provaremos que a aplicação $J : (C(K)\otimes_\varepsilon X)^* \longrightarrow \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$, que leva ϕ em m_Φ é uma isometría.

Com efeito, vejamos que

(i) J está bem definida. Consideremos $\phi \in (C(K)\otimes_\varepsilon X)^*$, e suponhamos que existe $m \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ tal que $\langle \phi, f\rangle = \int_K f\cdot m(dt)$, $\forall f \in C(K)\otimes X$. Então para cada $x \in X$

$$\phi_x(f) = \phi(f\otimes x) = \int_K f\otimes x.\, m(dt) = \int_K f\ m_x(dt).$$

Logo pela unicidade na representação integral de ϕ_x resulta que $m_x \equiv \mu_x$, e portanto $m \equiv m_\Phi$.

(ii) J é linear. Sejam $\phi, \psi \in (C(K)\otimes_\varepsilon X)^*$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Desde que para cada $x \in X$, a aplicação $\phi_x \longrightarrow \mu_x$ é linear, então podemos dizer que, $\langle m_{\alpha\Phi+\Psi}(A), x\rangle = \alpha\langle m_\Phi(A), x\rangle + \langle m_\Psi(A), x\rangle$. Logo, $m_{\alpha\Phi+\Psi} = \alpha m_\Phi + m_\Psi$.

(iii) J é bijetora. Isto é óbvio. pois cada $m \in \mathfrak{M}(\Sigma, X^*)$ define um único funcional $\phi \in (C(K)\otimes X)^*$, dado por

$$\langle \phi, f\rangle = \int_K f\cdot m(dt).$$

Finalmente, $\|\phi\| = sup \left\{ \left\|\int_K f\cdot m(dt)\right\| \,/\, \|f\| \le 1 \right\} \le |m|(K)$, prova que $\|\phi\| = |m|(K)$. □

Nota: Por uma observação do professor K. Floret, sería possível uma demonstração alternativa (mais simples) do teorema acima, fazendo uso do seguinte teorema de Grothendieck:

Teorema ([8], cap. I, 4.6)

Seja $\varphi: E\otimes F \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear . Então $\varphi \in (E \otimes_{\varepsilon} F)^{*}$ se, e somente se, existe uma medida de Borel-Radon μ sobre $B_{E^*} \times B_{F^*}$ (munido com as topologías fracas respectivas) tal que, para todo $z \in E\otimes F$

$$\langle \varphi, z\rangle = \int_{B_{E^*} \times B_{F^*}} \langle x^{*}\otimes y^{*}, z\rangle \, \mu(d(x^{*}, y^{*})).$$

A medida μ pode ser escolhida positiva e tal que,

$$\|\mu\| = \mu(B_{E^*} \times B_{F^*}) = \|\varphi\|.$$

Neste caso, a medida vetorial m_{Φ} correspondente a um elemento $\phi \in C(K,X)^{*}$ estaría definida diretamente pela representação acima após algumas identificações.

CAPITULO III

CARACTERIZAÇÃO DE $L^1_B(F)^*$, COM F MEDIDA VETORIAL

III. 1. Introdução

Denotaremos por Ω a um conjunto qualquer, por Σ a uma σ-álgebra e por X a um espaço de Banach.

Motivada pela dualidade entre os espaços clássicos de funções $L^1(\mu)$ e $L^\infty(\mu)$ é natural perguntar quando que esta dualidade pode ser estendida para espaços mais gerais, como por exemplo para funções vetoriais e/ou medidas vetoriais.

Quando μ é uma medida escalar e $L^1(\mu,X)$ o espaço das funções a valores em X, Bochner integráveis, conhece-se o seguinte fato:

"$L^1(\mu, X)^*$ é isomorfo a $L^\infty(\mu, X^*)$ se, e somente se, X^* tem a propriedade de Radon-Nikodym". (ver [9], pág. 98)

Para espaços sem a propriedade de Radon-Nikodym, $L^1(\mu, X)^*$ pode ser caracterizado como uma classe de funções fracamente mensuráveis (ver [1]).

