



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS DA UNICAMP  
REPOSITÓRIO DA PRODUÇÃO CIENTÍFICA E INTELLECTUAL DA UNICAMP**

**Versão do arquivo anexado / Version of attached file:**

Versão do Editor / Published Version

**Mais informações no site da editora / Further information on publisher's website:**

[https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0034-71402015000100017](https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-71402015000100017)

**DOI: 10.5935/0034-7140.20150002**

**Direitos autorais / Publisher's copyright statement:**

©2015 by FGVs/Instituto Brasileiro de Economia. All rights reserved.

DIRETORIA DE TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Cidade Universitária Zeferino Vaz Barão Geraldo

CEP 13083-970 – Campinas SP

Fone: (19) 3521-6493

<http://www.repositorio.unicamp.br>

# A Desigualdade Pode Afetar a Eficiência do Sistema Financeiro? Um Modelo de Equilíbrio em Dois Períodos com Fricções na Intermediação Financeira.

Wenersamy Ramos de Alcântara<sup>\*</sup>, Daniela P. R. de Alcântara<sup>†</sup>, José Maria F. J. da Silveira<sup>‡</sup>

**Sumário:** 1. Introdução; 2. Definição do modelo; 3. Carteira ótima de investimento para um dado nível de recursos excedentes; 4. Solução do programa de otimização; 5. Simulação Numérica do Equilíbrio; 6. Análise dos resultados; A. Apêndice: Caracterização do parâmetro de desigualdade  $\gamma$ .

**Palavras-chave:** Sistema Financeiro, Eficiência, Desigualdade, Fricções, Crescimento Endógeno.

**Códigos JEL:** D31, O16.

Este trabalho apresenta um modelo de equilíbrio que mostra um canal através do qual a desigualdade na distribuição de riqueza pode afetar o desenvolvimento do sistema financeiro. Na presença de fricções, nominalmente: um limite à proporção de dívida nos projetos financiados pelos bancos e um tamanho mínimo dos projetos disponíveis na economia, mostramos que a desigualdade pode afetar o volume intermediado pelo sistema financeiro e consequentemente, considerando ganhos de escala, sua eficiência. Simulações com diversas parametrizações revelam uma relação não linear e não monotônica entre desigualdade e eficiência do sistema financeiro, medida pelo *spread* entre captação e concessão de empréstimos.

*This study presents an equilibrium model that shows a channel through which wealth inequality may affect the financial system development. In the presence frictions, namely, a limit to the proportion of debt in projects financed by banks and a minimum size of projects available in the economy, we show that inequality may negatively affect the volume of resources intermediated by the financial system and, hence, its efficiency, given the assumed gains of scale. Simulations under several parameterizations reveal a non-linear, non-monotonic relation between inequality and financial system efficiency, as measured by the spread between borrowing and lending.*

<sup>\*</sup>Professor das Faculdades Alfa, Faculdade Projeção e Analista do Banco Central do Brasil. SBS Quadra 3 Bloco B, Edifício Sede 14° Andar, Brasília, DF. CEP 70074-900. E-mail: [wenersamy.alcantara@alfa.br](mailto:wenersamy.alcantara@alfa.br)

<sup>†</sup>Analista do Banco Central do Brasil. E-mail: [pieres.daniela@gmail.com](mailto:pieres.daniela@gmail.com)

<sup>‡</sup>Professor do Departamento de Economia da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). E-mail: [jmsilv@eco.unicamp.br](mailto:jmsilv@eco.unicamp.br)



## 1. INTRODUÇÃO

A relação entre desigualdade e o desenvolvimento do sistema financeiro foi avaliada em trabalhos como os de [Aghion e Bolton \(1997\)](#) e [Beck, Demirguc-Kunt e Levine \(2005\)](#), indicando que imperfeições do mercado financeiro, tais como custos de transação e de informação, afetam especialmente os indivíduos mais pobres por não possuírem acesso a garantias reais. Estas restrições de crédito podem impedir o acesso de indivíduos mais pobres a projetos de alto retorno, dada a dificuldade de obter financiamento pelo mercado financeiro, um dos tópicos abordado pelas Nações Unidas sobre políticas contra a desigualdade ([United Nations, 2013](#)). Um sistema financeiro menos acessível e menos eficiente, por sua vez, tem impactos negativos no desenvolvimento e crescimento econômico e também na distribuição de renda, como em [Li, Squire e Zou \(1998\)](#). Para os autores, os resultados encontrados se devem ao aumento do acesso ao crédito aos mais pobres, o que lhes permite fazer investimentos produtivos. Este trabalho investiga um canal para a influência no sentido inverso, ou seja, a desigualdade como obstáculo ao desenvolvimento do sistema financeiro. É possível, portanto, que exista endogeneidade na relação entre o desenvolvimento do sistema financeiro e a distribuição de renda.

O pressuposto do modelo é a existência de ganhos de escala na atividade bancária. Considera-se que o banco incorre em custos fixos para manter sua capacidade de análise de crédito e esta capacidade já é suficiente para atender qualquer número de clientes, não havendo necessidade de novos investimentos no horizonte de decisões analisado. Dessa maneira, o custo marginal da unidade monetária emprestada, seja a clientes antigos ou novos clientes, é apenas o seu custo de captação: a remuneração dos depósitos. Como resultado, a eficiência do sistema aumenta com o aumento das receitas advindas do volume de empréstimos multiplicado pelo *spread* entre captação e empréstimo. As restrições de investimento mínimo e de crédito, contudo, impedem que uma parte da população com menos recursos tome crédito para investir em projetos, limitando a capacidade do sistema financeiro de converter poupança em investimento e, conseqüentemente, limitando o crescimento da economia. O menor volume de recursos que circula no sistema financeiro reduz sua eficiência tanto mais quanto mais desigual for a sociedade, resultando em maiores *spreads* e menor produção da economia como um todo. Assim, o canal através do qual a distribuição de renda afeta a eficiência do sistema financeiro é a escala, dada pelo volume de recursos transferidos entre poupadores e investidores. Como os bancos apresentam ganhos de escala, quanto maior o volume transacionado, menor pode ser a diferença entre a taxa cobrada pelos empréstimos e a taxa oferecida para depósito, ou seja, o *spread*, que será usado como medida da ineficiência do sistema financeiro.

Dos resultados do modelo, observou-se que este efeito compete com outro: quanto menor a desigualdade e a restrição ao investimento mínimo, menor a necessidade de empréstimos e de um sistema financeiro para reduzir os custos de coordenação, já que os agentes possuem dotação suficiente para investir no projeto por conta própria, se assim o decidirem. Quanto menor a desigualdade, mais importante esse efeito, e para desigualdades muito baixas ele domina o efeito dos ganhos de escala, levando a uma menor eficiência do sistema financeiro em termos de menores volumes e maiores *spreads*. O resultado final é que, dadas as restrições ao investimento e à concessão de crédito, há uma distribuição de renda intermediária para a qual a eficiência do sistema financeiro é máxima e o crescimento da economia através do investimento em ativos reais é o maior possível.

Em resumo, este trabalho busca investigar a relação entre a eficiência do sistema financeiro e a desigualdade através de um modelo de equilíbrio em dois períodos, com agentes avessos ao risco e que tomam decisões entre consumo e investimento na presença de um sistema financeiro simplificado que auferir lucro pela diferença entre as taxas de captação de recursos e de empréstimos. Ao especificar diferenças nas dotações iniciais de riqueza dos indivíduos na presença de fricções (restrição ao crédito e ao investimento mínimo), esta abordagem permite mostrar que a desigualdade também afeta a própria eficiência do sistema financeiro.

## 2. DEFINIÇÃO DO MODELO

Inicialmente serão definidos os agentes econômicos, sua distribuição de riqueza e o parâmetro do modelo que está associado à desigualdade. Também serão descritos os projetos disponíveis na economia, sujeitos a restrições de investimento mínimo e, finalmente, será descrito o setor bancário, cujo lucro depende do volume transacionado e do spread. Nesta economia simplificada, há apenas dois preços: a taxa cobrada pelos bancos para empréstimos e a taxa que os bancos pagam pelos depósitos. Esses preços e a distribuição de riqueza afetam a decisão de consumo, poupança e investimento dos agentes econômicos que, por sua vez, afetam o volume que equilibra poupança e investimento, bem como o lucro dos bancos.

Nessa economia simplificada, há apenas dois preços: a taxa cobrada pelos bancos para empréstimos e a taxa que os bancos pagam pelos depósitos. Esses preços e a distribuição de riqueza, dadas as fricções modeladas, afetam a decisão de consumo, poupança e investimento dos agentes econômicos que, por sua vez, afeta o volume que equilibra poupança e investimento e o lucro dos bancos de modo que as taxas de empréstimo e captação e a decisão poupança e investimento são definidos conjuntamente. O problema será encontrar a combinação de consumo, poupança e investimento dos agentes econômicos que maximiza a sua utilidade, sujeita às restrições de crédito e de nível mínimo de investimento, e escolher as taxas de captação e empréstimo que garantam que a poupança seja igual ao investimento e que o lucro dos bancos seja máximo.

### 2.1. Dotação inicial

Considere, portanto, uma população contínua de agentes econômicos indexados por  $i \in [0, 1]$  que devem decidir como consumir completamente sua riqueza ou dotação inicial  $d_{0,i}$  ao longo de dois períodos:  $t = 0$  e  $t = 1$ . Assume-se que tais agentes sejam avessos ao risco e possuam preferências intertemporais que admitam representação por uma função utilidade esperada de von Neumann e Morgenstern. Particularmente, usaremos a função:<sup>1</sup>

$$U_i = \log c_{0,i} + \rho_i \log c_{1,i}, \quad (1)$$

em que  $c_{0,i}$  e  $c_{1,i}$  representam, respectivamente, o consumo em  $t = 0$  e  $t = 1$  do indivíduo  $i$ , e  $\rho_i$  corresponde a uma taxa de desconto da utilidade do consumo futuro, o que influencia a preferência relativa na decisão entre consumir no presente ou consumir no futuro. Tradicionalmente assume-se que os agentes econômicos sejam impacientes e que, portanto,  $0 \leq \rho_i \leq 1$ . É possível assumir, sem perda de generalidade, que a distribuição de riqueza seja uma função monotônica não decrescente de  $i$ , de modo que  $a > b \Rightarrow d_{0,a} \geq d_{0,b}$ . Adicionalmente, para evitar formalismos desnecessários, considere que  $d_{0,i}$  seja contínua e sempre positiva. Nestas condições, a riqueza total inicial da população de agentes será dada por:

$$D_0 = \int_0^1 d_{0,i} di, \quad (2)$$

de modo que a riqueza inicial de um quantil  $z$  da população como proporção da riqueza total pode ser dada por:

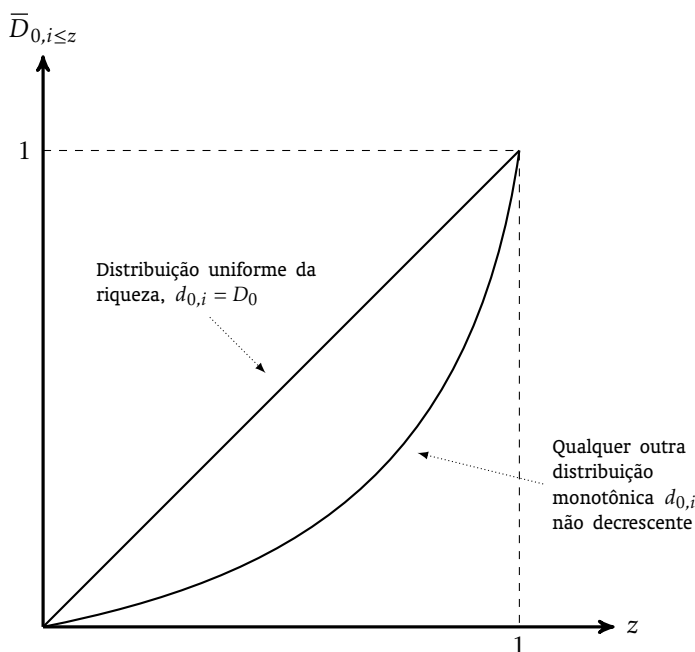
$$\bar{D}_{0,i \leq z} = \int_0^z \frac{d_{0,i}}{D_0} di, \quad (3)$$

e é possível representar a distribuição de riqueza graficamente como na [Figura 1](#). Como  $\bar{D}_{0,i \leq z} \leq z$ , a

<sup>1</sup>Essa função utilidade apresenta aversão ao risco relativa constante (CRRA) e igual a 1, tem razoável aderência empírica e resulta em decisões de investimentos sem efeito riqueza.



**Figura 1.** Representação da distribuição da riqueza.



diferença entre a área abaixo da reta e a área abaixo de  $\bar{D}_{0,i \leq z}$  pode ser utilizada como uma medida de desigualdade. Tal medida é usualmente conhecida como índice de Gini, que neste caso será dado por

$$\text{Gini} = 1 - 2 \int_0^1 \bar{D}_{0,i \leq z} dz = 1 - 2 \int_0^1 \int_0^z \frac{d_{0,i}}{D_0} di dz. \quad (4)$$

Assumiremos que a distribuição de riqueza seja exponencial, de modo que a riqueza inicial será dada por

$$d_{0,i} = Ae^{\gamma i}, \quad (5)$$

em que  $A$  é um fator de escala e  $\gamma$  está relacionado com a desigualdade na distribuição de riqueza, já que quando  $\gamma$  é muito pequeno  $d_{0,i} = Ae^{\gamma i}$  aproxima-se da distribuição uniforme e quando  $\gamma$  cresce a diferença entre o mais pobre e o mais rico aumenta exponencialmente.

A riqueza total da população no período  $t = 0$  será, portanto,

$$D_0 = \int_0^1 d_{0,i} di = \int_0^1 Ae^{\gamma i} di = \frac{A}{\gamma} e^{\gamma i} \Big|_0^1 = A \frac{e^{\gamma} - 1}{\gamma}; \quad (6)$$

e a riqueza inicial de um quantil  $z$  da população como proporção da riqueza total será dada por

$$\bar{D}_{0,i \leq z} = \int_0^z \frac{d_{0,i}}{D_0} di = \frac{1}{D_0} \int_0^z Ae^{\gamma i} di = \frac{A}{D_0 \gamma} e^{\gamma i} \Big|_0^z = \frac{A}{D_0} \frac{e^{\gamma z} - 1}{\gamma} = \frac{e^{\gamma z} - 1}{e^{\gamma} - 1}. \quad (7)$$

O índice de Gini será então

$$\begin{aligned} \text{Gini} &= 1 - 2 \int_0^1 \bar{D}_{0,i \leq z} dz = 1 - 2 \int_0^1 \frac{e^{\gamma z} - 1}{e^{\gamma} - 1} dz \\ \Rightarrow \text{Gini} &= 1 - 2 \frac{(e^{\gamma} - 1) - \gamma}{e^{\gamma} - 1} \end{aligned} \quad (8)$$

para todo  $\gamma > 0$ . No **Apêndice A** demonstramos que o índice de Gini é uma função estritamente crescente de  $\gamma$ , de modo que quanto maior  $\gamma$ , maior a desigualdade, como mostrado na **Figura 2**.

Os agentes econômicos têm a opção de usar parte de sua riqueza não consumida em  $t = 0$  para investir em um projeto disponível na economia. A riqueza gerada em  $t = 1$  pelo projeto depende da riqueza investida pelo agente  $i$ ,  $k_i$ , e do sucesso do projeto. O projeto será modelado como um experimento de Bernoulli, possuindo uma probabilidade  $\pi$  se ser bem sucedido, caso em que gera a riqueza  $k_i (1 + r^S)$ , e uma probabilidade  $1 - \pi$  de fracasso, situação em que gera uma riqueza  $k_i (1 + r^F)$ , sendo que  $r^S > 0$  é o retorno em caso de sucesso e  $r^F \in (-1, r^S)$  é o retorno ocorrendo fracasso. Ao estipularmos que  $r^F > -1$ , estamos assumindo que a responsabilidade sobre os investimentos é limitada ao capital investido.<sup>2</sup> A variável aleatória correspondente ao retorno do projeto será denotada por  $\tilde{r}$ .

