Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 29, n. 3, p. 455-463, (2007)
www.sbfisica.org.br

Historia da Física e Ciências Afins

Maupertuis, d'Arcy, d'Alembert e o princípio de ação mínima na óptica: uma análise crítica

(Maupertuis, d'Arcy, d'Alembert and the principle of least action in optics: a critical analysis)

Roberto de Andrade Martins[1] e Ana Paula Bispo da Silva[2]

[1] *Grupo de História e Teoria da Ciência, Departamento de Raios Cósmicos e Cronologia, Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil*
[2] *Departamento de Física, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual da Paraíba, Campus Universitário, Bodocongó, Campina Grande, PB, Brasil*
Recebido em 6/10/2006; Aceito em 16/1/2007

Maupertuis propôs, em 1744, o "princípio da ação mínima", aplicando-o à refração da luz. Este artigo discute a fundamentação deste trabalho de Maupertuis, bem como as críticas que recebeu por parte de d'Alembert e d'Arcy. A presente análise mostra que não havia uma boa fundamentação para a proposta do princípio de ação mínima, já que a reflexão e a refração da luz não obedecem a um princípio geral de mínimo.
Palavras-chave: Maupertuis, Pierre-Louis Moreau de, d'Alembert, Jean le Rond, d'Arcy, Patrick, princípio de ação mínima, óptica, história da física.

Maupertuis proposed in 1744 the "principle of least action", applying it to the refraction of light. This paper discusses the foundation of Maupertuis' work and the criticism it received from d'Alembert and d'Arcy. This analysis shows that the principle of least action was not well grounded, since the reflection and refraction of light do not obey a general principle of minimum.
Keywords: Maupertuis, Pierre-Louis Moreau de, d'Alembert, Jean le Rond, d'Arcy, Patrick, principle of least action, optics, history of physics.

1. Introdução

O princípio de ação mínima é a base fundamental da mecânica analítica. Ele afirma que o movimento de um sistema entre dois estados, A e B, se dá de tal forma que a ação realizada pelo sistema entre esses dois estados é mínima, sendo a ação definida como a integral do lagrangeano L (diferença entre energia cinética e potencial) em relação ao tempo

$$A = \int_A^B L dt = \text{mínimo}.$$

O sistema pode ter uma ou mais partículas; e a função lagrangeana é expressa em função das coordenadas generalizadas q_i, das suas derivadas (as velocidades generalizadas) e do tempo.

A partir desse princípio, utilizando-se o cálculo variacional, obtém-se a partir da condição de mínimo[2]

$$\delta A = \delta \int_A^B L dt = 0,$$

um conjunto de equações (chamadas "equações de Lagrange") que podem ser consideradas como uma forma generalizada da segunda lei de Newton

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

O desenvolvimento do princípio de ação mínima se deu durante os séculos XVIII e XIX, estando associado aos nomes de Maupertuis, Euler, Lagrange, Hamilton e outros importantes pesquisadores. O objetivo deste artigo não é descrever toda a história desse princípio - o que exige bem mais do que um artigo - e sim esclarecer alguns pontos fundamentais da primeira fase dessa história, envolvendo a proposta de Maupertuis e as

[1] E-mail: rmartins@ifi.unicamp.br.

[2] A relação $\delta A = 0$ não é uma condição para o mínimo da ação no sentido absoluto, mas apenas uma condição necessária que deve ser satisfeita pelas trajetórias que minimizam (mesmo localmente) o valor da grandeza A.

críticas sofridas por parte de Patrick d'Arcy e Jean le Rond d'Alembert.

Primeiramente, vamos apresentar a versão tradicional da história, que considera ter sido Maupertuis o proponente do princípio de ação mínima. Depois, analisando o primeiro artigo de Maupertuis, mostraremos que sua contribuição inicial foi bastante elementar, partindo provavelmente do resultado ao qual ele queria chegar, e que havia problemas graves com o próprio princípio, quando aplicado à óptica.

2. A versão tradicional

Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) escreveu em 1744 um artigo no qual propôs o princípio de ação mínima aplicando-o ao fenômeno da refração da luz (e não a fenômenos mecânicos) [1]. Há uma tradução para o português e análise desse trabalho em um artigo recente do prof. Ildeu de Castro Moreira [2], publicado nesta revista.

Maupertuis partiu de um trabalho de Fermat (publicado postumamente, em 1679, nas suas *Obras*), que havia mostrado que era possível deduzir a lei da refração de Snell e Descartes supondo-se que a velocidade da luz era *menor* nos meios "mais densos" (ou melhor, mais refringentes) e que o trajeto da luz era aquele no qual *o tempo de percurso* era o mínimo possível.

No entanto, a física newtoniana havia interpretado a luz como constituída por partículas e mostrado, a partir dessa hipótese, que a luz deveria ter uma velocidade *maior* nos meios "mais densos" - ao contrário do que Fermat havia pressuposto. Assim, a óptica newtoniana (que era aceita por praticamente todos, no século XVIII) era incompatível com o princípio de tempo mínimo de Fermat.[3] Maupertuis resolveu esse conflito propondo que, em vez de um tempo mínimo, a luz seguia o caminho no qual *a ação era mínima*, sendo a ação definida como o produto da massa pela velocidade e pela distância percorrida por uma partícula. É claro que, de acordo com as idéias da época, Maupertuis assumiu que a luz seria constituída por partículas.