No caso em que $F: \Sigma \longrightarrow X$ é uma medida vetorial, ainda é possível estabelecer uma dualidade entre o espaço $L^1_B(F)$, das funções reais, Bartle integráveis (introduzido em I.3) e um espaço de funções essencialmente limitadas. Neste capítulo, estudamos o trabalho de Egghe [12], onde é introduzido uma estrutura conveniente de espaço normado em $L^1_B(F)$ para estabelecer esta dualidade.

III. 2. Estrutura do espaço $L^1_B(F)$

Seja $F: \Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial, σ-aditiva, de variação limitada.

Como a função real $f \in \mathfrak{L}^1_B(F)$ (veja I.3) é $|x^*F|$-integrável (proposição 1.19), podemos definir uma seminorma sobre $\mathfrak{L}^1_B(F)$ por,

$$\|f\|_a = Sup \left\{ \int_\Omega |f| \; |x^*F|(dt) \;/\; x^* \in X^*, \; \|x^*\| \le 1 \right\}, \qquad f \in \mathfrak{L}^1_B(F).$$

Na proposição 3.1 veremos que $\|f\|_a < \infty$. Desta forma, temos que $\| \; \|_a$ é uma seminorma, uma vez que é dada por um supremo de seminormas.

Além disso, com a proposição 1.8(i), é fácil ver que

$$\|f\| = 0 \iff f(t) = 0 \quad F\text{-q.s.} \ .$$

Podemos então introduzir um espaço quociente dado por,

$$L^1_{\mathbf{B}}(F) = \mathfrak{L}^1_{\mathbf{B}}(F)\big/N \ , \quad \text{onde} \quad N = \left\{ f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbf{B}} \ / \ f \equiv 0 \ F\text{-q.s.} \right\}.$$

Em consequência, $L^1_{\mathbf{B}}(F)$ é um espaço normado munido da norma quociente.

<u>Proposição 3.1</u>

As definições abaixo determinam normas equivalentes em $L^1_{\mathbf{B}}(F)$.

(i) $\|f\|_a = Sup \left\{ \int_\Omega |f| \ |x^* F|(dt) \ / \ x^* \in X^*, \ \|x^*\| \leq 1 \right\}.$

(ii) $\|f\|_b = \|G\|(\Omega)$, onde a medida vetorial $G: \Sigma \longrightarrow X$ está dada por $G(A) = \int_A f \ F(dt)$.

(iii) $\|f\|_c = Sup \left\{ \|G(A)\| \ / \ A \in \Sigma \right\}.$

<u>Demonstração:</u>

Por definição, $\|f\|_b = \|G\|(\Omega) = Sup \left\{ |x^* G|(\Omega) \ / \ x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1 \right\}$ e lembrando que $|x^* G|(\Omega) = \int_\Omega |f| \ |x^* F|(dt)$ (ver [13]), segue-se que $\|f\|_b = \|f\|_a$.

Pela proposição 1.8(ii) obtemos,

$$\|f\|_c \leq \|f\|_b \leq 4 \ \|f\|_c .$$

Além disso, como a medida escalar $x^* G$ é σ-aditiva, então em vista da proposição 2.5(i) temos que $\|G\|(\Omega) < \infty$, logo $\|f\|_b < \infty$.

Portanto (i), (ii) e (iii) são normas equivalentes em $L^1_{\mathbf{B}}(F)$. $\square$

<u>Nota:</u> A norma $\| \|_a$ é chamada semivariacional.

<u>Observação 3.2</u>

O espaço das funções simples $\mathcal{S}(\Sigma)$, introduzido em I.3, é denso em $L^1_B(F)$, pois se $f \in L^1_B(F)$ então por definição existe uma sequência de funções simples (f_n) tal que,

$$\lim_n \left\| \int_A (f-f_n).\ F(dt) \right\| = 0, \text{ uniformemente para } A \in \Sigma.$$

Logo dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\left\| \int_A (f-f_n).\ F(dt) \right\| < \varepsilon, \quad \forall\ n \geq N, \quad \forall\ A \in \Sigma.$$

Então, $\| f - f_n \|_c = Sup \left\{ \left\| \int_A (f- f_n).\ F(dt) \right\| \ / \ A \in \Sigma \right\} \leq \varepsilon$, $\forall\ n \geq N$. Portanto (f_n) converge a f na norma semivariacional.

