Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 31, n. 2, 2305 (2009)
www.sbfisica.org.br

Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial

(On the origins of the scalar and vectorial product definitions)

M.J. Menon[1]

Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil
Recebido em 11/11/2008; Revisado em 29/1/2009; Aceito em 10/3/2009; Publicado em 26/6/2009

Nos livros-texto de física e de matemática utilizados em cursos básicos universitários, as operações de multiplicação de dois vetores (produtos escalar e vetorial) são introduzidas apenas como definições, sem nenhuma referência ou discussão a respeito das razões formais e/ou motivações que levaram ao estabelecimento de tais estruturas. Neste trabalho, apresentamos uma breve revisão didática sobre as origens dessas definições, discutindo os resultados pertinentes, formais, estabelecidos por Hamilton no contexto da álgebra de quatérnions e certas "adaptações" feitas por Gibbs e Heaviside, as quais deram origem ao ramo da matemática que hoje é popularmente conhecido como "álgebra vetorial". Comentamos algumas desvantagens decorrentes dessas "adaptações", fazendo referência a outros sistemas algébricos práticos e formalmente bem fundamentados (álgebras de Grassmann e Clifford). Indicamos e comentamos alguns artigos e trabalhos, básicos e também recentes, nos quais o assunto pode ser aprofundado.
Palavras-chave: álgebra vetorial, quatérnions.

The operations of two vector multiplication (the scalar and vector products) are introduced in physics and mathematics textbooks just as a definition, without any reference or discussion on the formal reasons and/or motivations that have led to these structures. In this work, a short pedagogical review on the origins of these definitions is presented. We discuss the formal results obtained by Hamilton in the context of quaternionic algebra and some "changes" performed by Gibbs and Heaviside, leading to what is now usually known as "vector algebra". We present comments on some disadvantages of these "changes", referring to more practical and formal systems (Grasmmann and Clifford algebras). Some basic and recent works on the subject are also mentioned and commented.
Keywords: vector algebra, quaternions.

1. Introdução

Sabemos que o conceito de grandeza vetorial ocupa um papel fundamental nas ciências exatas e tecnológicas. No ensino médio e nos cursos básicos universitários, o primeiro contato com os vetores é através de uma *representação* que caracteriza um tipo *particular* de vetor. Nessa *representação elementar*, os vetores são vistos como associados a grandezas que necessitam de módulo, direção e sentido para serem completamente especificadas, sendo exemplos clássicos o deslocamento de uma partícula, a velocidade, aceleração e força. Nesse contexto, um vetor é geometricamente representado por uma seta, com comprimento proporcional ao seu módulo, o que é intuitivo. Em seguida, fazendo-se uso das regras do paralelogramo ou do polígono, passa-se à adição de vetores e então à multiplicação de um vetor por um escalar (número real), também geometricamente intuitivo, uma vez que se associa ao produto o aumento ou diminuição do comprimento da seta e/ou inversão de seu sentido.

Mas aí entra algo de caráter bem diferente: as operações de multiplicação de dois vetores, na forma escalar (o resultado é um escalar) e vetorial (o resultado é um vetor). Até onde conhecemos, todos os textos didáticos utilizam a mesma estratégia: as operações são introduzidas através de definições, digamos pragmáticas, no sentido de que são apresentadas e passa-se imediatamente às propriedades decorrentes da definição (por exemplo, Refs. [1, 2]). Mesmo que, previamente, se façam algumas considerações sobre grandezas físicas (torque, momento angular,...) ou geométricas (ângulo de rotação), não há nenhuma referência às razões que levaram a essas definições. Na nossa opinião, trata-se de considerações que apenas "maquiam" a lacuna formal, induzindo o aluno a pensar que a natureza (a física) justifica as definições.

É claro que se pode dar uma certa justificativa, pelo

[1]E-mail: menon@ifi.unicamp.br.

menos, aos módulos dos produtos, através de resultados típicos da geometria e trigonometria elementares. Por exemplo, se A, B e C são os comprimentos dos lados de um triângulo e θ o menor ângulo entre os lados A e B (com origem comum), a lei dos cossenos fornece $C^2 = A^2+B^2-2AB\cos\theta$ e temos também que a área de um paralelogramo de lados A e B é dada por $AB\text{sen}\theta$. Assim, as estruturas associadas aos módulos dos produtos $AB\cos\theta$ (escalar) e $AB\text{sen}\,\theta$ (vetorial), parecem ter uma base na trigonometria e aparentemente, a álgebra, chamada vetorial, fornece expressões compactas e elegantes para os resultados acima (e também muitos outros, não tão elementares).

Porém, no caso do produto vetorial, o resultado é um vetor normal aos dois fatores e, pior ainda, seu sentido é *convencionado* pela "regra da mão direita". Isso não é nada intuitivo e não sendo explicado ou justificado, permanece uma incógnita com a qual os alunos, infelizmente, acabam se acostumando, assim como com algumas grandezas "estranhas", como vetores deslocamento angular (infinitesimal), velocidade angular, momento angular, torque e campo magnético.

É claro que a abordagem acima discutida, padrão nos textos didáticos, não pode ser criticada quanto a sua estratégia prática ou pragmática: dá-se uma definição e passa-se ao estudo das consequências formais. Porém é certo que há uma lacuna pedagógica: algo que o aluno não entende e não tem tempo para pensar, devido à sequência da matéria e isso envolve não só o produto em si, mas, principalmente, grandezas físicas tão importantes como as acima referidas.

Afinal, de onde vem essa definição tão específica e tão útil na prática? Por que a definição é essa e não outra? Tudo isso tem um fundamento matemático e/ou um significado mais amplo? O produto vetorial tem algo a ver com o escalar? Não é possível unificá-los? É possível generalizá-los para outras dimensões?

O objetivo deste trabalho é apresentar uma revisão didática sobre as origens históricas das definições dos produtos escalar e vetorial, destacando aspectos formais envolvidos e de certas modificações que acabaram resultando no que hoje se conhece popularmente como "álgebra vetorial". Como veremos, as expressões desses produtos estão associadas ao conceito *formal* de quatérnion, introduzido por William Rowan Hamilton em 1843 [3, 4] e de certas *adaptações* feitas por Josiah Willard Gibbs e Oliver Heaviside na década de 1890 [5-7].

Em princípio, não há nada de novo em se abordar as interfaces entre álgebra de quatérnions e álgebra de Gibbs-Heaviside, uma vez que, como veremos e citaremos, o assunto já foi bastante discutido e também debatido na literatura (e continua sendo). O aspecto que entendemos original diz respeito à estratégia e à tática do texto, como explicado a seguir. Pressupomos do leitor apenas a familiarização com as definições de espaço vetorial, definições usuais dos produtos escalar e vetorial e com as operações elementares envolvendo números complexos (os dois últimos tópicos serão revisados). Discutimos de forma didática as motivações que levaram Hamilton ao desenvolvimento da álgebra de quatérnions, bem como os conceitos e resultados básicos desse formalismo. Em seguida, focalizamos nas expressões do produto de quatérnions, mostrando *explicitamente* as origens das definições usuais dos produtos escalar e vetorial através de modificações que não possuem justificativas formais na álgebra de quatérnions. Como material adicional, apresentamos comentários históricos e técnicos sobre o desenvolvimento da álgebra na segunda metade do século XIX, destacando os questionamentos às adaptações de Gibbs e Heaviside e citando álgebras mais avançadas de amplas aplicações práticas.

