

UNIVERZITET U BEOGRADU  
MATEMATIČKI FAKULTET

Marko Pavlović

**MODELOVANJE RADIO-EVOLUCIJE  
OSTATAKA SUPERNOVIH NA OSNOVU  
HIDRODINAMICKIH SIMULACIJA I  
NELINEARNOG DIFUZNOG  
UBRZAVANJA ČESTICA**

Doktorska disertacija

Beograd, 2018.

UNIVERSITY OF BELGRADE  
FACULTY OF MATHEMATICS

Marko Pavlović

**MODELING THE RADIO-EVOLUTION OF  
SUPERNOVA REMNANTS BY USING  
HYDRODYNAMIC SIMULATIONS AND  
NON-LINEAR DIFFUSIVE SHOCK  
ACCELERATION**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2018

## **Mentor:**

prof. dr Dejan Urošević  
redovni profesor  
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

## **Članovi komisije:**

dr Bojan Arbutina,  
docent  
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Branislav Vukotić,  
viši naučni saradnik  
Astronomska opservatorija, Beograd

dr Dušan Onić  
docent  
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

**Datum odbrane:** \_\_\_\_\_

# Zahvalnica

Ova doktorska disertacija nastala je kao rezultat istraživačkog rada na Katedri za astronomiju Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu u periodu 2011–2017. Želeo bih da se zahvalim prof. dr Dejanu Uroševiću, mentoru i prijatelju, koji me je uveo u veoma interesantnu oblast istraživanja ostataka supernovih, na idejama, sugestijama i svesrdnoj pomoći. Takođe, želim da se zahvalim doc. dr Bojanu Arbutini, dr Branislavu Vukotiću i doc. dr Dušanu Oniću kao i kolegama dr Aleksandri Ćiprijanović, dr Milici Vučetić i Vladimiru Zekoviću na konstruktivnim komentarima, kritikama i prijateljskim savetima, bez kojih ova disertacija ne bi bila potpuna. Zahvaljujem se i svim ostalim kolegama sa Katedre za astronomiju. Istakao bih i veoma bitne savete dr Salvatorea Orlanda, od koga sam naučio mnogo o numeričkim simulacijama. Zahvalnost dugujem i Ministarstvu prosvete, nauke i tehnološkog razvoja koje je finansiralo moj rad preko projekta OI 176005 „Emisione magline: struktura i evolucija”. Zahvaljujem se Laboratoriji za primenu računara u nauci Instituta za fiziku u Zemunu, za ustupanje računarskog vremena na superračunaru PARADOX IV. Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici bez čije se bezrezervne podrške ne bih ni upustio u ovaj poduhvat.

U Pirotu, januara 2018.

M. P.

# MODELOVANJE RADIO-EVOLUCIJE OSTATAKA SUPERNOVIH NA OSNOVU HIDRODINAMIČKIH SIMULACIJA I NELINEARNOG DIFUZNOG UBRZAVANJA ČESTICA

## Sažetak

Eksplozije supernovih (SN) obogaćuju Univerzum različitim teškim elementima. Ovi elementi su gradivni blokovi sveta oko nas i nas samih. Ostaci supernovih (OSN) su izvanredni astronomski objekti koji su takođe od velikog naučnog značaja, jer pružaju uvid u mehanizme eksplozija supernovih i predstavljaju važne izvore galaktičkih kosmičkih zraka. Radio-posmatranja su među najstarijim sredstvima za proučavanje ovih objekata. Radio-sjaj i spektar, posebno mladih OSN, predstavljaju rezultat aktivnog ubrzavanja elektrona na udarnim talasima. U ovoj doktorskoj disertaciji, analizira se radio-evolucija OSN primenom trodimenzionalnih hidrodinamičkih simulacija i nelinearnog difuznog ubrzavanja čestica.

Hidrodinamičke simulacije, razvijane i prilagođavane u ovoj disertaciji, omogućavaju nam eksplicitno računanje modifikacije udarnih talasa od strane kosmičkih zraka. Takođe, uključujemo konzistentan numerički tretman pojačanja magnetnog polja usled rezonantnih i nerezonantnih nestabilnosti izazvanih kosmičkim zračenjem. Modelovali smo radio-evoluciju najmlađeg poznatog Galaktičkog OSN G1.9+0.3 i zaključili da je rastuća radio-emisija česta pojava kod jako mladih OSN. Naš model nam je omogućio da izvedemo važne zaključke o sadašnjem i predviđanja o budućem ponašanju radio-emisije ovog OSN. Takođe smo primenom simulacija razvili i opšti model radio-evolucije OSN, za širok spektar relevantnih fizičkih parametara, kao što su gustina okolne sredine, energija eksplozije supernove, efikasnost ubrzavanja i pojačanja magnetnog polja. Pouzdanost naših radio-evolutivnih traka potvrđena je na posmatračkom uzorku, koji se sastoji od Galaktičkih i vangalaktičkih OSN.

Ova disertacija se bavi i jednim od najvažnijih pitanja za naše razumevanje magnetnog polja u OSN. Zaključujemo da je ekvipartacija opravdana pretpostavka, naročito za energiju elektrona i magnetnog polja u starijim OSN, tokom faze Sedov-Tejlora. Takođe, nudimo moguće objašnjenje kako se postiže ekvipartacija između kosmičkih zraka i magnetnog polja u međuzvezdanoj materiji.

Očekujemo da će modeli, razvijeni u ovoj disertaciji, predstavljati koristan alat za buduće posmatrače na moćnim radio-teleskopima kao što su ALMA, MWA, ASKAP, SKA i FAST. Simulacije će pružati neophodne podatke o evolutivnoj fazi posmatranih OSN, kao i o fizičkim uslovima na udarnim talasima gde se ubrzavaju čestice do relativističkih energija. Simulacije će imati važnu ulogu u predviđanju naučnih rezultata budućih velikih posmatračkih projekata kao i objašnjavanju novih, često neočekivanih rezultata dobijenih posmatranjima.

**Ključne reči:** ubrzavanje čestica, hidrodinamika, mehanizmi zračenja: netermalni, udarni talasi, kosmički zraci, ostaci supernovih

**Naučna oblast:** Astronomija

**Uža naučna oblast:** Astrofizika

**UDK broj:** 524.354:532.511(043.3)

# MODELING THE RADIO-EVOLUTION OF SUPERNOVA REMNANTS BY USING HYDRODYNAMIC SIMULATIONS AND NON-LINEAR DIFFUSIVE SHOCK ACCELERATION

## Abstract

Supernova (SN) explosions disperse the different heavy elements across the Universe. These elements are the building blocks which make up the world around and inside us. Supernova remnants (SNRs) are extraordinary astronomical objects that are also of high scientific interest, because they provide insights into aforementioned supernova explosion mechanisms, and because they are important sources of Galactic cosmic rays (CRs). Radio observations are among the oldest means to study these objects. The radio luminosity and spectra of SNRs, especially young ones, requires active acceleration of electrons by the SNR shocks. In this doctoral dissertation, radio evolution of SNRs is investigated by using three-dimensional hydrodynamic modelling and non-linear diffusive shock acceleration of CRs in SNRs.

Hydrodynamic simulations, developed and adopted in this dissertation, allow us to explicitly account for the shock modification by CRs. We also include consistent numerical treatment of magnetic field amplification (MFA) due to CR resonant and non-resonant streaming instabilities. We modelled the peculiar nature of radio evolution of the youngest known Galactic SNR G1.9+0.3 and concluded that increasing radio emission is a common occurrence among very young SNRs. Our model enabled us to make important conclusions about the present and predictions about the future properties of radio emission from this SNR. We also developed more general model of the radio evolution of SNRs, by performing simulations for wide range of the relevant physical parameters, such as the ambient density, the supernova explosion energy, the acceleration efficiency and the MFA efficiency. We confirm the

reliability of our radio evolutionary tracks on a observation sample consisting of Galactic and extragalactic SNRs.

This dissertation also deals with one of the most important questions surrounding our current understanding of the magnetic fields in SNRs. We conclude that equipartition is a justified assumption especially between the CR electrons and the magnetic fields in evolved SNRs, in the Sedov-Taylor phase of evolution. Our work also offers a possible explanation how can equipartition between CRs and magnetic field in the interstellar medium be achieved.

Type of modeling, presented in this thesis, is expected to be a useful tool for future observers working on powerful radio telescopes such as ALMA, MWA, ASKAP, SKA and FAST. Simulations should provide important information about the evolutionary stage of the observed SNRs, as well as to characterize the physical conditions in the shocks where the relativistic particles are accelerated. Simulations could help us to predict the science output of future large scale surveys, as well as to explain new, often unexpected results obtained by observations.

**Keywords:** acceleration of particles, hydrodynamics, radiation mechanisms: nonthermal, shock waves, cosmic rays, supernova remnants

**Scientific area:** Astronomy

**Scientific field:** Astrophysics

**UDC number:** 524.354:532.511(043.3)



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Radio-posmatranja i evolucija . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Nelinearno difuzno ubrzavanje čestica na udarnim talasima</b>	<b>6</b>
2.1	Kosmički zraci i njihovo poreklo . . . . .	6
2.2	Blazijev pristup problemu difuznog ubrzavanja . . . . .	10
2.3	Početo ubrzavanje čestica . . . . .	14
2.4	Profil brzine fluida u prekursoru . . . . .	16
2.4.1	Termalni pritisak fluida . . . . .	17
2.4.2	Pritisak kosmičkih zraka . . . . .	18
2.4.3	Pritisak magnetohidrodinamičkih talasa . . . . .	19
2.4.4	Brzina fluida . . . . .	20
2.5	Kompresija na udarnom talasu . . . . .	21
2.6	Temperatura iza udarnog talasa . . . . .	23
2.7	Numeričko rešavanje . . . . .	23
2.7.1	Uzorkovanje kompresije u prekursoru . . . . .	24
2.7.2	Glavni algoritam . . . . .	25
2.7.3	Degeneracija rešenja . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Numerički metodi u dinamici fluida</b>	<b>27</b>
3.1	Osnovi dinamike fluida . . . . .	27
3.1.1	Ojlerove i Navije-Stoksove jednačine . . . . .	28
3.1.2	Udarni talasi . . . . .	31
3.1.3	Hidrodinamičke nestabilnosti . . . . .	33
3.2	Ojlerova hidrodinamika . . . . .	38
3.2.1	Metode za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina . . . . .	39
3.2.2	Diskretizacija: osnovni koncepti . . . . .	42
3.2.3	Slučaj jednodimenzione advekcije . . . . .	43
3.2.4	Hiperbolički zakoni održanja . . . . .	47

3.2.5	Rešavanje Rimanovog problema . . . . .	48
3.2.6	Metod konačnih zapremina . . . . .	51
3.2.7	Metod Godunova i Rimanovi rešavači . . . . .	53
3.2.8	Proširenje u više dimenzija . . . . .	55
3.2.9	Postizanje višeg reda tačnosti . . . . .	58
3.3	Lagranžova hidrodinamika . . . . .	60
3.3.1	Interpolaciono jezgro . . . . .	61
3.3.2	Jednačine fluida u Lagranžovoj formi . . . . .	63
3.3.3	Prednosti i mane Ojlerovog i Lagranžovog pristupa . . . . .	64
3.4	Paralelno programiranje i superračunari . . . . .	66
3.4.1	Arhitektura višeprosorskih sistema . . . . .	67
3.4.2	Amdalov zakon . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Radio-evolucija ostatka G1.9+0.3</b>	<b>71</b>
4.1	Uvod . . . . .	71
4.2	Model . . . . .	75
4.2.1	Hidrodinamički model . . . . .	76
4.2.2	Difuzno udarno ubrzavanje . . . . .	79
4.2.3	Pojačanje magnetnog polja . . . . .	82
4.2.4	Radio-emisija . . . . .	86
4.2.5	Uprošćeni model integralne gama emisije . . . . .	90
4.3	Rezultati i diskusija . . . . .	92
4.4	Zaključak . . . . .	111
<b>5</b>	<b>Opšti model radio-evolucije ostataka supernovih</b>	<b>114</b>
5.1	Uvod . . . . .	114
5.2	Model i numerički metodi . . . . .	116
5.2.1	Modelovanje dinamičke evolucije ostataka supernovih . . . . .	116
5.2.2	Nelinearno difuzno ubrzavanje i pojačanje magnetnog polja . . . . .	121
5.2.3	Teorijsko razmatranje radio-evolucije . . . . .	123
5.3	Rezultati . . . . .	126
5.4	Diskusija . . . . .	136

5.5	Sažetak i zaključak . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Fizička zasnovanost ekviparticije kod ostataka supernovih</b>	<b>141</b>
6.1	Uvod . . . . .	141
6.2	Ekviparticija i particija . . . . .	142
6.2.1	Primeri: ostaci supernovih G1.9+0.3 i HB3 . . . . .	146
6.3	Diskusija ekviparticije . . . . .	153
6.4	Zaključak . . . . .	155
<b>7</b>	<b>Zaključak i planovi za dalji rad</b>	<b>156</b>
	<b>Literatura</b>	<b>160</b>
	<b>Biografija autora</b>	<b>172</b>

# 1 Uvod

Međuzvezdana materija (MZM) ispunjava prostor oko zvezda u Galaksiji i sama po sebi ona je dinamički promenljiva sredina – svedok rađanja i umiranja zvezda. Razumevanje prirode i fizičkih osobina MZM je od velike važnosti u astrofizici. Nove, mlade zvezde, formiraju se u gustim oblastima međuzvezdanog gasa, a medijum se stalno dopunjava gubitkom mase sa zvezda i materijalom bogatim metalima, izbačenim u eksplozijama supernovih (SN).

Supernove imaju bitnu ulogu u modernoj astrofizici. One su od primarnog značaja za hemijsku evoluciju Univerzuma i jedan od glavnih izvora energije za MZM. Deo ove energije nalazi se u obliku kosmičkih zraka, koji su prisutni u Galaksiji sa gustom energije  $1-2 \text{ eV cm}^{-3}$ , što iznosi oko jedne trećine ukupne gustine energije u MZM (Lequeux 2005, Ptuskin 2007, Longair 2011). Eksplozije supernovih i udarni talasi koji nastaju u nehomogenoj MZM odgovorni su za stvaranje trokomponentne sredine u kojoj je značajan deo zapremine ispunjen vrelim i rektim gasom (McKee & Ostriker 1977). Konačno, supernove, posebno one tipa Ia, imaju centralnu ulogu u današnjoj kosmologiji jer njihov sjaj omogućava da budu detektovane na velikim crvenim pomacima (do  $z \sim 1.7$ , Riess et al. 2007). Njihovo korišćenje dovelo je do saznanja o ubrzanom širenju Univerzuma<sup>1</sup> (Perlmutter et al. 1998, Garnavich et al. 1998).