Dois anos depois (1746) Maupertuis utilizou o princípio de ação mínima para deduzir a lei da colisão dos corpos (tanto elásticos quanto anelásticos) e para deduzir a lei do equilíbrio das alavancas. Nesse trabalho ele apresentou o princípio de ação mínima da forma mais geral: em todas as mudanças que ocorrem no universo, a soma dos produtos de cada corpo (massa) multiplicado pela distância que ele se desloca e pela velocidade com a qual se move, é a mínima possível.

Além dessa contribuição puramente científica, no nosso sentido atual, Maupertuis também estava preocupado com questões filosóficas. Ele considerou que o princípio de ação mínima podia ser considerado um uso da idéia das *causas finais*; e que a existência desse tipo de princípio na natureza podia ser utilizada como uma prova da existência de Deus.

O trabalho de Maupertuis foi depois desenvolvido por Euler, Lagrange e outros autores, levando àquilo que atualmente consideramos como um dos princípios básicos de toda a física.

3. Uma reconstrução do raciocínio de Maupertuis

No seu artigo de 1744 Maupertuis procurou reformular o princípio de Fermat, de tal modo a torná-lo compatível com a óptica newtoniana. Aparentemente, seu ponto de partida foi a própria análise de Fermat, procurando nela o que precisaria ser alterado para "dar certo".

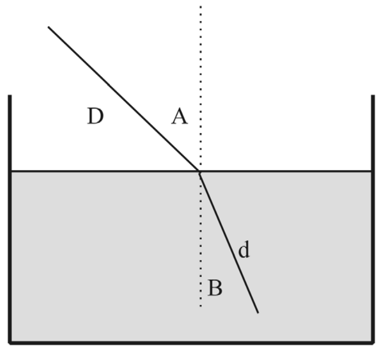

Figura 1 - Quando a luz passa de um meio menos refringente (como o ar) para outro mais refringente (como a água) ela se desvia, obedecendo a lei de Snell-Descartes. Maupertuis procurou explicar a refração através do princípio de ação mínima.

Fermat considerava que a luz se move mais lentamente nos meios mais densos (ou melhor, mais refringentes, como o vidro ou a água) do que no ar; e deduziu a lei da refração supondo que a luz segue o caminho que exige o menor *tempo* para ir de um ponto até outro (Fig. 1). Ou seja: a soma das distâncias divididas pelas velocidades, nos dois meios, seria mínima. Se no ar a velocidade é V e a distância percorrida é D, e na água a velocidade é v e a distância é d, teríamos que $D/V + d/v$ seria mínimo. Essa hipótese leva, corretamente, à lei dos senos: se o seno do ângulo de incidência, no ar, era A e se o ângulo do raio refratado, na água, era B, Fermat obtinha a relação

$$\frac{senA}{senB} = \frac{V}{v}.$$

Assim, Fermat conseguia deduzir de suas hipóteses a lei de Snell e Descartes; porém, a suposição de Fermat a respeito das velocidades da luz estava em conflito com a óptica newtoniana, segundo a qual a luz se move

[3] Pela teoria ondulatória, a velocidade da luz é menor nos meios mais refringentes, como supôs Fermat; e isso foi confirmado em meados do século XIX, experimentalmente.

mais *rapidamente* nos meios mais refringentes.[4] Newton deduziu esse resultado considerando a luz como formada por um fluxo de partículas com alta velocidade, que sofriam uma força perpendicular à superfície de separação entre os dois meios transparentes, ao atravessar uma região intermediária entre os dois meios [3].[5] Considerando-se as superfícies perfeitamente lisas (isto é, sem irregularidades microscópicas) e utilizando a mecânica newtoniana, conclui-se que a componente do momentum da partícula de luz paralela às superfícies deve se manter constante. Analisando a variação da componente do momentum perpendicular às superfícies, deduz-se então a lei da refração, concluindo-se que a relação entre os ângulos e as velocidades da luz nos dois meios deveria ser o inverso do obtido por Fermat

$$\frac{senA}{senB} = \frac{v}{V}.$$

Vamos, agora, procurar reconstruir o raciocínio que Maupertuis pode ter seguido para chegar à sua lei.[6] Maupertuis assumiu que o resultado correto seria o da óptica newtoniana, ou seja, o inverso do obtido por Fermat. Portanto, era preciso trocar as posições de v e V, no resultado final. Maupertuis parece ter percebido que podia obter o resultado "correto" por uma simples mudança na análise de Fermat: em vez de supor que $D/V + d/v$ seria mínimo, era preciso supor que $D.V + d.v$ seja mínimo. Ou seja: trocando V por $1/V$ e v por $1/v$, "dava certo".

Bem, o problema é que D/V e d/v têm significado físico (são os tempos que a luz demora para percorrer as distâncias D e d) mas os produtos $D.V$ e $d.v$ parecem não significar nada. Porém, se fosse possível dar uma interpretação a esses produtos da distância pela velocidade, seria possível refazer a análise de Fermat, assumindo que $D.V + d.v$ deve ser um mínimo, e chegar à lei "correta" (newtoniana) da refração.[7]

Ao pensar sobre como interpretar o produto da distância pela velocidade, Maupertuis deve ter se lembrado que Leibniz havia proposto o conceito de "ação", que seria o produto da massa pela velocidade e pela distância percorrida por um corpo. Como não fazia nenhuma diferença multiplicar a expressão $D.V + d.v$ por uma constante, Maupertuis percebeu que poderia chegar à equação "correta" para a luz assumindo que a ação, representada por $m.(D.V + d.v)$, era mínima.

