

---

# ALOCAÇÃO ROBUSTA DE PÓLOS ATRAVÉS DE REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS DEPENDENTE DE PARÂMETROS

**Valter Júnior de Souza Leite\***  
valter@div.cefetmg.br

**Vinícius Foletto Montagner†**  
montagne@dt.fee.unicamp.br

**Pedro Luis Dias Peres†**  
peres@dt.fee.unicamp.br

\* UnED Divinópolis – CEFET-MG, R. Monte Santo, 319, 35502-036, Divinópolis - MG - Brasil

† Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, CP 6101 13081-970, Campinas - SP - Brasil

---

## ABSTRACT

A sufficient condition for the existence of a robust parameter dependent state feedback gain is presented. This condition is formulated as a feasibility test of a set of linear matrix inequalities. Moreover, the feedback gain assures to the uncertain closed-loop system a robust pole location inside a prespecified circular region in the complex plane, by means of a parameter dependent Lyapunov function. Examples illustrate the results.

**KEYWORDS:** Robust pole placement, parameter dependent state feedback, parameter dependent Lyapunov function, linear matrix inequality, polytopic uncertainty.

## RESUMO

Uma condição suficiente para a existência de uma realimentação de estados robusta dependente de parâmetros é apresentada neste trabalho. A condição é verificada através do teste de factibilidade de um conjunto de desigualdades matriciais lineares. A realimentação obtida garante ainda a alocação robusta dos pólos de malha fechada de sistemas lineares incertos em uma região circular do plano complexo, através da existência de uma função de Lyapunov depen-

dente de parâmetros. Exemplos ilustram os resultados.

**PALAVRAS-CHAVE:** Alocação robusta de pólos, realimentação de estados dependente de parâmetros, função de Lyapunov dependente de parâmetros, desigualdades matriciais lineares, incertezas politópicas.

## 1 INTRODUÇÃO

Em geral, os processos industriais sofrem ações de fatores externos como temperatura, umidade, pressão, ponto operacional, etc. Esses elementos afetam a dinâmica dos processos e precisam ser considerados no projeto de controladores. Outra situação bastante comum é a dos processos em batelada. Nesses casos, as condições operacionais podem ser completamente diferentes de uma execução para outra. Na maioria das vezes, essa relação entre os elementos que caracterizam a dinâmica do sistema e as condições operacionais do processo pode ser representada por modelos lineares com parâmetros incertos.

Nas últimas décadas, algumas abordagens para a análise e projeto que consideram as incertezas associadas ao sistema têm sido estudadas. Podem ser destacadas abordagens no domínio da frequência como a análise  $\mu$  (Packard et al., 1993), de controle robusto (Zhou et al., 1996), por

---

Artigo submetido em 12/04/02

1a. Revisão em 29/10/02, 2a. Revisão em 08/04/03

Aceito sob recomendação do Ed. Assoc. Prof. José R. C. Piqueira

análise convexa e otimização utilizando desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities* ou LMIs) (Boyd et al., 1994), em controle adaptativo (Åström e Wittenmark, 1995), e as abordagens chamadas algébricas (Barmish, 1994).

Para as abordagens baseadas em controle robusto no espaço de estados, pode-se dizer que o ponto fundamental é a obtenção de uma função de Lyapunov que garanta a estabilidade do sistema. Diversas formulações podem ser encontradas na literatura dependendo da forma pela qual é expresso o conjunto de incertezas do sistema dinâmico. Um problema típico nesses casos é a obtenção de uma lei de controle por realimentação de estados que garanta a estabilidade em malha fechada do sistema incerto (Bernussou et al., 1989), (Boyd et al., 1994). Outra questão imediata é a obtenção de controladores estabilizantes que garantam alguma especificação de desempenho para o sistema em malha fechada, expressa por exemplo através de uma região para a alocação dos pólos (Chilali et al., 1999).

Nessa direção, resultados baseados na estabilidade quadrática (Barmish, 1994) podem ser facilmente encontrados, alguns utilizando as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  como índices de desempenho (Geromel et al., 1993), (Khargonekar e Rotea, 1991). Entretanto, essa abordagem tende a fornecer resultados muito conservadores por utilizar uma única função de Lyapunov fixa para todo o domínio de incertezas do sistema. Isso torna admissível taxas infinitas para as variações paramétricas, o que é pouco razoável do ponto de vista prático. Assim, como forma de obter resultados menos conservadores para a análise de estabilidade e o projeto de controladores, a construção de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros é de grande interesse (Feron et al., 1996).