Com isso esperamos que o texto seja especialmente útil aos alunos no início dos cursos profissionais (segundo/terceiro ano), os quais, talvez por falta de tempo e/ou de informações adequadas, acabam se acostumando com as definições, embora sintam ainda o desconforto da incógnita. Num sentido mais amplo, esperamos contribuir com o desenvolvimento da atitude crítica por parte dos alunos (e também dos professores), evitando a simples aceitação de uma definição *ad hoc*, que possui sutis implicações físicas e matemáticas.

O texto é organizado como segue. Na seção 1 revisamos as definições usuais dos produtos escalar e vetorial e de suas expressões em coordenadas retangulares (cartesianas). Na seção 3 tratamos dos quatérnions, resumindo as motivações que levaram Hamilton à sua formulação, apresentando as bases formais dessa álgebra e a estrutura algébrica do produto de quatérnions. Na seção 4, comparamos e contrastamos os produtos de quatérnions com os produtos escalar e vetorial, destacando as "adaptações" básicas efetuadas por Gibbs e Heaviside. Na seção 5 reunimos discussões sobre essas adaptações, os aspectos matemáticos envolvidos, o debate histórico a respeito das diferentes interpretações e comentamos algumas referências didáticas básicas [8-12] e recentes [13-18], nas quais o assunto pode ser aprofundado. Nossas conclusões são apresentadas na seção 6.

2. Multiplicação de vetores na "álgebra vetorial"

Revisamos aqui as definições padrões dos produtos escalar e vetorial ([1, 2]) e das expressões desses produtos no sistema de coordenadas retangulares. A notação introduzida será útil para a comparação com o produto de quatérnions, a ser tratado na seção 3.

2.1. Definições padrões

Sejam $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ dois vetores do espaço euclidiano tridimensional $\mathcal{R}^3$ e seja θ o menor ângulo entre eles. Para

$\theta \neq 0$ os dois vetores definem um plano e podemos pensar, por exemplo, em vetores posição de duas partículas em repouso.

2.1.1. Produto escalar

O *produto escalar* de $\mathbf{r}_1$ por $\mathbf{r}_2$, representado por $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$, é o escalar definido por

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \equiv r_1 r_2 \cos\theta,$$

onde $r_i = |\mathbf{r}_i|$, $i = 1, 2$ são os módulos dos vetores. Decorre da definição que o produto escalar é comutativo: $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1$. Esse produto é também denominado *produto interno.*

2.1.2. Produto vetorial

O *produto vetorial* de $\mathbf{r}_1$ por $\mathbf{r}_2$, representado por $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, é o vetor que possui

- módulo $|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2| = r_1 r_2 \mathrm{sen}\ \theta$;
- direção perpendicular ao plano determinado por $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$;
- sentido convencionado pela "regra da mão direita": curvando-se os dedos da mão direita no sentido do primeiro vetor ($\mathbf{r}_1$) para o segundo vetor ($\mathbf{r}_2$), ao longo do menor ângulo, o polegar estendido dá a direção e sentido do vetor resultante $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$.

Decorre da definição que o produto vetorial é anti-comutativo: $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1$. Esse produto é também denominado *produto externo.*

2.2. Expressões em coordenadas retangulares

Considerando o sistema de coordenadas retangulares (cartesiano), denotemos as coordenadas x, y, z, e a base de vetores ortonormais por $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$. Das definições acima dos produtos escalar e vetorial decorrem os resultados conhecidos envolvendo os versores da base:

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1, \\ \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot \hat{z} = \hat{y} \cdot \hat{z} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \hat{x} \times \hat{x} &= 0, & \hat{y} \times \hat{x} &= -\hat{z}, & \hat{z} \times \hat{x} &= \hat{y}, \\ \hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z}, & \hat{y} \times \hat{y} &= 0, & \hat{z} \times \hat{y} &= -\hat{x}, \\ \hat{x} \times \hat{z} &= -\hat{y}, & \hat{y} \times \hat{z} &= \hat{x}, & \hat{z} \times \hat{z} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Vamos expressar os vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ na base retangular com a seguinte notação

$$\mathbf{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} + z_1\hat{z}, \qquad \mathbf{r}_2 = x_2\hat{x} + y_2\hat{y} + z_2\hat{z}. \tag{3}$$

Utilizando as propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição, bem como os resultados das Eqs. (1) e (2), obtemos as expressões também conhecidas para os produtos *escalar*

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \tag{4}$$

e *vetorial*

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 &= (y_1z_2 - z_1y_2)\hat{x} + (x_2z_1 - z_2x_1)\hat{y} \\ &+ (x_1y_2 - y_1x_2)\hat{z}. \end{aligned} \tag{5}$$

3. Quatérnions

Os quatérnions são, essencialmente, generalizações de números complexos para quatro dimensões. Nesta Seção revisamos as motivações que levaram à sua introdução, a definição formal e, mais importante, a expressão do produto de um tipo especial de quatérnion, o qual, na seção 4, será comparado com os resultados acima, (4) e (5), da "álgebra vetorial".

3.1. Motivação e origem dos quatérnions

Iniciamos recordando algumas propriedades associadas aos números complexos que serão a seguir generalizadas para o caso de quatérnions. Sabemos que os números complexos tiveram origem nas soluções de equações algébricas que implicavam em raiz quadrada de números negativos, por exemplo, $x^2 + 1 = 0$. Esse problema do discriminante negativo, já conhecido no século XVI, foi tratado no início do século XIX por Hamilton (e independentemente por Karl Friedrich Gauss) na forma de pares ordenados (a, b) de números reais a e b. Com as definições de igualdade, soma e produto de pares ordenados (a, b) e (c, d),

$$\begin{aligned} &(a, b) = (c, d) \text{ implica em } a = c \text{ e } b = d, \\ &(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \\ &(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc), \end{aligned} \tag{6}$$

estabelece-se [19] uma álgebra dupla, isto é, com duas componentes. Na prática, as operações com esses pares ordenados são mais simples através da introdução da chamada *unidade imaginária*, denotada i e definida pelo produto

$$ii = i^2 = -1, \tag{7}$$

o que implica em $i = \sqrt{-1}$. Com isso, representa-se um número complexo na forma $a + ib$ onde a é a chamada parte real e b a parte imaginária, ambas reais. Como sabemos, com a definição (7) e as propriedade distributiva e associativa, decorre a estrutura do produto na Eq. (6).

