УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ФАКУЛТЕТ ОРГАНИЗАЦИОНИХ НАУКА

Стефан Р. Марковић

ОПТИМИЗАЦИОНО-СИМУЛАЦИОНИ ПРИСТУП РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА СТОХАСТИЧКОГ ПРОГРАМИРАЊА

докторска дисертација

Београд, 2019.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF ORGANISATIONAL SCIENCES

Stefan R. Marković

OPTIMIZATION-SIMULATION APPROACH TO SOLVING STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEMS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2019.

Докторска дисертација је рађена на Факултету организационих наука, на студијском програму Информациони системи и менаџмент; изборно подручје Менаџмент. Приликом дефинисања теме, садржаја и наслова, као и током израде докторске дисертације консултован је **проф. др Мирко Вујошевић**.

Комисија за преглед, оцену и одбрану дисертације на докторским студијама:

Ментор:

1. др Мирко Вујошевић, ред. проф Факултета организационих наука, Универзитета у Београду

Чланови комисије:

2. др Раде Лазовић, ванр. проф Факултета организационих наука, Универзитета у Београду
3. др Драгана Макајић Николић, ванр. проф Факултета организационих наука, Универзитета у Београду
4. др Александар Ђоковић, доцент Факултета организационих наука, Универзитета у Београду
5. др Игор Миљановић, ванр.проф Рударско - геолошког факултета, Универзитета у Београду

Датум одбране:

Оптимизационо-симулациони приступ решавању проблема стохастичког програмирања

Сажетак:

Стохастичко програмирање је део операционих истраживања које се бави начином на који је могуће укључити неизвесност у процес доношења одлука и које прихвата чињеницу да доносиоцу одлуке неће увек бити доступне све потребне информације. Основни проблем у примени стохастичких модела произилази из неизвесности параметара и чињенице да се оптимално решење дефинише и добија за детерминистички двојник (представник) оригинала. Проблем је оценити квалитет решења одређеног детерминистичког двојника са становишта вредности критеријумске функције, која може бити случајног карактера, као и са становишта вероватноће задовољења стохастичких ограничења.

Проблеми стохастичког програмирања се појављују у различитим областима, али неки од најчешће решаваних проблема су у области планирања производње, ланца снабдевања, логистике, транспорта, управљање портфолиом, маркетинга и уопште у области финансија као и у многим другим областима.

Приступи решавању проблема стохастичког програмирања се могу поделити у три основна правца: стохастичка оптимизација, робусна оптимизација и вероватносно задовољење ограничења (chance constrained programming) и који представљају полазну тачку свих даљих истраживања у овој области оптимизације.

Робусни приступ је конзервативни приступ који је оријентисан на најгори могући сценарио уз дефинисање таквог детерминистичког двојника оригиналног проблема у коме се елиминише сва неизвесност из модела.

Вероватносно задовољење ограничења је приступ који посебно третира неизвесност која се јавља у параметрима ограничења и посебно се бави решавањем таквих проблема. Основна претпоставка у овом приступу је да је потребно задовољити неко ограничење које је неизвесно, са најмање унапред

одређеном вероватноћом. Повод за развој и примену приступа вероватносног задовољења ограничења је потреба да се скуп ограничења опише у смислу дефинисања вероватноће задовољења ограничења која представља ризик који је доносилц одлуке спреман да прихвати да добијено оптимално решење неће бити допустиво. Основни и најзахтевнији изазов приступа вероватносног задовољења ограничења је његова рачунска изводљивост, која је пре свега повезана са могућношћу проналажења расподеле вероватноће случајних променљивих.

Ипак, сви поменути приступи су комплементарни приступи за оптимизацију у условима неизвесности, сваки са својим предностима и манама.

Предмет истраживања у дисертацији односи се на испитивање различитих начина третирања неизвесности у математичким моделима, односно развој нових приступа решавању стохастичких модела оптимизације.

Основна претпоставка дисертације је да се реални проблеми стохастичког програмирања могу ефикасно решавати комбинацијом метода класичне детерминистичке оптимизације и симулације.

Циљ истраживања је допринос развоју области стохастичког програмирања кроз развој новог приступа решавању слабо структурираних проблема. Прецизније, у дисертацији је примењена оригинална метода: итеративни оптимизационо-симулациони приступ. Приступ се састоји из две фазе: оптимазационе фаза која подразумева дефинисање и решавање детерминистичког двојника оригиналног проблема, и симулационе фазе у којој се проверава вероватноћа задовољења ограничења уз помоћ симулације. Сваки детерминистички двојник представља један нови сценарио који се проверава снагом симулације. Уколико доносилац олдуке није задовољан резултатима, дефинише се нови сценарио са новим детерминистичким вредностима оригиналног стохастичког проблема. Акумулирано искуство из великог броја симулација је искоришћено за разматрање и формулисање хеуристика за генерисање сценарија.

Општи циљ истраживања је да се кроз имплементацију оваквог приступа решавања стохастичких модела, добијена оптимална решења претворе у добре управљачке одлуке које ће омогућити реализацију постављених циљева и имплементацију стохастичких модела у реалним системима.

Најзначајнији допринос овог рада биће дефинисање новог приступа решавања проблема стохастичке оптимизације, односно стварање ефикасног начина решавања стохастичких модела коришћењем симулационог приступа. Поред ефикаснијег решавања модела, понудићемо и нове сценарије у приступу решавања стохастичких оптимизационих модела, што би заједно омогућило једноставнију примену одговарајућих алгоритама за решавање и имплементацију модела у реалном свету.

Кључне речи: Стохастичко програмирање, робусна оптимизација, вероватносно задовољење ограничења (chance constrained programming), детерминистички двојник, симулација, генерисање сценарија, хеуристика

Optimization-simulation approach to solving stochastic programming problems

Abstract:

Stochastic programming is a part of the operational research which investigates ways to incorporate uncertainty in the process of decision-making and that accepts the fact that the decision maker will not always have all the information needed readily available. The main problem in application of stochastic programming comes from the uncertainty of parameters in model and the fact that optimal solution is defined for the deterministic equivalent (double) of the original problem. Another problem is to evaluate the quality of a specific deterministic equivalent from the perspective of the value of criterion function, that can be a random, as well as from the perspective of probability of satisfying stochastic constraints.

Stochastic programming is applied in many areas, and some of the most common problems solved using stochastic programming are in the fields of production planning, supply chains, logistics, transportation, portfolio management, marketing and in the field of finance, and many other areas.

There are three common approaches in solving stochastic programming problems: stochastic optimization, robust optimization and chance constrained programming, and they represent the starting point of all the research in this field of optimization.

Robust optimization is a conservative approach that is orientated on the worst case scenario by defining such a deterministic equivalent of the original problem that removes all uncertainty from the model.

Chance constrained programming is an approach that treats uncertainty in the parameters of the constraints in the model and uses different techniques in solving these problems. The basic presumption in this approach is that a certain constraint, which is stochastic and uncertain, has to be satisfied with a predefined probability. The reason for developing and application of such an approach is the need to describe the constraints in such a manner that the predefined probability of satisfying constraints is actually a risk that the solution obtained won't be satisfied and which the decision maker is willing to accept. The main and most challenging part of the chance constraint

approach is tractability, that is above all connected to the possibility of finding the appropriate probability distributions of the stochastic parameters.

Nevertheless, all of the aforementioned approaches to stochastic programming are complementary approaches in solving optimization problems with uncertainty, with its own pros and cons.

The field of research in this dissertation is investigating different approaches in treating uncertainty in mathematical models, i.e. developing a new approach in solving stochastic programming models.

The basic assumption of dissertation is that the real life problem of stochastic programming can be efficiently solved by using the combination of the classic deterministic optimization and simulation.

The goal of the research is the contribution to the field of stochastic programming through the development of the new approach in solving weak structured problems. To be more precise, a new original method is proposed in the dissertation: iterative optimization-simulation approach. The approach consists of two phases: optimization phase in which the deterministic equivalent of the original problem is solved to optimality, and a simulation phase in which probability of satisfying constraints is checked using simulation. Every deterministic equivalent represents a new scenario, which is checked using the power of simulation. If the decision maker is not satisfied with the result, a new scenario of the original stochastic problem with new deterministic values will be defined. The accumulated experience from checking scenarios is used to consider and formulate heuristics as simple rules for scenario generation.

The main goal of the research is to use the optimal solutions achieved through implementation of this approach to solving stochastic models as good managerial decisions that will achieve the realization of the goals and implementation of the stochastic models in real life problems.

The greatest contribution of this dissertation is defining a new approach to solving problems of stochastic optimization, i.e. creating an efficient way to solve stochastic models using a simulation approach. Other than this, we will propose a new scenario in

solving stochastic optimization models that will enable a much simpler application of the appropriate algorithms in solving those models and implementing them in real life world.

Keywords: Stochastic programming, robust optimization, chance constrained programming, deterministic equivalent, simulation, scenario generation, heuristics

САДРЖАЈ

Садржај табела и слика

1 УВОД

Класична претпоставка у примени метода линеарног програмирања при решавању реалних проблема полази од тога да су улазне променљиве у модел, осим наравно управљачке променљиве x, познати фиксни подаци. Реални проблеми су врло ретко тако прецизно дефинисани, тако да наведена претпоставка често не одговара и не одсликава на прави начин реалан проблемом са којим се суочавамо. Најчешће је случај да су неке од улазних променљивих одређене као статистичке оцене посматраних историјских података, или представљају субјективне процене доносиоца одлуке, а врло често је очигледно да су улазне променљиве заправо случајни, стохастички параметри. Примери таквих података су производни капацитети, тражња, цена сировина на тржишту или продуктивност. Потпуно је јасно да је готово немогуће предвидети тражњу за производом који треба продати, или цену сировине, но ипак неопходно је укључити ове улазне података у модел, а заједно са њима и неизвесност која их карактерише.

У линеарном програмирању стандардни приступ би био да се улазни параметри на основу историјских података замене са очекиваним вредностима и као такви се искористе за решавање одговарајућег линеарног модела. Овакав приступ решавању се може користити само у неким специјалним случајевима и условима, али се врло лако може показати да такво добијено решење уз мале варијације стохастичких параметара није оптимално, или је веома лоше са становишта критеријумске функције за посматрани реални проблем. Чињеница је да се одлуке врло ретко доносе у условима потпуне извесности, јер готово увек постоји нешто у будућности што није познато када се доносе важне одлуке.

Феномен неизвесности захтева примену адекватних, али и иновативних приступа решавању оптимизационих задатака. Стога је, готово упоредо са линеарним програмирањем, настао велики број приступа третирању неизвесности у математичком програмирању под заједничким називом стохастичко програмирање.

Историјски гледано, већ 1955. године развијен први концепт стохастичког програмирања.

Тинтнер (*Tintner*, 1955) је први дефинисао метод стохастичког линеарног програмирања у ком је покушао да пронађе вероватноћу расподеле за функцију циља у случају могућности налажења претходног решења неизвесности за параметар *A*. Исте године, два аутора (*Beale*, 1955; *George B Dantzig*, 1955) су, независно један од другог, развили метод који се заснивао на очекиваним рекурсним трошковима, а метод је касније назван линеарно програмирање у условима неизвесности, како га је Данциг дефинисао у свом раду. Неколико година касније, Чарнс и Купер (*Charnes & Cooper*, 1959) су дефинисали нови приступ под називом вероватноћа задовољења ограничења, који се знатно разликовао од претходна два приступа.

Треба поменути и приступ робусног линеарног програмирања који је дефинисао (*Soyster*, 1973) у облику каквог га данас познајемо. Робусни приступ третирању неизвесности је мало другачији од претходно поменутих приступа у смислу да је оријентисан на најгори могући сценарио (*worst-case scenario*), односно примарни циљ је пронаћи таква решења стохастичког модела која ће бити имуна на неизвесност.

Све у свему, ови основни приступи су били камен темељац свих даљих истраживања у области стохастичког програмирања. Током наредних година, ове методе су примењене у различитим областима, па је значење израза стохастичко програмирање знатно проширено и сада се односи на сваки математички модел који садржи стохастичке параметре. Данцигов оригинални проблем линеарног програмирања у условима неизвесности се често назива још и двофазни рекурсни модел, а Тинтнеров се назива проблем расподеле параметара стохастичког линеарног програмирања.

Кључна разлика између стохастичког и робусног програмирања је да се при изградњи модела у стохастичком приступу неизвесни параметри посматрају као случајне променљиве. Стохастички приступ је много мање конзервативан у односу на робусни приступ који је углавном оријентисан на најгори могући случај. Ипак, како се тврди у књизи (*Aharon Ben-Tal, El Ghaoui, & Nemirovski*, 2009), стохастичко и робусно програмирање су комплементарни приступи за оптимизацију у условима неизвесности, сваки са својим предностима и манама.

Оптимизациони проблеми у којима се користе стохастички модели јављају се у готово свим областима, од телекомуникације, транспорта, логистике, ланаца снабдевања, маркетинга, медицине, финансија и других области. Као што је познато, случајни параметри карактеришу стохастичке моделе и у том смислу теорија стохастичке оптимизације комбинује методе оптимизације, функционалне анализе и теорије вероватноће и статистике.

У дисертацији је развијен нови оптимизационо-симулациони приступ у којем су коришћени приступи робусне оптимизације и вероватносног задовољења ограничења. Приступ вероватносног задовољења ограничења подразумева креирање сценарија који представљају детерминистички двојник оригиналног проблема. За сваки од сценарија добија се оптимално решење за које се проверава вероватноћа задовољења ограничења методом симулације. У складу са тим треба одговорити на две групе питања:

1) Како формирати погодне сценарије, и

2) Како ефикасно обавити симулационе провере.

Број могућих сценарија, односно детерминистичких двојника оригиналног проблема, расте експоненцијално са повећањем броја случајних параметара у моделу, што такође резултира у значајном усложњавању рачунског решавања таквих проблема. У ту сврху, развијено је и тестирано неколико хеуристика које омогућавају релативно брзо постизање задовољавајућег решења оригиналног проблема.

Као илустрација приступа разматран је проблем оглашавања, односно постављања огласа у различите штампане новине, часописе и магазине, са циљем постизања што већег ефекта уз минимални утрошак буџета.

Дисертација је организована на следећи начин: дефинисање основних поставки детерминистичког и стохастичког програмирања који су предмет истраживања дат је у другом поглављу. У трећем поглављу је представљен оптимизационо-симулациони приступ стохастичком програмирању. У четвртом поглављу је дата поставка стохастичког проблема оглашавања, односно дата је нотација, дефинисан модел, представљени реални подаци који су коришћени и хеуристике за генерисање сценарија. У петом поглављу представљени су резултати истраживања, табеларно и графички и дато је кратко објашњење за добијене резултате. У оквиру исте главе дата је дискусија о самом приступу и оствареним резултатима и будућим истраживањима.

1.1 Дефинисање проблема истраживања

Предмет истраживања је стохастичко програмирање, односно развој и испитивање различитих приступа решавању стохастичких модела оптимизације. Основни проблем у примени стохастичких модела произилази из неизвесности параметара и чињенице да се оптимално решење дефинише и добија само за детерминистички двојник (представник) оригинала.

Проблем је оценити квалитет решења одређеног детерминистичког двојника са становишта вредности критеријумске функције, која може бити случајног карактера, као и са становишта вероватноће задовољења стохастичких ограничења. Предмет истраживања у оквиру докторског рада односи се на примену комбинације метода класичне детерминистичке оптимизације и симулационог приступа у циљу оцењивања вредности решења за одређени сценарио, тј. одређени детерминистички двојник.

Још један проблем који ће се разматрати у докторском раду је коришћење различитих хеуристика у области линеарног стохастичког програмирања, а које би се односиле на креирање различитих сценарија и коришћење симулационог приступа за одређивање вероватноће задовољења ограничења. Ово значи да бисмо насупрот детерминистичких вредности променљивих у стандардним линеарним моделима увели нове, стохастичке вредности, а потом решавали детерминистичке двојнике оригиналног модела кроз неколико итеративних поступака симулације и провере.

1.2 Циљеви и хипотезе истраживања

Научни циљ истраживања је повећање сазнања о стохастичком програмирању путем указивања на могућност примене симулационог приступа у бржем решавању и имплементацији линеарних стохастичких модела у реалним системима.

Општи циљ истраживања је да се кроз имплементацију оваквог приступа решавања линеарних стохастичких модела, добијена оптимална решења претворе у добре управљачке одлуке које ће омогућити доносиоцу одлука да оствари постављене циљеве.

Хипотезе докторског рада дефинишу се у складу са предметом и циљевима истраживања:

Општа хипотеза докторског рада је да се реални проблеми стохастичког програмирања могу ефикасно решавати комбинацијом метода класичне детерминистичке оптимизације и симулације.

Посебне хипотезе су следеће:

- За решавање детерминистичких двојника постоје ефикасне методе и егзактни алгоритми који гарантују добијање оптималних решења када су у питању линеарни модели, као и хеуристички алгоритми који дају „довољно добра“ решења у случајевима нелинеарног и целобројног програмирања.
- Снага савремених рачунарских система омогућава примену симулационог приступа за евалуацију решења одређеног детерминистичког двојника за оригинални проблем стохастичког програмирања.
- Ради третирања неизвесности у проблемима стохастичког програмирања могуће је развити ефикасне поступке генерисања погодних сценарија и одговарајућих детерминистичких двојника.
- Предложени оптимизационо-симулациони приступ решавању проблема стохастичког програмирања се може ефикасно примењивати за случај стохастичког линеарног програмирања.
- У циљу повећања ефикасности предложеног приступа могуће је користити концепте тврдих и меких ограничења, односно комбинацију концепта робусног програмирања и концепта вероватносног задовољења ограничења.

1.3 Научне методе истраживања

Од општих метода при изради докторског рада користиле су се методе прикупљања и анализе научних резултата, резултата и експеримената из праксе и туђих искустава, као и метода моделовања и метода генерисања сценарија, а за решавање проблема стохастичке оптимизације, комбиновани оптимизационо симулациони приступ. Креирањем различитих сценарија моделовано је више могућих исхода у будућности и, у складу са тим, креирани модели детерминистичких двојника реалног проблема, који су решавани класичним оптимизационим методама и одговарајућа решења оцењена симулационим приступом. При изради докторског рада извршена су експериментална истраживања коришћењем доступних рачунарских софтвера уз помоћ метода операционих истраживања, прецизније, метода оптимизације и метода симулације.

1.4 Очекивани научни и стручни допринос истраживања

Мотивација дефинисања и израде новог приступа решавању проблема стохастичког програмирања је стварање ефикаснијег начина решавања стохастичких модела коришћењем симулационог приступа. Поред ефикаснијег решавања модела, понуђени су и нови сценарији у приступу решавања стохастичких оптимизационих модела, што заједно омогућава једноставнију примену одговарајућих алгоритама за решавање и имплементацију модела у реалном свету.

Ово истраживање је урађено са циљем дају нови доприноси и повећа сазнајни фонд у области стохастичког програмирања. Меотодологија и приступ решавања треба да омогући основу за његову даљу примену у другим сличним областима оптимизације, као што су робусно програмирање и програмирање засновано на вероватноћи задовољења ограничења или вероватносном задовољењу ограничења (*chance constrained programming*).

Верификација научних резултата потврђена је објављивањем експеримената и резултата на научним конференцијама и у релевантним домаћим и међународном часопису.