Note que o retorno esperado e a variância do retorno são dados, respectivamente, por

$$E[\tilde{r}_j] = \pi r^S + (1 - \pi)r^F \tag{9}$$

e

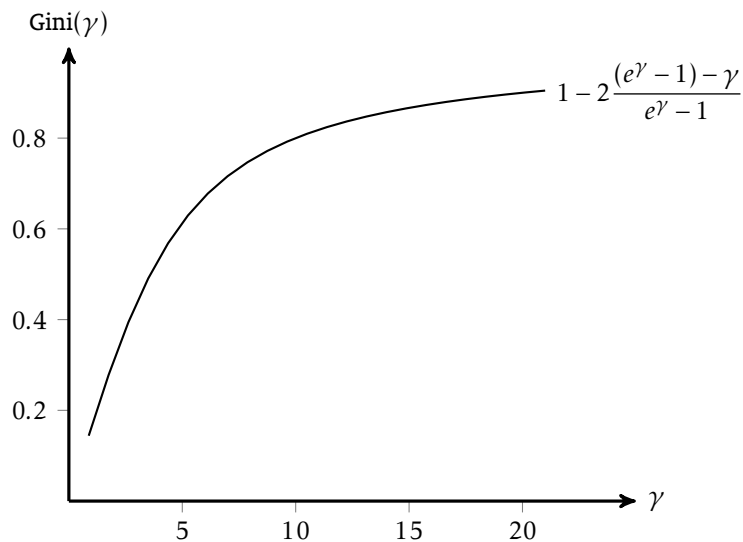
$$\begin{aligned} \sigma^2(\tilde{r}) &= \pi (r^S - E[r])^2 + (1 - \pi)(r^F - E[\tilde{r}])^2 \\ &= \pi (r^S)^2 + (1 - \pi)(r^F)^2 - E^2[\tilde{r}] \end{aligned} \tag{10}$$

$$= \pi(1 - \pi)(r^S - r^F)^2. \tag{11}$$

Note ainda que o produto  $(\pi r^S + (1 - \pi)r^F)((1 - \pi)r^S + \pi r^F)$  está relacionado com a variância

$$(\pi r^S + (1 - \pi)r^F)((1 - \pi)r^S + \pi r^F) = \sigma^2(\tilde{r}) + r^S r^F. \tag{12}$$

**Figura 2.** Índice de Gini em função de  $\gamma$ .



<sup>2</sup>De fato, a responsabilidade limitada é equivalente a  $r^F \geq -1$ , ou seja, a responsabilidade do acionista limita-se a 100% dos bens investidos em ativos da empresa (retorno limitado inferiormente em  $-1$  ou 100% de perda), não atingindo sua riqueza pessoal (perda de mais de 100%). A exclusão da igualdade, resultando em  $r^F > -1$ , simplificará alguns resultados sem qualquer prejuízo para as conclusões do modelo.



Adicionalmente, assume-se que seja necessário um capital mínimo para que se possa fazer o investimento, denotado por  $K$ , embora não haja limitação quanto ao total de recursos investidos por todos os agentes ou por um deles, individualmente, sendo necessário, portanto, que  $k_i \geq K$ .

## 2.2. Intermediação financeira

Para todos os efeitos, o sistema financeiro será modelado como um único banco, de modo que questões relacionadas à concorrência não serão analisadas. Assume-se que o banco tenha um custo fixo de monitoração em  $t = 0$  denotado por  $C_{SF}$ , independente do volume de recursos transacionados, levando a ganhos de escala.<sup>3</sup>

Considera-se que o custo marginal do banco seja exclusivamente o custo de captação dos depósitos. Como todos os empréstimos devem ser pagos um período adiante e não há possibilidade de saques antes disso, não há depósitos compulsórios e a questão da gestão da liquidez e das corridas bancárias não serão analisadas. Cada agente pode depositar, em  $t = 0$ , um montante  $p_i$  no sistema financeiro, correspondente a uma poupança de parte dos seus recursos excedentes ao consumo, pelo que receberá em  $t = 1$  o montante  $p_i(1 + r_p)$ ,  $r_p > 0$ . Um agente também tem a possibilidade de tomar um empréstimo em  $t = 0$  no valor  $b_i$  junto aos bancos, pelo qual terá que pagar  $b_i(1 + r_b)$  em  $t = 1$ , de modo que:

$$r_b > r_p. \quad (13)$$

O trabalho de [Aghion e Howitt \(1998\)](#) sugere uma limitação no crédito proporcional à riqueza inicial para incluir imperfeições de mercado no modelo. No modelo aqui apresentado, como toda a riqueza está disponível no primeiro período e parte dela será usada para consumo e não para investimento, é razoável assumir que os bancos só aceitarão fornecer crédito sobre uma fração do investimento, caso contrário não haverá recursos para pagar o empréstimo. O crédito dependerá, portanto, das garantias e do risco do projeto, e não da riqueza do investidor. Agentes com menor riqueza inicial, contudo, continuarão privados de crédito porque a fração do investimento inicial que precisa ser financiada é muito grande. Assim, o montante máximo que será emprestado a um agente será:

$$b_{i,\max} = \alpha k_i, \quad (14)$$

indicando que o sistema financeiro aceita financiar uma fração  $0 < \alpha < 1$  de cada projeto. Um valor conservador para  $\alpha$  é

$$\alpha = \frac{(1 + r^F)}{(1 + r_b)}. \quad (15)$$

Essa definição garante que mesmo em caso de falha no projeto restariam garantias suficientes para pagar integralmente a dívida: o banco aceitará financiar o valor terminal do projeto no pior caso, ou seja, no caso de falha, descontado a valor presente pelo custo do empréstimo. Note que o pressuposto de responsabilidade limitada garante que  $(1 + r^F)/(1 + r_b) > 0$ . Adicionalmente, como será mostrado em detalhes adiante, para que coexistam depósitos e investimentos na economia é necessário ter  $r_b > r^F$ . Tal relação, por sua vez, garante que  $(1 + r^F)/(1 + r_b) < 1$ , logo, a utilização de (15) garante que  $0 < \alpha < 1$ .

A primeira condição de equilíbrio de mercado no presente modelo é que os montantes depositados e emprestados sejam os mesmos:

$$\int_0^1 b_i di = \int_0^1 p_i di. \quad (16)$$

<sup>3</sup> Este pressuposto assume que o banco presta um serviço de monitoração delegada ([Diamond, 1984](#)), um conceito que pode ser usado para explicar por que bancos atraem depósitos apesar de serem sujeitos a corridas bancárias ([Diamond & Dybvig, 1983](#)). É interessante ressaltar, contudo, que enquanto nos modelos de [Diamond e Dybvig](#) os agentes são homogêneos, o presente modelo requer heterogeneidade. Isto ocorre porque se deseja mostrar exatamente como a distribuição de riqueza impacta o equilíbrio na presença de fricções na intermediação financeira. Assim, as fricções do sistema financeiro no presente modelo apenas afetam o equilíbrio se houver heterogeneidade, caso contrário, o único equilíbrio possível é o de autarquia, conforme será mostrado ao final da discussão da [seção 2.3](#).

Quando há uma única taxa para emprestar e tomar emprestado, a condição (16) é suficiente para garantir o equilíbrio. No presente caso, contudo, podem existir diversos pares de valores para  $r_p$  e  $r_b$  que garantem que a quantidade ofertada de recursos seja igual à quantidade demandada, sendo necessária uma segunda condição.

A riqueza produzida pelo sistema financeiro será dada pelo spread entre o retorno dos empréstimos e o custo dos depósitos multiplicado pelo montante total transacionado. Esta riqueza corresponde a um retorno  $r_{SF}$  sobre  $C_{SF}$ , que os bancos tentarão maximizar:

$$\begin{aligned} r_{SF} &= \frac{1}{C_{SF}} \left( r_b \int_0^1 b_i \, di - r_p \int_0^1 p_i \, di \right) - 1 \\ &= \frac{1}{C_{SF}} (r_b - r_p) \int_0^1 b_i \, di - 1 \\ &= \frac{1}{C_{SF}} (r_b - r_p) \int_0^1 p_i \, di - 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Os bancos escolherão o par de taxas  $r_p$  e  $r_b$  que satisfaz (16) e resulta no maior valor para  $r_{SF}$ . A segunda condição de equilíbrio é, portanto, que (17) seja máximo.

### 2.3. Condição de maximização

O consumo de cada agente em  $t = 0$  e em  $t = 1$  será dado por

$$\begin{aligned} c_{0,i} &= d_{0,i} - k_i - p_i + b_i; \\ c_{1,i} &= (1 + \bar{r})k_i + (1 + r_p)p_i - (1 + b_b)b_i, \end{aligned} \quad (18)$$

em que  $k_i$ ,  $p_i$  e  $b_i$  serão escolhidos de modo a maximizar a utilidade esperada do agente, resultando no programa de otimização dado por

$$\begin{aligned} \max_{b_i, p_i, k_i} E[U_i] &= \ln c_{0,i} + \rho_i E[\ln c_{1,i}] \\ \text{s.a.} \quad \text{i)} & 0 \leq b_i \leq \alpha k_i \\ \text{ii)} & p_i \geq 0 \\ \text{iii)} & k_i = 0 \quad \text{ou} \quad k_i \geq K \\ \text{iv)} & 0 < c_{0,i} < d_{0,i}. \end{aligned} \quad (19)$$

Pela condição (iv) assume-se que os extremos  $c_{0,i} = 0$  e  $c_{0,i} = d_{0,i}$  não ocorrem, em primeiro lugar, por não fazerem parte do domínio da função utilidade esperada (já que teríamos consumo zero no primeiro ou no segundo período). Em segundo lugar, o fato da utilidade esperada tender a  $-\infty$  em qualquer um dos casos tem um significado econômico: o indivíduo tem necessidades mínimas em ambos os períodos e ter consumo nulo em qualquer um deles é inaceitável.

Cumpra observar que um agente maximizador de utilidade nunca escolherá  $p_i > 0$  e  $b_i > 0$  simultaneamente, já que o custo do empréstimo é maior que o rendimento do depósito. Também nunca ocorrerá o caso em que  $k_i = p_i = 0$ , pois implicaria em  $b_i = 0$  (já que não há investimento em projeto) e, conseqüentemente,  $c_{1,i} = 0$ , cuja possibilidade já foi excluída pela condição (iv) em (19). Dessa maneira, poderão ocorrer apenas os seguintes casos:

**Caso A:**  $b_i = 0$  e  $k_i \geq K$  (o agente investe a riqueza excedente ao consumo em uma carteira de depósito e investimento em um projeto);

**Caso B:**  $b_i = 0$  e  $k_i = 0$  (o agente simplesmente faz depósito da riqueza excedente ao consumo no período inicial);





**Caso C:**  $p_i = 0$  e  $k_i \geq K$  (o agente usa sua riqueza e possivelmente um empréstimo para investir em um projeto).

Dadas as observações acima, é possível reespecificar (19) de forma mais conveniente. De início, definiremos os recursos excedentes ao consumo no primeiro período como

$$s_i = d_{0,i} - c_{0,i}. \quad (20)$$

Também é possível definir a proporção de  $s_i$  investida no projeto:

$$\omega_i^k = \frac{k_i}{s_i}, \quad (21)$$

e a proporção de  $s_i$  investida em poupança ou tomada de empréstimo:

$$\omega_i^{p,b} = \frac{p_i - b_i}{s_i}, \quad (22)$$

de modo que

$$\omega_i^k + \omega_i^{p,b} = 1. \quad (23)$$

Como não ocorre  $p_i > 0$  e  $b_i > 0$  simultaneamente, tem-se  $\omega_i^{p,b} = p_i/s_i$  caso o agente decida fazer o depósito e  $\omega_i^{p,b} = -b_i/s_i$  caso o agente decida tomar um empréstimo. Usando (23), para cada valor de  $\omega_i^k$  existe um único valor de  $\omega_i^{p,b}$  possível dado por

$$\omega_i^{p,b} = 1 - \omega_i^k, \quad (24)$$

de modo que, por simplicidade, será usado apenas  $\omega_i = \omega_i^k$  no resto do texto.

Por (24), o consumo no segundo período pode ser reescrito como

$$c_{1,i} = s_i \left( (1 + \tilde{r}) \omega_i + (1 + r(\omega_i))(1 - \omega_i) \right), \quad (25)$$

em que

$$r(\omega_i) = \begin{cases} r_p, & \text{se } \omega_i \leq 1, \\ r_b, & \text{se } \omega_i > 1. \end{cases} \quad (26)$$

Finalmente, definindo

$$f(\omega_i, s_i) = E \left[ \ln c_{1,i} \right] = E \left[ \ln \left\{ s_i \left( (1 + \tilde{r}) \omega_i + (1 + r(\omega_i))(1 - \omega_i) \right) \right\} \right] \quad (27)$$

e usando as definições de (21) a (26), o programa de otimização em (19) pode ser reespecificado como

$$\begin{aligned} & \max_{\omega_i, s_i} \left\{ \ln(d_{0,i} - s_i) + \rho_i f(\omega_i, s_i) \right\} \\ & \text{s.a. } \text{i) } s_i (\omega_i^k - 1) \leq \alpha k_i = \alpha \omega_i^k s_i \implies \omega_i^k \leq \frac{1}{1 - \alpha} \\ & \text{ii) } \omega_i^k = 0 \quad \text{ou} \quad \omega_i^k \geq \frac{K}{s_i} \\ & \text{iii) } 0 < s_i < d_{0,i}. \end{aligned} \quad (28)$$

Adicionalmente, as relações (22) e (24) resultam em  $(1 - \omega_i)s_i = p_i - b_i$ , o que permite reescrever a condição de equilíbrio de mercado em (16) como

$$\int_0^1 (1 - \omega_i^*) s_i^* di = 0, \quad (29)$$

em que  $\omega_i^*$  e  $s_i^*$  são as soluções da otimização (28) para cada agente econômico  $i$ . Da mesma maneira, é possível reescrever o retorno para os bancos em (17) como

$$r_{SF} = \frac{-\int_0^1 (1 - \omega_i^*) s_i^* r(\omega_i^*) di}{C_{SF}} - 1 = \frac{-\int_0^1 (\omega_i^* - 1) s_i^* r(\omega_i^*) di}{C_{SF}} - 1. \quad (30)$$

Desta forma, a economia estará em equilíbrio e as taxas de captação e empréstimo bem definidas quando: (i) a utilidade dos agentes, sujeita às restrições de investimento e tomada de empréstimo, for máxima, conforme (28); (ii) a poupança for igual ao investimento, conforme (29); e (iii) o retorno para os bancos em (30) for máximo.

Ao decidir o consumo no período inicial, o agente automaticamente decide o valor  $s_i$  dos recursos excedentes. Na próxima seção será analisada a alocação destes recursos, que corresponde à decisão de quanto poupar e de quanto investir no projeto. Tal decisão é sujeita às restrições de riqueza, investimento mínimo e valor máximo do empréstimo que pode ser obtido através dos bancos, considerados o retorno do depósito, o custo do empréstimo e o risco e retorno do investimento no projeto disponível na economia.

### 3. CARTEIRA ÓTIMA DE INVESTIMENTO PARA UM DADO NÍVEL DE RECURSOS EXCEDENTES

Antes de resolvermos a otimização (28), será útil analisarmos o comportamento do valor ótimo de  $\omega_i$ , que define a alocação de recursos excedentes entre projeto, poupança e empréstimo, para um dado valor  $s_i = x_0$ , de modo que seja possível pesquisar algumas condições de regularidade bem como particularidades do problema como definido neste modelo. Essa alocação ótima será representada por  $\omega_i^*|_{s_i=x_0}$  e, como a utilidade do primeiro período só depende de  $s_i$ , pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \omega_i^*|_{s_i=x_0} &= \arg \max_{\omega_i \in \{0\} \cup \left[\frac{K}{s_i}, \frac{1}{1-\alpha}\right]} \mathbb{E} \left[ \ln \left\{ s_i \left( \omega_i (1 + \tilde{r}) + (1 - \omega_i) (1 + r(\omega_i)) \right) \right\} \right] \\ &= \arg \max_{\omega_i \in \{0\} \cup \left[\frac{K}{s_i}, \frac{1}{1-\alpha}\right]} \mathbb{E} \left[ \ln s_i + \ln \left( \omega_i (1 + \tilde{r}) + (1 - \omega_i) (1 + r(\omega_i)) \right) \right] \\ &= \arg \max_{\omega_i \in \{0\} \cup \left[\frac{K}{s_i}, \frac{1}{1-\alpha}\right]} \mathbb{E} \left[ \ln \left( \omega_i (1 + \tilde{r}) + (1 - \omega_i) (1 + r(\omega_i)) \right) \right] \\ &= \arg \max_{\omega_i \in \{0\} \cup \left[\frac{K}{s_i}, \frac{1}{1-\alpha}\right]} \left\{ \pi \ln \left( \omega_i (1 + r^S) + (1 - \omega_i) (1 + r(\omega_i)) \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \pi) \ln \left( \omega_i (1 + r^F) + (1 - \omega_i) (1 + r(\omega_i)) \right) \right\} \\ &= \arg \max_{\omega_i \in \{0\} \cup \left[\frac{K}{s_i}, \frac{1}{1-\alpha}\right]} \left\{ \pi \ln \left( \omega_i (r^S - r(\omega_i)) + (1 + r(\omega_i)) \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \pi) \ln \left( \omega_i (r^F - r(\omega_i)) + (1 + r(\omega_i)) \right) \right\} \end{aligned} \quad (31)$$



Se  $K/s_i > 1/(1 - \alpha)$  então  $\omega_i^*|_{s_i=x_0} = 0$ , de modo que nenhum agente com  $K/d_{0,i} > 1/(1 - \alpha) \Rightarrow d_{0,i} < (1 - \alpha)K$  poderá investir no projeto.