Uma propriedade importante dos números complexos (principalmente para o que discutiremos a seguir) é a propriedade de *fechamento*: o resultado da adição e multiplicação de dois números complexos é também um número complexo, isto é, um número com a mesma estrutura acima.

Uma "realização visual" desses abstratos números foi estabelecida em 1797 pelo topógrafo norueguês Gaspar Wessel (e posteriormente por Robert Argand em 1806): representam-se geometricamente os números complexos por pontos no plano, tendo a e b por coordenadas associadas a dois eixos perpendiculares, denominados eixos real e imaginário, respectivamente. Essa representação tem muita semelhança com os vetores no plano ($\mathcal{R}^2$), embora as definições de multiplicação no $\mathcal{R}^2$ ("álgebra vetorial") e de números complexos sejam completamente distintas (voltaremos a esse assunto na seção 5.2).

Essa representação permite também uma interpretação geométrica para o produto de dois números complexos, em particular de um número complexo pela unidade imaginária: rotação de $\pi/2$ radianos. Especificamente, considerando coordenadas polares, para $z = re^{i\theta}$ e como $i = e^{i\pi/2}$ temos

$$z = re^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad iz = e^{i\pi/2} re^{i\theta} = re^{i(\theta+\pi/2)}. \tag{8}$$

As similaridades geométricas entre números complexos e vetores no plano e, por outro lado, a ausência de correlações entre números complexos e vetores no espaço tridimensional ($\mathcal{R}^3$), motivou Hamilton a buscar generalizações dos números complexos em 3 dimensões. Uma idéia imediata, embora abstrata, é pensar numa segunda unidade imaginária, digamos, j, com propriedade análoga a i, isto é $jj = -1$, e considerar tripletos de números reais e unidades imaginárias. Por exemplo, sendo a, b e c números reais, i e j as unidades imaginárias e representando o tripleto por t, poderíamos ter uma estrutura da forma

$$t = a + ib + jc. \tag{9}$$

Será que isso funciona? Em meados do século XIX, Hamilton iniciou o estudo das generalizações através desses tripletos, mas deparou-se com um problema: com as regras acima introduzidas e outras que buscou estabelecer, os tripletos não obedecem à propriedade de fechamento no caso da multiplicação, o que leva, por exemplo, a uma álgebra que não pode ser generalizada a outras dimensões. Após 15 anos de estudos e várias tentativas, descobriu que a introdução de uma terceira unidade imaginária, com propriedades, como veremos, bem definidas, levava a uma estrutura fechada. Esses novos "objetos" com quatro componentes e 3 unidades imaginárias foram introduzidos por Hamilton em 1843 e por ele denominados *quatérnions*.

3.2. Notação e definições

Vejamos como a álgebra de quatérnions é formalmente estabelecida, isto é, como no caso dos complexos, quais as operações que definem as unidades imaginárias. Vamos utilizar uma notação conveniente para em seguida correlacionar com os resultados da seção 2. Representaremos um quatérnion pela letra q, os quatro números reais associados por w, x, y e z (ordem alfabética) e as três unidades imaginárias por i, j e k (ordem também alfabética), notação esta (das unidades) típica dos trabalhos de Hamilton. Com isso um quatérnion tem estrutura

$$q = w + ix + jy + kz. \tag{10}$$

De modo análogo aos números complexos, um quatérnion possui também uma *parte real* (w), porém 3 *partes imaginárias* (x, y e z). Hamilton introduziu denominações para essas contribuições que são as mesmas atualmente utilizadas. A componente real foi denominada *Parte Escalar do Quatérnion*, denotada $E(q)$ (em inglês, $S(q)$):

$$E(q) = w. \tag{11}$$

A componente com unidades imaginárias foi denominada *Parte Vetorial do Quatérnion*, denotada $V(q)$:

$$V(q) = ix + jy + kz \tag{12}$$

e é também referida como *Quatérnion Puro*. Assim, no caso geral,

$$q = E(q) + V(q).$$

Como na álgebra dos complexos, o ponto central é a generalização de (7) no caso das 3 unidades imaginárias de modo a se obter uma álgebra fechada. As regras fundamentais, obtidas por Hamilton, que definem a álgebra *fechada* de quatérnions estão contidas nos nove produtos das unidades imaginárias:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= k = -ji \\ jk &= i = -kj \\ ki &= j = -ik. \end{aligned} \tag{13}$$

Como relata Eves [20], Hamilton comentava que foi durante um passeio a pé em Dublin que intuiu a necessidade de quatro componentes, bem como as tábuas acima de multiplicação das unidades imaginárias, gravando a principal delas com um canivete numa pedra da ponte Proughm. Atualmente há uma placa nesse local com os dizeres "Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quartenion multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ & cut it in a stone of this bridge".

3.3. Multiplicação de quatérnions

O produto de dois quatérnions é estabelecido, de modo análogo aos complexos, através das propriedades associativa e distributiva da multiplicação em relação à adição, juntamente com as regras (13) que definem as unidades imaginárias. Para nossos propósitos será suficiente considerar um caso particular e fundamental, como veremos, que é o *produto de dois quatérnions puros*, isto é, com partes escalares nulas.

3.3.1. Produto de dois quatérnions puros

Consideremos a seguinte notação para dois quatérnions com partes escalares nulas

$$q_1 = V(q_1) = ix_1 + jy_1 + kz_1, \qquad E(q_1) = 0 \tag{14}$$
$$q_2 = V(q_2) = ix_2 + jy_2 + kz_2, \qquad E(q_2) = 0 \tag{15}$$

Utilizando as propriedades e regras acima referidas, é um exercício *proveitoso* para o leitor obter o resultado do produto q_1q_2. De fato, agrupando os termos em partes escalar e vetorial, obtém-se

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= -(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \\ &+ i\ (y_1z_2 - z_1y_2) + j\ (x_2z_1 - z_2x_1) \\ &+ k\ (x_1y_2 - y_1x_2). \end{aligned} \tag{16}$$

3.3.2. Propriedade notável

Nesse resultado algébrico temos uma propriedade notável: o produto de dois quatérnions puros (só parte vetorial) tem a estrutura de um quatérnion geral, isto é, com parte escalar

$$E(q_1q_2) = -(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) \tag{17}$$

e parte vetorial

$$\begin{aligned} V(q_1q_2) &= i\ (y_1z_2 - z_1y_2) + j\ (x_2z_1 - z_2x_1) \\ &+ k\ (x_1y_2 - y_1x_2). \end{aligned} \tag{18}$$

Isso mostra que não é possível tratar separadamente as partes escalar e vetorial, pois o produto de dois quatérnios puros (partes escalares nulas) gera, automaticamente, uma parte escalar.