2 СТОХАСТИЧКО ПРОГРАМИРАЊЕ - теоријска поставка и емпиријска примена

Основни појмови који ће бити разматрани у овој дисертацији су:

- Линеарни модели оптимизације
- Приступи третирању неизвесности у математичком програмирању, и то:
    - стохастичка оптимизација
    - робусна оптимизација
    - вероватносно задовољење ограничења
- Генерисање сценарија, хеуристике и симулационе технике
- Комбиновани оптимизационо-симулациони приступи и њихова примена

2.1 Основне поставке детерминистичког и стохастичког програмирања

Одлучивање је фундаментални процес менаџмента, а операциона истраживања су међу првима понудиле квантитативне моделе који помажу руководиоцима да донесу праву управљачку одлуку. Прве референце на задатке линеарне оптимизације налазимо код творца симплекс методе (G B Dantzig, 1949) који их је у почетку називао „програмирање у линеарним структурама”, међутим врло брзо је опште прихваћени термин постао линеарно програмирање.

Математички модели и методе решавања су дале немерљив допринос и постале су незаобилазан алат за изградњу модела, анализу реалних проблема и доношење добрих одлука који воде предузеће ка постављеном циљу. Проблем проналажења оптималног решења је неизоставни део посла сваког менаџера, а области примене метода оптимизације су веома разноврсне.

Најпознатији и најчешће коришћен метод оптимизације је детерминистички модел линеарног програмирања који представља модел реалног проблема који треба решити.

Уобичајена формулација детерминистичког проблема линеарног програмирања је следећа:

$$\max f(x) = cx$$

p.o.

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

а основна почетна претпоставка је да су сви параметри, A, b, c унапред познати и непромењљиви.

Још на самом почетку развоја ове области творци идеје су уочили одређене недостатке приступа примене детерминистичких модела на ситуације из стварног живота. Опште је прихваћено да модел увек представља само упрошћену слику реалности, али једна од пожељних особина је и та да модел треба да што верније осликава реалне околности проблема. У том смислу, одређене апроксимације су потребне, чак и неопходне, али би за саму суштину схватања проблема и проналажења решења које може бити примењено у пракси било опасно унапред одредити све параметре једног оптимизационог модела. У својим сећањима о првобитном излагању идеје линераног програмирања (George B Dantzig, 2002) Данциг се као прве замерке целог концепта линеарног програмирања присетио Хотелингове констатације: „Сви знамо да је свет нелинеаран”.

Овог проблема је био свестан и сам творац идеје линеарног програмирања, али на нашу срећу систем линеарних неједначина, за разлику од једначина, омогућава да се изврше апрокасимације нелинераних релација које се срећу у практичним проблемима.

Дакле, оно што пресудно утиче на квалитет једног линеарног математичког модела је неизвесност која је садржана у сваком реалном проблему. Квалитет добијеног решења ће пре свега зависити од квалитета математичког модела који описује посматрани проблем.

Одлуке се готово никада не доносе у условима потпуне извесности и скоро увек постоји нешто у будућности што није познато и што ће утицати на процес одлучивања. Ово не значи да не треба доносити одлуке, напротив, проблеми захтевају нашу пажњу и морају се решити, што значи да је потребно ухватити се у коштац са проблемима моделовања неизвесности у процесу доношења одлука. Из ове претпоставке развио се читав низ приступа третирању неизвесности у математичком програмирању.

Постоји велики број радова који разматрају које су то специфичне особине параметара који утичу на неизвесност у моделима линеарног програмирања, а три основна фактора и њихове особине који имају значајан утицај на линеарну формулацију модела према (Bunn & N. Paschentis, 1982) су следеће:

Први и основни фактор који има значајан утицај на линеарну формулацију модела је свакако неизвесност. Једна од особина неизвесности која пресудно утиче на ваљаност линеарног детерминистичког модела је обим неизвесности, који се може испољити кроз утицај на функцију циља, утицај на скуп ограничења, или на оба истовремено. Неизвесност у скупу ограничења се испољава кроз ограничење скупа допустивих решења. Неизвесност у функцији циља ограничава избор оптималног решења, а у зависности од обима неизвесности, линеарни детерминистички модел за скуп допустивих решења може бити и празан скуп. Још једна значајна особина неизвесности је неопходност процене, односно одређивање расподеле вероватноће догађаја, што представља посебну тему о којој ће бити речи касније.

Структура проблема одлучивања представља други фактор који значајно утиче на линеарне моделе, и то особине претходне решивости неизвесности параметра и могућност рекурсног решавања проблема.

На крају, трећи фактор је сам доносилац одлуке који има значајан утицај на методологију линеарног детерминистичког програмирања својим избором начина моделовања проблема, или избором између више могућих решења.

Једна од дефиниција неизвесности је и она коју даје Galbrajt (Galbraith, 1973) где је она дефинисана као разлика између информација које су нам потребне да бисмо могли да донесемо одлуку и информација које имамо на располагању.

Према (King & Wallace, 2012) кључни проблеми при моделовању неизвесности у процесу доношења одлука који су увек присутни су следећи: 1) које су битне непознанице које могу утицати на процес одлучивања, 2) како можемо да се изборимо са њима, и; 3) можемо ли да направимо добра решења за те проблеме.

Детерминистички модели решавају проблеме линеарних математичких модела, али дају ограничен увид у то шта се дешава уколико се испостави да параметри које смо задали у моделу не буду онакви какви смо очекивали. Са друге стране, стохастичко програмирање као полазну претпоставку у изградњи модела узима неизвесност променљивих и разматра могуће ситуације које из таквог стања могу произаћи.

Стохастичко програмирање је део операционих истраживања које се бави начином на који је могуће укључити неизвесност у процес доношења одлука и које прихвата чињеницу да доносиоцу одлуке неће увек бити доступне све потребне информације.

Као што смо већ поменули, овакви проблеми се појављују у различитим областима, али нека од најчешће решаваних проблема су у области планирања производње, ланца снабдевања, логистике, транспорта, управљање портфолиом, маркетинга и уопште у области финансија као и многе друге области. Суштина стохастичког програмирања је да створи такве моделе чијим ће се решавањем добити оптимална решења имуна на неизвесност.

У наставку ћемо размотрити прве покушаје да се разуме и управља неизвесношћу у линеарним детерминистичким моделима које обухватају разне врсте постоптималних анализа.

2.1.1 Постоптималне анализе

Први покушаји да се на одговарајући начин обухвати и разуме неизвесност у параметрима при коришћењу линеарних детерминистичких модела је била коришћење различитих постоптималних анализа (Williams, 1978; Zionts, 1974). То је значило да се након решавања детерминистичког модела и добијеног оптималног решења приступало анализи параметара, а најчешће коришћене технике су анализа осетљивости, сценарио приступ и шта-ако анализа (*what if analysis*).

Разлог за појаву постоптималне анализе је очигледан. Често нам одређени параметри при формулисању модела нису познати, углавном због природе проблема који се посматра или зато што је једноставно до неких података немогуће доћи. Тада прибегавамо различитим приступима одређивања непознатих параметара и формулисања модела. Можемо користити одређене статистике за апроксимацију непознатих променљивих, узети очекиване вредности за те параметре или на крају користити сопствено искуство и формулисати детерминистички модел проблема. Логично је након решавања модела испитати добијена оптимална решења на основу тако дефинисаних параметара модела.

У ту сврху најпре се користила анализа осетљивости (F. Rossi, van Beek, & Walsh, 2006). Сврха анализе осетљивости је проверити у којој мери добијено оптимално решење зависи од параметара које смо користили. Анализа осетљивости одређује у ком се распону могу мењати вредности променљивих, а да то при томе не утичу на добијено оптимално решење. Полазно размишљање је да ако је могуће у значајној мери мењати вредности променљивих онда је решење стабилно у односу на могуће промене вредности променљивих у случају неизвесности, и обрнуто, ако је могуће мењати вредности променљивих врло мало, или нимало, онда је решење нестабилно, односно осетљиво на неизвесност у параметрима.

Уколико је решење осетљиво на неизвесност у параметрима онда то представља разлог за забринутост и врло је вероватно да су процењење вредности променљивих које су коришћене у моделу лоше, док то вероватно није случај уколико је решење стабилно. Анализом осетљивост се, генерално, може утврдити да ли је неизвесност битна за посматрани модел или не.

Како се у књизи (Vujošević, 2012) примећује, домети анализе осетљивости су веома ограниченог практичног значаја јер се у њима не разматра суштина неизвесности параметара и не даје се одговор на питање како би на функције ограничења и критеријумску функцију утицале промене параметара ван израчунатих опсега. Такође, анализа осетљивости је непрактична и компликована за системе са великим бројем неизвесних параметара.

Шта ако анализа и сценарио приступ су методе постоптималне анализе којима се генерише скуп могућих будућности које онда служе да се одреде одговарајуће активности под условом да се нека од претпоставки испостави као тачна. Циљ је испитати више различитих будућности и покушати да се предвиди какве ће бити последице тих стања.

Ипак, постоје озбиљна ограничења у погледу до ког се степена може испитати неизвесност неке променљиве на овај начин. Такође, постоптималне анализе се ослањају и заправо представљају само проширену примену детерминистичких модела, а да при томе уопште не узимају у обзир стохастичку природу проблема за који треба донети одговарајућу одлуку (LaValle, 1978).

Уопште посматрано, постоји велики број примера из праксе која показују да су решења детерминистичких модела „крута", односно да су одговарајућа само за дефинисани детерминистички модел. Ова њихова особина дефинише се као „ивица жилета" (King & Wallace, 2012). Ако разматрамо једноставан случај минимизације трошкова, оптимизационе процедуре детерминистичких модела настоје да ураде све како би сачувале макар и једну пару, а добијена оптимална решења се савршено уклапају са задатим вредностим променљивих у моделу.

Међутим, таква решења могу се показати као врло лоша чак и случају врло мале неизвесности вредности променљивих у моделу. Такорећи, решење балансира на ивици жилета, и управо је ова особина главни узрок зашто се решења детерминистичких модела показују као неадекватна у неизвесном окружењу.

Детерминистички модели су широко примењивани у великом броју различитих области, пре свега због једноставности примене, лаког разумевања и могућности брзог решавања, али проблеми који су се испољили готово истовремено са почецима њихове примене, као што су превелики ниво апстракције реалног проблема који онда директно утиче на квалитет добијеног решења, су указали на потребу за унапређењем детерминистичких модела.

Анализа осетљивости и постоптималне анализе су довеле до ограниченог напретка у побољшању резултата добијених применом детерминистичких модела, па се може рећи да је природан наставак и правац развоја био ка стохастичким моделима који су много боље представљали неизвесност која је неминовност сваког реалног проблема.

2.1.2 Развој области стохастичког програмирања

Као што смо раније већ навели, готово упоредо са појавом првих поставки линеарног програмирања дошло је до развоја нових приступа који би боље приказали неизвесност параметара модела, тако да је, историјски гледано, већ 1955. године развијен први концепт стохастичког програмирања.

Тинтнер (Tintner, 1955) је први дефинисао метод стохастичког линеарног програмирања у ком је покушао да пронађе вероватноћу расподеле за функцију циља у случају могућности претходног решења неизвесности за параметар a. Исте године, два аутора (Beale, 1955; George B Dantzig, 1955) су, независно један од другог, развили метод који се заснивао на очекиваним рекурсним трошковима, а метод је касније назван линеарно програмирање у условима неизвесности, како га је Данциг дефинисао у свом раду. Неколико година касније, Чарнс и Купер (Charnes & Cooper, 1959) су дефинисали нови приступ под називом вероватноћа задовољења ограничења (*chance constraint programming*), који се знатно разликовао од претхода два приступа.

Све у свему, ова три основа приступа су били камен темељац свих даљих истраживања у области стохастичког програмирања. Током наредних година, ове методе су примењене у различитим областима, па је значење израза стохастичко програмирање знатно проширено и сада се односи на сваки математички модел који садржи стохастичке параметре. Данцигов оригинални проблем линеарног програмирања у условима неизвесности се често назива још и двофазни рекурсни модел, а Тинтнеров се назива проблем расподеле параметара стохастичког линеарног програмирања.

Генереално посматрано, на основу приступа решавању проблема, постоје две велике групе метода стохастичке оптимизације: имплицитне и експлицитне (Vujošević, 2012). Имплицитне методе се могу примењивати само у специјалним случајевима када је број могућих решења релативно мали, односно када се свако допустиво решење може анализирати и међусобно упоредити. Уобичајени поступак примене имплицитних метода подразумева одређивање свих реализација случајних параметара, оптимизацију свих детерминистичких сценарија и на крају поређење и избор најбољег решења.

Експлицитне методе се примењују за дискретне и континуалне стохастичке проблеме. Овом методом се оригинални проблем стохастичког програмирања, уз извесне претпоставке, претвара у погодни облик детерминистичке трансформације, односно у детерминистички двојник или замену оригиналног проблема. Стохастичка природа проблема може бити везана за критеријумску функцију, ограничења или оба истовремено.

Нов приступ дефинисања детерминистичког двојника који је објашњен у овој дисертацији управо спада у експлицитне методе. У наставку ћемо увести основне теоријске поставке приступа третирања неизвесности који су коришћени при формулацији иновативног приступа ове дисертације.

2.1.3 Основни параметри за дефинисање стохастичких модела

Информационе фазе, стабла догађаја и расподеле случајних вероватноћа су основни парамтери који карактеришу и одвајају стохастички приступ третирања неизвесности од осталих приступа. Врло је важно добро разумети поменуте концепте јер су они кључни при дефинисању одговарајућих стохастичких модела, а потом и ваљаних детерминистичких двојника оригиналних проблема.

Информациона фаза је најважнији концепт који издваја стохастичко програмирање (King & Wallace, 2012). Оне се негде једноставно називају фазе, али је суштина стохастичког приступа садржана управо у тим фазама, чијим коришћењем се могу превазићи бројни проблеми и недостаци који се јављају у детерминистичким моделима. Фаза представља тренутак у времену када се доносе одлуке у моделу, а фазе можемо сами одредити за сваки модел посебно, а понекад се оне саме намећу због природе проблема.

Фазе има смисла разликовати само ако се у два различита тренутка у времену догоди нешто битно, тј. ако нам у одређеном тренутку у времену постане доступна нека битна информација. Наравно, није увек лако уочити фазу у стандардној детерминистичкој поставци модела.

Неки од најчешћих проблема детерминистичких модела су „пренапрегнута” решења модела, односно модел решава проблем тако да, у случају минимазције трошкова, уштеди сваку пару, па се за врло мале промене вредности параметара, у смислу неизвесности у променљивима, добијају неизводљива решења модела. Разлог је управо непрепознавање информационих фаза и догађаја.

Ако у реалном свету вредност неког параметра не буде онаква као што смо предвидели, неће доћи до тектонских поремећаја у пословању, али постављени детерминистички модел то интерпретира као нешто што се не може догодити ни под којим условима и то је кључни недостатак ових модела. Најчешћи разлог је што стабло догађаја није пренето на структуру модела.

Претпоставимо да су процене параметара на основу којих смо изградили детерминистички модел погрешне, тј. да смо на пример наручили погрешну количину ресурса или произвели превише или премало производа. За то ћемо платити одређену цену, да ли кроз пропуштену добит или кроз више трошкове, али је чињеница да детерминистички модели овакву могућност не препознају. Можемо рећи да постоје неки аспекти доброг решења које детерминистички модели никада не могу да открију без обзира колико их много анализирамо.

Врло је битно уградити информационе фазе и стабло догађаја у модел који решавамо, а ту могућност пружа нам стохастичка поставка проблема.

Поред информационих фаза и стабла догађаја, још један битан параметар у дефинисању и изградњи стохастичког модела су расподеле случајних променљивих. Ово је основно питање и полазна тачка сваког стохастичког модела. Прво питање које се поставља је, да ли расподеле случајних променљивих постоје, и ако постоје, да ли је могуће одредити их.

Овом проблему треба прићи веома пажљиво, пре свега јер је некада готово немогуће утврдити неку расподелу. Такође, постоје догађаји који се догађају само једном, и догађаји који се понављају. Основна претпоставка стохастичког програмирања је доношење одлука у садашњости, а које ће се примењивати у будућности, и чији је саставни део неизвесност. У таквим ситуацијама људи најчешће покушавају да опишу будуће догађаје преко информација о том догађају из прошлости. Ипак, нико не може са сигурношћу да тврди да ће све оно што се дешавало у прошлости да се догоди и у будућности, као ни да ли ће прошлост имати икакве везе са будућношћу. Највише што можемо да урадимо је да проверимо да ли смо у прошлости добро предвиђали будућност.

Статистички посматрано, ако имамо велики скуп података из прошлости који описује неки догађај, постоји велики број метода и техника да се на основу података из прошлости опише неки будући догађај. Међутим, то води управо ка ономе о чему смо малочас говорили, описивању будућности кроз прошлост, што је упитно са становишта генерисање доброг стохастичког модела.

Непознавање прецизних расподела не треба да буде ни изговор за искључиво коришћење детерминистичких модела. Још једна замка је користити само очекиване вредности променљивих при изградњи стохастичког модела. На тај начин ћемо једноставно добити детерминистички оптимизациони проблем. Циљ стохастичке оптимизације је да се проблем разуме на прави начин, нарочито ако постоје одговарајуће информације о том догађају. Такође, очекиване вредности променљивих не могу да укажу на зависност између променљивих, а стохастичко програмирање има начина да на прави начин моделира и реши такве проблеме.

Са друге стране, доносиоци одлука често воле да користе најгори могући случај као реперну вредност за свој модел. Ово је, генерално, лош приступ стохастичком програмирању, јер ће се сва предвиђања расподела померити ка крајњим тачкама интервала, што је веома необична расподела. Вероватноћа за остварење најгорег могућег случаја је врло мала, али је без обзира на све ово, метода примењивана као својеврсна заштита од ризика. Суштина стохастичког програмирања је моделирати неизвесност, а не моделирати екстремне ситуације.

У случају да не постоји могућност да сазнамо потребне расподеле, много боље решење од најгорег могућег случаја је направити стохастички програм са неколико различитих сценарија. Чак иако нам није позната стварна расподела, генерисање више сценарија ће нам помоћи да боље разумемо проблем. Наравно, не треба сметнути са ума да је сваки модел, ма колико прецизан, само апроксимација стварног света и проблема који посматрамо, што значи да је исти случај и са расподелама случајних променљивих.

Овде, наравно, не тврдимо да је узалудно трудити се да се утврде расподеле случајних променљивих. Расподеле треба посматрати као средство да сазнамо више о проблему који разматрамо. Такође, све информације које имамо о неком догађају треба искористити да би се што више о њему научило. Ако постоје добри историјски подаци о неком догађају треба их искористити за одређивање расподеле. Ако имамо доступно стручно мишљење, и то треба узети у обзир. Ако на крају имамо само своје, субјективно, мишљење о неком проблему, то треба узети као полазну тачку за одређивање потребних расподела и упознавање са проблемом који решавамо.

2.2 Двофазни и вишефазни стохастички модели

Да бисмо поставили добар стохастички модел који на прави начин представља реалан проблем, није довољно узети у обзир само процене расподела случајних променљивих. Подједнако је битно препознати фазе модела у односу на временски ток и у складу са фазама дефинисати променљиве. Размишљане о фазама је неопходан корак, без обзира да ли правимо стохастички или детерминистички модел.

Такође, размишљање о фазама нам открива и друге аспекте модела које не бисмо разматрали у случају детерминистичких модела и може нам открити пут ка новим стохастичким моделима за исти проблем. Као што смо већ навели, фазу пресудно детерминише тренутак у времену када нам постаје доступна нека нова, корисна информација на основу које треба донети управљачку одлуку. Веома је битно направити разлику између информационе фазе и временског периода. Временски период представља проток времена у моделу, а информациона фаза је носилац битне информације и тренутак када се доноси одлука.