Ostaci supernovih (OSN) nastavljaju interakciju sa MZM desetinama hiljada, pa čak i milion godina nakon eksplozije supernove, dostižući prečnik i do par stotina parseka. Razumevanje uske veze između morfoloških osobina OSN i složenih faza eksplozije supernove može biti put ka: (1) određivanju strukture i hemijskog sastava materijala odbačenog eksplozijom (eng. *ejecta*), kao i dinamike i energetike eksplozije; (2) sagledavanju strukture i geometrije okolne sredine, koje bi moglo dati tačniji opis poslednjih faza evolucije zvezda. S obzirom na to da su eksplozije supernovih relativno retke pojave (2–3 puta u jednom veku, u tipičnoj spiralnoj galaksiji kao što je naša; Tammann et al. 1994), OSN predstavljaju najbolji način

---

<sup>1</sup>Ovo otkriće donelo je 2011. godine Nobelovu nagradu Solu Perlmutteru (*Saul Perlmutter*), Brajanu Šmitu (*Brian P. Schmidt*) i Adamu Risu (*Adam G. Riess*), uz obrazloženje: „za otkriće ubrzanog širenja Univerzuma kroz posmatranja udaljenih supernovih”.

za proučavanje lokalne populacije supernovih (detaljnije o proučavanju veze između supernove i OSN može se naći u magistarskoj tezi Bojana Arbutine; Arbutina 2005).

OSN su objekti koji postoje zbog toga što se posle eksplozije supernove stvori tzv. bezsudarni udarni talas (sa Mahovim<sup>2</sup> brojem koji dostiže  $\sim 1000$  za mlade ostatke). Fizičke procese koji objašnjavaju bezsudarne udarne talase još uvek ne razumemo dovoljno dobro. Evolucija OSN neposredno je vezana za evoluciju udarnog talasa (Urošević & Milogradov-Turin 2007). Zagrevanje atoma na ovim udarnim talasima odvija se bezsudarno, tj. među samim česticama nema sudarnih interakcija, već se one ostvaruju putem elektromagnetnih fluktuacija i talasa u plazmi.

Danas je već opšteprihvaćeno da su udarni talasi OSN mesta na kojima se vrši ubrzavanje naelektrisanih čestica do jako visokih energija ( $\sim 10^{15}$  eV), što je relativno dobro podržano posmatranjima od radio do gama područja (Vink 2012, Helder et al. 2012). Ipak, iako je hipoteza o proizvodnji kosmičkih zraka u OSN postavljena pre nešto manje od jednog veka (Baade & Zwicky 1934), mnogi problemi vezani za mehanizam ubrzavanja još uvek čekaju na odgovore. Jedan od glavnih problema je svakako mehanizam ubrzavanja elektrona na udarnim talasima koji još uvek nije dovoljno dobro proučen. Takođe, efikasno ubrzavanje kosmičkih zraka zahteva da čestice na neki način budu predubrzane (eng. *pre-acceleration*) tj. da budu ubačene (eng. *injection*) na udarni talas sa određenom energijom nešto većom od termalne (Bell 1978a,b). Značajan napredak u razumevanju mehanizma turbulentnog pojačanja magnetnog polja putem nestabilnosti struje kosmičkih zraka (Bell et al. 2004), doveo je do novih problema u objašnjavanju posmatranih radijalnih magnetnih polja kod mladih OSN. Naime, kod mladih OSN se očekuje jako turbulentno magnetno polje (zbog efikasnog ubrzavanja čestica), što je dugo bilo u kontradikciji sa posmatranjima, sve do rada Vilsona sa saradnicima (Wilson et al. 2017), koji se pojavio tek u vreme pisanja ove disertacije.

---

<sup>2</sup>Mahov (*Ernst Waldfried Josef Wenzel Mach*, 1838–1916) broj određen je količnikom brzine udarnog talasa i adijabatske brzine zvuka u datoj sredini.

## 1.1 Radio-posmatranja i evolucija

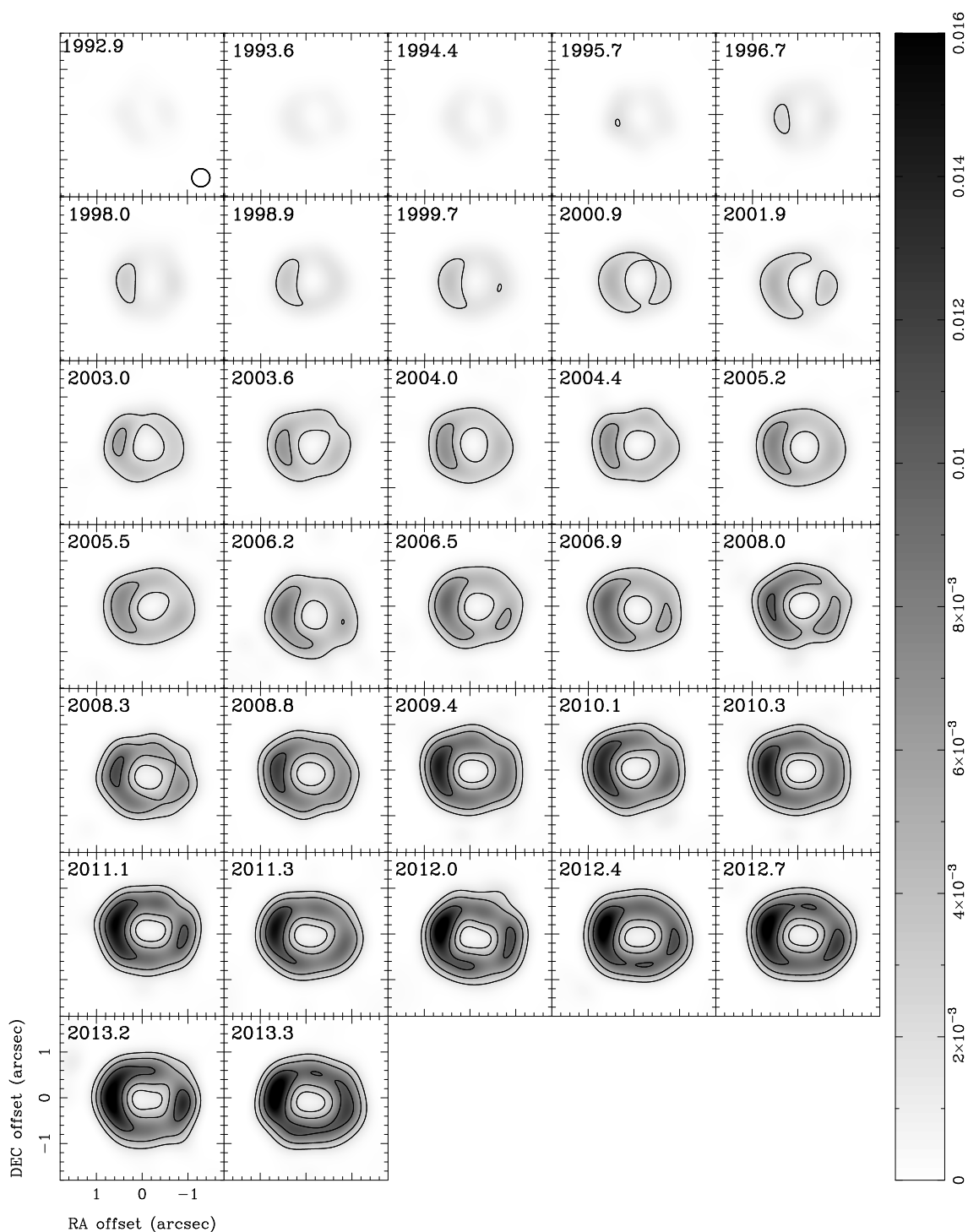
Ogromna većina OSN u našoj i drugim galaksijama je prvi put otkrivena radio-posmatranjima. To nije čudno ukoliko se ima u vidu da zračenje u drugim elektromagnetnim područjima najčešće biva apsorbovano gasom i prašinom u MZM. Više o multifrekvencionalnoj slici OSN može se naći u doktorskoj disertaciji Dušana Onića (Onić 2013). Do sada je oko 300 Galaktičkih OSN posmatrano u radio-području (od 294 poznatih OSN u Galaksiji, samo 20 nije detektovano u radio-području; Green 2014) i gotovo isto toliko vangalaktičkih (Bozzetto et al. 2017). Radio-spektar OSN je netermalan i njihovi spektralni indeksi  $\alpha$  ( $S_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ ), su tipično  $\alpha = 0.5 \pm 0.1$  (videti sliku 1 iz rada Reynolds et al. 2011). Radio-spektar se može interpretirati kao sinhrotronsko zračenje relativističkih elektrona ubrzanih u procesu difuznog ubrzavanja na udarnim talasima OSN.

Vremenska evolucija radio-fluksa je posmatrana kod nekoliko mladih OSN. Radio-fluks Kasiopeje A (eng. Cassiopeia A, prividno najjači radio-izvor na nebu na niskim radio-frekvencijama) je posmatran tokom skoro pola veka i opada tokom vremena (npr. Helmboldt & Kassim 2009). Ovo može ukazivati na opadanje magnetnog polja ili broja kosmičkih zraka tokom vremena. Takođe, pored radio-fluksa, kod mladih OSN se može posmatrati evolucija veličine radio-kontura ostatka (npr. Weiler et al. 2002, Bartel 2009, Ng et al. 2008). U nekim slučajevima radio-emisija mladih ostataka može pratiti suprotan trend, tj. povećanje fluksa s vremenom. Ovo je slučaj sa najmlađim ostatkom u Galaksiji G1.9+0.3, čija gustina fluksa je porasla za faktor od 1.25 tokom 13 godina na 1.4 GHz (Green et al. 2008), kao i SN 1987A u Velikom Magelanovom oblaku (eng. *Large Magelanic Cloud*, LMC) gde se gustina fluksa eksponencijalno povećava sa srednjom godišnjom stopom od oko 15% na različitim frekvencijama (Zanardo et al. 2010, Ng et al. 2013, videti sliku 1).

Osim navedenih pojedinačnih slučajeva, neke od osobina radio-evolucije OSN se implicitno mogu dobiti iz empirijske raspodele u  $\Sigma_\nu - D$  ravni, gde  $\Sigma_\nu$  predstavlja površinski radio-sjaj OSN na frekvenciji  $\nu$ , a  $D$  je dijametar (Case & Bhattacharya 1998, Urošević et al. 2005, 2010, Pavlović et al. 2013, 2014). Empirijske  $\Sigma - D$  relacije sadrže OSN sa poznatim daljinama (dijametrima) i koriste se kao kosmički „lenjiri” za procenu daljine do OSN. Pored značajnog rasturanja tačaka, empirijske

relacije nedvosmisleno ukazuju na trend opadanja površinskog sjaja sa porastom dijametra, u kasnijim fazama evolucije.

U okviru ove disertacije se, pre svega, razmatra zračenje OSN u radio-području. Glavni cilj disertacije je razvoj modela evolucije radio-zračenja, koji nam pruža kvantitativni opis objekta u vidu skupa relevantnih dinamičkih i spektralnih osobina OSN. Radio-spektar OSN zavisi od osobina magnetnog polja i čestica kosmičkog zračenja, koje pak zavise od trenutne evolutivne faze (kao i dodatno, od početnih uslova i parametara okolne sredine), dakle od dinamičkih osobina. Dodatno, ubrzane čestice koje proizvode radio-emisiju i same utiču na dinamiku OSN. Reč je dakle, o nelinearnom problemu za koji analitički tretmani daju prilično grube opise. U ovakvim i sličnim situacijama, neophodno je detaljno numeričko modelovanje kako bismo uspeali da što bolje objasnimo posmatranja i eventualno predvidimo dalji tok fizičkih procesa. Odličan uvod u proces razvoja numeričkih modela, primenjenih u astrofizici, dat je u doktorskoj disertaciji Ivana Milića (Milić 2014).



Slika 1: Snimci visoke rezolucije ostatka SN 1987A na frekvenciji 9 GHz dobijeni ATCA radio-teleskopom tokom perioda od 1992. do 2013. godine. Crno-bela skala je linearna i odgovara vrednostima od 0 do 16 mJy beam<sup>-1</sup> i konture odgovaraju vrednostima 2, 5, 10 i 15 mJy beam<sup>-1</sup>. Sintetizovani snop, koji ima širinu na polovini snage FWHM od 0'' 4, je prikazan na prvoj slici, gore-levo. (Izvor: Ng et al. 2013, ljubaznošću dr Stephen C.-Y. Ng)



## 2 Nelinearno difuzno ubrzavanje čestica na udarnim talasima

Kosmički zraci su naelektrisane relativističke čestice koje do Zemlje stižu sa izuzetno visokim energijama, pružajući nam dokaze o postojanju efikasnih akceleratora u Univerzumu. Kosmički zraci sa energijama manjim od  $\sim 10^{17}$  eV najverovatnije potiču iz Mlečnog puta, dok su oni sa većim energijama verovatno vangalaktičkog porekla. Ranih tridesetih godina prošlog veka, SN su već identifikovane kao mogući izvori Galaktičkih kosmičkih zraka. Međutim, tek sedamdesetih godina ova ideja je postala još popularnija zahvaljujući razvoju teorije o *difuznom ubrzavanju na udarnim talasima*, koja pruža solidan teorijski okvir za ubrzavanje čestica u vasioni uopšte. Posle toga, a posebno u skorije vreme, prikupljen je i izvestan broj posmatračkih dokaza koji su prilično spekulativnu ideju pretvorili skoro u paradigmu.

U ovom poglavlju dajemo osnove difuznog ubrzavanja čestica, sa posebnim akcentom na nelinearno ubrzavanje i njegov značaj za evoluciju OSN.