Neste ponto, cabe estabelecer algumas condições de regularidade para os retornos dos projetos. Como  $r^s > r^F$ , há três intervalos abertos em que  $r(\omega_i)$  pode estar. Estes intervalos são considerados abertos para evitar a igualdade e simplificar a manipulação algébrica quando termos em  $r^s - r(\omega_i)$  ou  $r(\omega_i) - r^F$  estiverem no denominador. Se  $r_p$  estiver à direita de  $r^s$  ou à esquerda de  $r^F$ , há dominância estocástica de primeira ordem do depósito ou do investimento no projeto, respectivamente, e a utilidade esperada no segundo período será claramente máxima quando  $\omega_i = 0$ , se  $r_p > r^s > r^F$ , ou  $\omega_i = 1$ , se  $r^s > r^F > r_p$ , de modo que um dos dois, depósito ou investimento, nunca seria feito: se a taxa de equilíbrio  $r_p$  for muito alta, nenhum projeto na economia será feito, mas se for muito baixa, nenhum depósito será feito e não existirá intermediação financeira.

Em relação a  $r_b$ , dado que  $r^s > r^F > r_b \implies r^s > r^F > r_p$ , ao excluirmos a possibilidade de que  $r^s > r^F > r_p$  também estamos admitindo que não ocorre  $r^s > r^F > r_b$ . Adicionalmente,  $r_b > r^s > r^F$  também não pode ocorrer, pois isso implicaria na inviabilidade do financiamento dos projetos com dívida, já que a contração de dívida para investimento em projetos significaria simplesmente a redução de riqueza no segundo período. Como estamos admitindo que toda a dotação está disponível no primeiro período, neste caso também não haveria necessidade da intermediação financeira. Assim, a própria existência do sistema financeiro e a coexistência de depósitos e investimentos em projetos na economia, estes últimos possivelmente financiados com dívida, pressupõem que a remuneração dos depósitos e o custo das dívidas sejam tais que

$$r^s > r(\omega_i) > r^F, \quad (32)$$

para qualquer valor de  $\omega_i$ .

A análise mais importante que pode ser tirada de (31), contudo, é que, a menos das restrições, a alocação ótima independe de  $s_i$ , e este fato, essencial para a solução final do problema, pode ser estabelecido como

$$\omega_i^0|_{s_i=x_0} = \omega_i^0, \quad (33)$$

ou seja, a alocação ótima irrestrita no segundo período para  $s_i = x_0$ , representada por  $\omega_i^0|_{s_i=x_0}$ , é igual à alocação ótima irrestrita no segundo período qualquer que seja o valor de  $s_i$ , representada por  $\omega_i^0$ .

Para achar tal alocação, independente de restrições, inicialmente é necessário estudar o comportamento da expressão  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  que se deseja maximizar em (31).  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  é definida e contínua entre

$$\omega_i(r^s - r(\omega_i)) + (1 + r(\omega_i)) = 0 \implies \omega_i = -\frac{1 + r(\omega_i)}{r^s - r(\omega_i)} \quad (34)$$

e

$$\omega_i(r^F - r(\omega_i)) + (1 + r(\omega_i)) = 0 \implies \omega_i = \frac{1 + r(\omega_i)}{r(\omega_i) - r^F}. \quad (35)$$

De  $r^s > r(\omega_i)$  resulta que (34) é sempre menor que zero e, portanto,  $r(\omega_i) = r_p$ . Por outro lado, de  $r(\omega_i) > r^F > -1$  resulta que (35) é sempre maior que 1, de modo que neste caso,  $r(\omega_i) = r_b$ . Como resultado, o domínio de  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  em função de  $\omega_i$  é

$$\text{Dom} \left( E \left[ \ln \frac{c_{1,i}}{s_i} \right] \right) = \left\{ \omega_i \in \mathbb{R} \mid -\frac{1 + r_p}{r^s - r_p} < \omega_i < \frac{1 + r_b}{r_b - r^F} \right\}. \quad (36)$$

É interessante notar que, dada a condição de regularidade 32, a restrição (ii) do programa de otimização (28) torna irrelevante o lado esquerdo de (36). Já o lado direito da condição de regularidade (36)

pode tornar irrelevante a restrição (i) em (28) caso ocorra

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\alpha} > \frac{1+r_b}{r_b-r^F} &\implies r_b-r^F > 1+r_b-\alpha-\alpha r_b \\ \alpha(1+r_b) &> 1+r^F \\ \alpha &> \frac{1+r^F}{1+r_b}, \end{aligned}$$

ou seja, se a restrição ao crédito for pouco rigorosa, ela torna-se irrelevante frente ao risco de perdas com o projeto. Dessa maneira, assumiremos que

$$\alpha \leq \frac{1+r^F}{1+r_b}, \quad (37)$$

de modo que (32) em conjunto com a restrição (i) em (28), assumindo que vale (37), garantem que (36) seja obedecida. É importante ressaltar que a igualdade em (37) corresponde à utilização de (15) para a restrição de crédito, que já é conservadora. Agora se demonstra outra propriedade desejável de tal relação: sua utilização garante que  $\omega_i$  obedeça (36).

Para se encontrar o máximo de  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  em (36), faz-se necessário analisar suas derivadas onde estas estão definidas. A primeira derivada parcial em relação a  $\omega_i$  é:

$$\frac{\partial E\left[\ln \frac{c_{1,i}}{s_i}\right]}{\partial \omega_i} = \pi \frac{r^S - r(\omega_i)}{\omega_i(r^S - r(\omega_i)) + (1+r(\omega_i))} + (1-\pi) \frac{r^F - r(\omega_i)}{\omega_i(r^F - r(\omega_i)) + (1+r(\omega_i))}, \quad (38)$$

que não é definida em  $\omega_i = 1$ , já que  $r(\omega_i)$  não é diferenciável nesse ponto. Embora  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  não seja diferenciável em  $\omega_i = 1$ , é possível encontrar os limites laterais da derivada:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_i \rightarrow 1^-} \frac{\partial E\left[\ln \frac{c_{1,i}}{s_i}\right]}{\partial \omega_i} &= \pi \frac{r^S - r_p}{1 \times (r^S - r_p) + (1+r_p)} + (1-\pi) \frac{r^F - r_p}{1 \times (r^F - r_p) + (1+r_p)} \\ &= \frac{\pi(r^S - r_p)}{1+r^S} + \frac{(1-\pi)(r^F - r_p)}{1+r^F} \\ &= \frac{\pi(r^S - r_p)(1+r^F) + (1-\pi)(r^F - r_p)(1+r^S)}{(1+r^S)(1+r^F)} \\ &= \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F - r_p(1+\pi r^F + (1-\pi)r^S)}{(1+r^S)(1+r^F)} \\ &= \frac{(E[\tilde{r}] - r_p)(1+\pi r^F + (1-\pi)r^S) - \sigma^2(\tilde{r})}{(1+r^S)(1+r^F)}, \end{aligned} \quad (39)$$

em que o último passo vem de (12). De modo análogo, obtém-se

$$\lim_{\omega_i \rightarrow 1^-} \frac{\partial E\left[\ln \frac{c_{1,i}}{s_i}\right]}{\partial \omega_i} = \frac{(E[\tilde{r}] - r_p)(1+\pi r^F + (1-\pi)r^S) - \sigma^2(\tilde{r})}{(1+r^S)(1+r^F)} \quad (40)$$

Como  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  é contínua em  $\omega_i = 1$  (ou seja, os seus limites laterais são iguais ao seu valor em  $\omega_i = 1$ ),  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  possui um canto em  $\omega_i = 1$  após o qual a derivada varia bruscamente.



Além disso, de  $r^F > -1$  resulta que  $1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S > (1 - \pi)(1 + r^S) > 0$ ,<sup>4</sup> e como  $r_b > r_p$ , a variação brusca após o canto em  $\omega_i = 1$  é negativa e a derivada diminui de valor.

A segunda derivada parcial em relação a  $\omega_i$  é

$$\frac{\partial^2 E \left[ \ln \frac{c_{1,i}}{s_i} \right]}{\partial \omega_i^2} = -\pi \left( \frac{r^S - r(\omega_i)}{\omega_i (r^S - r(\omega_i)) + (1 + r(\omega_i))} \right)^2 - (1 - \pi) \left( \frac{r^F - r(\omega_i)}{\omega_i (r^S - r(\omega_i)) + (1 + r(\omega_i))} \right)^2, \quad (41)$$

que também não está definida em  $\omega_i = 1$ .

Como  $r^S > r(\omega_i) > r^F$ , (41) é obviamente negativa em todos os pontos em que é contínua e a primeira derivada é estritamente decrescente nos intervalos em que também é contínua, além de variar negativamente ao passar pelo seu ponto de descontinuidade em  $\omega_i = 1$ . Se (39) e (40) tiverem sinais opostos, ou se um deles tiver valor nulo, então  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  cresce (a taxas decrescentes) até  $\omega_i = 1$  e decresce a partir daí, de modo que  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  terá um máximo global em  $\omega_i = 1$ .

Alternativamente, se (39) e (40) forem diferentes de zero e possuírem o mesmo sinal,  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  terá um máximo global quando (38) for igual a zero. Esse máximo global ocorrerá para  $\omega_i = \omega_i^0$ , tal que:

$$\begin{aligned} & \pi \frac{r^S - r(\omega_i^0)}{\omega_i^0 (1 + r^S) + (1 - \omega_i^0)(1 + r(\omega_i^0))} + (1 - \pi) \frac{r^F - r(\omega_i^0)}{\omega_i^0 (1 + r^F) + (1 - \omega_i^0)(1 + r(\omega_i^0))} = 0 \\ \implies & \pi \frac{r^S - r(\omega_i^0)}{\omega_i^0 (r^S - r(\omega_i^0)) + (1 + r(\omega_i^0))} = (\pi - 1) \frac{r^F - r(\omega_i^0)}{\omega_i^0 (r^F - r(\omega_i^0)) + (1 + r(\omega_i^0))} \\ & \pi \frac{\omega_i^0 (r^F - r(\omega_i^0)) + (1 + r(\omega_i^0))}{r^F - r(\omega_i^0)} = (\pi - 1) \frac{\omega_i^0 (r^S - r(\omega_i^0)) + (1 + r(\omega_i^0))}{r^S - r(\omega_i^0)} \\ & \pi \left( \omega_i^0 + \frac{1 + r(\omega_i^0)}{r^F - r(\omega_i^0)} \right) = (\pi - 1) \left( \omega_i^0 + \frac{1 + r(\omega_i^0)}{r^S - r(\omega_i^0)} \right) \\ & \omega_i^0 = -\pi \frac{1 + r(\omega_i^0)}{r^F - r(\omega_i^0)} + (\pi - 1) \frac{1 + r(\omega_i^0)}{r^S - r(\omega_i^0)} \\ & \omega_i^0 = \pi \left( \frac{1 + r(\omega_i^0)}{r(\omega_i^0) - r^F} \right) + (1 - \pi) \left( \frac{1 + r(\omega_i^0)}{r^S - r(\omega_i^0)} \right), \end{aligned} \quad (42)$$

que é uma média ponderada pelas probabilidades  $\pi$  e  $1 - \pi$  dos pontos de descontinuidade (34) e (35), de modo que  $\omega_i^0$  seguramente pertence ao domínio de  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  se assumirmos que  $0 < \pi < 1$ , pois se  $\pi = 0$  ou  $\pi = 1$  teríamos o mesmo problema de dominância estocástica de primeira ordem que foi evitado ao assumirmos que  $r^S$  e  $r^F$  são tais que  $r^S > r(\omega_i) > r^F$ .

Nestas condições e dado  $\omega_i \neq 1$ , existe uma vizinhança ao redor de  $\omega_i^0$  em que (38) é contínua, mudando de sinal nesta vizinhança: é positiva à esquerda de  $\omega_i^0$  e negativa à direita, já que (38) é estritamente decrescente. Se (39) e (40) forem ambos negativos, então  $\omega_i = 1$  ocorre à direita de  $\omega_i^0$  e, portanto,  $\omega_i^0 < 1$ . Se (39) e (40) forem ambos positivos, então  $\omega_i = 1$  ocorre à esquerda de  $\omega_i^0$  e, portanto,  $\omega_i^0 > 1$ .

Adicionalmente, como  $\omega_i < 0$  não pode ser solução para o problema (31), se  $\omega_i^0 \leq 0$ , então a utilidade esperada para  $\omega_i \geq 0$  estará num trecho decrescente (derivada negativa), e o máximo, considerando-se

<sup>4</sup>  $r^F > -1 \implies \pi r^F > -\pi \implies 1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S > (1 - \pi) + (1 - \pi)r^S \implies 1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S > (1 - \pi)(1 + r^S) > 0$ .

a restrição  $\omega_i \geq 0$ , ocorrerá para  $\omega_i^* = 0$ , ou seja, ninguém, independentemente da riqueza inicial, terá interesse em investir no projeto, logo, qualquer projeto viável na economia deverá ser tal que  $\omega_i^0 > 0$ :

$$\begin{aligned}
 \omega_i^0 > 0 &\implies \pi \frac{1+r(\omega_i^0)}{r(\omega_i^0)-r^F} + (1-\pi) \left( -\frac{1+r(\omega_i^0)}{r^S-r(\omega_i^0)} \right) > 0 \\
 &\pi \frac{1+r(\omega_i^0)}{r(\omega_i^0)-r^F} > (1-\pi) \frac{1+r(\omega_i^0)}{r^S-r(\omega_i^0)} \\
 &\pi \frac{1}{r(\omega_i^0)-r^F} > (1-\pi) \frac{1}{r^S-r(\omega_i^0)} && \text{pois } 1+r(\omega_i^0) > 0 && (43) \\
 &\pi(r^S-r(\omega_i^0)) > (1-\pi)(r(\omega_i^0)-r^F) && \text{pois } r^S > r(\omega_i^0) > r^F \\
 &\pi r^S - \pi r(\omega_i^0) > (1-\pi)r(\omega_i^0) - (1-\pi)r^F \\
 &\pi r^S + (1-\pi)r^F > (1-\pi)r(\omega_i^0) + \pi r(\omega_i^0) \\
 &E[\tilde{r}] > r(\omega_i^0),
 \end{aligned}$$

ou seja, um projeto só será viável se seu retorno esperado for maior que o retorno certo do depósito ou que o custo do empréstimo usado para financiá-lo. Este resultado era esperado já que a utilidade logarítmica é côncava e, portanto, apresenta aversão ao risco.

Em resumo, há três possibilidades para o comportamento de  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  dependendo dos valores de  $\pi$ ,  $r^S$  e  $r^F$ , que definem o risco e retorno do projeto, e das taxas de equilíbrio da economia,  $r_p$  e  $r_b$ . A primeira possibilidade é que (39) e (40) possuam sinais opostos ou uma delas possua valor nulo, caso em que o máximo global de  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  ocorre para  $\omega_i = 1$ . Um exemplo deste caso é apresentado na Figura 3.

A segunda possibilidade é que as derivadas laterais sejam ambas negativas, implicando em  $r(\omega_i^0) < 1$ , como mostrado na Figura 4.

Finalmente, a terceira possibilidade é que as derivadas laterais sejam ambas positivas, resultando em  $\omega_i^0 > 1$  (Figura 5).