У складу са бројем фаза разликујемо стохастичке моделе као двофазне рекурсне моделе и моделе са бесконачно много фаза.

Рекурсни програми су такви програми код којих се нека повратна, односно рекурсна акција може предузети након што нам неизвесност у општем облику постане позната. На пример, генерална неизвесност у подацима се може представити као скуп случајних променљивих. То подразумева да ће нам постати познате расподела вероватноћа тих случајних променљивих, густина расподеле или чак и мере те расподеле, као нпр. очекивана вредност и варијанса. Појединачане вредности које ће случајне променљиве узети ће нам постати познате тек након након спроведеног експеримента, тј. вектор $\xi = \xi(\omega)$ је познат тек након експеримента.

У погледу фаза, скуп одлука које се доносе се може поделити у две гупе:

- Одлуке које се доносе у посматраном тренутку и под посматраним околностима, пре него што нам постане доступна нека нова информација или након што сазнамо праву расподелу случајних променљивих. Ове одлуке се називају одлуке прве фазе, а фаза у којој се ове одлуке доносе се назива прва фаза.
- Одлуке које се доносе након што се спроведе експеримент. Ове одлуке се називају одлуке друге фазе, а одговарајући фаза се назива друга фаза.

Један типични пример овакве ситуације је модел инвестирања и експлоатације у ком се прва фаза модела значајно разликује од преосталих фаза које су мање-више исте. У првој фази доносимо дугорочну, инвестициону одлуку, док се у осталим фазама виде последице донешене одлуке, односно корист од те инвестиције.

Одлуке у првој фази представљамо вектором x, а одлуке друге фазе представљамо вектором $y(\omega)$, или са $y(\omega,x)$ ако желимо да нагласимо да одлуке друге фазе зависе од реализације случајних параметара у првој фази и одлуке која је донета у првој фази. Распоред догађаја и одлука је према томе следећи:

$$x \rightarrow \xi(\omega) \rightarrow y(\omega,x)$$

У складу са уведеном нотацијом, класични двофазни рекурсни модел се у општем облику може написати на следећи начин:

$$(\min)\ z = c^T x + E_\xi[\min q(\omega^T) y(\omega)]$$

п.о.

$$Ax = b,$$
$$T(\omega)x + Wy(\omega) = h(\omega),$$
$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Одлуке прве фазе су представљене вектором x са припадајућим векторима и матрицама c, b, A. У другој фази, дошло је до реализације случајних догађаја $\omega \epsilon \Omega$. За дате реализације ω, подаци друге фазе $q(\omega)$, $h(\omega)$, $T(\omega)$ су постали познати. Свака компонента од q, T и h је могућа случајна променљива.

Потом се доноси одлука друге фазе $y(\omega)$, при чему је зависност y од ω потпуно другачије природе него зависност q или осталих параметара од ω. Суштина је приказати да се одлуке y друге фазе разликују за различите реализације ω.

Критеријумска функција се састоји од два дела, детерминистичког $c^T x$ и очекиване вредности критеријумске функције друге фазе $q(\omega^T)y(\omega)$ узета за све реализације случајног догађаја ω. Други део критерјумске функције је сложенији јер за сваку реализацију ω, вредност $y(\omega)$ је заправо решење линераног програма.

Алтернативно, проблем двофазног рекурсног програма се може написати уз помоћ детерминистичког еквивалента на следећи начин:

За дате релаизације ω, нека је

$$Q(x,\xi(\omega)) = \min_y\{q(\omega)^T y | Wy = h(\omega) - T(\omega)x, y \geq 0\}$$

функција друге фазе. Онда дефинишемо очекивану вредност функције друге фазе са:

$$\mathcal{Q}(x) = E_\xi Q(x, \xi(\omega)),$$

тада је детерминистички еквивалент:

$$\min z = c^T x + \mathcal{Q}(x)$$

п.о.

$$Ax = b,$$
$$x \geq 0$$

Основна разлика оваквог стохастичког приказа у односу на детерминистичку формулацију је у критеријумској функцији друге фазе. Ако узмемо у обзир да се случајни подаци у другој фази могу узети као случајне променљиве чије се расподеле вероватноћа могу сазнати, и ако је број реализација коначан, овај проблем се, уопштено говорећи, може формулисати као линеарни проблем великог обима. Свака реализација случајних параметара се може посматрати као један сценарио.

Наравно, овде се одмах намећу три основна питања: како генерисати одговарајуће сценарије, како решити до оптималности линеарни програм друге фазе и како вредновати добијено решење у односу на „прави” оптимум. Одговор на ова питања није једноставан и међусобно је условљен, нпр. број дефинисаних сценарија ће утицати на рачунску изводљивост која је постављена у другом питању. Управо ће ови проблеми бити разматрани у дисертацији приликом дефинисања и објашњења новог приступа третирању неизвесности у стохастичким проблемима.

Размотримо сада и вишефазне стохастичке рекурсне линеарне моделе. У општем случају, овај проблем се може представити на следећи начин:

$$min\ z = c^1x^1 + E_{\xi^2}\left[minc^2(\omega)x^2(\omega^2) + \cdots + E_{\xi^H}[minc^H(\omega)x^H(\omega^H)] \ldots\right]$$

п.о.

$$W^1x^1 = h^1\ ,$$
$$T^1(\omega^2)x^1 + W^2x^2(\omega^2) = h^2(\omega)\ ,$$
$$\ldots$$
$$T^{H-1}(\omega^H)x^{H-1}(\omega^{H-1}) + W^Hx^H(\omega^H) = h^H(\omega)\ ,$$
$$x^1 \geq 0;\ x^t(\omega^t) \geq 0, t = 2, \ldots, H;$$

c^1 је познати вектор у $\Re^{n_1}$, h^1 је познати вектор у $\Re^{m_1}$, $\xi^t(\omega)^T = c^T(\omega)^T, h^t(\omega)^t, T_1^{t-1}(\omega), \ldots, T_{m_t}^{t-1}$ је случајни N_t вектор дефинисан у

(Ω, Σ^t, P) (где је $\Sigma^t \subset \Sigma^{t+1}$) за сва $t = 2, \ldots, H$, и где је свако W^t позната m_t x n_t матрица. Управљачке одлуке x зависе од тренутка у којем се доносе и дотадашње историје, што је обележено са ω^t.

Вишефазни модели се још називају и оперативни модели. У овим моделима све фазе су истог типа, отуда и назив оперативни модели, што значи да имају бесконачно много фаза, што се у литератури посматра под ефектом хоризонта. Истина је да су готово сви реални проблеми овакве природе.

Свако предузеће је свесно да ће у неком тренутку престати да прави одређену врсту производа, али заправо планира као да се то никада неће догодити. Иако би можда било корисно третирати све реалне проблеме на овај начин, не постоји начин да управљамо моделима са бесконачно много фаза.

Најчешћи начин на који се ови модели решавају је да се уз одређене претпоставке, или препознате рализације случајних параметара, изврши одређена апроксимација ових модела који се потом своде на моделе са две фазе. Повезани вишефазни модели су мање погодни за стохастичко програмирање од двофазних модела.

2.3 Робусни стохастички модели

Робусна оптимизација има дугу историју примене у науци и инжењерском менаџменту. Неке од техника се директно и називају робусним, а неке се називају другачије, али су суштински то технике које користе основне постулате робусности, али до којих се дошло под утицајем неких других идеја, као на пример одређене статистичке методе. Области у којима је робусност била, и још увек јесте значајна особина су:

- Робусна контрола - ова област се развила током 90-их година прошлог века, пре свега у области контроле система где је основни циљ био постићи одређени загарантовани степен стабилности система који се контролише. Концепт робусне контроле су у својој књизи објаснили (Dullerud & Paganini, 2005).

- Робусна статистика - одмах треба рећи да не постоји јасна и прецизна веза са робусном оптимизацијом, али је (Huber, 1981) у свом раду предложио технику за управљање „аутлајер”-има, односно тачкама које се налазе изван неког груписаног скупа, готово на крајевима посматране области, тако што је изменио и прилагодио функцију губитка. Тако се у статистици робусност пре свега односи на неосетљивост модела на „аутлајер”-е.
- Линеарна и конвексна робусна оптимизација - прву формалну поставку проблема робусног линеарног програмирања у облику каквог га данас познајемо дао је (Soyster, 1973) у свом познатом раду. У наредним годинама било је свега неколико радова објављених на ову тему, (Falk, 1976; Singh, 1982). Интересовање за проблематику робусног програмирања обновљено је тек 1997. године радовима (Ghaoui, Her, & Lebret, 1997). Овде треба поменути и књигу коју си издали (Kouvelis & Yu, 1997) на тему робусног целобројног програмирања. Наредне године (A. Ben-Tal & Nemirovski, 1998) су издали рад на тему робусне конвексне оптимизације, а исте године је објављен рад на тему робусног решења у условима неизвесности (El Ghaoui, Oustry, & Lebret, 1998). Од 2000. године почиње права експанзија истраживачких радова на тему робусног програмирања, како теоријских, тако и радова о примени на бројне области менаџмента.

По својој природи робусна оптимизација је метода која се може применити на било који оптимизациони проблем где је могуће јасно одвојити нумеричке податке, који могу бити делимично неизвесни, од структуре проблема која је већ позната и уобичајена за проблем који се решава.

Основе за практичну примену модела робусне оптимизације у условима неизвесности поставили су у својим радовима (Levi, Kaminsky, & Levi, 2004; Nahmias, 1989; Sheffi, 2005), при чему се може рећи да се робусна оптимизација темељи на следећа два принципа:

- Тачна предвиђања су бесмислена (зато што су увек погрешна) и треба их заменити предвиђањима у одређеном опсегу.
- Агрегирана предвиђања су прецизнија од појединачних.

Начин на који се ове две основне поставке уграђују у квантитативни модел је следећи: моделирамо одређене непознате променљиве као параметре који припадају тачно одређеном интервалу, односно предвиђамо тај опсег. Та предвиђања углавном дефинишу опсег тако да обухвата околину тачно одређене предвиђене вредности непознате променљиве. Прецизније агрегирано предвиђање ће бити уграђено кроз додатна ограничења која ће смањити максимално одступање агрегираног предвиђања од номиналне вредности.

У робусној оптимизацији, проблем неизвесног линеарног програмирања, како то дефинишу у својој књизи (Aharon Ben-Tal et al., 2009) представља скуп линеарних програма $\{min_x\{c^T x : Ax \leq b\} : (c, A, B) \in U\}$ у свом стандардном облику, а где променљиве (c, A, B) варирају у задатом променљивом скупу U. Даље дефинишу основни концепт решавања робусног програма, односно дају три кључне претпоставке основног окружења у којем се доносе одлуке:

- Сва решења у вектору одлучивања *x* представљају одлуке које са доносе у садашњем тренутку и оне треба да буду конкретни бројеви који су резултат решавања проблема пре него што нам стварни подаци постану познати
- Доносилац одлуке је у потпуности одговоран за последице донете одлуке, али само у случају када су стварни подаци заиста из предефинисаног скупа U.
- Доносилац одлуке не сме да толерише нарушавање ограничења када се подаци који се користе налазе у скупу U, што значи да су сва ограничења неизвесног модела тврда.

Заиста, ако узмемо у обзир наведене три претпоставке добићемо решење које је по својим особинама фиксни вектор које задовољава сва ограничења без изузетка, без обзира на реализације из предефенисаног скупа U, и такво решење се може назвати робусно изводљиво решење. Овакве претпоставке, а последично и добијено решење, воде ка решењу које је имуно на неизвесност.

За представљање робусног програмирања у математичком облику користићемо књигу (Vujošević, 2012). Основна претпоставка конзервативног приступа је да вредности у параметрима ограничења имају неизвестан карактер, а како овакав приступ не дозвољава недопустивост решења, оригинални оптимизациони задатак има следећу детерминистичку замену:

Наћи вектор $\xi = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ тако да се максимизира вредност новоуведене промењљиве x_0 под условом да за било које вредности случајних параметара критеријумска функција није мања од вредности x_0:

$$\max_{x \in U}\{x_o | f(x) \geq x_0\}.$$

Увођењем додатних ограничења задатак се може превести у проблем у коме су неизвесни само параметри ограничења, при чему се елеминише неизвесност у критеријумској функцији. Тако добијамо преформулисану детерминистичку замену следећег облика:

Наћи вектор $\xi = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ тако да се добије максимум промењљиве:

$$\max_{x \in U}\{f(\xi) = x_0\}$$

п.о.

$$f(x) \geq x_0$$

$$g_i(x, A_i) \leq b_i, i = 1, \ldots, m$$

Овако дефинисан модел садржи неизвесне параметре искључиво у функцији ограничења. За решавање овог модела детерминистичког двојника аутор предлаже коришћење симулационог приступа кроз итеративни поступак који садржи две фазе.

Област примене модела робусне оптимизације обухвата бројне области, а прва и најпознатија примена је свакако модел управљања портфолиом који је (Markowitz, 1952) описао у свом раду давне 1952. године, као и неколико година касније (Markowitz, 1959).

Велика област примене робусне оптимизације је свакако управљање ланцима снабдевања. Дефиниција робусног модела за контролу складишта за контролу складишта дали су у свом раду (Bertsimas & Thiele, 2006), а (A. Ben-Tal, Golany, Nemirovski, & Vial, 2005) су направили сличан робусни модел за контролу складишта, али у ком постоји могућност флексибилног испоручивања и наручивања робе између снабдевача и купца.

Робусни модел за минимизацију укупне потрошње струје су дефинисали (Hsiung, Kim, & Boyd, 2005), а појам робусности у области контроле је већ коришћен неколико деценија. Овде ћемо издвојити и књигу о робусној и оптималној контроли (Zhou, Doyle, & Glover, 1996).

Кључна разлика између стохастичког и робусног програмирања је да се при изградњи модела у стохастичком приступу неизвесни параметри посматрају као случајне промењиве. Слично као и у робусном програмирању приступа се дефинисању новог детерминистичког двојника или замене, где се у најједноставнијем случају за непознате вредности узимају њихове очекиване вредности, а у сложенијим поставкама расподеле случајних промењивих су само делимично познате. Ипак, стохастички приступ је много мање конзервативан у односу на робусни приступ који је углавном оријентисан на најгори могући случај. Наравно ово ће важити само у случају да смо у стању да сазнамо праве расподеле случајних промењивих у стохастичком приступу. Ако то ипак није случај, може доћи до значајних компликација при решавању детерминистичког двојника, а неретко, нећемо успети да пронађемо решење за тако дефинисане случајне параметре. Зато се у стохастичком програмирању често узимају превише поједностављене претпоставке за расподеле случајних промењивих.

Са друге стране, детерминистичке замене робусних модела рачунски су веома изводљиве, под условом да је предефинисани скуп U благо конвексан. Чак се може рећи, посматрано са стране решавања модела и изводљивости, да је конзерватизам робусне оптимизације више његова предност него мана у поређењу са стохастичким приступом. Ипак, како тврде (Aharon Ben-Tal et al., 2009) у својој књизи, стохастичко и робусно програмирање су комплементарни приступи за оптимизацију у условима неизвесности, сваки са својим предностима и манама.

2.4 Приступ вероватносног задовољења ограничења *(Chance constrained programming)*

Стохастичка оптимизација и приступи решавању проблема у условима неизвесности су у значајној мери унапредили процес одлучивања. Основна идеја оптимизације у условима неизвесности је да се интегришу доступне стохастичке информације у одговарајући модел како би се што боље моделирао реални проблем.

Вероватносно задовољење ограничења је приступ који посебно третира неизвесност која се јавља у параметрима ограничења и посебно се бави решавањем таквих проблема. Основна претпоставка доносиоца одлуке у овом приступу је да је потребно задовољити неко ограничење, које је неизвесно, са најмање унапред одређеном вероватноћом.

Неизвесност се, уопште говорећи, може поделити на на спољне и унутрашње неизвесности. Спољне неизвесности су све оне на које се не може утицати, као што су на пример временске прилике, доступни ресурси, стање на тржишту итд., а унутрашње се могу изразити кроз неизвесност у параметрима оптимизационог модела.

Једна од најчешће коришћених дефиниција вероватносног задовољења ограничења је следећа (Charnes & Cooper, 1959):

„Изаберите одређене случајне променљиве као функције случајних променљивих са познатим расподелама тако да се максимизира функција циља за обе групе случајних променљивих у односу на ограничења за ове променљиве које морају бити задовољене са унапред задатом вероватноћом. Једноставније, основни проблем је одредити оптимална стохастичка правила одлучивања под задатим условима.”

Чарнс и Купер даље у раду дефинишу два основна приступа решавању проблема тако што је први корак одређивање расподела које максимизирају функцију циља, у односу на ограничења и што приближније одређивање расподела према функцијама расподела познатих случајних промењљивих неке прихватљиве класе сличних промењљивих. У наставку ћемо дати основну поставку проблема вероватносног задовољења ограничења.

Основна поставка проблема вероватносног задовољења ограничења је следећа:

$$\max_x f(x)$$

п.о.

$$P\{A(\xi)x \leq b(\xi)\} \geq 1 - \alpha,$$

$$x \in X$$

где $\xi \in R^k$ представља k-димензиони случајан вектор, а функција $P\{\cdot\}$ представља вероватноћу расподеле на R^k услед ξ. Такође, неједначина $A(\xi)x \leq b(\xi)$ представља услов који треба да буде задовољен, где $A(\xi) \in R^{mxn}$ и $b(\xi) \in R^m$ представљају матрицу ограничења, односно колону матрицу колоне слободних чланова који су неизвесне промењљиве, при чему је x управљачка промењљива. Када је $m = 1$, односно када је $A(\xi)$ ред матрица, онда се ограничење назива једноструко вероватносно ограничење, у супротном се назива вишеструко вероватносно ограничење.

Вредност α представља ризик који је доносилац одлуке спреман да прихвати да добијено решење неће бити допустиво, или другачије, толеранција неиспуњења задовољења ограничења. За α се најчешће узимају мале вредности, на пример 0,1 или 0,05, мада се у зависности од поставке проблема могу дати и друге вредности.

Један од популарних начина дефинисања ограничења је да се одреде или ограниче неке излазне промењљиве y, при чему је $\boldsymbol{y}$ део управљачке промењљиве x:

$$y_i^{min} \leq y_i(\xi) \leq y_i^{max}, i = 1, \dots, I$$

где су y_i^{min} и y_i^{max} доња, односно горња граница излаза. Ограничавање неизвесних параметара у одређеним границама се најчешће користи када је битно неке параметре држати у одређеним границама како би се, на пример, осигурала безбедност рада неког система. Излазне промењљиве y_i своју неизвесност дугују неизвесним улазима ξ, па се за њих дефинишу посебне неједначине како би се измериле вероватноће задовољења. У приступу вероватносног задовољења ограничења то, наравно, подразумева дефинисање вероватноће са којом треба да буде задовољено посматрано ограничење:

$$Pr\{y_i^{min} \leq y_i(\xi) \leq y_i^{max}, i = 1, \dots, I\} \geq \alpha$$

Исто као и код стандардног модела, $Pr\{\cdot\}$ представља вероватноћу задовољења неједначине, а α је степен поверења коју дефинише доносилац одлуке и која узима вредности између $0 \leq \alpha \leq 1$. Као и код основног модела постоје једнострука и вишеструка ограничења, у зависности од тога да ли су вероватноће дефинисане за појединачна ограничења или за скуп ограничења.