<u>Observação 3.3</u>

Em seu trabalho, Egghe afirma que o espaço $(L^1_B(F), \| \|_a)$ é completo. Embora não usarmos esta propriedade, não foi possível demonstra-la.

III. 3. <u>Caracterização do dual do espaço</u> $(L^1_B(F), \| \|_a)$

O próximo teorema é um importante resultado de Debieve que faremos uso para caracterizar o dual de $L^1_B(F)$. O resultado de Debieve garante a existência da derivada de Radon-Nikodym de $|F|$ com respeito a F em qualquer espaço de Banach X. A prova está baseada no lema de Exaustão que introduzimos abaixo.

Lema 3.4 (*Lema de Exaustão*)

Sejam μ uma medida não negativa definida sobre Σ e $\mathfrak{C}$ uma coleção de conjuntos mensuráveis, tais que:

(*i*) Se $A \in \mathfrak{C}$, logo todo subconjunto mensurável de A pertence a $\mathfrak{C}$.

(*ii*) Para cada $A \in \Sigma$ com $\mu(A) > 0$, existe um subconjunto E de A tal que $E \in \mathfrak{C}$ e $\mu(E) > 0$.

Então, existe uma sequência (A_n) de elementos disjuntos de $\mathfrak{C}$ tal que $\mu(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n) = 0$.

Este lema é consequência do lema de exaustão que aparece em [9], pág. 70.

Teorema 3.5

Seja $F:\Sigma \longrightarrow X$ uma medida vetorial, σ-aditiva e de variação limitada. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe uma aplicação Bochner integrável $f:\Omega \longrightarrow X^{*}$, $f \in \mathfrak{L}^{\infty}(|F|, X^{*})$, de modo que $1 \leq \|f(t)\| \leq 1 + \varepsilon$, $\forall\, t \in \Omega$ e

$$|F|(A) = \int_A f.\ F(dt), \quad \forall\, A \in \Sigma.$$

Demonstração:

Seja $x^{*} \in X^{*}$, $\|x^{*}\| < 1$. Note que a medida escalar $x^{*}F$ é absolutamente contínua com respeito a $|F|$, logo pelo teorema de Radon-Nikodym clássico temos uma função $f_{x^{*}} \in L^{\infty}(|F|)$, que satisfaz

$|f_{x^*}(t)| \leq 1$, $|F|$-q.s. e $x^*F(A) = \int_A f_{x^*} \; |F|(dt)$, $\forall\, A \in \Sigma$.

Defina agora o conjunto $A_{x^*} = \left\{ t \in \Omega \,/\, |f_{x^*}(t)| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \right\}$ e a coleção $\mathfrak{C} = \left\{ E \in \Sigma \,/\, \text{existe } x^* \in X^*,\ \|x^*\| = 1 \text{ tal que } E \subseteq A_{x^*} \right\}$.

Afirmação: $\mathfrak{C}$ satisfaz as condições do lema anterior, com $\mu = |F|$.

De fato, é claro que a condição (i) do lema 3.4 é satisfeita.

Por outro lado, seja o conjunto $E \in \Sigma$ com $|F|(E) > 0$, logo $|F|(E) > \frac{1}{1+\varepsilon} \, |F|(E)$. Então existe uma partição finita de E em elementos de Σ, digamos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ tais que,

$$|F|(E) \geq \sum_{i=1}^{n} \|F(E_i)\| > \frac{1}{1+\varepsilon} \, |F|(E) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\varepsilon} \, |F|(E_i).$$

Em consequência, existe um índice $1 \leq i_0 \leq n$, tal que $\|F(E_{i_0})\| > \frac{1}{1+\varepsilon} \, |F|(E_{i_0})$.

Desta desigualdade obtemos um funcional $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ que verifica $\|F(E_{i_0})\| \geq |x^*F(E_{i_0})| > \frac{1}{1+\varepsilon} \, |F|(E_{i_0})$. (1)

Colocado $A = E_{i_0} \cap A_{x^*}$, temos claramente que $A \in \mathfrak{C}$, $A \subseteq E$. Resta provar que $|F|(A) > 0$.