Se essa reconstrução do raciocínio de Maupertuis estiver correta, ele analisou o trabalho de Fermat, depois mudou a conclusão e verificou o que deveria alterar na hipótese inicial para chegar ao resultado "correto". Ou seja: ele não começou pensando em um princípio geral, para depois obter suas conseqüências, e sim chegou ao princípio de trás para frente, para obter o resultado que acreditava ser correto.

Como assinalamos acima, não se pode ter certeza de que Maupertuis seguiu esse caminho; mas consideramos que isso é altamente plausível, e podemos mostrar que d'Alembert, uma das pessoas que comentou sobre o trabalho de Maupertuis na própria época, assim o interpretou [4]:

> É singular que tantos filósofos que escreveram sobre a refração não tenham imaginado um modo tão simples de conciliar a metafísica com a mecânica; bastava para isso fazer uma mudança muito leve no cálculo fundamentado sobre o princípio do Sr. de Fermat. De fato, segundo esse princípio, o tempo, quer dizer, o espaço dividido pela velocidade, deve ser um *mínimo*: de modo que se chamarmos de E o espaço percorrido no primeiro meio com a velocidade V, e de e o espaço percorrido no segundo meio com a velocidade v, teremos $(E/V)+(e/v)$ = um *mínimo*, quer dizer, $(dE/V) + (de/v) = 0$. Ora, é fácil de ver que os senos de incidência e os de refração estarão entre si como dE para $-de$; de onde se segue que esses senos estão na razão direta das velocidades V e v, e é isso o que pretende o Sr. de Fermat. Mas para que esses senos estivessem na razão inversa das velocidades, bastaria supor $VdE + vde = 0$; o que dá $EV + ev$ = um *mínimo*: e esse é o princípio do Sr. de Maupertuis.

Podemos citar também que, logo após a publicação do trabalho de Maupertuis, outros cientistas consideraram que aquilo que ele havia feito era elementar, sob o ponto de vista matemático [5]:

> O fundo da disputa ainda não está decidido. Se me é permitido dar minha opinião, penso quanto ao fundo da discussão que as conseqüências metafísicas são arriscadas. *Quanto à parte geométrica, creio que essa descoberta custou menos a seu autor* [Maupertuis] *do que a resolução de outros problemas sobre os quais ele fez menos barulho*,

[4] Lembremo-nos que, na época, não se sabia como medir a velocidade da luz em um meio refringente. Por isso, não se podia decidir se a velocidade era maior ou menor nos meios mais refringentes. As hipóteses levavam à lei dos senos, da refração, mas não era possível testar diretamente a relação entre a velocidade e a refringência.

[5] A análise de Newton não se encontra em sua *Óptica* e sim nos *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, livro 1, seção 14, proposições 94 a 96.

[6] Maupertuis não explicou como chegou ao seu resultado; a reconstrução aqui mostrada é hipotética. Trata-se de um raciocínio que ele *pode ter utilizado*, mas que não é documentado em nenhum trabalho que ele publicou.

[7] Estamos colocando aqui "correta" entre aspas porque, para nós, que aceitamos a teoria ondulatória da propagação da luz, a relação de Fermat é a correta, e a newtoniana está equivocada.

> mas não me espanto que ele tenha se prendido tanto a ela e creio que alguma outra pessoa também o teria em seu lugar, talvez igualmente, mas não teria feito tanto alarde. (Carta de La Condamine a Daniel Bernoulli, 30 de dezembro de 1752)

4. As primeiras críticas de d'Arcy

O trabalho acima referido de Maupertuis foi exposto à Academia de Ciências de Paris em abril de 1744, porém só foi publicado vários anos depois, em 1748. Nessa época, a publicação da revista da Academia era um processo lento; no século XIX, com a criação de uma nova revista (*Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences*) a publicação se tornou extremamente rápida (os trabalhos apresentados em uma semana eram impressos e distribuídos na semana seguinte). Assim, o efeito imediato do trabalho foi praticamente nulo.

Logo depois de sua efetiva publicação, no entanto, surgiram análises críticas do trabalho de Maupertuis. Já nos referimos, acima, às considerações de d'Alembert, que foram publicadas no primeiro volume da *Encyclopédie*, uma obra de enorme repercussão. No entanto, a primeira crítica mais direta foi a apresentada por Patrick d'Arcy, ou "le chevalier d'Arcy", como era conhecido na época.

Patrick d'Arcy (1723-1779) era um nobre irlandês, católico, que aos 16 anos de idade foi enviado pela família para ser educado em Paris [6]. Lá, ele entrou em contato com o matemático Alexis Clairaut (1713-1765),[8] entusiasmando-se pelo estudo das matemáticas. Porém, logo depois, com o início da guerra entre França e Alemanha, alistou-se no exército francês e desviou-se por algum tempo dos seus interesses científicos. Chegou até mesmo a lutar contra o exército britânico, em 1746, sendo capturado na época.