Нарочито занимљиво за ово истраживање је једноструко веровантносно ограничење, јер се на овај начин могу дефинисати појединачне вероватноће задовољења за свако ограничење. Иако то значајно усложњава рачунску изводљивост модела, са друге стране пружа значајне могућности финог подешавања модела како би се што реалније приказао посматрани проблем и добило најбоље могуће решење. Општи облик оваквог ограничења се може записати у следећем облику:

$$Pr\{y_i^{min} \leq y_i(\xi) \leq y_i^{max}\} \geq \alpha_i, i = 1, \dots, I$$

Уобичајени детерминистички приступ подразумева коришћење очекиваних вредности случајних променљивих, али у реалним проблемима случајне променљиве значајно одступају од својих очекиваних вредности. Пожељно је користити једнострука вероватносна ограничења у случајевима када су поједина ограничења важнија од других, што такође представља субјективну процену доносиоца одлуке.

Повод за развој и примену приступа вероватносног задовољења ограничења је потреба да се скуп ограничења опише у смислу дефинисања вероватноће задовољења ограничења која представља ризик који доносилац одлуке прихвата да добијено оптимално решење неће бити допустиво.

Избор вредности α може бити менаџерска одлука као размена између других циљева и минимизације ризика, у смислу да је менаџер спреман да се одрекне одређене користи како би минимизирао потенцијални ризик. Један могући приступ би био коришћење стохастичког рекурсног програма којим могу да се дефинишу губици за све реализације случајних променљивих ограничења и потом ове губитке помоножити са тежинским коефицијентима и укључити их у функцију циља, чиме би се неизвесност појављивала искључиво у функцију циља. Ипак, овај начин подразумева много више субјективних процена од одређивања α, при чему би значајно усложнило анализу и можда чак било рачунски неизводљиво. Управо ћемо се у наставку бавити решивошћу модела вероватносног задовољења ограничења, односно факторима који пресудно утичу на решавање ових модела у разумном временском року.

2.4.1 Решивост модела вероватносног задовољења ограничења

Приступ вероватносног задовољења ограничења је оптимизациони модел који се користи у бројним областима, међутим као и сваки приступ има одређена ограничења и недостатке. Основни и најзахтевнији изазов приступа вероватносног задовољења ограничења је његова рачунска изводљивост, која је пре свега повезана са могућношћу проналажења расподеле вероватноће случајних променљивих. Иако је поставка вероватносног задовољења ограничења уведен још 50-их година, још увек се ови проблеми генерално сматрају веома тешким и често нерешивим (Birge & Louveaux, 1997; Hartnett, Kennedy, Sharp, & Greenacre, 2016; Kall & Mayer, 2005).

Као што смо већ рекли, полазно теоријско становиште је да су расподеле вероватноће неизвесних параметара унапред познате, међутим реални проблеми не подржавају овакву тврдњу. Чак и под претпоставком да су нам познате расподеле случајних променљивих, може бити веома тешко израчунати вероватноћу задовољења неког ограничења или да ће вредност критеријумске функције бити већа од унапред задате вредности. Још један проблем може бити и при самој поставци модела, јер произвољно задате вероватноће ограничења могу да наруше конвексност скупа допустивих решења што може значајно закомпликовати проблем.

Начин на који се може доћи до одговарајуће расподеле случајних променљивих је посматрање историјских података и на основу тога одредити стварну расподелу променљивих, али као што смо о томе већ раније говорили, нико не може гарантовати да ће се ствари из прошлости понављати на апсолутно исти начин и у будућности.

Према томе, два основа проблема стандардног модела су осетљивост добијеног решења на неизвесне расподеле вероватноћа, као и дефинисање великог броја различитих сценарија према претпостављеним расподелама и примена добијених решења на реални проблем. У литератури су предложена разна решења која се баве овим проблемима, а овде ћемо навести само један, и то моделе вероватносног задовољења ограничења са робусном расподелом вероватноћа (Vandenberghe, Boyd, & Comanor, 2007; Zymler, Kuhn, & Rustem, 2013). Ови модели претпостављају да је расподела вероватноћа унапред задати скуп где су познати математичко очекивање и варијанса, што у одређеној мери олакшава решавање оптимизационих модела. Један од могућих приступа решавања модела је и симулациони приступ.

2.4.2 Симулациони приступ решавања проблема вероватносног задовољења ограничења

Поред уобичајених потешкоћа око моделовања проблема вероватносног ограничења у вези са одређивањем расподеле случајних променљивих, врло често је тешко рачунски решити одговарајуће моделе.

У таквим ситуацијама може се десити да је једини начин да се провери да ли је неко ограничење задовољено са задатом вероватноћом је коришћењем Монте Карло симулације (Nemirovski & Shapiro, 2006; Pagnoncelli, Ahmed, & Shapiro, 2009). Други врло реалан проблем је нарушавање конвексности скупа допустивих решења. Да би се задати модел ефикасно решио потребно је, дакле, да буду испуњена оба услова, могућност ефикасног рачунског решавања проблема и конвексан скуп допустивих решења, што је заиста редак случај у пракси.

Ошти приступ израде рачунски решивих апроксимација проблема вероватносног задовољења ограничења је сценарио приступ заснован на узорковању уз помоћ Монте Карло симулације. Предност ове методе је у њеној општости, тј. расподеле случајних променљивих нису ни у којем смислу ограничене, чак није потребно ни познавати расподеле случајних променљивих, једино што нам је потребно су узорци ове расподеле. Овај приступ је рачунски решив под условом да узорак N, није превелик. Наравно, потребно је одредити величину узорка, а да при том проблем и даље буде рачунски решив у разумном времену.

2.5 Генерисање стабла сценарија као приступ решавања стохастичких проблема

Генерисање више сценарија за један стохастички проблем представља основну технику решавања ових проблема. Наравно, основно полазиште за генерисање сценарија је расподела случајних променљивих, а у зависности од дискретизације посматране расподеле добићемо и одговарајући број сценарија. Ефикасна генерација сценарија је централни проблем стохастичког програмирања уопште (Chen, Mehrotra, & Papp, 2015; Dupačová, Growe-Kuska, & Romisch, 2003; Shapiro, Dentcheva, & Ruszczyński, 2009). Кључно је имати на уму рачунску решивост сценарија у разумном времену.

Најједноставнији начин на који се може направити стабло сценарија је да направимо неколико узорака из основне расподеле случајних променљивих. Добићемо дискретне расподеле и стабло сценарија које је приближно расподели коју смо разматрали на почетку. Иако делује као интуитиван и потпуно исправан приступ, наићи ћемо на два основна проблема.

Ако желимо да што верније прикажемо оригиналну расподелу и захтевамо да дискретизациона грешка буде мала добићемо огромно стабло сценарија тако да је готово немогуће рачунски решити оптимизациони проблем у реалном времену.

Са друге стране, ако желимо мање стабло сценарија и да релативно лако решимо оптимизациони модел добићемо лошију представу оригиналне расподеле и знатно већу дискретизациону грешку па се доводе у питање добијена решења таквих сценарија.

Такође, често при изградњи модела не познајемо или не разумемо у потпуности расподелу, тако да се поставља и питање како направити ваљани узорак, односно, одакле узорковати.

Логичан избор је окренути се прошлости, односно историјскм подацима о посматраном догађају. Овде се намеће питање да ли је исправно користити податке из прошлости и на основу њих одредити расподеле случајних промењивих и предвиђати будућност. Уколико је све чиме располажемо о неком догађају прошлост, односно историјски подаци, а немамо разлога да верујемо да ће се будућност значајно разликовати. онда можемо користити те податке као расподеле случајних промењивих при генерисању сценарија.

Суштина проблема се дакле своди на добру дискретизацију. Добра дискретизација би требало да се понаша као да смо користили оригиналну расподелу. Овај приступ делује као исправан и логичан, али без обзира што се већина приступа генерисања сценарија ослања на дискретизацију која ће стабла сценарија учинити што сличнијим оригиналној расподели, поставља се питање да ли је то заиста неопходно нашем стохастичком програму. Ако разматрамо неки мало обимнији проблем, суочићемо се са два наведена проблема, или ћемо имати превише сценарија које не можемо решити у разумном временском року, или ћемо добити лоше решење модела.

Постоји начин да се ови проблеми превазиђу, а односи се пре свега на квалитет дискретизације. Што нам је више параметара, односно аспеката расподеле битно (очекивана вредност, варијанса, екстремне вредности итд.) потребно нам је и више сценарија да бисмо направили добру дискретизацију. Међутим, треба се запитати да ли су нам заиста потребни апсолутно сви парамтери неке расподеле. Можда је довољно наћи само први и други моменат неке расподеле на основу којих ћемо добити довољно добру дискретизацију за генерисање сценарија. Не треба, дакле, уопште разматрати делове расподеле који нису предмет оптимизационог проблема, а водећи рачуна само о параметрима који су нам битни за проблем, имаћемо мање сценарија и добити боља решења. Квалитет оптимизационог проблема у стохастичкој оптимизацији зависи од посматраног проблема у ком се примењује (King & Wallace, 2012).

Циљ стохастичког програмирања и генерисања сценарија није направити савршену дискретизацију, већ довољно добру дискретизацију која ће нам омогућити да направимо ваљане сценарије који добро представљају посматрани реални проблем, који можемо решити у разумном временском року, а добијена решења су добра и применљива на реални проблем.

2.5.1 Стабилност генерисаних сценарија

У наставку ћемо се позабавити стабилношћу генерисаних сценарија као основном проблему узорковања из скупа неизвесних параметара. Упућујемо вас на књигу која коришћена као основа у целом овом поглављу (King & Wallace, 2012) где је ова тема објашњена једноставно и на приступачан начин.

Разматраћемо две врсте стабилности генерисаних сценарија, стабилност унутар узорка и стабилност изван узорка. Прво се односи на конзистентност самог модела, док се други односи на квалитет дефинисаног модела.

У наставку ћемо дискутовати о овим проблемима у двофазним моделима. Стога је стабло сценарија заправо само грм, и назваћемо га τ. Проблем онда можемо записати у следећем облику:

$$\min_x f(x;\tau),$$

где имамо скривене променљиве у другој фази $y(\tau)$, и где је имплицитно да ћемо морати да ускладимо очекивања у односу на друге аргументе, то јест, са дискретним расподелама описане стаблом τ. Прави проблем, који по претпоставци не можемо да решимо, изгледа овако:

$$\min_x f(x;\xi), \quad (4.2)$$

Претпоставимо да имамо процедуру генерисања сценарија која је сама по себи случајна, то јест, не добијамо исто стабло сценарија сваки пут када је покренемо са потпуно истим подацима. Ово је типично за сваку процедуру засновану на узорковању, али такође важи и за многе друге.

Претпоставимо сада да желимо да покренемо процедуру за генерисање сценарија неколико пута над истим подацима, и да добијемо неколико различитих стабала. Обележимо их са τ_i. Онда покренемо оптимизациони модел подједнако много пута, по једном за свако стабло, то јест, решимо „$\min_x f(x;\tau_i)$". Нека је оптимално решење x_i. Ако су вредности оптималне функције циља приближно исте у свим случајевима, тј. ако је:

$$f(\hat{x}_i;\tau_i) \approx f\left(\hat{x}_j;\tau_j\right)$$

онда постоји *стабилност унутар узорка*. Стабилност унутар узорка је заправо потпуно тренутно поуздано својство, али са практичне тачке гледиште претпоставићемо да је такође валидно и за уско повезане примере. Тако да ако постоји стабилност унутар узорка, свеједно је које ћемо стабло сценарија користити, и последично који ћемо стохастички програм решити, једноставно ћемо узети свој алгебарски модел, своје расподеле, и урадити прву процедуру генерисања сценарија, а потом и оптимизациони проблем. И то ћемо урадити јер смо сигурни да ће вредности функције циља бити иста ако бисмо покренули процедуру опет са истим подацима: оно што радимо је конзистентно.

Стабилност изван узорка подразумева израчунавање праве вредности функције циља у односу на решења која смо добили из различитих стабла сценарија, са циљем да добијемо отприлике исту вредност, другм речима:

$$f(\hat{x}_i;\xi) \approx f\left(\hat{x}_j;\xi\right).$$

Почетна тачка је што прави проблем „$\min_x f(x;\xi)$" није био решив. Оно што треба да тестирамо у стабилности изван узорка је мало другачије, наиме да заменимо x са $\hat{x}_i$ али да онда узмемо очекиване вредности у односу на праве расподеле. Ово је у већини случајева изводљиво. Ако је ξ дискретно (али са превише сценарија како би решили одговарајући прави оптимизациони проблем) још увек можемо израчунати $f(\hat{x}_i;\xi)$ јер то само припада решавању великог броја проблема другог нивоа. Ако је ξ континуално (или дискретно али превише велико), очигледна метода би била да се нађе узорак из расподеле како би се апроксимирала права вредност.

У већини случајева, исправан начин да израчунамо вредност изван узорка је да направимо симулациони модел проблема. На тај начин израчунавања изван узорка неће само водити рачуна о чињеници да је τ апроксимација, већ и чињеницу да је и f највероватније само апрокисмација правог проблема. У симулационом моделу можемо додати више детаља него у оптимизационом моделу. Желимо да вредност решења функције циља и унутар и изван узорка буду исте.

Ако не можемо да проценимо $f(\hat{x}_i;\xi)$, постоји још један, слабији, тест изван узорка који можемо урадити: нека имамо два стабла сценарија τ_i, τ_jса одговарајућим оптималним решењима $\hat{x}_i, \hat{x}_j$. Ако је модел стабилан изван узорка, онда би требало да важи:

$$f(\hat{x}_i;\tau_j) \approx f(\hat{x}_j;\tau_i).$$

Зашто је битно постићи стабилност генерисаних сценарија? У суштини, могуће је постићи стабилност изван узорка, а не успети у томе унутар узорка. То би значило да упркос чињеници да различита стабла сценарија дају различита решења и оптималне вредности функције циља, права вредност, изван узорка, функције циља је готово увек иста.

Ако је то случај, могуће је наставити са тим моделом, али веома пажљиво. Решење које одговара произвољном стаблу би било добро решење као и оно које је засновано на било ком другом стаблу, али одговарајућа вредност оптималне функције циља не би била добра мера праве вредности. Требало би да је јасно да многе врсте тестирања модела могу бити веома тешке, чак и немогуће, у таквој поставци. У сваком случају, не препоручује се да се не настави са тестирањем модела који нема стабилност унутар узорка. Ако не постоји стабилност унутар узорка, онда нисмо добро разумели свој модел.

3 ОПТИМИЗАЦИОНО-СИМУЛАЦИОНИ ПРИСТУП РЕШАВАЊУ ПРОБЛЕМА СТОХАСТИЧКЕ ОПТИМИЗЦИЈЕ

На који начин се претходно наведене теоријске поставке и разматрање решавања проблема стохастичког програмирања и уопште третирања проблема неизвесности у матемтичком програмирању уклапају у дату тему и циљ ове дисертације. У овом поглављу даћемо одговор на ово питање и детаљно представити методологију оптимизационо-симулационог приступа кроз коришћење метода оптимизације и симулације у општој формулацији. Показаћемо на који начин је комбинован приступ робусне оптимизације, као и приступ вероватносног задовољења ограничења при чему се вероватноћа задовољења проверава методом симулације. Генерисање сценарија користимо при формулацији разлчитих детерминистичких замена оригиналног стохастичког проблема, користећи различите хеуристике, о чему ћемо детаљно говорити нешто касније.

Ради практичности и једноставности размотримо сада основни проблем алокације реусрса у општем случају:

$$(\max) \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

п.о.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \,, i = 1, \dots m$$

$$x_j \geq 0 \,, j = 1, \dots n$$

Сада ћемо овај основни проблем алокације ресурса поставити као проблем линеарног стохастичког програмирања у коме су сви параметри са леве стране у скупу ограничења, a_{ij}, стохастичке променљиве. Нови проблем изгледа овако:

$$(\max) \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

р.о.

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}\, x_j \ \leq \ b_i, i = 1, \dots m$$

$$x_j \geq 0\ , j = 1, \dots n$$

Такође, претпоставља се да је за свако a_{ij} позната одговарајућа функција расподеле. За потребе ове дисертације разматраћемо случај где параметри a_{ij} подлежу нормалној расподели са првим и другим моментом расподеле μ и σ. Овако постављен модел је слабо математички структуриран, јер за фиксиране вредности, оптимална решења $x^* = (x_1^*,\ \dots x_j^*)$ ограничења могу, али не морају бити задовољена, тј. оптимална решења x^* су можда допустива.

Постоји више приступа решавању овог проблема, а два која ћемо разматрати и која се комбинују у предложеном приступу су робусна оптимизација и вероватноћа задовољења ограничења. У наставку ћемо укратко размотрити оба приступа, робусну оптимизацију, као и други приступ решавању слабо структурираних проблема, шанса за задовољење ограничења.

3.1 Приступ робусне оптимизације

Циљ овог приступа је пронаћи такво оптимално решење x^* који је увек допустиво, без обзира на реализације случајних параметара у скупу ограничења, $\tilde{a}_{ij}$. Наравно, ово ће за последицу имати то да је вредност функције циља управо најнижа за робусно решење, па се овај приступ још назива и песимистичко решење или најгори могући случај.

Ово решење се добија тако што се за свако $\tilde{a}_{ij}$ узима његова вредност са краја нормалне расподеле μ+3σ, обележимо га овде са a_{ij}^M, па сада нови математички модел, који је детерминистички двојник оригиналног, слабо структурираног проблема изгледа овако:

$$(\max) \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{M} x_j \ \leq \ b_i, i = 1, \dots m$$

$$x_j \geq 0 \, , j = 1, \dots n$$

О робусном приступу смо већ говорили, како у теоријским, тако и у практичним радовима који су разматрани у прегледу литературе у овој области, изведени су закључци да је приступ робусне оптимизације углавном лако решив са рачунске стране, али да су овакве реализације случајних променљивих мало вероватне. То суштински значи да иако се песимистички приступ робусне оптимизације може посматрати као својеврсна заштита од ризика, вероватноћа да случајне расподеле узму најгоре могуће вредности је веома мала, а задатак стохастичке оптимизације није моделирати екстремне ситуације, него општу неизвесност проблема. Зато је и препорука комбиновати методу робусне оптимизације са неким другим приступом стохастичке оптимизације, што је управо оно што ћемо и урадити у наредном поглављу са применом приступа вероватносног задовољења ограничења.

3.2 Приступ вероватносног задовољења ограничења

Овај приступ полази од тога да се уместо оригиналног, слабо структурираног проблема постави задатак да се пронађе најбоље решење под условима да су вероватноће за задовољење ограничења већа од неких унапред задатих p_i. Нови математички модел са оваквом поставком проблема изгледа овако:

$$(\max) \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

$$Pr\left[\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \leq b_i\right] \geq p_i, i = 1, \dots m$$

$$x_j \geq 0\,, j = 1, \dots n$$

Решавање овог проблема представља изузетно тежак проблем нелинеарног програмирања чије је решавање веома комплексно и траје дуго, а лако се може десити да је практично немогуће пронаћи решење једног оваквог модела, што је раније наведено као један од недостатака оваквог приступа.

Зато предлажемо другачији приступ решавању овог проблема, односно решавање проблема снагом симулације.

Такође, користићемо сценарио приступ за генерисање више детерминистичких замена оригиналног проблема, са робусним, песимистичким, моделом као граничним случајем, што је начин на који интегришемо оба приступа у новој методи.