Neste trabalho são considerados os sistemas lineares com parâmetros incertos que não dependem explicitamente do tempo, isto é, as variações dos parâmetros ocorrem devido a alterações nas condições externas ao sistema. Os resultados se aplicam a variações de parâmetros que ocorram com taxas suficientemente pequenas para permitir a acomodação dinâmica do sistema (*slowly time-varying parameters* (Dahleh e Dahleh, 1991), (Solo, 1994)).

A principal contribuição deste trabalho é a proposição de uma condição suficiente para a obtenção de um ganho de realimentação de estados estabilizante e dependente de parâmetros. O resultado pode ser visto como uma extensão para problemas de síntese da condição de estabilidade robusta proposta em (Ramos e Peres, 2001), (Ramos e Peres, 2002). Esse ganho, baseado em uma função de Lyapunov dependente de parâmetros, garante a alocação dos pólos de malha fechada do sistema no interior de um círculo de raio  $r$  e centro em  $(-\delta, 0)$ , assegurando portanto além da

estabilidade uma especificação de desempenho para todo o sistema incerto. A alocação de pólos em uma região circular permite ao projetista impor especificações de desempenho como fator de amortecimento, limitação da frequência natural e da frequência natural amortecida, podendo suprir assim uma grande variedade de exigências práticas.

A condição proposta é apresentada na forma de um teste de factibilidade para um conjunto de desigualdades matriciais lineares descritas nos vértices do politopo de incertezas, que podem estar presentes tanto na matriz dinâmica como na matriz de controle. Exemplos ilustram os resultados, propiciando alocações robustas em situações nas quais não é possível obter um ganho robusto constante derivado da estabilizabilidade quadrática (Bernussou et al., 1989), nem tampouco por uma extensão para alocação em região circular de um resultado recente de controle robusto constante a partir de LMIs e de função de Lyapunov dependente de parâmetros (de Oliveira et al., 1999).

## 2 PRELIMINARES

Considere um sistema linear contínuo no tempo descrito por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \quad (1)$$

com  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Suponha que as matrizes  $A(\alpha)$  e  $B(\alpha)$  pertençam a um politopo  $\mathcal{D}$  dado por

$$\mathcal{D} = \left\{ (A, B)(\alpha) \mid (A, B)(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j (A, B)_j ; \right. \\ \left. \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 ; \alpha_j \geq 0 \right\} \quad (2)$$

sendo  $(A, B)_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  os vértices desse politopo. O sistema incerto (1) pode possuir parâmetros variantes, embora  $\alpha$  não dependa explicitamente do tempo, sendo admitidas taxas de variação suficientemente pequenas de forma a garantir o tempo de acomodação necessário às perturbações oriundas de tais variações.

O objetivo deste trabalho é determinar um ganho dependente de parâmetros  $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  para a lei de realimentação de estados  $u(t) = K(\alpha)x(t)$ , de maneira a garantir a alocação robusta dos pólos de malha fechada do sistema (1) no interior de um círculo de raio  $r$  e centro em  $(-\delta, 0)$ , ilustrado na Figura 1.

Note que essa especificação para os pólos do sistema em malha fechada garante que toda a dinâmica está limitada por exponenciais com decaimento no intervalo  $-\delta \pm r$  e frequências (parte imaginária dos pólos) menores ou iguais a  $r$ . Em particular, para sistemas de segunda ordem, essa região de

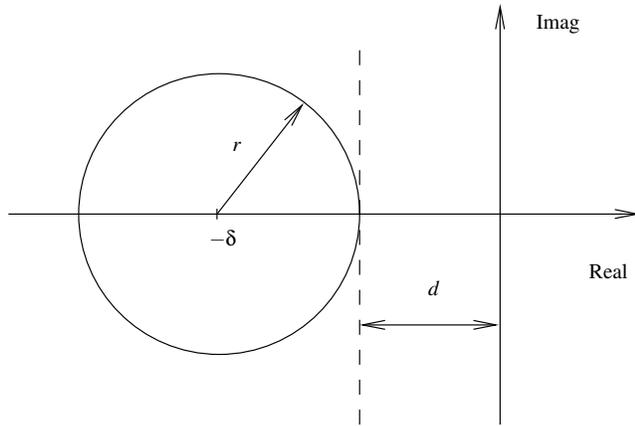


Figura 1: Região para alocação de pólos.

alocação garante um fator de amortecimento (no pior caso) dado pelo cosseno do ângulo determinado pela reta que tangencia o círculo e passa pela origem, e máxima frequência natural amortecida limitada pelo raio do círculo. É importante observar que esses valores de pior caso não ocorrem simultaneamente.

Uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , precisamente conhecida, possui todos os seus autovalores localizados no interior de um círculo de raio  $r$  e centro em  $(-\delta, 0)$  se e somente se existir  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica definida positiva tal que (veja (Haddad e Bernstein, 1992))

$$(A + d\mathbf{I})W + W(A + d\mathbf{I})' + \frac{1}{r}(A + d\mathbf{I})W(A + d\mathbf{I})' < 0 \quad (3)$$

sendo

$$d = \delta - r \quad (4)$$

Se a matriz  $A$  for considerada incerta, pertencente a um politopo  $\mathcal{A}$  com vértices  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , uma condição suficiente para garantir a localização de todos os autovalores de  $A \in \mathcal{A}$  é obtida a partir de (3), aplicando-se o complemento de Schur (Albert, 1969) e usando a convexidade da formulação. Assim, se existir uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , que satisfaça

$$\begin{bmatrix} A_{dj}W + WA'_{dj} & A_{dj}W \\ WA'_{dj} & -rW \end{bmatrix} < 0; \quad j = 1, \dots, N \quad (5)$$

em que  $d$  é dado por (4) e

$$A_{dj} = A_j + d\mathbf{I} \quad (6)$$

então todos os autovalores de  $\mathcal{A}$  estão inteiramente contidos no círculo de raio  $r$  e centro  $(-\delta, 0)$ . A convexidade de (5) garante (quadraticamente, isto é, através da existência de

uma mesma matriz  $W$  verificando a condição nos vértices do politopo) a alocação robusta dos pólos das matrizes  $A \in \mathcal{A}$ .

O problema da realimentação de estados com alocação robusta de pólos utilizando desigualdades matriciais lineares é tratado na próxima seção. Inicialmente, duas condições para alocação robusta de pólos (com ganho  $K$  constante) são apresentadas. A primeira delas é baseada nos resultados já conhecidos da estabilidade quadrática (Garcia e Bernussou, 1995), e tem sido utilizada amplamente na literatura, inclusive com índices de desempenho baseados em normas  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ , para projetos de controladores e de filtros robustos (Bambang et al., 1993), (Chilali et al., 1999), (Peres, Guaitoli e Umez, 1994), (Palhares e Peres, 1999), (Peres, Umez e Guaitoli, 1994). A segunda condição é baseada em um resultado de estabilidade robusta recentemente publicado (de Oliveira et al., 1999), aqui estendido para permitir a alocação de pólos na região desejada. Em seguida, é apresentada a principal contribuição deste trabalho, uma condição suficiente para a existência de um ganho robusto de realimentação de estados, dependente de parâmetro, que aloca os pólos de malha fechada de um sistema incerto em uma região circular como definida pela Figura 1.

### 3 CONDIÇÕES PARA ALOCAÇÃO ROBUSTA

Utilizando (5) e condições de estabilizabilidade quadrática clássicas da literatura (Bernussou et al., 1989), pode-se formular uma condição para a alocação robusta dos pólos de malha fechada de um sistema.

**Lema 1** Se existir uma matriz  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e uma matriz simétrica definida positiva  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que, para  $j = 1, \dots, N$

$$\begin{bmatrix} A_jW + WA'_j + B_jZ + Z'B'_j + 2dW & \star \\ WA'_j + Z'B'_j + dW & -rW \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

então<sup>1</sup>  $K = ZW^{-1}$  assegura à malha fechada do sistema incerto  $(A, B)(\alpha) \in \mathcal{D}$  a alocação robusta dos pólos na região desejada.

**Prova:** A equação (7) vem da LMI (5), substituindo  $A_{dj}$  pela matriz dinâmica de malha fechada  $A_j + d\mathbf{I} + B_jK$ , e fazendo  $KW = Z$ .  $\square$

Uma condição para a análise da estabilidade robusta de sistemas discretos incertos foi proposta em (de Oliveira et al., 1999). A vantagem desta condição em relação ao resultado da estabilizabilidade quadrática está na utilização de uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros. Uma

<sup>1</sup>O símbolo  $\star$  denota o transposto do bloco diagonalmente oposto.

extensão deste resultado, para a alocação robusta de pólos através da realimentação de estados, é apresentada no lema a seguir, que produz resultados menos conservadores do que os do Lema 1.

**Lema 2** Se existirem  $N$  matrizes simétricas definidas positivas  $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tais que

$$\begin{bmatrix} -rP_j & \star \\ G'A_j + L'B_j + \delta G' & r(P_j - G - G') \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

então  $K = LG^{-1}$  é um ganho de realimentação robusta de estados e  $P(\alpha)$  dado por

$$P(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j ; \alpha_j \geq 0 ; \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1 \quad (9)$$

é uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros que garante à malha fechada do sistema  $(A, B)(\alpha) \in \mathcal{D}$  alocação robusta de pólos dentro da região especificada na Figura 1.