Nos momentos em que conseguia se dedicar a alguns estudos, d'Arcy desenvolveu pesquisas sobre matemática, balística, eletricidade, astronomia e mecânica. Independentemente de Euler, ele apresentou em 1747 um princípio equivalente ao da conservação do momento angular para um sistema de corpos. Seus trabalhos levaram à sua eleição para a Academia de Ciências de Paris, em 1749. Além de muitos artigos, publicou um livro sobre a teoria do movimento da Lua e três obras sobre diferentes aspectos da teoria e prática da artilharia.

Em 1752, d'Arcy apresentou seu primeiro artigo criticando o princípio da ação mínima de Maupertuis [7].[9] Seu trabalho, antes da publicação, foi examinado e aprovado por d'Alembert. A publicação do trabalho foi precedida por uma análise anônima (talvez de d'Alembert, talvez de Condorcet), que descreve sucintamente as idéias de Maupertuis e as críticas de d'Arcy adicionando alguns comentários próprios, como por exemplo [8]:

> Em geral, parece que quaisquer que fossem as leis da natureza, poder-se-ia encontrar uma função das massas e das velocidades que, sendo suposta mínima, as representasse; mas essa propriedade não seria suficiente para dar o nome de *ação* a essa função, nem para elevar ao nível de um princípio metafísico aquilo que seria nesse caso apenas uma hipótese de cálculo.

A nota anônima termina com um elogio do princípio mecânico de d'Arcy:

> Não vamos relatar aqui a demonstração desse princípio que o Sr. d'Arcy forneceu em 1747; diremos somente que dele se tiram, com a maior simplicidade, o princípio da conservação das forças vivas, o caso do repouso, os centros de oscilação e de percussão, a lei da refração da luz, e que dele podem ser ainda feitas muitas outras aplicações, algumas das quais já estão na Memória que acabamos de citar. Essas aplicações asseguram ao novo princípio a glória da fecundidade, e é do tempo e do exame mais rigoroso que ele deve receber a da total certeza e da maior universalidade.

No seu primeiro artigo, d'Arcy não analisou a aplicação feita por Maupertuis do princípio de ação mínima à refração; discutiu o próprio conceito de ação e as aplicações que Maupertuis fez do princípio à colisão dos corpos e ao equilíbrio da alavanca, em 1746 - aspectos que não serão discutidos aqui. No entanto, d'Arcy mostrou que a lei da refração podia ser deduzida a partir do seu princípio mecânico.

Maupertuis respondeu a d'Arcy em um artigo de 1752, publicado em 1754. Como os aspectos discutidos nessa resposta têm relação apenas com as colisões e a lei das alavancas, também não serão discutidos aqui.

5. A segunda crítica de d'Alembert

No segundo volume da *Enciclopédie*, d'Alembert publicou um verbete sobre "causas finais" onde voltou a discutir o princípio de ação mínima, analisando de forma particular seu uso na óptica. Primeiramente referiu-se à reflexão, indicando que mesmo nesse caso (que tinha

[8] Clairaut havia acabado de retornar de uma expedição chefiada por Maupertuis, para determinar se a Terra era achatada conforme as previsões de Newton. Não sabemos se d'Arcy teve contato, na época, com o próprio Maupertuis.

[9] As datas dos trabalhos, nesse período, são um pouco confusas. Podia ocorrer um intervalo de vários anos entre a apresentação de uma comunicação à Academia de Ciências e sua efetiva publicação. Os volumes publicados tinham, por isso, duas datas. Utilizamos aqui a data de publicação, nas referências.

sido o ponto de partida de Fermat e de Maupertuis) não existe um princípio de tempo mínimo (nem de ação mínima) [9]:

> De fato, é verdade que na reflexão em espelhos planos e convexos o caminho do raio é o mais curto possível; mas não ocorre o mesmo nos espelhos côncavos e é fácil de demonstrar que muitas vezes esse caminho, em vez de ser o mais curto, é o mais longo. Reconheço que o padre Taquet,[10] que adotou em sua *Catóptrica* esse princípio do caminho mais curto para explicar a reflexão, não ficou embaraçado pela dificuldade dos espelhos côncavos. Ele afirmou que, quando a natureza não pode seguir o caminho mais curto, ela adota o mais longo; pois o mais longo é único e determinado, como o caminho mais curto. Pode-se aplicar bem, aqui, esse dito de Cícero: *Nihil tam absurdum excogitari potest, quod dicture non sit ab aliquo philosophorum.*[11]

Veremos mais adiante a demonstração à qual d'Alembert se referiu, e que ele próprio não apresentou na *Encyclopédie*. No volume 4 da *Encyclopédie*, verbete sobre "cosmologia", d'Alembert deixa claro que sua crítica se aplica igualmente ao uso que Maupertuis havia feito do princípio de ação mínima: "Vimos no artigo Causas finais que o princípio do tempo mínimo falha na reflexão sobre os espelhos côncavos. Parece que o mesmo acontece com o mínimo da ação: pois então o caminho da luz é um *máximo*, e a ação também é um *máximo*" [11].