3.3 Генерисање сценарија и метода симулације

Приступ генерисања сценарија подразумева креирање сценарија који су одређени фиксним вредностима коефицијената $\tilde{a}_{ij}$. То значи да су за одређени број сценарија $s, s = 1, \dots S$ вредности коефицијената $\tilde{a}_{ij}$ детерминистичке вредности и износе a_{ij}^s, $i = 1, \dots m$, $j = 1, \dots n$.. Онда се за неки сценарио s решава следећи детерминистички проблем:

$$(\max) \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

p.o.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{s} x_j \ \leq \ b_i, i = 1, \dots m$$

$$x_j \geq 0\ , j = 1, \dots n$$

За сваки од сценарија добићемо оптимално решење $x^{s*} = (x_1^{s*}, x_j^{S*})$.

У следећој фази се суочавамо са два уобичајена проблема која су везана за генерисање сценарија и проверу вероватноће задовољености ограничења.

Први проблем је како одредити сценарије, односно како дефинисати детерминистичке двојнике оригиналног проблема. Посматрајући основне теоријске и практичне претпоставке можемо да поставимо оквир за генерисање сценарија. Тако на пример, ако за свако $\tilde{a}_{ij}$ узмемо да његова детерминистичка вредност буде a_{ij}^{M}, добија се робусно решење са одговарајућом вредности критеријумске функције $f(x^{M*})$, а добијено решење је допустиво.

Са друге стране, ако бисмо за свако $\tilde{a}_{ij}$ јузели да његова детерминистичка вредност буде са друге стране репа расподеле, μ-3σ, обележимо га ради једноставности овде са a_{ij}^{m}, добили бисмо $f(x^{m*})$, које би било веће од $f(x^{M*})$, али тако добијено решење би било практично потпуно недопустиво. Закључујемо да у зависности од изабране детерминистичке вредности стохастичког $\tilde{a}_{ij}$ зависи и добијено решење, односно вредност критеријумске функције и вероватноћа задовољења ограничења.

Ово нас доводи до следећег проблема који смо већ поменули, а то је провера вероватноће задовољења ограничења. Користићемо симулациони приступ, који се састоји из две фазе. Први је оптимизација детерминистичког двојника оригиналног проблема, односно сценарија где ћемо добити одговарајућа оптимална решења x_j^{s*} и одговарајуће вредности критеријумске функције. У другој фази проверавамо вероватноћу задовољења ограничења:

$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j^{s*} \ \leq \ b_i,$

при чему нам је познато x_j^{s*} и одговарајућа вредност критеријумске функције, а $\tilde{a}_{ij}$ су случајне вредности. Симулација се врши тако што се за свако $\tilde{a}_{ij}, i = 1, \dots m,\ j = 1, \dots n$ случајно изабере вредност из њене расподеле. Тако ћемо генерисати случајне вредности a_{ij}, тј. добићемо матрицу случајних вредности $\|a_{ij}\|$ и за ове вредности израчунати:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{s*},$$

које се потом упореди са b_i. Ако је $\xi_i \leq b_i$, ограничење је задовољено, и обрнуто. Симулација се понавља N пута, а онда се рачуна вероватноћа задовољења ограничења Π_i.

Имајући у виду наведене приступе, њихове предности и недостатке у наставку наводимо нови итеративни оптимизационо-симулациони приступ стохастичком програмирању који интегрише поменуте приступе и нуди нови приступ решавању ових сложених проблема.

3.4 Итеративни оптимизационо-симулациони приступ

Оптимизационо-симулациони приступи нису новост у оптимизацији, а њихов превасходни циљ је да интегришу оптимизационе методе са Монте Карло симулационим експериментима за решавање стохастичких проблема. Примера је заиста много, а овде наводимо само неке од коришћених приступа у разним областима: (Arnold & Yildiz, 2015; Buyukada, 2016; Dufo-Lopez, Pérez-Cebollada, Bernal-Agustín, & Martinez, 2016; Fu, Price, Zhu, & Hillier, 2015; Ge, Nolan, Gray, Goetz, & Han, 2016; Mavrotas, Pechak, Siskos, Doukas, & Psarras, 2015; Meeds & Welling, 2015; Mokhtari & Salmasnia, 2015; Zekri, Triki, Al-Maktoumi, & Bazargan-Lari, 2015; Vujošević, 1987). Број ових приступа се знатно увећао тек недавно, што је повезано са повећаним рачунским капацитетима рачунара.

Симулација се генерално користи као улаз за други део приступа - оптимизацију, и то за креирање детерминистичких двојника које треба решити.

Новина у предложеном приступу је та што се снага симулације користи како би се одредиле вероватноће за задовољење вероватносних ограничења. Симулације се користи за решавање најтежег дела проблема вероватносног ограничења, проналажење вероватноћа за задовољење ограничења, што је често основни узрок због чега су ови проблеми нерешиви.

Приступ се састоји из две фазе - оптимизационе фазе у ком се дефинишу сценарији и детерминистички модели се решавају до оптималности уз помоћ GLPK (GNU Linear Programming Kit - https://www.gnu.org/software/glpk/), и од симулационе фазе, где се проверава валидност сценарија тако што се вероватноћа задовољења ограничења потврђује уз помоћ симулације.

Основна идеја је да се оригинални, стохастички модел, замени са новим детерминистичким моделом који ће дати најбоља решења под условом да су ограничења задовољена са унапред дефинисаном вероватноћом. Генерисање новог детерминистичког двојника оригиналног проблема одговара једном сценарију. Очигледно, овај приступ ће захтевати дефинисање значајног броја сценарија које треба проверити како би се пронашао сценарио који ће испунити очекиване постављене вероватноће за задовољење ограничења. Добра страна приступа је што са сваком итерацијом иамо бољи увид и разумевање оригиналног проблема.

Друга фаза методе користи снагу симулације за проверу генерисаних сценарија из прве фазе методе.

Након решавања детерминистичког двојника оригинаног проблема у првој фази , добијамо оптимално решење управљачких променљивих. Ово нам је потребно да бисмо одредили вероватноћу за задовољење ограничења. Потом се генерише случајна вредност за сваки стохастички параметар. Вредности се добијају из предефинисаног скупа са познатом расподелом за сваки стохастички параметар. На овај начин добијамо матрицу случајних детерминистичких вредности из стохастичких параметара, или дрigим речима, случајност стохастичких параметара се симулира на овај начин. Да ли су ограничења задовољена са одговарајућом вероватноћом се проверава узимајући у обзир детерминистичке вредности стохастичких параметара и оптимална решења генерсианих сценарија из прве фазе.

Ове симулације се понављају N пута, при чему се генерише N ових матрица, потом се добијене вредности убацују у ограничења и затим следи провера да ли су ограничења задовољена или не. Вероватноћа задовољења ограничења може да се израчуна пребројавањем колико су пута ограничења били задовољења у укупном броју дефинисаних сценарија користећи следећу формулу:

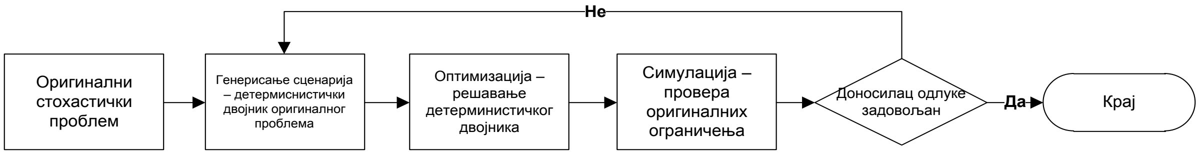
$$\Pi_i = \frac{\text{Број случајева када је ограничење било задовољено}}{\text{Укупан број случајева N}} * 100$$

Ова вероватноћа се рачуна за свако појединачно ограничење.

Наш приступ је валидан под основном претпоставком вероватносног задовољења ограничења, а то је да је доносилацц одлуке спреман да прихвати одређени ризик да неко ограничење неће бити задовољено. Заузврат, вредност критеријумске функције ће бити боља него када би доносилац одлуке уклонио сву неизвесност из модела и прихватио робусни приступ. Робусни приступ се оријентише на најгори могући сценарио, при чему је добијени детерминстички двојник имун на неизвесност у односу на оригинални проблем, али је вредност критеријумске функције у том случају најнижа. Уколико доносилац одлуке није задовољан добијеним решењем, генерише се нови сценарио, тј. нови детерминистички двојник оригиналног проблема и цела процедура се понавља. Нови сценарио се формулише у зависности од резултата претходног сценарија, а циљ је пронаћи такав сценарио који задовољава минималне критеријуме које је поставио доносилац одлуке.

Алгоритам приступа је графички представљен на Слици 1.

Слика 1 Оптимизационо симулациони приступ



Главни проблем целог приступа је генерисање сценарија, тачније, како дефинисати нови детерминистички двојник оригиналног проблема. Ово је иначе и основни проблем генерисања сценарија у стохастичком програмирању о којем смо већ говорили, и проблем проналажења одговарајуће мере дискретизације расподеле оригиналног стохастичког проблема. Не постоји стриктно правило за генерисање сценарија, а наш предлог је да се користе хеуристике. Које појединачне хеуристике ће бити коришћене зависи од природе проблема који се разматра, области у којој се примењује, претпостављене расподеле случајних података и искуства и преференција доносиоца одлуке.

Ефикасност и ефективност оптимизационо-симулационог приступа у великој мери зависи од хеуристика за генерисање сценарија. Разлог лежи у сложености стохастичких проблема, односно у неограниченом броју могућих сценарија које треба размотрити за релативно велики број случајих параметара. Може се рећи да су хеуристике тачка ослонца за цели метод који овде прелажемо.

С тим у вези наставићемо са неколико основних дефиниција хеурстика и њиховом основном наменом како бисмо боље приказали њихову сврху у нашем приступу и као увод у херуистике које смо дефинисали при решавању конкретног проблема у овој дисертацији.

Хеуристике су једноставна правила која се користе за решавање сложених неизвесних ситуација (Czerlinski, Gigerenzer, & Goldstein, 1999)]; оне су „ефикасни когнитивни процеси који игноришу инфомрације” (Gigerenzer & Brighton, 2009) као и „когнитивне пречице које се појављаују када су доступне информације, време и капацитета обраде ограничени” (Newell & Simon, 1971).

Хуеристике играју кључну улогу када се суочавамо са сложеним проблемима у условима високе неизвесности (Helfat & Peteraf, 2014; Mousavi & Gigerenzer, 2014). Једноставне хеуристике су пожељне у предвидивим ограничењима, али су зато апсолутно неопходна у неизвесним окружењима (Bingham & Eisenhardt, 2011; Bruni, Beraldi, & Conforti, 2015; Crainic, Gobbato, Perboli, & Rei, 2016; Davis, Eisenhardt, & Bingham, 2009; Goldstein & Gigerenzer, 2002)

Ипак, хеуристике нису пречице за решавање сложених проблема на рачун скраћеног рачунског времена, већ се снажно ослањају на информације из окружења проблема (Beltran-Royo, Escudero, & Zhang, 2016; Hogarth & Karelaia, 2007; Payne, Bettman, & Johnson, 1993). Прихватањем ових основних чињеница, хеуристике могу бити еколошки рационалне. Еколошка рационалност хеуристика је одређена преко два кључна фактора, структуре окружења и недостака рачунске брзине и снаге да се проблем реши егзактно због ограничене рационалности (Simon, 1990).

Еколошка рационалност лежи у основи брзе и ефикасне парадигме која пружа позитиван поглед на хеуристике, што је гледиште које користимо у овом истраживању. Хеуристике које су коришћене ће бити приказане у делу поставке проблема.

4 ПОСТАВКА СТОХАСТИЧКОГ ПРОБЛЕМА ОГЛАШАВАЊА

Пример примене новог итеративног оптимизационо-симулационог приступа ће бити приказан на примеру из области маркетинга, прецизније из области оглашавања у штампаним новинама. Пре дефинисања самог модела и реалних података који су коришћени у истраживању, направићемо кратак осврт на релевантну област и примену метода операционих истраживања у решавању сличних проблема.

4.1 Штампани медији и оглашавање

Медији се генерално могу поделити у две велике групе: електронске и штампане медије. У електронске медије се у литератури углавном убрајају радио, телевизија и интернет. Штамапни медији обухватају различите врсте новина и часописа - дневне новине, недељници, месечници, часописи из разних области попут спорта, здравља, лепоте, моде итд.

Штамапани медији су најстарији медији, и били су први медиј који је прихватио и дозволио рекламирање кроз свој садржај. Заправо, прве маркетиншке агенције су основане са циљем куповине простора у штампаним медијима за креирање маркетиншких кампања.

Иако можда делује да штампани медији губе трку са електронским медијима, пре свега са интернетом и телевизијом, реалност је заправо мало другачија и не толико очигледна. Чињеница је да је за разлику од штампаних медија, гледаност и достизање жељене циљне групе са електронским медија лакше постићи и пратити (број кликова, гледаност, пипл метри, прецизно одређивање групе којој се порука преноси). Ипак, штампани медији и даље имају одређене предности над електронским медијима. У својој књизи (Katz, 2008) наводе предности и недостатке штампаних медија, а овде ћемо се осврнути посебно на новине и часописе:

Предности новинског рекламирања:

- Правовременост извештавања: Новине су по својој намени информативног карактера и садрже углавном вести и новости и читаоци их користе како би на време били обавештени о свим информацијама од значаја. Занимљиво је да истраживања показују да људи углавном користе рекламе из новина при доношењу одлука о томе где ће и шта куповати и видели су их као значајнији облик рекламирања од телевизије. Ово је још један прилог значајности новинског оглашавања.
- Пожељна публика: Књига наводи неколико истраживања која дефинишу читалачку пубику новина као оне који су углавном боље образовани, имају више приходе и купују квалитетније производе. Такође, читаоци најчешће отворе и прочитају око две трећине свих страница новина што пружа могућност оглашивачима да издају детаљније огласе са већом вероватноћом да ће достићи жељену публику.
- Утицај у уређивању: Очигледна предност при оглашавању у новинама је могућност избора секције у новинама у којој ће се поставити оглас и прецизно таргетирање будућих купаца
- Могућност локалног/регионалног оглашавања: Локалне и регионалне новине пружају могућност прецизног географског оглашавања и достизања тачно жељене групе у оквиру неког географског региона.

Недостаци новинског рекламирања:

- Кратки животни век новина: Новине имају кратак животни век и на крају дана се најчешће одбацују. То значи да је и животни век рекламе једнак животном веку новина и уколико потенцијлани купац није видео оглас тог дана то значи да неће бити друге шансе.
- Активни читаоци: Поред кратког животног века новина читаоци такође врло лако могу да изаберу шта желе да читају у новинама за разлику од телевизијске и радио публике. Посебна пажња се мора посветити реклами која мора да буде интересантна и примамљива за читаоца.

Предности оглашавања у часописима:

- Префињена публика: Једна од највећих предности оглашавања у часописима је читалачка публика која спада у најпожељењније демографске групе: факултетски образовни читаоци са високим примањима.
- Задобијање пажње читаоца: Часописи покривају тачно одређене теме тако да су и читаоци веома усмерени на садржај који им се нуди. У књизи се такође тврди да читаоцима мање сметају рекламе у часописима, него нпр. телевизијске рекламе. Реакције читалаца се доста разликују од реакција на телевизијске или интернет рекламе тако да се информације из часописа задржавају дуже код читалаца и читаоци им генерално више верују.
- Дуг животни век: Велика предност часописа је њихов дуг животни век. Док се новине углавном баце већ истог дана, а телевизијски програм траје најдуже пар часова, часописи се у просеку задржавају код читаоца 4 недеље и дуже. Поред тога што пружа могућност поновног читања реклама, такође отвара могућност достизања тзв. секундарне публике, што потврђује и чињеница да један часопис најчешће види четворо људи.

Недостаци оглашавања у часописима:

- Дуг циклус планирања: Сам технолошки процес припреме штампе захтева да се садржаји доставе зантно раније него што ће бити објављени. То може у знатној мери утицати на ефекат рекламирања и захтева пажљиво и дугорочно планирање маркетиншких кампања.
- Високи трошкови достизања читалаца: Часописи су по својој природи уско оријентисани на одређене теме које обрађују, што само по себи ограничава број потенцијалних читалаца. У поређењу са другим облицима оглашавања, нарочито електронским, часописи имају највишу цену коштања достизања читалаца. Овде можемо видети како и неке предности часописа могу постати и његов недостатак за оного ко планира буџет и рекламну кампању.

Штампани медији су задржали значајно место у оглашавању при чему поседују неке јединствене предности које електронски медији не могу постићи. Штампани медији се користе у комбинацији са електронским медијима, али и као самостално средство маркетиншких кампања. Они имају своје место у оглашавању и маркетиншким кампањама и очекује се да ће штампани медији бити снажан вид оглашавања и у будућности.

У наставку ћемо се осврнути на примену метода операционих истраживања у оглашавању уопште и дати неколико примера истраживања који обрађују планирање и реализацију маркетиншких кампања у штампаним медијима.

4.2 Примена метода операционих истраживања у оглашавању

Технике операционих истраживања су први пут употребљена у маркетингу са појавом чувене теореме оптимизације маркетинг микса 1954. године (Dorfman & Steiner, 1954). Линеарно програмирање и циљно програмирање су постали први избор када је у питању примена операционих истраживања у маркетингу, док су Маркови модели различите симулационе технике, укључчујући и теорију игара, примењени 60-их и 70-их година прошлог века (Kotler, 1963; Montgomery, 1970).

Чак и у овим почецима интеркације између операционих истраживања и маркетинга, истраживачи су запазили стохастичку природу маркетиншких проблема кроз коришћење теорије доношење одлука у условима неизвесности (Pratt, Raiffa, & Schlaifer, 1995).У наредним годинама није много тога урађено на пољу интеграције операционих истраживања и маркетинга.

Међутим, у последње време, због значајно увећаних рачунских капацитета рачунара, моделирање неизвесности кроз различите апроксимационе технике је нашло своје место у примени операционих истраживања у пољу маркетинга (Beltran-Royo et al., 2016; Illner & Ma, 2016; P. E. Rossi & Allenby, 2003)

Последично, стохастичко програмирање није новина у маркетингу, али генерално није било у фокусу истраживача на почетку. Ипак, ова област је изазвала нови полет у истраживању у различитим обласитма примене у маркетингу.

Као део маркетинг микса, оглашавању је посвећена посебна пажња. Ипак, истраживачи су сматрали ефекат оглашавања на продају у најмању руку неизвесним. Ово мишљење је формирано због бриге да оглашавање можда уопште нема утицаја на продају. Међутим, истраживања (Clarke, 1976; de Vries, Gensler, & Leeflang, 2017; Hartnett et al., 2016; Leone & Schultz, 1980; Vidale & Wolfe, 1957) су потврдила да оглашавање има позитиван ефекат на продају, чиме су све сумње у ефективност ових модела и њихова примена у доношењу одлука одбачене. Наравно, значајни напори су уложени у развој модела који могу да оптимизују алокацију буџета за оглашавање, што је такође задатак овог истраживања.

Овде ћемо скренути пажњу на три рада која се бави сличном тематиком и на различит начин обрађују неизвесност у подацима.

У раду (Bhattacharya, 2009) представљен је модел вероватносно задовољења ограничења циљног програмирања за проблем планирања оглашавања. Модел је дизајниран са циљем да се одабере број огласа које треба поставити у различите медије уз оптималну алокацију буџета. Циљ модела је постићи максимално досегнуће (*reach*) до жељених клијената од интереса кроз различите медије у оквиру дозвољеног буџета уз поштовање максималног и минималног броја огласа за поједине медије. Медији који су узети у обзир су и штампани и електронски медији.