**Prova:** Note que, com  $L = KG$  e para  $j = 1, \dots, N$  (8) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} -P_j & \star \\ G'(A_j + B_j K + \delta \mathbf{I})' / r & P_j - G - G' \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

Multiplicada à esquerda por

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & (A_j + B_j K + \delta \mathbf{I}) / r \end{bmatrix}$$

e à direita por  $T'$ , por  $\alpha_j$  e somando em  $j$  (veja (de Oliveira et al., 1999) para detalhes) implica em

$$\frac{1}{r^2} (A(\alpha) + B(\alpha)K + \delta \mathbf{I}) P(\alpha) (A(\alpha) + B(\alpha)K + \delta \mathbf{I})' - P(\alpha) < 0$$

que, por sua vez, com  $\delta = r + d$ , escreve-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} (A(\alpha) + B(\alpha)K + d\mathbf{I}) P(\alpha) (A(\alpha) + B(\alpha)K + d\mathbf{I})' \\ & + \frac{1}{r} (A(\alpha) + B(\alpha)K + d\mathbf{I}) P(\alpha) \\ & + \frac{1}{r} P(\alpha) (A(\alpha) + B(\alpha)K + d\mathbf{I})' < 0 \quad (11) \end{aligned}$$

Substituindo  $P(\alpha)/r = W(\alpha)$ , tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} (A(\alpha) + B(\alpha)K + d\mathbf{I}) W(\alpha) (A(\alpha) + B(\alpha)K + d\mathbf{I})' \\ & + (A(\alpha) + B(\alpha)K + d\mathbf{I}) W(\alpha) \\ & + W(\alpha) (A(\alpha) + B(\alpha)K + d\mathbf{I})' < 0 \quad (12) \end{aligned}$$

garantindo, conforme a equação (3), com a função de Lyapunov dependente de parâmetros  $W(\alpha)$ , a alocação desejada.

□

Os lemas 1 e 2 apresentam condições suficientes, formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares, para a obtenção de um ganho fixo que garante a alocação robusta de pólos. A condição apresentada no Lema 2 fornece resultados menos conservadores que os obtidos através do Lema 1 (baseados na estabilizabilidade quadrática), devido à utilização de uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros. No entanto, existem situações em que um ganho fixo não é capaz de alocar robustamente todo o politopo; nesses casos, a utilização de um ganho dependente de parâmetros pode eventualmente fazer a alocação. O teorema a seguir apresenta uma condição suficiente para a obtenção de um ganho dependente de parâmetros que assegura a alocação robusta de pólos do sistema incerto em malha fechada na região circular da Figura 1.

**Teorema 3** Se existirem  $N$  matrizes simétricas definidas positivas  $W_j = W_j' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $N$  matrizes  $Z_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tais que (13)-(15) sejam satisfeitas,

$$\mathcal{M}_j = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{L}_j^{11} & \star \\ \hline \mathcal{L}_j^{21} & \mathcal{L}_j^{22} \end{array} \right] < \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \quad j = 1, \dots, N \quad (13)$$

$$\mathcal{M}_{jk} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{L}_{jk}^{11} & \star \\ \hline \mathcal{L}_{jk}^{21} & \mathcal{L}_{jk}^{22} \end{array} \right] < \frac{1}{(N-1)^2} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \quad j = 1, \dots, N ; k = 1, \dots, N ; k \neq j \quad (14)$$

$$\mathcal{M}_{jkl} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{L}_{jkl}^{11} & \star \\ \hline \mathcal{L}_{jkl}^{21} & \mathcal{L}_{jkl}^{22} \end{array} \right] < \frac{6}{(N-1)^2} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \quad j = 1, \dots, N-2 ; k = j+1, \dots, N-1 ; \ell = k+1, \dots, N \quad (15)$$

com

$$\mathcal{L}_j^{11} = A_d W_j + W_j A_{d_j}' + B_j Z_j + Z_j' B_j' \quad (16)$$

$$\mathcal{L}_j^{21} = W_j A_{d_j}' + Z_j' B_j' \quad (17)$$

$$\mathcal{L}_j^{22} = -r W_j \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{jk}^{11} &= A_d W_j + W_j A_{d_j}' + B_j Z_j + Z_j' B_j' \\ &+ A_d W_k + A_d W_j + W_j A_{d_k}' + W_k A_{d_j}' \\ &+ B_j Z_k + B_k Z_j + Z_j' B_k' + Z_k' B_j' \quad (19) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{jk}^{21} = W_j A_{d_j}' + Z_j' B_j' + W_j A_{d_k}' + W_k A_{d_j}' + Z_j' B_k' + Z_k' B_j' \quad (20)$$

