УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јелена Томановић

УСРЕДЊЕНЕ КВАДРАТУРНЕ ФОРМУЛЕ СА ВАРИЈАНТАМА И ПРИМЕНЕ

Докторска дисертација

Ментор: проф. др Миодраг Спалевић

Крагујевац, 2019.

UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF SCIENCE

Jelena Tomanović

AVERAGED QUADRATURE FORMULAS AND VARIANTS WITH APPLICATIONS

Doctoral dissertation

Advisor: prof. Miodrag Spalević, PhD

Kragujevac, 2019.

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I. Аутор
Име и презиме: Јелена Томановић
Датум и место рођења: 22.6.1987. Београд
Садашње запослење: асистент на Машинском факултету Универзитета у Београду
II. Докторска дисертација
Наслов: Усредњене квадратурне формуле са варијантама и примене
Број страница: 77 + x
Број слика: 1
Број библиографских података: 86
Установа и место где је рад израђен: Природно-математички факултет, Крагујевац
Научна област (УДК): Математика (51)
Ментор: др Миодраг Спалевић, редовни професор на Машинском факултету Универзитета у Београду
III. Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 4.7.2018.
Број одлуке и датум прихватања теме докторске дисертације: 840/XII-1, 28.11.2018.
Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата: др Миодраг Спалевић, редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду др Марија Станић, редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу (председник комисије) др Татјана Томовић, доцент Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације: др Марија Станић, редовни професор Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу (председник комисије) др Татјана Томовић, доцент Природно-математичког факултета Универзитета у Крагујевцу др Даворка Јандрлић, доцент Машинског факултета Универзитета у Београду
Датум одбране дисертације:

Сажетак

Нумеричка интеграција проучава како се може израчунати бројевна вредност интеграла. Формуле нумеричке интеграције називају се квадратурама. Јединствена оптимална интерполациона квадратура са n чворова јесте Гаусова формула G_n, која има алгебарски степен тачности $2n-1$. Важно питање у практичним израчунавањима је како (економично) проценити грешку Гаусове формуле. У те сврхе може се користити одговарајућа Гаус-Кронродова формула K_{2n+1} са $2n+1$ чворова и алгебарским степеном тачности $3n+1$. У ситуацијам када Гаус-Кронродова формула не постоји, треба наћи адекватну алтернативу и та алтернатива може бити уопштена усредњена Гаусова формула $\widehat{G}_{2n+1}$ са $2n+1$ чворова и алгебарским степеном тачности $2n+2$. Предности $\widehat{G}_{2n+1}$ су то што увек постоји и то што је њена нумеричка конструкција једноставнија од конструкције K_{2n+1}.

Главна тема ове докторске дисертације је уопштена усредњена Гаусова формула $\widehat{G}_{2n+1}$.

Уопштене усредњене Гаусове формуле могу имати чворове ван интервала интеграције. Квадратуре са чворовима ван интервала интеграције не могу се користити за апроксимацију интеграла код којих је интегранд дефинисан само на интервалу интеграције. У овој дисертацији испитано је када уопштене усредњене Гаусове формуле и њихова скраћења са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама имају све чворове унутар интервала интеграције.

Неки интеграли по m-димензионалним областима могу се апроксимирати формулама G_n^m конструисаним узастопном применом Гаусових квадратура G_n. Користећи одговарајуће Гаус-Кронродове квадратуре K_{2n+1} или одговарајуће уопштене усредњене Гаусове квадратуре $\widehat{G}_{2n+1}$ уместо G_n, у овој дисертацији конструишемо формуле K_{2n+1}^m и $\widehat{G}_{2n+1}^m$. Како бисмо проценили грешку $|I^m - G_n^m|$ користимо разлике $|K_{2n+1}^m - G_n^m|$ и $|\widehat{G}_{2n+1}^m - G_n^m|$. Разматрамо интеграле по m-димензионалној коцки, симплексу, сфери и лопти.

Abstract

Numerical integration is the study of how numerical value of an integral can be calculated. Formulas for numerical integration are called quadrature rules. The unique optimal interpolatory quadrature rule with n nodes is Gauss formula G_n, which has algebraic degree os exactness $2n-1$. An important task in practical calculations is how to (economically) estimate the error of Gauss formula. For this purpose corresponding Gauss-Kronrod formula K_{2n+1} with $2n+1$ nodes and algebraic degree of exactness $3n+1$ can be used. In the situations when Gauss-Kronrod formula doesn't exist, it is of interest to find adequate alternative and this alternative can be corresponding generalized averaged Gauss formula $\widehat{G}_{2n+1}$ with $2n+1$ nodes and algebraic degree of exactness $2n+2$. The adventages of $\widehat{G}_{2n+1}$ are that it always exists, and that it's numerical construction is simpler than the construction of K_{2n+1}.

The principal topic of this doctoral dissertation is generalized averaged Gauss formula $\widehat{G}_{2n+1}$.

Generalized averaged Gauss formulas may have nodes outside the interval of integration. Quadrature rules with nodes outside the interval of integration cannot be applied to approximate integrals with an integrand that is defined on the interval of integration only. This thesis investigates when generalized averaged Gauss formulas and their truncations for Bernstein-Szegő weight functions have all nodes in the interval of integration.

Some integrals I^m over m-dimensional regions can be approximated by cubature formulas G_n^m constructed by the product of Gauss quadrature rules G_n. Using corresponding Gauss-Kronrod rules K_{2n+1} or corresponding generalized averaged Gauss rules $\widehat{G}_{2n+1}$ instead of G_n, in this thesis we construct cubature formulas K_{2n+1}^m and $\widehat{G}_{2n+1}^m$. In order to estimate the error $|I^m - G_n^m|$ we use the differences $|K_{2n+1}^m - G_n^m|$ and $|\widehat{G}_{2n+1}^m - G_n^m|$. We consider integrals over m-dimensional cube, simplex, sphere and ball.

Предговор

Ова докторска дисертација урађена је на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу, под менторством проф. др Миодрага Спалевића, редовног професора Машинског факултета Универзитета у Београду. Резултати истраживања обављени су у оквиру рада на пројекту ,,Методе нумеричке и нелинеарне анализе са применама" (#174002), чији је руководилац проф. др Миодраг Спалевић, а који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Значајно место у нумеричкој интеграцији, која је део нумеричке анализе, заузимају јединствене оптималне интерполационе квадратурне формуле, познате као Гаусове квадратуре. Тема ове дисертације су екстензије Гаусових квадратура које служе за процену њихове грешке – пре свега, проучавамо уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле, које је увео Спалевић у раду [78].

Дисертација је подељена у пет глава, док су главе подељене на поглавља, а поглавља на одељке. Прве три главе обухватају материју чије познавање је корисно за лакше праћење оригиналних резултата, приказаних у четвртој и петој глави, а који су објављени редом у радовима [15] и [32].

1. глава кроз кратку историју интегралног рачуна и преглед недостатака аналитичких метода интеграције, има за циљ да мотивише проучавање нумеричких метода интеграције. На крају ове главе наведени су основни појмови везани за квадратурне формуле.

Циљ 2. главе је да се изложе резултати потребни за праћење материје из наредних глава, који припадају различитим областима математике, с тим што између тих резултата постоје одређене математичке везе. Поглавље 2.1 посвећено је моничним ортогоналним и ортонормираним полиномима, трочланој рекурентној релацији коју ови полиноми задовољавају и Јакобијевој матрици, генерисаној помоћу коефицијената трочлане рекурентне релације. У поглављу 2.2 дајемо преглед класичних и Бернштајн-Сегеових тежинских функција. У поглављу 2.3 разматрају се интерполационе квадратурне формуле, са освртом на Лагранжову интерполацију. Важно питање конвергенције низа квадратурних сума размотрено је у поглављу 2.4. С обзиром на закључке из 2.4, у поглављу 2.5 изложени су неки резултати који се тичу позитивних квадратура, а који су значајни при конструкцији уопштених усредњених Гаусових квадратура.

3. глава је посвећена квадратурама Гаусовог типа, од којих су неке предмет истраживања у овој дисертацији. Гаусове квадратурне формуле, које обрађујемо у поглављу 3.1, увео је Гаус још 1814. године у раду [19]. То су јединствене квадратуре са највећим могућим алгебарским степеном тачности. Једно од важних питања у проучавању ових формула је процена њихове грешке. Процена грешке Гаусових квадратура може се извршити помоћу неких њихових екстензија – нас првенствено занимају екстензије које обезбеђују да процена грешке буде прецизна и економична (под економичношћу подразумевамо да чворови Гаусове квадратуре представљају подскуп чворова њене екстензије). У поглављу 3.2 разматрамо Гаус-Кронродове квадратуре, које је увео Кронрод 1964. године (видети [36, 37]) и које представљају оптималне економичне екстензије. Али, када Гаус-Кронродове квадратуре не постоје или нису довољно једноставне за примену, траже се њихове алтернативе. Неке од тих алтернатива које ћемо разматрати су: усредњене Гаусове квадратуре, које је 1996. увео Лори [40]; уопштене усредњене Гаусове квадратуре, које је 2007. предложио Спалевић [78]; скраћене уопштене усредњене Гаусове квадратуре, први пут разматране 2016. у раду групе аутора [72].

У 4. глави приказани су оригинални резултати објављени у раду [15]. Испитана је унутрашњост уопштених усредњених Гаусових квадратурних формула и њихових скраћених варијанти са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама. Услови унутрашњости исказани су преко коефицијената Бернштајн-Сегеових тежинских функција. На основу теореме из [81], испитано је и у којим ситуацијама се уопштена усредњена Гаусова квадратура поклапа са Кронродовом екстензијом, и тада су коришћени резултати из [27] о унутрашњости Кронродових екстензија. За испитивање унутрашњости скраћења уопштених усредњених Гаусових квадратура коришћена је теорема из [14]. Питање унутрашњости квадратурних формула је важно, јер се квадратуре са спољашњим чворовима не могу користити за апроксимацију интеграла ако подинтегрална функција није дефинисана у неком од спољашњих чворова. Кроз нумеричке примере приказана је ефикасност уопштених усредњених Гаусових квадратура и њихових скраћења са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама у процени грешке одговарајуће Гаусове квадратурне формуле.

У 5. глави обрађујемо оригиналне резултате из рада [32]. На основу резултата из књиге [52], видимо да се узастопном применом Гаусових квадратура са n чворова G_n могу добити формуле G_n^m за апроксимирање интеграла I^m по неким m-димензионалним областима. Како бисмо проценили грешку $|(I^m - G_n^m)(f)|$, формулу G_n^m проширујемо до формула K_{2n+1}^m и $\widehat{G}_{2n+1}^m$, па за процену грешке узимамо разлике $|(K_{2n+1}^m - G_n^m)(f)|$ и $|(\widehat{G}_{2n+1}^m - G_n^m)(f)|$. Са K_{2n+1}^m је означена формула конструисана узастопном применом одговарајућих Гаус-Кронродових квадратура K_{2n+1}, а са $\widehat{G}_{2n+1}^m$ је означена формула конструисана узастопном применом одговарајућих уопштених усредњених Гаусових квадратура $\widehat{G}_{2n+1}^S$. Разматрамо интеграле по m-димедзионалној коцки, симплексу, сфери и лопти. Ефикасност процене грешке $|(I^m - G_n^m)(f)|$ помоћу разлика $|(K_{2n+1}^m - G_n^m)(f)|$ и $|(\widehat{G}_{2n+1}^m - G_n^m)(f)|$ илустрована је помоћу више нумеричких експеримената.

***

Овом приликом се захваљујем свом ментору, проф. др Миодрагу Спалевићу, на увођењу у научни рад и мотивацији да се бавим нумеричком интеграцијом.

Захвалност дугујем и члановима Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације: проф. др Марији Станић, на корисним саветима и предлозима од почетка докторских студија; доц. др Татјани Томовић, на добронамерним примедбама и сугестијама; доц. др Даворки Јандрлић, на помоћи и подршци од почетка наше сарадње.

Хтела бих да се захвалим и професору Lothar-у Reichel-у, на неколико стрпљивих разговора који су ми помогли да боље разумем област којом се бавим.

На крају, посебно бих се захвалила породици, пријатељима, професорима, колегама и свима који су ме подржали у одлуци да се бавим математиком.

Овај докторат посвећујем успомени на моју баку, Даницу Петронијевић (1938-2019).

Јелена Томановић

Садржај

Листа табела

Листа слика

1 Увод

Посматрајмо Стилтјесов[1] интеграл

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) \tag{1}$$

и претпоставимо да треба одредити његову бројевну вредност (што се најчешће чини претходним свођењем (1) на одређени интеграл). Област математике која се бави одређивањем (углавном приближне) бројевне вредности интеграла зове се **нумеричка интеграција**, а формуле за нумеричко израчунавање интеграла зову се **квадратурне формуле** или, краће, **квадратуре**. Књиге у којима се обрађују основе нумеричке анализе обично садрже делове који се односе на нумеричку интеграцију (видети [11, 25, 47, 70, 83]), док су књиге [12, 29, 38] у потпуности посвећене овој области.

На почетку, осврнимо се укратко на неке методе које су претходиле савременој нумеричкој интеграцији.

1.1 Кратак историјски преглед интеграције

Прва забележена систематизована техника за израчунавање интеграла је Еудоксова[2] метода ексхаустије (исцрпљивања) из 4. века п.н.е. (за коју је идеју дао Антифон[3] још у 5. веку п.н.е.). Ова техника осмишљена је за израчунавање површина и запремина поделом на бесконачно много делова чије су површине и запремине познате. Значајан пример античке нумеричке интеграције је и старогрчка квадратура круга (тј. рачунање површине круга) помоћу уписаних и описаних многоуглова – поступак којим је Архимед[4] у 3. веку п.н.е., усавршавајући методу ексхаустије, одредио доњу и горњу границу броја π.

Сличан поступак је у Кини у 3. веку независно развио Лју Хуј[5], а користио га је за одређивање површине круга. Касније су у 5. веку

[1] Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894), холандски математичар

[2] Εὔδοξος ὁ Κνίδιος (390-337 п.н.е.), старогрчки математичар и астроном

[3] Ἀντιφῶν ὁ Ῥαμνούσιος (480-411 п.н.е.), старогрчки говорник

[4] Ἀρχιμήδης (287-212 п.н.е.), старогрчки математичар, физичар и астроном

[5] 刘徽 (225-295), кинески математичар

кинески математичари, отац и син Цзу Чунчжи[6] и Цзу Ген[7], употребили овај поступак како би одредили запремину лопте (видети [35, 74]).

Следећи значајни напреци у интегралном рачуну догодили су се тек у 17. веку. Каваљери[8] је увео тзв. методу недељивости и израчунао интеграл од t^n за природне бројеве $n \leq 9$. Касније је Валис[9] уопштио ову методу на произвољне (укључујући и негативне и разломљене) степене t. Ферма[10] је први употребио бесконачне редове за израчунавање интеграла, а значајан допринос дали су и Бароу[11] и Торичели[12], уочивши везу између интеграције и диференцирања.

Темеље савремене теорије интеграције поставило је откриће фундаменталне теореме интегралног рачуна, до ког су, такође у 17. веку, независно један од другог дошли Њутн[13] и Лајбниц[14].

Значајно место у нумеричкој интеграцији заузимају Њутн-Коутсове[15] квадратурне формуле (настале почетком 18. века) и Гаусове[16] квадратурне формуле (назване по Гаусу, који их је увео почетком 19. века).

Строго формалну дефиницију одређеног интеграла увео је Риман[17] у 19. веку, користећи граничне вредности.

Детаљније о историји интегралног рачуна може се наћи нпр. у [6].

1.2 Нека ограничења аналитичких метода интеграције

Постоје разне аналитичке и нумеричке методе интеграције, при чему избор техника којима ћемо (успешно и најједноставније) израчунати интеграл често није лак задатак. Савети како приступити рачунању интеграла могу се наћи у [1].

[6] 祖冲之 (429-500), кинески математичар, астроном и писац

[7] 祖暅之 (450-520), кинески математичар

[8] Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), италијански математичар

[9] John Wallis (1616-1703), енглески математичар и свештеник

[10] Pierre de Fermat (1607-1665), француски математичар и правник

[11] Isaac Barrow (1630-1677), енглески математичар и теолог

[12] Evangelista Torricelli (1608-1647), италијански математичар и физичар

[13] Isaac Newton (1642-1727), енглески математичар, физичар и астроном

[14] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), немачки математичар и филозоф

[15] Roger Cotes (1682-1716), енглески математичар

[16] Johann Carl Friedrich Gauß (1777-1855), немачки математичар и физичар

[17] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), немачки математичар

Нумеричке технике се обично користе када је аналитичко решавање проблема немогуће или превише компликовано. Често се аналитичке и нумеричке методе комбинују - на пример, када дати интеграл аналитички сведемо на погоднији облик, па тек онда применимо неки нумерички приступ (нарочито водећи рачуна о броју потребних рачунских операција пре покретања на рачунару).

Наведимо неколико ситуација у којима за долажење до бројевне вредности интеграла треба користити нумеричке методе.

Ако интегралимо функцију чије су (тачне или приближне) вредности познате само на дискретном скупу тачака (нпр. неки експериментално добијени резултати), онда су аналитичке методе потпуно непримењљиве и једино је могуће коришћење нумеричке интеграције.

При аналитичком рачунању одређеног интеграла обично се користи Њутн-Лајбницова формула,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

за чију примену је потребан неодређени интеграл $F(t)$ функције $f(t)$. Међутим, функција $F(t)$ често није алгебарска – наведимо пример једноставног интеграла $\int \frac{dt}{t}$, чије решење је логаритам, а логаритам је трансцедентна функција. Дешава се и да функција $F(t)$ није елементарна, као нпр. у случају $\int e^{-t^2}dt$ (у [28] се може прочитати о Ришовом[18] интеграционом алгоритму, заснованом на Лиувиловим[19] резултатима, који за дату елементарну функцију налази њену елементарну примитивну функцију или доказује да примитивна функција није елементарна).

Размотримо и пример наизглед једноставног одређеног интеграла

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{dt}{1+t^4} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{a^2 + a\sqrt{2} + 1}{a^2 - a\sqrt{2} + 1} \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\operatorname{arctg}(a\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(a\sqrt{2}-1)),\end{aligned}$$

чије је аналитичко решење изражено преко елементарних функција. Међутим, да бисмо дошли до његове бројевне вредности у рачун морамо укључити и функције ln и arctg, што можемо учинити само са одређеном тачношћу, тј. нумерички.

[18] Robert Henry Risch, савремени амерички математичар

[19] Joseph Liouville (1809-1882), француски математичар

1.3 Квадратурне формуле - основни појмови

Квадратурном формулом или **квадратуром** са n тачака у односу на меру $d\mu$ називамо формулу облика

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) = Q_n(f) + R_n(f), \quad Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(t_k), \tag{2}$$

где су t_k тзв. **чворови**, а ω_k **тежински коефицијенти** или **тежине** (у запису није наглашена зависност чворова и тежина од n). Q_n представља апроксимацију интеграла I и зове се **квадратурна сума**, а R_n је одговарајућа **грешка** или **остатак** приближне интеграције. Квадратурне формуле записујемо и у облику

$$I(f) \approx Q_n(f),$$

а термини квадратурна формула и квадратура могу се односити и на квадратурну суму Q_n.

Првенствено ће нас занимати формуле (2) код којих су сви чворови t_k реални и међусобно различити, а све тежине ω_k реалне.

Ако су сви чворови неке квадратуре реални, онда кажемо да та квадратура **постоји**, а у супротном да **не постоји**.

Носач или **спектар** мере $d\mu$ је скуп свих тачака раста функције μ, тј. скуп свих тачака t_0 таквих да је $\mu(t_0+\epsilon)-\mu(t_0-\epsilon)>0$ за свако $\epsilon>0$. Значајну улогу игра конвексни омотач $[a,b]$ носача мере $d\mu$, при чему је $-\infty \le a < b \le \infty$.

Ако сви чворови формуле (2) припадају конвексном омотачу $[a,b]$ носача мере $d\mu$, онда се та квадратура назива **унутрашњом**. Уколико формула (2) има чворове који не припадају $[a,b]$, такви чворови зову се **спољашњи**. Ако су све тежине формуле (2) позитивне, онда се та квадратура назива **позитивном**.

Постоје разни проблеми везани за квадратурне формуле (2), попут (најчешће приближног) одређивања оптималних чворова t_k и тежинских коефицијената ω_k, затим што тачнијег израчунавање вредности функције f у чворовима t_k (уколико је функција f у њима уопште дефинисана), као и оцене и/или процене грешке R_n.

2 Ортогонални полиноми, тежинске функције и квадратурне формуле

У овој глави прво се у поглављу 2.1 бавимо ортогоналним полиномима, при чему посебну пажњу посвећујемо трочланој рекурентној релацији коју ови полиноми задовољавају и одговарајућој Јакобијевој[20] матрици. Затим се у поглављу 2.2 бавимо тежинским функцијама (класичним и Бернштајн[21]-Сегеовим[22]). Поглавља 2.3, 2.4 и 2.5 посвећена су квадратурним формулама, при чему обрађују тематику која се односи редом на интерполационе квадратуре, конвергенцију низа квадратурних сума и карактеризацију позитивних квадратура. Наводимо резултате који су важни за разумевање материје изложене у главама 3, 4 и 5. За најзначајнија тврђења дати су и докази.

2.1 Ортогонални полиноми

У савременој нумеричкој интеграцији изузетно значајну улогу игра теорија ортогоналних полинома, која је почела да се развија у другој половини 19. века из радова Чебишова[23] о верижним разломцима. Основно о овој области може се наћи у [46], док за детаљније читање препоручујемо [22] (са [23]) и [85], као и књигу [30], која је посвећена математичким везама између матрица, момената, ортогоналних полинома и квадратурних формула.

2.1.1 Монични ортогонални и ортонормирани полиноми

У овом одељку дефинисаћемо моничне ортогоналне и ортонормиране полиноме, размотрити њихову егзистенцију и навести нека значајна својства нула тих полинома.

Са $\mathcal{P}$ означимо простор свих (реалних алгебарских) полинома, а са $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}_0$, простор свих (реалних алгебарских) полинома степена

[20]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), немачки математичар

[21]Серге́й Ната́нович Бернште́йн (1880-1968), руски математичар

[22]Gábor Szegő (1895-1985), мађарски математичар

[23]Пафнутий Львович Чебышёв (1821-1894), руски математичар

не већег од n. Уочимо базу $\{t^k \mid k = 0, 1, 2, ...\}$ простора $\mathcal{P}$. Интеграли

$$\mu_k = \mu_k(d\mu) = \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu(t), \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{3}$$

називају се **моментима** мере $d\mu$ у односу на базу $\{t^k \mid k = 0, 1, 2, ...\}$.

Нека је μ неопадајућа функција на $\mathbb{R}$ са коначним граничним вредностима када $t \to -\infty$ и када $t \to \infty$, и нека индукована позитивна мера $d\mu$ има коначне моменте свих редова.

На $\mathcal{P}$ уведимо **скаларни производ** у односу на меру $d\mu$ са

$$(p, q) = (p, q)_{d\mu} = \int_{\mathbb{R}} p(t)q(t)d\mu(t), \quad p, q \in \mathcal{P}. \tag{4}$$

Ако је $(p, q) = 0$, онда се каже да су полиноми p и q међусобно **ортогонални**. За полином p кажемо да је **ортогоналан** на простор $\mathcal{P}_n$ ако је p ортогоналан на све елементе тог простора. **Норму** полинома p у односу на меру $d\mu$ уводимо са

$$\|p\| = \|p\|_{d\mu} = \sqrt{(p, p)} = \left(\int_{\mathbb{R}} p^2(t)d\mu(t) \right)^{1/2}.$$

Очигледно је да за свако $p \in \mathcal{P}$ важи $\|p\| \geq 0$.

Дефиниција 1. Скаларни производ (4) назива се **позитивно дефинитним** на $\mathcal{P}$ ако је $\|p\| > 0$ за свако $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$. Каже се да је скаларни производ (4) позитивно дефинитан на $\mathcal{P}_n$ ако је $\|p\| > 0$ за свако $p \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}$.

Ханкелова[24] **детерминанта** момената

$$\Delta_k = \det M_k, \quad M_k = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{k-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \cdots & \mu_{2k-2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, ...,$$

даје једноставан критеријум позитивне дефинитности скаларног производа.

Теорема 1. *Скаларни производ* (4) *је позитивно дефинитан на* $\mathcal{P}$ *ако и само ако је* $\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, 3, ...$ *Скаларни производ* (4) *је позитивно дефинитан на* $\mathcal{P}_n$ *ако и само ако је* $\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n + 1$.

[24]Hermann Hankel (1839-1873), немачки математичар

Дефиниција 2. Монични полиноми $t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \in \mathcal{P}_k$, $k = 0, 1, 2, ...$, зову се **монични ортогонални полиноми** у односу на меру $d\mu$ и означавају са $\pi_k(\cdot) = \pi_k(\cdot; d\mu)$, ако је

$$
\begin{gathered}
(\pi_k, \pi_l) = 0, \quad k \neq l, \quad k, l = 0, 1, 2, ..., \\
\|\pi_k\| > 0, \quad k = 0, 1, 2, ...
\end{gathered}
$$

Нормализацијом $\tilde{\pi}_k = \pi_k / \|\pi_k\|$, $k = 0, 1, 2, ...$, добијамо **ортонормиране полиноме**, које означавамо са $\tilde{\pi}_k(\cdot) = \tilde{\pi}_k(\cdot; d\mu)$.

Теорема 2. *Ако је скаларни производ* (4) *позитивно дефинитан на* $\mathcal{P}$, *онда постоји јединствен бесконачан низ* $\{\pi_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ *моничних ортогоналних полинома.*

Претпоставке претходне теореме су задовољене ако μ има бесконачно много тачака раста.

Теорема 3. *Ако је скаларни производ* (4) *позитивно дефинитан на* $\mathcal{P}_n$, *али не и на* $\mathcal{P}_N$ *ни за једно* $N > n$, *онда постоји само коначан број* $n + 1$ *моничних ортогоналних полинома* $\pi_0, \pi_1, ..., \pi_n$.

Теорема 4. *Ако моменти* (3) *постоје само за* $k = 0, 1, ..., k_0$, *онда постоји само коначан број* $n+1$ *моничних ортогоналних полинома* $\pi_0, \pi_1, ..., \pi_n$, *где је* $n = \lfloor k_0/2 \rfloor$ ($\lfloor\cdot\rfloor$ *означава цео део неког броја*).

Нуле моничних ортогоналних полинома су значајне у конструкцији неких квадратурних формула. Наведимо нека њихова својства (подразумевамо да дистрибутивна функција μ има бесконачно много тачака раста).

Теорема 5. *Све нуле полинома* $\pi_n(\cdot) = \pi_n(\cdot; d\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, *су реалне, просте и припадају унутрашњости конвексног омотача* $[a, b]$ *носача мере* $d\mu$.