4. Correlações entre os produtos

Comparando esses resultados (17) e (18) com os revisados na seção 2 sobre os produtos escalar e vetorial de dois vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, no contexto da "álgebra vetorial", Eqs. (4) e (5), vemos que

$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ tem a mesma estrutura algébrica que $-\,E(q_1q_2)$

$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ tem a mesma estrutura algébrica que $V(q_1q_2)$, se *substituirmos* as unidades imaginárias i, j e k pelos versores da base retangular $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$, respectivamente.

Com isso, temos as associações sugestivas

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\,E(q_1q_2) \tag{19}$$

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad V(q_1q_2) \tag{20}$$

De fato, esta é a origem histórica das expressões que hoje conhecemos como produtos escalar e vetorial, definidos de forma "pragmática" na álgebra vetorial. A álgebra de quatérnions, formalmente construída por Hamilton com o objetivo de estabelecer um sistema fechado, se reduz à álgebra de Gibbs-Heaviside através de adaptações que, na prática, correspondem a

- Separação das partes escalar e vetorial do produto de dois quatérnions puros em dois produtos *independentes*, hoje conhecidos como escalar e vetorial;
- Eliminação do sinal negativo presente na parte escalar do produto de dois quatérnions puros;
- Substituição das unidades imaginárias por versores da base retangular.

Com isso, estabelecem-se as formas (4) e (5) em coordenadas retangulares, decorrendo então as definições padrões da seção 2. Com essas definições de produtos independentes e demais regras de igualdade e adição, análogas às (6), constrói-se a álgebra de Gibbs-Heaviside, a qual, como sabemos, possui amplas aplicações na Física Clássica (Mecânica Newtoniana e Eletromagnetismo).

Embora tudo isso caracterize, de fato, as origens dos produtos escalar e vetorial e da popular "álgebra vetorial", é claro que neste ponto muita coisa fica ainda a desejar. Afinal, o que levou esses autores a essas adaptações? Por que os quatérnions não são utilizados nos livros texto de física clássica? Pode-se simplesmente "adaptar" coisas formalmente construídas, com eventual justificativa de se obter uma linguagem mais simples ou prática? Quais as implicações do "desmantelamento" dos quatérnions? Há inconsistências ou inconvenientes? Não há aí um "elo perdido" formal?

De fato, as correlações e contrastes entre quatérnions e vetores envolvem várias sutilezas conceituais e foram motivo de intenso debate entre os eminentes criadores das duas abordagens. Embora não seja nosso objetivo discutir explicitamente essas questões, apresentamos na próxima seção alguns comentários históricos e informações sobre o assunto, indicando referências específicas, básicas e recentes, nas quais as questões podem ser aprofundadas.

5. Comentários

Inicialmente apresentamos algumas informações sobre as origens de certas notações e símbolos correntes na álgebra de Gibbs-Heaviside, destacando algumas desvantagens dessa abordagem. Em seguida, observamos que, embora popularmente denominada "álgebra vetorial", a álgebra de Gibbs-Heaviside é apenas um caso particular de uma álgebra vetorial (por isso utilizamos até aqui as aspas) e discutimos o conceito geral e formal do que consiste uma álgebra. Com esse conceito formal, situamos historicamente as adaptações de Gibbs-Heaviside, comentamos, resumidamente, o polêmico debate que isso causou, as álgebras mais gerais de amplas aplicações físicas, nossa visão pessoal do assunto e, por fim, comentários sobre algumas referências básicas e recentes. Na Fig. 1 indicamos um esquema cronológico dos principais autores e obras que serão referidos a seguir.

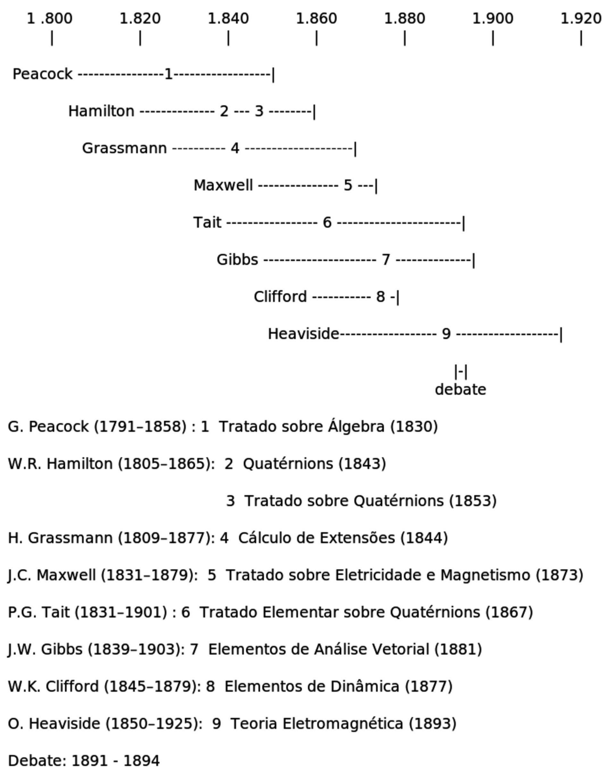

Figura 1 - Esquema aproximado do período histórico e das principais obras (e autores) referidas no texto. A primeira linha indica o ano, as linhas com os nomes e uma barra referem-se ao período do autor, os números estão associados ao ano da publicação ou apresentação da obra principal (indicadas na parte inferior) e as duas barras verticais indicam o período do debate.

5.1. Notações e símbolos

5.1.1. Versores

Como lembramos anteriormente, o efeito geométrico de se multiplicar um número complexo z por uma unidade imaginária i é provocar em z uma rotação de $\pi/2$ radianos. Pelo fato de a parte vetorial de um quatérnion possuir unidades imaginárias, Hamilton pensou no efeito de rotação (*rotor*), introduzindo a denominação *versor* para designar as unidades imaginárias i, j e k. Entretanto, as interpretações de Gibbs e também de Heaviside foram bem diferentes, pois esses autores entendiam um quatérnion puro como um elemento do espaço euclidiano $\mathcal{R}^3$, introduzindo a denominação *vetor* (e não parte vetorial do quatérnion, como denotado por Hamilton). No sistema de Gibbs-Heaviside, as unidades imaginárias são interpretadas como vetores unitários, os quais, posteriormente, receberam a notação original de Hamilton: *versores.*

5.1.2. A base $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ e a regra da mão direita

Na álgebra de quatérnions, i, j e k são unidades imaginárias, definidas pelas regras (13), que garantem a propriedade de fechamento. Ao se associarem versores a esses símbolos, desprezando-se as regras acima de composição, torna-se necessário impor, ou postular, o modo pelo qual combinando-se, por exemplo, os versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ dê como resultado $\hat{k}$. Essa é a origem da convencionada regra da mão direita para o produto vetorial.[2]