Como (39) é sempre maior que (40), as derivadas laterais serão positivas quando (40) for positivo:

$$\begin{aligned}
 \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F - r_b(1 + \pi r^F + (1-\pi)r^S)}{(1+r^S)(1+r^F)} &= \frac{(E[\tilde{r}] - r_b)(1 + \pi r^F + (1-\pi)r^S) - \sigma^2(\tilde{r})}{(1+r^S)(1+r^F)} > 0 \\
 \implies r_p < r_b < \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1-\pi)r^S} &= E[\tilde{r}] - \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1 + \pi r^F + (1-\pi)r^S},
 \end{aligned} \tag{44}$$

negativas quando (39) for negativo:

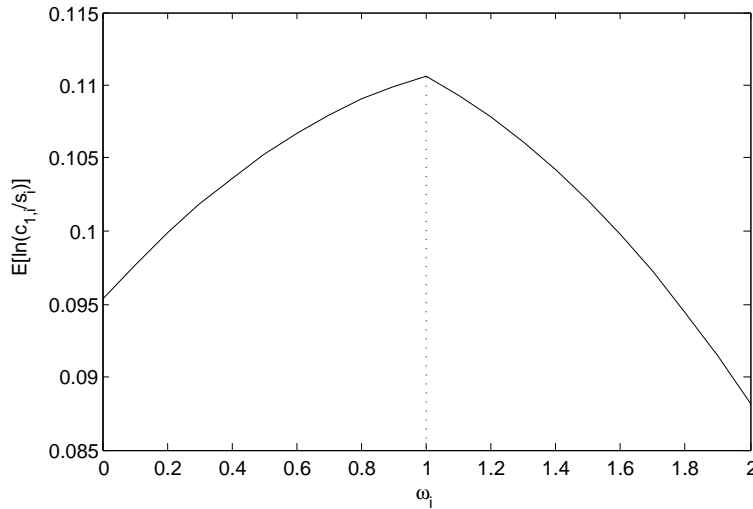
$$\begin{aligned}
 \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F - r_p(1 + \pi r^F + (1-\pi)r^S)}{(1+r^S)(1+r^F)} &= \frac{(E[\tilde{r}] - r_p)(1 + \pi r^F + (1-\pi)r^S) - \sigma^2(\tilde{r})}{(1+r^S)(1+r^F)} < 0 \\
 \implies r_b > r_p > \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1-\pi)r^S} &= E[\tilde{r}] - \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1 + \pi r^F + (1-\pi)r^S},
 \end{aligned} \tag{45}$$

e haverá máximo global em  $\omega_i = 1$  nos casos intermediários:

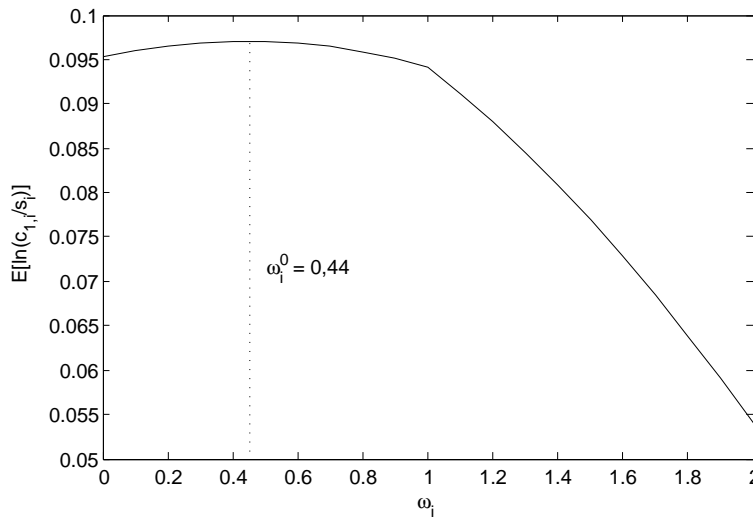
$$r_b \geq \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1-\pi)r^S} = E[\tilde{r}] - \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1 + \pi r^F + (1-\pi)r^S} \geq r_p. \tag{46}$$



**Figura 3.** Máximo global de  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  em  $\omega_i = 1$  quando as derivadas laterais possuem sinais distintos. Neste exemplo  $\pi = 59\%$ ,  $r^S = 25\%$ ,  $r^F = -5\%$ ,  $r_p = 10\%$  e  $r_b = 12\%$ .



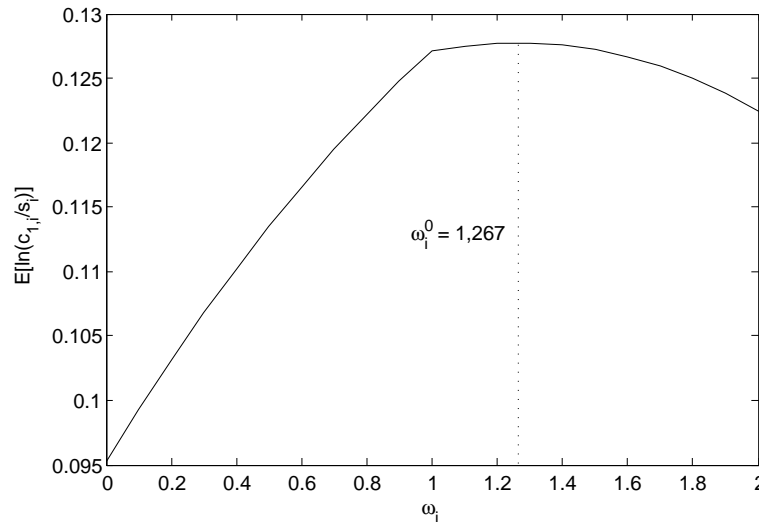
**Figura 4.** Máximo global de  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  em  $\omega_i = 0,44 < 1$  quando as derivadas laterais são negativas. Neste exemplo  $\pi = 53\%$ ,  $r^S = 25\%$ ,  $r^F = -5\%$ ,  $r_p = 10\%$  e  $r_b = 12\%$ .



Ou seja, lembrando que  $E[\bar{r}] > r_b > r_p$  é uma condição de regularidade, o resultado final dependerá do risco do projeto. Dado um nível de retorno  $E[\bar{r}]$ , tanto  $\sigma^2(\bar{r})$  quanto  $\frac{\sigma^2(\bar{r})}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^S}$  crescem à medida que  $r^S$  aumenta ou  $r^F$  diminui.<sup>5</sup>

<sup>5</sup>Fixando o retorno esperado em  $\bar{r}$ , então  $\pi = \frac{(\bar{r}-r^F)}{(r^S-r^F)}$  e  $(1-\pi) = \frac{(r^S-\bar{r})}{(r^S-r^F)}$ , resultando em  $\sigma^2(\bar{r}) = (r^S-\bar{r})(\bar{r}-r^F)$  e  $\frac{\sigma^2(\bar{r})}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^S} = \frac{(r^S-\bar{r})(\bar{r}-r^F)}{1-\bar{r}+r^S+r^F}$ . Usando  $r^S > \bar{r} > r^F$  e mais a condição de responsabilidade limitada do projeto, as derivadas parciais tanto de  $\sigma^2(\bar{r})$  como de  $\frac{\sigma^2(\bar{r})}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^S}$  em relação a  $r^S$  e  $r^F$  possuem o mesmo sinal.

**Figura 5.** Máximo global de  $E[\ln(c_{1,i}/s_i)]$  em  $\omega_i = 1,267 > 1$  quando as derivadas laterais são positivas. Neste exemplo  $\pi = 65\%$ ,  $r^S = 25\%$ ,  $r^F = -5\%$ ,  $r_p = 10\%$  e  $r_b = 12\%$ .



Se o projeto envolver pouco risco, vale a condição (44) e haverá estímulo para usar financiamento no projeto ( $\omega_i^0 > 1$ ). Se o projeto envolver risco moderado, ocorre a situação em (46) e todo o recurso excedente será investido no projeto, mas sem alavancagem ( $\omega_i = 1$ ). Finalmente, se o risco do projeto for muito alto, uma parte dos recursos excedentes ao consumo no primeiro período será poupada ( $0 < \omega_i^0 < 1$ ). Mesmo que exista a possibilidade de financiamento, riscos desestimulam a utilização de empréstimos. As consequências desta conclusão e sua relação com a riqueza inicial do indivíduo constam da próxima seção.

Assim, algebricamente:

- Máximo global em  $0 < \omega_i^0 < 1$ : projeto com alto risco e vale a condição (45);
- Máximo global em  $\omega_i^0 > 1$ : projeto com baixo risco e vale a condição (44);
- Máximo global em  $\omega_i = 1$ : projeto com risco moderado e vale a condição (46).

Trata-se de um resultado importante porque mostra que a alocação ótima do excedente ao consumo independe da riqueza do agente. Na ausência de fricções, a proporção do excedente ao consumo que seria investida só depende do perfil de risco e retorno do projeto, em relação ao custo do empréstimo e ao retorno dos depósitos. Se essa proporção é a mesma para cada agente da economia, também é a mesma para a economia como um todo, de modo que todos tenderiam a poupar ou todos tenderiam a tomar emprestado, e o volume de equilíbrio de poupança e investimento seria zero.

A única fonte de diferenciação possível para as preferências de alocação  $\omega_i$  entre os agentes da população seria o parâmetro  $\rho_i$ , a preferência relativa entre consumir no presente e consumir no futuro,<sup>6</sup> que não poderia ser uniforme entre os agentes e teria que ser incluído na maximização efetuada em (31). Neste caso, a eficiência do sistema financeiro dependeria dos valores de  $\rho_i$ , e a distribuição de

<sup>6</sup>Se tivesse sido utilizada uma função utilidade CRRA com parâmetro de aversão ao risco (por exemplo,  $U(c) = c^{1-\nu}/(1-\nu)$ , em que  $\nu$  é o nível de aversão ao risco) a variação deste parâmetro entre os agentes também poderia ser uma fonte de diferenciação entre as escolhas de alocação ótima do excedente ao consumo. Da mesma maneira, expectativas diversas quanto aos retornos do projeto também diferenciariam as escolhas de alocação ótima. De qualquer modo, estes fatores só adicionam complexidade sem melhorar a explicação dos efeitos que são objeto de análise do modelo.





riqueza seria irrelevante. Se considerarmos as fricções, nominalmente: a restrição ao investimento mínimo e à concessão de crédito, os agentes com menos recursos não podem alocar seus excedentes de maneira ótima. Assim, a existência de fricções torna a distribuição de renda relevante para a definição do volume de equilíbrio de poupança e investimento, e para a eficiência do sistema financeiro. Na seção seguinte serão quantificados os efeitos das fricções na definição da alocação do excedente ao consumo, prescindindo-se da diferenciação nos valores de  $\rho_i$ , que serão considerados uniformes entre os agentes econômicos.

#### 4. SOLUÇÃO DO PROGRAMA DE OTIMIZAÇÃO

É interessante ganhar alguma intuição sobre a otimização antes de resolvê-la. Como exemplo, a [Figura 6](#) mostra a superfície de utilidades esperadas para um agente  $i1$  com dotação inicial  $d_{0,i1} = 100$  e com  $\rho_{i1} = 70\%$ , em uma economia em que o projeto exige investimento inicial  $K = 20$ , a chance de sucesso é  $\pi = 70\%$ , com retorno em caso de sucesso de  $r^s = 50\%$  e retorno em caso de fracasso de  $r^f = -30\%$ . Utilizou-se ainda  $r_b = 24,7\%$  e  $r_p = 8,7\%$ . Nesta situação, como  $24,7\% \geq E[\tilde{r}] - \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^f+(1-\pi)r^s} = 11,7\% \geq 8,7\%$ , temos o caso em que  $\omega_{i1} = 1$ .

Se não houvesse restrições, o máximo de utilidade seria obtido para:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\ln(d_{0,i} - s_i) + \rho_i f(\omega_i, s_i))}{\partial s_i} &= 0 \\ \frac{-1}{d_{0,i} - s_i^*} + \rho_i \frac{1}{s_i^*} &= 0 \\ s_i^* &= d_{0,i} \frac{\rho_i}{1 + \rho_i} \end{aligned} \quad (47)$$

e

$$\omega_i^* = \omega_i^0 = \begin{cases} 1, & \text{se } r_b \geq E[\tilde{r}] - \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^f+(1-\pi)r^s} \geq r_p \\ \pi \left( \frac{1+r(\omega_i^0)}{r(\omega_i^0)-r^f} \right) + (1-\pi) \left( -\frac{1+r(\omega_i^0)}{r^s-r(\omega_i^0)} \right), & \text{nos demais casos,} \end{cases} \quad (48)$$

conforme discutido na seção anterior.

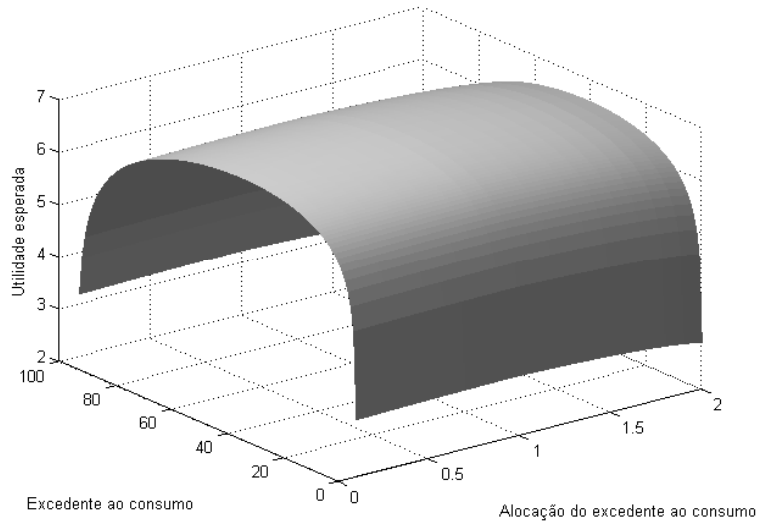
As curvas de nível da superfície na [Figura 6](#) são mostradas na [Figura 7](#), destacando-se o ótimo irrestrito em  $s_{i1} = 41,18$  e  $\omega_{i1} = 1$ .

Se forem incluídas as restrições, a solução deverá ser escolhida dentre os pontos da união entre o segmento de reta com  $\omega_i = 0$  e a região delimitada à esquerda pela restrição de investimento mínimo e à direita pela proporção máxima de dívida, como mostrado na [Figura 8](#).

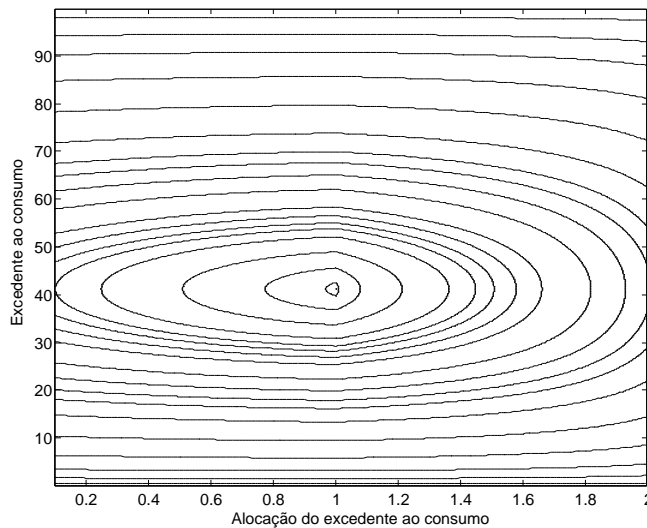
Por (28), a restrição ao investimento mínimo corresponde à hipérbole  $\omega_i = K/s_i$  e a restrição ao financiamento máximo corresponde à reta  $\omega_i = \frac{1}{(1-\alpha)}$ .

Para simplificar a análise, consideramos inicialmente apenas a restrição ao investimento mínimo, pois se trata da restrição mais complexa matematicamente e a restrição ao financiamento poderá ser incluída adiante sem muito esforço. Na medida em que  $d_{0,i}$  vai diminuindo, o conjunto de soluções possíveis vai reduzindo-se, mas a restrição de capital mínimo não será limitante enquanto o ponto de máximo sem restrição estiver no conjunto de soluções possíveis. O máximo irrestrito sairá da região de soluções possíveis para valores de  $d_{0,i}$  menores que aqueles que fazem com que a hipérbole  $\omega_i = K/s_i$

**Figura 6.** Utilidade esperada para  $r^S = 50\%$ ,  $r^F = -30\%$ ,  $p = 70\%$ ,  $K = 20$ ,  $\alpha = 40\%$ ,  $\rho_{i1} = 70\%$ ,  $d_{0,i1} = 100$ ,  $r_b = 24,7\%$  e  $r_p = 8,7\%$ .