Доказ. Како је $\int_{\mathbb{R}} \pi_n(t) d\mu(t) = 0$ за $n \in \mathbb{N}$, то постоји бар једна тачка из унутрашњости $[a, b]$ у којој π_n мења знак. Нека су $t_1, t_2, ..., t_m$, $m \leq n$, све такве (различите) тачке. Ако би било $m < n$, онда због ортогоналности важи

$$
\int_{\mathbb{R}} \pi_n(t) \prod_{k=1}^{m} (t - t_k) d\mu(t) = 0,
$$

што је немогуће, јер интегранд не мења знак. Следи $m = n$. $\square$

Теорема 6. *Нуле* $t_k^{(n+1)}$, $k = 1, 2..., n+1$, *полинома* π_{n+1} *алтернирају са нулама* $t_l^{(n)}$, $l = 1, 2, ..., n$, *полинома* π_n, *тј.*

$$t_{n+1}^{(n+1)} < t_n^{(n)} < t_n^{(n+1)} < t_{n-1}^{(n)} < \cdots < t_2^{(n+1)} < t_1^{(n)} < t_1^{(n+1)},$$

где су нуле поређане у опадајућем редоследу.

Важи и обрат теореме 6: ако су нуле двају полинома π_{n+1} и π_n, степена $n+1$ и n, реалне и међусобно алтернирају, онда су полиноми π_{n+1} и π_n ортогонални.

Теорема 7. *У било ком интервалу* (c, d) *на ком је* $d\mu \equiv 0$ *полином* $\pi_n(\cdot) = \pi_n(\cdot; d\mu)$ *може имати највише једну нулу.*

2.1.2 Трочлана рекурентна релација и Јакобијева матрица

Монични ортогонални полиноми задовољавају трочлану рекурентну релацију другог реда, помоћу које се може конструисати низ тих полинома и на основу које се формира симетрична тродијагонална матрица чије су сопствене вредности нуле моничних ортогоналних полинома.

Трочлана рекурентна релација важи на основу својства

$$(tp, q) = (p, tq), \quad \text{за свако } p, q \in \mathcal{P}, \tag{5}$$

које скаларни производ (4) очигледно задовољава (поменимо да постоје скаларни производи, од којих су неки чак и позитивно дефинитни, а који не задовољавају (5)).

Како бисмо доказали да монични ортогонални полиноми задовољавају трочлану рекурентну релацију, потребна нам је следећа лема.

Лема 1. *Скуп* $\{\pi_0, \pi_1, ..., \pi_n\}$ *моничних ортогоналних полинома је линеарно независан и представља базу простора* $\mathcal{P}_n$, *што значи да се свако* $p \in \mathcal{P}_n$ *може на јединствен начин записати у облику* $p = \sum_{k=0}^{n} c_k \pi_k$, *где је* $c_k = \frac{(p, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}$.

Из претходне леме следи да је полином π_n ортогоналан на све полиноме степена мањег од n.

Теорема 8. *Нека су* $\pi_k(\cdot) = \pi_k(\cdot; d\mu)$, $k = 0, 1, 2, ...,$ *монични ортогонални полиноми у односу на меру* $d\mu$. *Тада важи*

$$\begin{gathered} \pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, ..., \\ \pi_{-1}(t) \equiv 0, \quad \pi_0(t) \equiv 1, \end{gathered} \tag{6}$$

где је

$$\alpha_k = \alpha_k(d\mu) = \frac{(t\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{7}$$

$$\beta_k = \beta_k(d\mu) = \frac{(\pi_k, \pi_k)}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1})}, \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{8}$$

Ако је скаларни производ (4) *позитивно дефинитан на* $\mathcal{P}$, *онда је скуп индекса бесконачан,* $k \leq \infty$, *а ако је тај скаларни производ позитивно дефинитан на* $\mathcal{P}_n$, *али не и на* $\mathcal{P}_N$ *ни за једно* $N > n$, *онда за скуп индекса важи* $k \leq n - 1$.

Доказ. Како је $\pi_{k+1} - t\pi_k$ полином степена не већег од k, на основу леме 1 можемо написати

$$\pi_{k+1}(t) - t\pi_k(t) = -\alpha_k \pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t) + \sum_{l=0}^{k-2} \gamma_{kl} \pi_l(t), \tag{9}$$

за неке константе α_k, β_k и γ_{kl}, где је $\pi_{-1}(t) \equiv 0$ (за $k = 0$), и подразумева се да су празне суме (за $k = 0$ и $k = 1$) једнаке 0. Ако (9) скаларно помножимо са π_k, на основу ортогоналности добијамо

$$-(t\pi_k, \pi_k) = -\alpha_k(\pi_k, \pi_k),$$

одакле следи (7). Ако сада (9) скаларно помножимо са π_{k-1}, имамо

$$-\,(t\pi_k, \pi_{k-1}) = -\beta_k(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}). \tag{10}$$

На основу (5) је $(t\pi_k, \pi_{k-1}) = (\pi_k, t\pi_{k-1}) = (\pi_k, \pi_k)$, па увршртавањем овог резултата у (10) добијамо (8). На крају, скаларно помножимо (9) са π_i, $i = 0, 1, ..., k-2$. Следи

$$-(t\pi_k, \pi_i) = \gamma_{ki}(\pi_i, \pi_i).$$

На основу (5) и из ортогоналности следи $(t\pi_k, \pi_i) = (\pi_k, t\pi_i) = 0$. Дакле, $\gamma_{ki} = 0$, $i = 0, 1, ..., k-2$, чиме смо доказали (6). $\square$

Напомена. Ако је скуп индекса у теореми 8 коначан, $k \le n-1$, онда (7) и (8) имају смисла и за $k = n$, али полином π_{n+1} добијен на основу (6) за $k = n$ задовољава $\|\pi_{n+1}\| = 0$.

Иако β_0 у (6) може бити произвољно (јер множи $\pi_{-1} \equiv 0$), због касније употребе узимамо

$$\beta_0 = \beta_0(d\mu) = (\pi_0, \pi_0) = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t). \tag{11}$$

Постоји и обрат теореме 8, познат као Фаварова[25] теорема (иако се слично тврђење појављује неколико деценија раније у Стилтјесовим радовима о верижним разломцима), који гласи: сваки (бесконачан) низ полинома $\pi_0, \pi_1, \pi_2, ...$, који задовољава трочлану рекурентну релацију (6) са свим позитивним β_k, ортогоналан је у односу на неку позитивну меру са бесконачним носачем.

На основу теореме 8 можемо установити да и ортонормирани полиноми задовољавају трочлану рекурентну релацију другог реда.

Теорема 9. *Нека су $\tilde{\pi}_k(\cdot) = \tilde{\pi}_k(\cdot; d\mu)$, $k = 0, 1, 2, ...$, ортонормирани полиноми у односу на меру $d\mu$. Тада важи*

$$\begin{gathered} \sqrt{\beta_{k+1}}\tilde{\pi}_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\tilde{\pi}_k(t) - \sqrt{\beta_k}\tilde{\pi}_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, ..., \\ \tilde{\pi}_{-1}(t) \equiv 0, \quad \tilde{\pi}_0(t) \equiv 1/\sqrt{\beta_0}, \end{gathered} \tag{12}$$

где су α_k и β_k дати са (7), (8) *и* (11). *Скуп индекса је исти као у теореми 8.*

Дефиниција 3. Ако је скуп индекса у теоремама 8 и 9 бесконачан, онда се **Јакобијева матрица** придружена мери $d\mu$ уводи као бесконачна матрица

$$\boldsymbol{J}_\infty = \boldsymbol{J}_\infty(d\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \boldsymbol{0} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \sqrt{\beta_3} & \\ \boldsymbol{0} & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Ако је скуп индекса у теоремама 8 и 9 коначан, $k \le n-1$, онда се **Јакобијева матрица** придружена мери $d\mu$ уводи као матрица димензије

[25] Jean Favard (1902-1965), француски математичар

$l \times l,\ l = 0, 1, ..., n,$

$$\boldsymbol{J}_l = \boldsymbol{J}_l(d\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \boldsymbol{0} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{\beta_{l-2}} & \alpha_{l-2} & \sqrt{\beta_{l-1}} \\ \boldsymbol{0} & & & \sqrt{\beta_{l-1}} & \alpha_{l-1} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Приметимо да су (13) и (14) симетричне тродијагоналне матрице, као и да је матрица (14) главни минор матрице (13).

Ако се првих n једначина (12) напише у облику

$$t\tilde{\pi}_k(t) = \sqrt{\beta_k}\tilde{\pi}_{k-1}(t) + \alpha_k\tilde{\pi}_k(t) + \sqrt{\beta_{k+1}}\tilde{\pi}_{k+1}(t), \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{15}$$

и ако узмемо

$$\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t) = [\tilde{\pi}_0(t) \quad \tilde{\pi}_1(t) \quad \cdots \quad \tilde{\pi}_{n-1}(t)]^T,$$

онда се (15) може записати у матричном облику

$$t\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t) = \boldsymbol{J}_n(d\mu)\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t) + \sqrt{\beta_n}\tilde{\pi}_n(t)\boldsymbol{e}_n, \tag{16}$$

где је $\boldsymbol{e}_n = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]^T \in \mathbb{R}^n$ n-ти координатни вектор.

Теорема 10. *Нуле $t_k^{(n)}$ полинома $\pi_n(\cdot; d\mu)$ (односно полинома $\tilde{\pi}_n(\cdot; d\mu)$) су сопствене вредности Јакобијеве матрице $\boldsymbol{J}_n(d\mu)$, а $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t_k^{(n)})$ су одговарајући сопствени вектори.*

Доказ. Ако у (16) уврстимо $t = t_k^{(n)}$ и приметимо да је $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t_k^{(n)}) \neq \boldsymbol{0}$ (јер је прва компонента $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t_k^{(n)})$ једнака $1/\sqrt{\beta_0}$), следе оба тврђења теореме. $\square$

Последица. *Нека је $\boldsymbol{v}_k$ нормализован сопствени вектор матрице $\boldsymbol{J}_n(d\mu)$ који одговара сопственој вредности $t_k^{(n)}$, тј.*

$$\boldsymbol{J}_n(d\mu)\boldsymbol{v}_k = t_k^{(n)}\boldsymbol{v}_k, \quad \boldsymbol{v}_k^T\boldsymbol{v}_k = 1,$$

и нека је $\boldsymbol{v}_{k1}$ његова прва компонента. Тада важи

$$\beta_0\boldsymbol{v}_{k1}^2 = \frac{1}{\sum\limits_{l=0}^{n-1}(\tilde{\pi}_l(t_k^{(n)}))^2}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

2.2 Тежинске функције

Многе мере које се јављају у применама су апсолутно непрекидне и стога се могу написати у облику $d\mu(t) = \omega(t)dt$, где је ω ненегативна интеграбилна функција на $\mathbb{R}$ која се назива **тежинском функцијом**. Одговарајући монични ортогонални и ортонормирани полиноми означавају се и са $\pi_k(\cdot;\omega)$, односно $\tilde{\pi}_k(\cdot;\omega)$.

У овом поглављу прво разматрамо класичне, а затим Бернштајн-Сегеове тежинске функције (које представљају модификацију (класичних) Чебишовљевих тежинских функција).

2.2.1 Класичне тежинске функције

Важну фамилију ортогоналних полинома представљају **класични ортогонални полиноми**. Иако не постоји опште прихваћена дефиниција, често се под њима подразумевају ортогонални полиноми који задовољавају линеарну диференцијалну или диференцну једначину другог реда и за које постоји формула Родриговог[26] типа (о овој формули може се прочитати нпр. у [44]). Ако радимо са класичним ортогоналним полиномима у односу на меру $d\mu(t) = \omega(t)dt$, онда се одговарајућа тежинска функција $\omega(t)$ назива **класичном тежинском функцијом**.

Нас ће занимати класични монични ортогонални полиноми (напоменимо да у општем случају класични ортогонални полиноми не морају бити ни монични ни ортонормирани), код којих је $d\mu(t) = \omega(t)dt$ и код којих су коефицијенти α_k, β_k, $k = 0, 1, 2, ...$, трочлане рекурентне релације (6) експлицитно познати. У табели 1 дат је преглед коефицијената трочлане рекурентне релације неких таквих полинома чије проучавање и примена су веома заступљени. Приметимо да су све наведене тежинске функције чији је носач мере $[-1, 1]$ специјални случајеви Јакобијеве тежинске функције.

2.2.2 Бернштајн-Сегеове тежинске функције

Овде ћемо приказати нека својства Бернштајн-Сегеових тежинских

[26] Benjamin Olinde Rodrigues (1795-1851), француски математичар и економиста

Табела 1: Коефицијенти трочлане рекурентне релације неких класичних моничних ортогоналних полинома.

Назив полинома	**Тежинска функција**	**Носач**	$\boldsymbol{\alpha_k}$	$\boldsymbol{\beta_0}$	$\boldsymbol{\beta_k,\ k \geq 1}$
Лежандрови[29]	1	$[-1,1]$	0	2	$1/(4-k^{-2})$
Померени Лежандрови	1	$[0,1]$	$\frac{1}{2}$	1	$1/(4(4-k^{-2}))$
Чебишовљеви 1. врсте	$(1-t^2)^{-1/2}$	$[-1,1]$	0	π	$\frac{1}{2},\ k=1;\quad \frac{1}{4},\ k>1$
Чебишовљеви 2. врсте	$(1-t^2)^{1/2}$	$[-1,1]$	0	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{1}{4}$
Чебишовљеви 3. врсте	$(1-t)^{-1/2}(1+t)^{1/2}$	$[-1,1]$	$\frac{1}{2},\ k=0;\quad 0,\ k>0$	π	$\frac{1}{4}$
Чебишовљеви 4. врсте	$(1-t)^{1/2}(1+t)^{-1/2}$	$[-1,1]$	$-\frac{1}{2},\ k=0;\quad 0,\ k>0$	π	$\frac{1}{4}$
Гегенбауерови[30]	$(1-t^2)^{\lambda-1/2},\ \lambda>-\frac{1}{2}$	$[-1,1]$	0	$\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)}$	$\frac{k(k+2\lambda-1)}{4(k+\lambda)(k+\lambda-1)}$
Јакобијеви	$(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta},\ \alpha,\beta>-1$	$[-1,1]$	α_k^J	β_0^J	β_k^J
Лагерови[31]	e^{-t}	$[0,\infty]$	$2k+1$	1	k^2
Уопштени Лагерови	$t^{\alpha}e^{-t},\ \alpha>-1$	$[0,\infty]$	$2k+\alpha+1$	$\Gamma(1+\alpha)$	$k(k+\alpha)$
Ермитови[32]	e^{-t^2}	$[-\infty,\infty]$	0	$\sqrt{\pi}$	$\frac{1}{2}k$
Уопштени Ермитови	$\lvert t\rvert^{2\lambda}e^{-t^2},\ \lambda>-\frac{1}{2}$	$[-\infty,\infty]$	0	$\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}k$, k парно; $\frac{1}{2}k+\lambda$, k непарно

$$\alpha_k^J = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta+2)},\ \beta_0^J = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)},\ \beta_k^J = \frac{4k(k+\alpha)(k+\beta)(k+\alpha+\beta)}{(2k+\alpha+\beta)^2(2k+\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta-1)}$$

Ако је $k=0$, заједнички множилац $\alpha+\beta$ у бројиоцу и имениоцу α_0^J треба (мора, ако је $\alpha+\beta=0$) да се скрати.

Ако је $k=1$, заједнички множилац $\alpha+\beta+1$ у бројиоцу и имениоцу β_1^J треба (мора, ако је $\alpha+\beta+1=0$) да се скрати.

[29]Adrien-Marie Legendre (1752-1833), француски математичар

[30]Leopold Bernhard Gegenbauer (1849-1903), аустријски математичар

[31]Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886), француски математичар

[32]Charles Hermite (1822-1901), француски математичар

функција, која су у раду [27] разматрали Гаучи[27] и Нотарис[28]. **Бернштајн-Сегеове тежинске функције**, код којих одговарајућа мера има носач $(-1,1)$, уводе се са

$$w^{(\pm 1/2)}(t)=\frac{(1-t^2)^{\pm 1/2}}{\rho(t)},\quad w^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}(t)=\frac{(1-t)^{\pm 1/2}(1+t)^{\mp 1/2}}{\rho(t)},$$

где је

$$\rho(t)=\rho(t;\alpha,\beta,\delta)=\beta(\beta-2\alpha)t^2+2\delta(\beta-\alpha)t+\alpha^2+\delta^2,$$

при чему коефицијенти α, β и δ испуњавају услове

$$0<\alpha<\beta,\quad \beta\neq 2\alpha,\quad |\delta|<\beta-\alpha.$$

При претходним условима је $\rho(t)$ позитивно за свако $t\in(-1,1)$. Одговарајуће моничне ортогоналне полиноме степена l означимо са $\pi_l^{(\pm 1/2)}$, $\pi_l^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}$, а одговарајуће коефицијенте трочлане рекурентне релације (6) са $\alpha_k^{(\pm 1/2)}$, $\beta_k^{(\pm 1/2)}$, $\alpha_k^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}$, $\beta_k^{(\pm 1/2,\mp 1/2)}$. Важи:

$$\begin{aligned}\pi_l^{(-1/2)}(t)&=\frac{1}{2^{l-1}}\left[T_l(t)+\frac{2\delta}{\beta}T_{l-1}(t)+\left(1-\frac{2\alpha}{\beta}\right)T_{l-2}(t)\right],\quad l\geq 2,\\ \pi_1^{(-1/2)}(t)&=t+\frac{\delta}{\beta-\alpha},\quad \left(\pi_0^{(-1/2)}(t)\equiv 1,\ \pi_{-1}^{(-1/2)}(t)\equiv 0\right);\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}\pi_l^{(1/2)}(t)&=\frac{1}{2^{l}}\left[U_l(t)+\frac{2\delta}{\beta}U_{l-1}(t)+\left(1-\frac{2\alpha}{\beta}\right)U_{l-2}(t)\right],\quad l\geq 1,\\ &\left(\pi_0^{(1/2)}(t)\equiv 1,\ \pi_{-1}^{(1/2)}(t)\equiv 0\right);\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\pi_l^{(1/2,-1/2)}(t)&=\frac{1}{2^{l}}\left[W_l(t)+\frac{2\delta}{\beta}W_{l-1}(t)+\left(1-\frac{2\alpha}{\beta}\right)W_{l-2}(t)\right],\quad l\geq 2,\\ \pi_1^{(1/2,-1/2)}(t)&=t+\frac{\alpha+\delta}{\beta}\quad \left(\pi_0^{(1/2,-1/2)}(t)\equiv 1,\ \pi_{-1}^{(1/2,-1/2)}(t)\equiv 0\right);\end{aligned}\tag{19}$$

$$\pi_l^{(-1/2,1/2)}(t;\alpha,\beta,\delta)=(-1)^l\pi_l^{(1/2,-1/2)}(-t;\alpha,\beta,-\delta),\quad l\geq -1,$$

где су, за $t=\cos\theta$,

$$T_l(\cos\theta)=\cos l\theta,\quad U_l(\cos\theta)=\frac{\sin(l+1)\theta}{\sin\theta},\quad W_l(\cos\theta)=\frac{\sin(l+1/2)\theta}{\sin(\theta/2)},$$

[27]Walter Gautschi, савремени швајцарско-амерички математичар

[28]Σωτήριος Ε. Νοτάρης, савремени грчки математичар

Чебишовљеви ортогонални полиноми прве, друге и четврте врсте, редом (при чему је $T_0(t) \equiv U_0(t) \equiv W_0(t) \equiv 1$ и $U_{-1}(t) \equiv 0$). Важи и:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0^{(-1/2)} &= -\frac{\delta}{\beta-\alpha}, & \beta_1^{(-1/2)} &= \alpha\frac{(\beta-\alpha)^2-\delta^2}{\beta(\beta-\alpha)^2},\\
\alpha_1^{(-1/2)} &= \frac{\alpha\,\delta}{\beta(\beta-\alpha)}, & \beta_2^{(-1/2)} &= \frac{\beta-\alpha}{2\beta},\\
\alpha_k^{(-1/2)} &= 0,\ k \geq 2, & \beta_k^{(-1/2)} &= \frac{1}{4},\ k \geq 3;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_0^{(1/2)} &= -\frac{\delta}{\beta}, & \beta_1^{(1/2)} &= \frac{\alpha}{2\beta},\\
\alpha_k^{(1/2)} &= 0,\ k \geq 1, & \beta_k^{(1/2)} &= \frac{1}{4},\ k \geq 2;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_0^{(1/2,-1/2)} &= -\frac{\alpha+\delta}{\beta}, & \beta_1^{(1/2,-1/2)} &= \frac{\alpha(\beta-\alpha-\delta)}{\beta^2},\\
\alpha_1^{(1/2,-1/2)} &= \frac{2\alpha-\beta}{2\beta}, & \beta_k^{(1/2,-1/2)} &= \frac{1}{4},\ k \geq 2;\\
\alpha_k^{(1/2,-1/2)} &= 0,\ k \geq 2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_k^{(-1/2,1/2)}(\alpha,\beta,\delta) &= -\alpha_k^{(1/2,-1/2)}(\alpha,\beta,-\delta), \quad k \geq 0,\\
\beta_k^{(-1/2,1/2)}(\alpha,\beta,\delta) &= \beta_k^{(1/2,-1/2)}(\alpha,\beta,-\delta), \quad k \geq 0.
\end{aligned}
$$

Приметимо да су код Бернштајн-Сегеових тежинских функција сви сем неколико првих дијагоналних елемената Јакобијеве матрице (14) једнаки 0, као и да су сви сем неколико првих елемената изнад (и испод) главне дијагонале једнаки 1/2.

2.3 Квадратурне формуле засноване на интерполацији

Многе квадратурне формуле засноване су на апроксимацији подинтегралне функције интерполационом функцијом која се једноставно интеграли. Следећа теорема указује да избор алгебарског полинома за интерполациону функцију, тј. вршење полиномијалне интерполације, може имати смисла.

Теорема 11. [Вајерштрас[33]] *Нека $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Тада, за свако $\epsilon > 0$ постоји полином $p \in \mathcal{P}$ такав да је*

$$|f(t) - p(t)| < \epsilon, \quad \text{за свако } t \in [a,b].$$

[33]Karl Theodor Wilhelm Weierstraß(1815-1897), немачки математичар

У следећем одељку укратко ћемо описати Лагранжов[34] интерполациони полином, о ком се основно може наћи у [11, 25, 47, 70, 83], док је материја о интерполационим процесима детаљно изложена у [45].

2.3.1 Лагранжова интерполација

Формулишимо следећи проблем: за n различитих тачака $t_1, t_2, ..., t_n$ и вредности $f(t_k)$ неке функције f у тим тачкама, одредити полином $L \in \mathcal{P}_{n-1}$ такав да је

$$L(t_k) = f(t_k), \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Јединствено решење постављеног проблема је полином степена не већег од $n-1$, облика

$$L(t) = L_{n-1}(f;t) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) l_k(t), \tag{20}$$

где је

$$l_k(t) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{t - t_i}{t_k - t_i}, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{21}$$

Тачке t_k, $k = 1, 2, ..., n$, називају се **чворовима интерполације**, (20) се зове **Лагранжов интерполациони полином**, а (21) су тзв. **фундаментални Лагранжови полиноми**. Приметимо да је

$$l_k(t_i) = \delta_{ki}, \quad k, i = 1, 2, ..., n, \tag{22}$$

где је $\delta_{ki} = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i, \end{cases}$ **Кронекеров[35] делта симбол**.

Како бисмо размотрили грешку $r_{n-1}(f;t) = f(t) - L_{n-1}(f;t)$ за $t \neq t_k$, $k = 1, 2, ..., n$, уведимо **полином чворова**

$$\sigma_n(t) = \prod_{k=1}^{n} (t - t_k). \tag{23}$$

Ако је функција f диференцијабилна n пута, онда за свако t постоји $\xi = \xi(t)$ такво да је

$$r_{n-1}(f;t) = f(t) - L_{n-1}(f;t) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!} \sigma_n(t). \tag{24}$$

[34] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), италијански математичар и астроном

[35] Leopold Kronecker (1823-1891), немачки математичар

Лагранжову интерполациону формулу са n чворова можемо записати у облику

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) l_k(t) + r_{n-1}(f;t) \tag{25}$$

и на основу (24) видимо да је тачна за све полиноме степена не већег од $n-1$.

Интерполација (само) на основу вредности функције зове се **Лагранжова интерполација**. Општије, ако се у интерполацију укључе и вредности извода функције, онда је то **Ермитова интерполација** (Гаусова квадратура, којој је посвећено поглавље 3.1, може се добити и помоћу Ермитове интерполације).

2.3.2 Интерполационе квадратурне формуле

Посматрајмо квадратурну формулу (2),

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu(t) = Q_n(f) + R_n(f), \quad Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k f(t_k). \tag{26}$$

Дефиниција 4. Каже се да квадратурна формула (26) има (**алгебарски**) **степен тачности** d ако је

$$R_n(p) = 0, \quad \text{за свако } p \in \mathcal{P}_d. \tag{27}$$

Каже се да квадратурна формула (26) има (**алгебарски**) **степен тачности тачно** d, ако има степен тачности d, али не и $d+1$ (тј. важи (27), али постоји $p \in \mathcal{P}_{d+1}$ такво да је $R_n(p) \neq 0$).

Квадратуре (26) које имају степен тачности $d = n-1$ називају се **интерполационим**.

Прототип интерполационих квадратура су **Њутн-Коутсове квадратурне формуле**, код којих је $d\mu(t) = dt$ на $[-1,1]$, а чворови t_k су еквидистантни (једнако размакнути) на $[-1,1]$. Ове формуле се могу уопштити и на призвољан коначан интервал $[a,b]$. Вредности $\frac{\omega_k}{b-a}$, где су ω_k одговарајуће тежине, зову се **Коутсови бројеви**.

Теорема 12. *Квадратурна формула* (26) *је интерполациона ако и само ако се може добити интеграцијом Лагранжове интерполационе формуле* (25). *При том важи*

$$\omega_k = \int_{\mathbb{R}} l_k(t) d\mu(t),\ k = 1,2,...,n; \quad R_n(t) = \int_{\mathbb{R}} r_{n-1}(f;t) d\mu(t). \tag{28}$$

Доказ. ($\Rightarrow$) Ако је $d = n-1$, уврштавањем $f = l_i$ у (26) имамо

$$\int_{\mathbb{R}} l_i(t)d\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k l_i(t_k) = \omega_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

јер $l_i \in \mathcal{P}_{n-1}$ и важи (22), чиме смо доказали прву једнакост (28). Користећи претходни резултат при интеграцији формуле (25) добијамо квадратуру облика (26) и другу једнакост (28).

($\Leftarrow$) Ако интегралимо формулу (25), добијамо (28). Како за $p \in \mathcal{P}_{n-1}$ важи $r_{n-1}(p;t) \equiv 0$, следи $R_n(p) = 0$, па је $d = n-1$. □

Приметимо да тежине ω_k, $k = 1, 2, ..., n$, у (28) не зависе од функције f, већ само од чворова t_k, $k = 1, 2, ..., n$.

На основу теореме 12 видимо да се за n различитих чворова t_k квадратурна формула (26) увек може конструисати тако да буде интерполациона, тј. да има степен тачности $d = n-1$. Наредна теорема нам говори под којим условима се може постићи већи степен тачности.