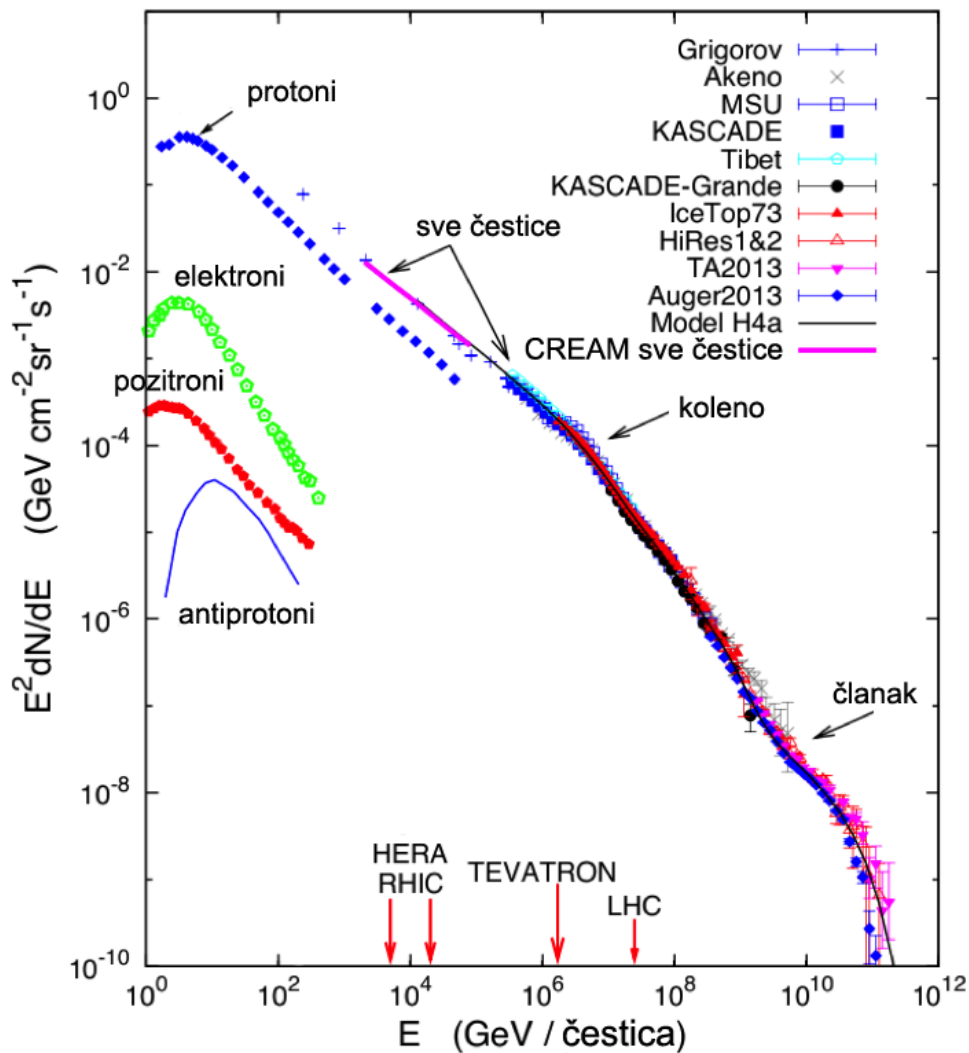
### 2.1 Kosmički zraci i njihovo poreklo

Kao što je već napomenuto, kosmički zraci su naelektrisane čestice koje doprinose gustini energije u Galaksiji sa oko  $1\text{--}2$  eV  $\text{cm}^{-3}$ . Čine ih uglavnom protoni (jezgra vodonika), oko 10% jezgara helijuma i teži elementi sa još manjim zastupljenostima. Iako čine mali deo ukupnog fluksa kosmičkih zraka, elektroni i pozitroni nam pružaju dragocene informacije o izvorima kosmičkih zraka i njihovom transportu kroz magnetno polje Galaksije. Fluks svih čestičnih komponenti je prikazan na slici 2.

Uprkos činjenici da spektar kosmičkih zraka obuhvata 13 redova veličina po energiji, on je prilično ravan i monoton, što otežava dobijanje korisnih informacija. Za energije veće od  $\sim 30$  GeV, gde solarna modulacija<sup>3</sup> postaje zanemarljiva, spektar

---

<sup>3</sup>Heliosfera je prostor oko Sunca u kome Sunčev vetar dominira u odnosu na gas iz MZM. Galaktički kosmički zraci nailaze na turbulentni Sunčev vetar i lokalno magnetno polje u heliosferi, koje utiče na njihov intenzitet i energiju. Ovaj proces nazivamo solarnom modulacijom kosmičkih zraka. Smatra se da je solarna modulacija značajna za kosmičke zrake energija ispod  $\sim 30$  GeV po nukleonu (za detalje videti pregledni članak Potgetera; Potgieter 2013).

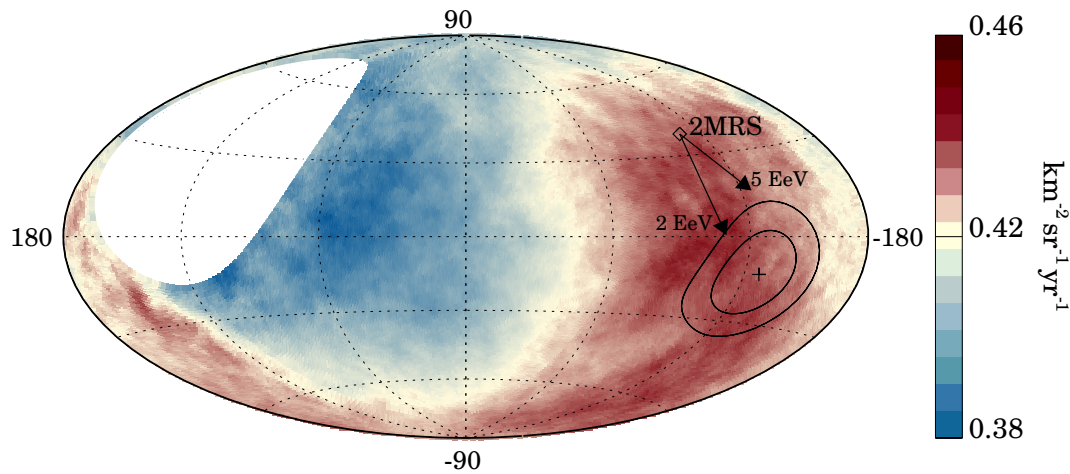


Slika 2: Spektar kosmičkih zraka meren na Zemlji. Prikazan je ukupni spektar čestica dobijen iz merenja različitim instrumentima, zajedno sa spektrom protona. Prikazani su i doprinosi elektrona, pozitrona i antiprotona koje je izmerio detektor PAMELA. (Izvor: Blasi 2013)

ima oblik prelomljenog stepenog zakona koji se menja od  $\propto E^{-2.7}$  do  $\propto E^{-3.1}$  na energiji od  $E_1 \approx 3 \times 10^{15}$  eV (takozvano *koleno*). Druga promena u spektru dešava se na oko  $E_2 \approx 3 \times 10^{18}$  eV gde nagib postaje blaži i ima vrednost oko 2.7 (često se naziva *članak*). Za najveće energije fluks pada do veoma niskih vrednosti, tako da merenja postaju izuzetno teška (na  $3 \times 10^{20}$  eV fluks detektuje se svega 1 čestica po  $\text{km}^2$  i to na svakih 350 godina).

Kosmički zraci sa energijama do oko  $10^{17}$  eV najverovatnije potiču iz naše galaksije. Čestice koje imaju energije preko  $10^{18}$  eV često se nazivaju *kosmički zraci jako*

visokih energija (eng. *Ultra-High Energy Cosmic Rays*, UHECRs). Ove čestice ne mogu se zadržati u Galaksiji jer je njihov žiro-radijus u srednjem magnetnom polju Galaksije istog reda veličine ili čak veći od dimenzija same Galaksije. U slučaju da se izvor kosmičkih zraka jako visokih energija nalazi u Galaksiji, skretanje ovih čestica bi bilo jako malo i bilo bi lako utvrditi poziciju izvora na nebu. Ispostavlja se da je raspodela ovih čestica približno izotropna tako da je vrlo verovatno da su njihovi izvori ipak vangalaktički objekti. Nedavno je Kolaboracija „Pjer Ože” pokazala da ipak postoji izvesna anizotropija u raspodeli kosmičkih zraka sa energijama većim od  $8 \times 10^{18}$  eV (slika 3, Aab et al. 2017<sup>4</sup>). Čak i ova otkrivena anizotropija ipak



Slika 3: Pregled neba u Galaktičkim koordinatama sa merenim fluksom čestica energija  $E \geq 8$  EeV. Plus pokazuje smer dipola anizotropije; konture označavaju nivoe poverenja 68% i 95%. Označen je i dipol raspodele galaksija iz pregleda 2MRS. Strelice pokazuju očekivana skretanja čestica energije  $E/Z = 5$  i 2 EeV, u modelu Galaktičkog magnetnog polja. (Izvor: Pjer Ože kolaboracija, Aab et al. 2017)

ide u prilog vangalaktičkom poreklu kosmičkih zraka najvećih energija. Smer dipola koji opisuje ovu anizotropiju poklapa se sa dipolom raspodele galaksija iz pregleda 2MRS<sup>5</sup>, sa uračunatim skretanjem čestica u Galaktičkom magnetnom polju.

Veza između kosmičkih zraka i supernovih predložena je prvi put u radu Baade<sup>6</sup> i Cvikija<sup>7</sup> (Baade & Zwicky 1934) i zasnivala se na jednostavnom energetsom ar-

<sup>4</sup>Njihova statistika obuhvata oko  $3 \times 10^4$  kosmičkih zraka iznad 8 EeV, sa ukupno eksponiranih  $76\,800 \text{ km}^2 \text{ sr}$  godišnje.

<sup>5</sup>2MRS je skraćeni za The 2MASS Redshift Survey, gde je 2MASS skraćeni za The Two Micron All-Sky Survey - infracrveni pregled celog neba, na talasnoj dužini  $2 \mu\text{m}$ .

<sup>6</sup>Walter Baade (1893-1960).

<sup>7</sup>Fritz Zwicky (1898-1974), rođen je u Varni, Bugarska, gde je proveo najranije detinjstvo!

gumentu. Snaga potrebna za održavanje posmatrane gustine energije Galaktičkih kosmičkih zraka nasuprot gubicima usled napuštanja Galaksije može se odrediti kao:

$$P_{\text{CR}} \sim U_{\text{CR}} V_{\text{CR}} / \tau_{\text{res}} \approx 10^{40} \text{ erg/s}, \quad (2.1)$$

gde je  $U_{\text{CR}} \approx 0.5 \text{ eV/cm}^3$  gustina energije kosmičkih zraka merena u blizini Zemlje i  $V_{\text{CR}} \sim 400 \text{ kpc}^3$  predstavlja zapreminu Galaktičkog haloa u kome se zadržavaju kosmički zraci. Tipično vreme zadržavanja kosmičkog zraka u Galaksiji iznosi  $\tau_{\text{esc}} \sim 5 \times 10^6 \text{ yr}$  (za energiju 1 GeV, Morlino 2017). Kinetička energija koja se oslobodi u jednoj eksploziji supernove iznosi oko  $10^{51} \text{ erg}$ , tako da ukupna brzina oslobađanja energije u Galaksiji usled eksplozija supernovih iznosi:

$$P_{\text{SNR}} = R_{\text{SN}} E_{\text{SNR}} \approx 3 \times 10^{41} \text{ erg/s}, \quad (2.2)$$

gde  $R_{\text{SN}} \sim 0.03 \text{ yr}^{-1}$  predstavlja približnu frekvenciju eksplozija u Galaksiji. Imajući u vidu neodređenost parametara u jednačinama (2.1) i (2.2), gustina energije Galaktičkih kosmičkih zraka može se objasniti ako se 3 do 30% energije eksplozije supernove transformiše u energiju netermalnih čestica. U radu Šklovskog iz 1954. godine prvi put je predloženo je da se kosmički zraci ubrzavaju na udarnim talasima OSN (Shklovskii 1954).

Sve do druge polovine sedamdesetih godina prošlog veka, pomenuti „energetski argument” je jedini išao u prilog supernovama i njihovim ostacima kao proizvođačima kosmičkih zraka. Serija nezavisnih radova iz ovog perioda ukazuje na značaj mehanizma difuznog<sup>8</sup> ubrzavanja na jakim udarnim talasima (eng. *diffusive shock acceleration*–DSA; Axford et al. 1977, Krymsky 1977, Bell 1978a, Blandford & Ostriker 1978). Ovi modeli zasnovani su na ranijim istraživanjima Enrika Fermija<sup>9</sup> (Fermi 1949, Fermi 1954), koji je prvi predložio da se kosmički zraci mogu ubrzati usled stohastičkih sudara sa turbulentnim magnetnim poljem. Od tada ova ideja dobija sve više pažnje zahvaljujući posmatračkom materijalu, posebno u radio, X i gama oblasti, koja potvrđuje mnoga predviđanja teorije i podstiče njen dalji razvoj.

---

<sup>8</sup>Poznato i kao Fermijevo ubrzavanje prvog reda.

<sup>9</sup>*Enrico Fermi* (1901–1954).

## 2.2 Blazijev pristup problemu difuznog ubrzavanja

Pored originalnih radova, pomenutih u poglavlju 2.1, detaljan prikaz elementarne teorije difuznog ubrzavanja može se naći u knjigama Lekea i Longaira (Lequeux 2005, Longair 2011). Stoga se u ovoj disertaciji nećemo detaljno baviti standardnim pristupom difuznom ubrzavanju na udarnim talasima, koji pretpostavlja da ubrzane čestice nemaju dinamički uticaj na sam udarni talas i da je njihova rezultujuća raspodela čist stepeni zakon:

$$4\pi p^2 f(p) dp = N(E) dE = K E^{-\Gamma} dE. \quad (2.3)$$

U prethodnoj jednačini,  $K$  je konstanta,  $p$  impuls čestica,  $f(p)$  raspodela čestica u faznom prostoru<sup>10</sup>,  $N(E)$  raspodela ovih čestica po energijama. U slučaju jakog, ne-modifikovanog udarnog talasa i čestica relativističkih energija, očekivani energetski spektar je  $N(E) \propto E^{-2}$  a impulsni  $f(p) \propto p^{-4}$ .