$$\mathcal{L}_{jk}^{22} = -r(2W_j + W_k) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{jkl}^{11} = & A_{dj}W_k + A_{dk}W_j + W_jA'_{dk} + W_kA'_{dj} + B_jZ_k \\ & + Z_jB_k + Z'_jB'_k + Z'_kB'_j + A_{dj}W_\ell + A_{d\ell}W_j \\ & + W_jA'_{d\ell} + W_\ell A'_{dj} + B_jZ_\ell + B_\ell Z_j + Z'_jB'_\ell \\ & + Z'_\ell B'_j + A_{d\ell}W_k + A_{dk}W_\ell + W_\ell A'_{dk} + W_kA'_{d\ell} \\ & + B_\ell Z_k + B_k Z_\ell + Z'_\ell B'_k + Z'_k B'_\ell \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{jkl}^{21} = & W_jA'_{dk} + W_kA'_{dj} + W_jA'_{d\ell} + W_\ell A'_{dj} \\ & + W_kA'_{d\ell} + W_\ell A'_{dk} + Z'_jB'_k + Z'_k B'_j \\ & + Z'_jB'_\ell + Z'_\ell B'_j + Z'_k B'_\ell + Z'_\ell B'_k \end{aligned} \quad (23)$$

$$\mathcal{L}_{jkl}^{22} = -2r(W_j + W_k + W_\ell) \quad (24)$$

com  $A_{dj}$  dado em (6), então o ganho de realimentação de estados dependente de parâmetros dado por

$$K(\alpha) = Z(\alpha)W(\alpha)^{-1} \quad (25)$$

com

$$Z(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j Z_j; \quad W(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j W_j \quad (26)$$

e

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1; \quad \alpha_j \geq 0 \quad (27)$$

garante à malha fechada do sistema incerto a alocação de pólos no interior do círculo de raio  $r$  e centro em  $(-\delta, 0)$ ,  $\delta = d + r$ . Além disso, a função de Lyapunov dependente de parâmetros  $W(\alpha)$  satisfaz (12) para todo  $(A, B)(\alpha) \in \mathcal{D}$ .

**Prova:** É claro que  $W(\alpha)$  dado por (26)-(27) é uma matriz de Lyapunov definida positiva. Aplicando o complemento de Schur em (12), com  $K$  substituído por  $K(\alpha)$ , e definindo a mudança de variáveis  $Z(\alpha) = K(\alpha)W(\alpha)$ , é possível escrever (o lado direito foi multiplicado por  $\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ ):

$$\left[ \begin{array}{c|c} A(\alpha)W(\alpha) + W(\alpha)A(\alpha)' & * \\ \hline +B(\alpha)Z(\alpha) + Z(\alpha)'B(\alpha)' + 2dW(\alpha) & \\ \hline A(\alpha)W(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha) + dW(\alpha) & -rW(\alpha) \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \alpha_j^3 \mathcal{M}_j + \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j, k=1}^N \alpha_j^2 \alpha_k \mathcal{M}_{jk} \\ & + \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell \mathcal{M}_{jkl} \end{aligned} \quad (28)$$

Usando (13)-(15) e lembrando que  $\alpha_j \geq 0$ , tem-se

$$\left[ \begin{array}{c|c} A(\alpha)W(\alpha) + W(\alpha)A(\alpha)' & * \\ \hline +B(\alpha)Z(\alpha) + Z(\alpha)'B(\alpha)' + 2dW(\alpha) & \\ \hline A(\alpha)W(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha) + dW(\alpha) & -rW(\alpha) \end{array} \right] <$$

$$\begin{aligned} & - \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j^3 - \frac{1}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j, k=1}^N \alpha_j^2 \alpha_k \right. \\ & \left. - \frac{6}{(N-1)^2} \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (29)$$

Essa última relação pode ser verificada notando que

$$(N-1)\Theta + \Omega \geq 0$$

com  $\Theta$  e  $\Omega$  definidos como:

$$\begin{aligned} \Theta & \triangleq \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j (\alpha_j - \alpha_k)^2 = \\ & (N-1) \sum_{j=1}^N \alpha_j^3 - \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j, k=1}^N \alpha_j^2 \alpha_k \geq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Omega & \triangleq \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j, k=1}^{N-1} \sum_{\ell \neq j, k, \ell=2}^N \alpha_j (\alpha_k - \alpha_\ell)^2 = \\ & (N-2) \sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j, k=1}^N \alpha_j^2 \alpha_k - 6 \sum_{j=1}^{N-2} \sum_{k=j+1}^{N-1} \sum_{\ell=k+1}^N \alpha_j \alpha_k \alpha_\ell \geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

□

## 4 EXEMPLOS

Alguns exemplos numéricos simples mostram que a alocação robusta nem sempre pode ser realizada por um ganho constante através dos lemas 1 e 2, e que com os resultados do Teorema 3 pode-se obter um ganho dependente de parâmetros que faz a alocação desejada.