5.1.3. Vetores, pseudovetores, escalares e pseudoescalares

Essa última "adaptação" da álgebra de quatérnions teve delicadas consequências na Física: a necessidade de se associarem a certas grandezas físicas direções e sentidos estabelecidos por convenção. De fato, decorre da definição de produto vetorial que, se três grandezas físicas são correlacionadas por esse produto, uma delas, necessariamente, possui direção e sentido convencionados. Assim, devem-se distinguir vetores que possuem direção e sentido *naturais* (por exemplo, deslocamento, velocidade, aceleração, força, campo elétrico) denominados *vetores polares* ou simplesmente *vetores*, daqueles com direção e sentido convencionados (por exemplo, deslocamento angular infinitesimal, velocidade angular, momento angular, torque, campo magnético), denominados *vetores axiais* (devido ao eixo de referência) ou *pseudovetores*.[3] Essas distinções decorrem das conhecidas relações

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \qquad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}, \\ \mathbf{T} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \qquad \mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \end{aligned}$$

[2] Observemos que essa é a origem da notação ainda utilizada por alguns autores para a base retangular: $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$, ao invés de $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, notação esta mais intuitiva e simétrica para comparação com outras coordenadas, por exemplo, esféricas, $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$.

[3] Os adjetivos "polares" e "axiais" foram introduzidos por Woldemar Voigt em 1896.

Mas não é só isso. Sob a operação de inversão dos eixos coordenados, um vetor polar troca de sinal. Isso significa que, sob essa inversão, o produto escalar de dois vetores polares preserva o sinal,

$$(-\mathbf{A}) \cdot (-\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

(por exemplo o trabalho determinado pelo produto escalar da força pelo deslocamento). Por outro lado, num produto triplo escalar (de vetores polares) o resultado troca de sinal

$$(-\mathbf{A}) \cdot [(-\mathbf{B}) \times (-\mathbf{C})] = -\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$$

(por exemplo o volume de um paralelepípedo que tenha **A**, **B** e **C** por lados e origens num dos vértices; essa é a razão pela qual se expressa esse volume pelo módulo do produto triplo). Como consequência, temos também outra distinção na álgebra de Gibbs-Heaviside: escalares que preservam o sinal sob inversão, denominados simplesmente *escalares* e os que trocam de sinal, denominados *pseudoescalares*.

É importante destacar que tudo isso não é nenhuma requisição, nem propriedade intrínseca, da natureza (isto é, da física, na concepção da palavra), mas uma consequência (imposição) da linguagem utilizada. Em outros sistemas, como veremos adiante, não ocorrem essas distinções.

5.1.4. Os símbolos "·" e "×"

Com relação ao produto de quatérnions puros, Eq. (16), Gibbs e Heaviside definiram dois tipos diferentes e independentes de produtos, o *produto vetorial*, associado à parte vetorial do produto de dois quatérnions puros, $V(q_1q_2)$ e o *produto escalar*, identificado com o *negativo* da parte escalar, $-E(q_1q_2)$. Para destacar o caráter independente que passavam a ter esses produtos, Gibbs introduziu as notações "·" e "×", eliminando o sinal negativo e separando, definitivamente (em sua álgebra), os produtos escalar e vetorial.

5.1.5. Distinções entre quatérnions e vetores

É importante ressaltar que não há nenhuma equivalencia formal entre a álgebra de quatérnions e a de Gibbs-Heaviside. Quatérnions puros e vetores (de Gibbs-Heaviside) são objetos distintos, possuindo diferentes propriedades de simetria. Por exemplo, o produto de dois quatérnions não é comutativo, mas obedece a propriedade associativa. Por outro lado, o produto escalar é comutativo e não associativo e o produto vetorial é anti-comutativo e não é associativo. Além disso, no sistema de quatérnions não há nenhuma distinção entre vetores polares e vetores axiais e portanto, nem entre escalares e pseudoescalares.

Outro aspecto peculiar do sistema Gibbs-Heaviside é o fato de o produto vetorial ser definido *apenas para espaços de dimensão 3* e não 2 ou 4, o que não é interessante nem do ponto de vista formal da álgebra e nem de aplicações práticas, por exemplo o espaço-tempo quadridimensional da Relatividade Especial (voltaremos a essa limitação no que segue).

5.2. Álgebra vetorial

O conceito formal e geral de vetor é estabelecido nos cursos de álgebra linear, através das propriedades que definem um *espaço vetorial* e o *corpo* (escalares) sobre o qual o espaço vetorial é definido. Essas propriedades dizem respeito somente às operações de adição e de multiplicação de escalares, no caso do corpo, e de *vetores por escalares*, no caso do espaço vetorial, além das propriedades associativa, distributiva, elemento neutro, etc... [19]. Um vetor é, por definição, um elemento do espaço vetorial, isto é, um objeto que obedece todas as propriedades que definem o espaço vetorial. Nesse contexto, vemos que a representação elementar, referida em nossa introdução, de grandezas com módulo, direção e sentido, diz respeito, de fato, a tipos muito particulares de vetores.

É importante destacar que o *produto de vetores não faz parte da definição de espaço vetorial*. A partir da definição (ou invenção) de um produto de vetores num dado espaço vetorial, estabelece-se o que se denomina, formalmente, uma *álgebra vetorial*. Por exemplo, sabemos que tanto os vetores do $\mathcal{R}^2$ como os números complexos, obedecem as propriedades que definem um espaço vetorial. Entretanto as álgebras associadas, estabelecidas pelas definições de produtos de dois vetores (escalar, vetorial) e de dois números complexos, são completamente diferentes devido às formas dos produtos. De fato, na representação geométrica, o produto de dois números complexos do plano é um número complexo e portanto contido no mesmo plano. Em contraste, o produto de dois vetores na álgebra de Gibbs-Heaviside nunca resulta num vetor do plano por eles definido: só pode ser um escalar (elemento do corpo, formalmente associado ao conceito de funcional) ou um vetor normal ao plano e portanto não pertencendo a ele. Esse é o exemplo clássico do "não fechamento" da álgebra associada. Também, definidos os produtos e demais propriedades, para matrizes, polinômios, etc., teremos as álgebras vetoriais correspondentes, sendo estes exemplos óbvios de vetores sem direção ou sentido associados.

5.3. A álgebra no final do século XIX

Como discutido por Evens [20], a Álgebra teve origem na aritmética, sendo caracterizada, em sua essência, pela substituição de números por letras. As operações e propriedades de diferentes conjuntos numéricos (inteiros, reais,...) passavam a ser representadas por letras, implicando mais em uma "aritmética simbólica" do que propriamente uma álgebra. A desvinculação entre álgebra e aritmética aconteceu no momento em que se passou a estudar regras de operações e propriedades de forma independente daquelas ditadas pelos conjuntos numéricos. Isso ocorreu na Inglaterra, no início do século XIX, tendo como pedra fundamental o *Tratado sobre Álgebra* de George Peacock, professor da Universidade de Cambridge, publicado em 1830. Como consequência, houve um desenvolvimento muito rápido e fundamental das álgebras chamadas *múltiplas* (várias componentes), destacando-se álgebra de quatérnions de Hamilton (1843), a primeira álgebra que rompeu com o axioma da comutatividade, a álgebra de extensão de Grassmann (1844) e a álgebra geométrica de Clifford (1878) (sobre as duas últimas retornaremos adiante). Justamente durante toda essa "efervescência álgebrica", no último quartel do século XIX, surge uma outra questão no terreno da Física, que discutimos a seguir.