Параметар који представља досегнуће (*reach*) је случајна променљива, односно стохастички параметар, па је модел формулисан као проблем вероватносног задовољења ограничења. Стохастички параметар је посматран као променљива за коју су познате очекивање и стандардна девијација. Проблем је решен применом циљног програмирања, уз испуњење три од четири постављена циља.

У раду (Kwak, Lee, and Kim, 2005) представљен је модел за избор стратегије оглашавања у штампаним медијима који разматра опције индустријских и потрошачких производа. Модел који је коришћен за селекцију медија представља модел мешовитог целобројног циљног програмирања. Циљ рада је да се одреди број реклама за изабране медије уз оптималну расподелу доступног буџета. И у овом раду је уочена случајна природа појединих параметара модела, тако да је добијено решење детаљно анализирано и извршене су анализе осетљивости добијених решења како би се проверила флексибилност дефинисаног модела.

У раду (Buratto, Grosset, and Viscolani, 2006) посматрано је тржиште са коначним бројем сегмената под претпоставком да постоји неколико канала за оглашавање са различитим спектром и ефикасношћу. За сваки канал је најпре одређен оптимална политика оглашавања, а потом је изабран канал који ће донети максимални профит. У раду се разматрају новине на тржишту Италије, а циљ је пронаћи одговарајуће новине за рекламну кампању за дефинисане тржишне сегменте. Избор је разматран за четири различита сценарија и за сваки је дат оптималан распоред изабраних новина за маркетиншку кампању.

Проблем који се разматра у овој дисертацији се односи на избор оптималног броја огласа које треба пласирати у различите новине. Осим очигледног задатка одређивања броја огласа које треба пласирати у одговарајуће новине, потребно је одредити и њихову величину и позицију за сваке новине, а да се при том достигне жељени број прегледа и утицаја како на укупну популацију, тако и у оквиру циљаних група.

Циљ је достићи све наведено уз што је ниже трошкове могуће. Дневне, недељне и месечне новине су опсег разматрања, као и њихови укупни прегледи и рејтинзи за циљне групе. Рејтинзи су подаци са стохастичком природом и за њих је опажена и претпостављена нормалана расподела стохастичких параметара. Проблем је формулисан као мешовити целобројни стохастички модел.

4.3 Формулација математичког модела оглашавања

Нотација модела:

I - Скуп новина (дневне, недељне, месечне)

J - Скуп могућих позиција у свим новинама

P_i - Скуп могућих позиција за i -те појединачне новине

T - Скуп циљних група

S - Минимални број јединствених прегледа огласа

c_{ij} - Цена за j -ту позицију у i -тим новинама

v_i - Број прегледа i -тих новина

r_{ik} - рејтинг i -тих новина за k -ту циљну групу

p_j - проценат видљивости за j -ту позицију огласа

t_k - Циљани рејтинг за k -ту циљну групу

m_i - минимални број огласа у i -тим новинама

h_i - максимални број огласа у i -тим новинама

g_j - минимални број огласа на j -тој позицији

d_j - максимални број огласа на j -тој позицији

x_{ij} - Број j -тих огласа у i -тим новинама

Математички модел

У складу са дефинисаном нотацијом, у наставку је приказан математички модел

Минимизирати

$$f(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in P_i} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

при ограничењима

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in P_i} v_i p_j x_{ij} \geq S, \qquad (2)$$

$$\Pr\left[\sum_{i\in I}\sum_{j\in P_i} r_{ik}x_{ij} \geq t_k\right] \geq p_k, k \in T, \qquad (3)$$

$$\sum_{j\in P_i} x_{ij} \geq m_i,\ i \in I, \qquad (4)$$

$$\sum_{j\in P_i} x_{ij} \leq h_i,\ i \in I, \qquad (5)$$

$$\sum_{i\in I | j\in P_i} x_{ij} \geq g_j,\ j \in J, \qquad (6)$$

$$\sum_{i\in I | j\in P_i} x_{ij} \leq d_j,\ j \in J. \qquad (7)$$

Ограничење (2) осигурава минимални захтевани број прегледа огласа; ограничење (3) је стохастичко ограничење које дефинише жељени рејтинг за сваку циљну групу; ограничења (4) и (5) дефинипу минимални, односно максимални број могућих огласа у свим новинама, респективно; и ограничења (6) и (7) дефинишу максимални и минимални укупни број огласа који се могу пласирати на одређене позиције у новинама, респективно.

Стохастичка природа модела огледа се у једначини (3), и њеном скупу ограничења. Очигледан разлог је стохастички параметар r_{ik}, који представља рејтинге новина за сваку циљну групу. Ови рејтинзи су одређени на основу броја одштампаних новина (тиража), репутације и традиције новина, али и од позиције огласа у посматраним новинама. Метода која је коришћена да се израчунају ови параметри није фокус истраживања, али за сврху нашег истраживања, посматрамо случај где случајни параметри имају нормалну расподелу са очекиваном вредношћу - μ и варијансом - σ .

Постоји 14 различитих циљних група што даје скуп од 14 стохастичких ограничења које треба разматрати, Циљне групе, као и скуп стохастичких ограничења се могу класификовати у четири групе:

- Пол: Прва два ограничења дефинишу минимални жељени рејтинг који треба достићи у оквиру мушке и женске популације,

- Старост: разматрамо шест различитих старосних категорија, односно исти број ограничења која дефинишу минимални жељени рејтинг који треба достићи у оквиру сваке старосне групе,
- Географска локација: модел разликује три географске локације где се новине продају, стога су дефинисани минимлани жељени рејтинзи које треба остварити у оквиру задатих региона,
- Образовање: разматрамо три образовна нивоа, и за њих дефинишемо минимилани жељене рејтинге.

Доносиоци одлука углавном захтевају висок степен задовољења стохастичких ограничења. Према томе и сама ограничења су подељена у две групе. Прва група је такозвана група тврдих ограничења, и за њих доносилац одлуке захтева да та ограничења буду увек задовољена без обзира на реализације случајних параметара, што значи да је дефинисана вероватноћа задовољења ограничења p_k = 1. Друга група ограничења је група меких ограничења за које је доносилац одлуке спреман да прихвати одређени ризик да неће бити задовољена. Углавном је дефинисана вероватноћа задовољења ограничења $p_k \geq$ 0.9-0.95.

Идеја поделе ограничења у моделу на тврда и мека је први пут уведена у (Kendall, 1975), и исти принципи се користе и у нашем истраживању. Наравно, могуће је даље делити групе ограничења, али је ово генерални приступ који је коришћен у нашем истраживању.

У нашем моделу, скуп ограничења дефинисаних једначином (3) у формулацији модела су вероватносна ограничења са дефинисаном вероватноћом задовољења ограничења p_k.

Доносилац одлуке одређује вероватноћу p_k за свако ограничење. Доносилац одлуке је власник ланца супермаркета и стога жели да оглашавањем таргетира тачно одређену групу купаца која ће му донети највећу зараду. Његова циљна група су женске особе, старости између 40 и 49 година из географског региона G1 са универзитетским образовањем. Преведено на речник модела, друго, шесто, девето и четрнаесто ограничење морају имати највиши ниво задовољеа вероватноће p_k. Доносилац одлуке је спреман да прихвати ризик који је мањи од

0.005 да поменута ограничења неће бити задовољена, што значи да вероватноћа задовољења ограничења за та ограничења треба да буде виша од 0.995. За сва остала вероватносна ограничења доносилац одлуке је спреман да прихвати ризик 0.05, тј. вероватноћа задовољења ограничења треба буде већа или једнака 0.95. Ово је представљено у табели:

Табела 1 Вероватноћа задовољења меких ограничења

Ограничење	**Пол**		**Старост**						**Географска регија**			**Образовање**		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_k	≥0.95	**>0.995**	≥0.95	≥0.95	≥0.95	**>0.995**	≥0.95	≥0.95	**>0.995**	≥0.95	≥0.95	≥0.95	≥0.95	**>0.995**

Заузврат, доносилац одлуке захтева најмање 15% мању потрошњу буџета него да је примењен робусни приступ. Може се рећи да је размена изражена кроз пристајање на одређени ризик за бољу вредност критеријумске функције.

4.4 Реални подаци коришћени у моделу

Посматрамо проблем маркетиншке кампање за робу широке потрошње. Циљ је постићи тражени број виђења огласа на нивоу целе кампање, као и постизање одговарајућег рејтинга за сваку циљну групу са што мање средстава. Стохастичка природа проблема огледа се кроз параметар r_{ik} који представља оцењени рејтинг новине за сваку циљну групу. Кампања ће трајати 3 месеца и за то време потребно је дати одговарајући број огласа на тачно одређене позиције по новинама. На располагању имамо 16 новина, и за сваку од њих дати су нам одговарајући параметри.

Укупан број жељених виђења огласа за целу камапњу износи S = 37.450.000

Циљани рејтинг за сваку циљни групу t_k је дат у следећој табели:

Табела 2 Жељени рејтинзи циљних група

muš	žene	12-19	20-29	30-39	40-49	50-65	66+	vojv.	bg	cen.sr.	o.šk.	sr.šk.	fakult.
t1	*t2*	*t3*	*t4*	*t5*	*t6*	*t7*	*t8*	*t9*	*t10*	*t11*	*t12*	*t13*	*t14*
2.000	1.710	900	1.950	2.195	2.010	1.900	1.550	1.850	2.400	1.600	500	1.150	2.250

Вредности параметара v_i - Број прегледа i -тих новина:

Табела 3 Број прегледа новина у кампањи

Назив новина	параметар	Број прегледа
blic	v_1	733.108
blic žena	v_2	605.920
kurir	v_3	575.105
вечерње новости	v_4	456.832
alo	v_5	413.115
informer	v_6	317.396
политика	v_7	218.009
24 sata	v_8	165.025
спортски журнал	v_9	131.127
story	v_{10}	177.945
Gloria	v_{11}	142.819
hello	v_{12}	120.889
lisa	v_{13}	69.750
mens health	v_{14}	111.572
joy	v_{15}	84.824
lepota i zdravlje	v_{16}	377.773

Вредности параметра p_j - проценат видљивости за j -ту позицију огласа

Табела 4 Вероватноћа прегледа огласа по позицијама у новинама

Параметар	**Вероватноћа**
p_1	1
p_2	1
p_3	1
p_4	0,2
p_5	0,3
p_6	0,3
p_7	0,4
p_8	0,3
p_9	0,3
p_{10}	0,2
p_{11}	0,1
p_{12}	0,1
p_{13}	0,1
p_{14}	1
p_{15}	1
p_{16}	0,8
p_{17}	0,7
p_{18}	0,7
p_{19}	0,5
p_{20}	0,4
p_{20}	0,4
p_{22}	0,3
p_{23}	0,25
p_{24}	0,3
p_{25}	0,2
p_{26}	0,12
p_{27}	0,14
p_{28}	0,15
p_{29}	0,8

Вредности параметра c_{ij} - цена за j -ту позицију у i -тим новинама:

Табела 5 Цене огласа по позицијама за све новине

c_{ij}	blic	blic žena	kurir	веч ново сти	alo	infor mer	пол ити ка	24 sata	спор жур нал	story	Gloria	hello	lisa	mens health	joy	lepota i zdravlje
1	0	260 764	0	0	0	0	0	0	0	204 000	268 800	336 000	156 000	216 000	336 000	408 000
2	0	260 764	0	0	0	0	0	0	0	192 000	222 000	276 000	150 000	204 000	300 000	384 000
3	0	295 612	0	0	0	0	0	0	0	210 000	331 200	360 000	180 000	300 000	480 000	564 000
4	152 880	0	160 720	0	811 20	115 500	0	149 460	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	201 880	203 840	101 920	144 900	0	187 620	0	0	0	0	0	0	0	0
6	231 280	0	0	0	122 720	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	179 000	0	101 902	170 000	936 00	700 00	205 000	0	792 0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	150 000	0	400 00	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	140 000	0	470 8	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	500 00	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	943 00	973 50	573 30	577 50	0	648 60	0	0	0	0	0	0	0	0
12	112 700	0	118 450	122 720	720 30	724 50	0	814 20	0	0	0	0	0	0	0	0
13	135 700	0	0	147 500	867 30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	834 760	438 612	820 000	740 000	400 200	0	0	540 000	0	264 000	356 400	384 000	204 000	276 000	498 000	600 000
15	380 000	0	0	347 200	199 000	0	0	258 000	970 00	186 000	214 800	264 000	144 000	192 000	300 000	384 000
16	0	0	0	182 900	0	0	0	0	490 00	0	0	168 000	0	0	192 000	240 000
17	199 000	147 806	0	0	102 000	0	0	135 000	490 00	102 000	138 600	168 00	840 00	108 000	192 000	240 000
18	199 000	147 806	0	182 000	102 000	0	0	0	490 00	102 000	138 600	168 00	840 00	108 000	192 000	240 000
19	100 000	769 07	0	930 00	504 00	0	0	676 50	240 00	720 00	828 00	900 00	540 00	0	540 00	156 000
20	0	0	0	0	0	0	0	0	240 00	0	0	900 00	0	0	540 00	156 000
21	100 000	769 07	0	930 00	504 00	0	0	676 50	0	0	0	900 00	540 00	0	540 00	156 000
22	0	104 546	0	0	0	0	0	0	0	900 00	972 00	120 000	660 00	780 00	132 000	198 000
23	0	104 546	0	130 200	0	0	0	0	0	900 00	0	120 000	660 00	780 00	132 000	198 000
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	900 00	972 00	120 000	660 00	780 00	132 000	198 000
25	0	516 72	0	0	252 00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	541 20	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	108 240	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	170 000	0	0	0	0	0	0	0	0
29	350 000	0	0	255 750	986 70	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Расподела стохастичких параметара r_{ik} који дефинише рејтинг новина за сваку циљну групу и који подлежу нормалној расподели са првим и другим моментом је дат у наставку:

Табела 6 Рејтинг новина по циљним групама (стохастички параметри и одговарајућа расподела)

r_{ik}	muš	žene	12-19	20-29	30-39	40-49	50-65	66+	vojv.	bg	c.srb	o.šk.	sr.šk.	fak.
blic	[12.74, 0.89]	[10.45, 0.73]	[4.53, 0.32]	[13.30, 0.93]	[15.17, 1.06]	[13.57, 0.95]	[11.47, 0.80]	[7.20, 0.50]	[13.07, 0.91]	[12.08, 0.85]	[10.50, 0.74]	[2.82, 0.20]	[6.79, 0.48]	[13.49, 0.94]
blic žena	[2.37, 0.17]	[16.28, 1.14]	[4.44, 0.31];	[8.04, 0.56]	[10.77, 0.75]	[13.41, 0.94]	[11.20, 0.78]	[6.76, 0.47]	[10.27, 0.72]	[10.57, 0.74]	[9.23, 0.65]	[1.82, 0.13]	[5.17, 0.36]	[10.52, 0.74]
kurir	[10.28, 0.72]	[7.93, 0.56]	[2.21, 0.15]	[9.14, 0.64]	[10.20, 0.71]	[11.32, 0.79]	[9.78, 0.68]	[7.34, 0.51]	[10.03, 0.70]	[12.07, 0.84]	[8.23, 0.58]	[2.50, 0.18]	[4.84, 0.34]	[8.51, 0.60]
веч новости	[8.67, 0.61]	[5.83, 0.41]	[1.95, 0.14]	[4.99, 0.35];	[6.16, 0.43]	[7.21, 0.50]	[8.61, 0.60]	[9.85, 0.69]	[7.29, 0.51]	[11.45, 0.80]	[6.78, 0.47]	[1.72, 0.12]	[3.10, 0.22]	[8.34, 0.58]
alo	[6.10, 0.43]	[6.90, 0.48]	[2.13, 0.15]	[4.96, 0.35];	[6.00, 0.42]	[7.13, 0.50]	[7.88, 0.55]	[6.85, 0.48]	[6.21, 0.43]	[5.71, 0.40]	[6.05, 0.42]	[1.26, 0.09]	[2.60, 0.18]	[4.16, 0.29]
informer	[5.80, 0.41]	[4.26, 0.30]	[1.95, 0.14]	[3.12, 0.22];	[4.37, 0.31]	[4.92, 0.34]	[6.71, 0.47]	[6.11, 0.43]	[3.80, 0.27]	[7.10, 0.50]	[3.67, 0.26]	[1.64, 0.11]	[3.08, 0.22]	[4.61, 0.32]
политика	[3.57, 0.25]	[3.31, 0.23]	[1.18, 0.08]	[1.89, 0.13];	[2.43, 0.17]	[2.80, 0.20]	[3.63, 0.25]	[6.84, 0.48]	[2.09, 0.15]	[8.68, 0.61]	[1.72, 0.12]	[0.97, 0.07]	[2.54, 0.18]	[10.59, 0.74]
24 sata	[2.54, 0.18]	[2.66, 0.19]	[3.57, 0.25]	[5.15, 0.36];	[2.72, 0.19]	[1.92, 0.13]	[1.94, 0.14]	[1.57, 0.11]	[2.90, 0.20]	[7.55, 0.53]	[0.15, 0.01]	[1.64, 0.11]	[2.76, 0.19]	[3.76, 0.26]
спорт журнал	[3.60, 0.25]	[0.63, 0.04]	[2.97, 0.21]	[3.28, 0.23];	[2.98, 0.21]	[2.02, 0.14]	[1.53, 0.11]	[0.73, 0.05]	[2.20, 0.15]	[2.14, 0.15]	[1.96, 0.14]	[1.16, 0.08]	[2.37, 0.17]	[2.64, 0.18]
story	[1.04, 0.07]	[4.46, 0.31]	[1.18, 0.08]	[3.97, 0.28];	[4.23, 0.30]	[3.40, 0.24]	[2.52, 0.18]	[1.46, 0.10]	[2.17, 0.15]	[4.62, 0.32]	[2.30, 0.16]	[0.98, 0.07]	[3.09, 0.22]	[4.06, 0.28]
Gloria	[0.58, 0.04]	[3.82, 0.27]	[0.95, 0.07]	[2.09, 0.15];	[2.62, 0.18]	[3.17, 0.22]	[2.22, 0.16]	[2.03, 0.14]	[1.77, 0.12]	[4.56, 0.32]	[1.44, 0.10]	[0.59, 0.04]	[2.39, 0.17]	[3.66, 0.26]
hello	[0.67, 0.05]	[3.06, 0.21]	[1.59, 0.11]	[2.80, 0.20];	[2.52, 0.18]	[2.04, 0.14]	[1.61, 0.11]	[1.18, 0.08]	[1.42, 0.10]	[3.15, 0.22]	[1.59, 0.11]	[0.93, 0.07]	[2.22, 0.16]	[2.58, 0.18]
lisa	[0.23, 0.02]	[1.91, 0.13]	[0.20, 0.01]	[0.61, 0.04];	[1.34, 0.09]	[2.01, 0.14]	[1.39, 0.10]	[0.56, 0.04]	[1.07, 0.07]	[1.13, 0.08]	[1.10, 0.08]	[0.52, 0.04]	[1.25, 0.09]	[1.62, 0.11]
mens health	[3.09, 0.22]	[0.51, 0.04]	[2.25, 0.16];	[5.95, 0.42];	[3.35, 0.23]	[0.79, 0.06]	[0.21, 0.01]	[0.00, 0.00]	[1.82, 0.13]	[2.20, 0.15]	[1.52, 0.11]	[0.68, 0.05]	[2.00, 0.14]	[2.83, 0.20]
joy	[0.16, 0.01]	[2.44, 0.17]	[3.25, 0.23]	[3.65, 0.26];	[1.54, 0.11]	[1.07, 0.07]	[0.42, 0.03]	[0.00, 0.00]	[1.22, 0.09]	[1.52, 0.11]	[1.32, 0.09]	[1.03, 0.07]	[1.44, 0.10]	[1.54, 0.11]
lepota i zdravlje	[1.16, 0.08]	[10.44, 0.73]	[6.71, 0.47]	[10.23, 0.72];	[10.33, 0.72]	[7.23, 0.51]	[3.30, 0.23]	[1.46, 0.10]	[6.34, 0.44]	[7.85, 0.55]	[4.87, 0.34]	[2.39, 0.17]	[6.59, 0.46]	[7.33, 0.51]

У наредној табели дефинишемо минимални, односно максимални број огласа по позицијама преко параметара g_j и d_j:

Табела 7 Минимални и максимални број огласа по позицијама у новинама

Позиција у новинама	g_j	d_j
1	1	10
2	1	10
3	1	10
4	1	5
5	1	9
6	1	10
7	1	70
8	1	70
9	1	40
10	1	40
11	1	10
12	1	15
13	1	30
14	1	50
15	1	60
16	1	40
17	1	40
18	1	30
19	1	20
20	1	25
21	1	15
22	1	15
23	1	15
24	1	15
25	1	5
26	1	3
27	1	2
28	1	4
29	1	30

И на крају дефинисаћемо вредности параметара m_i и h_i којим се дефинишу минимални, односно максимални број огласа у i -тим новинама:

Табела 8 Минимални и максимални број огласа у новинама

Новине	m_i	h_i
blic	20	130
blic žena	0	50
kurir	15	100
вечерње новости	15	70
alo	20	60
informer	20	50
политика	15	60
24 sata	20	50
спортски журнал	20	120
story	3	30
Gloria	0	15
hello	3	22
lisa	0	20
mens health	4	15
joy	0	30
lepota i zdravlje	0	25

4.5 Хеуристике за дефинисање и претрагу сценарија

Приказали смо на који начин функционише нова методологија, увели смо математички модел који разматрамо за примену методе и дали податке које смо користили у експерименту. Ипак, пре него што представимо резултате истраживања осврнућемо се на јако значајан део рада и истраживања, а то су дефинисане и коришћене хеуристике за претрагу поља допустивих решења, односно за дефинисање и претрагу сценарија.