Ele criticou também o uso do princípio de mínimo na refração [9]:

> Eis, portanto, que o princípio das causas finais falha na reflexão. É bem pior na refração; pois, em primeiro lugar, por qual motivo no caso da reflexão a natureza segue ao mesmo tempo o caminho mais curto e o tempo mais curto, porém na refração toma o tempo mais curto e abandona o menor caminho? Poder-se-ia dizer que ela precisou escolher, pois no caso da refração o caminho mais curto e o tempo mais curto não podem estar em concordância. Está bem: mas por que preferir o tempo ao caminho? (...) Reconheçamos portanto o abuso das causas finais pelo próprio fenômeno que seus adeptos se propõe explicar com a ajuda desse princípio.

6. A análise geométrica de d'Arcy

Em um artigo de 1752, publicado em 1756 [12], d'Arcy reproduziu a análise de d'Alembert publicada na *Encyclopédie*, acrescentando a demonstração matemática de que nos espelhos côncavos o caminho pode ser um máximo, em vez de um mínimo.

Consideremos um espelho esférico côncavo AB, cujo centro é C (Fig. 2). Se tomarmos dois pontos F e f igualmente distantes do centro, simetricamente colocados em relação ao eixo do espelho, é fácil ver que a luz poderá ir de um desses pontos até o outro se for refletida no ponto M, que é o vértice do espelho. O percurso *FMf* poderá ser máximo ou mínimo, dependendo da curvatura do espelho. Isso pode ser visto comparando o espelho côncavo com uma elipse OP que passe por M e cujos focos sejam F e f. Pela definição geométrica de elipse, para qualquer ponto E desse elipse, a distância total *FEf* de um foco ao outro, passando pela elipse, será constante. É fácil ver que se o espelho côncavo, como AB, estiver contido dentro da elipse OP, a distância *FMf* será máxima e não mínima; pois para qualquer outro ponto desse espelho, como por exemplo b, a soma das distâncias *Fb* e *bf* será menor do que *FMf*. Se, pelo contrário, o espelho tiver um maior raio e estiver fora da elipse, como $\alpha\beta$, a distância *FMf* será um mínimo. Portanto, no caso da superfície $\alpha\beta$, a reflexão da luz em M ocorre de tal modo que a distância percorrida pela luz seja mínima; porém, no caso da superfície AB, a distância percorrida pela luz é máxima. O mesmo se aplica às ações, já que a velocidade da luz é constante e, portanto, a ação é proporcional à distância percorrida.

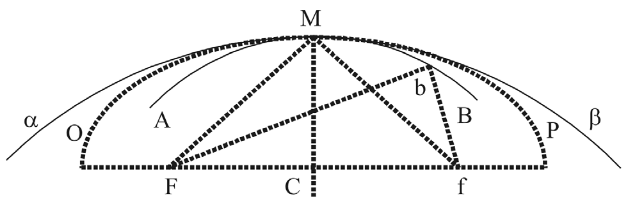

Figura 2 - Esquema geométrico publicado por Patrick d'Arcy, para mostrar que na reflexão da luz por um espelho côncavo o percurso seguido pela luz pode ser o caminho máximo, em vez de mínimo.

d'Arcy acrescentou à demonstração o seguinte comentário [12]:

> Pelo que acabamos de ver, parece que a ação, na reflexão da luz, não é um *máximo* em todos os espelhos côncavos, e consequentemente deveríamos dizer: a ação sobre algumas superfícies côncavas é um *máximo*, enquanto que sobre outras é um *mínimo*, e a natureza é generosa ou avarenta quanto

[10] Andreas Tacquet (1612-1660) foi um padre jesuíta belga, que se dedicou à matemática e à astronomia. As obras do padre Tacquet foram publicadas postumamente, em 1669 [10]. A demonstração à qual d'Alembert se referiu pode ser encontrada em (Teorema 6, proposições 6-8).

[11] Em latim, no original: "Não há nada que se possa pensar, por mais absurdo, que já não tenha sido dito por algum filósofo".

> à sua ação, conforme um espelho seja mais côncavo ou menos.
> *Creio que os verdadeiros juízes sobre esses assuntos sabem agora que juízo devem atribuir às produções do Sr. de Maupertuis.*

Além dessa demonstração, que já era conhecida na época, como vimos pelo comentário de d'Alembert, d'Arcy indicou outro fato interessante. Na situação analisada acima, para alguns espelhos esféricos, haveria três pontos nos quais a ação seria a mesma; porém, a luz passa por apenas um deles. A análise geométrica é esclarecida através da Fig. 3.

Consideremos a elipse ADB, cujos focos são F e f(Fig. 3). Por um ponto M qualquer da elipse, pode ser traçada uma reta que encontra o prolongamento do eixo menor CD em um ponto R de tal forma que RM seja igual a RD (para encontrar o ponto R pode-se, por exemplo, traçar a bissetriz do segmento de reta MD). Assim, pode-se traçar uma circunferência com centro R que passa por D e por M e que corta a elipse também no ponto m. Consideremos que essa circunferência representa a seção de um espelho esférico. A luz emitida por F chegará ao outro foco f passando por D. A trajetória *FDf* é um máximo comparada com qualquer outro ponto do espelho que esteja entre m, D e M, porém é um mínimo comparada com qualquer outro ponto do espelho externo ao segmento *mDM*. Se a luz percorresse o caminho *FMf*, essa trajetória teria o mesmo comprimento que *FDf*. No entanto, a luz certamente passará por D e não por M, já que M é um ponto arbitrário da elipse. Portanto, o comprimento da trajetória não determina qual será o percurso escolhido pela luz.