Теорема 13. *Нека је дат цео број m, $0 \leq m \leq n$. Квадратурна формула* (26) *има степен тачности $d = n-1+m$ ако и само ако су задовољена оба следећа услова:*

(а) *формула* (26) *је интерполациона;*

(б) *полином чворова* (23) *задовољава*

$$\int_{\mathbb{R}} \sigma_n(t)p(t)d\mu(t) = 0, \quad \text{за свако } p \in \mathcal{P}_{m-1}.$$

Доказ. ($\Rightarrow$) Тривијално следи да је услов (а) потребан. Лако се добија и да је услов (б) потребан, јер на основу $\sigma_n p \in \mathcal{P}_{n-1+m}$ и $\sigma_n(t_k) = 0$, $k = 1, 2, ..., n$, важи

$$\int_{\mathbb{R}} \sigma_n(t)p(t)d\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \sigma_n(t_k)p(t_k) = 0.$$

($\Leftarrow$) Како бисмо доказали довољност (а) и (б), треба да покажемо да је под тим условима $R_n(p) = 0$ за свако $p \in \mathcal{P}_{n-1+m}$. Дељењем полинома p полиномом σ_n добијамо

$$p = q\sigma_n + r, \quad q \in \mathcal{P}_{m-1}, \; r \in \mathcal{P}_{n-1}.$$

Тада је
$$\int_{\mathbb{R}} p(t)d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} q(t)\sigma_n(t)d\mu(t) + \int_{\mathbb{R}} r(t)d\mu(t).$$
Како је $q \in \mathcal{P}_{m-1}$, то је први интеграл са десне стране на основу (б) једнак 0, а како је $r \in \mathcal{P}_{n-1}$, то је други интеграл са десне стране на основу (а) једнак $\sum_{k=1}^{n} \omega_k r(t_k)$. Важи и

$$r(t_k) = p(t_k) - q(t_k)\sigma_n(t_k) = p(t_k),$$

па следи
$$\int_{\mathbb{R}} p(t)d\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k p(t_k),$$
тј. $R_n(p) = 0$. □

Квадратурну формулу (26) степена тачности $2n-1-m$, $0 \le m \le n$, називамо **$(2n-1-m, n, d\mu)$-квадратуром**. За полином $p_n \in \mathcal{P}_n$ каже се да **генерише** $(2n-1-m, n, d\mu)$-квадратуру ако има n простих нула које су чворови те квадратуре.

Ако је $d\mu$ позитивна мера, онда је $m = n$ у теореми 13 оптимално. Заиста, како услов (б) захтева да σ_n буде ортогонално на све полиноме степена не већег од $m-1$, онда би σ_n за $m = n+1$ морало да буде ортогонално на све полиноме степена не већег од n, па и на самог себе, што је немогуће. Оптимална квадратура (26) за $m = n$ има степен тачности $d = 2n-1$ и зове се **Гаусова квадратурна формула**. У том случају, из услова (б) следи $\sigma_n(t) = \pi_n(t; d\mu)$, тј. чворови t_k су нуле моничних ортогоналних полинома степена n у односу на меру $d\mu$, а тежине ω_k могу се добити на основу (28). Овим формулама посвећено је поглавље 3.1.

2.4 Конвергенција низа квадратурних сума

Посматрајмо низ (интерполационих) квадратурних формула (26),

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) = Q_n(f) + R_n(f), \\ Q_n(f) &= \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{(n)} f(t_k^{(n)}), \quad n = 1, 2, 3, ..., \end{aligned} \tag{29}$$

за чије чворове важи

$$a \le t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \le b, \tag{30}$$

где је $[a, b]$ конвексни омотач носача мере $d\mu$. Нека је f елемент Банаховог[36] простора $\mathcal{C}[a, b]$, при чему је $\|f\| = \|f\|_\infty = \max_{a\le t\le b} |f(t)|$, и третирајмо $I(f)$, $Q_n(f)$ и $R_n(f)$ као функционале из $\mathcal{C}[a, b]$ у $\mathbb{R}$. Занима нас под којим условима $R_n(f) \to 0$ када $n \to \infty$, тј. под којим условима низ квадратурних сума $\{Q_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка интегралу $I(f)$. Да бисмо одговорили на ово питање, потребни су нам неки појмови и резултати функционалне анализе (за детаље видети [4]).

Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ нормирани простори над истим пољем скалара.

Дефиниција 5. Линеарни оператор $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ је **ограничен** ако постоји позитиван број C такав да за свако $f \in \mathcal{X}$ важи $\|A(f)\| \le C\,\|f\|$. Инфимум бројева C за које важи претходна неједнакост назива се **нормом** оператора A и означава са $\|A\|$.

Простор ограничених линеарних оператора из $\mathcal{X}$ у $\mathcal{Y}$ означавамо са $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. За $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ важи неједнакост $\|A(f)\| \le \|A\| \cdot \|f\|$ за свако $f \in A$.

Теорема 14. [Банах-Штајнхаус[37]] *Нека су $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ Банахови простори и нека је $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Низ $\{A_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира за свако $f \in \mathcal{X}$ ако и само ако су испуњена оба следећа услова:*

(а) *низ $\{\|A_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ је ограничен;*

(б) *$\lim\limits_{n\to\infty} A_n(f)$ постоји за свако f из неког скупа $\mathcal{X}_0$ чији је линеарни омотач свуда густ у $\mathcal{X}$.*

Притом је са $A(f) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(f)$ дефинисан оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ за чију норму важи $\|A\| \le \liminf\limits_{n\to\infty} \|A_n\|$.

Наведимо тврђења која важе за конвергенцију низа квадратурних сума.

Теорема 15. *Низ квадратурних сума $\{Q_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка интегралу $I(f)$ за свако $f \in \mathcal{C}[a, b]$ ако и само ако су испуњена оба следећа услова:*

(а) *низ $\{Q_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ка $I(f)$ за свако $f \in \mathcal{P}$;*

(б) *постоји константа $C > 0$ таква да је*

$$\sum_{k=1}^{n} |\omega_k^{(n)}| \le C, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{31}$$

[36] Stefan Banach (1892-1945), пољски математичар

[37] Wyadysyaw Hugo Dionizy Steinhaus (1887-1972), јеврејско-пољски математичар

Доказ. Сведимо услове (а) и (б) ове теореме на услове (а) и (б) теореме 14 Банах-Штајнхауса. У (29) је задат линеарни функционал Q_n који је, на основу

$$|Q_n(f)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\omega_k^{(n)}| \cdot |f(t_k^{(n)})| \leq \|f\| \sum_{k=1}^{n} |\omega_k^{(n)}| \leq C \|f\|,$$

ограничен за свако $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Стога је за свако $f \in \mathcal{C}[a,b]$ задовољено

$$|Q_n(f)| \leq \|Q_n\| \cdot \|f\|, \tag{32}$$

при чему (по дефиницији 5) мора бити $\|Q_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} |\omega_k^{(n)}|$. Како бисмо тачно одредили $\|Q_n\|$, изаберимо функцију $g \in \mathcal{C}[a,b]$, одређену са

$$g(t_k^{(n)}) = \operatorname{sgn} \omega_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, ..., n,$$

која је линеарна на $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$, $k = 1, 2, ..., n-1$, и константна на $[a, t_1^{(n)}]$ и $[t_n^{(n)}, b]$ (услов (30) омогућава да се конструише оваква функција). Тада је $\|g\| = 1$ и

$$Q_n(g) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{(n)} \cdot \operatorname{sgn} \omega_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} |\omega_k^{(n)}|,$$

па из (32) за $f \equiv g$ имамо $\|Q_n\| \geq \sum_{k=1}^{n} |\omega_k^{(n)}|$. Следи

$$\|Q_n\| = \sum_{k=1}^{n} |\omega_k^{(n)}|.$$

Како је на основу (31) низ $\{\|Q_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ ограничен и како је $\lim\limits_{n \to \infty} Q_n(f) = I(f)$ за свако $f \in \mathcal{P}$, при чему је $\mathcal{P}$ свуда густ у $\mathcal{C}[a,b]$, тврђење теореме следи на основу теореме 14 Банах-Штајнхауса. □

Последица. *Ако је $\omega_k^{(n)} \geq 0$, $n = 1, 2, 3, ...$, $k = 1, 2, ..., n$, онда низ $\{Q_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира ка $I(f)$ за свако $f \in \mathcal{C}[a,b]$ ако и само ако $\{Q_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира ка $I(f)$ за свако $f \in \mathcal{P}$.*

Доказ. Заменом $f \equiv 1$ у (29) добијамо $\mu_0 = \sum_{k=1}^{n} |\omega_k^{(n)}|$, где је μ_0 (коначни позитиван) момент нултог реда дат са (3). Стога је за $C = \mu_0$ испуњен услов (б) теореме 15, одакле следи тврђење ове последице. □

2.5 Карактеризација позитивних квадратура

У одељку 1.3 смо рекли да је квадратура позитивна ако су јој све тежине ω_k позитивне, док на основу последице теореме 15 видимо да низ квадратурних сума Q_n позитивних квадратурних формула конвергира тачној вредности интеграла I – стога позитивне квадратуре заузимају значајно место у нумеричкој интеграцији.

За полином $p_{n-1}^{[1]}$ каже се да је **придружен** полиному p_n степена (тачно) n ако је дат са

$$p_{n-1}^{[1]} = \int_{\mathbb{R}} \frac{p_n(t) - p_n(s)}{t - s} d\mu(s).$$

Полином $p_{n-1}^{[1]}$ је степена (тачно) $n-1$.

Следеће тврђење, које је веома значајно у испитивању уопштених усредњених Гаусових квадратура, следи на основу резултата из рада Перoccшторфера[38] [64].

Теорема 16. *Нека $n, m \in \mathbb{N}_0$, $0 \le m \le n$. Тада полином $p_n \in \mathcal{P}_n$ генерише позитивну $(2n-1-m, n, d\mu)$-квадратуру ако и само ако су испуњена сва три следећа услова:*

(а) *p_n је ортогоналан на потпростор $\mathcal{P}_{n-1-m}$ у односу на меру $d\mu$;*

(б) *p_n има n простих нула у отвореном интервалу (a, b), где је $[a, b]$ конвексни омотач носача мере $d\mu$;*

(в) *нуле полинома p_n и $p_{n-1}^{[1]}$ међусобно алтернирају.*

Поменимо овде важно и занимљиво тврђење везано за позитивне квадратуре дато у раду Гаучија [20], где је показано да постоји 1-1 пресликавање између Јакобијевих матрица и квадратурних формула са позитивним тежинама.

[38] Franz Peherstorfer (1950-2009), аустријски математичар

3 Гаусове квадратурне формуле и неке њихове екстензије

Сада ћемо се посветити Гаусовим квадратурама и неким њиховим екстензијама које првенствено служе за (економичну) процену грешке Гаусових квадратурних формула.

3.1 Гаусове квадратурне формуле

Јединствена оптимална интерполациона квадратура са n чворова у односу на позитивну меру $d\mu$ зове се **Гаусова квадратурна формула** и записујемо је у облику

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) = G_n(f) + R_n^G(f), \quad G_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^G f(t_k^G). \tag{33}$$

Чворове t_k^G називамо **Гаусовим чворовима**, а тежине ω_k^G **Гаусовим тежинама**.

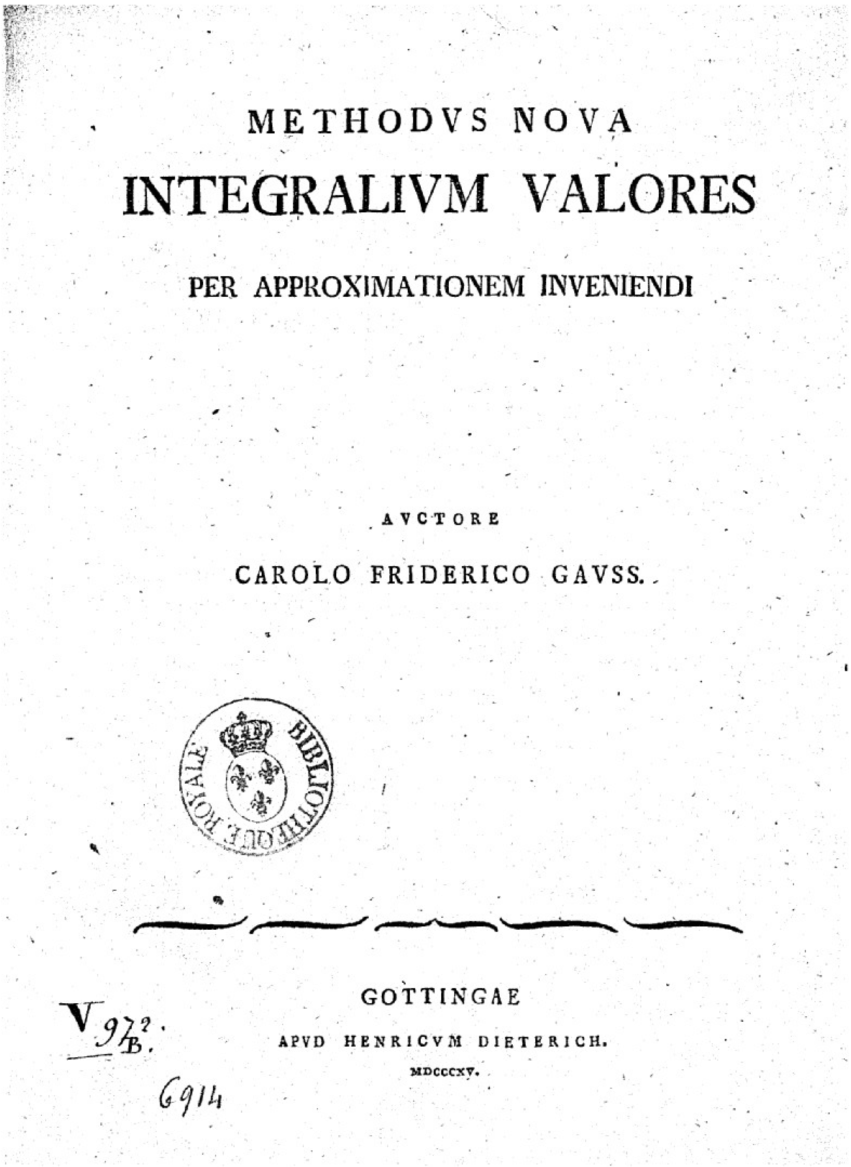
Формулу (33) (за $d\mu(t) = dt$) увео је Гаус 1814. (видети [19] и слику 1), користећи резултате свог рада о хипергеометријским развојима из 1812. године. Од тада се Гаусове квадратуре проучавају и развијају у разним правцима. Ове формуле данас заузимају једно од најважнијих места у нумеричкој интеграцији.

На основу дискусије из последњег пасуса одељка 2.3.2 следи да формула (33) има степен тачности $d = 2n - 1$, да су чворови t_k^G нуле моничних ортогоналних полинома $\pi_n(t; d\mu)$ степена n и да се тежине ω_k^G могу се добити на основу (28). Међутим, постоји нумерички повољнија конструкција Гаусових квадратура. Прво формулишимо следећу теорему.

Теорема 17. *Сви чворови t_k^G Гаусове квадратурне формуле* (33) *су реални, међусобно различити и припадају унутрашњости конвексног омотача* $[a, b]$ *носача мере $d\mu$, док су све тежине ω_k^G позитивне.*

Доказ. Тврђење које се односи на чворове следи из теореме 5, јер су чворови t_k^G нуле моничних ортогоналних полинома $\pi_n(\cdot; d\mu)$, док тврђење које се односи на тежине добијамо на основу Стилтјесовог резултата

$$0 < \int_{\mathbb{R}} l_i^2(t)d\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^G l_i^2(t_k^G) = \omega_i^G, \quad i = 1, 2, ..., n,$$



METHODVS NOVA

INTEGRALIVM VALORES

PER APPROXIMATIONEM INVENIENDI

AVCTORE

CAROLO FRIDERICO GAVSS.

GOTTINGAE

APVD HENRICVM DIETERICH.

MDCCCXV.

Слика 1: Насловна страна Гаусовог рада из 1814. године.

где прва једнакост следи из $l_i^2 \in \mathcal{P}_{2n-2} \subset \mathcal{P}_{2n-1}$, а друга из (22). $\square$

Приметимо да на основу последице теореме 15 следи конвергенција низа квадратурних сума G_n Гаусове квадратуре (33) ка интегралу I (напоменимо да се последица теореме 15 не може применити у случају Њутн-Коутсових квадратура, јер су у њима за $n \geq 8$ неке од тежина негативне; постоје и примери када код Њутн-Коутсових квадратура долази до Рунгеовог[39] феномена, тј. до дивергенције низа квадратурних сума).

3.1.1 Конструкција Гаусових квадратура

Под конструкцијом квадратурне формуле (26) подразумева се одређивање њених чворова t_k и тежина ω_k. Гаусова квадратура (33) могла би да се конструише решавањем система једначина

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^G (t_k^G)^j = \mu_j, \quad j = 0, 1, ..., 2n-1, \tag{34}$$

где су μ_j моменти мере $d\mu$ дати са (3). Међутим, због слабе условљености (тј. могућности да мале промене улазних величина изазову велике промене у решењу) система (34), овај приступ није погодан.

Овде ћемо приказати нумерички повољну конструкцију Гаусове квадратурне формуле (33), засновану на резултатима Голуба[40] и Велша[41] [31] (резултат који се односи на тежине ω_k вероватно је први приметио Вилф[42] у [86]; дискусије о овом алгоритму могу се наћи и у [21, 22, 30]).

Нека је $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_n(d\mu)$ Јакобијева матрица (14) димензије $n \times n$ придружена (позитивној) мери $d\mu$. Са $t_k^{(n)}$ означимо њене сопствене вредности, а са $\boldsymbol{v}_k$ одговарајуће нормализоване сопствене векторе. Нека је $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1 \;\; \boldsymbol{v}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{v}_n]$, при чему је $\boldsymbol{V}$ ортогонална матрица у спектралној де-

[39] Carl David Tolmé Runge (1856-1927), немачки математичар и физичар

[40] Gene Howard Golub (1932-2007), амерички математичар

[41] John H. Welsch, савремени амерички математичар

[42] Herbert Saul Wilf (1931-2012), амерички математичар

композицији матрице $\boldsymbol{J}$,

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{D}_t, \quad \boldsymbol{D}_t = \begin{bmatrix} t_1^{(n)} & & & \mathbf{0} \\ & t_2^{(n)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & t_n^{(n)} \end{bmatrix}.$$

Теорема 18. *Чворови t_k^G Гаусове квадратурне формуле са n чворова* (33) *су сопствене вредности Јакобијеве матрице $\boldsymbol{J}_n(d\mu)$, тј. $t_k^G = t_k^{(n)}$, $k = 1, 2, ..., n$, а за тежине ω_k^G важи*

$$\omega_k^G = \beta_0 \boldsymbol{v}_{k1}^2, \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{35}$$

где је $\beta_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t)$, а $\boldsymbol{v}_{k1}$ је прва компонента нормализованог сопственог вектора $\boldsymbol{v}_k$ који одговара сопственој вредности $t_k^{(n)}$.

<u>*Доказ.*</u> Тврђење које се односи на чворове следи из теореме 10 и разматрања са краја одељка 2.3.2, где смо установили да су чворови Гаусове квадратуре нуле моничних ортогоналних полинома.

Нека су $\tilde{\pi}_l(t) = \tilde{\pi}_l(t; d\mu)$, $l = 0, 1, ..., n-1$, ортонормирани полиноми у односу на меру $d\mu$ и $\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t) = [\tilde{\pi}_0(t) \quad \tilde{\pi}_1(t) \quad \cdots \quad \tilde{\pi}_{n-1}(t)]^T$. На основу последице теореме 10 је

$$\beta_0 \boldsymbol{v}_{k1}^2 = \frac{1}{\sum\limits_{l=0}^{n-1} (\tilde{\pi}_l(t_k^G))^2}, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{36}$$

Ако у Гаусову квадратуру (33) уврстимо $f(t) = \tilde{\pi}_l(t)$, $l = 0, 1, ..., n-1$, с обзиром да је $\tilde{\pi}_0 \equiv \beta_0^{-1/2}$ (видети теорему 9), на основу ортогоналности имамо

$$\beta_0^{1/2} \delta_{l0} = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^G \tilde{\pi}_l(t_k^G). \tag{37}$$

Ако са $\boldsymbol{P}$ означимо мартицу сопствених вектора Јакобијеве матрице $\boldsymbol{J}$ (видети теорему 10), а са $\boldsymbol{\omega}^G$ вектор тежина Гаусове квадратуре (33), тј.

$$\boldsymbol{P} = [\tilde{\boldsymbol{\pi}}(t_1^G) \quad \tilde{\boldsymbol{\pi}}(t_2^G) \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{\pi}}(t_n^G)], \quad \boldsymbol{\omega}^G = [\omega_1^G \quad \omega_2^G \quad \cdots \quad \omega_n^G]^T,$$

онда (37) можемо записати у матричном облику

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\omega}^G = \beta_0^{1/2} \boldsymbol{e}_1, \tag{38}$$

где је $\boldsymbol{e}_1 = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T \in \mathbb{R}^n$. Како су колоне $\boldsymbol{P}$ међусобно ортогоналне, важи

$$\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}_\pi, \quad \boldsymbol{D}_\pi = \begin{bmatrix} d_1 & & & \mathbf{0} \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & d_n \end{bmatrix}, \quad d_k = \sum_{l=0}^{n-1} (\tilde{\pi}_l(t_k^G))^2, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Множењем (38) са леве стране са P^T добијамо

$$\boldsymbol{D}_\pi \boldsymbol{\omega}^G = \beta_0^{1/2} \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{e}_1 = \beta_0^{1/2} \beta_0^{-1/2} \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e},$$

где је $\boldsymbol{e} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T \in \mathbb{R}^n$. Следи

$$\boldsymbol{\omega}^G = \boldsymbol{D}_\pi^{-1} \boldsymbol{e},$$

односно

$$\omega_k^G = \frac{1}{\sum\limits_{l=0}^{n-1} \left(\tilde{\pi}_l(t_k^G)\right)^2}, \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{39}$$

Сада (35) следи из (36) и (39). □

Дакле, конструкција Гаусових квадратурних формула (33) своди се на одређивање сопствених вредности и сопствених вектора Јакобијеве матрице (14). У те сврхе могу се користити разни алгоритми нумеричке линеарне алгебре.

3.1.2 Процена грешке Гаусових квадратура

Посматрајмо Гаусову квадратурну формулу са n чворова (33),

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\mu(t) = G_n(f) + R_n^G(f), \quad G_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^G f(t_k^G). \tag{40}$$

Како бисмо установили колико прецизно квадратурна сума G_n апроксимира интеграл I, разматрамо грешку R_n^G. Ретко кад се може израчунати тачна вредност грешке, па се врши њена **оцена** (тј. одређује се горња граница (апсолутне вредности) грешке) или **процена** (односно, одређује се приближна вредност грешке). Поменимо да се при рачунању квадратурне суме G_n јавља и грешка која зависи од тачности израчунавања.

Нас занимају процене грешке $|(I - G_n)(f)|$ Гаусове квадратуре (40) које су засноване на идеји да се конструише квадратура са N чворова већег степена тачности (приметимо да мора бити $N > n$),

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) = Q_N(f) + R_N(f), \quad Q_N(f) = \sum_{k=1}^{N} \omega_k f(t_k), \tag{41}$$

и да се за процену грешке узме разлика $|(Q_N - G_n)(f)|$, тј.

$$|R_n^G(f)| = |(I - G_n)(f)| \approx |(Q_N - G_n)(f)|.$$

Разматраћемо економичне процене грешке, тј. процене код којих n чворова Гаусове квадратуре (40) представља подскуп N чворова квадратуре (41). У таквим ситуацијама квадратурну формулу (41) можемо записати у облику

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) = Q_{n+m}(f) + R_{n+m}(f), \\ Q_{n+m}(f) &= \sum_{k=1}^{n} \tilde{\omega}_k^G f(t_k^G) + \sum_{l=1}^{m} \tilde{\omega}_l f(\tilde{t}_l), \end{aligned} \tag{42}$$

где t_k^G, $k = 1, 2, ..., n$, представља n Гаусових, а $\tilde{t}_l$, $l = 1, 2, ..., m$, је m нових чворова ($n+m = N$). Претпоставимо да треба одредити m нових чворова $\tilde{t}_l$ и свих $n+m$ тежина $\tilde{\omega}_k^G$ и $\tilde{\omega}_l$, тако да степен тачности квадратуре (42) буде максималан. Како одређујемо укупно $n+2m$ непознатих, очекивани степен тачности формуле (42) није већи од $n + 2m - 1$. Како би квадратура (42) имала већи степен тачности од Гаусове квадратуре (40), треба да буде $n+2m-1 > 2n-1$, односно $m \geq \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Испоставља се да мора бити $m \geq n + 1$, а нас првенствено занима случај $m = n + 1$.

Осим економичности, постоји још неколико пожељних особина формуле (41) за процену грешке Гаусове квадратуре (40). Прва од њих је да сви чворови t_k буду реални, тј. да та формула постоји. Значајно је и да све тежине ω_k буду позитивне (видети последицу теореме 15). Питање унутрашњости квадратурне формуле (41) је такође важно, јер се може десити нпр. да добијемо спољашње чворове у којима интегранд није дефинисан; код економичних квадратура (41) са $2n+1$ чворова значајно је да $n + 1$ нових чворова алтернира са n чворова Гаусове квадратуре (40), јер у тој ситуацији највише два чвора формуле (41) могу бити спољашња.

3.2 Гаус-Кронродове[43] квадратурне формуле

Године 1964. (видети [36, 37]) Кронрод је увео квадратурне формуле са $2n+1$ чворова, облика

$$\begin{aligned} I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) &= K_{2n+1}(f) + R_{2n+1}^{K}(f), \\ K_{2n+1}(f) &= \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{GK} f(t_k^G) + \sum_{l=1}^{n+1} \omega_l^K f(t_l^K). \end{aligned} \tag{43}$$

У (43) t_k^G представљају n чворова Гаусове квадратуре (33), а нових $n+1$ чворова t_l^K и све тежине ω_k^{GK}, ω_l^K бирају се тако да се постигне максимални степен тачности, који с обзиром на укупан број непознатих параметара износи $3n+1$, тј. треба да буде

$$R_{2n+1}^{K}(f) = 0, \quad \text{за свако } f \in \mathcal{P}_{3n+1}. \tag{44}$$

Квадратура (43) која задовољава (44) назива се **Гаус-Кронродовом квадратурном формулом** или **Кронродовом екстензијом** Гаусове квадратурне формуле, а чворови t_l^K су тзв. **Кронродови чворови**. Ове формуле често се називају квадратурама 20. века.

Кронрод је разматрао случај $d\mu(t) = dt$ на интервалу $[-1, 1]$. Наравно, и у том случају степен тачности формуле (43) износи $3n+1$, али ако је n парно, степен тачности формуле (43) износи $3n+2$.

Историјски преглед проучавања Гаус-Кронродових квадратурних формула може се наћи у радовима Гаучија [24] и Нотариса [60]. Поменимо да је још 1894. Скуч[44] [75] указао на могућност да се Гаусова квадратура (33) са n чворова додавањем $n+1$ нових чворова прошири до квадратуре степена тачности $3n+1$. Он је наслутио и да је $n+1$ најмањи број чворова који се мора додати како би проширена формула имала већи степен тачности од Гаусове, што је касније доказао Монегато[45] у [55].

Мотивација за увођење квадратуре (43) је да се грешка $|(I-G_n)(f)|$ Гаусове квадратуре (33) процени помоћу разлике $|(K_{2n+1}-G_n)(f)|$. Таква процена је економична, јер се n вредности функције $f(t_k^G)$ добијених

[43] Алекса́ндр Семёнович Кронро́д (1921-1986), совјетски математичар

[44] Rudolf Skutsch (1870-1929), немачки инжењер

[45] Giovanni Monegato, савремени италијански математичар

помоћу Гаусове квадратуре (33) поново користе, а само $n+1$ нових вредности функције $f(t_l^K)$ треба израчунати. Исто толико нових вредности функције би требало израчунати и за добијање Гаусове квадратуре са $n+1$ чворова (и тада бисмо уместо формуле степена тачности $2n-1$ добили формулу степена тачности (свега) $2n+1$), с тим што Кронродова екстензија са $2n+1$ чворова обично даје много бољу процену грешке.