Considere primeiramente o sistema incerto contínuo no tempo representado por (1)-(2) com vértices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2.439 & 0.683 \\ 0.933 & -2.787 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.607 \\ 0.629 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.102 & 1.223 \\ -9.614 & 2.027 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.370 \\ 0.575 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Note que  $A_1$  e  $A_2$  são instáveis, com autovalores em 2.56, -2.91 (vértice 1) e  $1.06 \pm 3.29i$  (vértice 2). Deseja-se alocar os pólos do sistema em malha fechada dentro do círculo de raio  $r = 3$  centro em  $(-10, 0)$  ( $\delta = 10$ ,  $d = 7$ ). As condições dos lemas 1 e 2 revelam-se ineficazes para tal alocação; usando o Teorema 3, os pólos são alocados na região desejada, conforme ilustrado na Figura 2.

As matrizes  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $Z_1$  e  $Z_2$ , solução do problema de factibilidade, são dadas por

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.5870 & 1.4243 \\ 1.4243 & 3.4890 \end{bmatrix} \times 10^5$$

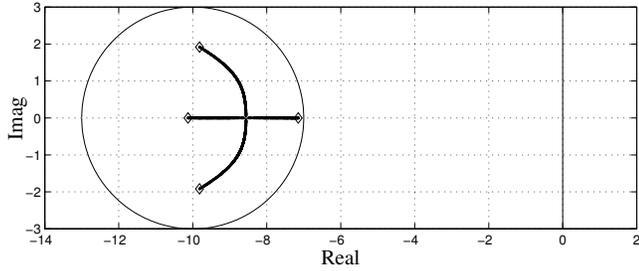


Figura 2: Autovalores da malha fechada do sistema incerto  $A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)$  (caso contínuo, dado por (32)-(33)). Os autovalores dos vértices do sistema em malha fechada são representados por  $\diamond$ .

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.2421 & 0.5947 \\ 0.5947 & 1.4769 \end{bmatrix} \times 10^5$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -1.1044 & -2.6576 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} -0.8638 & -2.0807 \end{bmatrix} \times 10^6$$

e o ganho  $K(\alpha)$  escreve-se como em (25) para todo  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . A Figura 3 mostra o comportamento não linear dos elementos  $k_{11}$  e  $k_{12}$  de  $K(\alpha)$  em função de  $\alpha_1$ .

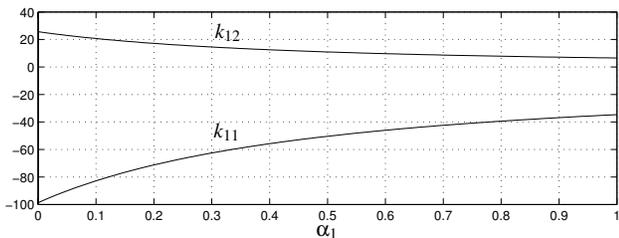


Figura 3: Valores dos elementos  $k_{11}$  e  $k_{12}$  em função de  $\alpha_1$  (caso contínuo).

Se, no entanto, o círculo for centrado em  $(-4, 0)$  ( $\delta = 4$ ,  $d = 1$ ) a condição do Lema 2 consegue uma alocação robusta com um ganho dado por

$$K = \begin{bmatrix} -14.3090 & -1.2666 \end{bmatrix}$$

Ainda nessa última condição, o Lema 1 permanece infactível. Note que a alocação do círculo com centro nessa posição não proporciona um tempo de acomodação tão rápido quanto o relacionado com o posicionamento de pólos da Figura 2.

Como segundo exemplo, considere o sistema discreto no tempo, com equação dinâmica  $x_{k+1} = Ax_k + Bx_k$ ,  $(A, B) \in \mathcal{D}$  e vértices dados por

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -1.1 \end{bmatrix}; B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 1.3 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 2.3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Note que  $A_1$  e  $A_2$  são instáveis, com autovalores em  $-0.1$ ,  $-1.1$  (vértice 1) e  $0.2$ ,  $1.3$  (vértice 2). Como região para alocação dos pólos escolheu-se o círculo de raio  $r = 0.3$  e centro em  $(0.3, 0)$  ( $\delta = -0.3$ ,  $d = -0.6$ ). Aplicando o resultado do Teorema 3, encontra-se um ganho dependente de parâmetros que satisfaz a especificação de região (os autovalores do sistema incerto são mostrados na Figura 4); novamente, tanto a condição proposta no Lema 1 (baseada na estabilizabilidade quadrática) quanto a do Lema 2 falham.