**Figura 7.** Curvas de indiferença correspondentes à utilidade esperada exibida na Figura 6.



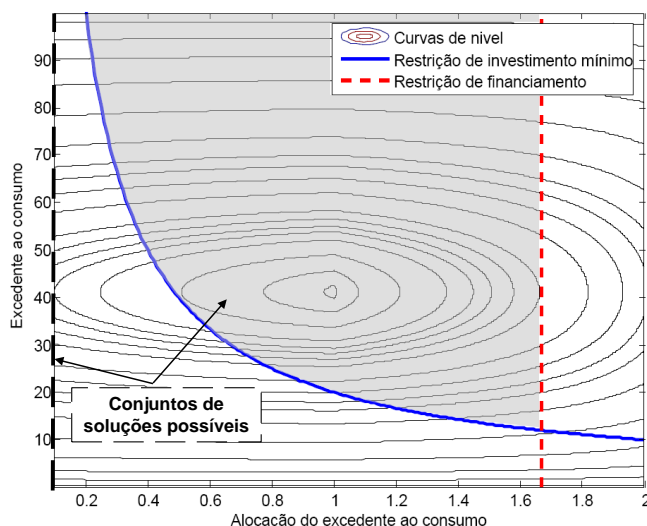
passa pelo ponto de máximo sem restrição. Logo, a restrição será limitante quando:

$$s_i^* \omega_i^* < K \implies d_{0,i} \frac{\rho_i}{1 + \rho_i} \omega_i^0 < K$$

$$\implies d_{0,i} < \begin{cases} \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i}, & \text{se } r_b \geq E[\tilde{r}] - \frac{\sigma^2(\tilde{r})}{1+\pi r^F + (1-\pi)r^S} \geq r_p \\ \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i \left[ \pi \left( \frac{1+r(\omega_i^0)}{r(\omega_i^0) - r^F} \right) + (1-\pi) \left( \frac{1+r(\omega_i^0)}{r^S - r(\omega_i^0)} \right) \right]}, & \text{nos demais casos.} \end{cases} \quad (49)$$



**Figura 8.** Restrições quanto ao investimento mínimo e ao limite de financiamento.



No nosso exemplo isto ocorre quando, mantendo-se todos os demais parâmetros constantes,  $d_{0,i} < 48,57$ . A situação limítrofe, quando  $d_{0,i} = 48,57$ , está ilustrada na [Figura 9](#).

Na medida em que  $d_{0,i}$  sofre reduções posteriores, o máximo passa a ocorrer sobre a hipérbole  $\omega_i = K/s_i$ , no ponto em que esta tangencia uma das curvas de indiferença. O lagrangeano do problema com a restrição ao investimento mínimo, nestas condições, fica:

$$L(\omega_i, s_i, \lambda) = \ln(d_{0,i} - s_i) + \rho_i f(\omega_i, s_i) - \lambda(s_i \omega_i - K). \quad (50)$$

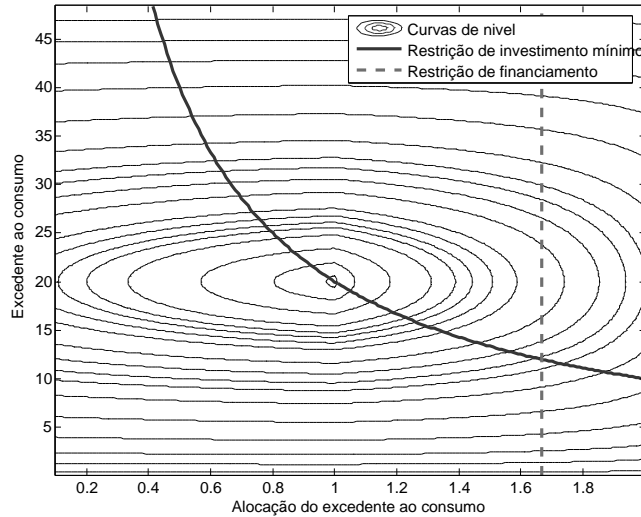
Para evitar o problema da descontinuidade de  $r(\omega_i)$ , consideraremos que seu valor é uma constante  $r$ . Após obtermos uma solução em função de  $r$ , este será substituído por aquele entre os possíveis valores  $r_p$  ou  $r_b$  que for compatível com o  $\omega_i^*$  correspondente ( $\omega_i^* < 1$  para  $r_p$  e  $\omega_i^* > 1$  para  $r_b$ ). Se os dois resultados forem incompatíveis, é porque a solução ocorre no ponto de descontinuidade, em que  $\omega_i = 1$  e  $s_i = K$ . Graficamente, uma possibilidade seria como aquela representada na [Figura 10](#).

Intuitivamente, foi representada na [Figura 10](#) apenas uma possibilidade para a solução de canto em que o máximo da utilidade, dado um valor fixo  $s_i = K$ , ocorre a esquerda de  $\omega_i = 1$ . É possível concluir isso porque, visualmente, a inclinação da curva de indiferença, destacada com linha contínua, tem inclinação negativa à esquerda de  $\omega_i = 1$ , o que quer dizer que os pontos numa vizinhança à esquerda de  $\omega_i = 1$ , dado  $s_i = K$ , são interiores à curva de indiferença, possuindo, portanto, utilidade maior que no ponto  $\omega_i = 1$  e  $s_i = K$ . Isso corresponde ao caso em que vale a condição (45). Já no caso em que vale a condição (44), deslocamentos numa vizinhança à direita de  $\omega_i = 1$  devem aumentar a utilidade, e, portanto, a inclinação da curva de indiferença deve ser positiva à direita de  $\omega_i = 1$  para que os pontos correspondentes a uma vizinhança à direita de  $\omega_i = 1$ , dado  $s_i = K$ , estejam no interior da curva de indiferença. Como a derivada à esquerda de  $\omega_i = 1$  também é positiva, pois tem que ser maior que a derivada à direita de  $\omega_i = 1$  uma vez que a curva de indiferença é convexa, isso significa que não há como existir solução de canto no caso em que vale a condição (44). Esta situação é ilustrada na [Figura 11](#).

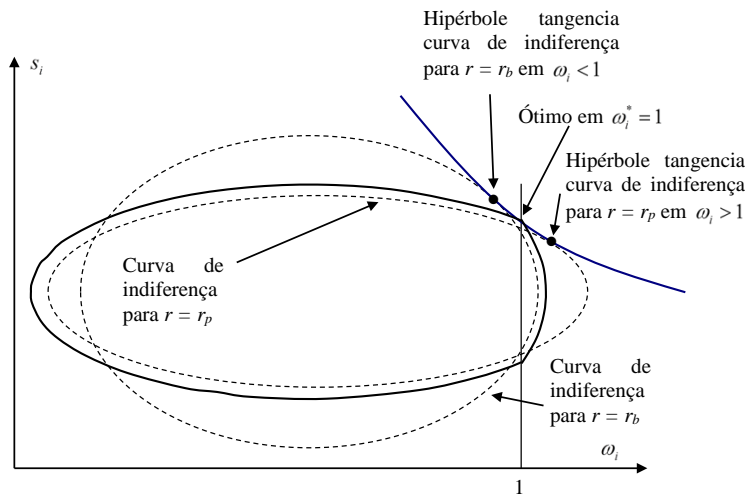
Contudo, é possível estabelecer as condições para a solução de canto de maneira mais rigorosa. A derivada da restrição hiperbólica é dada por

$$\left. \frac{ds_i}{d\omega_i} \right|_{\omega_i s_i = K} = \frac{d}{d\omega_i} \left( \frac{K}{\omega_i} \right) = -\frac{K}{\omega_i^2}.$$

**Figura 9.** Situação limítrofe a partir da qual reduções em  $d_{0,i}$  tornam a restrição ao investimento mínimo limitante em relação ao ótimo irrestrito.



**Figura 10.** Exemplo de solução de canto em que  $\omega_i^* = 1$  e  $s_i^* = K$ .



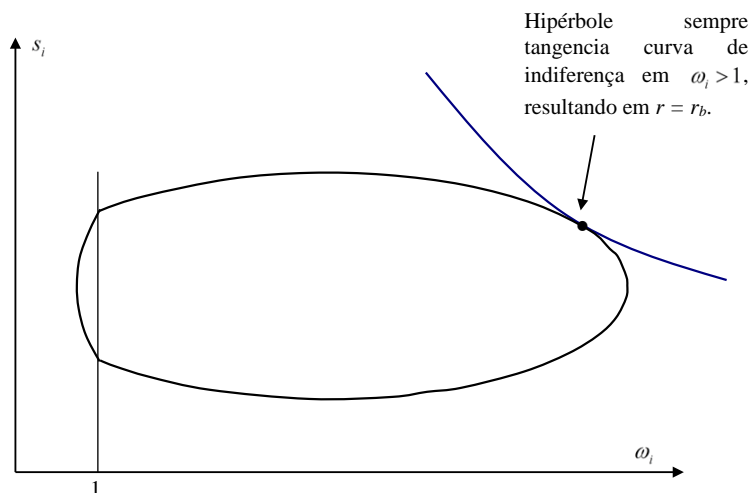
Como a solução de canto somente ocorrerá para  $\omega_i = 1$ , a derivada da restrição hiperbólica neste ponto terá o valor  $-K$ .

Por outro lado, as curvas de nível da função utilidade, que correspondem às curvas de indiferença, são dadas por

$$\begin{aligned}
 F(\omega_i, s_i) &= \ln(d_{0,i} - s_i) + \rho_i f(\omega_i, s_i) \\
 \implies \ln(d_{0,i} - s_i) + \rho_i \left\{ \ln s_i + E \left[ \ln \left( (1 + \tilde{r}) \omega_i + (1 + r(\omega_i))(1 - \omega_i) \right) \right] \right\} &= h,
 \end{aligned} \tag{51}$$



**Figura 11.** Quando vale a condição (44) não há possibilidade de solução de canto.



em que  $h$  é um nível constante de utilidade esperada. Nos pontos de continuidade da função utilidade esperada, ou seja, no seu domínio e assumindo que  $r(\omega_i) = r$ , a derivada total de  $F(\omega_i, s_i)$ ,  $dF(\omega_i, s_i) = (\partial F/\partial \omega_i) d\omega_i + (\partial F/\partial s_i) ds_i$ , será

$$dF(\omega_i, s_i) = \rho_i E \left[ \frac{\tilde{r} - r}{(1 + \tilde{r})\omega_i + (1 + r)(1 - \omega_i)} \right] d\omega_i + \left( -\frac{1}{d_{0,i} - s_i} + \rho_i \frac{1}{s_i} \right) ds_i, \quad (52)$$

mas como a derivada total é zero ao longo de um curva de nível, resulta que a inclinação da reta tangente a uma curva de nível em um ponto  $(\omega_i, s_i)$ , será

$$\begin{aligned} \rho_i E \left( \frac{\tilde{r} - r}{(1 + \tilde{r})\omega_i + (1 + r)(1 - \omega_i)} \right) d\omega_i + \left( -\frac{1}{(d_{0,i} - s_i)} + \rho_i \frac{1}{s_i} \right) ds_i &= 0 \\ \Rightarrow \left. \frac{ds_i}{d\omega_i} \right|_{dF=0} &= \frac{-\rho_i E \left[ \frac{\tilde{r} - r}{(1 + \tilde{r})\omega_i + (1 + r)(1 - \omega_i)} \right]}{\left( -\frac{1}{(d_{0,i} - s_i)} + \rho_i \frac{1}{s_i} \right)}. \end{aligned} \quad (53)$$

A solução de canto tem que ocorrer no cruzamento da hipérbole  $\omega_i s_i = K$  com a reta vertical  $\omega_i = 1$ , resultando em

$$\begin{aligned} \left. \frac{ds_i}{d\omega_i} \right|_{\substack{dF=0 \\ \omega_i=1, s_i=K}} &= \frac{\rho_i E \left[ \frac{\tilde{r} - r}{1 + \tilde{r}} \right]}{-\frac{1}{d_{0,i} - K} + \frac{\rho_i}{K}} = \rho_i \frac{\pi \frac{r^S - r}{1 + r^S} + (1 - \pi) \frac{r^F - r}{1 + r^F}}{\frac{1}{d_{0,i} - K} - \frac{\rho_i}{K}} \\ &= \frac{\rho_i K (d_{0,i} - K)}{K - \rho_i (d_{0,i} - K)} \left( \pi \frac{r^S - r}{1 + r^S} + (1 - \pi) \frac{r^F - r}{1 + r^F} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Como as curvas de indiferença são fechadas e convexas, para que o ponto  $(\omega_i, s_i) = (1, K)$  seja solução de canto é necessário e suficiente que a hipérbole apenas toque, mas não cruze, a curva de nível, caso contrário existiria uma curva de nível interior, e portanto com maior utilidade, em que estaria a solução. Assim, o limite à esquerda da derivada da curva de indiferença no ponto  $(\omega_i, s_i) = (1, K)$  deve ser maior (menor em valor absoluto) que a inclinação da hipérbole dada por  $-K$ , enquanto o limite à

direita da derivada da curva de indiferença no ponto  $(\omega_i, s_i) = (1, K)$  deve ser menor (maior em valor absoluto) que  $-K$ , garantindo que o ponto  $(\omega_i, s_i) = (1, K)$  seja o único em que a hipérbole toca a curva de indiferença. Usando (54), isto pode ser expresso como

$$(\omega_i^*, s_i^*) = (1, K) \iff \begin{cases} \frac{\rho_i K(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i(d_{0,i} - K)} \left( \pi \frac{r^S - r_p}{1 + r^S} + (1 - \pi) \frac{r^F - r_p}{1 + r^F} \right) > -K \\ \frac{\rho_i K(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i(d_{0,i} - K)} \left( \pi \frac{r^S - r_b}{1 + r^S} + (1 - \pi) \frac{r^F - r_b}{1 + r^F} \right) < -K. \end{cases} \quad (55)$$

Note que

$$\pi \frac{r^S - r}{1 + r^S} + (1 - \pi) \frac{r^F - r}{1 + r^F} = \frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)} \left( \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} - r \right),$$

então segue que

$$\begin{aligned} (\omega_i^*, s_i^*) = (1, K) &\iff \begin{cases} \frac{\rho_i K(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i(d_{0,i} - K)} \frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)} \left( \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} - r_p \right) > -1 \\ \frac{\rho_i K(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i(d_{0,i} - K)} \frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)} \left( \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} - r_b \right) < -1 \end{cases} \\ &\iff 0 > -1 - \frac{\rho_i K(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i(d_{0,i} - K)} \left( \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} - r_p \right) \\ &> \frac{\rho_i K(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i(d_{0,i} - K)} \frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)} (r_p - r_b) \\ &\iff 0 < \frac{1}{\frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)}} + \frac{\rho_i(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i d_{0,i} - K} \left( \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} - r_p \right) \\ &< \frac{\rho_i(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i(d_{0,i} - K)} (r_b - r_p). \end{aligned}$$

O último passo foi possível porque  $\frac{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S}{(1 + r^S)(1 + r^F)} > 0$ , dada a condição de responsabilidade limitada,  $r^F > -1$ . Finalmente, as condições em (55) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} (\omega_i^*, s_i^*) = (1, K) &\iff 0 < \frac{(1 + r^S)(1 + r^F)}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} + \frac{\rho_i(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i d_{0,i} - K} \left( \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} - r_p \right) \\ &< \frac{\rho_i(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i(d_{0,i} - K)} (r_b - r_p). \end{aligned} \quad (56)$$

A condição (56) implica que  $\frac{\rho_i(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i(d_{0,i} - K)} > 0$ , já que  $(r_b - r_p) > 0$  por definição, e, portanto,

$$(\omega_i^*, s_i^*) = (1, K) \implies \frac{\rho_i(d_{0,i} - K)}{K - \rho_i(d_{0,i} - K)} > 0 \implies \begin{cases} \frac{K(1 + \rho_i)}{\rho_i} > d_{0,i} > K \\ \text{ou} \\ \frac{K(1 + \rho_i)}{\rho_i} < d_{0,i} < K. \end{cases}$$

Como  $\rho_i > 0$ , a última desigualdade nunca será verdadeira, resultando:

$$(\omega_i^*, s_i^*) = (1, K) \implies \frac{K(1 + \rho_i)}{\rho_i} > d_{0,i} > K \quad (57)$$