Одговарајући полином чворова је облика

$$\sigma_{2n+1}(t) = \pi_n(t; d\mu)\pi_{n+1}^K(t), \quad \pi_{n+1}^K(t) = \prod_{l=1}^{n+1}(t - t_l^K),$$

а на основу теореме 13, како би било испуњено (44) (што у теореми 13 одговара ситуацији $m = n+1$), овај полином мора задовољити $\int_{\mathbb{R}} \sigma_{2n+1}(t)p(t)d\mu(t) = 0$ за свако $p \in \mathcal{P}_n$, односно

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_{n+1}^K(t)p(t)\pi_n(t; d\mu)d\mu(t) = 0, \quad \text{за свако } p \in \mathcal{P}_n. \tag{45}$$

Ако се из услова (45) успешно одреде Кронродови чворови и ако се ниједан не поклапа са неким Гаусовим чвором, тежине квадратурне формуле (43) добијају се из услова $R_{2n+1}^K(f) = 0$ за свако $f \in \mathcal{P}_{2n}$ (видети теорему 12).

Услов (45) је нова врста ортогоналности, која захтева да полином π_{n+1}^K степена $n+1$ буде ортогоналан на све полиноме нижег степена у односу на меру $d\mu_n^K(t) = \pi_n(t; d\mu)d\mu(t)$. Приметимо да мера $d\mu_n^K$ зависи од n, као и да мења знак на конвексном омотачу носача мере $d\mu$. Овакве полиноме (у случају $d\mu(t) = dt$) први је разматрао Стилтјес (о чему сведочи његово последње писмо Ермиту из 1894. године, видети [5]), па је полином $\pi_{n+1}^K(\cdot) = \pi_{n+1}^K(\cdot; d\mu)$ по њему добио назив **Стилтјесов полином** степена $n+1$ у односу на меру $d\mu$.

Теорема 19. *Ако је $d\mu$ позитивна мера, онда за свако $n \geq 1$ постоји јединствен Стилтјесов полином $\pi_{n+1}^K(\cdot; d\mu)$.*

3.2.1 (Не)егзистенција Гаус-Кронродових квадратура

Иако је теоремом 19 обезбеђена јединственост Стилтјесовог полинома, није обезбеђено (а често није ни случај) да су његове нуле, тј. Кронродови чворови, сви реални, сви садржани у конвексном омотачу носача мере $d\mu$ и да алтернирају са Гаусовим чворовима.

Сада ћемо дати кратак преглед егзистенције (и још неких својстава) Кронродове екстензије за неке класичне тежинске функције (видети табелу 1). Подсетимо се да за квадратурну формулу кажемо да постоји ако су јој сви чворови реални, док у супротном кажемо да не постоји.

Размотримо прво тежинске функције код којих одговарајуће мере имају коначне носаче. Код Чебишовљеве тежинске функције прве врсте $\omega(t) = (1-t^2)^{-1/2}$, за $n \geq 2$ два чвора Кронродове екстензије (43) су -1 и 1, а остали се налазе унутар носача $[-1, 1]$. Монегато је доказао да је у случају Чебишовљеве тежинске функције 1. врсте степен тачности већи од очекиваног и износи $4n-1 (\geq 3n+1)$, док је за Чебишовљеву тежинску функцију друге врсте $\omega(t) = (1-t^2)^{1/2}$ доказао да је степен тачности $4n+1$. Посматрајмо затим квадратуру (43) са Гегенбауеровом тежинском функцијом $\omega(t) = (1-t^2)^{\lambda-1/2}$. За $0 < \lambda \leq 2$ (што обухвата и случај $\lambda = 1/2$ који је разматрао Кронрод), Сеге [84] је показао да се сви чворови налазе унутар носача $[-1, 1]$, као и да Кронродови чворови алтернирају са Гаусовим чворовима, док је Рабиновиц[46] [68] показао да разматрана формула има степен тачности тачно $3n+1$ за парно n, односно $3n+2$ за непарно n, изузев када је $\lambda = 1$ и тада је степен тачности тачно $4n+1$. За $0 < \lambda \leq 1$ из рада Монегата [54] видимо да су све тежине позитивне. Першторфер и Петрас[47] су у [66] показали непостојање квадратуре (43) са Гегенбауеровом тежинском функцијом за довољно велико n и $\lambda > 3$, док су у [67] показали непостојање квадратуре (43) са Јакобијевом тежинском функцијом $\omega(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ за довољно велико n при $\min\{\alpha, \beta\} \geq 0$ и $\max\{\alpha, \beta\} > 5/2$. Гаучи и Нотарис су у [26] разматрали Гаус-Кронродове квадратурне формуле са Гегенбауеровом и Јакобијевом тежинском функцијом – за $n \leq 40$ испитивали су да ли су Кронродови чворови сви реални, сви садржани унутар носача и да ли алтернирају са Гаусовим чворовима, а испитивали су и позитивност тежина.

Пређимо сада на тежинске функције код којих одговарајуће мере имају бесконачне носаче. Каханер[48] и Монегато [33] показали су да у случају уопштене Лагерове тежинске функције $\omega(t) = t^{\alpha}e^{-t}$ не постоји

[46]Philip Rabinowitz (1926-2006), израелско-амерички математичар

[47]Knut Petras, савремени немачки математичар

[48]David K. Kahaner, савремени амерички математичар

Кронродова екстензија за $n \geq 23$, а ако је $\alpha = 0$, онда ни за $n > 1$. У случају Ермитове тежинске функције $\omega(t) = e^{-t^2}$ у истом раду је доказано да Кронродова екстензија не постоји, изузев у случајевима $n = 1, 2, 4$.

Референце и нумерички примери везани за дискусију у овом одељку могу се наћи у [3, 60].

У ситуацијама када Гаус-Кронродова квадратура (43) не постоји, за процену грешке Гаусове квадратуре (33) траже се њене алтернативе. Једна од тих алтернатива је уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула коју је увео Спалевић[49] у [78] и о којој ће бити речи у одељку 3.3.2.

3.2.2 Конструкција Гаус-Кронродових квадратура

О ефикасним нумеричким методама за рачунање чворова и тежина позитивних Гаус-Кронродових квадратурних формула може се прочитати у [3, 7, 22, 41, 56, 60]. Овде ћемо дати скицу алгоритма из [41].

Претпостављамо да су сви чворови Кронродове екстензије (43) реални и да су све тежине позитивне (занимљив је резултат Монегата [53], где је показано да су све тежине ω_l^K позитивне ако и само ако су сви Кронродови чворови реални и алтернирају са Гаусовим чворовима; значај позитивности тежина видели смо и у поглављу 2.4). Идеја је да се формира симетрична тродијагонална **Јакоби-Кронродова матрица** димензије $(2n+1) \times (2n+1)$,

$$\boldsymbol{J}_{2n+1}^K = \boldsymbol{J}_{2n+1}^K(d\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0^K & \sqrt{\beta_1^K} & & & \mathbf{0} \\ \sqrt{\beta_1^K} & \alpha_1^K & \sqrt{\beta_2^K} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{\beta_{2n-1}^K} & \alpha_{2n-1}^K & \sqrt{\beta_{2n}^K} \\ \mathbf{0} & & & \sqrt{\beta_{2n}^K} & \alpha_{2n}^K \end{bmatrix}, \tag{46}$$

и да се чворови и тежине формуле (43) изразе преко сопствених вредности и сопствених вектора матрице (46).

Како формула (43) има степен тачности $3n+1$, то се међу коефицијентима $\alpha_0^K, \beta_1^K, \alpha_1^K, ..., \beta_{2n}^K, \alpha_{2n}^K$ матрице (46) првих $3n+1$ поклапа са коефицијентима α_k и β_k Јакобијеве матрице (14), $\boldsymbol{J}_n = \boldsymbol{J}_n(d\mu)$, тј. матрица (46)

[49] Миодраг М. Спалевић, савремени српски математичар

има облик

$$\boldsymbol{J}_{2n+1}^{K}(d\mu) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_n(d\mu) & \sqrt{\beta_n}\boldsymbol{e}_n & \boldsymbol{0} \\ \sqrt{\beta_n}\boldsymbol{e}_n^T & \alpha_n & \sqrt{\beta_{n+1}}\boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{0} & \sqrt{\beta_{n+1}}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{J}_n^* \end{bmatrix}, \tag{47}$$

где су $\boldsymbol{e}_1 = [1 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0]^T$, $\boldsymbol{e}_n = [0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 1]^T \in \mathbb{R}^n$ координатни вектори, а $\boldsymbol{J}_n^*$ је реална симетрична тродијагонална матрица димензије $n \times n$ чији облик зависи од парности n,

$$\boldsymbol{J}_n^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{n+1:(3n-1)/2}(d\mu) & \sqrt{\beta_{(3n+1)/2}}\boldsymbol{e}_{(n-1)/2} \\ \sqrt{\beta_{(3n+1)/2}}\boldsymbol{e}_{(n-1)/2}^T & \boldsymbol{J}_{(3n+1)/2:2n}^* \end{bmatrix} \quad (n \text{ непарно}), \tag{48}$$

$$\boldsymbol{J}_n^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{n+1:3n/2}(d\mu) & \sqrt{\beta_{(3n+2)/2}^K}\boldsymbol{e}_{n/2} \\ \sqrt{\beta_{(3n+2)/2}^K}\boldsymbol{e}_{n/2}^T & \boldsymbol{J}_{(3n+2)/2:2n}^* \end{bmatrix} \quad (n \text{ парно}). \tag{49}$$

У (48) и (49) је са $\boldsymbol{J}_{u:v}(d\mu)$ означен главни минор Јакобијеве матрице (13), $\boldsymbol{J}_\infty = \boldsymbol{J}_\infty(d\mu)$, чији су дијагонални елементи $\alpha_u, \alpha_{u+1}, ..., \alpha_v$; слично, $\boldsymbol{J}_{u:v}^*$ представља главни минор матрице $\boldsymbol{J}^*$ чији су дијагонални елементи $\alpha_u^K, \alpha_{u+1}^K, ..., \alpha_v^K$. Са $\boldsymbol{e}_{(n-1)/2} = [0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 1]^T \in \mathbb{R}^{(n-1)/2}$ у (48) и са $\boldsymbol{e}_{n/2} = [0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 1]^T \in \mathbb{R}^{n/2}$ у (49) означени су кординатни вектори одговарајућих димензија. Ако је n непарно треба одредити матрицу $\boldsymbol{J}_{(3n+1)/2:2n}^*$, а ако је n парно треба одредити матрицу $\boldsymbol{J}_{(3n+2)/2:2n}^*$ и параметар $\beta_{(3n+2)/2}^K$.

За алгоритам је од изузетног значаја следећа лема.

Лема 2. *Матрице* $\boldsymbol{J}_n^*$ *и* $\boldsymbol{J}_n(d\mu)$ *у* (47) *имају исте сопствене вредности.*

Запишимо

$$\boldsymbol{J}_n^* = \begin{bmatrix} \alpha_0^* & \sqrt{\beta_1^*} & & & \boldsymbol{0} \\ \sqrt{\beta_1^*} & \alpha_1^* & \sqrt{\beta_2^*} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \sqrt{\beta_{n-2}^*} & \alpha_{n-2}^* & \sqrt{\beta_{n-1}^*} \\ \boldsymbol{0} & & & \sqrt{\beta_{n-1}^*} & \alpha_{n-1}^* \end{bmatrix}.$$

Матрице $\boldsymbol{J}_n$ и $\boldsymbol{J}_n^*$ су две Јакобијеве матрице, обе реда n и са истим сопственим вредностима. Прва генерише скуп ортогоналних полинома π_k, $k = 0, 1, ..., n$, с обзиром на (познату) меру $d\mu$, а друга скуп ортогоналних полинома π_k^*, $k = 0, 1, ..., n$, с обзиром на меру $d\mu^*$ (која у општем случају није позната). Уведимо мешовите моменте

$$\nu_{kl} = (\pi_k^*, \pi_l)_{d\mu^*}. \tag{50}$$

Због ортогоналности π_k^* важи $\nu_{kl} = 0$ за $l < k$, а како из леме 2 следи $\pi_n \equiv \pi_n^*$, опет због ортогоналности имамо $\nu_{kn} = 0$ за $k < n$. Мешовити моменти (50) задовољавају рекурентну релацију

$$\nu_{k,l+1} - \nu_{k+1,l} - (\alpha_k^* - \alpha_l)\nu_{kl} - \beta_k^* \nu_{k-1,l} + \beta_l \nu_{k,l-1} = 0. \tag{51}$$

Из (48) и (49) видимо да су неки коефицијенти α_k^* и β_k^* већ познати. На пример, за непарно n је

$$\alpha_k^* = \alpha_{n+1+k},\ 0 \le k \le (n-3)/2; \quad \beta_k^* = \beta_{n+1+k},\ 0 \le k \le (n-1)/2.$$

Ако у (51) изаберемо иницијалне вредности $\nu_{00} = \int_{\mathbb{R}} d\mu^* = \beta_0^* = \beta_{n+1}$; $\nu_{-1,l} = 0,\ l = 0, 1, ..., n-1$; $\nu_{0,-1} = 0$; $\nu_{k,k-2} = \nu_{k,k-1} = 0,\ k = 1, 2, ..., (n-1)/2$, па решавамо (51) прво по $\nu_{k,l+1}$, а затим по $\nu_{k+1,l}$, добићемо

$$\alpha_k^* = \alpha_k + \frac{\nu_{k,k+1}}{\nu_{kk}} - \frac{\nu_{k-1,k}}{\nu_{k-1,k-1}}, \quad \beta_k^* = \frac{\nu_{kk}}{\nu_{k-1,k-1}}, \quad (n-1)/2 \le k \le n-1.$$

Ако добијемо да неки β_k^* није позитиван, то указује да Кронродова екстензија (43) не постоји.

Када се одреде сви коефицијенти α_k^* и β_k^*, матрица $\boldsymbol{J}_n^*$ је потпуно одређена, као и Јакоби-Кронродова матрица $\boldsymbol{J}_{2n+1}^K$. Тада се чворови и тежине Гаус-Кронродове квадратурне формуле (43) могу изразити преко сопствених вредности и квадрата првих компоненти одговарајућих нормализованих сопствених вектора матрице $\boldsymbol{J}_{2n+1}^K$, слично као у теореми 18.

3.3 Усредњене Гаусове квадратурне формуле

У одељку 3.2.2 смо видели да дати алгоритам за конструкцију Кронродових екстензија није једноставан, док смо у одељку 3.2.1 видели да у неким ситуацијама Кронродова екстензија (43) не постоји. Тада се за процену грешке Гаусове квадратуре (33) користе друге квадратурне формуле, од којих су многе засноване на Кронродовој идеји.

3.3.1 Анти-Гаусове и усредњене Гаусове квадратуре

Занимљив је приступ (видети Лори[50] [39, 40] и Патерсон[51] [61]) где се за дато $\theta \in \mathbb{R}$ уводи помоћни функционал који се апроксимира неком

[50] Dirk P. Laurie, савремени јужноафрички математичар

[51] Thomas N. L. Patterson, савремени северноирски математичар

новом квадратуром са $n+1$ чворова,

$$I^{\theta}(f) = I(f) - \theta G_n(f) \approx Q^{\theta}_{n+1}(f),$$

а за процену грешке $|(I - G_n)(f)|$ користи се тзв. **„stratified" квадратурна формула** са $2n+1$ чворова,

$$I(f) \approx S_{2n+1}(f) = \theta G_n(f) + Q^{\theta}_{n+1}(f).$$

Лори је у [40] разматрао специјалан случај описаног присупа. Прво је увео **анти-Гаусову квадратурну формулу** G^{-}_{n+1}, чија грешка задовољава

$$R^{G^-}_{n+1}(t^k) = -R^G_n(t^k), \quad k = 0, 1, ..., 2n+1. \tag{52}$$

Затим је за процену грешке $|(I - G_n)(f)|$ увео **усредњену Гаусову квадратурну формулу**,

$$I(f) \approx \widehat{G}^L_{2n+1}(f) = \frac{1}{2}(G_n(f) + G^{-}_{n+1}(f)), \tag{53}$$

која је „stratified" квадратура и има степен тачности бар $2n+1$. И анти-Гаусова и усредњена Гаусова квадратурна формула увек постоје (тј. имају све реалне чворове), могу имати највише два спољашња чвора, а све тежине су им позитивне.

3.3.2 Уопштене усредњене Гаусове квадратуре

Са G^{-g}_{n+1} означимо **уопштену анти-Гаусову квадратурну формулу**, чија грешка задовољава

$$R^{G^{-g}}_{n+1}(t^k) = -(1+\gamma) R^G_n(t^k), \quad k = 0, 1, ..., 2n+1, \quad \gamma > -1. \tag{54}$$

Уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула је облика

$$I(f) \approx \widehat{G}^g_{2n+1} = \frac{1}{2+\gamma}((1+\gamma) G_n(f) + G^{-g}_{n+1}(f)), \quad \gamma > -1. \tag{55}$$

Разлика $|(I - \widehat{G}^g_{2n+1})(f)|$ такође служи за процену грешке $|(I - G_n)(f)|$. Формула (55) је такође „stratified" квадратура и има степен тачности бар $2n+1$. Приметимо да се (52) и (53) добијају редом из (54) и (55) за $\gamma = 0$.

Услов (54) и формулу (55) разматрао је Ерих[52] [18], који је (бирајући γ тако да степен тачности екстензије (55) расте) конструисао јединствену оптималну квадратуру (55) за уопштену Лагерову и Ермитову

[52]Sven Ehrich, савремени немачки математичар

тежинску функцију (видети табелу 1). У овом одељку пажња ће првенствено бити посвећена јединственој оптималној уопштеној усредњеној Гаусовој квадратурној формули, коју означавамо са $\widehat{G}^S_{2n+1}$.

Као и до сада, са α_k и β_k означимо коефицијенте трочлане рекурентне релације (6), а са π_k моничне ортогоналне полиноме. Чворови квадратуре $\widehat{G}^g_{2n+1}$ су нуле полинома

$$q_{2n+1}(t) = \pi_n(t)F_{n+1}(t),$$

где је

$$F_{n+1}(t) = \pi_{n+1}(t) - \widehat{\beta}_{n+1}\pi_{n-1}(t).$$

Ако је $\widehat{\beta}_{n+1} = \beta_n$, онда је $\widehat{G}^g_{2n+1}$ заправо усредњена Гаусова квадратурна формула $\widehat{G}^L_{2n+1}$ коју је у раду [40] увео Лори. Ако је $\widehat{\beta}_{n+1} = \beta_{n+1}$, онда $\widehat{G}^g_{2n+1}$ представља оптималну уопштену усредњену Гаусову квадратурну формулу $\widehat{G}^S_{2n+1}$, коју је разматрао Спалевић у [78]. $\widehat{G}^L_{2n+1}$ има степен тачности $2n+1$, док $\widehat{G}^S_{2n+1}$ има степен тачности $2n+2$. И $\widehat{G}^L_{2n+1}$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}$ постоје за свако $n \geq 1$, али обе могу имати спољашње чворове.

Сада ћемо размотрити квадратурну формулу $\widehat{G}^S_{2n+1}$. Једноставну и ефикасну конструкцију ове квадратуре, засновану на Першторферовој карактеризацији позитивних интерполационих квадратурних формула (видети теорему 16, као и радове [62, 63, 64, 65]), дао је Спалевић у [78] (видети и [79, 81], као и [80]). Та конструкција се изводи помоћу матрице димензије $(2n+1) \times (2n+1)$, облика

$$\boldsymbol{J}^{\widehat{G}}_{2n+1} = \boldsymbol{J}^{\widehat{G}}_{2n+1}(d\mu) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_n(d\mu) & \sqrt{\beta_n}\boldsymbol{e}_n & \boldsymbol{0} \\ \sqrt{\beta_n}\boldsymbol{e}_n^T & \alpha_n & \sqrt{\beta_{n+1}}\boldsymbol{e}_1^T \\ \boldsymbol{0} & \sqrt{\beta_{n+1}}\boldsymbol{e}_1 & \tilde{\boldsymbol{J}}_n \end{bmatrix}, \tag{56}$$

где су $\boldsymbol{e}_1 = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$, $\boldsymbol{e}_n = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1]^T \in \mathbb{R}^n$ координатни вектори, $\boldsymbol{J}_n(d\mu)$ је Јакобијева матрица (14), а $\tilde{\boldsymbol{J}}_n$ је матрица која се добија када се $\boldsymbol{J}_n(d\mu)$ преслика слева на десно и одозго надоле. Дакле, (56) се може записати у облику

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & & & & & & & \mathbf{0} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} & \sqrt{\beta_n} & & & & & & \\ & & & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n & \sqrt{\beta_{n+1}} & & & & & \\ & & & & \sqrt{\beta_{n+1}} & \alpha_{n-1} & \sqrt{\beta_{n-1}} & & & & \\ & & & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-2} & \sqrt{\beta_{n-2}} & & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & & \sqrt{\beta_2} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_1} \\ \mathbf{0} & & & & & & & & \sqrt{\beta_1} & \alpha_0 \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Слично као у теореми 18, чворови и тежине квадратуре $\widehat{G}^S_{2n+1}$ могу се изразити преко сопствених вредности и квадрата првих компоненти одговарајућих нормализованих сопствених вектора матрице $\boldsymbol{J}^{\widehat{G}}_{2n+1}$.

Формула $\widehat{G}^S_{2n+1}$ има следећа својства доказана у раду [78]:

(а) $\widehat{G}^S_{2n+1}$ има степен тачности $2n+2$ (а ако је тежинска функција парна, онда $\widehat{G}^S_{2n+1}$ има степен тачности $2n+3$);

(б) скуп чворова формуле G_n представља подскуп скупа чворова формуле $\widehat{G}^S_{2n+1}$;

(в) тежине које одговарају Гаусовим чворовима у $\widehat{G}^S_{2n+1}$ разликују се од Гаусових тежина у G_n до на мултипликативну константу.

У [79] Спалевић је показао да квадратуре $\widehat{G}^S_{2n+1}$ могу имати мању грешку од неких других квадратура истог степена тачности.

Уопштену усредњену Гаусову квадратурну формулу можемо записати у истом облику као и Кронродову екстензију (43),

$$\begin{aligned} I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) &= \widehat{G}^S_{2n+1}(f) + R^{\widehat{G}}_{2n+1}(f), \\ \widehat{G}^S_{2n+1}(f) &= \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{G\widehat{G}} f(t_k^G) + \sum_{l=1}^{n+1} \omega_l^{\widehat{G}} f(t_l^{\widehat{G}}). \end{aligned} \tag{58}$$

Од значаја је упоредити квадратуре (43) и (58). Предност $\widehat{G}^S_{2n+1}$ у односу на K_{2n+1} је то што постоји и у случајевима када K_{2n+1} не постоји, као и то што је једноставнија за конструкцију (приметимо да, уколико су познати коефицијенти α_k и β_k трочлане рекурентне релације (6) потребни за формирање матрице $\boldsymbol{J}_n(d\mu)$, онда је за формирање матрице $\boldsymbol{J}^{\widehat{G}}_{2n+1}(d\mu)$ потребно израчунати само још коефицијенте α_n, β_n и

β_{n+1}). Недостатак $\widehat{G}^S_{2n+1}$ у односу на K_{2n+1} је то што у општем случају има нижи степен тачности. Међутим, са порастом броја чворова, уопштене усредњене Гаусове квадратуре попримају особине Кронродових екстензија. У [81] Спалевић је показао да се за једну широку класу тежинских функција формуле $\widehat{G}^S_{2n+1}$ поклапају са формулама K_{2n+1} (дакле, имају степен тачности $3n+1$ и тада представљају добру алтернативу за процену грешке Гаусове квадратуре; видети теорему 20).

Посматрајмо специјални случај трочлане рекурентне релације (6), облика

$$\begin{gathered}\pi_{k+1}(t) = (t-\alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k\pi_{k-1}(t), \quad k = 0,1,2,...,\\ \alpha_k = \alpha,\ \beta_k = \beta, \quad k \geq r,\end{gathered} \tag{59}$$

где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\beta_k > 0$, $r \in \mathbb{N}_0$, а $\pi_0(t) \equiv 1$, $\pi_{-1}(t) \equiv 0$. Дакле, коефицијенти α_k и β_k су за свако $k \geq r$ једнаки неким константама $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta > 0$, редом. Познато је да свака тежинска функција ω за коју се добија трочлана рекурентна релација облика (59) за носач има коначни интевал $[a,b]$ (видети [43]). Са $\mathcal{M}^{\alpha,\beta}_r[a,b]$ означимо скуп свих тежинских функција ω за које се добија трочлана рекурентна релација облика (59). На пример, Бернштајн-Сегеове тежинске функције уведене у одељку 2.2.2, као и Чебишовљеве тежинске функције 1. и 2. врсте, $\omega(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ и $\omega(t) = (1-t^2)^{1/2}$, припадају скупу $\mathcal{M}^{\alpha,\beta}_r[a,b]$ за $a=-1$, $b=1$ и одговарајуће вредности $r \geq 0$. Полиноми који задовољавају трочлану рекурентну релацију (59) разматрани су у [14]. Следећи резултат доказан је у раду [81].

Теорема 20. *Нека тежинска функција ω припада $\mathcal{M}^{\alpha,\beta}_r[a,b]$. Тада, за $n \geq 2r-1$, уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула $\widehat{G}^S_{2n+1}$ има степен тачности $3n+1$. Стога се $\widehat{G}^S_{2n+1}$ поклапа са Кронродовом екстензијом K_{2n+1}, а монични полином F_{n+1} се поклапа са одговарајућим моничним Стилтјесовим полиномом E_{n+1}, тј.*

$$F_{n+1}(t) \equiv E_{n+1}(t) = \pi_{n+1}(t) - \beta\pi_{n-1}(t), \qquad n \geq 2r-1.$$

Чињеница да се формула $\widehat{G}^S_{2n+1}$ поклапа са формулом K_{2n+1} је важна, јер је конструкција уопштене усредњене Гаусове квадратуре једноставнија од конструкције Гаус-Кронродове квадратуре.

У радовима [71, 72] видимо да су уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле пронашле примену у анализи мрежа, док у раду [73] видимо да се ове квадратуре користе за убрзавање конвергенције предложених метода.

У [20, 22] Гаучи је разматрао неке случајеве када коефицијенти трочлане рекурентне релације (6) нису експлицитно познати, па је за одређивање Гаусових квадратура (33) потребно њихово приближно израчунавање. За решавање овог проблема он је предложио да се прво изврши дискретизација мере $d\mu$, па да се коефицијенти релације (6) приближно израчунају Стилтјесовом процедуром за добијену дискретну меру. Међутим, што је већи степен тачности Гаусове квадратуре и што је дискретизација финија, то се повећава могућност да оваква израчунавања буду компликована. Тада коришћење уопштених усредњених Гаусових квадратура (58) уместо Гаусових квадратура (33) може имати предност, јер оне за исти скуп познатих коефицијената трочлане рекурентне релације (6) често дају већу тачност.