5.4. A questão da notação prática

Num bom sentido, talvez seja possível dizer que a primeira sugestão para um "desmantelamento" da álgebra de quatérnions aparece justamente numa das obras mais conhecidas e fundamentais da física, o *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo* de James Clerk Maxwell, publicado em 1873 [21]. Apesar de, nessa obra, Maxwell ressaltar a importância dos quatérnions como entidades matemáticas e utilizar as idéias conceituais envolvidas, ele não faz uso explícito das operações completas ou métodos quaterniônicos. O ponto central é que, utilizando o formalismo por componentes, refere-se separadamente a vetores e escalares. Se Maxwell não utilizou explicitamente a álgebra quaterniônica, seria essa abordagem matemática, "abstrata" para muitos estudiosos não matemáticos, a linguagem adequada aos fenômenos tratados? Dada a importância fundamental da obra de Maxwell no campo da Física, esse questionamento passa também a ter importância destacada: infelizmente, como veremos a seguir, surgia um primeiro embate entre, digamos, "matemática formal, porém abstrata"e "notação prática para uso popular".

Na época da publicação do *Tratado* de Maxwell, Josiah Willard Gibbs, professor de física matemática na Universidade de Yale (e detentor do primeiro título de doutor em engenharia nos EUA), trabalhava em problemas relacionados à química e à termodinâmica. Posteriormente, desenvolvendo trabalhos do próprio Maxwell e de Boltzmann, viria a se tornar um dos criadores da mecânica estatística, com contribuições fundamentais no estabelecimento da relação formal entre entropia e probabilidade.

Ao que tudo indica, influenciado pelo *Tratado* e também pela álgebra de extensão de Grassmann (falaremos sobre ela adiante), Gibbs publica em 1881, com recursos próprios, uma apostila de título *Elementos de Análise Vetorial* [5]. Nesse manuscrito trata explicitamente a separação dos produtos escalar e vetorial, introduzindo as estruturas que revisamos na seção 2 e discutimos acima. Tratava-se da origem de uma aparente "nova notação" ou "nova linguagem" para o estudo dos fenômenos eletromagnéticos.

5.5. Controvérsia e debate

No mesmo ano, Gibbs enviou cópias de sua apostila a uma centena de especialistas (vários renomados) e dentre eles Oliver Heaviside e Peter Guthrie Tait.

Heaviside, que teve como único emprego o de telegrafista na Inglaterra, viria a desenvolver um sistema vetorial análogo ao de Gibbs. Ocupava-se, como independente, de problemas relacionados ao eletromagnetismo e à transmissão telegráfica. Seus artigos, publicados na revista *The Electrician* entre 1885 e 1887, constituíram parte de seu livro *Teoria Eletromagnética*, publicado em 1893 [7].

Peter Tait, professor de matemática na Universidade de Edinburgo, foi um dos mais ardorosos defensores e divulgadores dos quatérnions, principalmente após a morte de Hamilton, ocorrida em 1865. Teve uma produção intelectual destacável, publicando 365 artigos sobre vários temas e sendo também autor ou co-autor de 22 livros [8]. A apreciação de Tait sobre a apostila de Gibbs aparece só em 1890, no prefácio da terceira edição de seu livro sobre quatérnions, *An Elementary Treatise on Quaternions* [4]. O parecer é contundente: refere-se a Gibbs como um dos responsáveis pelo atraso no desenvolvimento dos quatérnions e especificamente sobre a apostila, como "um tipo de monstro hermafrodito formado pelas notações de Hamilton e Grassmann".

A resposta de Gibbs a Tait aparece em artigo publicado na revista *Nature*, no ano seguinte [22] e a partir daí, tem início um debate caloroso envolvendo defensores de quatérnions e de vetores, que se estende por quatro anos (1891-1894) e do qual tomam parte P.G. Tait, J.W. Gibbs, A. Macfarlane, A. McAulay, O. Heaviside, C.G. Knott, A. Lodge e R.S. Ball. Não entraremos em detalhes sobre o assunto, mas na seção 5.8 indicamos referências onde trechos das publicações (em vários pontos "picantes") são reproduzidas e comentadas.

Infelizmente essas discussões acabaram influenciando outros autores ao longo dos anos, os quais parecem ver o assunto como uma disputa. Dois exemplos típicos, favoráveis a Gibbs-Heaviside, são os seguintes:

Em artigo de 1966 publicado no *American Journal of Physics*, Stephenson afirma no resumo do artigo [8] "In the seventy years since this controversy, it is apparent that Gibbs's work and point of view have been completely vindicated."

No conhecido *Curso de Física de Berkeley*, Kittel, Knight e Ruderman, em nota histórica no apêndice do Cap. 2 a respeito de Gibbs, citam o autor: "Se tive qualquer sucesso em física matemática, é porque, penso eu, consegui evadir dificuldades matemáticas." [2].

Apenas para tomar um exemplo recente "do outro lado", Jayme Vaz em artigo da *RBEF* afirma que [13], "a álgebra vetorial de Gibbs nada mais é do que um apanhado de conceitos disfarçado sobre o manto de uma notação falaciosa" e num artigo posterior [14], "Ocorre que esse produto vetorial *não existe* em espaços bidimensionais ou quadridimensionais, por exemplo... uma estrutura matemática cuja aplicabilidade se limite unicamente a um espaço tridimensional não pode merecer muito crédito."

5.6. Hamilton, Grassmann, Clifford

O tempo mostrou que a aplicabilidade da álgebra de quatérnions não se limita, como no caso da álgebra de Gibbs-Heaviside, à física clássica, sendo atualmente linguagem utilizada em relatividade [23], mecânica quântica e teorias de campos [24], com aplicações em várias áreas das ciências, como discutiremos na seção 5.8. Apesar de questionamentos a certas interpretações de Hamilton [12, 16] (retornaremos a esse assunto também na seção 5.8), os quatérnions constituíram o passo inicial para o desenvolvimento de álgebras mais avançadas, que incluem importantes aplicações físicas. Entre estas, destacam-se os trabalhos de Grassmann e Clifford.

Em 1844 surge a primeira edição do *Cálculo de Extensões* (*Ausdehnungslehre*) [25], no qual Hermann Günther Grassmann (professor de escola secundária em Estetino[4]), estende a idéia de quatérnions para n dimensões, introduzindo o conceito de números hipercomplexos e os produtos interno e externo em espaços arbitrários (não necessariamente ortogonais). Entretanto, não vendo êxito ou aceitação de seu trabalho, abandona a matemática, passando a dedicar-se à lingua e literatura sânscritas [20].