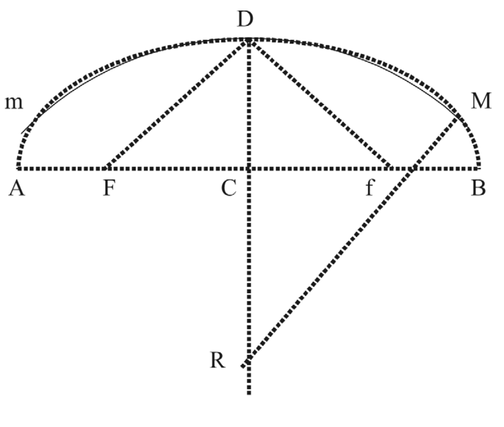

Figura 3 - Esquema de Patrick d'Arcy para mostrar que, na reflexão por um espelho côncavo esférico, há mais de um caminho com o mesmo comprimento que aquele efetivamente seguido pela luz.

Essa situação discutida por d'Arcy é interessante, pois o caminho efetivamente percorrido pela luz é um máximo comparado com pontos próximos e um mínimo comparado com os pontos mais distantes do espelho. No entanto, o próprio d'Arcy não compreendeu as propriedades dessa situação, pois afirmou que o princípio de ação mínima teria, nesse caso, três soluções (os pontos m, D e M), para os quais a diferencial da ação seria nula. Na verdade, isso é válido apenas para o ponto D.

Maupertuis não respondeu a essas objeções de d'Alembert e d'Arcy, embora tenha respondido a outras críticas. Euler, que defendeu Maupertuis contra várias críticas recebidas por aquele, também se calou a este respeito. Provavelmente eles não tinham uma resposta a essas críticas que realmente mostram que o princípio de ação mínima não é válido, na óptica.

Os historiadores têm ignorado esses aspectos problemáticos da utilização dos princípios de mínimo na reflexão. Encontramos apenas uma curta menção de Philip Jourdain (4 linhas) às críticas apresentadas por d'Arcy e por d'Alembert, sem nenhuma discussão detalhada dos argumentos [13].

7. O caso da refração

Vimos que o padre Tacquet, d'Alembert e d'Arcy sabiam que a lei do caminho mínimo (ou da ação mínima) não é válida para a reflexão em certos espelhos côncavos. Portanto, não é um princípio geral, que tenha a importância que Fermat, Maupertuis e outros autores lhe atribuíam.

Podemos desenvolver uma análise para a refração por superfícies curvas que leva a uma conclusão análoga ao raciocínio para espelhos apresentado acima. Ou seja: no caso da refração, também não se pode afirmar que o caminho seguido pela luz representa um mínimo da ação (ou um tempo mínimo, na análise de Fermat). Não encontramos qualquer trabalho da época que apresentasse este tipo de demonstração que será apresentado a seguir, mas é fácil ver que ela se baseia em um raciocínio análogo ao da refração e poderia ter ocorrido aos autores do século XVIII.

Consideremos dois meios A e B, com índices de refração diferentes, nos quais as velocidades da luz são, respectivamente, V_1 e V_2. Suponhamos que o meio B tem a forma de um sólido de revolução convexo, com vértice no ponto O (Fig. 4). Suponhamos que o raio de curvatura da superfície de B, no ponto O, é R.

Escolhemos eixos cartesianos cuja origem é o ponto O, sendo o eixo y coincidente com o eixo de simetria do sólido B e os eixos x e z em um plano tangente ao vértice do sólido convexo B.

Suponhamos agora um ponto C no eixo de simetria do sólido B, dentro desse meio, a uma distância $d = OC$ da origem; e um outro ponto E, no meio A, também sobre o eixo de simetria de B, a uma grande distância $D = OE$ do mesmo.[12] É evidente que, por simetria, a luz proveniente de E atingirá o ponto C passando pelo ponto O, sem se desviar. A questão é

[12]Supomos que D é muito superior às distâncias d e R e que os raios luminosos que vêm do ponto E chegam à superfície refringente praticamente paralelos à reta CO.

saber se o caminho reto entre E e C é aquele no qual a ação é mínima (no sentido de Maupertuis) ou o tempo é mínimo (no sentido de Fermat). Para isso, devemos comparar a ação (ou o tempo) de percurso na reta EC com a ação (ou tempo de percurso) em um outro caminho como CME.

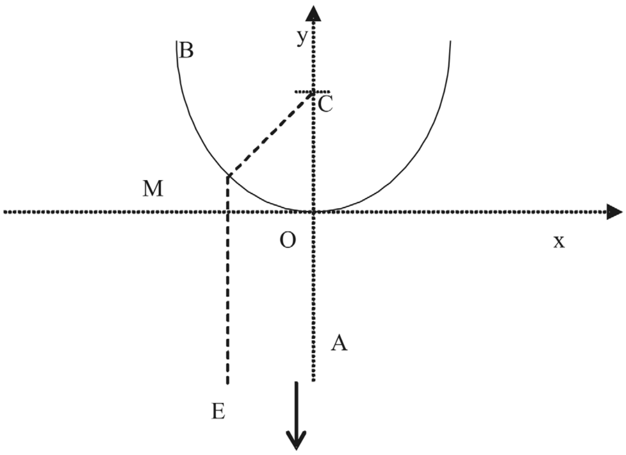

Figura 4 - Na refração a luz pode seguir uma trajetória em que a ação (no sentido de Maupertuis) é mínima ou máxima, dependendo da curvatura da superfície de separação.