Većina modela koji objašnjavaju poreklo Galaktičkih i vangalaktičkih kosmičkih zraka pretpostavlja da značajan deo kinetičke energije udarnog talasa prelazi u ubrzane čestice. Ovaj zahtev je u suprotnosti sa pretpostavkom da su ubrzane čestice zapravo „test” čestice, bez dinamičkog uticaja na udarni talas. Ako se uticaj kosmičkih zraka na strukturu udarnog talasa ne može zanemariti, govorimo o takozvanom nelinearnom difuznom ubrzavanju (eng. *non-linear diffuse shock acceleration*—NLDSA, videti na primer: Drury 1983, Malkov & Drury 2001, Blasi 2002a, Amato & Blasi 2005).

Analitički pristup modelu NLDSA koji navodimo u disertaciji generalno prati ideje iz radova Blazija i saradnika (Blasi 2002a, Blasi 2002b, Blasi 2004, Blasi et al. 2005, Blasi et al. 2007, Amato & Blasi 2005), kao i privatnu komunikaciju sa Žilom Feronom (Gilles Ferrand).

Opisaćemo metod za računanje spektra i pritiska ubrzanih čestica, uzimajući u obzir njihov uticaj na dinamiku udarnog talasa. Reč je zapravo o semi-analitičkom, kinetičkom modelu koji računa spektar ubrzanih čestica  $f(p)$ , uzimajući u obzir pro-

---

<sup>10</sup>Po definiciji,  $f(p)$  zadovoljava jednakost  $dN = 4\pi p^2 f(p) dp$ , gde  $N$  predstavlja broj čestica po jedinici zapremine. Raspodela energije  $f(E)$  može se predstaviti kao  $f(E) = 4\pi p^2 f(p) \frac{dp}{dE}$ , što daje  $f(E) \propto p^2 f(p)$  u ultrarelativističkom režimu ( $E \propto p$ ).

fil brzine udarnog talasa  $u(x)$ . Problem smo, radi jednostavnosti, ograničili na 1D slučaj (duž  $x$ -ose), mada većina izvedenih zaključaka ne zavisi od geometrije problema (Blasi 2002). U daljem razmatranju brzine fluida posmatramo u referentnom sistemu vezanom za udarni talas. Dodatno ograničenje ovog pristupa je stacionarnost, sve veličine su nezavisne od vremena. Ključni koncept za povezivanje spektra i brzine fluida je to što u prostoru ispred udarnog talasa (prekursor),  $u$  može biti predstavljena kao funkcija impulsa  $p$ . Naime, čestica određene energije vezana je za udarni talas i difuzijom može doći do određenog regiona ispred udarnog talasa gde je brzina fluida poznata. Obično se pretpostavlja da je koeficijent difuzije  $D$  rastuća funkcija po  $p$ , u idealnom slučaju linearna  $D(p) \propto p$  (ovo je slučaj takozvane Bohm difuzije, eng. *Bohm diffusion*).

Jednačina koja opisuje transport čestica naziva se *difuzno-advekciona jednačina* i u 1D slučaju ima sledeći oblik:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ D \frac{\partial}{\partial x} f(x, p) \right] - u \frac{\partial f(x, p)}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{du}{dx} p \frac{\partial f(x, p)}{\partial p} + Q(x, p) = 0, \quad (2.4)$$

gde smo pretpostavili stacionarnost ( $\partial f / \partial t = 0$ ). Usmerenost  $x$ -ose je od prekursora ka delu preko koga je već prešao udarni talas (eng. *downstream*). Funkcija brzine fluida  $u = u(x)$  zavisi od položaja (ne i od vremena) pa koristimo totalni umesto parcijalnog izvoda. Pritisak ubrzanih čestica usporava fluid u prekursoru, pre dolaska do samog udarnog talasa, pa je zbog toga brzina fluida daleko ispred (eng. *far upstream*) udarnog talasa  $u_0$  različita od brzine neposredno ispred njega,  $u_1$  i brzine neposredno iza,  $u_2$ . Poslednji sabirak na levoj strani jednačine (2.4) predstavlja takozvani *član injekcije* (eng. *injection term*) i predstavlja se u formi  $Q(x, p) = Q_0(p)\delta(x)$ , gde je  $\delta(x)$  Dirakova (delta) funkcija<sup>11</sup>.

Prvi korak je integracija jednačine (2.4) preko udarnog talasa (od  $x = 0^-$  do  $x = 0^+$ ). Na Slici 4 su tačke  $x = 0^-$  i  $x = 0^+$  obeležene sa 1 i 2, redom, tako da

<sup>11</sup>Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984). Delta-funkcija  $\delta(\mathbf{x})$  je definisana tako da uzima vrednost nula svuda, sa izuzetkom tačke  $\mathbf{x} = 0$  gde teži beskonačnosti i za koju važi normalizacija  $\int_0^{+\infty} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$ .

dolazimo do sledeće jednačine:

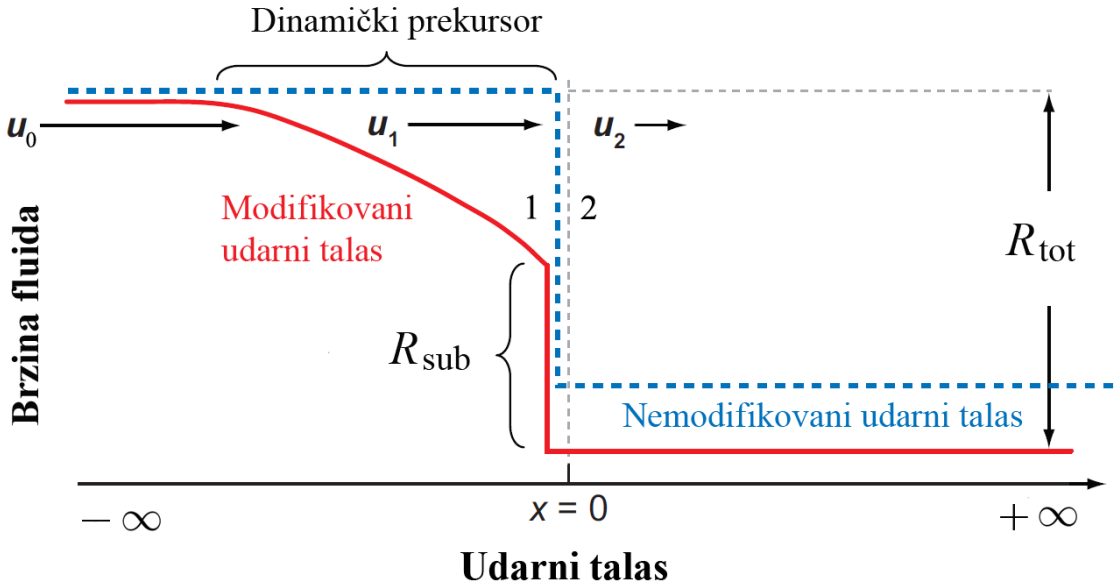
$$\left[ D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_2 - \left[ D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_1 + \frac{1}{3} p \frac{df_0}{dp} (u_2 - u_1) + Q_0(p) = 0, \quad (2.5)$$

gde smo pretpostavili neprekidnost funkcije raspodele  $f_2 - f_1 = 0$ ,  $f_0 = f_1 = f_2$  je funkcija raspodele čestica na samom udarnom talasu. Uzimamo da je funkcija raspodele čestica konstatna u fluidu preko koga je prešao udarni talas (Blasi 2002a, Reynolds 2008) odnosno  $\left[ D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_2 = 0$ , tako dolazimo do graničnog uslova na udarnom talasu:

$$\left[ D \frac{\partial f}{\partial x} \right]_1 = \frac{1}{3} p \frac{df_0}{dp} (u_2 - u_1) + Q_0(p). \quad (2.6)$$

Opet vršimo integraciju jednačinu (2.4) ali sa granicama od  $x = -\infty$  do  $x = 0^-$ . Korišćenjem jednačine (2.6) i primenom parcijalne integracije na integral  $\int_{-\infty}^{0^-} u \frac{\partial f}{\partial x} dx = [uf]_{-\infty}^{0^-} - \int_{-\infty}^{0^-} f \frac{du}{dx} dx$ , dobijamo:

$$\frac{1}{3} p \frac{df_0}{dp} (u_2 - u_1) - u_1 f_0 + Q_0(p) + \int_{-\infty}^{0^-} f \frac{du}{dx} dx + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{0^-} \frac{du}{dx} p \frac{\partial f}{\partial p} dx = 0. \quad (2.7)$$



Slika 4: Šematski prikaz profila udarnog talasa. Isprekidana plava linija predstavlja nemodifikovani udarni talas. Puna crvena linija predstavlja udarni talas modifikovan od strane ubrzanih čestica. (Prilagođeno od originalnog izvora: Reynolds 2008)

Uvodimo novu veličinu  $u_p$ , jednu od ključnih u Blazijevom tretmanu NLDSA, defi-

nisanu kao:

$$u_p = u_1 - \frac{1}{f_0} \int_{-\infty}^{0^-} \frac{du}{dx} f(x, p) dx, \quad (2.8)$$

čija je fizička interpretacija važna za razumevanje nelinearnih efekata ubrzanih čestica. Funkcija  $u_p$  je srednja brzina fluda koju „osećaju” čestice sa impulsom  $p$  dok difunduju u oblasti ispred udarnog talasa. U ovakvoj interpretaciji (Blasi 2002a), pomenuto usrednjavanje dovodi do toga da čestica sa impulsom  $p$  „oseća” brzinu koja zavisi od položaja u prostoru usled pritiska ubrzanih čestica. Kako koeficijent difunduje u opštem slučaju zavisi od impulsa  $p$ , čestice različitih energija „osećaju” i različitu kompresiju. Ova kompresija je veća za čestice sa većom energijom ako je koeficijent difuzije rastuća funkcija po impulsu (Blasi 2004).

Poslednji integral na levoj strani jednačine (2.7) može se transformisati kao  $\frac{1}{3} \int_{-\infty}^{0^-} \frac{du}{dx} p \frac{\partial f}{\partial p} dx = \frac{1}{3} p \frac{d}{dp} \int_{-\infty}^{0^-} f \frac{du}{dx} dx$ , jer impuls nije funkcija položaja, a funkcija  $f$  zavisi i od impulsa. Sa veličinom  $u_p$  definisanom u (2.8), jednačina (2.7) se transformiše u oblik:

$$\frac{1}{3} p \frac{df_0}{dp} (u_2 - u_p) - f_0 \left[ u_p + \frac{1}{3} p \frac{du_p}{dp} \right] + Q_0(p) = 0, \quad (2.9)$$

gde smo iskoristili sledeću vezu (sledi iz definicije za  $u_p$ ):

$$p \frac{d}{dp} \int_{-\infty}^{0^-} \frac{du}{dx} f dx = p \left[ \frac{df_0}{dp} (u_1 - u_p) - f_0 \frac{du_p}{dp} \right],$$

gde je  $p_0$  minimalni impuls čestica. Jednačina (2.9) predstavlja linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda po  $f_0(p)$ . Partikularno rešenje ove jednačine za monohromatsku injekciju na impulsu  $p_{inj}$  je:

$$f_0(p) = \int_{p_0}^p \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} \frac{3Q_0(\bar{p})}{u_{\bar{p}} - u_2} \exp \left\{ - \int_{\bar{p}}^p \frac{dp'}{p'} \frac{3}{u_{p'} - u_2} \left[ u_{p'} + \frac{1}{3} p' \frac{du_{p'}}{dp'} \right] \right\} = \frac{3R_{sub}}{R_{sub} - 1} \frac{\eta n_{gas,1}}{4\pi p_{inj}^3} \times \exp \left\{ - \int_{p_{inj}}^p \frac{dp'}{p'} \frac{3}{u_{p'} - u_2} \left[ u_{p'} + \frac{1}{3} p' \frac{du_{p'}}{dp'} \right] \right\}. \quad (2.10)$$

U ovom izvođenju je korišćeno  $Q_0(p) = \frac{\eta n_{gas,1} u_1}{4\pi p_{inj}^2} \delta(p - p_{inj})$ , gde je  $n_{gas,1}$  gustina gasa neposredno ispred udarnog talasa ( $x = 0^-$ ), a  $\eta$  parametar koji određuje koji deo



čestica koje prelaze udarni talas ulazi u proces ubrzavanja. Kasnije ćemo uvesti zavisnost parametra  $\eta$  od početnog impulsa, pod pretpostavkom termalne injekcije.

Za jednačinu (2.10) ali i za fizički opis prekursora, formiranog usled postojanja ubrzanih čestica, uvedene su dve veličine  $R_{\text{sub}} = u_1/u_2$  i  $R_{\text{tot}} = u_0/u_2$ . Veličine  $R_{\text{sub}}$  i  $R_{\text{tot}}$  redom predstavljaju kompresiju gasa na udarnom talasu (eng. *subshock*) i ukupnu kompresiju između oblasti daleko od udarnog talasa i one iza udarnog talasa. Ovde uvodimo još i veličinu  $R_{\text{prec}} = u_0/u_1 = R_{\text{tot}}/R_{\text{sub}}$ , kompresiju u prekursoru, koja za modifikovane udarne talase značajno odstupa od vrednosti jedan. Za modifikovani udarni talas,  $R_{\text{tot}}$  može dostići vrednosti veće od  $R_{\text{sub}}$  i takođe veće od teorijske kompresije 4, koja predstavlja maksimum u slučaju običnog, jakog i ne-relativističkog udarnog talasa. U zavisnosti od kompresija  $R_{\text{sub}}$  i  $R_{\text{tot}}$  koncentracija neposredno ispred udarnog talasa je  $n_{\text{gas},1} = (\rho_0/\mu m_p)R_{\text{tot}}/R_{\text{sub}}$ , gde je  $\mu$  srednja molekulska masa.

U jednačinu (2.10) možemo uvesti bezdimenzionu brzinu fluida, kao odnos brzine fluida u određenoj tački i brzine daleko ispred udarnog talasa  $U(p) = u_p/u_0$ , tako da se konačno dobija:

$$f_0(p) = \left( \frac{3R_{\text{sub}}}{R_{\text{tot}}U(p) - 1} \right) \frac{\eta n_{\text{gas},1}}{4\pi p_{\text{inj}}^3} \times \exp \left\{ - \int_{p_{\text{inj}}}^p \frac{dp'}{p'} \frac{3R_{\text{tot}}U(p')}{R_{\text{tot}}U(p') - 1} \right\}. \quad (2.11)$$

Nalaženje spektra ubrzanih čestica  $f_0(p)$  je nelinearan problem. Ova nelinearnost se ogleda u činjenici da je bezdimenziona brzina fluida  $U(p)$ , koja figuriše u jednačini (2.11), zavisna od  $f(p)$ , što se vidi iz definicije  $u_p$ . U daljem tekstu za funkciju  $U(p)$  korišćićemo nešto kraću oznaku  $U_p$ .