De fato, suponha que $|F|(A) = 0$. Chamemos $B = E_{i_0} \setminus A_{x^*}$, então pela definição de A_{x^*} temos,

$$|x^*F|(B) = \int_B |f_{x^*}| \; |F|(dt) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \, |F|(B).$$

Como $|F|(A) = 0$ então $|x^*F(E_{i_0})| \leq |x^*F|(E_{i_0}) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} |F|(E_{i_0})$.

Logo, $\|F(E_{i_0})\| \leq \frac{1}{1+\varepsilon} \, |F|(E_{i_0})$, o que contradiz a escolha de E_{i_0}.

Assim se verficam as hipótesis do lema 3.4, logo existe uma sequência (A_n) de conjuntos disjuntos, onde cada $A_n \in \mathfrak{C}$, e

$|F|(\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n) = 0.$

Seja φ_n o funcional tal que $A_n \subseteq A_{\varphi_n}$ e definamos:

$$
f(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} (f_{\varphi_n}(t))^{-1} \varphi_n \chi_{A_n}(t), & \text{se } t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \quad (2) \\ 0, & \text{se } t \in \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \end{cases}
$$

Vamos ver que $f : \Omega \longrightarrow X^*$ satisfaz as condições do teorema.

Em primeiro lugar temos $\|f(t)\| = \|(f_{\varphi_n}(t))^{-1}\varphi_n\| = \|f_{\varphi_n}(t)\|^{-1}$; se $t \in A_n$ então, $1 \leq \|f(t)\| \leq 1 + \varepsilon$, $|F|$-q.s. .

Além disso, pela proposição 1.28, $f(t)$ é $|F|$-mensurável, pois cada parcela da série (2) é mensurável. Segue então que $f \in L^{\infty}(|F|, X^*)$.

Por outro lado, seja $A \in \Sigma$. Para cada n a função f restrita a A_n está dada por $f(t) = (f_{\varphi_n}(t))^{-1}\varphi_n$. É fácil ver que existe uma sequência de funções simples $(f_j)_j$ definidas em A_n, da forma $f_j(t) = g_j(t)\varphi_n$ onde as g_j são funções simples reais, e as f_j verificam:

$$
\int_{A \cap A_n} f \cdot F(dt) = \lim_j \int_{A \cap A_n} g_j \varphi_n \cdot F(dt). \qquad (3)
$$

Se escrevermos $g_j(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \chi_{A_{ij}}$ então,

$$
\int_{A \cap A_n} g_j \varphi_n \cdot F(dt) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \langle \varphi_n, F(E_{ij}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \int_{E_{ij}} f_{\varphi_n} |F|(dt) =
$$

$$
\int_{A \cap A_n} g_j f_{\varphi_n} |F|(dt). \qquad (4)
$$

Por T.C.D. de Lebesgue $\lim_j \int_{A\cap A_n} g_j f_{\varphi_n} |F|(dt) = |F|(A \cap A_n)$.

Segue de (3) e (4) que, $\int_{A\cap A_n} f.\ F(dt) = |F|(A \cap A_n)$.

Finalmente, $\int_A f.\ F(dt) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A\cap A_n} f.\ F(dt) = |F|(A)$. □

Lema 3.6

Se $f \in L^{\infty}(|F|, X^*)$, então

$$\int_A f.\ F(dt) = 0,\ \forall\ A \in \Sigma \quad \leftrightarrow \quad \int_\Omega fg.\ F(dt) = 0,\ \forall\ g \in L^1(|F|).$$

Aqui a função $fg: \Omega \longrightarrow X^*$ é dada pela multiplicação escalar $fg(t) = f(t)g(t)$, $t \in \Omega$.

Demonstração:

($\leftarrow$) Se $\int_\Omega fg\ F(dt) = 0$, $\forall\ g \in L^1(|F|)$, em particular tomando $g = \chi_A$ obtemos $\int_A f.\ F(dt) = 0$, $\forall\ A \in \Sigma$.