3.3.3 Скраћене уопштене усредњене Гаусове квадратуре

У овом одељку занимаће нас скраћене варијанте формула $\widehat{G}^S_{2n+1}$. Ове квадратуре се добијају скраћивањем, тј. уклањањем последњих k, $0 \le k \le n$, врста и колона матрице $\boldsymbol{J}^{\widehat{G}}_{2n+1}$, дате са (57). Најједноставнија **скраћена уопштена усредњена Гаусова квадратурна формула**, која је анализирана у [14], има облик

$$Q^{(1)}_{n+2}(f) = \sum_{k=1}^{n+2} \omega^{(1)}_k f(t^{(1)}_k).$$

Чворови квадратуре $Q^{(1)}_{n+2}$ су нуле полинома

$$q^{(1)}_{n+2}(t) = (t - \alpha_{n-1})\pi_{n+1}(t) - \beta_{n+1}\pi_n(t), \tag{60}$$

док је одговарајућа симетрична тродијагонална матрица облика

$$\boldsymbol{J}^{(1)}_{n+2} = \boldsymbol{J}^{(1)}_{n+2}(d\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & & \mathbf{0} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} & \sqrt{\beta_n} & \\ & & & \sqrt{\beta_n} & \alpha_n & \sqrt{\beta_{n+1}} \\ \mathbf{0} & & & & \sqrt{\beta_{n+1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Чворови и тежине формуле $Q_{n+2}^{(1)}$ рачунају се преко сопствених вредности и квадрата првих компоненти одговарајућих нормализованих сопствених вектора скраћене матрице $\boldsymbol{J}_{n+2}^{(1)}$, слично као у теореми 18.

Скраћене варијанте квадратура $\widehat{G}_{2n+1}^{S}$ са истим степеном тачности први пут су разматране у [72].

Значај скраћених варијанти квадратурних формула $\widehat{G}_{2n+1}^{S}$ огледа се у томе што могу бити унутрашње у неким ситуацијама када $\widehat{G}_{2n+1}^{S}$ то нису.

4 Унутрашњост уопштених усредњених Гаусових квадратура и њихових скраћења са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама

У овој глави, у случају Бернштајн-Сегеових тежинских функција (видети одељак 2.2.2), разматрамо унутрашњост квадратурних формула $\widehat{G}^{L}_{2n+1}$, $\widehat{G}^{S}_{2n+1}$ и $Q^{(1)}_{n+2}$ (које смо увели редом у одељцима 3.3.1, 3.3.2 и 3.3.3). Приказани резултат су објављени у раду [15].

Као што смо већ рекли у поглављу 1.3, ако сви чворови квадратурне формуле припадају конвексном омотачу $[a, b]$ носача мере $d\mu$, онда се та формула назива унутрашњом. Уколико квадратурна формула има чворове који не припадају $[a, b]$, такви чворови зову се спољашњи. Квадратуре са спољашњим чворовима не могу се користити за апроксимирање интеграла када је интегранд дефинисан само на интервалу интеграције – стога испитивање унутрашњости квадратурних формула има значајно место у нумеричкој интеграцији.

На основу теореме 17, знамо да је Гаусова квадратура увек унутрашња. С друге стране, Гаус-Кронродова квадратура може имати спољашње чворове – за неке резултате о унутрашњости Кронродових екстензија са класичним тежинским функцијама видети одељак 3.2.1, док је унутрашњост Кронродових екстензија K_{2n+1} са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама проучавана у радовима [27, 57, 58, 59].

Унутрашњост формула $\widehat{G}^{L}_{2n+1}$, $\widehat{G}^{S}_{2n+1}$ и $Q^{(1)}_{n+2}$ $(n \geq 2)$ са класичним тежинским функцијама испитивана је редом у радовима [40], [78] и [14]. Овде ћемо испитати унутрашњост квадратура $\widehat{G}^{L}_{2n+1}$, $\widehat{G}^{S}_{2n+1}$ $(n \geq 1)$ и $Q^{(1)}_{n+2}$ $(n \geq 2)$ са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама, које су у [27] разматрали Гаучи и Нотарис. Услови унутрашњости биће исказани преко коефицијената α, β, δ, који фигуришу у Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама. У теоремама које се тичу унутрашњости $\widehat{G}^{L}_{2n+1}$ и $\widehat{G}^{S}_{2n+1}$ наводићемо само ситуације у којима се ове формуле не поклапају са K_{2n+1}.

Поменимо да је унутрашњост уопштених усредњених Гаусових квадратура и њихових скраћења са модификованом Чебишовљевом мером друге врсте испитана у раду [16] (о ортогоналним полиномима с обзиром на модификовану Чебишовљеву меру друге врсте може се прочитати у [48]).

Нуле полинома F_{n+1}, који смо увели у одељку 3.3.2, алтернирају са нулама моничног ортогоналног полинома π_n, како у случају квадратуре $\widehat{G}^L_{2n+1}$ (видети [40]) тако и у случају квадратуре $\widehat{G}^S_{2n+1}$ (видети [78]). То значи да формула $\widehat{G}^L_{2n+1}$, као и формула $\widehat{G}^S_{2n+1}$, може имати највише две нуле ван конвексног омотача носача мере (и то по једну са сваке стране), што представља важан резултат у испитивању унутрашњости ових квадратура. Формуле $\widehat{G}^L_{2n+1}$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}$ су унутрашње ако је испуњено

$$(-1)^{n+1}F_{n+1}(a) \geq 0 \quad \text{и} \quad F_{n+1}(b) \geq 0,$$

где је $[a,b]$ конвексни омотач носача мере $d\mu$.

Бернштајн-Сегеове тежинске функције задовољавају трочлану рекурентну релацију (59). На основу теореме 20, следи да се за $n \geq 2r-1$ обе квадратуре $\widehat{G}^L_{2n+1}$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}$ поклапају са одговарајућом Гаус-Кронродовом формулом K_{2n+1}, да се за $r \leq n < 2r-1$ квадратуре $\widehat{G}^L_{2n+1}$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}$ међусобно поклапају, али се разликују од одговарајуће формуле K_{2n+1}, док се за $n < r$ квадратуре $\widehat{G}^L_{2n+1}$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}$ разликују међусобно, при чему се у општем случају обе разликују и од одговарајуће формуле K_{2n+1}. У случају поклапања $\widehat{G}^L_{2n+1}$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}$ са K_{2n+1}, можемо се позвати на резултате из рада [27], где је испитана унутрашњост Кронродових екстензија са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама.

За испитивање унутрашњости скраћених уопштених усредњених Гаусових квадратурних формула значајна је следећа теорема (видети [14, теорема 4.1]).

Теорема 21. *Ако коефицијенти α_{n-1} и α_{n+1} трочлане рекурентне релације (6) задовољавају $\alpha_{n-1} = \alpha_{n+1}$, онда је квадратурна формула $Q^{(1)}_{n+2}$ унутрашња. Ако је $\alpha_{n-1} < \alpha_{n+1}$, онда највећи чвор формуле $Q^{(1)}_{n+2}$ припада (a,b), а ако је $\alpha_{n-1} > \alpha_{n+1}$, онда најмањи чвор формуле $Q^{(1)}_{n+2}$ припада (a,b), где је $[a,b]$ конвексни омотач носача мере $d\mu$.*

4.1 Бернштајн-Сегеова тежинска функција $\omega^{(-1/2)}$

У случају тежинске функције $\omega^{(-1/2)}$, рекурентна формула облика (59) важи за $r = 3$. На основу претходног разматрања о поклапању

$\widehat{G}_{2n+1}^L$ и $\widehat{G}_{2n+1}^S$ са K_{2n+1}, које произилази из теореме 20, закључујемо: за $n \geq 5$ обе квадратуре $\widehat{G}_{2n+1}^L$ и $\widehat{G}_{2n+1}^S$ се поклапају са одговарајућом Гаус-Кронродовом формулом K_{2n+1}; за $n = 3, 4$ квадратуре $\widehat{G}_{2n+1}^L$ и $\widehat{G}_{2n+1}^S$ се међусобно поклапају, али се разликују од одговарајуће формуле K_{2n+1}; за $n = 1, 2$ квадратуре $\widehat{G}_{2n+1}^L$ и $\widehat{G}_{2n+1}^S$ се разликују међусобно, при чему се у општем случају обе разликују и од одговарајуће формуле K_{2n+1}.

Теорема 22. *За квадратуре $\widehat{G}_{2n+1}^L$ и $\widehat{G}_{2n+1}^S$ са Бернштајн-Сегеовом тежинском функцијом $\omega^{(-1/2)}$ важи: за $n \geq 2$ формула $\widehat{G}_{2n+1}^L$ је унутрашња; за $n = 1$ формула $\widehat{G}_3^L$ је унутрашња ако је испуњено*

$$|\delta| \leq \frac{(\beta - \alpha)(\beta - 2\alpha)}{\alpha}; \tag{61}$$

за $n \geq 3$ формула $\widehat{G}_{2n+1}^S$ је унутрашња; за $n = 2$ формула $\widehat{G}_5^S$ је унутрашња ако је $\beta > 2\alpha$; за $n = 1$ формула $\widehat{G}_3^S$ је унутрашња ако је испуњено

$$|\delta| \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha). \tag{62}$$

<u>*Доказ.*</u> Како за Чебишовљеве полиноме прве врсте важи

$$T_n(1) = 1 \quad \text{и} \quad T_n(-1) = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

на основу релација (17) изложених у одељку 2.2.2 следи

$$\begin{aligned}
\pi_0^{(-1/2)}(1) &\equiv 1,\\
\pi_1^{(-1/2)}(1) &= 1 + \frac{\delta}{\beta - \alpha} = \frac{\delta + \beta - \alpha}{\beta - \alpha},\\
\pi_n^{(-1/2)}(1) &= \frac{1}{2^{n-1}}\left[1 + \frac{2\delta}{\beta}\cdot 1 + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)\cdot 1\right] = \frac{\delta + \beta - \alpha}{2^{n-2}\beta}, \quad n \geq 2;
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
\pi_0^{(-1/2)}(-1) &\equiv 1,\\
\pi_1^{(-1/2)}(-1) &= -1 + \frac{\delta}{\beta - \alpha} = \frac{\delta - \beta + \alpha}{\beta - \alpha},\\
\pi_n^{(-1/2)}(-1) &= \frac{1}{2^{n-1}}\left[(-1)^n + \frac{2\delta}{\beta}(-1)^{n-1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)(-1)^{n-2}\right]\\
&= (-1)^n\frac{\beta - \alpha - \delta}{2^{n-2}\beta}, \quad n \geq 2.
\end{aligned} \tag{64}$$

У разматрању са почетка овог одељка смо рекли да се за $n \geq 5$ обе квадратуре $\widehat{G}_{2n+1}^L$ и $\widehat{G}_{2n+1}^S$ поклапају са одговарајућом Гаус-Кронродовом формулом K_{2n+1}. Гаучи и Нотарис су у [27, теорема 5.1(б)] показали да је K_{2n+1} унутрашња, па су и $\widehat{G}_{2n+1}^L$ и $\widehat{G}_{2n+1}^S$ такође унутрашње. Алтернативно, унутрашњост $\widehat{G}_{2n+1}^L$ и $\widehat{G}_{2n+1}^S$ следи и из услова (65).

За $n = 3, 4$ квадратуре $\widehat{G}^L_{2n+1}$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}$ су унутрашње ако је

$$F_{n+1}(1) \geq 0 \quad \text{и} \quad (-1)^{n+1} F_{n+1}(-1) \geq 0,$$

тј. ако важи

$$\frac{4\pi^{(-1/2)}_{n+1}(1)}{\pi^{(-1/2)}_{n-1}(1)} \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{4\pi^{(-1/2)}_{n+1}(-1)}{\pi^{(-1/2)}_{n-1}(-1)} \geq 1. \tag{65}$$

Уврштавањем (63) и (64) у (65) добијамо да су $\widehat{G}^L_{2n+1}$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}$ унутрашње.

Слично, за $n = 1, 2$ формула $\widehat{G}^L_{2n+1}$ је унутрашња ако је

$$F_{n+1}(1) \geq 0 \quad \text{и} \quad (-1)^{n+1} F_{n+1}(-1) \geq 0,$$

тј. ако важи

$$\frac{\pi^{(-1/2)}_{n+1}(1)}{\beta^{(-1/2)}_n \pi^{(-1/2)}_{n-1}(1)} \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{\pi^{(-1/2)}_{n+1}(-1)}{\beta^{(-1/2)}_n \pi^{(-1/2)}_{n-1}(-1)} \geq 1. \tag{66}$$

Ако је $n = 2$, из (63) и (64) следи да је $\widehat{G}^L_5$ унутрашња. Ако је $n = 1$ услов (66) се своди на услов (61). Стога, $\widehat{G}^L_3$ је унутрашња ако важи (61).

За $n = 2$ формула $\widehat{G}^S_5$ је унутрашња ако је

$$F_3(1) \geq 0 \quad \text{и} \quad -F_3(-1) \geq 0,$$

што се може записати као

$$\frac{4\pi^{(-1/2)}_3(1)}{\pi^{(-1/2)}_1(1)} \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{4\pi^{(-1/2)}_3(-1)}{\pi^{(-1/2)}_1(-1)} \geq 1.$$

Одавде добијамо да је $\widehat{G}^S_5$ унутрашња ако је $\beta > 2\alpha$.

За $n = 1$ формула $\widehat{G}^S_3$ има исти степен тачности ($2n + 2 = 4$) као и одговарајућа Гаус-Кронродова формула K_3 ($3n + 1 = 4$). Стога се ове две квадратуре поклапају. У раду [27, теорема 5.1(б)] показано је да је K_3 унутрашња ако важи (62). $\square$

Размотримо сада квадратурну формулу $Q^{(1)}_{n+2}$.

Теорема 23. *За $n \geq 3$ квадратура $Q^{(1)}_{n+2}$ са Бернштајн-Сегеовом тежинском функцијом $\omega^{(-1/2)}$ је унутрашња. За $n = 2$ и $\delta = 0$ формула $Q^{(1)}_4$ је унутрашња. За $n = 2$ и $\delta \neq 0$ формула $Q^{(1)}_4$ је унутрашња под условом да је*

$$|\delta| \leq \frac{\beta(\beta - \alpha)}{2\alpha}. \tag{67}$$

<u>*Доказ.*</u> За $n \geq 3$, унутрашњост квадратуре $Q_{n+2}^{(1)}$ следи на основу теореме 21, јер важи $\alpha_{n-1}^{(-1/2)} = \alpha_{n+1}^{(-1/2)} = 0$.

За $n = 2$ и $\delta = 0$, унутрашњост квадратуре $Q_4^{(1)}$ следи такође на основу теореме 21, јер је $\alpha_1^{(-1/2)} = 0$.

За $n = 2$ и $\delta \neq 0$, на основу (60) следи да је квадратура $Q_4^{(1)}$ унутрашња ако је

$$q_4^{(1)}(1) \geq 0 \quad \text{и} \quad q_4^{(1)}(-1) \geq 0,$$

односно, ако је

$$\frac{4\left(1-\alpha_1^{(-1/2)}\right)\pi_3^{(-1/2)}(1)}{\pi_2^{(-1/2)}(1)} \geq 1 \quad \text{и} \quad -\frac{4\left(1+\alpha_1^{(-1/2)}\right)\pi_3^{(-1/2)}(-1)}{\pi_2^{(-1/2)}(-1)} \geq 1.$$

Овај закључак се своди на (67). $\square$

Пример 1. У случају Бернштајн-Сегеове тежинске функције $\omega^{(-1/2)}$, показали смо да су за $n = 3$ квадратуре $\widehat{G}_7^S$ и $\widehat{G}_7^L$ унутрашње. Одговарајућа Гаус-Кронродова формула $K_7 = K_7^{(-1/2)}$ је унутрашња ако је

$$\delta^2 < \frac{1}{32}\frac{(3\beta - 2\alpha)^2(\beta + 6\alpha)}{\beta + 2\alpha}, \quad \beta > 2\alpha$$

(видети [27, теорема 5.1]), док уколико нису испуњени претходни услови $K_7^{(-1/2)}$ може имати спољашње чворове. У табели 2 приказани су спољашњи чворови Гаус-Кронродове формуле $K_7^{(-1/2)}$ $(n = 3)$ за неке вредности α, β, δ.

Показали смо и да је за $n = 2$ формула $\widehat{G}_5^L$ унутрашња, док је формула $\widehat{G}_5^S$ унутрашња при услову $\beta > 2\alpha$. Одговарајућа Гаус-Кронродова квадратура $K_5 = K_5^{(-1/2)}$ $(n = 2)$ је унутрашња ако је

$$\beta > 2\alpha, \quad |\delta| \leq \beta - 2\alpha$$

(видети [27, теорема 5.1]). Стога, уколико је $K_5^{(-1/2)}$ унутрашња, онда је и $\widehat{G}_5^S$ унутрашња. Обратно не мора да важи. На пример, за $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.2$, $\delta = 0.14$, $\widehat{G}_5^S$ је унутрашња, док $K_5^{(-1/2)}$ има спољашњи чвор приближно у тачки -1.0580.

Пример 2. Овај пример приказује ситуацију кад у случају Бернштајн-Сегеове тежинске функције $\omega^{(-1/2)}$, за $n = 2$ формула $\widehat{G}_5^S$ има спољашње чворове, док је одговарајућа скраћена формула $Q_4^{(1)}$ унутрашња. Размотримо случај када је $\beta < 2\alpha$ и $\delta = 0$. Тада се квадратуре $\widehat{G}_5^S$ и $K_5 =$

Табела 2: Пример 1 – приближне вредности спољашњих чворова Гаус-Кронродове квадратурне формуле $K_7 = K_7^{(-1/2)}$ $(n = 3)$ за неке вредности α, β, δ.

α	β	δ	Спољашњи чворови формуле $K_7^{(-1/2)}$
0.11	0.2	0.01	$-1.0046;\ 1.0040$
0.12	0.2	0.01	$-1.0093;\ 1.0081$
0.14	0.2	0.01	$-1.0940;\ 1.0169$
0.16	0.2	0.01	$-1.0303;\ 1.0263$
0.18	0.2	0.01	$-1.0420;\ 1.0363$
11.0	12	0.0	$\mp$1.0408
11.2	12	0.0	$\mp$1.0427
11.4	12	0.0	$\mp$1.0446
11.6	12	0.0	$\mp$1.0466
11.8	12	0.0	$\mp$1.0485

$K_5^{(-1/2)}$ поклапају. Ово следи из чињенице да $K_5^{(-1/2)}$ има степен тачности $7 = 3 \cdot 2 + 1$, док, због парности, $\widehat{G}_5^S$ има исти степен тачности $7 = 2 \cdot 2 + 3$ (видети [78]). Табела 3 приказује спољашње чворове $\widehat{G}_5^S$ за неколико вредности $\alpha > 1$.

С обзиром да услов (67) важи за све вредности α, β, δ коришћене у табели 3, на основу теореме 23 следи да је одговарајућа скраћена формула $Q_4^{(1)}$ унутрашња.

Табела 3: Пример 2 – приближне вредности спољашњих чворова уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле $\widehat{G}_5^S$ $(n = 2)$ за неке вредности $\alpha > 1$, $\beta = 2$, $\delta = 0$.

α	Спољашњи чворови формуле $\widehat{G}_5^S$
1.1	$\mp$1.0124
1.2	$\mp$1.0247
1.3	$\mp$1.0368
1.4	$\mp$1.0488
1.5	$\mp$1.0607

4.2 Бернштајн-Сегеова тежинска функција $\omega^{(1/2)}$

Рекурентна формула облика (59) у случају тежинске функције $\omega^{(1/2)}$ важи за $r = 2$. Стога закључујемо: за $n \geq 3$ обе квадратуре $\widehat{G}_{2n+1}^{L}$ и $\widehat{G}_{2n+1}^{S}$ се поклапају са одговарајућом Гаус-Кронродовом формулом K_{2n+1}; за $n = 2$ квадратуре $\widehat{G}_5^L$ и $\widehat{G}_5^S$ се међусобно поклапају, али се разликују од одговарајуће формуле K_5; за $n = 1$ квадратуре $\widehat{G}_3^L$ и $\widehat{G}_3^S$ се разликују међусобно, при чему се у општем случају обе разликују и од одговарајуће формуле K_3.

Теорема 24. *За квадратуре $\widehat{G}_{2n+1}^{L}$ и $\widehat{G}_{2n+1}^{S}$ са Бернштајн-Сегеовом тежинском функцијом $\omega^{(1/2)}$ важи: за $n \geq 2$ формуле $\widehat{G}_{2n+1}^{L}$ и $\widehat{G}_{2n+1}^{S}$ су унутрашње; за $n = 1$ формула $\widehat{G}_3^L$ је унутрашња, док је формула $\widehat{G}_3^S$ унутрашња ако је $\beta \leq 2\alpha$ или ако је испуњено*

$$\beta > 2\alpha \quad \text{и} \quad |\delta| \leq \frac{1}{4}(3\beta - 2\alpha). \tag{68}$$

Доказ. На основу својстава Чебишовљевих полинома друге врсте,

$$U_n(1) = n + 1 \quad \text{и} \quad U_n(-1) = (n+1)(-1)^n, \quad n = -1, 0, 1, ...,$$

из релација (18) изложених у одељку 2.2.2 следи

$$\begin{aligned}
\pi_0^{(1/2)}(1) &\equiv 1, \\
\pi_n^{(1/2)}(1) &= \frac{1}{2^n}\left[(n+1) + \frac{2\delta}{\beta}n + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)(n-1)\right] \\
&= \frac{(\delta + \beta - \alpha)n + \alpha}{2^{n-1}\beta}, \quad n \geq 1; \\
\pi_0^{(1/2)}(-1) &\equiv 1, \\
\pi_n^{(1/2)}(-1) &= \frac{1}{2^n}\left[(n+1)(-1)^n + \frac{2\delta}{\beta}n(-1)^{n-1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)(n-1)(-1)^{n-2}\right] \\
&= (-1)^n \frac{(\beta - \alpha - \delta)n + \alpha}{2^{n-1}\beta}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Већ смо видели да се за $n \geq 3$ и квадратура $\widehat{G}_{2n+1}^{L}$ и квадратура $\widehat{G}_{2n+1}^{S}$ поклапа са одговарајућом Гаус-Кронродовом формулом K_{2n+1}. У раду [27, теорема 5.2(б)] је показано да је K_{2n+1} унутрашња, одакле следи унутрашњост $\widehat{G}_{2n+1}^{L}$ и $\widehat{G}_{2n+1}^{S}$.

За $n = 2$ квадратуре $\widehat{G}_{2n+1}^{S}$ и $\widehat{G}_{2n+1}^{L}$ су унутрашње ако је

$$F_3(1) \geq 0 \quad \text{и} \quad -F_3(-1) \geq 0,$$

што се може записати као

$$\frac{4\pi_3^{(1/2)}(1)}{\pi_1^{(1/2)}(1)} \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{4\pi_3^{(1/2)}(-1)}{\pi_1^{(1/2)}(-1)} \geq 1.$$

Из првог од претходних услова следи $\delta \geq -(\beta - \alpha)$. Ова неједнакост је увек тачна. Из другог од претходних услова следи $\delta \leq \beta - \alpha$. И ова неједнакост је увек тачна. Стога су формуле $\widehat{G}_{2n+1}^L$ и $\widehat{G}_{2n+1}^S$ унутрашње.

За $n = 1$ квадратура $\widehat{G}_3^L$ је унутрашња ако је

$$F_2(1) \geq 0 \quad \text{и} \quad F_2(-1) \geq 0,$$

тј. ако важи

$$\frac{\pi_2^{(1/2)}(1)}{\beta_1^{(1/2)}\pi_0^{(1/2)}(1)} \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{\pi_2^{(1/2)}(-1)}{\beta_1^{(1/2)}\pi_0^{(1/2)}(-1)} \geq 1.$$

Претходни услови редом дају

$$\delta \geq -(\beta - \alpha) \quad \text{и} \quad \delta \leq \beta - \alpha.$$

Како обе претходне неједнакости важе, следи да је $\widehat{G}_3^L$ унутрашња.

Коначно, за $n = 1$ квадратура $\widehat{G}_3^S$ има исти степен тачности ($2n+2 = 4$) као и одговарајућа Гаус-Кронродова квадратура K_3 ($3n + 1 = 4$). Стога се ове две формуле поклапају. Можемо искористити резултате Гаучија и Нотариса [27, теорема 5.2(б)], који су показали да је K_3 унутрашња за $\beta \leq 2\alpha$, а ако је $\beta > 2\alpha$, онда је K_3 унутрашња ако важи (68). □

Теорема 25. *За $n \geq 2$ квадратура $Q_{n+2}^{(1)}$ са Бернштајн-Сегеовом тежинском функцијом $\omega^{(1/2)}$ је унутрашња.*

Доказ. Резултат следи из теореме 21, јер важи $\alpha_{n-1}^{(1/2)} = \alpha_{n+1}^{(1/2)} = 0$. □

4.3 Бернштајн-Сегеова тежинска функција $\omega^{(1/2,-1/2)}$

У случају тежинске функције $\omega^{(1/2,-1/2)}$, рекурентна формула облика (59) важи такође за $r = 2$. Следе закључци: за $n \geq 3$ обе квадратуре $\widehat{G}_{2n+1}^L$ и $\widehat{G}_{2n+1}^S$ се поклапају са одговарајућом Гаус-Кронродовом формулом K_{2n+1}; за $n = 2$ квадратуре $\widehat{G}_5^L$ и $\widehat{G}_5^S$ се међусобно поклапају, али се разликују од одговарајуће формуле K_5; за $n = 1$ квадратуре $\widehat{G}_3^L$ и $\widehat{G}_3^S$ се разликују међусобно, при чему се у општем случају обе разликују и од одговарајуће формуле K_3.

Теорема 26. *За квадратуре $\widehat{G}^L_{2n+1}$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}$ са Бернштајн-Сегеовом тежинском функцијом $\omega^{(1/2,-1/2)}$ важи: за $n \geq 2$ формуле $\widehat{G}^L_{2n+1}$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}$ су унутрашње; за $n = 1$ формула $\widehat{G}^L_3$ је унутрашња ако је испуњено*

$$\frac{\beta(3\delta + 3\beta - \alpha)}{2\alpha(\beta - \alpha - \delta)} \geq 1 \quad \textit{и} \quad \beta > 2\alpha \; (\textit{јер је } \beta \neq 2\alpha), \tag{69}$$

док је формула $\widehat{G}^S_3$ унутрашња ако је испуњено

$$6\delta + 5\beta - 2\alpha \geq 0 \quad \textit{и} \quad 2\delta + 2\alpha - \beta \leq 0. \tag{70}$$

Доказ. Ако искористимо својства Чебишовљевих полинома четврте врсте,

$$W_n(1) = 2n + 1 \quad \text{и} \quad W_n(-1) = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

из релација (19) изложених у одељку 2.2.2 добијамо

$$\begin{aligned}
\pi_0^{(1/2,-1/2)}(1) &\equiv 1,\\
\pi_1^{(1/2,-1/2)}(1) &= 1 + \frac{\alpha + \delta}{\beta} = \frac{\alpha + \beta + \delta}{\beta},\\
\pi_n^{(1/2,-1/2)}(1) &= \frac{1}{2^n}\left[(2n+1) + \frac{2\delta}{\beta}(2n-1) + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)(2n-3)\right]\\
&= \frac{(\delta + \beta - \alpha)(2n-1) + 2\alpha}{2^{n-1}\beta}, \quad n \geq 2;\\
\pi_0^{(1/2,-1/2)}(-1) &\equiv 1,\\
\pi_1^{(1/2,-1/2)}(-1) &= -1 + \frac{\alpha + \delta}{\beta} = \frac{\delta - \beta + \alpha}{\beta},\\
\pi_n^{(1/2,-1/2)}(-1) &= \frac{1}{2^n}\left[(-1)^n + \frac{2\delta}{\beta}(-1)^{n-1} + \left(1 - \frac{2\alpha}{\beta}\right)(-1)^{n-2}\right]\\
&= (-1)^n \frac{\beta - \alpha - \delta}{2^{n-1}\beta}, \quad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Као што смо већ видели на почетку овог одељка, за $n \geq 3$ квадратуре $\widehat{G}^L_{2n+1}$, $\widehat{G}^S_{2n+1}$ и K_{2n+1} се поклапају. Из унутрашњости K_{2n+1} показане у раду [27, теорема 5.3(б)], следи унутрашњост $\widehat{G}^L_{2n+1}$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}$.