### 2.3 Početno ubrzavanje čestica

Belov prvi rad o difuznom ubrzanju (Bell 1978a) opisuje mehanizam kojim se ubrzavaju čestice na udarnim talasima i dobija  $N(E) \propto E^{-\Gamma}$ , gde je nagib spektra  $\Gamma = \frac{r+2}{r-1}$  ( $r$  je kompresija na udarnom talasu, za  $r = 4$  sledi  $\Gamma = 2$ ). On uvodi pretpostavku da su ove čestice na početku već relativističke ( $v \approx c$ ) tj. imaju dovoljnu energiju da pređu udarni talas i budu uključene (injektovane) u proces ubrzavanja. U drugom radu iz iste godine, jedan od glavnih Belovih zaključaka je da protoni

i elektroni sa energijom  $E_{\text{inj}} \approx 4 \left(\frac{1}{2}m_p u_s^2\right)$ , gde je  $m_p$  masa protona, a  $u_s$  brzina udarnog talasa, mogu proći kroz udarni talas velikog Mahovog broja i na taj način bivaju uključeni u proces ubrzavanja (Bell 1978b). Posmatranja Zemljinog lučnog udarnog talasa (eng. *Earth's bow shock*) iz ovog perioda omogućila su Belu procenu broja protona na udarnom talasu koji su ubrzani do energija nekoliko puta većih od  $\frac{1}{2}m_p u_s^2$ . Brzina ovog udarnog talasa iznosi oko 400 km/s i Mahov broj oko 8. Merenja su ukazala na postojanje velikog broja protona ubrzanih do energija oko  $4 \left(\frac{1}{2}m_p u_s^2\right)$  i gustina ovih suprathermalnih protona je bila oko 100 puta manja od gustine protona u Sunčevom vetru na koji nailazi udarni talas. Ovi protoni raspolažu dovoljnom energijom da kroz udarni talas prođu do neperturbovane sredine i dalje budu ubrzavani.

Međutim, postavlja se pitanje opravdanosti pretpostavke o jednakoj energiji injekcije za protone i elektrone (Arbutina 2017). Ako je debljina udarnog talasa reda veličine tzv. ciklotronskog ili žiro-radijusa<sup>12</sup> (eng. *cyclotron, gyroradius*) protona, potrebno je da elektroni imaju sličan žiro-radijus kako bi prešli kroz udarni talas. Ovo znači da je opravdanije pretpostaviti, umesto energije, isti početni impuls protona i elektrona koji im omogućava dalje ubrzavanje.

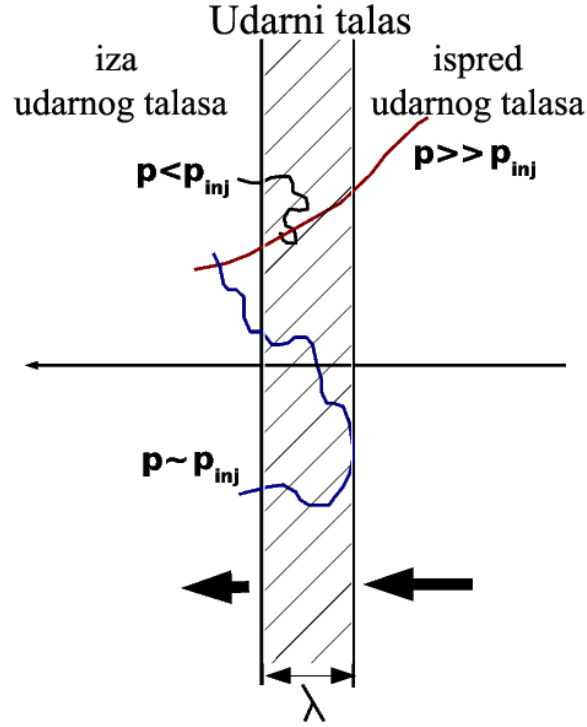
Malkov, Geseler i Kang predložili su model tzv. *termalnog curenja* (eng. *thermal leakage*) koji injekciju čestica u proces ubrzavanja povezuje sa temperaturom plazme iza udarnog talasa (Malkov 1998, Gieseler et al. 2000, Kang et al. 2002). Blazijev model injekcije po svojoj fizičkoj interpretaciji je sličan pomenutim modelima. Ovaj model pretpostavlja parametrizaciju početnog impulsa protona i elektrona u obliku:

$$p_{\text{inj}} = \xi p_{\text{th},2}, \quad (2.12)$$

gde je  $p_{\text{th},2} = \sqrt{2m_p k T_2}$  srednji termalni impuls iza udarnog talasa. Efikasnost ubrzavanja  $\eta$ , može se izraziti u funkciji  $p_{\text{inj}}$ . Uslov koji određuje  $\eta$  je neprekidnost termalne (Maksvelove) i netermalne raspodele čestica za impuls  $p_{\text{inj}}$ , odnosno

---

<sup>12</sup>Ciklotronski ili žiro-radijus kružne putanje naelektrisane čestice u magnetnom polju je  $r_L = p_{\perp} c / eB$ , gde je  $p_{\perp}$  komponenta impulsa normalna na magnetno polje,  $e$  naelektrisanje a  $B$  jačina magnetnog polja. U literaturi se često koristi i termin Larmorov radijus (*Sir Joseph Larmor*, 1857–1942), koji ipak nije potpuno adekvatan jer je povezan sa precesijom magnetnog dipola u okolnom magnetnom polju (Goedbloed & Poedts 2004).



Slika 5: Šematski prikaz strukture bezsudarnog udarnog talasa i ilustracija osnovne ideje mehanizma injektorne čestice iz repa termalne raspodele iza udarnog talasa. Crnom, plavom i crvenom linijom su prikazane putanje čestica u zavisnosti od njihovog impulsa. (Izvor: Blasi et al. 2005)

$f_{th}(p_{inj}) = f_0(p_{inj})$ . Iz ovog uslova dobija se sledeća veza:

$$\eta = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}(R_{sub} - 1)\xi^3 e^{-\xi^2}, \quad (2.13)$$

gde faktor  $R_{sub} - 1$  ima ulogu „regulatora”, odnosno injektorne novih čestica je isključena u slučaju kada je kompresija na samom udarnom talasu bliska jedinici tj. kada se ukupna kompresija odvija samo u prekursoru (Blasi et al. 2005).

Iako je predloženi model verovatno i dalje daleko od tačnog opisa predubrzavanja čestica (posebno elektrona), smatra se korisnim pokušajem modelovanja glavnih fizičkih aspekata ovog procesa.

## 2.4 Profil brzine fluida u prekursoru

U prethodnom poglavlju, analitički smo izrazili raspodelu ubrzanih čestica  $f$  u funkciji profila brzine termalnog fluida  $U$ . Međutim, glavna ideja NLDSA je u tome

da se u obzir uzima uticaj čestica na dinamiku udarnog talasa, pa samim tim  $U$  mora biti funkcija  $f$ . U cilju dobijanja druge pomenute zavisnosti, iskoristićemo zakon održanja impulsa koji obuhvata četiri člana: dinamički pritisak fluida  $\rho u^2$ , termalni pritisak fluida  $P_{\text{th}}$ , netermalni pritisak čestica  $P_{\text{CR}}$  i pritisak magnetnih talasa u plazmi  $P_{\text{w}}$ . Zakon održanja pišemo od tačke daleko ispred udarnog talasa ( $x \rightarrow -\infty$ ), gde je brzina fluida  $u_0$  do tačke  $x_p$  (do koje stižu čestice sa impulsom  $p$ ), gde je brzina fluida  $u_p$ :

$$\rho_0 u_0^2 + P_{\text{th},0} + P_{\text{CR},0} + P_{\text{w},0} = \rho_p u_p^2 + P_{\text{th},p} + P_{\text{CR},p} + P_{\text{w},p}. \quad (2.14)$$

### 2.4.1 Termalni pritisak fluida

Termalni pritisak fluida u regionu daleko ispred udarnog talasa  $P_{\text{th},0}$  povezan je sa brzinom udarnog talasa (uz pretpostavku da MZM miruje), preko Mahovog broja  $M_{\text{S},0} = \frac{u_0}{c_{\text{S},0}}$  u odgovarajućem regionu:

$$\frac{P_{\text{th},0}}{\rho_0 u_0^2} = \frac{1}{\gamma M_{\text{S},0}^2}, \quad (2.15)$$

gde smo koristili izraz za brzinu zvuka u toj sredini  $c_{\text{S},0} = \sqrt{\gamma P_{\text{th},0}/\rho_0}$ . Ako pretpostavimo adijabatsku kompresiju, termalni pritisak  $P_{\text{th},p}$  u proizvoljnoj tački prekursora  $x_p$  iznosi:

$$\frac{P_{\text{th},p}}{P_{\text{th},0}} = \left(\frac{\rho_p}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{u_0}{u_p}\right)^\gamma = U_p^{-\gamma}, \quad (2.16)$$

gde je korišćen zakon održanja mase  $\rho_0 u_0 = \rho_p u_p$ . Različiti procesi mogu uticati na to da kompresija gasa odstupa od adijabatske. Jedan od najpoznatijih je tzv. Alfenovo<sup>13</sup> zagrevanje koje se javlja usled prigušenja Alfenovih MHD talasa u plazmi, ekscitovanih od strane energetskih čestica. Drugim rečima, usled pomenutog mehanizma zagrevanja, deo energije Alfenovih talasa prelazi u termalnu energiju plazme. Za Alfenovo zagrevanje plazme Berežko i Elison su predložili sledeći model (Berezhko

---

<sup>13</sup>*Hannes Alfvén* (1908–1995).

& Ellison 1999):

$$\frac{P_{\text{th},p}}{P_{\text{th},0}} = U_p^{-\gamma} \left[ 1 + \zeta(1 - \gamma) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}} (1 - U_p^\gamma) \right], \quad (2.17)$$

gde je  $M_{A,0} = u_0/v_{A,0}$  takozvani *Alfenov Mahov broj* daleko ispred udarnog talasa, a  $v_{A,0}$  odgovarajuća Alfenova brzina<sup>14</sup>  $v_{A,0} = B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}$ . Jednačina (2.17) je u pomenutom radu Berežka i Elisona izvedena bez parametra  $\zeta$ . Ovaj dodatni parametar je kasnije uveden od strane Kapriolija i saradnika, kako bi se ublažilo prigušenje talasa u plazmi za  $\zeta < 1$  i na taj način omogućilo efikasno pojačanje magnetnog polja (Caprioli et al. 2009). Izraz (2.17) ćemo koristiti kao jednačinu stanja gasa u prisustvu Alfenovog zagrevanja.

#### 2.4.2 Pritisak kosmičkih zraka

U disertaciji ne razmatramo ubrzavanje već postojećih, predubrzanih kosmičkih zraka iz MZM (eng. *reacceleration*). Opšte je prihvaćeno da se radi o difuznom procesu u kome se kosmički zraci ubrzavaju putem Fermijevog ubrzanja drugog reda (Drury & Strong 2015). Analitički pristup ubrzanju predubrzanih kosmičkih zraka na udarnim talasima naveden je u Arbutina (2017).

Smatraćemo da je broj predubrzanih kosmičkih zraka daleko od udarnog talasa zanemarljiv, pa iz tog razloga u jednačini (2.14) važi  $P_{\text{CR},0} = 0$ . Jedna od osnovnih pretpostavki je da difuzija zavisi od impulsa  $p$  i još preciznije, da je koeficijent difuzije  $D(p)$  rastuća funkcija od  $p$ . U ovom modelu, čestice sa impulsom  $p$  dostižu daljinu  $x_p$  od udarnog talasa, gde je brzina fluida  $u_p$ . Dakle, tipično rastojanje od udarnog talasa koje dostiže čestica sa impulsom  $p$  je  $x_p \simeq D(p)/u_p$ , i veće je za čestice sa većom energijom<sup>15</sup>. Ovo kao posledicu ima da u proizvoljnoj tački  $x_p$  samo čestice sa impulsom većim od  $p$  mogu značajno uticati na fluid.

Pošto samo čestice sa impulsom  $\geq p$  mogu dostići tačku  $x = x_p$ , za pritisak

<sup>14</sup>Napominjemo da u disertaciji koristimo tzv. Gausov sistem jedinica (eng. Gaussian unit system, Gaussian-cgs units).

<sup>15</sup>Za slučajeve od interesa u simulacijama,  $D(p)$  raste brže od funkcije  $u_p$ , tako da je  $\Delta x$  monotono rastuća funkcija od  $p$ .

možemo pisati:

$$P_{CR,p} = \frac{4\pi}{3} \int_p^{p_{max}} p^3 v(p) f_0(p) dp, \quad (2.18)$$

gde je  $v(p)$  brzina čestice sa impulsom  $p$ ,  $p_{max}$  je maksimalni impuls koji čestice mogu dostići i zavisi od vremenskih skala ubrzavanja i napuštanja sistema.

### 2.4.3 Pritisak magnetohidrodinamičkih talasa

Pritisak magnetohidrodinamičkih fluktuacija  $\delta\mathbf{B}$  definisan je (u Gausovom sistemu jedinica) kao:

$$P_w = \frac{1}{8\pi} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} \delta\mathbf{B}_{\mu} \right)^2, \quad (2.19)$$

gde suma po  $\mu$  predstavlja sumiranje po svim talasnim modovima prisutnim na datom položaju (Caprioli 2009). Daleko od udarnog talasa magnetno polje je relaksirano (nema turbulencija) pa uzimamo  $P_{w,0} = 0$ .