Suponhamos que o ponto M está próximo de O (ou seja, vamos estudar trajetórias que não se afastem muito da reta COE). A interseção do sólido B com o plano xy pode ser descrito, em aproximação de segunda ordem, por

$$y = \frac{x^2}{2R}.$$

A distância ME será dada por $D+y = D+x^2/2R$, e a distância MC será dada por $\sqrt{x^2+(d-y)^2} = \sqrt{x^2+(d-x^2/2R)^2}$. A ação total S (no sentido de Maupertuis, e deixando de lado a massa das partículas de luz) seria

$$S = V_1\left(D+\frac{x^2}{2R}\right)+V_2.\sqrt{x^2+\left(d-\frac{x^2}{2R}\right)^2} \quad .$$

Vamos investigar se essa ação é máxima ou mínima quando o ponto M está nas proximidades do ponto O, ou seja, quando x é muito pequeno comparado com d e com R. Podemos desenvolver S em série, obtendo a seguinte expressão, válida em segunda ordem

$$S \cong V_1\left(D+\frac{x^2}{2R}\right)+V_2 d\left[1+\frac{1}{2}\frac{x^2}{d^2}\left(1-\frac{d}{R}\right)\right].$$

Esta aproximação é suficiente para a análise de máximos e mínimos, na proximidade do ponto O.

Calculando agora as derivadas primeira e segunda dessa expressão, temos

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \cong V_1\frac{x}{R}+V_2\frac{x}{d}\left(1-\frac{d}{R}\right);$$

$$\frac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}x^2} \cong \frac{V_1}{R}+\frac{V_2}{d}\left(1-\frac{d}{R}\right).$$

É evidente que dS/dx é nulo no ponto O, onde x =0. No entanto, para que a ação seja mínima na reta EOC, é necessário não apenas isso, mas também que d^2S/dx^2 seja positivo, para $x = 0$.

Se R tender a infinito (ou seja, se a superfície de separação entre os dois meios tender a um plano), teremos que d^2S/dx^2 tende a V_2/d, que tem valor positivo. Portanto, nesse caso, o percurso da luz em linha reta, de E para C, passando por O, é realmente o percurso em que a ação é mínima. Porém, é evidente pela forma da expressão de d^2S/dx^2 que essa derivada segunda se anula e pode mudar de sinal para certos valores de R. Fazendo $d^2S/dx^2 = 0$, obtemos $R_0 = d(V_2 - V_1)/V_2$. Quando o raio de curvatura da superfície de separação entre os dois meios é superior a R_0, o percurso em linha reta EOC é, de fato, aquele no qual a ação é mínima. Porém, se o raio de curvatura da superfície de separação entre os dois meios for inferior a R_0, o percurso em linha reta EOC será aquele no qual a ação é máxima, e não mínima. No entanto, a luz efetivamente percorre a trajetória reta EOC, ou seja, ela não respeita o princípio de Maupertuis.

É claro que podemos descrever o mesmo resultado supondo que o raio de curvatura é dado e que a posição do ponto C é que está sendo analisada. Pode-se ver, pela expressão de d^2S/dx^2, que essa derivada é positiva quando d tende a zero. Portanto, quando o ponto C está suficientemente próximo à superfície de separação, o percurso em linha reta EOC é aquele no qual a ação é mínima. Fazendo $d^2S/dx^2 = 0$, obtemos $d_0 = RV_2/(V_2 - V_1)$. Quando a distância do ponto C até O é superior a d_0, a ação na trajetória em linha reta EOC será máxima, e não mínima.[13]

Portanto, nem sempre a luz percorre a trajetória na qual a ação (no sentido de Maupertuis) é mínima.

Pode-se aplicar a mesma análise ao princípio de Fermat. A única diferença é que, em vez de fazermos o cálculo da ação, devemos calcular o tempo total gasto pela luz para ir de E até C, que seria

$$t \cong \frac{\left(D+\frac{x^2}{2R}\right)}{V_1}+\frac{d\left[1+\frac{1}{2}\frac{x^2}{d^2}\left(1-\frac{d}{R}\right)\right]}{V_2}.$$

[13]Na análise acima, tanto d_0 quanto R_0 serão positivos se $V_2 - V_1$ for positivo. Portanto, estamos assumindo que a velocidade da luz é maior no meio B e menor no meio A. Na teoria corpuscular da luz (admitida por Maupertuis), B seria o meio com maior índice de refração.

ou seja: as velocidades aparecem dividindo as distâncias, e não multiplicando-as. Como as velocidades são constantes, todo o resto da análise é quase idêntico. Também se conclui que há um raio de curvatura mínimo (ou uma distância máxima do ponto C até O) para que a trajetória retilínea EOC seja aquela na qual o tempo é mínimo. Para um raio de curvatura menor do que $d_0 = d(V_1 - V_2)/V_1$ (ou uma distância de C até O superior a $R_0 = RV_1/(V_1 - V_2)$), o tempo em linha reta é máximo.[14]