Dada a condição (57),  $d_{0,i} < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i} \implies K - \rho_i(d_{0,i} - K) > 0$ , o que nos permite reescrever (56) como:

$$\begin{aligned}
 (\omega_i^*, s_i^*) = (1, K) &\iff 0 < \frac{(K - \rho_i(d_{0,i} - K))(1 + r^S)(1 + r^F)}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} + \rho_i(d_{0,i} - K) \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} \\
 &\qquad < \rho_i(d_{0,i} - K)(r_b - r_p) \\
 \iff 0 < &\frac{K(1 + \rho_i)(1 + r^S)(1 + r^F) - \rho_i K(E[\tilde{r}] + r^S r^F)}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} + \rho_i K r_p \\
 &+ \frac{\rho_i d_{0,i}(E[\tilde{r}] + r^S r^F) - \rho_i d_{0,i}(1 + r^S)(1 + r^F)}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} - \rho_i d_{0,i} r_p < \rho_i(d_{0,i} - K)(r_b - r_p) \\
 \iff 0 < &\frac{K(1 + \rho_i)(1 + r^S + r^F + r^S r^F) - \rho_i K(E[\tilde{r}] + r^S r^F)}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} \\
 &+ \rho_i K r_p - \rho_i d_{0,i}(1 + r_p) < \rho_i(d_{0,i} - K)(r_b - r_p) \quad (58) \\
 \iff 0 < &\frac{K(1 + r^S)(1 + r^F)}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S} + \rho_i K(1 + r_p) - \rho_i d_{0,i}(1 + r_p) < \rho_i(d_{0,i} - K)(r_b - r_p) \\
 \iff d_{0,i}(1 + r_p) &< \frac{K(1 + r^S)(1 + r^F)}{\rho_i(1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S)} + K(1 + r_p) < d_{0,i}(1 + r_b) - K(r_b - r_p) \\
 \iff &\begin{cases} \frac{K(1+r^S)(1+r^F)}{\rho_i(1+r_b)(1+\pi r^F+(1-\pi)r^S)} + K < d_{0,i} \\ \text{e} \\ d_{0,i} < \frac{K(1+r^S)(1+r^F)}{\rho_i(1+r_p)(1+\pi r^F+(1-\pi)r^S)} + K. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ocorre que de  $d_{0,i} < K(1 + \rho_i)/\rho_i$  e (58) vem:

$$\frac{K(1 + r^S)(1 + r^F)}{\rho_i(1 + r_b)(1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S)} + K < d_{0,i}$$

e

$$\begin{aligned}
 d_{0,i} < \frac{K(1 + \rho_i)}{\rho_i} &\implies K < \frac{K(1 + \rho_i)}{\rho_i} - \frac{K(1 + r^S)(1 + r^F)}{\rho_i(1 + r_b)(1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S)} \\
 &\implies r_b > \frac{E[\tilde{r}] + r^S r^F}{1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S},
 \end{aligned}$$

indicando<sup>7</sup> que as condições em (58) nunca serão satisfeitas quando o projeto for de baixo risco, já que para esse caso ocorrer é necessário que  $r_p < r_b < (E[\tilde{r}] + r^S r^F)/(1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S)$ . Logo, nunca ocorrerá solução de canto quando  $\omega_i^0 > 1$ , que é a mesma conclusão a que já havíamos chegado anteriormente de forma mais intuitiva. Já para projetos de risco moderado, em que  $\omega_i^0 = 1$ , só não haverá a possibilidade de solução de canto se  $r_b = (E[\tilde{r}] + r^S r^F)/(1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S)$ , e ficam valendo as condições necessárias e suficientes para a existência de solução de canto expressas em (58), que também são válidas para projetos de risco alto, com  $0 < \omega_i^0 < 1$  e  $r_b > r_p > (E[\tilde{r}] + r^S r^F)/(1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S)$ .

Note que até agora temos assumido que as condições em (58) são válidas apenas se  $d_{0,i} < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i}$ . Contudo, como estamos tratando de uma situação em que a restrição investimento mínimo é limitante, vale a condição (49),  $d_{0,i} < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i \omega_i^0}$ , que quando  $\omega_i^0 = 1$  equivale a  $d_{0,i} < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i}$ .

<sup>7</sup>No último passo utilizou-se o fato de que  $(1 + r^S)(1 + r^F) = E[\tilde{r}] + r^S r^F + (1 + \pi r^F + (1 - \pi)r^S)$ .

Já quando  $0 < \omega_i^0 < 1$ ,  $\frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i} < \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i \omega_i^0}$ , e a condição (49) pode ser satisfeita com  $\frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i \omega_i^0} > d_{0,i} \geq \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i}$ , mas neste caso não haveria solução de canto. No entanto, a condição  $d_{0,i} < K(1+\rho_i)/\rho_i$  será redundante para  $0 < \omega_i^0 < 1$  se

$$\begin{aligned} & \frac{K(1+r^s)(1+r^F)}{\rho_i(1+r_p)(1+\pi r^F+(1-\pi)r^s)} + K \leq \frac{K(1+\rho_i)}{\rho_i} \\ \Rightarrow & \frac{(1+r^s)(1+r^F)}{(1+r_p)(1+\pi r^F+(1-\pi)r^s)} + 1 \leq (1+\rho_i) \\ \Rightarrow & \frac{(1+r^s)(1+r^F)}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^s} \leq \rho_i(1+r_p) \\ \Rightarrow & \frac{E[\tilde{r}] + r^s r^F + (1+\pi r^F+(1-\pi)r^s)}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^s} \leq \rho_i(1+r_p) \\ \Rightarrow & \frac{1}{\rho_i} \left( \frac{E[\tilde{r}] + r^s r^F}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^s} + 1 \right) - 1 \leq r_p. \end{aligned}$$

Como  $0 < \rho_i < 1$ , tem-se também que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_i} \left( \frac{E[\tilde{r}] + r^s r^F}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^s} + 1 \right) > \frac{E[\tilde{r}] + r^s r^F}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^s} + 1 \\ \Rightarrow & \frac{1}{\rho_i} \left( \frac{E[\tilde{r}] + r^s r^F}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^s} + 1 \right) - 1 > \frac{E[\tilde{r}] + r^s r^F}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^s}, \end{aligned}$$

resultando, portanto, que para a condição  $d_{0,i} < K(1+\rho_i)/\rho_i$  ser redundante no caso em que  $0 < \omega_i^0 < 1$  é necessário que

$$\begin{aligned} r_p & \geq \left( \frac{E[\tilde{r}] + r^s r^F}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^s} \right) - 1 > \frac{E[\tilde{r}] + r^s r^F}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^s} \\ \Rightarrow r_p & > \frac{E[\tilde{r}] + r^s r^F}{1+\pi r^F+(1-\pi)r^s} \end{aligned}$$

Como para  $0 < \omega_i^0 < 1$  vale a relação  $r_b > r_p > (E[\tilde{r}] + r^s r^F)/(1+\pi r^F+(1-\pi)r^s)$ , a condição acima é sempre satisfeita. Resulta que apenas as restrições em (58) já representam de forma completa as condições necessárias e suficientes para que exista solução de canto.

Nos casos em que não há solução de canto, é possível resolver a otimização através de uma otimização com restrição convencional. Lembrando que

$$\begin{aligned} f(\omega_i, s_i) &= E[\ln c_{1,i}] \\ &= E \left[ \ln \left( s_i \left( (1+\tilde{r})\omega_i + (1+r(\omega_i))(1-\omega_i) \right) \right) \right] \\ &= \ln s_i + E \left[ \ln \left( (1+\tilde{r})\omega_i + (1+r(\omega_i))(1-\omega_i) \right) \right] \\ &= \ln s_i + \pi \ln \left( (1+r^s)\omega_i + (1+r(\omega_i))(1-\omega_i) \right) \\ &\quad + (1-\pi) \ln \left( (1+r^F)\omega_i + (1+r(\omega_i))(1-\omega_i) \right), \end{aligned}$$





as condições de primeira ordem ficam:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial s_i} &= -\frac{1}{d_{0,i} - s_i} + \frac{\rho_i}{s_i} - \omega_i \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \omega_i} &= -s_i \lambda + \rho_i \left( \frac{(1 - \pi)(r^F - r)}{(1 + r)(1 - \omega_i) + (1 + r^F)\omega_i} + \frac{\pi(r^S - r)}{(1 + r)(1 - \omega_i) + (1 + r^S)\omega_i} \right) = 0. \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= K - s_i \omega_i = 0\end{aligned}\quad (59)$$

A solução do sistema (59) leva a duas equações polinomiais do segundo grau, uma em  $\omega_i$  e outra em  $s_i$ , resultando em dois valores para  $\omega_i$  e dois outros para  $s_i$ :

$$\begin{aligned}s_i^{\text{Soluções}} &= \frac{1}{2(1 + r)^2(1 + \rho)} \\ &\times \left\{ d_{0,i}(1 + r)^2 \rho + K(1 + r) \left[ 2r - r^S - r^F + (r - \pi r^F + (-1 + \pi)r^S) \rho \right] \right. \\ &\quad \pm \left[ \left[ (1 + r)^2 \left( -4K(1 + \rho) \left( K(r - r^F)(r - r^S) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + d_{0,i}(1 + r)(r - \pi r^F + (-1 + \pi)r^S) \rho \right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \left( d_{0,i}(1 + r) \rho - K(r^F + r^S + (\pi(r^F - r^S) + r^S) \rho - r(2 + \rho)) \right)^2 \right) \right] \right]^{1/2} \left. \right\}\end{aligned}\quad (60)$$

e

$$\begin{aligned}\omega_i^{\text{Soluções}} &= \frac{1}{2K(r - r^F)(r - r^S) + 2d_{0,i}(1 + r)(r - \pi r^F + (-1 + \pi)r^S)} \\ &\times \left\{ d_{0,i}(1 + r)^2 \rho + K(1 + r) \left[ 2r - r^S - r^F + (r - \pi r^F + (-1 + \pi)r^S) \rho \right] \right. \\ &\quad \mp \left[ \left[ (1 + r)^2 \left( -4K(1 + \rho) \left( K(r - r^F)(r - r^S) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + d_{0,i}(1 + r)(r - \pi r^F + (-1 + \pi)r^S) \rho \right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \left( d_{0,i}(1 + r) \rho - K(r^F + r^S + (\pi(r^F - r^S) + r^S) \rho - r(2 + \rho)) \right)^2 \right) \right] \right]^{1/2} \left. \right\}\end{aligned}\quad (61)$$

Isto ocorre porque não foi incluída a restrição ao crédito e, conseqüentemente, não ficou garantido que os valores obtidos para  $\omega_i$  estivessem no domínio estabelecido em (36).

Para simplificar a notação, faça:

$$\begin{aligned}A &= d_{0,i}(1 + r)^2 \rho + K(1 + r) \left[ 2r - r^S - r^F + (r - \pi r^F + (-1 + \pi)r^S) \rho \right] \\ B &= K(r - r^F)(r - r^S) + d_{0,i}(1 + r)(r - \pi r^F + (-1 + \pi)r^S) \rho \\ C &= (1 + r)^2 \left( -4K(1 + \rho)C + \left( d_{0,i}(1 + r) \rho - K(r^F + r^S + (\pi(r^F - r^S) + r^S) \rho - r(2 + \rho)) \right)^2 \right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_i^{\text{Soluções}} = \frac{A \pm \sqrt{B}}{2(1+r)^2(1+\rho)} \\ \omega_i^{\text{Soluções}} = \frac{A \mp \sqrt{B}}{2C} \end{cases} \quad (62)$$

Se há equilíbrio, apenas o menor valor de  $\omega_i$ , e conseqüentemente o maior valor de  $s_i = K/\omega_i$ , estará no domínio de  $f(\omega_i, s_i)$ . A princípio, a solução será, portanto, a seguinte combinação de valores em (62):

$$s_i^{s+} = \frac{A + \sqrt{B}}{2(1+r)^2(1+\rho)}; \quad (63)$$

e

$$\omega_i^{s-} = \frac{A - \sqrt{B}}{2C}. \quad (64)$$

Há um caso, contudo, em que (63) e (64) não representam as soluções finais quando o investimento mínimo é limitante. Se as restrições forem muito fortes, seja a restrição ao crédito, seja a restrição hiperbólica ao investimento mínimo, o que significa que  $d_{0,i}$  é muito pequeno em relação a  $K$ , então a utilidade máxima obtida com as restrições será cada vez menor, até que se torne menor que a maior utilidade sem investimento em projeto, com  $\omega_i = 0$ , que ocorre, por (47), quando  $s_i = d_{0,i} \frac{\rho_i}{1+\rho_i}$ . Esta utilidade mínima, abaixo da qual o ótimo passa a ser o ponto  $(\omega_i^*, s_i^*) = (0, d_{0,i} \frac{\rho_i}{1+\rho_i})$ , será  $F(0, d_{0,i} \frac{\rho_i}{1+\rho_i})$ , que por (51) fica:

$$\begin{aligned} F\left(0, d_{0,i} \frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right) &= \ln\left(d_{0,i} - d_{0,i} \frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right) + \rho_i \left[ \ln\left(d_{0,i} \frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right) + \ln(1+r_p) \right] \\ &= \ln\left(\frac{d_{0,i}(1+\rho_i) - d_{0,i}\rho_i}{1+\rho_i}\right) + \rho_i \ln\left(\frac{d_{0,i}\rho_i(1+r_p)}{1+\rho_i}\right) \\ &= \ln\left(\frac{d_{0,i}}{1+\rho_i}\right) + \rho_i \ln\left(\frac{d_{0,i}\rho_i(1+\rho_i)}{1+\rho_i}\right) \\ &= \ln d_{0,i} - \ln(1+\rho_i) + \rho_i \left[ \ln d_{0,i} + \ln \rho_i (1+r_p) - \ln(1+\rho_i) \right] \\ &= (1+\rho_i) \ln d_{0,i} - (1+\rho_i) \ln(1+\rho_i) + \rho_i \ln \rho_i (1+\rho_i). \end{aligned} \quad (65)$$

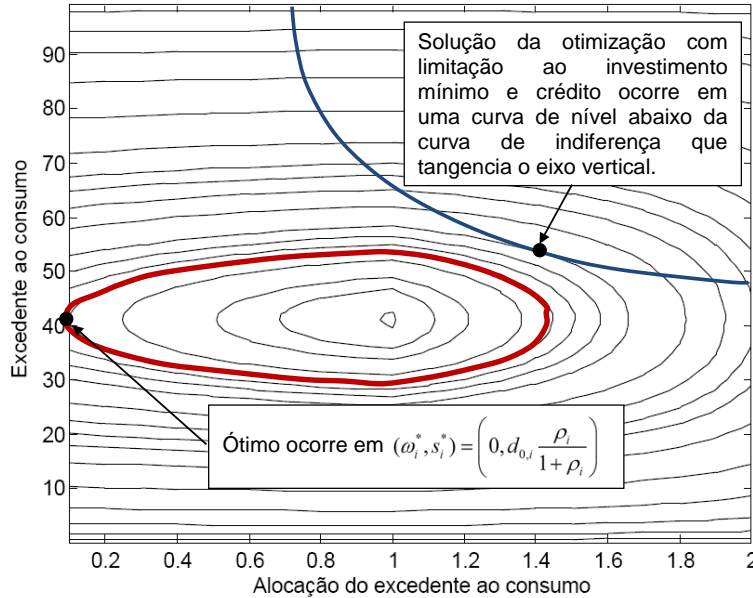
A solução final é:

$$(\omega_i^*, s_i^*) = \begin{cases} \left(0, d_{0,i} \frac{\rho_i}{1+\rho_i}\right), & \text{se } F(\omega_i^{s-}, s_i^{s+}) < (1+\rho_i) \ln d_{0,i} \\ & - (1+\rho_i) \ln(1+\rho_i) + \rho_i \ln \rho_i (1+\rho_i) \\ \left(\frac{A - \sqrt{B}}{2C}, \frac{A + \sqrt{B}}{2(1+r)^2(1+\rho)}\right), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (66)$$

Esta situação é ilustrada na Figura 12 que mostra como, dependendo do nível de desigualdade e da severidade da restrição ao investimento mínimo, os agentes mais pobres podem simplesmente não ter qualquer acesso a investimentos que poderiam melhorar seu bem estar. É possível inferir que a redução no volume investido tenha impactos não apenas na eficiência do sistema financeiro como também no crescimento econômico, chegando-se a um resultado semelhante ao de Aghion e Howitt (1998), contudo, o modelo aqui proposto trás uma variação não discutida pelos autores: elevados graus de desigualdade e de equidade impactariam negativamente a eficiência.



**Figura 12.** Exemplo de situação em que as restrições impõem um limite tão severo à proporção de investimento que se torna mais preferível não fazer investimento algum em projeto.