За $n = 2$ квадратуре $\widehat{G}^S_5$ и $\widehat{G}^L_5$ су унутрашње ако је

$$F_3(1) \geq 0 \quad \text{и} \quad -F_3(-1) \geq 0,$$

тј. ако је испуњено

$$\frac{4\pi_3^{(1/2,-1/2)}(1)}{\pi_1^{(1/2,-1/2)}(1)} \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{4\pi_3^{(1/2,-1/2)}(-1)}{\pi_1^{(1/2,-1/2)}(-1)} \geq 1.$$

Први од претходних услова еквивалентан је са $\beta - \alpha + \delta \geq 0$. Ова неједнакост је увек тачна. Други од претходних услова такође важи. Стога су $\widehat{G}_5^L$ и $\widehat{G}_5^S$ унутрашње.

За $n = 1$ квадратура $\widehat{G}_3^L$ је унутрашња ако је

$$F_2(1) \geq 0 \quad \text{и} \quad F_2(-1) \geq 0,$$

што се може записати као

$$\frac{\pi_2^{(1/2,-1/2)}(1)}{\beta_1^{(1/2,-1/2)}\pi_0^{(1/2,-1/2)}(1)} \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{\pi_2^{(1/2,-1/2)}(-1)}{\beta_1^{(1/2,-1/2)}\pi_0^{(1/2,-1/2)}(-1)} \geq 1.$$

Претходни услови се могу свести на (69). Следи да је $\widehat{G}_3^L$ унутрашња ако је услов (69) испуњен.

За $n = 1$ квадратура $\widehat{G}_3^S$ има исти степен тачности $(2n + 2 = 4)$ као и одговарајућа Гаус-Кронродова квадратура K_3 $(3n + 1 = 4)$. Стога се ове две формуле поклапају. Можемо применити резултат [27, теорема 5.3(б)] како бисмо закључили да је $\widehat{G}_3^S$ унутрашња ако су испуњена оба услова (70). □

Теорема 27. *За $n \geq 2$ квадратура $Q_{n+2}^{(1)}$ са Бернштајн-Сегеовом тежинском функцијом $\omega^{(1/2,-1/2)}$ је унутрашња.*

Доказ. Из теореме 21 следи да је $Q_{n+2}^{(1)}$ унутрашња за $n \geq 3$, јер тада важи $\alpha_{n-1}^{(1/2,-1/2)} = \alpha_{n+1}^{(1/2,-1/2)} = 0$.

За $n = 2$ на основу (60) следи да је $Q_4^{(1)}$ унутрашња ако је

$$q_4(1) \geq 0 \quad \text{и} \quad q_4(-1) \geq 0,$$

тј. ако су задовољене неједнакости

$$\frac{4\left(1-\alpha_1^{(1/2,-1/2)}\right)\pi_3^{(1/2,-1/2)}(1)}{\pi_2^{(1/2,-1/2)}(1)} \geq 1 \quad \text{и} \quad -\frac{4\left(1+\alpha_1^{(1/2,-1/2)}\right)\pi_3^{(1/2,-1/2)}(-1)}{\pi_2^{(1/2,-1/2)}(-1)} \geq 1.$$

Директним рачуном се показује да обе претходне неједнакости важе. □

4.4 Развој интегранда у ред и процена грешке Гаусових квадратура

У овом одељку илуструјемо примену квадратурних формула $\widehat{G}_{2n+1}^S$ и $Q_{n+2}^{(1)}$ за процену грешке $|(I - G_{n+1})(f)|$. Поменимо да се вредности $\widehat{G}_{2n+1}^S$

и $Q_{n+2}^{(1)}$ користе и за апроксимацију интеграла I, јер ове квадратуре дају прецизнију апроксимацију I него квадратура G_{n+1}.

Наведимо неке резултате везане за процену грешке Гаусове квадратуре G_{n+1} помоћу уопштене усредњене Гаусове квадратуре $\widehat{G}_{2n+1}^S$. Са $\mathcal{R}[a,b]$ означимо простор свих интеграбилних функција на интервалу $[a,b]$ и проширимо појам скаларног производа у односу на меру $d\mu$,

$$(f,g)=(f,g)_{d\mu}=I(fg)=\int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)d\mu(t), \quad f,g\in\mathcal{R}[a,b].$$

Претпоставимо да се интегранд f може развити у ред преко ортонормираних полинома $\tilde{\pi}_0,\tilde{\pi}_1,\tilde{\pi}_2,...$ с обзиром на меру $d\mu$ (видети дефиницију 2), тј.

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k\tilde{\pi}_k(t), \quad \eta_k=I(f\tilde{\pi}_k),$$

и подсетимо се да за ортонормиране полиноме важи

$$I(\tilde{\pi}_k\tilde{\pi}_l)=\begin{cases}0, & k\neq l,\\ 1, & k=l.\end{cases}$$

Ради једноставности записа претпоставимо да је тежинска функција ω таква да је $I(1)=1$. Тада је

$$\begin{aligned} I(f) &= \sum_{k=0}^{\infty}\eta_k I(\tilde{\pi}_k)=\eta_0, \\ G_{n+1}(f) &= \sum_{k=0}^{\infty}\eta_k G_{n+1}(\tilde{\pi}_k)=\eta_0+\sum_{k=2n+2}^{\infty}\eta_k G_{n+1}(\tilde{\pi}_k), \quad (71)\\ \widehat{G}_{2n+1}^S(f) &= \eta_0+\sum_{k=2n+3}^{\infty}\eta_k\widehat{G}_{2n+1}^S(\tilde{\pi}_k). \quad (72)\end{aligned}$$

На основу нумеричких резултата у раду [72] и на основу примера 3, видимо да се грешка

$$|(I-G_{n+1})(f)|=\left|\sum_{k=2n+2}^{\infty}\eta_k G_{n+1}(\tilde{\pi}_k)\right| \quad (73)$$

за многе интегранде f и различите тежинске функције ω може врло добро апроксимирати разликом

$$\begin{aligned}|(G_{n+1}-\widehat{G}_{2n+1}^S)(f)| = & \; \Big|\eta_{2n+2}G_{n+1}(\tilde{\pi}_{2n+2}) \\ & +\sum_{k=2n+3}^{\infty}\eta_k((G_{n+1}-\widehat{G}_{2n+1}^S)(\tilde{\pi}_k))\Big|. \quad (74)\end{aligned}$$

Специјално, ово важи у случају када низ коефицијената $\{\eta_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ брзо опада ка нули када $k\to\infty$, јер су тада десне стране обеју једнакости (73) и (74) ограничене одозго са $|\eta_{2n+2}G_{n+1}(\tilde{\pi}_{2n+2})|$. Ово такође важи и у случају када низ $\{|\eta_k|\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ опада ка нули када $k\to\infty$ и $\widehat{G}^S_{2n+1}(\tilde{\pi}_k)\approx 0$ за неке $k=2n+3, 2n+4, 2n+5, ...$ (овај случај обухвата тежинске функције које је разматрао Спалевић у [79]). Следеће тврђење је последица теореме 20.

Последица. *Нека су испуњени услови теореме* 20. *Тада се процена грешке* (74) *може изразити у облику*

$$|(G_{n+1}-\widehat{G}^S_{2n+1})(f)| = \left|\sum_{k=2n+2}^{3n+1}\eta_k G_{n+1}(\tilde{\pi}_k) + \sum_{k=3n+2}^{\infty}\eta_k((G_{n+1}-\widehat{G}^S_{2n+1})(\tilde{\pi}_k))\right|.$$

Доказ. На основу теореме 20, аналогно као и (72) добијамо

$$\widehat{G}^S_{2n+1}(f) = \eta_0 + \sum_{k=3n+2}^{\infty}\eta_k\widehat{G}^S_{2n+1}(\tilde{\pi}_k).$$

На основу претходног резултата и (71) следи тврђење последице. □

Слично као (72), важи

$$Q^{(1)}_{n+2}(f) = \eta_0 + \sum_{k=2n+3}^{\infty}\eta_k Q^{(1)}_{n+2}(\tilde{\pi}_k),$$

што указује да се разлика $|(G_{n+1}-Q^{(1)}_{n+2})(f)|$ може користити за процену грешке (73). У радовима [14, 72], као и у примеру 3, илустрована је ефикасност оваквог приступа за процену грешке $|(I-G_{n+1})(f)|$.

Пример 3. У овом примеру сва израчунавања извршена су са високом тачношћу у MATLAB-у. Размотримо процену грешке Гаусове квадратуре $G_{n+1}(f)$ за приближно израчунавање интеграла

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\omega^{-1/2}(t)dt.$$

Апроксимацију оваквих интеграла разматрао је Нотарис [58].

Како бисмо проценили грешку $|(I-G_{n+1})(f)|$, користимо разлике $|(\widehat{G}^S_{2n+1}-G_{n+1})(f)|$ и $|(Q^{(1)}_{n+2}-G_{n+1})(f)|$. Као што је претходно показано, Табела 4: Пример 3 – процена грешке $|(I - G_{n+1})(f)|$ помоћу разлика $|(\widehat{G}^S_{2n+1} - G_{n+1})(f)|$ и $|(Q^{(1)}_{n+2} - G_{n+1})(f)|$ за $f(t) = e^{-t}$ и различите вредности α, β, δ.

α	β	δ	n	$\lvert I - G_{n+1}\rvert$	$\lvert\widehat{G}^S_{2n+1} - G_{n+1}\rvert$	$\lvert(Q^{(1)}_{n+2} - G_{n+1})\rvert$
1	$1+\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	4	1.1255e-09	1.1255e-09	1.1234e-09
1	$1+\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	9	1.6635e-24	1.6635e-24	1.6626e-24
1	$1+\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	14	1.4977e-41	1.4977e-41	1.4973e-41
1	$1+\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	19	4.7675e-60	4.7675e-60	4.7668e-60
$\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	1	4	4.0268e-10	4.0268e-10	4.0193e-10
$\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	1	9	5.6832e-25	5.6832e-25	5.6801e-25
$\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	1	14	5.0339e-42	5.0339e-42	5.0326e-42
$\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	1	19	1.5891e-60	1.5891e-60	1.5888e-60

квадратуре $\widehat{G}^S_{2n+1}$ и $Q^{(1)}_{n+2}$ су унутрашње у случајевима размотреним у табелама 4 и 5.

Табела 4 приказује резултате за

$$f(t) = e^{-t},$$

при различитим вредностима параметара α, β, δ. Видимо да и $|(\widehat{G}^S_{2n+1} - G_{n+1})(f)|$ и $|(Q^{(1)}_{n+2} - G_{n+1})(f)|$ дају добре процене грешке $|(I - G_{n+1})(f)|$ за све вредности α, β, δ.

У табели 5 приказани су резултати за

$$f(t) = \ln \frac{2}{2-t},$$

при различитим вредностима параметара α, β, δ. И овде видимо да обе разлике, $|(\widehat{G}^S_{2n+1} - G_{n+1})(f)|$ и $|(Q^{(1)}_{n+2} - G_{n+1})(f)|$, дају добре процене грешке $|(I - G_{n+1})(f)|$ за све вредности α, β, δ, с тим што примећујемо да је процена грешке помоћу $|(\widehat{G}^S_{2n+1} - G_{n+1})(f)|$ мало прецизнија од процене грешке помоћу $|(Q^{(1)}_{n+2} - G_{n+1})(f)|$.

4.5 Закључак

Питање унутрашњости квадратурних формула је важно, јер се унутрашње квадратуре могу применити на ширу класу функција него квадратуре које имају један или више спољашњих чворова. У овој глави

Табела 5: Пример 3 – процена грешке $|(I - G_{n+1})(f)|$ помоћу разлика $|(\widehat{G}^S_{2n+1} - G_{n+1})(f)|$ и $|(Q^{(1)}_{n+2} - G_{n+1})(f)|$ за $f(t) = \ln(2/(2-t))$ и различите вредности α, β, δ.

α	β	δ	n	$\|I - G_{n+1}\|$	$\|\widehat{G}^S_{2n+1} - G_{n+1}\|$	$\|(Q^{(1)}_{n+2} - G_{n+1})\|$
1	$1+\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	4	1.0935e-06	1.0939e-06	1.0278e-06
1	$1+\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	9	1.0569e-12	1.0569e-12	9.8786e-13
1	$1+\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	14	1.3506e-18	1.3506e-18	1.2596e-18
1	$1+\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	19	1.9372e-24	1.9372e-24	1.8046e-24
$\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	1	4	2.1627e-07	2.1636e-07	2.0337e-07
$\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	1	9	2.0435e-13	2.0435e-13	1.9102e-13
$\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	1	14	2.5904e-19	2.5904e-19	2.4161e-19
$\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	1	19	3.7002e-25	3.7002e-25	3.4472e-25

приказани су услови под којима су уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле и њихове скраћене варијанте са Бернштајн-Сегеовим тежинским функцијама унутрашње. Ти услови су исказани преко коефицијената Бернштајн-Сегеових тежинских функција. Ово истраживање се надовезује на резултате из [14], где је испитивана унутрашњост уопштених усредњених Гаусових квадратура и њихових скраћења са класичним тежинским функцијама.

У случају Бернштајн-Сегеових тежинских функција, испитано је и у којим ситуацијама се усредњене квадратурне формуле (које је у [40] предложио Лори) поклапају са уопштеним усредњеним Гаусовим квадратурним формулама (које је у [78] предложио Спалевић), као и у којим ситуацијама се уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле поклапају са одговарајућим Гаус-Кронродовим квадратурним формулама (тада се једноставна нумеричка конструкција за одређивање уопштених усредњених Гаусових квадратура из рада [78] може применити за одређивање Гаус-Кронродових квадратура).

Нумерички примери показују високу прецизност процене грешке Гаусове квадратуре, како помоћу уопштених усредњених Гаусових квадратура, тако и помоћу њихових скраћених варијанти.

5 Процена грешке неких формула за израчунавање вишедимензионалних и хиперповршинских интеграла

Гаусова квадратурна формула са n чворова (33),

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) = G_n(f) + R_n^G(f), \quad G_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^G f(t_k^G),$$

разматрана је у поглављу 3.1. Њене екстензије са $2n+1$ чворова, попут Гаус-Кронродове квадратурне формуле (43),

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) = K_{2n+1}(f) + R_{2n+1}^K(f),$$
$$K_{2n+1}(f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{GK} f(t_k^G) + \sum_{l=1}^{n+1} \omega_l^K f(t_l^K),$$

као и уопштене усредњене Гаусове квадратурне формуле (58),

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) = \widehat{G}_{2n+1}^S(f) + R_{2n+1}^{\widehat{G}}(f),$$
$$\widehat{G}_{2n+1}^S(f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{G\widehat{G}} f(t_k^G) + \sum_{l=1}^{n+1} \omega_l^{\widehat{G}} f(t_l^{\widehat{G}}),$$

разматране су редом у поглављу 3.2 и одељку 3.3.2. Овде ћемо (делом и ради једноставности записа) променити неке ознаке, па ћемо Гаусову, Гаус-Кронродову и уопштену усредњену Гаусову квадратуру редом записивати у облику

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt \approx G_n(f) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^G f(t_k^G),$$

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt \approx K_{2n+1}(f) = \sum_{k=1}^{2n+1} \omega_k^K f(t_k^K),$$

$$\int_a^b f(t)\omega(t)dt \approx \widehat{G}_{2n+1}^S(f) = \sum_{k=1}^{2n+1} \omega_k^{\widehat{G}} f(t_k^{\widehat{G}}),$$

где је, као што смо већ раније помињали, ω тежинска функција мере $d\mu(t) = \omega(t)dt$, а $[a, b]$ је конвексни омотач носача мере $d\mu$.

Видели смо да се за процену грешке $|(I-G_n)(f)|$ Гаусове квадратуре (33) могу узети разлике $|(K_{2n+1}-G_n)(f)|$ и $|(\widehat{G}_{2n+1}^S-G_n)(f)|$. У овој глави покушаћемо ту идеју да проширимо на интеграле по вишедимензионалним областима. Резултати до којих смо дошли приказани су у раду [32].

Књиге о вишедимензионалној нумеричкој интеграцији написали су Мисовски[53] [52] и Строуд[54] [82], а за изучавање ове области препоручујемо и књигу [17]. Строудов рад наставили су Рабиновиц и Кулс[55] (видети [8, 10]). Нешто о вишедимензионалној нумеричкој интеграцији може се наћи и у [2, 9, 12, 69]. Занимљиви су и резултати о производу квадратура са вишеструким чворовима из рада Спалевића [76], док се у раду [77] истог аутора може наћи доказ Беселове[56] неједнакости и Парсевалове[57] једнакости за ортогоналне полиноме више независно променљивих.

Нека је $\Omega^m \subset \mathbb{R}^m$ и $\omega(\boldsymbol{x}) \geq 0$ за свако $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. Разматрамо формуле за нумеричко израчунавање вишедимензионалних и хиперповршинских интеграла облика

$$I^m(f) = \int_{\Omega^m} f(\boldsymbol{x})\omega(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = C_N^m(f) + R_N^m(f), \quad C_N^m(f) = \sum_{k=1}^{N} \omega_k f(\boldsymbol{x}_k), \tag{75}$$

где $\boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^m$, $\omega_k \in \mathbb{R}$.

Каже се да формула (75) има **(алгебарски) степен тачности** D ако је $R_N^m(f) = 0$ за свако $f \in \mathcal{P}_D^m$, где је са $\mathcal{P}_D^m$ означен скуп свих (алгебарских) полинома m променљивих степена не већег од D.

Занимаће нас формуле (75) које се конструишу узастопном применом Гаусових квадратура G_n, а које означавамо са G_n^m. Како бисмо проценили грешку $|(I^m - G_n^m)(f)|$, формулу G_n^m проширујемо до формула K_{2n+1}^m и $\widehat{G}_{2n+1}^m$, а онда за процену грешке узимамо разлике $|(K_{2n+1}^m - G_n^m)(f)|$ и $|(\widehat{G}_{2n+1}^m - G_n^m)(f)|$, где је са K_{2n+1}^m означена формула конструисана узастопном применом одговарајућих Гаус-Кронродових квадратура K_{2n+1}, а са $\widehat{G}_{2n+1}^m$ је означена формула конструисана узастопном применом одговарајућих уопштених усредњених Гаусових квадратура $\widehat{G}_{2n+1}^S$. У формулама G_n, K_{2n+1} и $\widehat{G}_{2n+1}^m$ које будемо користили фигуришу различите тежинске функције, од којих се неке могу наћи у табели 1.

[53] Иван Петрович Мысовских (1921-2007), руски математичар

[54] Arthur H. Stroud (1932-1998), амерички математичар

[55] Ronald Cools, савремени белгијски математичар

[56] Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), немачки математичар, физичар и астроном

[57] Marc-Antoine Parseval (1755-1836), француски математичар

Размотрићемо интеграле по m-димензионалној коцки, симплексу, сфери и лопти, ослањајући се првенствено на резултате из [52]. У свим примерима прво аналитички решавамо I^m, па за различите вредности m и n приказујемо разлике

$$|I^m - G_n^m|,\ |I^m - K_{2n+1}^m|,\ |K_{2n+1}^m - G_n^m|,\ |I^m - \widehat{G}_{2n+1}^m|,\ |\widehat{G}_{2n+1}^m - G_n^m|,$$

које редом представљају грешку формуле G_n^m, грешку формуле K_{2n+1}^m, процену грешке формуле G_n^m помоћу K_{2n+1}^m, грешку формуле $\widehat{G}_{2n+1}^m$, процену грешке формуле G_n^m помоћу $\widehat{G}_{2n+1}^m$. Нарочито ће нас занимати да грешку $|I^m - G_n^m|$ упоредимо са њеним проценама $|K_{2n+1}^m - G_n^m|$ и $|\widehat{G}_{2n+1}^m - G_n^m|$, па ће у табелама бројевне вредности ових трију величина бити подебљане. Сви резултати добијени су у аритметици са повећаном тачношћу са 40 значајних цифара (неки кодови које смо користили преузети су из [23]).

5.1 Интеграли по m-димензионалној коцки

Најједноставнија ситуација коју ћемо разматрати је апроксимација интеграла по m-димензионалној коцки,

$$I^m = \int_{\Omega^m} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad \Omega^m = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid -1 \le x_k \le 1,\ k = 1, 2, ..., m\},$$

који се може записати у облику

$$I^m = \int_{-1}^{1} dx_1 \int_{-1}^{1} dx_2 \cdots \int_{-1}^{1} f(x_1, x_2, ..., x_m)dx_m.$$

Интеграл по свакој промењљивој са десне стране претходне једнакости може се апроксимирати Гаусовом квадратуром са n чворова G_n са Лежандровом тежинском функцијом $\omega(t) = 1$ на $[-1, 1]$,

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt \approx \sum_{k=1}^{n} \omega_k^G \varphi(t_k^G), \tag{76}$$

што даје формулу G_n^m за приближно израчунавање интеграла I^m са n^m чворова,

$$I^m \approx G_n^m = \sum_{k_1, k_2, ..., k_m = 1}^{n} \omega_{k_1}^G \omega_{k_2}^G \cdots \omega_{k_m}^G f(t_{k_1}^G, t_{k_2}^G, ..., t_{k_m}^G). \tag{77}$$

Аналогно, ако уместо G_n користимо квадратуре са $2n+1$ чворова, K_{2n+1} или $\widehat{G}^S_{2n+1}$,

$$\int_{-1}^{1} \varphi(t)dt \approx \sum_{k=1}^{2n+1} \omega_k^K \varphi(t_k^K), \quad \int_{-1}^{1} \varphi(t)dt \approx \sum_{k=1}^{2n+1} \omega_k^{\widehat{G}} \varphi(t_k^{\widehat{G}}),$$

добијамо формуле са $(2n+1)^m$ чворова,

$$I^m \approx K^m_{2n+1} = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_m=1}^{2n+1} \omega_{k_1}^K \omega_{k_2}^K \cdots \omega_{k_m}^K f(t_{k_1}^K, t_{k_2}^K, ..., t_{k_m}^K),$$

$$I^m \approx \widehat{G}^m_{2n+1} = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_m=1}^{2n+1} \omega_{k_1}^{\widehat{G}} \omega_{k_2}^{\widehat{G}} \cdots \omega_{k_m}^{\widehat{G}} f(t_{k_1}^{\widehat{G}}, t_{k_2}^{\widehat{G}}, ..., t_{k_m}^{\widehat{G}}).$$

Пример 4. У табели 6 приказани су резултати процене грешке формуле G_n^m за следеће интеграле по m-димензионалној коцки:

$$\begin{aligned}
I^1 &= \int_{-1}^{1} \cos(x_1)dx_1, \\
I^2 &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \cos(x_1+x_2)dx_1dx_2, \\
I^3 &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \cos(x_1+x_2+x_3)dx_1dx_2dx_3, \\
I^5 &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} \cos(x_1+x_2+\cdots+x_5)dx_1dx_2\cdots dx_5, \\
I^7 &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} \cos(x_1+x_2+\cdots+x_7)dx_1dx_2\cdots dx_7, \\
I^{10} &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} \cos(x_1+x_2+\cdots+x_{10})dx_1dx_2\cdots dx_{10}.
\end{aligned}$$

Како се израчунавање вишеструког интеграла не би свело на рачунање производа једноструких интеграла, наведене интеграле смо посматрали као да променљиве подинтегралне функције нису раздвојене (иако се тригонометријским трансформацијама променљиве могу раздвојити). Такође смо настојали да упоредимо тачност формуле G_n^m за различите димензије m при једнаким вредностима n, па смо зато изабрали да сви интеграли у овом примеру буду специјални случајеви интеграла

$$I^m = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} \cos(x_1+x_2+\cdots+x_m)dx_1dx_2\cdots dx_m,$$

за $m = 1, 2, 3, 5, 7, 10$.

Размотрени су случајеви $n = 2, 4, 6$ за $m = 1, 2, 3, 5$, затим случајеви $n = 2, 4$ за $m = 7$, и случај $n = 2$ за $m = 10$ (напоменимо да је n број чворова Гаусове квадратуре; на пример, број чворова одговарајуће формуле K_{2n+1}^m или $\widehat{G}_{2n+1}^m$ за $n = 4$ и $m = 7$ је $(2n+1)^m = 9^7 = 4782969$).

Обе разлике $|(K_{2n+1}^m - G_n^m)(f)|$ и $|(\widehat{G}_{2n+1}^m - G_n^m)(f)|$ у свим случајевима дају веома добре процене грешке $|(I^m - G_n^m)(f)|$, при чему су обе процене подједнако добре. Ако бисмо упоредили релативне грешке G_n^m за различите вредности m при истим вредностима n, приметили бисмо да са порастом димензије тачност опада, али не много.

Пример 5. У овом примеру разматрамо дводимензионални интеграл по квадрату (2-димензионалној коцки),

$$I^2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+x_1)^4\cos(x_1+x_2)dx_1dx_2,$$

али са мало другачијим приступом. Узимамо $f(x_1, x_2) = \cos(x_1 + x_2)$, па интеграл по промењивој x_2 апроксимирамо Гаусовом квадратуром са n чворова са Лежандровом тежинском функцијом $\omega(t) = 1$ на $[-1, 1]$,

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt \approx \sum_{k_2=1}^{n}\omega_{k_2}^G\varphi(t_{k_2}^G),$$

док интеграл по промењивој x_1 апроксимирамо Гаусовом квадратуром са n чворова са Јакобијевом тежинском функцијом $\omega(t) = (1+t)^4$ на $[-1, 1]$,

$$\int_{-1}^{1}\varphi(t)(1+t)^4dt \approx \sum_{k_1=1}^{n}\omega_{k_1}^G\varphi(t_{k_1}^G).$$

Гаус-Кронродова квадратура K_{2n+1} са Јакобијевом тежинском функцијом $\omega(t) = (1+t)^4$ на $[-1, 1]$ не постоји ни за једно $n = 2, 4, 6$ (видети [67]), па се формула K_{2n+1}^2 не може конструисати. С друге стране, одговарајућа уопштена усредњена Гаусова квадратура $\widehat{G}_{2n+1}^S$ постоји. Резултати су приказани у табели 7 и видимо да разлика $|(\widehat{G}_{2n+1}^2 - G_n^2)(f)|$ у свим случајевима даје веома добре процене грешке $|(I^2 - G_n^2)(f)|$.