U Belovom radu iz 2004. godine, izložena je ideja da je ubrzavanje kosmičkih zraka na udarnim talasima neraskidivo povezano sa stvaranjem magnetohidrodinamičkih fluktuacija u prekursoru (Bell 2004). Bel je u svojim nelinearnim simulacijama pokazao da se na ovaj način međuzvezdano magnetno polje (srednje jačine  $\sim 3 - 5 \mu\text{G}$ ) može pojačati za čak dva reda veličine (do nekoliko stotina  $\mu\text{G}$ ). Visokoenergetske čestice stvaraju magnetohidrodinamičke turbulencije u prekursoru koje su odgovorne za njihovo rasejanje i ubrzavanje. S obzirom na to da postoji određena povratna sprega između kosmičkih zraka i magnetohidrodinamičkih fluktuacija oko udarnog talasa, jedan od standardnih pristupa je parametrizacija pritiska ovih fluktuacija kao određenog dela  $\alpha < 1$  pritiska čestica:

$$P_{w,p} = \alpha P_{CR,p}. \quad (2.20)$$

Kvazilinearna teorija i numeričke simulacije daju  $\alpha \sim v_{A,0}/u_0$  za rezonantne nestabilnosti (Caprioli 2009), dok za nerezonantne važi  $\alpha \sim u_0/c$  (Bell 2004). U svom teorijskom radu, Caprioli je predložio sledeći model za rezonantne nestabilnosti, čiji

je formalni matematički zapis prilagođen Blazijevom formalizmu (Caprioli 2009):

$$\frac{P_{w,p}}{\rho_0 u_0^2} = \frac{1 - \zeta}{4M_{A,0}} U_p^{-3/2} (1 - U_p^2), \quad (2.21)$$

gde faktor  $U_p^{-3/2}$  predstavlja adijabatsku kompresiju magnetnog polja. Faktor  $1 - \zeta$  je uveden po analogiji sa faktorom  $\zeta$  iz relacije (2.17): mera prigušenja Alfenovih talasa (i odgovarajuće zagrevanje gasa) mora ostati razumno mala da bi došlo do značajnog pojačanja magnetnog polja (Caprioli 2008).

#### 2.4.4 Brzina fluida

Zanemarivanjem članova  $P_{CR,0}$  i  $P_{w,0}$  u jednačini (2.14), deljenjem obe strane sa  $\rho_0 u_0^2$  i zamenom pojedinačnih članova iz jednačina (2.15), (2.17), (2.18) i (2.21), dobijamo:

$$U_p + \frac{U_p^{-\gamma}}{\gamma M_{S,0}^2} \left[ 1 + \zeta(1 - \gamma) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}} (1 - U_p^\gamma) \right] + \frac{4\pi}{3\rho_0 u_0^2} \int_p^{p_{max}} dp p^3 v(p) f_0(p) + \frac{1 - \zeta}{4M_{A,0}} U_p^{-3/2} (1 - U_p^2) = 1 + \frac{1}{\gamma M_{S,0}^2}. \quad (2.22)$$

Diferenciranjem prethodne jednačine po impulsu dobijamo:

$$\frac{dU_p}{dp} \left\{ 1 - \frac{U_p^{-(\gamma+1)}}{M_{S,0}^2} \left[ 1 + \zeta(1 - \gamma) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}} \right] - \frac{1 - \zeta}{8M_{A,0}} \frac{U_p^2 + 3}{U_p^{5/2}} \right\} = \frac{4\pi}{3\rho_0 u_0^2} p^3 v(p) f_0(p). \quad (2.23)$$

Kada je poznata raspodela čestica na udarnom talasu  $f_0$ , profil brzine  $U_p$  može se dobiti numeričkim rešavanjem diferencijalne jednačine (2.23), sa graničnim uslovima:

$$U_p(p = p_{inj}) = U_p(x = 0^-) = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{R_{prec}}, \quad (2.24a)$$

$$U_p(p = p_{max}) = U_p(x = -\infty) = \frac{u_0}{u_0} = 1. \quad (2.24b)$$

Čestice najmanjih energija kreću se u uskom regionu oko samog udarnog talasa, pa samim tim „osećaju” samo brzinu fluida  $u_1$  (2.24a). Drugi uslov (2.24b) ukazuje na to da samo čestice sa najvećom energijom mogu stići do neperturbovane sredine

daleko ispred udarnog talasa tj. do fluida sa efektivnom brzinom  $u_0$ . Integracija (u našem radu numerička) jednačine (2.23) kreće od uslova (2.24a) a rešenjem diferencijalne jednačine se „proglašava” ono koje zadovoljava krajnji uslov (2.24b). U numeričkoj matematici ovaj način rešavanja se može svrstati u takozvane *metode gađanja* (eng. *shooting method*, videti Radunović 2004), koje predstavljaju metode pokušaja i pogrešaka. Rešenje postoji samo za određene vrednosti kompresije u prekursoru  $R_{\text{prec}}$ .

## 2.5 Kompresija na udarnom talasu

U slučaju NLDSA, udarni talas ćemo i dalje nazivati ovim imenom mada se u engleskoj terminologiji često koristi izraz „podudar” (eng. *subshock*), da bi se naglasilo da se radi o modifikovanom udarnom talasu. Sa druge strane, naš naziv je takođe opravdan jer drugog pravog udarnog talasa (sa naglim skokom parametara) ovde nema. Do sada smo izrazili spektar na udarnom talasu  $f_0$  preko  $U_p$ ,  $R_{\text{tot}}$  i  $R_{\text{sub}}$  (jednačine 2.11–2.13) i profil  $U_p$  kao funkciju  $f_0$  i  $R_{\text{prec}}$  (jednačine 2.23–2.24), sa poznatim  $u_0$ ,  $\rho_0$ ,  $P_0$ ,  $f_0$  i slobodnim parametrima  $\eta$  (zavisi od  $\xi$ ),  $p_{\text{max}}$  i  $\zeta$ . Međutim, da bi se sistem  $(f_0, U_p)$  rešio, potrebna je još jedna nezavisna relacija između bilo koje dve od tri kompresije  $R_{\text{sub}}$ ,  $R_{\text{tot}}$ ,  $R_{\text{prec}}$  (uz već navedenu  $R_{\text{tot}} = R_{\text{sub}} \times R_{\text{prec}}$ ). Ovo postizemo ponovo korišćenjem održanja impulsa, ali sada na diskontinuitetu vezanom za sam udarni talas (podudar):

$$\rho_1 u_1^2 + P_{\text{th},1} + P_{\text{CR},1} + P_{\text{w},1} = \rho_2 u_2^2 + P_{\text{th},2} + P_{\text{CR},2} + P_{\text{w},2}. \quad (2.25)$$

Pritisak kosmičkih zraka je neprekidna funkcija na udarnom talasu  $P_{\text{CR},1} = P_{\text{CR},2}$ . U radu Vainija i Šlihajzera izvedena je relacija za odnos pritisaka fluida na udarnom talasu, u prisustvu Alfenovih talasa (Vainio & Schlickeiser 1999):

$$\frac{P_{\text{th},2}}{P_{\text{th},1}} = \frac{(\gamma + 1)R_{\text{sub}} - (\gamma - 1)[1 - (R_{\text{sub}} - 1)\Delta]}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)R_{\text{sub}}}, \quad (2.26)$$

pri čemu važi:

$$\Delta = \frac{R_{\text{sub}} + 1}{R_{\text{sub}} - 1} \frac{[P_{\text{w}}]_1^2}{P_{\text{th},1}} - \frac{2R_{\text{sub}}}{R_{\text{sub}} - 1} \frac{[F_{\text{w}}]_1^2}{P_{\text{th},1}u_1}, \quad (2.27)$$



gde su  $[P_w]_1^2$  i  $[F_w]_1^2$  skokovi magnetnog pritiska i fluksa energije na diskontinuitetu (koristimo oznaku  $[X]_1^2 = X_2 - X_1$ ). U slučaju  $\Delta = 0$ , očekivano dobijamo standardne Rankine-Igonoove jednačine (eng. *Rankine-Hugoniot*).

Kaprioli je u svojim radovima iz 2008. i 2009. razmatrao Alfenove talase sa obe strane udarnog talasa, uključujući njihovu transmisiju i refleksiju (Caprioli et al. 2008, Caprioli et al. 2009). Na ovaj način dobijaju se jednačine za skokove magnetnog pritiska i fluksa energije, redom  $[P_w]_1^2 = (R_{\text{sub}}^2 - 1)P_{w,1}$  i  $[F_w]_1^2 = 2(R_{\text{sub}} - 1)P_{w,1}u_1$ , koje zamenom u (2.26) daju:

$$\frac{P_{\text{th},2}}{P_{\text{th},1}} = \frac{(\gamma + 1)R_{\text{sub}} - (\gamma - 1) \left[ 1 - (R_{\text{sub}} - 1)^3 \frac{P_{w,1}}{P_{\text{th},1}} \right]}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)R_{\text{sub}}}. \quad (2.28)$$

Jednačina (2.25) se, uz pretpostavku  $P_{\text{CR},1} = P_{\text{CR},2}$ , može transformisati u oblik:

$$\frac{\rho_1 u_1^2}{P_{w,1}} \frac{R_{\text{sub}} - 1}{R_{\text{sub}}} + \frac{P_{\text{th},1}}{P_{w,1}} \left( \frac{P_{\text{th},2}}{P_{\text{th},1}} - 1 \right) + R_{\text{sub}}^2 - 1 = 0. \quad (2.29)$$

Uvodimo Mahov broj neposredno ispred udarnog talasa  $M_{S,1} = u_1/c_{S,1}$ , gde je  $c_{S,1} = \sqrt{\gamma P_{\text{th},1}/\rho_1}$ , koji se može povezati sa  $M_{S,0}$  koristeći jednačinu (2.17):

$$\frac{M_{S,1}^2}{M_{S,0}^2} = \frac{\rho_1 u_1^2}{\rho_0 u_0^2} \frac{P_{\text{th},0}}{P_{\text{th},1}} = R_{\text{prec}}^{-\gamma-1} \left[ 1 + \zeta(1 - \gamma) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}} (1 - R_{\text{prec}}^{-\gamma}) \right]^{-1}. \quad (2.30)$$

Konačno, zamenom jednačine (2.28) u (2.29) i posle niza algebarskih transformacija dobijamo:

$$M_{S,1}^2 = \frac{2R_{\text{sub}}}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)R_{\text{sub}} - 2R_{\text{sub}}P_{w,1}^* [\gamma - (\gamma - 2)R_{\text{sub}}]}, \quad (2.31)$$

gde je uvedena nova veličina:

$$P_{w,1}^* = \frac{P_{w,1}}{\rho_1 u_1^2} = R_{\text{prec}} \frac{P_{w,1}}{\rho_0 u_0^2} = \frac{1 - \zeta}{4M_{A,0}} R_{\text{prec}}^{5/2} (1 - R_{\text{prec}}^{-2}). \quad (2.32)$$

U slučaju kada se pritisak magnetnih talasa može zanemariti, odnosno  $P_{w,1} \simeq 0$ ,

jednačina (2.31) daje standardnu hidrodinamičku relaciju:

$$M_{S,1}^2 = \frac{2R_{\text{sub}}}{(\gamma + 1) - (\gamma - 1)R_{\text{sub}}} \iff R_{\text{sub}} = \frac{\gamma + 1}{\frac{2}{M_{S,1}^2} + \gamma - 1}. \quad (2.33)$$

U slučaju  $P_{w,1} > 0$ , za poznatu kompresiju u prekursoru  $R_{\text{prec}}$ , jednačina (2.31) postaje kvadratna po  $R_{\text{sub}}$ :

$$2(\gamma - 2)M_{S,1}^2 P_{w,1}^* R_{\text{sub}}^2 - [2 + (\gamma - 1 + 2\gamma P_{w,1}^*)M_{S,1}^2] R_{\text{sub}} + M_{S,1}^2(\gamma + 1) = 0. \quad (2.34)$$

Pozitivan koren ove jednačine (2.34) daje  $R_{\text{sub}}$  u funkciji od  $M_{S,1}$  i  $P_{w,1}^*$ , odnosno  $R_{\text{prec}}$ . Dakle, kompresija u prekursoru određuje preostale dve kompresije, za poznate parametre neporemećenog fluida.

## 2.6 Temperatura iza udarnog talasa

Preostalo je još odrediti promenu temperature gasa, koja je važna za dijagnostiku modifikacije udarnog talasa i pre svega, za računanje injekcije opisane u poglavlju 2.3. Imajući u vidu jednačinu stanja idealnog gasa  $P \propto \rho T$  i jednačinu (2.17), dobijamo promenu temperature u prekursoru:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\rho_0 P_{\text{th},1}}{\rho_1 P_{\text{th},0}} = R_{\text{prec}}^{\gamma-1} \left[ 1 + \zeta(\gamma - 1) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}} (1 - R_{\text{prec}}^{-\gamma}) \right]. \quad (2.35)$$

Temperaturu iza udarnog talasa, odakle čestice iz repa termalne raspodele bivaju uključene u proces ubrzavanja, dobijamo primenom izvedene relacije (2.28):

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_1 P_{\text{th},2}}{\rho_2 P_{\text{th},1}} = \frac{(\gamma + 1)R_{\text{sub}} - (\gamma - 1) \left[ 1 - (R_{\text{sub}} - 1)^3 \frac{P_{w,1}}{P_{\text{th},1}} \right]}{[(\gamma + 1) - (\gamma - 1)R_{\text{sub}}] R_{\text{sub}}}. \quad (2.36)$$

## 2.7 Numeričko rešavanje

Postupak integracije sistema jednačina koje određuju par  $(f_0, U_p)$  zahteva poznavanje sledećih parametara u neporemećenom fluidu (daleko od udarnog talasa):  $M_{S,0}$ ,  $M_{A,0}$ ,  $\rho_0$ ,  $B_0$ ,  $T_0$ ; kao i parametre efikasnosti ubrzavanja i pojačavanja magnetnog polja  $\xi$  i  $\zeta$ .

Kasnije će biti prikazan glavni algoritam za nalaženje spektra ubrzanih kosmičkih zraka, koji je u osnovi iterativan. Na početku simulacije spektar čestica se inicijalizuje sa  $f_0(p) = 0$ , dok u svakom iterativnom koraku uzimamo istu vrednost ove raspodele za početni impuls injekcije  $f_0(p_{\text{inj}})$ :

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow p_{\text{inj}}} f_0(p) &= \lim_{p \rightarrow p_{\text{inj}}} \left( \frac{3R_{\text{sub}}}{R_{\text{tot}}U(p) - 1} \right) \frac{\eta n_{\text{gas},1}}{4\pi p_{\text{inj}}^3} \times \exp \left\{ - \int_{p_{\text{inj}}}^p \frac{dp'}{p'} \frac{3R_{\text{tot}}U(p')}{R_{\text{tot}}U(p') - 1} \right\} = \\ &= \frac{3R_{\text{sub}}}{R_{\text{sub}} - 1} \frac{\eta n_{\text{gas},1}}{4\pi p_{\text{inj}}^3}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

jer smo prilikom testiranja kôda zaključili da nefizičke vrednosti mogu narušiti konvergenciju metoda.