Resta, por fim, introduzir a restrição de crédito, que pode piorar ainda mais a situação dos agentes mais pobres. Se o investimento mínimo não é limitante, o ótimo será simplesmente:

$$\left( \min \left( \omega_0, \frac{1}{1 - \alpha} \right), d_{0,i} \frac{\rho_i}{1 + \rho_i} \right). \quad (67)$$

Já para o caso em que o investimento mínimo é limitante, basta usar a interseção da hipérbole da restrição ao investimento mínimo com a reta  $\omega_i = 1/(1 - \alpha)$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega_i s_i &= K \\ \omega_i &= \frac{1}{1 - \alpha} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s_i = K(1 - \alpha). \quad (68)$$

A consideração sobre a utilidade dessa solução ser menor que a utilidade em  $(\omega_i^*, s_i^*) = (0, d_{0,i} \frac{\rho_i}{1 + \rho_i})$  também é válida na situação com investimento mínimo e restrição ao crédito limitantes, e a solução final fica:

$$(\omega_i^*, s_i^*) = \begin{cases} \left( 0, d_{0,i} \frac{\rho_i}{1 + \rho_i} \right), & \text{se } F(\omega_i^{s^-}, s_i^{s^+}) < (1 + \rho_i) \ln d_{0,i} \\ & - (1 + \rho_i) \ln(1 + \rho_i) + \rho_i \ln \rho_i (1 + r_p) \\ \left( \frac{1}{1 - \alpha}, K(1 - \alpha) \right), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (69)$$

## 5. SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO EQUILÍBRIO

Dada a complexidade da solução do modelo descrito, suas implicações foram analisadas através do cálculo numérico do equilíbrio para o conjunto de parâmetros descritos na **Tabela 1**. A escolha dos pro-

**Tabela 1.** Parâmetros usados nas simulações numéricas.

Parâmetro	Valores simulados
Projeto disponível na economia	Projeto 1: $r^S = 22\%$ , $r^F = -19\%$ e $\pi = 61\%$
	Projeto 2: $r^S = 48\%$ , $r^F = -28\%$ e $\pi = 62\%$
	Projeto 3: $r^S = 65\%$ , $r^F = -5\%$ e $\pi = 35\%$
Restrição ao investimento mínimo como proporção da riqueza total no período inicial ( $K/D_0$ )	$\frac{2}{10.000}$ , $\frac{1}{1.000}$ , $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{10}$
Taxa de desconto da utilidade do consumo futuro ( $\rho$ )	0,25; 0,50 e 0,75
Desigualdade ( $\gamma$ )	1, 2, 3, 4 e 5

jetos foi orientada por valores típicos de retorno esperado e desvio padrão de bolsas de países desenvolvidos (Projeto 1) e emergentes (Projeto 2). O Projeto 3 tem retorno esperado e desvio padrão típicos de países emergentes, mas incorpora uma assimetria maior em direção a retornos positivos.

Em simulações prospectivas observou-se que nem sempre existe o equilíbrio. A combinação de nível de desigualdade e restrição ao investimento mínimo pode gerar situações em que simplesmente não há empréstimos nem depósitos. Por exemplo, se o investimento mínimo for muito alto, o projeto pode não ser acessível ou desejável nesta escala para a maioria da população. Se não houver investimento no projeto, não haverá tomada de crédito e os bancos ficam sem função (no modelo não há empréstimo entre agentes simplesmente para ajustar suas preferências intertemporais de consumo e poupança). Por outro lado, se a desigualdade for muito baixa e o investimento mínimo não impuser um limite muito alto, os agentes não precisam do sistema financeiro para investir. Novamente o banco fica sem função e não há equilíbrio. A escolha da restrição ao investimento mínimo buscou usar valores de modo que houvesse o maior número possível de situações em que existe o equilíbrio.

Os valores escolhidos para  $\rho$  simplesmente buscam uma cobertura razoável para o intervalo entre 0 e 1. Como as simulações são computacionalmente muito custosas, decidiu-se utilizar apenas três valores em todas as combinações possíveis.

Analogamente, a escolha de  $\gamma$  buscou uma cobertura razoável dos valores de índice de Gini encontrados em economias reais, conforme a equação (8). Até o valor 5, a relação entre o índice de Gini e  $\gamma$  apresenta pouca não-linearidade, como mostrado na Tabela 2.

Para cada valor de  $\gamma$  foi necessário usar um valor correspondente do parâmetro de escala  $A$ , conforme a relação (6), de modo que a riqueza total da economia não mudasse de uma simulação  $n$  para

**Tabela 2.** Valores de  $\gamma$  usados, índices de Gini correspondentes e economias reais cujos índices de Gini aproximam-se dos utilizados na simulação. Fonte: United Nations (2009).

$\gamma$	Índice de Gini Correspondente	Exemplo de países com índice de Gini próximo
1	16,40%	Menor que Dinamarca
2	31,30%	Canadá, Eslovênia, Paquistão
3	43,81%	Nigéria, Hong Kong, Filipinas
4	53,73%	Brasil, Equador, Paraguai
5	61,36%	Botswana, Haiti



outra simulação  $m$ , provocando distorções. Assim, definiu-se:

$$A_m \frac{e^{\gamma m} - 1}{\gamma_m} = A_n \frac{e^{\gamma n} - 1}{\gamma_n} \implies A_m = \frac{A_n \frac{e^{\gamma n} - 1}{\gamma_n}}{\frac{e^{\gamma m} - 1}{\gamma_m}}. \quad (70)$$

Como  $A$  para  $\gamma = 1$  foi arbitrariamente definido com o valor de 10, os demais valores foram: 5,39 para  $\gamma = 2$ ; 2,70 para  $\gamma = 3$ ; 1,28 para  $\gamma = 4$  e 0,58 para  $\gamma = 5$ .

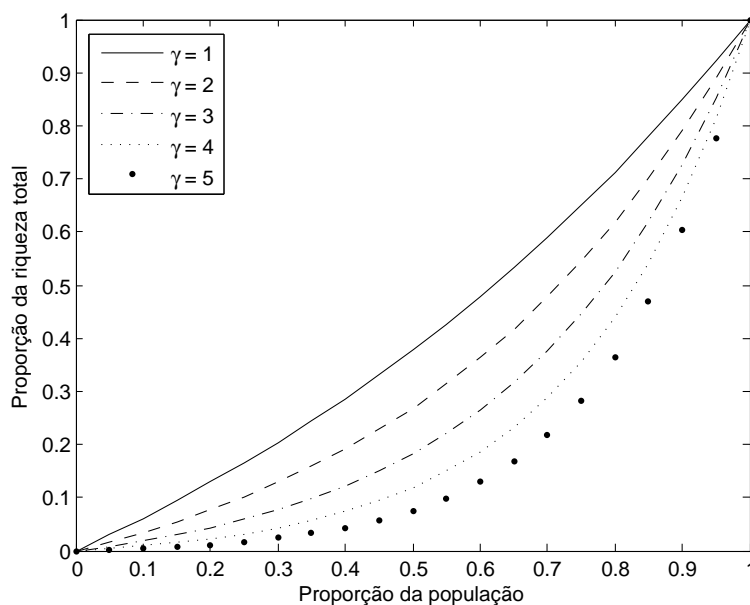
As distribuições de dotação inicial ficaram como mostradas na Figura 14, e as curvas de Lorentz correspondentes estão na Figura 13.

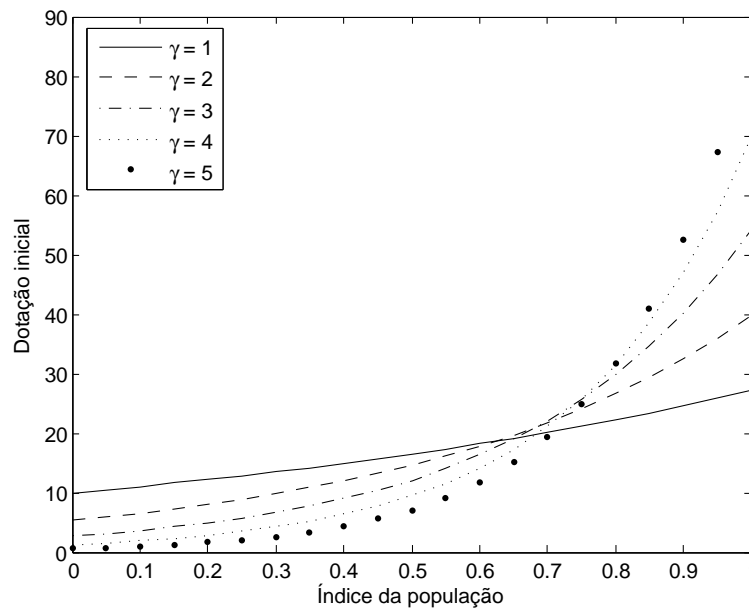
Na simulação foram calculadas matrizes de decisões ótimas contendo pares de escolhas  $(\omega_i^*, s_i^*)$  para toda a população que foi discretizada em intervalos de valor 0,001. Como o ótimo depende dos valores de  $p_r$  e  $b_r$ , as matrizes de decisão ótima foram calculadas para todas as combinações possíveis de taxas  $r_p$  e  $r_b$ , selecionadas em intervalos de 0,1%, que atendessem as condições (13), (32) e (43). Dado o vetor de decisões ótimas, foram calculadas aproximações numéricas, para cada combinação de  $r_p$  e  $r_b$ , dos valores:

- |   |   |
|---|---|
| a) $\int_0^1 (1 - \omega_i^*) s_i^* di$               | a diferença entre a quantidade demandada e a quantidade ofertada de recursos; |
| b) $\frac{1}{2} \int_0^1  1 - \omega_i^*  s_i^* di$   | a média dos valores absolutos das quantidades demandadas e ofertadas;         |
| c) $\int_0^1 (1 - \omega_i^*) s_i^* r(\omega_i^*) di$ | medida relacionada com o lucro do banco.                                      |

Para cada valor de  $r_p$ , buscou-se o valor de  $r_b$  para o qual  $\int_0^1 (1 - \omega_i^*) s_i^* di = 0$  ou intervalo de valores de  $r_b$  em que  $\int_0^1 (1 - \omega_i^*) s_i^* di$  muda de sinal. Neste último caso, o valor de  $r_b$  que faz  $\int_0^1 (1 - \omega_i^*) s_i^* di = 0$

**Figura 13.** Curvas de Lorentz para os valores de  $\gamma$  simulados.



**Figura 14.** Distribuição da dotação inicial para os valores de  $\gamma$  simulados.

foi interpolado linearmente. Assim, para este par de valores  $r_p$  e  $r_b$  há o equilíbrio entre oferta e demanda e  $\frac{1}{2} \int_0^1 |1 - \omega_i^*| s_i^* di$  corresponde ao volume de recursos que é transacionado no sistema financeiro, resultando num lucro proporcional a  $\int_0^1 (1 - \omega_i^*) s_i^* r(\omega_i^*) di$ .

Dessa forma, foram gerados vários pares de valores  $r_p$  e  $r_b$  (sendo o valor de  $r_b$  o resultado de uma interpolação) que correspondem ao equilíbrio entre oferta e demanda. O equilíbrio final é representado pelo par que além de equilibrar oferta e demanda resulta no maior lucro para o banco. Assim, no equilíbrio, as duas condições (29) e (31) são satisfeitas.

O algoritmo de cálculo da matriz de escolhas ótimas seguiu a seguinte estrutura:

- 1) Calcula  $\omega_0$  de acordo com (48);
- 2) Calcula  $\alpha$  de acordo com (15);
- 3) Testa se o investimento mínimo é limitante usando (49):
  - A) Se não for, atribui o par  $(\omega_i^*, s_i^*)$  conforme (67):  $s_i^*$  vem de (47) e  $\omega_i^*$  é o menor entre  $\omega_0$  e a proporção máxima de concessão de crédito,  $1/(1 - \alpha)$ ;
  - B) Se o investimento mínimo for limitante, o algoritmo testa se é o caso de uma solução de canto usando (58):
    - a) Se for uma solução de canto, usa a solução provisória  $(\omega_i^{*,\text{provisório}}, s_i^{*,\text{provisório}}) = (1, K)$ ;
    - b) Se não for uma solução de canto, usa os valores em (63) e (64) como solução provisória;
    - c) Testa se o crédito é limitante para as soluções provisórias com restrição ao investimento mínimo também limitante:
      - I) Se for, muda a solução provisória para a interseção entre a hipérbole de restrição de investimento mínimo e a reta de restrição de crédito, conforme (68);
      - II) Se não for, testa se a utilidade das soluções provisórias é maior ou menor que a utilidade em  $(0, d_{0,i} \frac{\rho_i}{1 + \rho_i})$ , dada por (65):



- i) Se for maior, usa as soluções provisórias como finais;
- ii) Se não for, usa  $(0, d_{0,i} \frac{\rho_i}{1+\rho_i})$  como solução final.

## 6. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos com as simulações são apresentados nas Figuras 15 a 20. Cada figura mostra os valores de *spread* e volume transacionado via bancos para todas as combinações de projeto, restrição de investimento mínimo como proporção da riqueza total ( $K/D_0$ ),  $\rho$  e  $\gamma$  apresentados na Tabela 1. Na análise dos resultados é possível observar dois efeitos mais importantes em atuação: (a) a possibilidade dos agentes econômicos investirem no projeto sem a utilização do sistema financeiro; (b) a diminuição do acesso dos agentes econômicos a empréstimos. Ambos os efeitos resultam em menores volumes transacionados, impedindo os bancos de aproveitar economias de escala em sua operação, o que por sua vez leva à cobrança de maiores *spreads*. A importância relativa destes efeitos, contudo, é influenciada de maneira diferente pelos parâmetros. Enquanto o primeiro efeito é favorecido por menor desigualdade e por investimento mínimo menos restritivo, o segundo efeito é potencializado por maior desigualdade e maiores restrições.

Nas Figuras 15 a 18 é possível observar o caso em que o investimento mínimo é menor, o que favorece o efeito (a). Nos menores níveis de desigualdade o volume é menor e os *spreads* maiores, ou seja, o sistema financeiro é menos eficiente, e aumentos marginais na desigualdade só melhoram a eficiência. À medida que a desigualdade torna-se bem maior, contudo, o efeito (b) começa a dominar e a eficiência do sistema financeiro novamente reduz-se. Nestas condições há um nível “ótimo” de desigualdade que maximiza a eficiência do sistema financeiro. Note que em algumas situações extremas (liquidez muito baixa ou muito alta, restrições muito brandas ou muito severas) pode simplesmente não existir equilíbrio e nada ser transacionado via sistema financeiro (volume igual a zero).

É curioso notar como quando o investimento tem maior assimetria para retornos positivos (Projeto 3), considerando esse nível de restrição ao investimento mínimo ( $K/D_0 = 1/1.000$ ), a impaciência no consumo dos agentes torna-se relevante na definição dos *spreads*. Mesmo com a queda no volume, nas situações em que os investidores dão mais peso ao consumo futuro ( $\rho = 0,5$  e principalmente  $\rho = 0,75$ ) os bancos conseguem cobrar *spreads* maiores porque os agentes estão dispostos a pagar mais pela oportunidade de investir e participar dos retornos do projeto. Apenas quando os agentes são mais impacientes ( $\rho = 0,25$ ) é que há uma relação inversa entre *spreads* e volume.

Nas Figuras 19 e 20, a maior restrição no investimento mínimo potencializa o efeito (b) e ameniza o efeito (a): em situações de maior desigualdade a restrição ao investimento mínimo dificulta ainda mais o acesso aos agentes mais pobres, e quando a desigualdade é menor, a restrição ao investimento mínimo impede que mais agentes realizem o projeto sem acessar o sistema financeiro. Resulta que aumentos marginais na desigualdade reduzem o volume transacionado no sistema financeiro já a partir das situações menos desiguais.

A maior contribuição deste modelo é demonstrar a viabilidade teórica de canais através dos quais a eficiência do sistema financeiro seja afetada pela desigualdade. Novas pesquisas podem tanto estudar e verificar empiricamente o funcionamento de tais canais como elaborar o modelo aqui proposto de modo que possa ser calibrado para estudar economias reais. Com um modelo mais realista, é possível tentar estimar empiricamente os parâmetros do modelo e o peso da desigualdade e da pobreza nas ineficiências do sistema financeiro.