У табели 8 приказани су резултати за исти интеграл, али је узето $f(x_1, x_2) = (1+x_1)^4\cos(x_1+x_2)$ и $\omega(x_1) = \omega(x_2) = 1$ (Гаус-Кронродова квадратура у овој ситуацији постоји). И $|(K_{2n+1}^2 - G_n^2)(f)|$ и $|(\widehat{G}_{2n+1}^2 - G_n^2)(f)|$ у свим случајевима дају веома добре, и то подједнако добре, Табела 6: Пример 4 – интеграли по m-димензионалној коцки, $m = 1, 2, 3, 5, 7, 10$.

$I^1 = \int_{-1}^1 \cos(x_1)dx_1 = 2\sin 1 \approx 1.682...$					
n	$\lvert I^1 - G_n^1\rvert$	$\lvert I^1 - K_{2n+1}^1\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^1 - G_n^1\rvert$	$\lvert I^1 - \widehat{G}_{2n+1}^1\rvert$	$\lvert \widehat{G}_{2n+1}^1 - G_n^1\rvert$
2	$7.118e-03$	8.850e-08	$7.118e-03$	8.850e-08	$7.118e-03$
4	$2.809e-07$	1.127e-16	$2.809e-07$	3.226e-14	$2.809e-07$
6	$1.514e-12$	2.451e-26	$1.514e-12$	1.347e-20	$1.514e-12$
$I^2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cos(x_1 + x_2)dx_1dx_2 = (2\sin 1)^2 \approx 2.832...$					
n	$\lvert I^2 - G_n^2\rvert$	$\lvert I^2 - K_{2n+1}^2\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^2 - G_n^2\rvert$	$\lvert I^2 - \widehat{G}_{2n+1}^2\rvert$	$\lvert \widehat{G}_{2n+1}^2 - G_n^2\rvert$
2	$2.391e-02$	2.979e-07	$2.391e-02$	2.979e-07	$2.391e-02$
4	$9.455e-07$	3.794e-16	$9.455e-07$	1.086e-13	$9.455e-07$
6	$5.095e-12$	8.249e-26	$5.095e-12$	4.534e-20	$5.095e-12$
$I^3 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cos(x_1 + x_2 + x_3)dx_1dx_2dx_3 = (2\sin 1)^3 \approx 4.766...$					
n	$\lvert I^3 - G_n^3\rvert$	$\lvert I^3 - K_{2n+1}^3\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^3 - G_n^3\rvert$	$\lvert I^3 - \widehat{G}_{2n+1}^3\rvert$	$\lvert \widehat{G}_{2n+1}^3 - G_n^3\rvert$
2	$6.023e-02$	7.520e-07	$6.023e-02$	7.520e-07	$6.023e-02$
4	$2.387e-06$	9.577e-16	$2.387e-06$	2.741e-13	$2.387e-06$
6	$1.286e-11$	2.082e-25	$1.286e-11$	1.145e-19	$1.286e-11$
$I^5 = \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \cos(x_1 + \cdots + x_5)dx_1 \cdots dx_5 = (2\sin 1)^5 \approx 13.500...$					
n	$\lvert I^5 - G_n^5\rvert$	$\lvert I^5 - K_{2n+1}^5\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^5 - G_n^5\rvert$	$\lvert I^5 - \widehat{G}_{2n+1}^5\rvert$	$\lvert \widehat{G}_{2n+1}^5 - G_n^5\rvert$
2	$2.831e-01$	3.550e-06	$2.831e-01$	3.550e-06	$2.831e-01$
4	$1.127e-05$	4.521e-15	$1.127e-05$	1.294e-12	$1.127e-05$
6	$6.072e-11$	9.830e-25	$6.072e-11$	5.403e-19	$6.072e-11$
$I^7 = \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \cos(x_1 + \cdots + x_7)dx_1 \cdots dx_7 = (2\sin 1)^7 \approx 38.237...$					
n	$\lvert I^7 - G_n^7\rvert$	$\lvert I^7 - K_{2n+1}^7\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^7 - G_n^7\rvert$	$\lvert I^7 - \widehat{G}_{2n+1}^7\rvert$	$\lvert \widehat{G}_{2n+1}^7 - G_n^7\rvert$
2	1.118	1.408e-05	1.118	1.408e-05	1.118
4	$4.468e-05$	1.792e-14	$4.468e-05$	5.131e-12	$4.468e-05$
$I^{10} = \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \cos(x_1 + \cdots + x_{10})dx_1 \cdots dx_{10} = (2\sin 1)^{10} \approx 182.260...$					
n	$\lvert I^{10} - G_n^{10}\rvert$	$\lvert I^{10} - K_{2n+1}^{10}\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^{10} - G_n^{10}\rvert$	$\lvert I^{10} - \widehat{G}_{2n+1}^{10}\rvert$	$\lvert \widehat{G}_{2n+1}^{10} - G_n^{10}\rvert$
2	7.564	9.584e-05	7.564	9.584e-05	7.564

Табела 7: Пример 5 – интеграл по квадрату за $\omega(x_1) = (1+x_1)^4$, $\omega(x_2) = 1$.

$I^2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+x_1)^4\cos(x_1+x_2)dx_1dx_2 = 16(1-\sin 2-\cos 2) \approx 8.109...$					
n	$\lvert I^2 - G_n^2\rvert$	$\lvert I^2 - K_{2n+1}^2\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^2 - G_n^2\rvert$	$\lvert I^2 - \widehat{G}_{2n+1}^2\rvert$	$\lvert \widehat{G}_{2n+1}^2 - G_n^2\rvert$
2	$3.880e-02$	-	-	6.634e-07	$3.880e-02$
4	$1.454e-06$	-	-	4.310e-13	$1.454e-06$
6	$7.700e-12$	-	-	2.115e-19	$7.700e-12$

Табела 8: Пример 5 – интеграл по квадрату за $\omega(x_1) = \omega(x_2) = 1$.

$I^2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(1+x_1)^4\cos(x_1+x_2)dx_1dx_2 = 16(1-\sin 2-\cos 2) \approx 8.109...$					
n	$\lvert I^2 - G_n^2\rvert$	$\lvert I^2 - K_{2n+1}^2\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^2 - G_n^2\rvert$	$\lvert I^2 - \widehat{G}_{2n+1}^2\rvert$	$\lvert \widehat{G}_{2n+1}^2 - G_n^2\rvert$
2	$6.276e-01$	1.930e-04	$6.274e-01$	1.930e-04	$6.274e-01$
4	$6.008e-04$	4.263e-12	$6.008e-04$	5.874e-10	$6.008e-04$
6	$2.772e-08$	4.669e-21	$2.772e-08$	9.469e-16	$2.772e-08$

процене грешке $|(I^2 - G_n^2)(f)|$, али приметимо да је G_n^2 за $\omega(x_1) = (1+x_1)^4$ прецизнија од G_n^2 за $\omega(x_1) = 1$, као и да је $\widehat{G}_{2n+1}^2$ за $\omega(x_1) = (1+x_1)^4$ прецизнија од $\widehat{G}_{2n+1}^2$ за $\omega(x_1) = 1$. Истакнимо и да је $\widehat{G}_{2n+1}^2$ за $\omega(x_1) = (1+x_1)^4$ при $n = 2, 4$ прецизнија и од K_{2n+1}^2 (за $\omega(x_1) = 1$).

Приступ из (првог дела) примера 5 може се применити при апроксимацији интеграла са тежинском функцијом $\omega(\boldsymbol{x})$ по m-димензионалној коцки,

$$I^m = \int_{\Omega^m} f(\boldsymbol{x})\omega(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad \Omega^m = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid -1 \leq x_k \leq 1,\ k = 1, 2, ..., m\},$$

када се промењливе у тежинској функцији могу раздвојити, тј. када је $\omega(\boldsymbol{x}) = \omega_1(x_1)\omega_2(x_2)\cdots\omega_m(x_m)$. Тада се формуле G_n^m, K_{2n+1}^m и $\widehat{G}_{2n+1}^m$ изводе аналогно.

5.2 Интеграли по m-димензионалном симплексу

Размотримо интеграл по m-димензионалном симплексу,

$$I^m = \int_{\Omega^m} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x},$$

$$\Omega^m = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid x_k \geq 0,\ k = 1, 2, ..., m,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leq 1\}.$$

Ако интеграл по промењљивој x_l, $l = 1, 2, ..., m$, редом апроксимирамо Гаусовом квадратуром са n чворова G_n са Јакобијевом тежинском функцијом $\omega(t) = (1-t)^{m-l}$, $l = 1, 2, ..., m$, на $[0, 1]$,

$$\int_0^1 (1-t)^{m-l}\varphi(t)dt \approx \sum_{k=1}^{n} \omega_{k,m-l}^{G}\varphi(t_{k,m-l}^{G}), \quad l = 1, 2, ..., m, \tag{78}$$

добијамо формулу G_n^m за приближно израчунавање интеграла I^m са n^m чворова,

$$\begin{aligned} I^m \approx G_n^m = & \sum_{k_1,k_2,...,k_m=1}^{n} \omega_{k_1,m-1}^{G}\omega_{k_2,m-2}^{G}\cdots\omega_{k_m,0}^{G} \\ & \times f(\Pi^G(k_1), \Pi^G(k_1,k_2), ..., \Pi^G(k_1,k_2,...,k_m)), \end{aligned} \tag{79}$$

где је

$$\Pi^G(k_1) = t_{k_1,m-1}^{G},$$
$$\Pi^G(k_1,k_2,...,k_l) = (1-t_{k_1,m-1}^{G})(1-t_{k_2,m-2}^{G})\cdots(1-t_{k_{l-1},m-l+1}^{G})t_{k_l,m-l}^{G},$$
$$l = 2, 3, ..., m.$$

Користећи одговарајуће квадратуре са $2n+1$ чворова, K_{2n+1} или $\widehat{G}_{2n+1}$, уместо G_n, добијамо формуле са $(2n+1)^m$ чворова,

$$\begin{aligned} I^m \approx K_{2n+1}^m = & \sum_{k_1,k_2,...,k_m=1}^{2n+1} \omega_{k_1,m-1}^{K}\omega_{k_2,m-2}^{K}\cdots\omega_{k_m,0}^{K} \\ & \times f(\Pi^K(k_1), \Pi^K(k_1,k_2), ..., \Pi^K(k_1,k_2,...,k_m)), \\ I^m \approx \widehat{G}_{2n+1}^m = & \sum_{k_1,k_2,...,k_m=1}^{2n+1} \omega_{k_1,m-1}^{\widehat{G}}\omega_{k_2,m-2}^{\widehat{G}}\cdots\omega_{k_m,0}^{\widehat{G}} \\ & \times f(\Pi^{\widehat{G}}(k_1), \Pi^{\widehat{G}}(k_1,k_2), ..., \Pi^{\widehat{G}}(k_1,k_2,...,k_m)). \end{aligned}$$

Ако упоредимо формулу (77) за приближно израчунавање интеграла по m-димензионалној коцки са формулом (79) за приближно израчунавање интеграла по m-димензионалном симплексу, на први поглед те две формуле могу деловати подједнако сложено, у смислу да је за обе потребно израчунати исти број улазних података (чворова и тежина). Међутим, приметимо да се у случају формуле (77) интеграл по свакој промењљивој апроксимира истом квадратуром (76) и треба израчунати само $2n$ чворова и тежина, док се у случају формуле (79) интеграл по свакој промењљивој апроксимира различитом квадратуром (78), па треба израчунати m пута више, тј. $2nm$ чворова и тежина.

Пример 6. У табели 9 приказани су резултати процене грешке формуле G_n^m за следеће интеграле по m-димензионалном симплексу:

$$\begin{aligned}
I^1 &= \int_0^1 \frac{dx_1}{1+x_1}, \\
I^2 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \frac{dx_1 dx_2}{(1+x_1+x_2)^2}, \\
I^3 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(1+x_1+x_2+x_3)^3}, \\
I^4 &= \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} \frac{dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{(1+x_1+x_2+x_3+x_4)^4}.
\end{aligned}$$

И овде настојимо да упоредимо тачност формуле G_n^m за различите димензије m при једнаким вредностима n, па су зато сви интеграли у овом примеру специјални случајеви интеграла

$$I^m = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \cdots \int_0^{1-x_1-x_2-\cdots-x_{m-1}} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_m}{(1+x_1+x_2+\cdots+x_m)^m},$$

за $m = 1, 2, 3, 4$.

Размотрени су случајеви $n = 2, 4, 6$ за $m = 1, 2, 3, 4$. Истакнимо да за $m = 4$, $n = 4, 6$, квадратура K_{2n+1} не постоји, па се формула K_{2n+1}^m не може конструисати.

Обе разлике $|(K_{2n+1}^m - G_n^m)(f)|$ (кад K_{2n+1}^m постоји) и $|(\widehat{G}_{2n+1}^m - G_n^m)(f)|$ у свим случајевима дају веома добре процене грешке $|(I^m - G_n^m)(f)|$, при чему су обе процене подједнако добре. Као и у примеру 4, ако бисмо упоредили релативне грешке G_n^m за различите вредности m при истим вредностима n, приметили бисмо да са порастом димензије тачност опада, али не много.

5.3 Интеграли по m-димензионалној сфери

Размотримо сада интеграл по m-димензионалној сфери,

$$I^m = \int_{\Omega^m} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad \Omega^m = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 = r^2\}.$$

Са $r, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1}$ означимо координате m-димензионалног сферног координатног система, при чему је $0 < r < \infty$, $0 \leq \varphi_k \leq \pi$, $k = 1, 2, ..., m-2$, $0 \leq \varphi_{m-1} \leq 2\pi$. Декартове координате $x_1, x_2, ..., x_m$ могу се

Табела 9: Пример 6 – интеграли по m-димензионалном симплексу, $m = 1, 2, 3, 4$.

$I^1 = \int_0^1 \frac{dx_1}{1+x_1} = \ln 2 \approx 0.693...$					
n	$\|I^1 - G_n^1\|$	$\|I^1 - K_{2n+1}^1\|$	$\|K_{2n+1}^1 - G_n^1\|$	$\|I^1 - \widehat{G}_{2n+1}^1\|$	$\|\widehat{G}_{2n+1}^1 - G_n^1\|$
2	$8.395e-04$	2.179e-07	$8.397e-04$	2.179e-07	$8.397e-04$
4	$7.631e-07$	1.322e-12	$7.631e-07$	1.636e-11	$7.631e-07$
6	$6.734e-10$	1.228e-17	$6.734e-10$	3.983e-15	$6.734e-10$
$I^2 = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \frac{dx_1 dx_2}{(1+x_1+x_2)^2} = \frac{2\ln 2 - 1}{2} \approx 0.193...$					
n	$\|I^2 - G_n^2\|$	$\|I^2 - K_{2n+1}^2\|$	$\|K_{2n+1}^2 - G_n^2\|$	$\|I^2 - \widehat{G}_{2n+1}^2\|$	$\|\widehat{G}_{2n+1}^2 - G_n^2\|$
2	$4.973e-04$	8.995e-08	$4.974e-04$	1.865e-07	$4.975e-04$
4	$4.914e-07$	4.446e-13	$4.914e-07$	1.996e-11	$4.914e-07$
6	$4.406e-10$	2.702e-18	$4.406e-10$	5.529e-15	$4.406e-10$
$I^3 = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(1+x_1+x_2+x_3)^3} = \frac{8\ln 2 - 5}{16} \approx 0.034...$					
n	$\|I^3 - G_n^3\|$	$\|I^3 - K_{2n+1}^3\|$	$\|K_{2n+1}^3 - G_n^3\|$	$\|I^3 - \widehat{G}_{2n+1}^3\|$	$\|\widehat{G}_{2n+1}^3 - G_n^3\|$
2	$1.237e-04$	1.353e-08	$1.237e-04$	6.196e-08	$1.237e-04$
4	$1.285e-07$	2.513e-14	$1.285e-07$	7.961e-12	$1.285e-07$
6	$1.167e-10$	2.024e-18	$1.167e-10$	2.337e-15	$1.167e-10$
$I^4 = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} \frac{dx_1 dx_2 dx_3 dx_4}{(1+x_1+x_2+x_3+x_4)^4} = \frac{24\ln 2 - 16}{144} \approx 0.004...$					
n	$\|I^4 - G_n^4\|$	$\|I^4 - K_{2n+1}^4\|$	$\|K_{2n+1}^4 - G_n^4\|$	$\|I^4 - \widehat{G}_{2n+1}^4\|$	$\|\widehat{G}_{2n+1}^4 - G_n^4\|$
2	$1.959e-05$	1.131e-09	$1.959e-05$	1.179e-08	$1.960e-05$
4	$2.111e-08$	-	-	1.661e-12	$2.111e-08$
6	$1.937e-11$	-	-	5.015e-16	$1.937e-11$

изразити преко сферних координата на следећи начин:

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\varphi_1,\\
x_2 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
x_3 &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\
&\vdots\\
x_{m-2} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-3}\cos\varphi_{m-2},\\
x_{m-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-3}\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1},\\
x_m &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-3}\sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1},
\end{aligned}$$

при чему је

$$d\boldsymbol{x} = r^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}d\varphi_1 d\varphi_2\cdots d\varphi_{m-1}.$$

Преласком на сферне координате, интеграл I^m постаје једнак интегралу по $(m-1)$-димензионалном паралелепипеду,

$$\begin{aligned}
I^m = \ & r^{m-1}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi_1, r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, ...,\\
& r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-1})\\
& \times\sin^{m-2}\varphi_1\sin^{m-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}d\varphi_1 d\varphi_2\cdots d\varphi_{m-1}.
\end{aligned}$$

Ако интеграл по промењљивој φ_{m-1} заменимо формулом правоугаоника са $2n$ чворова,

$$\int_a^b \varphi(t)dt \approx h\sum_{k=1}^{2n}\varphi(t_1+(k-1)h), \quad h=\frac{b-a}{2n}, \quad t_1\in[a,a+h],$$

а интеграл по свакој промењљивој φ_{m-l-2}, $l=0,1,...,m-3$, апроксимирамо Гаусовом квадратуром са n чворова G_n са Гегенбауеровом тежинском функцијом $\omega(t)=(1-t^2)^{l/2}$, $l=0,1,...,m-3$, на $[-1,1]$,

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{l/2}\varphi(t)dt \approx \sum_{k=1}^{n}\omega_{k,l}^G\varphi(t_{k,l}^G), \quad l=0,1,...,m-3,$$

добијамо формулу G_n^m за приближно израчунавање интеграла I^m са $2n^{m-1}$ чворова,

$$\begin{aligned}
I^m \approx G_n^m = \ & r^{m-1}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{2n}\sum_{k_1,k_2,...,k_{m-2}=1}^{n}\omega_{k_1,m-3}^G\omega_{k_2,m-4}^G\cdots\omega_{k_{m-2},0}^G\\
& \times F(r,\varphi_{1,k_1}^G,\varphi_{2,k_2}^G,...,\varphi_{m-2,k_{m-2}}^G,\frac{\pi}{n}k),
\end{aligned} \tag{80}$$

где је

$$\begin{aligned} & F(r,\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{m-1}) \\ = {} & f(r\cos\varphi_1, r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,...,r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-1}), \qquad (81) \\ & \varphi^G_{m-l-2,k} = \arccos t^G_{k,l}, \quad l=0,1,...,m-3. \end{aligned}$$

Користећи одговарајуће квадратуре са $2n+1$ чворова, K_{2n+1} или $\widehat{G}_{2n+1}$, уместо G_n, добијамо формуле са $2(2n+1)^{m-1}$ чворова,

$$\begin{aligned} I^m \approx K^m_{2n+1} = {} & r^{m-1}\frac{\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2(2n+1)}\sum_{k_1,k_2,...,k_{m-2}=1}^{2n+1}\omega^K_{k_1,m-3}\omega^K_{k_2,m-4}\cdots\omega^K_{k_{m-2},0} \\ & \times F(r,\varphi^K_{1,k_1},\varphi^K_{2,k_2},...,\varphi^K_{m-2,k_{m-2}},\frac{\pi}{2n+1}k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^m \approx \widehat{G}^m_{2n+1} = {} & r^{m-1}\frac{\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2(2n+1)}\sum_{k_1,k_2,...,k_{m-2}=1}^{2n+1}\omega^{\widehat{G}}_{k_1,m-3}\omega^{\widehat{G}}_{k_2,m-4}\cdots\omega^{\widehat{G}}_{k_{m-2},0} \\ & \times F(r,\varphi^{\widehat{G}}_{1,k_1},\varphi^{\widehat{G}}_{2,k_2},...,\varphi^{\widehat{G}}_{m-2,k_{m-2}},\frac{\pi}{2n+1}k). \end{aligned}$$

На основу [66], Гаус-Кронродова квадратура K_{2n+1} са Гегенбaуеровом тежинском функцијом $\omega(t) = (1-t^2)^{\lambda-1/2}$ не постоји за довољно велико n и $\lambda > 3$. У конструкцији формуле K^m_{2n+1} појављују се Гегенбауерове тежинске функције $\omega(t) = (1-t^2)^{l/2}$, $l = 0,1,...,m-3$. Дакле, ако разматрамо интеграл по m-димензионалној сфери за $m > 8$, за довољно велико n формула K^m_{2n+1} се не може конструисати.

Пример 7. Размотримо (3-димензионалну) сферу

$$S^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

и површински интеграл

$$I^3 = \int_{S^3} e^{x_1} d\boldsymbol{x} = 2r\pi(e^r - 1/e^r).$$

У табели 10 приказани су резултати за $r = 1,2,3,4$. И $|(K^m_{2n+1} - G^m_n)(f)|$ и $|(\widehat{G}^m_{2n+1} - G^m_n)(f)|$ у свим случајевима дају веома добре процене грешке $|(I^m - G^m_n)(f)|$, и обе процене су подједнако добре. Приметимо да се са повећањем полупречника r при фиксираним вредностима n тачност све три формуле G^m_n, K^m_{2n+1} и $\widehat{G}^m_{2n+1}$ смањује (тачно је да су у табели 10 приказане апсолутне грешке, али до истог закључка бисмо дошли и када бисмо приказали релативне грешке).

Табела 10: Пример 7 – интеграли по (3-димензионалној) сфери полупречника $r = 1, 2, 3, 4$.

$S^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad I^3 = \int_{S^3} e^{x_1} d\boldsymbol{x} = 2\pi(e - 1/e) \approx 14.768...$					
n	$\lvert I^3 - G_n^3\rvert$	$\lvert I^3 - K_{2n+1}^3\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^3 - G_n^3\rvert$	$\lvert I^3 - \widehat{G}_{2n+1}^3\rvert$	$\lvert\widehat{G}_{2n+1}^3 - G_n^3\rvert$
2	$4.842e-02$	5.748e-07	$4.842e-02$	5.748e-07	$4.842e-02$
4	$1.854e-06$	7.429e-16	$1.854e-06$	2.123e-13	$1.854e-06$
6	$9.855e-12$	1.583e-25	$9.855e-12$	8.746e-20	$9.855e-12$
$S^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4, \quad I^3 = \int_{S^3} e^{x_1} d\boldsymbol{x} = 4\pi(e^2 - 1/e^2) \approx 91.152...$					
n	$\lvert I^3 - G_n^3\rvert$	$\lvert I^3 - K_{2n+1}^3\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^3 - G_n^3\rvert$	$\lvert I^3 - \widehat{G}_{2n+1}^3\rvert$	$\lvert\widehat{G}_{2n+1}^3 - G_n^3\rvert$
2	3.484	6.184e-04	3.485	6.184e-04	3.485
4	$2.044e-03$	5.225e-11	$2.044e-03$	3.729e-09	$2.044e-03$
6	$1.703e-07$	6.922e-19	$1.703e-07$	2.408e-14	$1.703e-07$
8	$3.873e-12$	2.086e-27	$3.873e-12$	8.727e-20	$3.873e-12$
$S^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9, \quad I^3 = \int_{S^3} e^{x_1} d\boldsymbol{x} = 6\pi(e^3 - 1/e^3) \approx 377.664...$					
n	$\lvert I^3 - G_n^3\rvert$	$\lvert I^3 - K_{2n+1}^3\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^3 - G_n^3\rvert$	$\lvert I^3 - \widehat{G}_{2n+1}^3\rvert$	$\lvert\widehat{G}_{2n+1}^3 - G_n^3\rvert$
2	$4.803e+01$	3.866e-02	$4.807e+01$	3.866e-02	$4.807e+01$
4	$1.331e-01$	3.852e-08	$1.331e-01$	1.222e-06	$1.331e-01$
6	$5.428e-05$	5.550e-15	$5.428e-05$	3.860e-11	$5.428e-05$
8	$6.132e-09$	1.871e-22	$6.132e-09$	6.962e-16	$6.132e-09$
$S^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16, \quad I^3 = \int_{S^3} e^{x_1} d\boldsymbol{x} = 8\pi(e^4 - 1/e^4) \approx 1371.740...$					
n	$\lvert I^3 - G_n^3\rvert$	$\lvert I^3 - K_{2n+1}^3\rvert$	$\lvert K_{2n+1}^3 - G_n^3\rvert$	$\lvert I^3 - \widehat{G}_{2n+1}^3\rvert$	$\lvert\widehat{G}_{2n+1}^3 - G_n^3\rvert$
2	$3.496e+02$	7.667e-01	$3.503e+02$	7.667e-01	$3.503e+02$
4	2.796	4.495e-06	2.796	8.052e-05	2.796
6	$3.443e-03$	3.426e-12	$3.443e-03$	7.669e-09	$3.443e-03$
8	$1.197e-06$	6.329e-19	$1.197e-06$	4.269e-13	$1.197e-06$
10	$1.592e-10$	3.534e-26	$1.592e-10$	1.344e-17	$1.592e-10$

5.4 Интеграли по m-димензионалној лопти

Интеграл по m-димензионалној лопти,

$$I^m = \int_{\Omega^m} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad \Omega^m = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 \leq 1\},$$

може се апроксимирати линеарном комбинацијом n интеграла по m-димензионалним сферама различитих полупречника,

$$I^m \approx \sum_{i=1}^{n} B_i \int_{\Omega_i^m} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}, \quad \Omega_i^m = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2 = r_i^2\}.$$

Дакле, када одредимо коефицијенте B_i и полупречнике r_i, даље разматрање се своди на материју изложену у поглављу 5.3.

Ако је m парно, онда B_i и r_i добијамо из система једначина

$$(r_i^G)^2 = \tau_i^G, \quad 2B_i^G(r_i^G)^{m-1} = \lambda_i^G, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

где су τ_i^G и λ_i^G чворови и тежине Гаусове квадратуре

$$\int_0^1 t^{m/2-1}\varphi(t)dt \approx \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^G \varphi(\tau_i^G).$$

Ако је m непарно, онда B_i и r_i добијамо из система једначина

$$r_i^G = \tau_i^G, \quad B_i^G(r_i^G)^{m-1} = \lambda_i^G, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

где су τ_i^G и λ_i^G чворови и тежине Гаусове квадратуре

$$\int_{-1}^1 t^{m-1}\varphi(t)dt \approx \sum_{\substack{i=-n \\ i\neq 0}}^{n} \lambda_i^G \varphi(\tau_i^G).$$

На основу (80), одговарајућа формула G_n^m за приближно израчунавање интеграла I^m са $(2n)^m$ чворова има облик

$$\begin{aligned} I^m \approx G_n^m = \; & \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} B_i^G (r_i^G)^{m-1} \\ & \times \sum_{k=1}^{4n} \sum_{k_1,k_2,...,k_{m-2}=1}^{2n} \omega_{k_1,m-3}^G \omega_{k_2,m-4}^G \cdots \omega_{k_{m-2},0}^G \\ & \times F(r_i^G, \varphi_{1,k_1}^G, \varphi_{2,k_2}^G, ..., \varphi_{m-2,k_{m-2}}^G, \frac{\pi}{2n}k), \end{aligned} \tag{82}$$

где је $F(r, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{m-1})$ дато са (81).