($\rightarrow$) Notamos que $\int_\Omega fg.\ F(dt) = 0$ (*), quando g é uma função característica. Logo (*) é válida quando g é qualquer função simples. Desde que existe uma sequência de funções simples (g_n), tal que,

$$\int_\Omega fg.\ F(dt) = \lim \int_\Omega fg_n.\ F(dt) = 0,\ \forall\ g \in L^1(|F|),$$

temos que (*) vale para toda $g \in L^1(|F|)$. □

Nota: $(L^1(|F|), \|\ \|_a)$ é o subespaço de $(l^1_B(I), \|\ \|_a)$, das funções $|F|$-Lebesgue integráveis munido com a norma induzida.

Lema 3.7

$$(L^1_{\mathbf{B}}(F),\ \|\ \|_a)^* = L^1(|F|)^*.$$

Demonstração:

Pela observação 3.2 vemos que o subespaço de $(L^1(|F|),\ \|\ \|_a)$ das funções simples é denso em $(L^1_{\mathbf{B}}(F),\ \|\ \|_a)$. Então todo funcional sobre $L^1(|F|)$ extende-se de maneira única a $L^1_{\mathbf{B}}(F)$. Portanto

$$(L^1_{\mathbf{B}}(|F|),\ \|\ \|_a)^* = (L^1_{\mathbf{B}}(F),\ \|\ \|_a)^*. \qquad \square$$

O seguinte teorema caracteriza o dual de $L^1_{\mathbf{B}}(F)$.

Teorema 3.8

$$(L^1_{\mathbf{B}}(F),\ \|\ \|_a)^* \cong L^\infty(|F|,\ X^*)/M .$$

Onde $M = \{ f \in L^\infty(|F|,\ X^*) \ /\ \int_A f.\ F(dt) = 0,\ \forall\ A \in \Sigma\}$.

Demonstração:

Pelo lema anterior é suficiente provar que $(L^1(|F|),\ \|\ \|_a)^*$ é isomorfo a $L^\infty(|F|, X^*)/M$.

Seja $\mathbf{g} \in L^\infty(|F|, X^*)/M$, ou seja $\mathbf{g}$ tem a forma $\mathbf{g} = g + M$, onde $g \in L^\infty(|F|,\ X^*)$.

Definamos $\varphi_{\mathbf{g}}: L^1(|F|) \dashrightarrow \mathbb{R}$, como $\varphi_{\mathbf{g}}(f) = \int_\Omega fg\ .\ F(dt)$, esta definição tem sentido pois $fg \in L^1_{\mathbf{B}}(F)$.

Para ver que $\varphi_{\mathbf{g}}$ está bem definida tomemos $\mathbf{g} = g + M = g' + M$, onde $g, g' \in L^{\infty}(|F|, X^*)$, então $g - g' \in M$ e pelo lema 3.6, temos $\int_\Omega (g - g')f.\ F(dt) = 0$, $\forall\ f \in L^1(|F|)$. Portanto,

$$\int_\Omega gf.\ F(dt) = \int_\Omega g'f.\ F(dt) = \varphi_g(f).$$

Afirmamos que a aplicação $\varphi : L^{\infty}(|F|, X^*)/_M \longrightarrow (L^1(|F|, \|\ \|)^*$ dada por $\varphi(g) = \varphi_g$ é um isomorfismo. De fato:

(i) Da linearidade do operador integral, segue-se que φ é linear.

(ii) Para ver que φ é contínua, seja $g = g + M$, onde $g \in L^{\infty}(|F|, X^*)$. Analogamente a demonstração 1.19(iii) prova-se que dado um número $N > \|g\|_\infty$ existe uma sequência (g_n) em $\mathfrak{S}_{X^*}(\Sigma)$, uniformemente limitada por N, convergindo pontualmente a g e tal que $\int_\Omega g\ .\ F(dt) = \lim_n \int_\Omega g_n.\ F(dt)$.

Logo se colocamos $g_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ni}\chi_{A_{ni}}$, então $\forall\ f \in L^1(|F|)$,

$$\left|\int_\Omega g_n f.\ F(dt)\right| \leq N \left\| \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{N}\alpha_{ni} \int_{A_{ni}} f.\ F(dt) \right\| \leq N \|f\|, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, $|\varphi_g(f)| = \left|\int_\Omega gf.\ F(dt)\right| \leq N \|f\|$.