Figura 15. Projeto 1,  $K/D_0 = 2/10.000$

Spread				Volume $\times 1.000$			
$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$	$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$
1	0,044785	0,000000	0,058000	1	0,227816	0,000000	0,000000
2	0,035725	0,049876	0,000000	2	0,310289	0,152771	0,000000
3	0,018696	0,029255	0,037786	3	0,305214	0,239458	0,196470
4	0,016965	0,017751	0,017995	4	0,293261	0,256767	0,229672
5	0,024555	0,028011	0,031240	5	0,278830	0,271049	0,267218

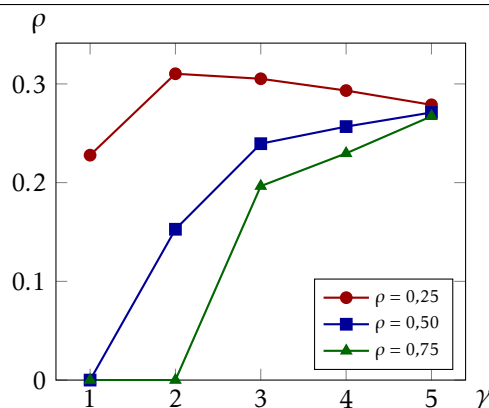
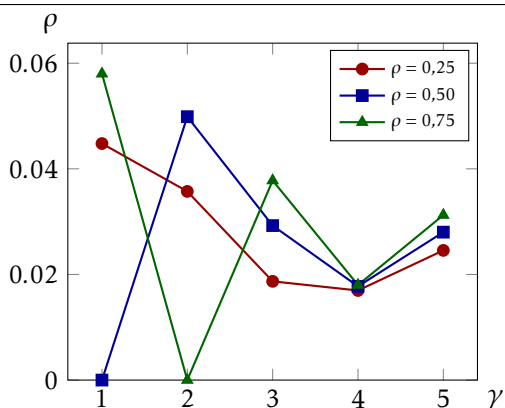


Figura 16. Projeto 2,  $K/D_0 = 2/10.000$

Spread				Volume $\times 1.000$			
$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$	$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$
1	0,143897	0,189000	0,189000	1	0,166267	0,000000	0,000000
2	0,114255	0,168115	0,098366	2	0,279256	0,122527	0,081305
3	0,062021	0,091116	0,115766	3	0,289798	0,224075	0,181662
4	0,052968	0,054805	0,055886	4	0,277934	0,244615	0,222266
5	0,188233	0,188293	0,188331	5	0,329759	0,309518	0,296860

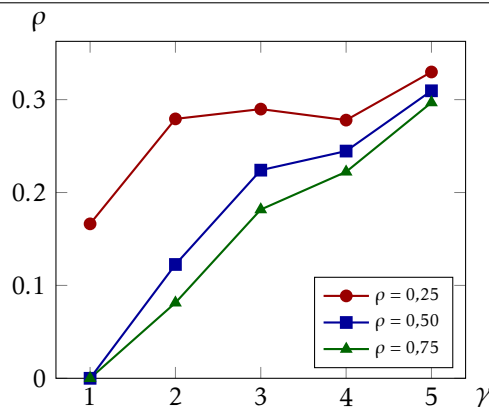
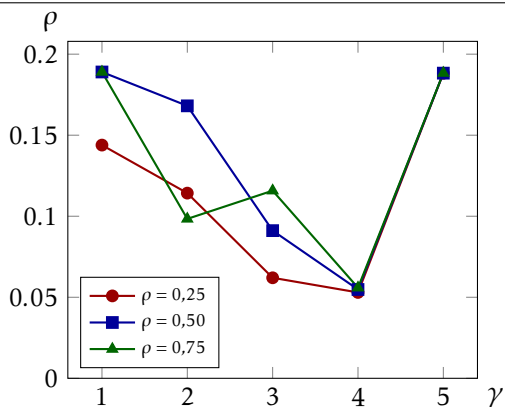






Figura 17. Projeto 3,  $K/D_0 = 2/10.000$

Spread				Volume $\times 1.000$			
$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$	$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$
1	0,087712	0,193000	0,193000	1	0,206757	0,000000	0,000000
2	0,144920	0,098018	0,075666	2	0,286778	0,142931	0,077360
3	0,190727	0,159379	0,140213	3	0,283410	0,224489	0,185840
4	0,174912	0,183949	0,191637	4	0,256665	0,233484	0,217627
5	0,165478	0,168705	0,171025	5	0,223620	0,216135	0,210969

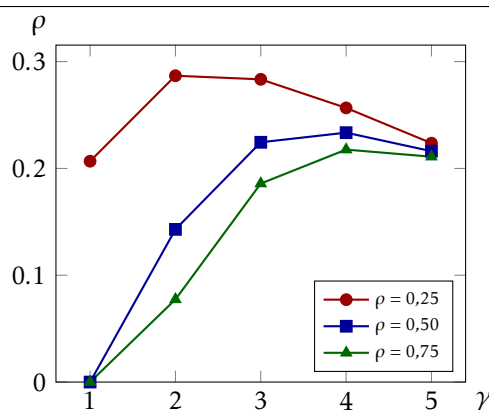
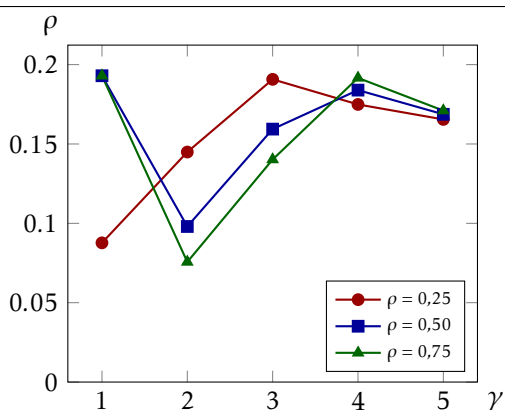


Figura 18. Projeto 1,  $K/D_0 = 1/1.000$

Spread				Volume $\times 1.000$			
$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$	$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$
1	0,000000	0,026324	0,064653	1	0,000000	3,101576	3,233333
2	0,000000	0,010148	0,015551	2	0,000000	2,462914	2,425629
3	0,017097	0,038560	0,041024	3	2,160271	2,488032	2,437784
4	0,056500	0,056532	0,056546	4	2,305112	2,245911	2,197369
5	0,056705	0,056709	0,056713	5	1,885264	1,864882	1,845707

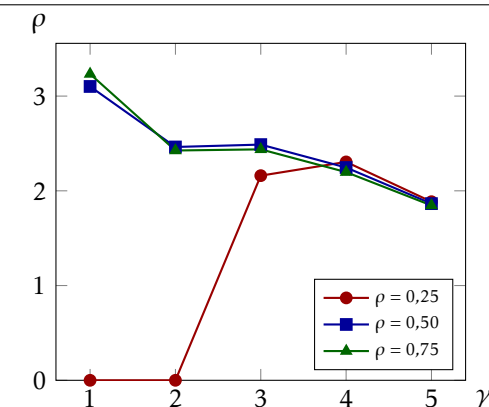
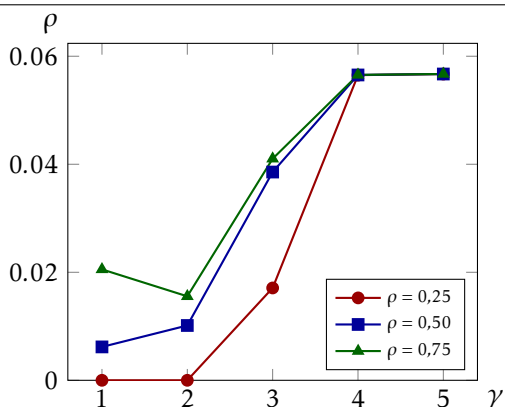


Figura 19. Projeto 2,  $K/D_0 = 1/1.000$

Spread				Volume $\times 1.000$			
$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$	$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$
1	0,000000	0,026324	0,064653	1	0,000000	3,001314	3,103623
2	0,000000	0,035668	0,050864	2	0,000000	2,386206	2,364412
3	0,188212	0,188343	0,188376	3	2,742271	2,608069	2,506811
4	0,188581	0,188600	0,188610	4	2,171954	2,115444	2,075711
5	0,188773	0,188714	0,188716	5	1,798728	1,767357	1,755658

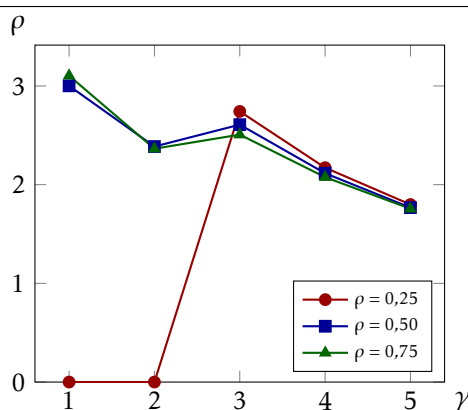
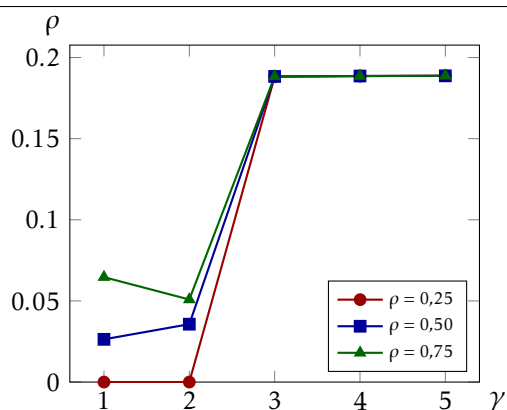
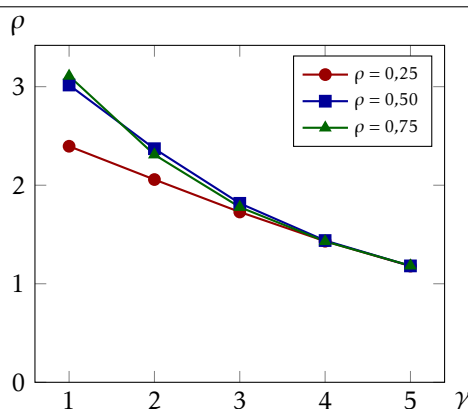
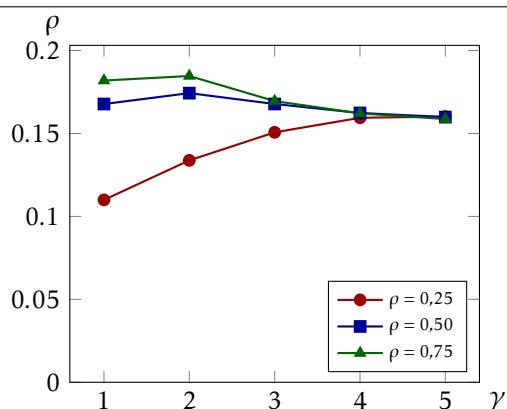


Figura 20. Projeto 3,  $K/D_0 = 1/1.000$

Spread				Volume $\times 1.000$			
$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$	$\gamma$	$\rho = 0,25$	$\rho = 0,50$	$\rho = 0,75$
1	0,109963	0,167752	0,181904	1	2,395488	3,016930	3,108458
2	0,133778	0,174316	0,184648	2	2,057582	2,370570	2,309765
3	0,150679	0,167766	0,169529	3	1,728334	1,816222	1,777431
4	0,159451	0,162353	0,162096	4	1,431682	1,438617	1,430382
5	0,160183	0,159869	0,158715	5	1,179541	1,181305	1,183166





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aghion, P., & Bolton, P. (1997). A theory of trickle-down growth and development. *The Review of Economic Studies*, 67(219), 151–172.
- Aghion, P., & Howitt, P. W. (1998). *Endogenous growth theory*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Beck, T., Demirguc-Kunt, A. & Levine, R. (2005). SMEs, growth, and poverty: Cross-country evidence. *Journal of Economic Growth*, 10(3), 199–229. doi: 10.1007/s10887-005-3533-5
- Diamond, D. W. (1984). Financial intermediation and delegated monitoring. *Review of Economic Studies*, 393–414. doi: 10.2307/2297430
- Diamond, D. W., & Dybvig, P. H. (1983, Jun.). Bank runs, deposit insurance, and liquidity. *Journal of Political Economy*, 91(3), 401–419.
- Li, H., Squire, L. & Zou, H.-f. (1998). Explaining international and intertemporal variations in income inequality. *The Economic Journal*, 108(Issue 446), 26-43. doi: 10.1111/1468-0297.00271
- United Nations. (2009). *Human Development Report 2009*. New York: United Nations Development Programme (UNDP). Disponível em: [http://hdr.undp.org/sites/default/files/reports/269/hdr\\_2009\\_en\\_complete.pdf](http://hdr.undp.org/sites/default/files/reports/269/hdr_2009_en_complete.pdf)
- United Nations. (2013). *Inequality matters: Report of the world social situation 2013*. New York: United Nations / Department of Economic and Social Affairs. Disponível em: <http://www.un.org/esa/socdev/documents/reports/InequalityMatters.pdf>

## A. APÊNDICE: CARACTERIZAÇÃO DO PARÂMETRO DE DESIGUALDADE $\gamma$

A partir da **Figura 1**, intuitivamente, haverá igualdade se a riqueza de um quantil  $z$  da população corresponder exatamente a  $z \times 100\%$  da riqueza total, o que é representado pela reta. Para qualquer distribuição não uniforme da riqueza,  $z \times 100\%$  da população mais pobre sempre terá uma proporção menor que  $z \times 100\%$  da riqueza, já que o excedente estará com a população mais rica. Matematicamente, da continuidade de  $d_{0,i}$ ,  $\bar{D}_{0,i \leq z}$  é contínua e diferenciável em  $z$ , de modo que  $\frac{d\bar{D}_{0,i \leq z}}{dz} = \frac{d_{0,z}}{D_0}$ , ou seja, a derivada de  $\bar{D}_{0,i \leq z}$  também é monotônica não decrescente. Se a riqueza for distribuída uniformemente,  $d_{0,i} = D_0 \implies \frac{d\bar{D}_{0,i \leq z}}{dz} = 1, \forall z \in [0, 1]$ , e obtém-se a reta da **Figura 1**. Numa distribuição de riqueza desigual, para  $z$  suficientemente próximo de 0,  $d_{0,z} < D_0$  e  $\frac{d\bar{D}_{0,i \leq z}}{dz} < 1$ , e, portanto,  $\bar{D}_{0,i \leq z}$  estará abaixo da reta e assim permanecerá até que  $z = \bar{D}_{0,i \leq z} = 1$ , caso contrário  $\bar{D}_{0,i \leq z}$  cruzaria a reta num ponto  $z < 1$  em que  $\frac{d\bar{D}_{0,i \leq z}}{dz} > 1$  e como  $\frac{d\bar{D}_{0,i \leq z}}{dz}$  é monotônica não decrescente,  $\bar{D}_{0,i \leq z}$  nunca retornaria a cruzar a reta e  $\bar{D}_{0,i \leq z}$  seria diferente de 1, o que é uma contradição.

O índice de Gini será então:

$$\begin{aligned} \text{Gini} &= 1 - 2 \int_0^1 \bar{D}_{0,i \leq z} dz = 1 - 2 \int_0^1 \frac{e^{\gamma z} - 1}{e^\gamma - 1} dz \\ &= 1 - \frac{2}{e^\gamma - 1} \left( \frac{e^{\gamma z}}{\gamma} \Big|_0^1 - 1 \right) = 1 - \frac{2}{e^\gamma - 1} \left( \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} - 1 \right) = 1 - 2 \left( \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{e^\gamma - 1} \right) \\ &= 1 - 2 \frac{(e^\gamma - 1) - \gamma}{\gamma(e^\gamma - 1)} \end{aligned}$$

para todo  $\gamma > 0$ .

Da expansão em série da função exponencial, se  $\gamma > 0$  então  $e^{\gamma/2} > 1 + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4}$  e também  $e^{-\gamma/2} < \left( 1 + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4} \right)^{-1}$ .

Juntando ambos os resultados obtém-se:

$$e^{\frac{\gamma}{2}} - e^{-\frac{\gamma}{2}} > 1 + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2}{4}} = \gamma \frac{16 + 12\gamma + 4\gamma^2 + \gamma^3}{16 + 8\gamma + 4\gamma^2} > \gamma.$$

De  $e^{\gamma/2} - e^{-\gamma/2}$  vem:

$$e^{\gamma} - 2 + e^{-\gamma} > \gamma^2 \implies \frac{1}{2}(e^{\gamma} + e^{-\gamma}) > \frac{\gamma^2}{2} + 1 \implies \cosh(\gamma) - 1 > \frac{\gamma^2}{2} \implies \frac{2}{\gamma^2} + \frac{1}{1 - \cosh(\gamma)} > 0.$$

Como  $\frac{d\text{Gini}}{d\gamma} = \frac{2}{\gamma^2} + \frac{1}{1 - \cosh(\gamma)} > 0$  para todo  $\gamma > 0$ , o índice de Gini é uma função estritamente crescente de  $\gamma$ , de modo que quanto maior  $\gamma$ , maior a desigualdade.