### 2.7.1 Uzorkovanje kompresije u prekursoru

Moguće vrednosti kompresije u prekursoru  $R_{\text{prec}}$  idu od 1 (nema prekursora, udarni talas nije modifikovan pa važi  $M_{\text{S},1} = M_{\text{S},0}$  i  $R_{\text{tot}} = R_{\text{sub}}$ ) do  $R_{\text{prec,max}}$  koje se dobija za  $R_{\text{sub}} = 1$  (slučaj glatkog udarnog talasa koji nema diskontinuitet i kompresija postoji samo u prekursoru). U slučaju glatkog talasa, dakle kada je  $R_{\text{sub}} = 1$ , jednačina (2.31) se svodi na:

$$M_{\text{S},1}^2 = \frac{2}{2 - 4P_{\text{w},1}^*(R_{\text{prec}})}. \quad (2.38)$$

Glavna ideja algoritma za nalaženja maksimalne moguće kompresije u prekursoru je da se  $R_{\text{prec}}$  povećava sve dok vrednost  $M_{\text{S},1}^2$ , nezavisno dobijena iz jednačine (2.30), ne padne ispod vrednosti u jednačini (2.38), tačnije dok god se ove vrednosti ne poklope. Naravno, u numerici nikad ne dolazi do tačnog poklapanja već zadajemo neki prag tačnosti  $\epsilon$ , koji predstavlja maksimalnu dozvoljenu razliku pomenutih vrednosti (u našim simulacijama  $\epsilon \approx 10^{-3}$ ), a zatim se nalazi  $R_{\text{prec,max}}$  kroz efikasnu primenu algoritma binarne pretrage. Bitno je uočiti iz jednačine (2.38) da  $M_{\text{S},1}^2$  raste od 1 do  $+\infty$ , dok  $P_{\text{w},1}^*$  raste od 0 do maksimalne konačne vrednosti 1/2 (dostignuta kada je  $P_{\text{w},1} = \frac{1}{2}\rho_1 u_1^2$ ), jer bi sve preko toga dovelo do  $M_{\text{S},1}^2 < 0$  što je nemoguće. Fizička pozadina ovog uslova je da se udarni talas ne može više formirati kada se

magnetni pritisak neposredno ispred udarnog talasa  $P_{w,1}$  izjednači sa dinamičkim pritiskom u istom regionu  $\frac{1}{2}\rho_1 u_1^2$ .

### 2.7.2 Glavni algoritam

Za zadatu kompresiju  $R_{\text{prec}}$  u prekursoru, nelinearni sistem sastavljen od  $(f_0, U_p)$  se može rešiti iterativno prema sledećem iterativnom algoritmu:

```

računamo veličine ispred udarnog talasa (2.30), (2.32), (2.35)
računamo  $R_{\text{sub}}$  (2.34) i  $R_{\text{tot}} = R_{\text{prec}} \times R_{\text{sub}}$ 
računamo veličine iza udarnog talasa (2.36)
određujemo parametar injekcije i efikasnost:  $p_{\text{inj}}$  (2.12) i  $\eta$  (2.13)
određujemo  $p_{p,\text{max}}$  (4.4) i  $p_{e,\text{max}}$  (4.11)
početna inicijalizacija  $f_0(p) = 0$  uz primenu uslova (2.37)
početna inicijalizacija  $U_p = 1/R_{\text{prec}}$ 
ponavljamo do konvergencije  $(f_0, U_p)$  :
    računamo  $f_0$  iz profila brzine  $U_p$  (2.11)
    vraćamo početni uslov  $U_p(0) = 1/R_{\text{prec}}$ 
    računamo  $U_p$  iz  $f_0$  (2.23)
računanje radio-emisije iz spektra  $f_0$  (4.16)
računanje indeksa  $\gamma_{\text{eff}}$  (4.3) i prosleđivanje hidrodinamičkom kodu

```

### 2.7.3 Degeneracija rešenja

Važno je napomenuti da za neke skupove parametara, mogu postojati višestruka rešenja (uslov  $U_p(p_{\text{max}}) = 1$  biva ispunjen za različite vrednosti kompresije u prekursoru  $R_{\text{prec}}$ ). Ovo je prvi primetio Blasi i naveo detaljniju analizu prostora parametara u svom radu (Blasi et al. 2005). Za najveći deo parametarskog prostora postoji samo jedno rešenje, ali postoji relativno uzak region gde se javljaju čak tri rešenja. Jedno od rešenja odgovara slabo modifikovanom udaru (najmanja vrednost  $R_{\text{prec}}$ ), dok druga dva odgovaraju značajno modifikovanim udarima (videti analizu u Blasi et al. 2005, Amato et al. 2008). Inače, višestruka rešenja su posmatrana i ranije, primenom potpuno drugačijih metoda, ali njihov fizički smisao nije detaljno

proučen.

Međutim, metod koji je opisan u disertaciji i korišćen za simulacije evolucije radio-emisije, nije u potpunosti jednak Blazijevom iz 2005. i 2008. godine. Ispostavlja se da magnetno polje koje smo dodali u Blazijeve originalne jednačine značajno umanjuje broj višestrukih rešenja. Efikasna strategija koju predlažemo i koja je implementirana u svim simulacijama je da se, tokom izvršavanja, prate svi važni parametri simulacije. Pojava bilo kakvih diskontinuiteta u vremenskoj evoluciji izlaza simulacije (posebno kompresije) je upozorenje na pojavu degeneracije rešenja.

### 3 Numerički metodi u dinamici fluida

Numeričke simulacije imaju sve važniju ulogu u astrofizici. Jedna od ključnih prednosti numeričkih simulacija je mogućnost da se pomoću njih rešavaju složeni sistemi jednačina koje je nemoguće rešiti analitički, ili bi takvo rešavanje zahtevalo primenu mnogih aproksimacija. Zahvaljujući brzom porastu performansi računara u poslednjim decenijama, ograničenja tehničke prirode u toku numeričkog rešavanje problema (u smislu računarskog vremena, upotrebe memorije, numeričke rezolucije itd) postaju progresivno manja. Ipak, bitno je shvatiti da će takva ograničenja uvek biti prisutna i da će to zahtevati izvestan napredak i na polju numeričkih modela i algoritama. Numeričke simulacije su tako postale moćan komplement analitičkom pristupu i često jedina mogućnost za modelovanje sistema koji poseduju veliku prostornu, vremensku i fizičku složenost. U ovakve probleme svakako spadaju formiranje i evolucija galaksija i jata galaksija, kao i, na manjim prostornim skalama, modelovanje objekata i procesa kao što su zvezde, crne rupe, eksplozije SN, evolucija OSN i ubrzanje kosmičkih zraka.

#### 3.1 Osnovi dinamike fluida

U ovom delu vrlo kratko razmatramo osnovne jednačine i neke istaknute fenomene koji se odnose na dinamiku gasne plazme, kako bi se predstavila osnovna znanja neophodna za korišćenje numeričkih metoda kojima modelujemo hidrodinamičku evoluciju OSN. Važno je naglasiti da plazmu koja čini MZM u disertaciji tretiramo jednostavnim hidrodinamičkim modelom što je gruba aproksimacija u svetlu činjenice da je reč o bezsudarnoj plazmi. Ipak, kod zamagnetisanih<sup>16</sup> plazmi (eng. *magnetized plasma*) spoljašnje magnetno polje na svojevrsan način preuzima ulogu sudara. Tada se, pod određenim uslovima, može smatrati da je fluidna aproksimacija opravdana, bar kada je reč o kretanju u ravni normalnoj na prisutno spoljašnje magnetno polje (Onić D., privatna komunikacija; Goldston & Rutherford 1995; Gurnett & Bhattacharjee 2005). Za detalje pogledati standardnu literaturu

---

<sup>16</sup>Može se koristiti i termin „magnetoaktivna” plazma, i usko je povezan sa tzv. zamrznutošću magnetnih linija (magnetni fluks kroz bilo koju površinu ograničenu proizvoljnom konturom koja se kreće sa plazmom ostaje očuvan).

iz dinamike fluida npr. knjige Milića (1983), Landaua i Lifšica (Landau & Lifshitz 1987), Šua (Shu 1992), kao i najpoznatiji priručnik o numeričkim metodama u dinamici fluida: Toro (2009). Izlaganje u ovom poglavlju prati koncept prikazan u preglednom članku o numeričkom modelovanju i računarstvu visokih performansi Volkera Špringela (Springel 2016).

### 3.1.1 Ojlerove i Navije-Stoksove jednačine

MZM je ekstremno retka, zamagnetisana gasna plazma. Njena je koncentracija od oko  $10^{-4}$  do oko  $10^5 \text{ cm}^{-3}$  (primera radi, vazduh koji udišemo ima srednju koncentraciju od  $10^{19} \text{ cm}^{-3}$ , Vukićević-Karabin & Atanacković-Vukmanović 2004). U našim simulacijama, zbog ograničenih računarskih resursa, evoluciju OSN obično počinjemo da pratimo  $\sim 30$  godina posle eksplozije supernove (radijus je tada  $\sim 0.5 \text{ pc}$ ). Gustina<sup>17</sup> odbačene materije ima približno eksponencijalni profil sa maksimalnom gustinom u centru, koja opet ne prelazi  $10^5 \text{ cm}^{-3}$ .

Kosmička plazma je često veoma razređena i u takvim slučajevima unutrašnje trenje se opravdano zanemaruje. Kada se unutrašnje trenje potpuno zanemari, dolazimo do modela tzv. *idealnog fluida*, čija je dinamika opisana Ojlerovim<sup>18</sup> jednačinama. Ipak, u određenim slučajevima, viskoznost može biti važna (primer je vrela plazma jata galaksija) pa zbog kompletnosti navodimo i hidrodinamičke jednačine u slučaju postojanja fizičkog trenja, Navije-Stoksove jednačine. One opisuju tzv. *viskozne* umesto idealnih fluida.

Za termodinamku plazme (posebno one bliske termodinamičkoj ravnoteži) može se koristiti model termodinamike idealnog gasa (jednačina 3.3 kasnije u tezi). Ipak, napominjemo da termini *idealan fluid* i *idealan gas* nemaju ekvivalentan smisao, odnosno *idealan gas* nije *idealan fluid* koji je gas<sup>19</sup> (videti npr. Milić 1983).

### Ojlerove jednačine

U ovom paragrafu razmatramo vremenski zavisne Ojlerove jednačine. One pred-

<sup>17</sup>Kada ovde kažemo gustina, zapravo mislimo na koncentraciju  $n_{\text{H}}$  tj. broj vodonikovih atoma (pomnožen srednjom atomskom masom  $\mu$  u datoj sredini) u jediničnoj zapremini.

<sup>18</sup>Leonhard Euler (1707-1783).

<sup>19</sup>Pod terminom *idealan gas* podrazumevamo gas kod koga se može potpuno zanemariti međumolekularna interakcija, dok viskoznost ovakvog gasa nije zanemarljiva.

stavljaju sistem nelinearnih hiperboličkih zakona održanja koji se mogu primeniti na stišljive fluide, kao što su gasovi ili tečnosti na visokim pritiscima. Prilikom izvođenja Ojlerovih jednačina zanemaruju se spoljašnje sile, unutrašnje trenje i toplotni fluks.

Postoji određena sloboda u izboru skupa veličina kojima opisujemo fluid za potrebe numeričkih simulacija. Jedna od mogućnosti su takozvane *primitivne* ili *fizičke* veličine (Toro 2009):  $\rho(x, y, z, t)$  = gustina;  $P(x, y, z, t)$  = skalarni pritisak;  $v_x, v_y, v_z$  = redom  $x, y, z$ -komponenta brzine. Odgovarajući vektor brzine fluida je  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ . Drugu mogućnost za opisivanje fluida predstavljaju veličine koje se *održavaju*. To su redom gustina  $\rho$ ,  $x$ -komponenta fluksa mase  $\rho v_x$ ,  $y$ -komponenta fluksa mase  $\rho v_y$ ,  $z$ -komponenta fluksa mase  $\rho v_z$  i ukupna energija po jedinici mase  $E$  (u literaturi se takođe sreće izraz *specifična energija*, eng. *specific energy*; iz ove definicije sledi da  $\rho E$  predstavlja zapreminsku gustinu energije, eng. *energy density*). Fizički, veličine koje se održavaju se prirodno nameću iz tzv. *zakona održanja* čija formulacija sledi u daljem tekstu. Jednačine koje čine naš model pišemo u formi zakona održanja kako bismo ih lakše rešili numerički. Postoji čitava jedna klasa numeričkih metoda pod imenom *metodi održanja*, koji će biti razmatrani kasnije u disertaciji. Za sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina kažemo da je napisan u formi zakona održanja ako se svi članovi mogu zapisati kao uopštena divergencija zavisnih promenljivih (videti Goedbloed & Poedts 2004):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\dots) + \nabla \cdot (\dots) = 0. \quad (3.1)$$

Dinamika neviskoznih fluida opisana je Ojlerovim sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina (PDJ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \mathbf{I}) = 0, \quad (3.2b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot [(\rho E + P) \mathbf{v}] = 0, \quad (3.2c)$$

gde je  $E = e + v^2/2$  suma specifične (po jedinici mase) unutrašnje energije  $e$  i spe-



cifčne kinetičke energije  $v^2/2$ , oznaka  $\mathbf{v}\mathbf{v}$  predstavlja dijadski proizvod<sup>20</sup> (dijada),  $\mathbf{I}$  je jedinični tenzor (za matematičke detalje videti knjigu Mušickog i Milića 1975, ili neki od standardnih matematičkih priručnika). Svaka od ovih jednačina predstavlja jedan od tri zakona održanja: mase<sup>21</sup> (3.2a), impulsa<sup>22</sup> (3.2b) i energije (3.2c). U gore navedenoj formi (3.2), sistem još uvek nije kompletan, obzirom da sadrži pet<sup>23</sup> skalarnih jednačina i šest nepoznatih veličina ( $\rho$ ,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$ ,  $P$ ,  $E$ ). Potrebno je dodati jednačinu koja povezuje pritisak sa drugim termodinamičkim veličinama. Za idealan gas, pritisak se može napisati u obliku:

$$P = (\gamma - 1)\rho e, \quad (3.3)$$

gde je  $\gamma = c_p/c_v$  odnos specifičnih toplota. Za idealni jednoatomski gas je  $\gamma = 5/3$ , dok za slučaj gasa sastavljenog od ultrarelativističkih čestica<sup>24</sup> važi  $\gamma = 4/3$ .