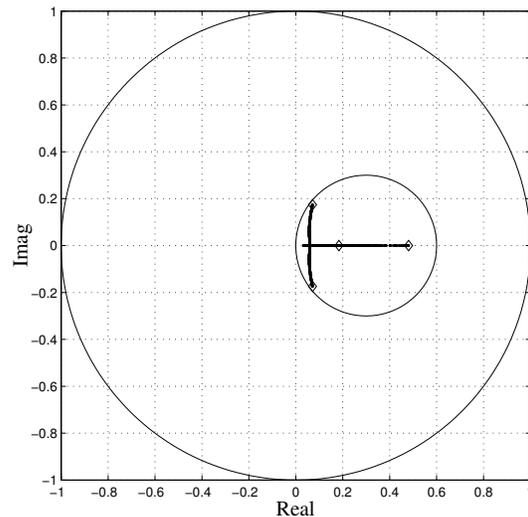


Figura 4: Autovalores da malha fechada do sistema incerto  $A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)$  (caso discreto, dado por (34)-(35)). Os autovalores dos vértices são representados por  $\diamond$ .

O ganho dependente de parâmetros  $K(\alpha)$  é calculado através de (25)-(27). O comportamento não linear dos elementos de  $K(\alpha)$  é mostrado na Figura 5.

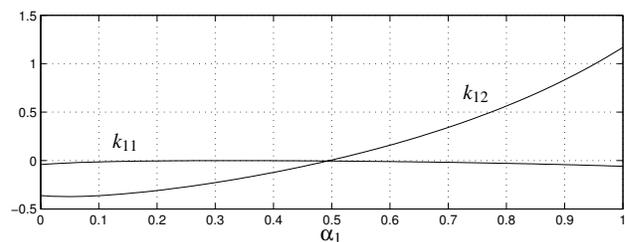


Figura 5: Valores dos elementos  $k_{11}$  e  $k_{12}$  em função de  $\alpha_1$  (caso discreto).

Como terceiro exemplo, um sistema contínuo no tempo de maior complexidade (4 estados) é analisado, tendo 4 vértices

definidos pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -38.04 & -541.92 & -3440.12 & -8199.84 \\ 0.05 & 1.90 & -2.85 & 3.80 \\ 0.90 & -0.80 & 2.70 & -3.60 \\ -0.94 & 1.88 & -1.82 & 3.76 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = [ 0.04 \quad 0.95 \quad -0.90 \quad 0.94 ]' \quad (36)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -38.74 & -532.52 & -3274.22 & -7397.04 \\ 0.03 & 1.94 & -2.91 & 3.88 \\ -0.32 & 1.64 & -0.96 & 1.28 \\ 0.55 & -1.10 & 2.65 & -2.20 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = [ 0.74 \quad 0.97 \quad 0.32 \quad -0.55 ]' \quad (37)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -37.79 & -542.42 & -3439.37 & -8200.84 \\ 0.97 & 0.06 & -0.09 & 0.12 \\ 0.90 & -0.80 & 2.70 & -3.60 \\ 0.47 & -0.94 & 2.41 & -1.88 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = [ -0.21 \quad 0.03 \quad -0.90 \quad -0.47 ]' \quad (38)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -45.46 & -802.08 & -6254.38 & -18502.16 \\ 0.67 & 0.66 & -0.99 & 1.32 \\ -0.42 & 1.84 & -1.26 & 1.68 \\ -0.01 & 0.02 & 0.97 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = [ -0.54 \quad 0.33 \quad 0.42 \quad 0.01 ]' \quad (39)$$

Os vértices, todos instáveis, possuem autovalores localizados em  $-87.48$ ,  $55.07$ ,  $1.37 \pm 2.87i$  (vértice 1),  $-21.07 \pm 52.21i$ ,  $1.09 \pm 2.50i$  (vértice 2),  $-18.70 \pm 84.34i$ ,  $0.24 \pm 1.31i$  (vértice 3),  $-76.06$ ,  $28.39$ ,  $-2.72$  e  $4.37$  (vértice 4). Deseja-se fazer a alocação em um círculo de raio  $r = 5$ , centrado em  $(-10, 0)$  ( $\delta = 10$ ,  $d = 5$ ). Apenas a condição do Teorema 3 possui uma solução factível, resultando em um ganho dependente de parâmetros que faz a alocação desejada. Na Figura 6 são mostrados os pólos do sistema incerto em malha fechada.