Како бисмо проценили грешку формуле (82), аналогно је проширујемо до једне од формула са $(4n+2)(4n+1)^{m-1}$ чворова,

$$\begin{aligned} I^m \approx K^m_{2n+1} = \ & \frac{\pi}{4n+1}\sum_{i=1}^{2n+1} B_i^K (r_i^K)^{m-1} \\ & \times \sum_{k=1}^{8n+2} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{m-2}=1}^{4n+1} \omega^K_{k_1,m-3}\omega^K_{k_2,m-4}\cdots\omega^K_{k_{m-2},0} \\ & \times F(r_i^K, \varphi^K_{1,k_1}, \varphi^K_{2,k_2}, \ldots, \varphi^K_{m-2,k_{m-2}}, \frac{\pi}{4n+1}k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I^m \approx \widehat{G}^m_{2n+1} = \ & \frac{\pi}{4n+1}\sum_{i=1}^{2n+1} B_i^{\widehat{G}} (r_i^{\widehat{G}})^{m-1} \\ & \times \sum_{k=1}^{8n+2} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{m-2}=1}^{4n+1} \omega^{\widehat{G}}_{k_1,m-3}\omega^{\widehat{G}}_{k_2,m-4}\cdots\omega^{\widehat{G}}_{k_{m-2},0} \\ & \times F(r_i^{\widehat{G}}, \varphi^{\widehat{G}}_{1,k_1}, \varphi^{\widehat{G}}_{2,k_2}, \ldots, \varphi^{\widehat{G}}_{m-2,k_{m-2}}, \frac{\pi}{4n+1}k). \end{aligned}$$

О формули (82) Мисовски је писао и у радовима [49, 50, 51]. У случају $n=2$ ове формуле су разматрали Канторович[58] [34] и Лостерник[59] [42], а у случају $n=3$ разматрао их је Диткин[60] [13].

Пример 8. У табели 11 приказани су резултати процене грешке формуле G_n^m за интеграл по 4-димензионалној коцки

$$I^4 = \int_{L^4} \sqrt{(x_2^2+x_3^2+x_4^2)^{17}}d\boldsymbol{x}, \quad L^4 : x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \le 1.$$

Размотрени су случајеви $n = 2, 4, 6, 8$. Видимо да и $|(K^m_{2n+1} - G^m_n)(f)|$ и $|(\widehat{G}^m_{2n+1} - G^m_n)(f)|$ дају веома добре процене грешке $|(I^m - G^m_n)(f)|$ у свим случајевима, при чему су обе процене подједнако добре.

5.5 Закључак

На основу нумеричких резултата приказаних кроз примере можемо извући неколико закључака.

Као што је очекивано, са порастом n (броја чворова одговарајуће Гаусове квадратуре) тачност све три формуле G^m_n, K^m_{2n+1} и $\widehat{G}^m_{2n+1}$ расте. Такође очекивано, и K^m_{2n+1} и $\widehat{G}^m_{2n+1}$ су тачније од G^m_n, при чему K^m_{2n+1}

[58] Леонид Витальевич Канторович (1912-1986), совјетски математичар и економиста

[59] Лазарь Аронович Люстерник (1899-1981), совјетски математичар

[60] Виталий Арсеньевич Диткин (1910-1987), совјетски математичар

Табела 11: Пример 8 – интеграли по 4-димензионалној лопти.

$L^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1, \quad I^4 = \int_{L^4} \sqrt{(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{17}} d\boldsymbol{x} = \frac{524288\pi}{4849845} \approx 0.339...$					
n	$\lvert I^4 - G_n^4 \rvert$	$\lvert I^4 - K_{2n+1}^4 \rvert$	$\lvert K_{2n+1}^4 - G_n^4 \rvert$	$\lvert I^4 - \widehat{G}_{2n+1}^4 \rvert$	$\lvert \widehat{G}_{2n+1}^4 - G_n^4 \rvert$
2	$1.084e-01$	7.329e-06	$1.084e-01$	6.606e-05	$1.084e-01$
4	$9.084e-05$	9.728e-13	$9.084e-05$	4.984e-11	$9.084e-05$
6	$4.369e-10$	3.459e-16	$4.369e-10$	1.409e-14	$4.369e-10$
8	$6.133e-13$	1.283e-18	$6.133e-13$	5.122e-17	$6.133e-13$

има већу (или у неким случајевима када је $n = 2$ исту) тачност него $\widehat{G}_{2n+1}^m$.

Можемо наслутити и да са порастом димензије m тачност све три формуле G_n^m, K_{2n+1}^m и $\widehat{G}_{2n+1}^m$ опада, али се не ради о великим променама тачности.

Најважнији закључак, а који смо већ истицали у свим примерима разматраним у овој глави, јесте да се и помоћу формуле K_{2n+1}^m и помоћу формуле $\widehat{G}_{2n+1}^m$ добијају веома добре процене грешке формуле G_n^m, која је конструисана узастопном применом Гаусових квадратура G_n, при чему су обе те процене грешке подједнако добре.

Навели смо и неколико ситуација у којима формула K_{2n+1}^m не постоји (јер бар нека од одговарајућих квадратура K_{2n+1} не постоји), док $\widehat{G}_{2n+1}^m$ постоји. Сем тога, формула $\widehat{G}_{2n+1}^m$ је једноставнија за конструкцију од формуле K_{2n+1}^m (јер је квадратура $\widehat{G}_{2n+1}$ једноставнија за конструкцију од квадратуре K_{2n+1}). Иако K_{2n+1}^m у датим експериментима показује већу (или једнаку) тачност од $\widehat{G}_{2n+1}^m$, резултати по којима обе ове формуле дају подједнако добру процену грешке нам указује да би $\widehat{G}_{2n+1}^m$ могла да буде бољи избор од K_{2n+1}^m за процену грешке формуле G_n^m.

Литература

[1] M. Abramowitz, *On the practical evaluation of integrals*, SIAM J. Appl. Math. 2 (1954), 20–35.

[2] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington, 1964.

[3] G. S. Ammar, D. Calvetti, L. Reichel, *Computation of Gauss-Kronrod quadrature rules with non-positive weights*, Electron. Trans. Numer. Anal. 9 (1999), 26–38.

[4] М. Арсеновић, М. Достанић, Д. Јоцић, *Теорија мере. Функционална анализа. Теорија оператора*, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[5] B. Baillaud, H. Bourget, *Correspodance d'Hermite et de Stieltjes, Volumes I, II*, Gauthier-Villars. Avec une préface de Émile Picard, Paris, 1905.

[6] M. E. Baron, *The Origins of Infinitesimal Calculus*, Pergamon, Oxford, 1969.

[7] D. Calvetti, G. H. Golub, W. B. Gragg, L. Reichel, *Computation of Gauss-Kronrod quadrature rules*, Math. Comp. 69 (2000), 1035–1052.

[8] R. Cools, *Monomial cubature rules since "Stroud": a compilation part* 2, J. Comput. Appl. Math. 112 (1999) 21–27.

[9] R. Cools, *An encyclopaedia of cubature formulas*, J. Complex. 19 (2003), 445–453.

[10] R. Cools, P. Rabinowitz, *Monomial cubature rules since "Stroud": a compilation*, J. Comput. Appl. Math. 48 (1993) 309–326.

[11] A. S. Cvetković, M. M. Spalević, *Numeričke metode*, Univerzitet u Beogradu Mašinski fakultet, Beograd, 2013.

[12] P. J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New York, 1984.

[13] В. А. Диткин, *О некоторых приближенных формулах для вычисления трехкратных интегралов*, ДАН СССР 62 (1948), 445–447.

[14] D. Lj. Djukić, L. Reichel, M. M. Spalević, *Truncated generalized averaged Gauss quadrature rules*, J. Comput. Appl. Math. 308 (2016), 408–418.

[15] D. Lj. Djukić, L. Reichel, M. M. Spalević, J. D. Tomanović, *Internality of generalized averaged Gauss rules and their truncations for Bernstein-Szegő weights*, Electron. Trans. Numer. Anal. 45 (2016), 405–419.

[16] D. Lj. Djukić, L. Reichel, M. M. Spalević, J. D. Tomanović, *Internality of generalized averaged Gaussian quadrature rules and truncated variants for modified Chebyshev measures of the second kind*, J. Comput. Appl. Math. 345 (2019), 70–85.

[17] C. F. Dunkl, Y. Xu, *Orthogonal Polynomials of Several Variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[18] S. Ehrich, *On stratified extensions of Gauss-Laguerre and Gaus-Hermite quadrature formulas*, J. Comput. Appl. Math. 140 (2002), 291–299.

[19] C. F. Gauss, *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Göttingensis Recentiores 3 (1814).

[20] W. Gautschi, *On generating orthogonal polynomials*, SIAM J. Scient. Statist. Comput. 3 (1982), 289–317.

[21] W. Gautschi, *The interplay between classical analysis and (numerical) linear algebra – a tribute to Gene H. Golub*, Electron. Trans. Numer. Anal. 13 (2002), 408–418.

[22] W. Gautschi, *Orthogonal Polynomials – Computation and Approximation*, Oxford University Press, Oxford, 2004.

[23] W. Gautschi, *OPQ suite* (www.cs.purdue.edu/archives/2002/wxg/codes)

[24] W. Gautschi, *A historical note on Gauss–Kronrod quadrature*, Numer. Math. 100 (2005), 483–484.

[25] W. Gautschi, *Numerical Analysis*, Springer, New York, 2012.

[26] W. Gautschi, S. E. Notaris, *An algebraic study of Gauss-Kronrod quadrature formulae for Jacobi weight functions*, Math. Comp. 51 (1988), 231–248.

[27] W. Gautschi, S. E. Notaris, *Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type*, J. Comput. Appl. Math. 25 (1989), 199-224. Erratum in J. Comput. Appl. Math. 27 (1989), 429.

[28] K. O. Geddes, S. R. Czapor, G. Labahn, *Algorithms for Computer Algebra*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992.

[29] A. Ghizzetti, A. Ossicini, *Quadrature Formulae*, Akademie Verlag, Berlin, 1970.

[30] G. H. Golub, G. Meurant, *Matrices, Moments and Quadrature with Applications*, Princeton University Press, Princeton, 2010.

[31] G. H. Golub, J. H. Welsch, *Calculation of Gauss quadrature rules*, Math. Comp. 23 (1969), 221–230.

[32] D. Jandrlić, M. Spalević, J. Tomanović, *Error estimates for certain cubature formulae*, FILOMAT 32 (2018), 6893-6902.

[33] D. K. Kahaner, G. Monegato, *Nonexistence of extended Gauss-Laguerre and Gauss-Hermite quadrature rules with positive weights*, Z. Angew. Math. Phys. 29 (1978), 983–986.

[34] Л. В. Канторович, *Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций*, Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова 28 (1949), 3–25.

[35] V. J. Katz, *A History of Mathematics*, Pearson, London, 2008.

[36] А. С. Кронрод, *Узлы и веса квадратурных формул: шестнадцатизначные таблицы*, Наука, Москва, 1964.

[37] A. S. Kronrod, *Integration with control of accuracy*, Soviet Physics Dokl. 9 (1964), 17–19.

[38] V. I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, Dover Publications, New York, 2005.

[39] D. P. Laurie, *Stratified sequences of nested quadrature formulas*, Quaestiones Math. 15 (1992), 365–384.

[40] D. P. Laurie, *Anti-Gaussian quadrature formulas*, Math. Comp. 65 (1996), 739–747.

[41] D. P. Laurie, *Calculation of Gauss-Kronrod quadrature rules*, Math. Comp. 66 (1997), 1133–1145.

[42] Л. А. Люстерник, *Некоторые кубатурные формулы для двойных интегралов*, ДАН СССР 62 (1948), 449–452.

[43] A. Máté, P. Nevai, W. van Assche, *The supports of measures associated with orthogonal polynomials and the spectra of the related self-adjoint operators*, Rocky Mountain J. Math. 21 (1991), 501–527.

[44] J. C. Mason, D. C. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2003.

[45] G. Mastroianni, G. Milovanović, *Interpolation Processes - Basic Theory and Applications*, Springer, Berlin, 2008.

[46] G. V. Milovanović, *Numerička analiza I deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1988.

[47] G. V. Milovanović, *Numerička analiza II deo*, Naučna knjiga, Beograd, 1991.

[48] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković, M. M. Matejić, *Remark on orthogonal polynomials induced by the modified Chebyshev measure of the second kind*, Facta. Univ. Ser. Math. Inform. 21 (2006), 13–21.

[49] И. П. Мысовских, *Кубатурные формулы для вычисления интегралов по гипершару*, ДАН СССР 147 (1962), 552–555.

[50] И. П. Мысовских, *О кубатурных формулах для круга и шара – В кн.: Методы вычислений*, Л.: ЛГУ 1 (1963), 3–11.

[51] И. П. Мысовских, *О кубатурных формулах для вычисления интегралов по поверхности сферы*, Сиб. матем. журнал 5 (1964).

[52] И. П. Мысовских, *Интерполяционные кубатурные формулы*, Наука, Москва, 1981.

[53] G. Monegato, *A note on extended Gaussian quadrature rules*, Math. Comp. 30 (1976), 812–817.

[54] G. Monegato, *Positivity of the weights of extended Gauss-Legendre quadrature rules*, Math. Comp. 32 (1978), 243–245.

[55] G. Monegato, *An overview of results and questions related to Kronrod schemes*, Intern. Ser. Numer. Math. 45 (1979), 231–240.

[56] G. Monegato, *An overview of the computational aspects of Kronrod quadrature rules*, Numer. Algor. 26 (2001), 173–196.

[57] S. E. Notaris, *Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type. II*, J. Comput. Appl. Math. 29 (1990), 161–169.

[58] S. E. Notaris, *The error norm of Gaussian quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type*, Numer. Math. 57 (1990), 271-283.

[59] S. E. Notaris, *The error norm of Gauss-Kronrod quadrature formulae for weight functions of Bernstein-Szegő type*, Numer. Math. 103 (2006), 99–127.

[60] S. E. Notaris, *Gauss-Kronrod quadrature formulae – A survey of fifty years of research*, Electron. Trans. Numer. Anal. 45 (2016), 371–404.

[61] T. N. L. Patterson, *Stratified nested and related quadrature rules*, J. Comput. Appl. Math. 112 (1999), 243–251.

[62] F. Peherstorfer, *Characterization of positive quadrature formulas*, SIAM J. Math. Anal. 12 (1981), 935–942.

[63] F. Peherstorfer, *Characterization of quadrature formula. II*, SIAM J. Math. Anal. 15 (1984), 1021–1030.

[64] F. Peherstorfer, *On positive quadrature formulas*, Intern. Ser. Numer. Math. 112 (1993), 297–313.

[65] F. Peherstorfer, *Positive quadrature formulas III. Asymptotics of weight*s, Math. Comp. 77 (2008), 2241–2259.

[66] F. Peherstorfer, K. Petras, *Ultraspherical Gauss-Kronrod quadrature is not possible for* $\lambda > 3$, SIAM J. Numer. Anal. 37 (2000), 927–948.

[67] F. Peherstorfer, K. Petras, *Stieltjes polynomials and Gauss-Kronrod quadrature for Jacobi weight functions*, Numer. Math. 95 (2003), 689–706.

[68] P. Rabinowitz, *The exact degree of precision of generalized Gauss-Kronrod integration rules*, Math. Comp. 35 (1980), 1275–1283.

[69] J. Radon, *Zur mechanischen Kubatur*, Monatsh. Math. 52 (1948), 286–300.

[70] D. P. Radunović, *Numeričke metode*, Akademska misao, Beograd, 2003.

[71] L. Reichel, G. Rodriguez, T. Tang, *New block quadrature rules for the approximation of matrix functions*, Linear Algebra Appl. 502 (2016), 299–326.

[72] L. Reichel, M. M. Spalević, T. Tang, *Generalized averaged Gauss quadrature rules for the approximation of matrix functionals*, BIT Numer. Math. 56 (2016), 1045–1057.

[73] M. Shao, F. H. da Jornada, L. Lin, C. Yang, J. Deslippe, S. G. Louie, *A structure preserving Lanczos algorithm for computing the optical absorption spectrum*, SIAM J. Matrix Anal. & Appl. 2 (2018), 683–711.

[74] M. Shea, *Biography of Zu Chongzhi*, University of Maine, Orono, 2007.

[75] R. Skutsch, *Ueber Formelpaare der mechanischen Quadratur*, Arch. Math. Phys. 13 (1894), 78–83.

[76] M. M. Spalević, *Product of Turán quadratures for cube, simplex, surface of the sphere,* $\overline{E}_n^r$, $E_n^{r^2}$, J. Comput. Appl. Math. 106 (1999), 99–115.

[77] M. M. Spalević, *Bessel's inequality in terms of a basis of* V_k, Acta Sci. Math. (Szeged) 65 (1999), 169–177.

[78] M. M. Spalević, *On generalized averaged Gaussian formulas*, Math. Comp. 76 (2007), 1483–1492.

[79] M. M. Spalević, *A note on generalized averaged Gaussian formulas*, Numer. Algor. 46 (2007), 253–264.

[80] M. M. Spalević, *Error estimates of anti-Gaussian quadrature formulae*, J. Comput. Appl. Math. 236 (2012), 3542–3555.

[81] M. M. Spalević, *On generalized averaged Gaussian formulas. II*, Math. Comp. 86 (2017), 1877–1885.

[82] A. H. Stroud, *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1971.

[83] E. Süli, D. F. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[84] G. Szegő, *Über gewisse orthogonale Polynome, die zu einer oszillierenden Belegungsfunktion gehören*, Math. Ann. 110 (1935), 501–513.

[85] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.

[86] H. S. Wilf, *Mathematics for the Physical Sciences*, Wiley, New York, 1962.

Биографија

Јелена Томановић је рођена 22.6.1987. у Београду. Основну школу ,,Светозар Милетић" у Земуну завршила је 2002. године као носилац дипломе ,,Вук Караџић". Земунску гимназију завршила је 2006. године као носилац дипломе ,,Вук Караџић" и ученик генерације. Током основног и средњег образовања више пута је учествовала на републичким такмичењима из математике и физике.

Основне академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, завршила је 2011. са просеком 9,08. Мастер академске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Примењена математика, завршила је 2012. са просеком 10,00 одбранивши мастер рад ,,Multigrid метода за нумеричко решавање парцијалних диференцијалних једначина елиптичког типа" под менторством проф. др Бошка Јовановића. Докторске академске студије математике на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу уписала је 2012. и положила све испите предвиђене планом и програмом са просечном оценом 10,00.

Од 2012. до 2013. радила је као сарадник у настави, а од 2013. ради као асистент на Катедри за математику Машинског факултета Универзитета у Београду.

Јелена Томановић се активно бави научно-истраживачким радом у области нумеричке анализе, нарочито у области нумеричке интеграције. Има објављена три рада са SCI листе, један категорије M21 и два категорије M22, једно саопштење са међународног скупа штампано у целини (M33) и два саопштења са међународних скупова штампана у изводу (M34).

Научни радови објављени у научним часописима међународног значаја (M20):

1. D.Lj. Djukić, L. Reichel, M.M. Spalević, J.D. Tomanović, *Internality of generalized averaged Gauss rules and their truncations for Bernstein-Segö weights*, Electron. T. Numer. Ana. 45 (2016), 405-419, M22.

2. D.R. Jandrlić, M.M. Spalević, J.D. Tomanović, *Error Estimates for Certain Cubature Formulae*, FILOMAT 32 (2018), 6893-6902, M22.

3. D.Lj. Djukić, L. Reichel, M.M. Spalević, J.D. Tomanović, *Internality of generalized averaged Gaussian quadrature rules and truncated variants for modified Chebyshev measures of the second kind*, J. Comput. Appl. Math. 345 (2019), 70-85, M21.

Саопштења са међународних скупова штампана у целини (M33):

4. D.R. Jandrlić, M.M. Spalević, J.D. Tomanović, *Error Estimates for Some Product Gauss Rules*, The Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2018), Antalya, Turkey, October 26-29, 2018.

Саопштења са међународних скупова штампана у изводу (M34):

5. D.R. Jandrlić, M.M. Spalević, J.D. Tomanović, *Error Estimates for Certain Cubature Formulae*, Approximation and Computation – Theory and Applications (ACTA 2017), Belgrade, Serbia, November 30 – December 2, 2017.

6. D.R. Jandrlić, M.M. Spalević, J.D. Tomanović, *Error estimates for Certain Cubature Rules*, XIV Serbian Mathematical Congress (14SMAK 2018), Kragujevac, Serbia, May 16-19, 2018.

Electronic Transactions on Numerical Analysis.
Volume 45, pp. 405–419, 2016.

ISSN 1068–9613.

ETNA
Kent State University
http://etna.math.kent.edu

INTERNALITY OF GENERALIZED AVERAGED GAUSS RULES AND THEIR TRUNCATIONS FOR BERNSTEIN-SZEGŐ WEIGHTS*

D. LJ. DJUKIĆ†, L. REICHEL‡, M. M. SPALEVIĆ†, AND J. D. TOMANOVIĆ†

Abstract. Generalized averaged Gauss quadrature formulas may have nodes outside the interval of integration. Quadrature rules with nodes outside the interval of integration cannot be applied to approximate integrals with an integrand that is defined on the interval of integration only. This paper investigates when generalized averaged Gauss quadrature rules for Bernstein-Szegő weight functions have all nodes in the interval of integration. Also truncated variants of these quadrature rules are considered. The relation between generalized averaged Gauss quadrature formulas and Gauss-Kronrod rules is explored.

Key words. Gauss quadrature, averaged Gauss quadrature, truncated generalized averaged Gauss quadrature, internality of quadrature rule

AMS subject classifications. 65D32, 65D30

1. Introduction. Let w be a given weight function on a bounded interval $[a, b]$ with infinitely many points of support. We call an *interpolatory quadrature formula* of the form

$$I[f] = \int_a^b f(t)\, w(t) dt = Q_n[f] + R_n[f], \quad Q_n[f] = \sum_{j=1}^{n} \omega_j f(t_j), \tag{1.1}$$

a $(2n-m-1, n, w)$ quadrature formula (q.f.) if the remainder term satisfies $R_n[f] = 0$ for all $f \in \mathbb{P}_{2n-m-1}$. Here $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ are distinct nodes, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ are weights, $\mathbb{P}_k$ denotes the set of all polynomials of degree at most k, and $0 \le m \le n$. A $(2n - m - 1, n, w)$ q.f. is said to be *internal* if all nodes are in the closed interval $[a, b]$. A node not belonging to the interval $[a, b]$ is said to be *external*. We say that a polynomial

$$q_n(t) = \prod_{j=1}^{n} (t - t_j)$$

with distinct nodes $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ generates a $(2n - m - 1, n, w)$ q.f. if the interpolatory q.f. (1.1) with these nodes is a $(2n - m - 1, n, w)$ q.f.

Let $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots$ denote the monic orthogonal polynomials with respect to the inner product $(f, g) = I[fg]$. Thus, π_k is of degree k and

$$(t^j, \pi_k) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

The polynomials π_j satisfy a three-term recurrence relation of the form

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.2}$$

where $\pi_{-1}(t) \equiv 0$, $\pi_0(t) \equiv 1$, and the coefficients β_k are positive.

*Received August 18, 2016. Accepted August 31, 2016. Published online on November 16, 2016. Recommended by Sotirios Notaris. This work was supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development (Research Project: “Methods of numerical and nonlinear analysis with applications” (#174002)).

†Department of Mathematics, University of Beograd, Faculty of Mechanical Engineering, Kraljice Marije 16, 11120 Belgrade 35, Serbia ({ddjukic,mspalevic,jtomanovic}@mas.bg.ac.rs).

‡Department of Mathematical Sciences, Kent State University, Kent, OH 44242, USA (reichel@math.kent.edu).

Filomat 32:20 (2018), 6893–6902
https://doi.org/10.2298/FIL1820893J

Published by Faculty of Sciences and Mathematics,
University of Niš, Serbia
Available at: http://www.pmf.ni.ac.rs/filomat

Error Estimates for Certain Cubature Formulae

Davorka Jandrlić[a], Miodrag Spalević[a], Jelena Tomanović[a]

[a]*Department of Mathematics, Faculty of mechanical engineering, University of Belgrade, Serbia*

Dedicated to Prof. Walter Gautschi on the occasion of his 90th anniversary

Abstract. We estimate the errors of selected cubature formulae constructed by the product of Gauss quadrature rules. The cases of multiple and (hyper-)surface integrals over n-dimensional cube, simplex, sphere and ball are considered. The error estimates are obtained as the absolute value of the difference between cubature formula constructed by the product of Gauss quadrature rules and cubature formula constructed by the product of corresponding Gauss-Kronrod or corresponding generalized averaged Gaussian quadrature rules. Generalized averaged Gaussian quadrature rule $\widehat{G}_{2l+1}$ is $(2l+1)$-point quadrature formula. It has $2l+1$ nodes and the nodes of the corresponding Gauss rule G_l with l nodes form a subset, similar to the situation for the $(2l+1)$-point Gauss-Kronrod rule H_{2l+1} associated with G_l. The advantages of $\widehat{G}_{2l+1}$ are that it exists also when H_{2l+1} does not, and that the numerical construction of $\widehat{G}_{2l+1}$, based on recently proposed effective numerical procedure, is simpler than the construction of H_{2l+1}.

1. Introduction

Assume that $d\sigma$ is a nonnegative measure on an interval $[a,b] = \mathrm{supp}(d\sigma)$, and $d\sigma(t) = \omega(t)dt$ on $[a,b]$, where ω is a weight function.

Consider the l point quadrature formula (q.f.) of the form

$$I(f) = \int_a^b f(t)d\sigma(t) = Q_l(f) + R_l(f), \quad Q_l(f) = \sum_{j=1}^{l} \omega_j f(t_j), \tag{1}$$

with nodes $t_1 < t_2 < ... < t_l$ and weights $\omega_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2,...,l$. If all ω_j are positive, than (1) is called positive quadrature formula.

The q.f. (1) is said to have (algebraic) degree of exactness d if $R_l(f) = 0$ for all $f \in \mathcal{P}_d$, where $\mathcal{P}_d$ denotes the set of all (algebraic) polynomials of degree at most d. The q.f. (1) with $d = l-1$ is called interpolatory.

2010 *Mathematics Subject Classification*. 65D32
Keywords. Cubature rules, Product of Gaussian formulas, Generalized averaged Gaussian formulas
Received: 29 April 2018; Accepted: 23 June 2018
Communicated by Gradimir Milovanović
This work was supported by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development (Research Project: "Methods of numerical and nonlinear analysis with applications" (Grant No. 174002))
Email addresses: djandrlic@mas.bg.ac.rs (Davorka Jandrlić), mspalevic@mas.bg.ac.rs (Miodrag Spalević), jtomanovic@mas.bg.ac.rs (Jelena Tomanović)

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Јелена Томановић, изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Усредњене квадратурне формуле са варијантама и примене

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Крагујевцу, 10.4.2019. године,

Јелена Томановић

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Јелена Томановић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Усредњене квадратурне формуле са варијантама и примене

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Крагујевцу, 10.4.2019. године,

Јелена Томовић

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/