Брзе и ефикасне хеуристике ће омогућити проналажење одговарајућег сценарија уз генерисање релативно малог броја сценарија, што је кључ за ефикасност и ефективност целе оптимизационо-симулационе методе. Узимајући у обзир посматрани проблем постављања огласа, расподелу стохастичких параметара и жељене вероватноће задовољења ограничења p_k, представљамо коришћене хеуристике за ефикасну претрагу сценарија.

4.5.1 Хеуристика 1 - почетни и робусни сценарио

Прва два сценарија која треба генерисати су детерминистички двојници чије ћемо стохастичке параметре подесити на μ односно μ-3σ респективно.

Сценарио са параметрима подешеним на μ-3σ представља робусни сценарио, тако да су очекиване вероватноће задовољења ограничења за овај сценарио $p_k = 1$. Ограничења су задовољена без обзира на реализације стохастичких параметара. Разлог због којег смо најпре дефинисали овај детерминистички двојник оригиналног проблема је што доносилац одлуке захтева висок ниво вероватноће задовољења ограничења, изнад 0.9 или 0.95 за свој прихватљиви сценарио, што значи да ће жељени сценарио бити негде близу робусног.

Сценарио у ком су стохастичке вредности подешене на очекиване вредности μ нам даје први увид у природу посматраног проблема. Након што проверимо сценарио користећи симулацију, израчунаћемо вероватноћу задовољења ограничења p_k за свих 14 ограничења. Оно што треба да очекујемо је да за сва активна ограничења p_k треба да буде око 0.5, док ће за неактивна ограничења ова вероватноћа бити знатно виша. Такође, могуће је да ће се појавити и трећа група која ће бити између активних и неактивних ограничења.

Ова хеуристика нам указује на постојеће стање ограничења али и на будуће кораке у генерисању нових сцеанрија на следећи начин: активна ограничења - стохастичке параметре у овим ограничењима у наредним сценаријима треба померати ка робусном сценарију како бисмо достигли жељену вероватноћу задовољења ограничења p_i; неактивна ограничења - ово је скуп ограничења која већ задовољавају тражене вероватноће и чије стохастичке параметре не треба мењати;

Ограничења између два претходно наведена - стохастичке параметре ових ограничења треба померити само у одређеној мери ка робусном сценарију, и то у зависности од резултата симулације генерисаних сценарија.

4.5.2 Хеуристика 2 - корелације у оквиру група ограничења

Постоје позитивне корелације између ограничења у оквиру група када генеришемо нове сценарије.

Претпостављена је позитивна корелација између ограничења у оквиру група, али у другачијем обиму међу групама. На основу ове генералне претпоставке, три појединачне хеуристике су дефинисане.

Хеуристика 2.1:

Постоји јака позитивна корелација у ограничењима у оквиру старосних група.

Ове корелације су јаче између старосних група које су блиске једни другима него између оних које то нису. На пример, постоји јака позитивна корелација између старосних група 30-39 и 40-49 година, врло мало или нимало позитивне корелације између старосних група 12-19 и 66+ година. Позитивна корелација између ограничења у оквиру старосних група се повећава, односно смањује у складу са наведеном логиком.

Хеуристика 2.2:

Не постоји ни позитивна ни негативна корелација у оквиру полне групе ограничења.

С обзиром да мушка и женска популација имају различита интересовања за новине и магазине, не постоји значајна корелација која би се могла очекивати и која може бити од користи за ове групе ограничења при генерисању сценарија.

Хеуристика 2.3:

За преостале две групе ограничења географска локација и образовање, постоји умерена позитивна корелација која се може очекивати и узети у обзир при генерисању нових сценарија.

Најважније знање које се може добити из друге групе хеуристика је да даје даљи увид у проблем и приказује релације које постоје између стохастичких ограничења.

Ово значи да неће бити потребно да се генеришу сценарији који ће бити ближи по детерминистичким вредностима стохастичких параметара робусном сценарију у свакој наредној итерацији, већ само за нека одређена огрнаичења. Као предност, можемо очекивати повећање вероватноће задовољења ограничења p_k за сва ограничења у оквиру једне групе ограничења. Применом ове хеуристике оствarићемо оба предуслова за добар сценарио: високу вероватноћу задовољења ограничења и бољу вредност критеријумске функције.

4.5.3 Хеуристика 3 - симулациони корак

Одредите симулациони корак.

Симулациони корак смо дефинисали као вредност за коју подешавамо вредности стохастичког параметра при генерисању новог детерминистичког еквивалента оригиналног проблема. У нашем истраживању фиксирали смо симулациони корак на 0.1σ, што значи да смо при генерисању новог сценарија детерминистичке вредности стохастичких параметара мењали за 0.1σ ка робусним параметрима у односу на претходно дефинисани сценарио.

Прва хеуристика нам указује на ограничења чије параметре треба мењати и у ком обиму; друга хеуристика нам пружа увид у односе између ограничења у оквиру група, даље смањујући потребу да линеарно мењамо све параметре у ограничењима; и последња хеуристика одређује конкретну вредност за коју су стохастички параметри мењани из сценарија у сценарио.

Ово нам пружа конзистентност при генерисању сценарија и омогућава доносиоцу одлуке да добије увид у осетљивост ограничења кроз промене стохастичких параметара у узастопним сценаријима.

Симулациони корак се може дефинисати и као опадајући, што значи да ћемо његову вредност смањивати како се сценарији приближавају робусном детерминистичком двојнику, или га можемо дефинисати као мешовити корак, односно као комбинацију фиксног и опадајућег корака. С обзиром да су хеуристике по природе специфичне за одређене проблеме (Bingham & Eisenhardt, 2011), доносилац одлуке може да користи симулациони корак који највише одговара проблему који разматра.

Овим смо закључили листу коришћених хеуристика и у наставку ћемо представити резултате експеримента.

5 РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ДИСКУСИЈА

Резултати тестирања сценарија су представљени у табели 9 за све групе ограничења. Скрећемо пажњу да је ради прегледности и представљања општих резултата, поред робусног и почетног сценарија са очекиваним вредностима, приказано још десет сценарија. Наравно, број сценарија које је могуће разматрати је практично неограничен, јер као што смо већ навели, чак и једноставна дискретизација расподеле вероватноћа води ка експоненцијалном расту броја сценарија које треба проверити.

Основни циљ оптимизационо-симулационог приступа је управо да се редукује број разматраних сценарија на неки разуман, рачунски изводљиви ниво, као и да се достигне жељени сценарио. Ова тема детаљно је обрађена у шестом поглављу књиге (Ruszczyński & Shapiro, 2003) где је детаљно разматран проблем генерисања и провере сценарија у проблемима стохастичког програмирања са Монте-Карло симулацијом.

Што се тиче нашег проблема, сценарији су генерисани и проверавани све док нису достигнути минимални захтеви доносиоца одлука. У нашем случају неколико стотина сценарија је тестирано пре него што смо остварили жељене вероватноће задовољења ограничења, као и тражену вредност критеријумске функције. Рачунско време за оптимизациони део приступа траје у просеку 10,5 секунди, а симулациони део за свега 2 секунде (RAM: 4.00GB; Processor: Intel (R) Core (TM) i3-2310M 2.10GHz), достизање жељеног сценарија за овако сложен проблем није био превише временски захтеван.

Ипак, треба имати на уму да је заправо најзахтевнији део целог приступа био тражење законитости и правила за генерисање нових сценарија, тј. дефинисање хеуристика којима се постиже жељена вероватноћа задовољења ограничења, или која нас бар са сваким наредним сценаријом приближава том циљу. Приступ је заснован на систему покушаја и грешака, с тим да смо са сваким новим сценаријем и тестирањем сазнали нешто ново о моделу који смо разматрали.

Дакле, вратимо се на тумачење представљених резултата у табели 9. Колоне табеле представљају циљне групе TGk, k=1,…,14 као што је и представљено у поставци модела у делу 4.1.. Последња колона представља вредност критеријумске функције за сваки сценарио, а промене се могу пратити кроз различите сценарије. У редовима се налазе кључни генерисани сценарији, са дефинисаним детерминистичким вредностима оригиналних стохастичких параметара, и за сваки сценарио дата је вероватноћа p_k задовољења стохастичких ограничења.

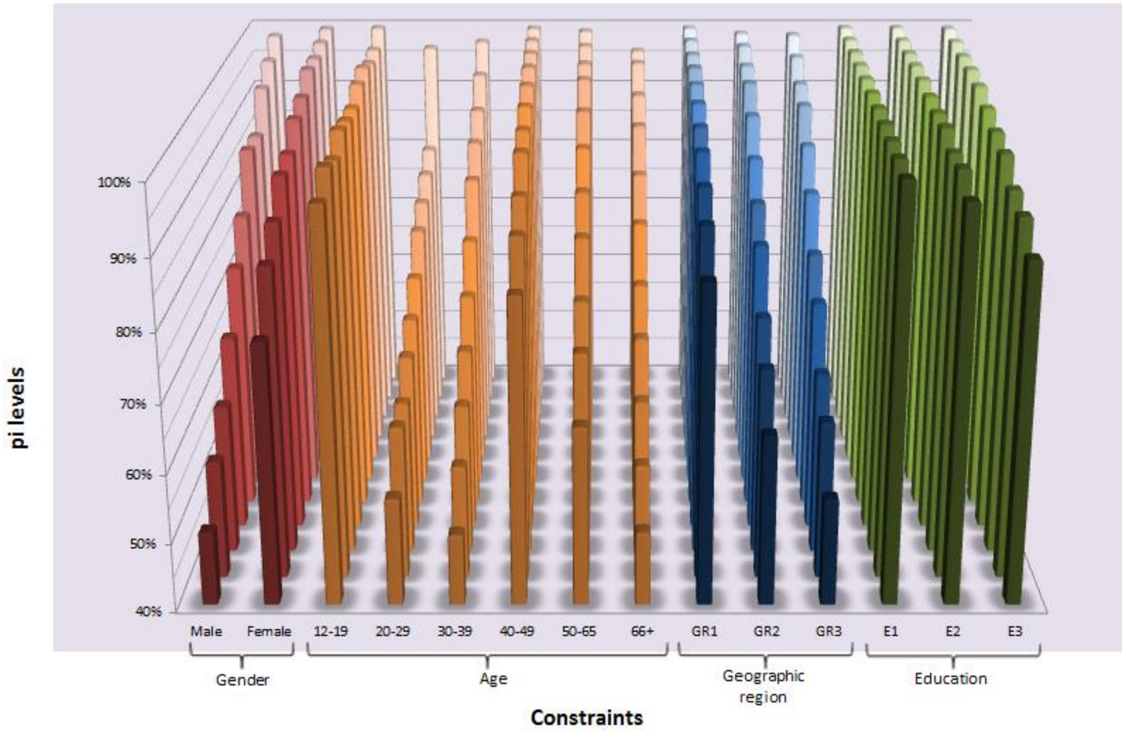
Сценарији са очекиваним вредностима S_{exp} и робусни сценарио S_{rob} су два маргинална случаја који су дефинисани као такви преко хеуристике 1, а сценарији су генерисани између ова два случаја и тестирани. За сваки сценарио у симулационом делу генерисано је 10.000 матрица случајних променљивих из задатих расподела стохастичких параметара, које су потом тестиране и на основу којих је израчуната одговарајућа вероватноћа задовољења ограничења и представљена у табели. Ћелије које су обојене указују на промене у параметрима за појединачна ограничења у односу на претходни сценарио. Жељени сценарио је сценарио под редним бројем 10, јер су у њему остварене жељене вероватноће задовољења ограничења, као и тражена вредност критеријумске функције коју је одредио доносилац одлуке.

Вредност критеријумске функције је најгора за робусни сценарио што је и очекивано, али заузврат сва неизвесност из модела је уклоњена, односно сва ограничења су увек задовољена без обзира на реализације случајних параметара. Најнижа и најбоља вредност критеријумске функције је за сценарио са очекиваним вредностима, али је вероватноћа задовољења ограничења најнижа. Вредност критеријумске функције се полако повећава како се крећемо ка жељеном сценарију S_{10} који нам даје жељене вероватноће задовољења ограничења у оквиру задатих ризика који је доносилац одлуке прихватио. Поредећи вредности критеријумске функције између робусног сценарија и циљног сценарија S_{10} остварено је смањење вредности критеријумске функције за 18,4% чиме је достигнут жељени циљ доносиоца одлуке уз остварење жељених вероватноћа за испуњење ограничења.

Табела 9 Резултати тестирања - циљне групе и сценарији

TG_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	f (x)
S_{exp}	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	μ	22.355.928
p_k	0.5061	0.7769	0.9648	0.5549	0.5021	0.8416	0.658	0.506	0.8594	0.6457	0.5541	0.997	0.9673	0.8899	
S_1	μ-0.1σ	μ-0.1σ	μ	μ-0.1σ	μ-0.1σ	μ-0.1σ	μ-0.1σ	μ-0.1σ	μ-0.1σ	μ-0.1σ	μ-0.1σ	μ	μ	μ-0.1σ	22.507.346
p_k	0.5715	0.8531	0.9883	0.6222	0.5646	0.8944	0.7297	0.5659	0.9084	0.706	0.6291	0.9993	0.9858	0.9208	
S_2	μ-0.2σ	μ-0.2σ	μ	μ-0.2σ	μ-0.2σ	μ-0.2σ	μ-0.2σ	μ-0.2σ	μ-0.2σ	μ-0.2σ	μ-0.2σ	μ	μ	μ-0.2σ	22.666.504
p_k	0.6184	0.8864	0.973	0.6231	0.6189	0.9231	0.7733	0.6255	0.9358	0.7492	0.6662	0.9994	0.983	0.9315	
S_3	μ-0.3σ	μ-0.3σ	μ	μ-0.3σ	μ-0.3σ	μ-0.3σ	μ-0.3σ	μ-0.3σ	μ-0.3σ	μ-0.3σ	μ-0.3σ	μ	μ	μ-0.3σ	22.822.944
p_k	0.6881	0.9273	0.9921	0.6595	0.6687	0.9602	0.837	0.6876	0.9609	0.8251	0.74	0.9998	0.9952	0.9583	
S_4	μ-0.4σ	μ-0.4σ	μ	μ-0.4σ	μ-0.4σ	μ-0.4σ	μ-0.4σ	μ-0.4σ	μ-0.4σ	μ-0.4σ	μ-0.4σ	μ	μ	μ-0.4σ	23.001.124
p_k	0.7640	0.9336	0.9818	0.6859	0.7208	0.9684	0.8775	0.7379	0.9727	0.8610	0.7843	0.9999	0.9934	0.9662	
S_5	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ	μ	μ-0.5σ	23.202.696
p_k	0.8151	0.9618	0.9774	0.72	0.7776	0.9808	0.9185	0.8038	0.9847	0.902	0.8503	1	0.9953	0.9777	
S_6	μ-0.6σ	μ-0.6σ	μ	μ-0.6σ	μ-0.6σ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ-0.6σ	μ-0.6σ	μ-0.6σ	μ-0.6σ	μ	μ	μ-0.6σ	23.397.780
p_k	0.8923	0.9724	0.9921	0.7661	0.8455	0.9903	0.9514	0.8539	0.9917	0.944	0.8981	1	0.9986	0.9892	
S_7	μ-0.7σ	μ-0.7σ	μ	μ-0.7σ	μ-0.7σ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ-0.7σ	μ-0.7σ	μ-0.6σ	μ-0.7σ	μ	μ	μ-0.7σ	23.575.284
p_k	0.8896	0.9933	0.9961	0.7848	0.8795	0.9969	0.9783	0.9057	0.9962	0.9722	0.9379	1	0.9992	0.9936	
S_8	μ-0.8σ	μ-0.8σ	μ	μ-0.8σ	μ-0.8σ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ-0.8σ	μ-0.8σ	μ-0.6σ	μ-0.8σ	μ	μ	μ-0.7σ	23.774.668
p_k	0.9432	0.99	0.9822	0.8048	0.9079	0.9985	0.9816	0.9323	0.9963	0.9787	0.9502	1	0.9984	0.9939	
S_9	μ-0.9σ	μ-0.9σ	μ	μ-0.9σ	μ-0.9σ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ-0.9σ	μ-0.9σ	μ-0.6σ	μ-0.8σ	μ	μ	μ-0.7σ	23.986.632
p_k	0.9658	0.995	0.9838	0.8214	0.9431	0.9988	0.9902	0.9627	0.9985	0.9898	0.9722	1	0.9991	0.9969	
S_{10}	μ-0.9σ	μ-0.9σ	μ	μ-1.5σ	μ-1σ	μ-0.5σ	μ-0.5σ	μ-0.9σ	μ-0.9σ	μ-0.6σ	μ-0.8σ	μ	μ	μ-0.7σ	24.261.686
p_k	0.9864	0.9981	0.9994	0.9666	0.9772	0.999	0.9942	0.9621	0.9995	0.9909	0.9881	1	0.9999	0.9985	
S_{rob}	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	μ-3σ	29.737.023
p_k	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Слика 2 Графички резултати тестирања сценарија



На слици 2 графички су представљени резултати тестирања сценарија. Свака група ограничења је обележена једном бојом, а на слици је представљено 11 сценарија, сви осим робусног. Слика приказује како се ниво задовољења сваког ограничења са сваким новим сценаријом.