Poucos anos depois, William Kingdon Clifford (professor de matemática da Universidade de Londres) desenvolve uma generalização da álgebra de Grassmann, incorporando elementos de quatérnions. Seus trabalhos são publicados em 1877 [26], porém vem a falecer dois anos depois, aos 34 anos, deixando, provavelmente, uma obra incompleta. Apesar disso a álgebra de Clifford tornou-se um ramo da matemática, sendo tema específico de periódico (*Advances in Applied Clifford Algebras*) e série de conferências a partir de 1986 (*International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics*).

Infelizmente, os livros atualmente adotados nos cursos de graduação em Física não fazem sequer referência a essas abordagens formais, coerentes, de amplas aplicações práticas (seção 5.8) e que foram desenvolvidas no final do século XIX.

5.7. Vencedores e vencidos?

Não obstante o intenso e caloroso debate em defesa deste ou daquele sistema que, como vimos, estende-se até os dias atuais, acreditamos que não se trata de nenhum caso de vencido ou vencedor. As duas abordagens são consistentes a partir de suas premissas e cumprem os propósitos aos quais se propõem. A nosso ver esse assunto encaixa-se muito bem na famosa frase do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein: "Os limites de minha linguagem são os limites do meu mundo" [27]. De fato, se entendermos "limite" como "fronteira", aí está a diferença crucial entre as duas abordagens. Como claramente observado por Jayme Vaz, citado anteriormente, um dos problemas centrais de Gibbs-Heaviside é que se limita exclusivamente a espaços tridimensionais e sabemos que, tanto a matemática como a física vão muito além dessa fronteira. Voltaremos a esse assunto nas conclusões.

5.8. Referências comentadas

Os aspectos aqui levantados e resumidamente discutidos, já foram abordados por muitos autores, em diferentes contextos e com diferentes objetivos. Nesta Seção, apresentamos alguns comentários sobre artigos e trabalhos que serviram de base para a elaboração deste texto. Neles, podem-se encontrar referências essenciais e adicionais sobre o assunto.

Reginald Stephenson [8] trata da evolução das álgebras múltiplas, discutindo de forma comparativa a álgebra de quatérnions e o sistema de Gibbs-Heaviside; apresenta discussões sobre o operador vetorial nabla e os teoremas de Gauss, Stokes e Green .

Alfred Bork [9] reproduz e comenta trechos de 20 artigos publicados por Gibbs, Heaviside, Tait, Knott e outros, deixando claro o nível, até certo ponto violento, do debate ocorrido no período 1891 a 1894.

Barte van der Waerden [10], baseado nos trabalhos, nas cartas e anotações de Hamilton, discute em detalhe os passos que levaram à descoberta dos quatérnions, em especial os problemas dos tripletos (via tentativa e erro) e as soluções alcançadas com a quarta componente.

Freeman Dyson [11] ressalta o atraso que ocorre no desenvolvimento das ciências quando há um

[4] *Estetino*, cidade alemã onde Grasmann nasceu, passou a pertencer à Polônia após a Segunda Guerra Mundial (em alemão *Stettin*, em polonês *Szczecin*).

"divórcio" entre físicos e matemáticos. Exemplifica essas "oportunidades perdidas" ou "desperdiçadas" através de sete exemplos típicos, sendo um deles, o caso dos quatérnions e vetores (seção 5 do artigo).

Simon Altmann [12] discute aplicações dos quatérnions no estudo de rotações, apresentando críticas contundentes a certas interpretações de Hamilton (e seguidores); discute também contribuições de Olinde Rodrigues (1794 - 1851) no estudo de rotações, as quais trazem embutidas estruturas quaterniônicas.

Jayme Vaz introduz e discute de forma didática e abrangente as álgebras de Grassmann e Clifford em dois excelentes artigos da *RBEF*. No artigo de 1997 [13], trata a teoria não-relativística do elétron no contexto da álgebra geométrica (Clifford), ressaltando os equívocos nas interpretações da variável *spin* como efeito exclusivamente relativístico, sem análogo clássico. Destaca também as inconsistências do sistema de Gibbs-Heaviside. No artigo de 2000 [14], a álgebra de Clifford é utilizada no contexto da Teoria da Relatividade Restrita, demonstrando a eficiência dessa álgebra, em especial no que concerne a generalizações.

Cibelle Silva, em sua tese de doutorado de 2002 [15], apresenta um estudo amplo e abrangente sobre o desenvolvimento dos conceitos físicos e matemáticos relacionados ao eletromagnetismo nos séculos XIX e XX. Em particular, o capítulo 3 trata de forma detalhada a evolução da álgebra vetorial (em sua concepção geral) a partir dos quatérnions. Trata-se de excelente material de pesquisa histórica, tendo sido a referência básica e inspiradora deste trabalho.

Cibelle Silva e Roberto Martins [16] discutem diferenças entre vetores polares/axiais e quatérnions, relacionadas a propriedades intrínsecas e de simetria; destacam também a utilização contraditória dos símbolos i, j e k como vetores e ao mesmo tempo versores.

David Lewis [17], em artigo de 2006, destaca a importância dos quatérnions como origem da álgebra não comutativa, discutindo de modo bastante formal a álgebra de quatérnions e de biquatérnions (octônions) sobre campos. Fornece também referências interessantes e atuais sobre aplicações práticas em sistemas de navegação, animação computadorizada, processamento de imagens e teoria de códigos.

Andre Gsponer e Jean-Pierre Hurni [18] apresentam uma extensa compilação bibliográfica sobre artigos que, de alguma forma, envolvem o conceito de quatérnions (1.433 referências!). A lista, de atualização constante, inclui não só trabalhos que tratam exclusivamente de quatérnions e biquatérnions, mas também as extensões e decorrências desses conceitos, como álgebras de Grassmann, Clifford e outras, bem como aplicações em várias áreas da ciência. Embora a lista seja apresentada em ordem alfabética de sobrenome do primeiro autor, pode-se ter uma idéia clara e abrangente da importância atual desses formalismos como ferramenta fundamental (e formal) para a Física.

O contexto matemático nos períodos históricos dos quais nos ocupamos é tratado em vários livros sobre a história da matemática, destacando-se, na nossa opinião, as obras de Howard Eves [20] e Carl Boyer [28]. Em particular, a evolução das idéias sobre sistemas vetoriais é estudada no livro de Michael Crowe [29].