8. Considerações finais

Ao iniciar o desenvolvimento de sua proposta do princípio de ação mínima Maupertuis estava influenciado por um princípio metafísico *a priori* - o de que a natureza segue sempre os caminhos mais simples e fáceis, evitando desperdícios ou a inutilidade. Essa idéia já estava presente nas obras de Aristóteles, que afirmava que a natureza não faz nada em vão [14]. Esse princípio, presente sob forma filosófica na obra de pensadores escolásticos (como Tomás de Aquino, Suarez e os filósofos jesuítas de Coimbra), apareceu também em estudos científicos na Antigüidade - como nos argumentos de Heron de Alexandria e de Ptolomeu a respeito da trajetória mais curta percorrida pela luz.

Embora o uso desse princípio fosse criticado por Descartes e outros autores do século XVII, Leibniz defendeu seu uso e o empregou amplamente, tanto de forma filosófica como em estudos científicos. Tanto ele quanto Maupertuis tinham clara consciência de seus precedentes históricos. Não há dúvidas de que Maupertuis tinha desde o início uma percepção das raízes metafísicas de suas idéias e não considerava essa influência filosófica como indevida - pelo contrário, ela aumentava o interesse de suas investigações científicas. Houve situações análogas em outros campos científicos, como foi bem mostrado por Émile Meyerson [15]: os princípios de conservação (da massa, da energia, da quantidade de movimento, etc.) surgiram historicamente primeiro como princípios metafísicos, atingindo apenas gradualmente uma formulação científica clara.

Inicialmente, Maupertuis adotou o princípio de mínimo da óptica, adaptando-o para torná-lo compatível com a física newtoniana, e utilizou-o como ponto de partida para, depois, propor que haveria um princípio geral de economia (ou mínimo) de ação na natureza. Porém, o ponto de partida era falso, já que é inválido o princípio de ação mínima na reflexão e na refração (ou seja, esses fenômenos não obedecem sempre à regra de que a ação é mínima). Vários autores perceberam essas falhas, na época. Maupertuis, no entanto, preferiu ignorar essas críticas e jamais admitiu que havia se enganado com relação ao princípio de mínimo na óptica.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) e da Comissão de Aperfeiçoamento do Pessoal de Ensino Superior (CAPES), que possibilitou o desenvolvimento desta pesquisa.

Referências

[1] P.L.M. Maupertuis, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, année M.DCCXLIV, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique tirez des Registres de cette Académie, 417 (1748).

[2] I.C. Moreira, Revista Brasileira de Ensino de Física **21**, 172 (1999).

[3] I. Newton, *Mathematical Principles of Natural Philosophy* (Encyclopaedia Britannica, Chicago, 1952).

[4] J.R. d'Alembert, Action, *in*: D. Diderot e J.R. d'Alembert (eds), *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, par une Societé de Gens de Lettres* (Briasson, Paris, 1751-1782), v. 1, p. 119-120, 17 + 11 v.

[5] P. Radelet-De Grave, Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de la Ciencias y las Técnicas **21**, 439 (1998).

[6] J.F. Michaud e L.G. Michaud (eds) *Biographie Universelle Ancienne et Moderne.* Nouvelle édition (Mme. C. Desplaces / Michaud, Paris, 1843-1865), 45 v.

[7] P. d'Arcy, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, année M.DCCXLIX, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique tirés des Registres de cette Académie, 531 (1753).

[8] [Anônimo], Histoire de l'Académie Royale des Sciences, année M.DCCXLIX, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique tirés des Registres de cette Académie, p. 179-181 (1753).

[9] J.R. d'Alembert, Causes Finales, *in*: D. Diderot e J.R. d'Alembert (eds), *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, par une Societé de Gens de Lettres* (Briasson, Paris, 1751-1782), v. 2, p. 789, 17 + 11 v.

[10] A. Tacquet, *Opera Mathematica* (Iacobum Meursium, Antuerpia, 1969).

[11] J.R. d'Alembert, Cosmologie, *in*: D. Diderot e J.R. d'Alembert (eds.), *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers, par une Societé de Gens de Lettres* (Briasson, Paris, 1751-1782), v. 4, p. 294-297, 17 + 11 v.

[14] Na análise acima, tanto d_0 quanto R_0 serão positivos se $V_1 - V_2$ for positivo. Portanto, estamos assumindo que a velocidade da luz é maior no meio A e menor no meio B. Na teoria ondulatória da luz (compatível com o princípio de Fermat), B seria o meio com maior índice de refração.

[12] P. d'Arcy, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, année M.DCCLII, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique tirés des Registres de cette Académie, 503 (1756).

[13] P.E.B. Jourdain, *The Principle of Least Action* (Open Court, Chicago, 1913). Reimpresso em B. Cohen (org), *The Conservation of Energy and the Principle of Least Action* (Arno Press, Nova Iorque, 1981).

[14] P. Schrecker, Isis **33**, 329 (1941).

[15] E. Meyerson, *Identité et Réalité*. (J. Vrin, Paris, 1951), 5^a ed.