## 5 CONCLUSÃO

Foi apresentada uma condição suficiente para a alocação robusta de pólos em um círculo no plano complexo utilizando um ganho dependente de parâmetros. Exemplos mostraram que essa condição fornece bons resultados, obtendo ganhos robustos quando outras condições (baseadas em um ganho constante) falham. A condição proposta é verificada por um teste de factibilidade de um conjunto de desigualdades matriciais lineares, descritas apenas nos vértices do politopo de incertezas associado ao sistema, que pode ser resolvido eficientemente por algoritmos de complexidade polinomial.

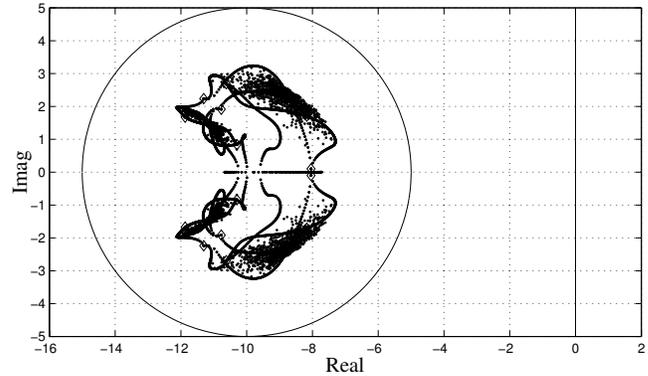


Figura 6: Autovalores da malha fechada do sistema incerto  $A(\alpha) + B(\alpha)K(\alpha)$  (caso contínuo, dado por (36)-(39)). Os autovalores dos vértices são representados por  $\diamond$ .

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio das agências CAPES, CNPq, FAPEMIG (TEC 1233/98) e FAPESP, e também as sugestões dos revisores anônimos.

## REFERÊNCIAS

- Albert, A. (1969). Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **17**(2): 434–440.
- Åström, K. J. e Wittenmark, B. (1995). *Adaptive Control*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts. Second edition.
- Bambang, R., Shimemura, E. e Uchida, K. (1993). Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control with pole placement: state feedback case, *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, Vol. 3, San Francisco, CA, pp. 2777–2779.
- Barmish, B. R. (1994). *New Tools for Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, NY, USA.
- Bernussou, J., Peres, P. L. D. e Geromel, J. C. (1989). A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems, *Systems & Control Letters* **13**(1): 65–72.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. e Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, USA.
- Chilali, M., Gahinet, P. e Apkarian, P. (1999). Robust pole placement in LMI regions, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(12): 2257–2270.

- Dahleh, M. e Dahleh, M. A. (1991). On slowly time-varying systems, *Automatica* **27**(1): 201–205.
- de Oliveira, M. C., Bernussou, J. e Geromel, J. C. (1999). A new discrete-time robust stability condition, *Systems & Control Letters* **37**(4): 261–265.
- Feron, E., Apkarian, P. e Gahinet, P. (1996). Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(7): 1041–1046.
- Garcia, G. e Bernussou, J. (1995). Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state-feedback, *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(1): 184–190.
- Geromel, J. C., Peres, P. L. D. e Souza, S. R. (1993).  $\mathcal{H}_2$  guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems, *International Journal of Control* **57**(4): 853–864.
- Haddad, W. M. e Bernstein, D. S. (1992). Controller design with regional pole constraints, *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(1): 54–69.
- Khargonekar, P. P. e Rotea, M. A. (1991). Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control: a convex optimization approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **36**(7): 824–837.
- Packard, A., Doyle, J. e Balas, G. (1993). Linear multivariable robust control with a  $\mu$  perspective, *Journal of Dynamic Systems - Transactions of ASME* **115**(2B): 426–438.
- Palhares, R. M. e Peres, P. L. D. (1999). Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering design with pole placement constraint via LMIs, *Journal of Optimization Theory and Applications* **102**(2): 239–261.
- Peres, P. L. D., Guitoli, G. e Umez, C. K. (1994). Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control of uncertain continuous-time systems with regional pole constraints, *Proceedings of the 1st IFAC Symposium on Robust Control Design*, Vol. 1, Rio de Janeiro, Brazil, pp. 243–248.
- Peres, P. L. D., Umez, C. K. e Guitoli, G. (1994).  $\mathcal{H}_2$  control of uncertain discrete-time systems with regional pole constraints, *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Vol. 1, Lake Buena Vista, FL, pp. 565–570.
- Ramos, D. C. W. e Peres, P. L. D. (2001). A less conservative LMI condition for the robust stability of discrete-time uncertain systems, *Systems & Control Letters* **43**(5): 371–378.
- Ramos, D. C. W. e Peres, P. L. D. (2002). An LMI condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **47**(4): 675–678.
- Solo, V. (1994). On the stability of slowly time-varying linear-systems, *Mathematics of Control Signals and Systems* **7**(4): 331–350.
- Zhou, K., Glover, K. e Doyle, J. C. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.