6. Conclusões e observações finais

Neste trabalho revisamos, de forma resumida, as bases históricas (do ponto de vista formal, matemático) que deram origem às definições dos produtos escalar e vetorial, as quais são apresentadas de forma pragmática nos livros didáticos dos cursos básicos (e profissionais) em ciências exatas. Embora o foco central tenha sido nas definições desses produtos, apresentamos vários comentários sobre questões adjacentes, que não podem ser desvinculadas do assunto. Em especial, discutimos alguns aspectos históricos, citamos certas inconveniências inerentes à álgebra de Gibbs-Heaviside, bem como nos referimos a desenvolvimentos matemáticos mais avançados, que possuem, atualmente, amplas aplicações práticas. Como vimos, um dos principais problemas com as interpretações de Gibbs e Heaviside é sua limitação ao espaço tridimensional. Trata-se assim de uma álgebra que poderíamos classificar como pobre, no sentido de suas aplicações restritas.

Entretanto, de um lado, não se deve com isso menosprezar a álgebra de Gibbs-Heaviside (por exemplo, trancando matrícula nas disciplinas que tanto utilizam essa abordagem, ou pior ainda, mudando de curso). Como afirmamos antes, essa álgebra cumpre os propósitos aos quais se propõe e esses, embora limitados, constituem arcabouço dos assuntos tratados nos cursos de graduação em ciências exatas e tecnológicas, demonstrando excelentes resultados práticos em física clássica.

Por outro lado, o que não se deve esquecer é que só poderemos ultrapassar certos limites em nosso mundo expandindo nossa linguagem e isso faz parte intrínseca da história da física e da matemática, aliás, caracteriza essas duas ciências essenciais. Galileu Galilei, um dos pais da física-matemática, já nos alertou, há quase 400 anos, que, despidos da matemática, "vagamos perdidos num obscuro labirinto" [30]. Nesse texto, de 1623, Galileu refere-se a "triângulos, circunferências e outras figuras geométricas", ou seja, à linguagem mais avançada de seu tempo e provavelmente não tão popular entre seus colegas contemporâneos.

As álgebras de Grasmann e Clifford são já "idosas", remontando ao século retrasado e suas aplicações práticas são incontestáveis [18]. Porque não considerá-las nos currículos universitários?

Como referido em nossa introdução, esperamos que este texto possa contribuir com uma visão mais ampla por parte dos alunos, bem como com o desenvolvimento de uma atitude crítica em relação a assuntos tratados em aula. Por outro lado, acreditamos que seria também importante que, ao se discutir a "álgebra vetorial", os professores se preocupassem em incentivar os alunos a leituras adicionais, permitindo a eles desvendar outras idéias e linguagens, que poderão ser fundamentais no futuro.

Agradecimentos

Sou grato a J. Vaz Jr. pelas críticas, comentários e referências sugeridas, a C.C. Silva pelos comentários e sugestões, a C.D. Chinellato, E.G.S. Luna. M.L.T. Menon e J. Montanha pela leitura e revisão do manuscrito. Agradeço também ao árbitro da *RBEF* pelos comentários, em especial, pela recomendação das Refs. [10, 11, 18].

Referências

[1] M. Alonso, E.J. Finn, *Física: Um Curso Universitário* (Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1972); K.R. Symon, *Mecânica* (Editora Campus, Rio de Janeiro, 1982); H.M. Nussenzveig *Curso de Física Básica 1 - Mecânica* (Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 2002); R.A. Serway and J.W. Jewett Jr. *Princípios de Física 1 - Mecânica* (Editora LTC, São Paulo, 2002); R.P. Feynman, R.B. Leighton and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley P.C., Reading, 1963); D. Halliday, R. Resnick e outros (qualquer das múltiplas edições).

[2] C. Kittel, W.D. Knight and M.A. Ruderman, *Curso de Física de Berkeley, Volume 1, Mecânica* (Editora Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1970).

[3] W.R. Hamilton, *Elements of Quaternions* (Longman, London, 1889; re-edição Chelsea P.C., New York, 1969); *The Mathematical Papers of Sir Willian Rowan Hamilton* (Cambridge U.P., Cambridge, 1967).

[4] P.G. Tait, *An Elementary Treatise on Quaternions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1890), 3rd edition; 1st edition, 1867; 2nd edition, 1873.

[5] J.W. Gibbs, *The Scientific Papers of J. Willard Gibbs* (Dover, New York, 1961); L.P. Wheeler, *Josiah Willard Gibbs, The History of a Great Mind* (Yale University Press, New Haven, 1962).

[6] E.B. Wilson, *Vector Analysis of J.W. Gibbs* (Charles Scrine's Sons, New York, 1901).

[7] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory* (Chelsea P.C., New York, 1971); *Electrical Papers* (Chelsea P.C., New York, 1970).

[8] R.J. Stephenson, Am. J. Phys. **34**, 194 (1966).

[9] A.M. Bork, Am. J. Phys. **34**, 202 (1966).

[10] B.L. van der Waerden, Math. Magazine, **49**, 227 (1976).

[11] F.J. Dyson, Bulletin of the Am. Math. Society, **78**, 635 (1972).

[12] S.L. Altmann, Math. Mag. **62**, 291 (1989); *Rotations, Quaternions, and Double Groups* (Clarendon Press, Oxford, 1986).

[13] J. Vaz Jr., Revista Brasileira de Ensino de Física **19**, 234 (1997).

[14] J. Vaz Jr., Revista Brasileira de Ensino de Física, **22**, 5 (2000).

[15] C.C. Silva, *Da Força ao Tensor: Evolução do Conceito Físico e Representação Matemática do Campo Eletromagnético.* Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2002 (disponível em `http://webbif.ifi.unicamp.br/teses`).

[16] C.C. Silva and R.A. Martins, Am. J. Phys. **70**, 958 (2002).

[17] D.W. Lewis, Irish Math. Soc. Bulletin, **57**, 41 (2006).

[18] A. Gsponer and J-P Hurni, arXiv:math-ph/0510059v4.

[19] T.M. Apostol, *Calculus* (Editorial Reverté, Barcelona, 1977), segunda edición.

[20] H. Eves, *Introdução à História da Matemática* (Editora UNICAMP, Campinas, 2004).

[21] J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism, 1891* (re-edição Dover, New York, 1954).

[22] J.W. Gibbs, Nature, **43**, 511 (1981).

[23] H.T. Flint,Philos. Mag. **39**, 439 (1920).

[24] S. Adler, *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields* (Oxford University Press, New York, 1995).

[25] H. Grassmann, *A New Branch of Mathematics: The "Ausdehnungslehre" of 1844 and Other Works* (Open Court P. C., Chicago, 1995).

[26] W.K. Clifford, *Elements of Dynamics: A Introduction to the Study of the Motion and Rest in Solid Fluid Bodies* (MacMillan, London, 1877).

[27] L.J.J. Wittgenstein, *Tratado Lógico-Filosófico. Investigações Filosóficas* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1995).

[28] C.B. Boyer, *História da Matemática* (Edgard Blücher, São Paulo, 1974).

[29] M.J. Crowe, *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System* (Notre Dame University Press, London, 1967).

[30] Galileu Galilei, *O Ensaiador*, Coleção "Os Pensadores" (Nova Cultura, São Paulo, 1987).