5.1 Диксусија и будућа истраживања

У овој дисертацији представљен је оригинални приступ за третирање неизвесности у проблемима стохастичког програмирања и дата су генерална упутства како применити оптимизационо-симулациони приступ на проблемима стохастичког програмирања. У прегледу приступа решавању проблема стохастичког програмирања навели смо неколико значајних теоријских приступа и поставки решења која подразумевају дефинисање детерминистичких двојника оригиналног проблема и потом решавање ових сложених проблема.

Иако су ови приступи изузетно важни са становишта теорије стохастичког програмирања, ипак, потребно је изузетно познавање математике да би се ови приступи применили у реалном свету и пракси. Постоји потреба за једним апроксимативним приступом који је у овој дисертацији дат у виду оптимизационо-симулационог приступа са становишта разумљивости и интуитивности, и на крају, једноставније примене на реалне проблеме.

Поменућемо овде и добро познати фази приступ решавању оваквих и сличних проблема, али овај приступ у дисертацији није разматран као решење за третирање неизвесности.

Сама метода оптимизационо-симулационог приступа је приказана на примеру оглашавања у штампаним новинама, који је по својој природи стохастички проблем. Резултати тестирања и експеримената потврђују да је приступ валидан под претпоставкама које су изнете у овој дисертацији. Резултати такође показују да можемо да добијемо валидна апроксимативна решења за проблеме вероватносног задовољења ограничења за посматрани проблем пратећи упутства за примену оптимизационо-симулационог приступа.

Приступ се значајно ослања на хеуристике и може се рећи да у великој мери ефикасност и ефективност самог приступа зависи од хеуристика за генерисање сценарија. Хеуристике су оно што води поступак примене методе оптимизационо-симулационог приступа.

Са друге стране, приступ такође омогућава одличну платформу за валидацију предложених хеуристика. Хеуристике се проналазе и потврђују кроз симулациона тестирања сценарија, а један од основних задатака истраживања и доприноса је да се пронађу и потврде хеуристике за посматрани проблем како би могле да се користе и за сличне проблеме.

Због значаја хеуристика, како за ефикасну примену методе, тако и као значајан допринос истраживања скрећемо пажњу на претходна истраживања која потврђују наше изјаве о тестирању и потврђивању хеуристика уз помоћ симулација. Како (Hogarth & Karelaia, 2007) у свом раду закључују, симулација са рачунарски генерисаним подацима је одличан начин да се евалуирају хеуристике, што у нашем случају значи да док проверавамо велики број сценарија, у исто време вршимо и валидацију хеуристика. Хеуристике се такође унапређују у процесу учења, односно испитивања проблема (Wübben & v. Wangenheim, 2008), што значи да доносилац одлуке може да стекне врло добар увид у природу посматраног проблема. Да закључимо, приступ омогућава константно проверу и учење о процесу за оба дела методе - за генерисање и проверу сценарија и за валидацију хеуристика. Кратко рачунско време и потребна меморија, релативно мали број разматраних сценарија и брзина којом се метод примењује га чине идеалним за генерисање и тестирање нових хеуристика на сличним проблемима.

Истраживањем које је спроведено доказане су општа и посебне хипотезе постављене на почетку дисертације и може се закључити да резултати добијени у овој докторској дисертацији представљају оригиналан научни допринос досадашњем фонду истраживања из предметне области. Такође, остварени резултати дају могућности за нова научна истраживања и примену иновативног приступа за решавање сличних проблема стохастичке оптимизације.

6 ЛИТЕРАТУРА

1. Arnold, Uwe and Özgür Yildiz. 2015. “Economic Risk Analysis of Decentralized Renewable Energy Infrastructures - A Monte Carlo Simulation Approach.” *Renewable Energy* 77(1):227–39.

2. Beale, E. M. L. 1955. “On Minimizing a Convex Function Subject to Linear Inequalities.” *J Royal Statistical Society* 17(2):173–84. Retrieved (http://www.jstor.org).

3. Beltran-Royo, C., L. F. Escudero, and H. Zhang. 2016. “Multiperiod Multiproduct Advertising Budgeting: Stochastic Optimization Modeling.” *Omega* 59(A):26–39.

4. Ben-Tal, A., B. Golany, A. Nemirovski, and J. Vial. 2005. “Retailer-Supplier Flexible Commitments Contracts: A Robust Optimization Approach.” *Manufacturing Service Operations Management* 7(3):248–71.

5. Ben-Tal, A. and A. Nemirovski. 1998. “Robust Convex Optimization.” *Mathematics of Operations Research* 23(4):769–805.

6. Ben-Tal, Aharon, Laurent El Ghaoui, and Arkadi Nemirovski. 2009. *Robust Optimization*. New Jersey: Princeton series in applied mathematics.

7. Bertsimas, D. and A. Thiele. 2006. “A Robust Optimization Approach to Supply Chain Management.” *Operations Research* 54(1):150–68.

8. Bhattacharya, U. K. 2009. “A Chance Constraints Goal Programming Model for the Advertising Planning Problem.” *European Journal of Operational Research* 192:382–95.

9. Bingham, Christopher B. and Kathleen M. Eisenhardt. 2011. “RATIONAL HEURISTICS: THE ‘SIMPLE RULES’ THAT STRATEGISTS LEARN FROM PROCESS EXPERIENCE.” *Strategic Management Journal* 32:1437–1464.

10. Birge, J. and F. Louveaux. 1997. *Introduction to Stochastic Programming*. Berlin:

Springer.

11. Bruni, M. E., P. Beraldi, and D. Conforti. 2015. “A Stochastic Programming Approach for Operating Theatre Scheduling under Uncertainty.” *IMA Journal of Management Mathematics* 26(1):99–119.

12. Bunn, Derek W. and Spiros N. Paschentis. 1982. “Linear Programming with Uncertain Parameters: An Applications Review.” *Computers in Industry* 3(4):283–96.

13. Buratto, A., L. Grosset, and B. Viscolani. 2006. “Advertising Channel Selection in a Segmented Market.” *Automatica* 42:1343–47.

14. Buyukada, Musa. 2016. “Co-Combustion of Peanut Hull and Coal Blends: Artificial Neural Networks Modeling, Particle Swarm Optimization and Monte Carlo Simulation.” *Bioresource Technology* 216:280–86.

15. Charnes, Abraham and William W. Cooper. 1959. “Chance-Constrained Programming.” *Management Science* 6(1):73–79.

16. Chen, Michael, Sanjay Mehrotra, and Dávid Papp. 2015. “Scenario Generation for Stochastic Optimization Problems via the Sparse Grid Method.” *Computational Optimization and Applications* 62(3):669–92.

17. Clarke, Darral G. 1976. “Econometric Measurement of the Duration of Advertising Effect on Sales.” *Journal of Marketing Research* 13(4):345–57. Retrieved (http://www.jstor.org).

18. Crainic, Teodor Gabriel, Luca Gobbato, Guido Perboli, and Walter Rei. 2016. “Logistics Capacity Planning: A Stochastic Bin Packing Formulation and a Progressive Hedging Meta-Heuristic.” *European Journal of Operational Research* 253(2):404–17.

19. Czerlinski, J., Gerd Gigerenzer, and Daniel G. Goldstein. 1999. “How Good Are Simple Heuristics?” *Simple Heuristics that make us smart* 97–118.

20. Dantzig, G. B. 1949. “Programming in a Linear Structure.” *Econometrica* 17:73–

74.

21. Dantzig, George B. 1955. “Linear Programming Under Uncertainty.” *Management Science* 1(3):197–206.

22. Dantzig, George B. 2002. “Linear Programming.” *Operations Research* 50(1):42–47.

23. Davis, Jason P., Kathleen M. Eisenhardt, and Christopher B. Bingham. 2009. “Optimal Structure, Market Dynamism, and the Strategy of Simple Rules.” *Administrative Science Quarterly* 54(3):413–52. Retrieved (http://asq.sagepub.com/content/54/3/413.abstract).

24. Dorfman, Robert and Peter O. Steiner. 1954. “Optimal Advertising and Optimal Quality.” *The American Economic Review* 44(5):826–36. Retrieved (http://www.jstor.org).

25. Dufo-Lopez, Rodlfo, Eduardo Pérez-Cebollada, José L. Bernal-Agustín, and Ignacio Martinez. 2016. “Optimisation of Energy Supply at Off-Grid Healthcare Facilities Using Monte Carlo Simulation.” *Energy Conversion and Management* 113:321–30.

26. Dullerud, Geir E. and Fernando Paganini. 2005. *A Course in Robust Control Theory*. New York: Springer.

27. Dupačová, Jitka, N. Growe-Kuska, and W. Romisch. 2003. “Scenario Reduction in Stochastic Programming an Apporach Using Probability Metrics.” *Mathematical Programming* 95(3):493–511.

28. Falk, J. E. 1976. “Technical Note-Exact Solutions of Inexact Linear Programs.” *Operations Research* 24(4):783–87.

29. Fu, Michael C., Camille C. Price, Joe Zhu, and Frederick S. Hillier. 2015. *Handbook of Simulation Optimization*. New York: Springer-Verlag.

30. Galbraith, J. R. 1973. *Designing Complex Organizations*.

31. Ge, Houtian, James Nolan, Richard Gray, Stephan Goetz, and Yicheol Han. 2016.

"Supply Chain Complexity and Risk Mitigation – A Hybrid Optimization–simulation Model." *International Journal of Production Economics* 179:228–38. Retrieved (http://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2016.06.014).

32. Ghaoui, Laurent El, And Her, and E. Lebret. 1997. "Robust Solutions To Least-Squares Problems With Uncertain Data *." *SIAM J. MATRIX ANAL. APPL. c Society for Industrial and Applied Mathematics* 18(4):1035–64. Retrieved (http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S0895479896298130).

33. El Ghaoui, Laurent, Francois Oustry, and Hervé Lebret. 1998. "Robust Solutions to Uncertain Semidefinite Programs." *SIAM Journal on Optimization* 9(1):33–52. Retrieved (http://epubs.siam.org/doi/10.1137/S1052623496305717).

34. Gigerenzer, Gerd and Henry Brighton. 2009. "Homo Heuristicus : Why Biased Minds Make Better Inferences." 1:107–43.

35. Goldstein, Daniel G. and Gerd Gigerenzer. 2002. "Models of Ecological Rationality : The Recognition Heuristic." *Psychological Review* 109(1):75–90.

36. Hartnett, Nicole, Rachel Kennedy, Byron Sharp, and Luke Greenacre. 2016. "Creative That Sells: How Advertising Execution Affects Sales." *Journal of Advertising* 45(1):102–12.

37. Helfat, Constance and Margaret Peteraf. 2014. "MANAGERIAL COGNITIVE CAPABILITIES AND THE MICROFOUNDATIONS OF DYNAMIC CAPABILITIES." *Strategic Management Journal*.

38. Hogarth, Robin M. and N. Karelaia. 2007. "Heuristic and Linear Models of Judgment : Matching Rules and Environments." *Psychological Review* 114(3):733–58.

39. Hsiung, Kan-Lin, Seung-Jean Kim, and Stephen Boyd. 2005. "Power Control in Lognormal Fading Wireless Channels with Uptime Probability Specifications via Robust Geometric Programming." Pp. 3955–59 in *Proceedings of the American Control Conference, 2005*, vol. 6.

40. Huber, Peter J. 1981. *Robust Statistics*. New York: Wiley.

41. Illner, Reinhard and Junling Ma. 2016. "An SIS-Type Marketing Model on Random Networks." *Communications in Mathematical Sciences* 14(6):1723–40. Retrieved (http://www.intlpress.com/site/pub/pages/journals/items/cms/content/vols/0014/0006/a012/).

42. Kall, Peter and Janos Mayer. 2005. *Stochastic Linear Programming*. Berlin: Springer.

43. Katz, Helen. 2008. *The Media Handbook, A Complete Guide to Advertising Media Selection, Planning, Research and Buying*. Mahwah, New Jersey: LAWRENCE ERLBAUM ASSOCIATES

44. Kendall, J. W. 1975. "Hard and Soft Constraints in Linear Programming." *Omega* 3(6):709–15.

45. King, A. J. and S. W. Wallace. 2012. *Modeling with Stochastic Programming*. New York: Springer.

46. Kotler, Philip. 1963. "The Use Of Mathematical Models in Marketing." *Journal of Marketing* 27(4):31–41. Retrieved (http://www.jstor.org).

47. Kouvelis, P. and G. Yu. 1997. *Robust Discrete Optimization and Its Applications*. London: Kluwer Academic Publishers.

48. Kwak, N. K., Chang Won Lee, and Ji Hee Kim. 2005. "An MCDM Model for Media Selection in the Dual Consumer / Industrial Market." *European Journal of Operational Research* 166:255–65.

49. LaValle, I. H. 1978. *Fundamentals of Decision Analysis*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.

50. Leone, Robert P. and Randall L. Schultz. 1980. "A Study of Marketing Generalizations." *Journal of Marketing* 44(1):10–18. Retrieved (http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=bth&AN=4997622&site=ehost-live&scope=site).

51. Levi, D., P. Kaminsky, and E. Levi. 2004. *Managing the Supply Chain the Definitive Guide for the Business Professional*. New York: McGraw-Hill.

52. Markowitz, H. 1952. "Portfolio Selection." *Journal of Finance* 7(1):77–91.

53. Markowitz, H. 1959. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. New York: Wile.

54. Mavrotas, George, Olena Pechak, Eleftherios Siskos, Haris Doukas, and John Psarras. 2015. "Robustness Analysis in Multi-Objective Mathematical Programming Using Monte Carlo Simulation." *European Journal of Operational Research* 240(1):193–201.

55. Meeds, Edward and Max Welling. 2015. "Optimization Monte Carlo: Efficient and Embarrassingly Parallel Likelihood-Free Inference." Pp. 1–9 in *Neural Information Processing Systems Conference*. Retrieved (http://arxiv.org/abs/1506.03693).

56. Mokhtari, Hadi and Ali Salmasnia. 2015. "A Monte Carlo Simulation Based Chaotic Differential Evolution Algorithm for Scheduling a Stochastic Parallel Processor System." *Expert Systems with Applications* 42(20):7132–7147. Retrieved (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417415003358).

57. Montgomery, David Bruce. 1970. *Applications of Management Science in Marketing*. Englewood Cliffs (N.J.): Prentice-Hall.

58. Mousavi, Shabnam and Gerd Gigerenzer. 2014. "Risk, Uncertainty, and Heuristics." *Journal of Business Research* 67(8):1671–78. Retrieved (http://dx.doi.org/10.1016/j.jbusres.2014.02.013).

59. Nahmias, Steven. 1989. *Production and Operations Analysis*. edited by Irwin. Homewood, Ill.

60. Nemirovski, A. and A. Shapiro. 2006. "Convex Approximations of Chance Constrained Programs." *SIAM Journal on Optimization* 17(4):969–96.

61. Newell, Allen and Herbert A. Simon. 1971. *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

62. Pagnoncelli, B. K., S. Ahmed, and A. Shapiro. 2009. “Sample Average Approximation Method for Chance Constrained Programming: Theory and Applications.” *Journal of Optimization Theory and Applications* 142(2):399–416.

63. Payne, J. W., J. R. Bettman, and E. J. Johnson. 1993. “The Adaptive Decision Maker.”

64. Pratt, Jw, Howard Raiffa, and Robert Schlaifer. 1995. “Introduction to Statistical Decision Theory.” Retrieved (http://books.google.nl/books?hl=en&lr=&id=vXXTkkaJqPQC&oi=fnd&pg=PA1&dq=The+Theory+of+Statistical+Decision&ots=yHPL-c1Yjh&sig=-lQkq9fVLXhLIlNmuidZ3h4Nces).

65. Rossi, F., P. van Beek, and T. Walsh. 2006. *Handbook of Constraint Programming*. Amsterdam: Elsevier Science.

66. Rossi, Peter E. and Greg M. Allenby. 2003. “Bayesian Statistics and Marketing.” *Marketing Science* 22(3):304–28.

67. Ruszczyński, A. and A. Shapiro. 2003. *Stochastic Programming, Handbooks in Operations Research and Management Science*. Amsterdam: Elsevier.

68. Shapiro, Alexander, Darinka Dentcheva, and Andrzej Ruszczyński. 2009. *Lectures on Stochastic Programming*. MOS-SIAM Series on Optimization. Retrieved (http://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9780898718751).

69. Sheffi, Y. 2005. *The Resilient Enterprise: Overcoming Vulnerability for Competitive Advantage*. Cambridge: MIT Press.

70. Simon, Herbert A. 1990. “Invariants of Human Behavior.” *Annual review of psychology* 41:1–19.

71. Singh, C. 1982. “Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Its Applications to Generalized Linear and Fractional Programming.” *Journal of*

Optimization Theory and Applications 38(1):33–42.

72. Soyster, A. L. 1973. "Technical Note—Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming." *Operations Research* 21(5):1154–57. Retrieved (http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.21.5.1154).

73. Tintner, G. 1955. "Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics." Pp. 197–228 in *In H. A. Antosiewicz (Ed.), Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming*.

74. Vandenberghe, L., S. Boyd, and K. Comanor. 2007. "Generalized Chebyshev Bounds via Semidefinite Programming." *SIAM Review* 49(1):52–64.

75. Vidale, M. L. and H. B. Wolfe. 1957. "An Operations-Research Study of Sales Response to Advertising." *Operations Research* 5(3):370–81. Retrieved (http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=bth&AN=7679762&site=ehost-live%5Cnhttp://content.ebscohost.com/ContentServer.asp?T=P&P=AN&K=7679762&S=R&D=bth&EbscoContent=dGJyMNLe80SeprM4wtvhOLCmr0ueqLFSr624S7SWxWXS&ContentCustomer=dGJyMPGut0%2B2qbFIu).

76. de Vries, Lisette, Sonja Gensler, and Peter S. H. Leeflang. 2017. "Effects of Traditional Advertising and Social Messages on Brand-Building Metrics and Customer Acquisition." *Journal of Marketing* 81(5):1–15.

77. Vujošević, M. 2012. *Metode Optimizacije u Inženjerskom Menadžmentu*. Beograd: Laboratorija za operaciona istraživanja "Jovan Petrić" Fakulteta organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu.

78. Vujošević, Mirko. 1987. "Uncertainty in Reliability Evaluation Processes and a Simulation Approach to Treating It." *European Journal of Operational Research* 32(2):245–50.

79. Williams, H. P. 1978. *Model Building in Mathematical Programming*. Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons.

80. Wübben, Markus and Florian v. Wangenheim. 2008. "Instant Customer Base Analysis : Managerial Heuristics Often ' Get It Right .'" *Journal of Marketing* 72(May):82–93.

81. Zekri, Slim, Chefi Triki, Ali Al-Maktoumi, and Mohammad Reza Bazargan-Lari. 2015. "An Optimization-Simulation Approach for Groundwater Abstraction under Recharge Uncertainty." *Water Resources Management* 29(10):3681–95.

82. Zhou, K., J. C. Doyle, and K. Glover. 1996. *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

83. Zionts, S. 1974. *Linear and Integer Programming*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

84. Zymler, S., D. Kuhn, and B. Rustem. 2013. "Distributionally Robust Joint Chance Constraints with Second-Order Moment Information." *Mathematical Programming* 137(1–2):167–98.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Потписани-а ____

број индекса ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

____

____

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, _________________ _________________________

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКОГ РАДА

Име и презиме аутора ____

Број индекса ____

Студијски програм ____

Наслов рада ____

Ментор ____

Потписани/а ___________________________________

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

____

____

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, __________________________

____

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.