Como N foi tomado arbitrariamente, satisfazendo $N \geq \|g\|_\infty$, então, $|\varphi_g(f)| \leq \|g\|_\infty \|f\|$, $\forall\ f \in L^1(|F|)$. Portanto φ é contínua.

(iii) φ é injetora. Pois se $\varphi_g \equiv 0$, então $\int_\Omega gf.\ F(dt) = 0$, $\forall\ f \in L^1(|F|)$, logo pelo lema 3.6 $g \in M$. Portanto $g \equiv 0$.

(iv) φ é sobrejetora. Para provar isto observemos que $\|f\|_c \leq \int_\Omega |f|\ |F|(dt) = \|f\|_1$. Logo se $\phi \in (L^1(|F|), \|\ \|_a)^*$ então $\phi \in (L^1(|F|), \|\ \|_1)^* = L^{\infty}(|F|, \|\ \|_\infty)$. Seja $\ell \in L^{\infty}(|F|)$ a função tal que $\phi(f) = \int_{\Omega} f\ell \; |F|(dt), \quad \forall f \in L^1(|F|)$.

Pelo teorema 3.5 temos uma aplicação $\hbar: \Omega \longrightarrow X^*$, $\hbar \in L^{\infty}(|F|, X^*)$ tal que, $|F|(A) = \int_A \hbar . \; F(dt) \quad (*)$. Em consequência a igualdade $\int_{\Omega} f \; |F|(dt) = \int_{\Omega} \hbar f . \; F(dt)$ é válida para toda $f \in \mathfrak{S}(\Sigma)$ e portanto para toda $f \in L^1(|F|)$.

Como $f\ell \in L^1(|F|)$, então de $(*)$ temos que,

$$\phi(f) = \int_{\Omega} f\ell \; |F|(dt) = \int_{\Omega} \hbar f\ell . \; F(dt).$$

Seja $g = \ell\hbar + M$. Claramente $g \in {L^1(|F|, X^*)}/{M}$ e também φ_g. □

BIBLIOGRAFIA

[1] Badrikian, A. - Prolegomènes au calcul des probabilités dans les Banach. Lecture Notes in Math., vol 539, 1976.

[2] Bartle, R. G. - A general bilinear vector integral. Studia Math., 15, 337-352, 1956.

[3] Bartle R. G. - The elements of integration. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[4] Bartle R. G., Dunford, N. & Schwartz, J. - Weak compactness and vector measures. Canadian J. Math., 7, 289-305, 1955.

[5] Beauzamy, B. - Introduction to Banach spaces and their geometry. Notas de Matemática, 86, North-Holland Publishing Company, 1982.

[6] Conway, J. - A course in functional analysis. Springer-Verlag, 1985.

[7] Debiève, C. - On a Radon-Nikodym problem for vector- valued measures. Pacific J. Math., 107, 335-339, 1983.

[8] **Defant, A. & Floret, K.** - Tensornorms and operator ideals. A aparecer.

[9] **Diestel, J. & Uhl, J. J.** - Vector measures. Math. Surveys of the A.M.S., vol 15, 1977.

[10] **Dinculeanu, N.** - Vector measures. Pergamon Press, New York, 1967.

[11] **Dunford, N. & Schwartz, J.** - Linear Operators, part I, Interscience, New York and London, 1958.

[12] **Egghe, L.** - The dual of $L^1(\mu)$, with μ a vector measure. Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 29, 467-471, 1984.

[13] **Halmos, P. R.** - Measure Theory. Graduate Texts in Mathematics, vol 18, Springer-Verlag. Inc., New York, 1974.

[14] **Lewis, D. R.** - Integration with respect to vector measures. Pac. J. Math., 33, 1, 157-165, 1970.

[15] **Schaefer, H.** - Topological vector spaces. Springer-Verlag, 1970.

[16] **Singer, I.** - Les duals de certaines espaces de Banach de champs de vecteures I. Bull. Sci. Math., 82, 29-40, 1958.

[17] **Singer, I.** - Sur les applications linéaires intégrales des espaces de fonctions continues I, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 4, 391-401, 1959.