### Navije-Stoksove jednačine

U realnim fluidima postoji unutrašnje trenje koje proizvodi pojavu viskoznih sila. Efekat viskoznosti ogleda se u konverziji relativnih kretanja fluida u toplotu. Navije-Stoksove<sup>25</sup> jednačine su date u obliku:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.4a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v} + P\mathbf{I}) = \nabla \cdot \mathbf{\Pi}, \quad (3.4b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot [(\rho E + P)\mathbf{v}] = \nabla \cdot (\mathbf{\Pi}\mathbf{v}). \quad (3.4c)$$

gde je  $\mathbf{\Pi}$  tzv. *tenzor viskoznosti*, koji je karakteristika sredine. Za  $\mathbf{\Pi} = 0$ , Navije-

<sup>20</sup>Nekada se naziva još i tenzorski proizvod dva vektora i označava još sa  $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}\}$ ,  $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$  ili  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ .

<sup>21</sup>Jednačina kontinuiteta.

<sup>22</sup>Drugi Njutnov zakon kretanja.

<sup>23</sup>Iz jednačine 3.2b slede 3 skalarne jednačine, videti npr. u knjizi Toroa (Toro 2009).

<sup>24</sup>Može se pokazati da za adijabatski indeks kosmičkih zraka važi  $\gamma = \frac{\Gamma+1}{2}$  (Arbutina 2017), gde je  $\Gamma$  definisano jednačinom 2.3. Zanimljivo je da čestice sa strmijim spektrom ( $\Gamma = 3$ ) imaju adijabatski indeks  $\gamma = 5/3$ , kao u slučaju idealnog nerelativističkog gasa.

<sup>25</sup>*Claude-Louis Navier* (1785-1836) i *Sir George Gabriel Stokes* (1819-1903).

Stoksove jednačine se svode na Ojlerove.

Do prvog reda, tenzor viskoznosti mora biti linearna funkcija izvoda brzine, uz uslov da je jednak nuli prilikom rotacije fluida konstantnom ugaonom brzinom (Landau & Lifshitz 1987). Najopštiji tenzor ranga 2, koji zadovoljava gore navedene uslove, može se napisati kao:

$$\mathbf{\Pi} = \eta \left[ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} \right] + \xi(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I}. \quad (3.5)$$

Parametar  $\eta$  množi devijatorski deo tenzora i opisuje dinamičku viskoznost. Parametar  $\xi$  daje jačinu dijagonalnog dela i predstavlja zapreminsku viskoznost. U opštem slučaju  $\eta$  i  $\xi$  mogu biti funkcije lokalnih karakteristika fluida, kao što su gustina, temperatura itd.

U slučaju nestišljivih fluida ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ), tenzor viskoznosti (3.5) se svodi na:

$$\mathbf{\Pi} = \eta [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T], \quad (3.6)$$

a jednačina (3.3b) se može napisati u kompaktnijem obliku:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3.7)$$

gde je uvedena veličina *kinematička viskoznost* definisana kao  $\nu = \eta/\rho$ , dok izvod na levoj strani predstavlja Lagranžov izvod  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$ . Jednačina (3.7) pokazuje da se kretanje pojedinačnih elemenata fluida dešava usled postojanja gradijenta pritiska i viskoznih sila. Ova zasebna jednačina se u literaturi često navodi kao Navije-Stoksova jednačina, dok mi ovaj termin koristimo za sistem jednačina 3.4.

### 3.1.2 Udarni talasi

U ovom poglavlju dajemo vrlo kratak uvod u fizičke procese vezane za hidrodinamičke udarne talase. Detaljnije razmatranje pomenute tematike u sklopu ove disertacije nije ni potrebno, s obzirom na to da već postoje izuzetno detaljni i mate-

matički konzistentni pregledi opštijih udarnih talasa u idealnoj<sup>26</sup> MHD u knjigama Kabana, Šua, Hudbluda i Poca (Cabannes 1970, Shu 1992, Goedbloed & Poedts 2010).

Važna osobina MZM i fluida uopšte je da se u njima mogu pojaviti udarni talasi u kojima gustina, brzina, temperatura i entropija trpe konačne skokove. U slučaju Ojlerovih jednačina, ovi udarni talasi su pravi matematički diskontinuiteti. Zanimljivo je da se udarni talasi mogu javiti čak i iz početnih uslova koji ne sadrže diskontinuitete, što je tipična osobina hiperboličkih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Akustički talasi sa dovoljno velikim amplitudama će trpeti talasno ustrmljavanje (zbog pojave da nešto topliji talasi putuju brže od hladnijih), koje može rezultirati udarnim talasom. U astrofizici veći praktični značaj ipak imaju udarni talasi koji nastaju prilikom supersoničnog sudara fluida, gde se kinetička energija nepovratno pretvara u toplotnu energiju, što je takođe praćeno porastom entropije.

U slučaju fluida bez viskoznosti (opisanog Ojlerovim jednačinama) diferencijalni oblik jednačina fluida ne važi na diskontinuitetu udarnog talasa, dok integralna forma i dalje važi. Drugim rečima, to znači da fluks mase, impulsa i energije mora ostati neprekidan na udarnom talasu, dok vrednosti pritiska, temperature, gustine i td. imaju prekid. Uz pretpostavku da udarni talas povezuje dva različita, konstantna stanja, dolazimo do tzv. Rankin-Igonoovih uslova skoka (videti npr. Arbutina 2017). Ako izaberemo referentni sistem u kome udarni talas miruje ( $v_s = 0$ ) i označimo stanje ispred udarnog talasa sa  $(v_1, P_1, \rho_1)$ , i stanje iza udarnog talasa sa  $(v_2, P_2, \rho_2)$  (pri čemu važi  $v_1, v_2 > 0$ ), imaćemo:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad (3.8a)$$

$$\rho_1 v_1^2 + P_1 = \rho_2 v_2^2 + P_2, \quad (3.8b)$$

$$(\rho_1 E_1 + P_1)v_1 = (\rho_2 E_2 + P_2)v_2. \quad (3.8c)$$

---

<sup>26</sup>Ovde se termin *idealna* koristi kako bi se, pre svega, ukazalo na to da je elektroprovodnost beskonačna i da Omov zakon u ovom slučaju postaje veoma jednostavan.

Za idealan gas, prisustvo udarnog talasa zahteva da gas ispred udarnog talasa putuje prema diskontinuitetu supersoničnom brzinom tj.  $v_1 > c_1$ , gde je  $c_1^2 = \gamma P_1/\rho_1$  brzina zvuka ispred udarnog talasa. Mahov broj:

$$M_S = \frac{v_1}{c_1}, \quad (3.9)$$

je mera jačine udarnog talasa ( $M_S > 1$ ). Udarni talas usporava fluid i kompresuje ga, pa važi  $v_2 < v_1$  i  $\rho_2 > \rho_1$ . On takođe zagreva gas, tako da važi  $T_2 > T_1$ , i na ovaj način gas iza udarnog talasa pod određenim uslovima može postati subsoničan sa  $v_2/c_2 < 1$ . Transformacijom jednačina (3.8), možemo izraziti relativne skokove termodinamičkih veličina (gustine, temperature, entropije itd) u funkciji Mahovog broja, na primer:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_S^2}{(\gamma - 1)M_S^2 + 2}. \quad (3.10)$$

### 3.1.3 Hidrodinamičke nestabilnosti

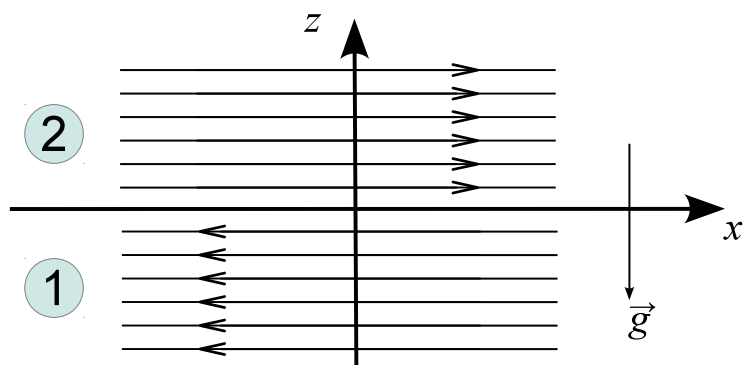
Jednačine hidrodinamike, uprkos njihovoj složenosti, dozvoljavaju neke jednostavnije tipove kretanja fluida kao stacionarna rešenja. Ovakva dinamika fluida, međutim, može biti realizovana samo za određene opsege parametara koji ih karakterišu. Izvan ovih granica, oni se ne mogu realizovati. Razlog za ovo leži u njihovoj inherentnoj nestabilnosti, tj. u nemogućnosti da se odupru malim perturbacijama kojima je izložen fizički sistem. Ovakve male perturbacije često imaju tendenciju brzog rasta.

U astrofizici su posebno značajne Kelvin-Helmholcova<sup>27</sup> (*Kelvin-Helmholtz*) i Rejli-Tejlorova<sup>28</sup> (*Rayleigh-Taylor*) nestabilnost. One će biti kratko diskutovane u ovom poglavlju. Za detalje pogledati npr. knjige Čandrasekara, Šua, Pringla i Kinga, Kundua i saradnika (Chandrasekhar 1961, Shu 1992, Pringle & King 2007, Kundu et al. 2016).

**Stabilnost laminarnog toka fluida.** Osnovna, linearna analiza stabilnosti fluida pretpostavlja postojanje poremećaja koji se matematički mogu prikazati sinusnim

<sup>27</sup> William Thomson, I Baron Kelvin (1824-1907), Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894).

<sup>28</sup> John William Strutt, III Baron Rayleigh (1842-1919), Sir Geoffrey Ingram Taylor (1886-1975).



Slika 6: Geometrija laminarnog toka fluida. (Izvor: Springel 2016)

funkcijama. Na primer, polje brzine fluida čiji je tok paralelan  $x$ -osi i brzina se menja duž  $z$ -ose je  $\mathbf{U} = U(z)\mathbf{e}_x$ , gde je  $\mathbf{e}_x$  jedinični vektor  $x$ -ose. Na ovo osnovno stanje fluida superponiramo poremećaj u obliku:

$$u(x, y, z, t) = \hat{u}(z) \exp(ikx + imy + \sigma t) = \hat{u}(z) \exp[i(\mathbf{K}\mathbf{r} - \omega t)], \quad (3.11)$$

gde je  $\hat{u}(z)$  kompleksna amplituda,  $\mathbf{K} = (k, m, 0)$  talasni vektor poremećaja,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  vektor položaja i  $\omega$  ugaona frekvencija poremećaja. Matematički postupak koji uključuje ispitivanje Furijeovih<sup>29</sup> komponenti oblika (3.11) naziva se *metoda normalnih modova* (videti npr. Kundu et al. 2016).

Razmatramo proticanje fluida duž pravca  $x$ -ose, pri čemu donja faza fluida  $z < 0$  (označena kao „1”) ima brzinu  $v_1$  i gustinu  $\rho_1$ , dok se gornja faza fluida  $z > 0$  (označena kao „2”) kreće brzinom  $v_2$  i ima gustinu  $\rho_2$  (brzine ne moraju nužno imati suprtone smerove). Dodatno može postojati homogeno gravitaciono polje  $\vec{g}$  u negativnom smeru  $z$ -ose, kao na slici 6. Stabilnost proticanja fluida analiziramo primenom metode normalnih modova. U tom smislu posmatramo nestišljivi i potencijalni<sup>30</sup> tok fluida izložen malim perturbacijama za koje je  $z$ -koordinata kontaktne površine između dve faze fluida opisana funkcijom  $z = \xi(x, t)$ , pri čemu za  $|z| \rightarrow \infty$  fluid nije perturbovan.

Kod potencijalnih proticanja delići fluida se ne obrću, odakle sledi da se vektorsko

<sup>29</sup>Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

<sup>30</sup>Zavisno od toga da li se pri strujanju fluida stvaraju vrtlozi, razlikujemo vrtložno i potencijalno strujanje. Kod potencijalnog strujanja se polje brzine može prikazati gradijentom skalarne funkcije (skalarnog potencijala brzine).

polje brzine perturbovanog fluida može predstaviti kao gradijent skalarne funkcije, odnosno  $\mathbf{v} = \nabla \cdot \phi$ , gde je skalarna funkcija  $\phi$  tzv. *potencijal brzine* za koju vazi  $\tilde{\phi} = vx + \phi$ , uz uslov  $\nabla^2 \phi = 0$  i  $\nabla^2 \tilde{\phi} = 0$ , gde je  $\tilde{\phi}$  ukupan potencijal brzine (osnovni fluid + perturbacije). Može se pokazati da potencijal brzine zadovoljava sledeću jednakost (Pringle & King 2007):

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \cdot \tilde{\phi})^2 + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.}, \quad (3.12)$$

koja predstavlja poznatu *Bernulijevu jednačinu*<sup>31</sup>. Primenom Bernulijeve jednačine dobija se veza između odgovarajućih veličina na granici dve faze fluida (Kundu et al. 2016):

$$\rho_1 \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + g\xi \right) = \rho_2 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + g\xi \right) \quad (3.13)$$

U skladu sa ranije opisanom metodom normalnih modova, za  $\mathbf{K} = (k, 0, 0)$ , pretpostavljamo da za perturbovane veličine važi:

$$\phi_1(x, z, t) = \hat{\phi}_1(z) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (3.14a)$$

$$\phi_2(x, z, t) = \hat{\phi}_2(z) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (3.14b)$$

$$\xi(x, z, t) = \hat{\xi}(z) \exp[i(kx - \omega t)], \quad (3.14c)$$

gde su  $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2$  i  $\hat{\xi}$  kompleksne amplitude. Posle niza algebarskih transformacija, dobijamo vezu:

$$\omega^2(\rho_1 + \rho_2) - 2\omega k(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2) + k^2(\rho_1 v_1^2 + \rho_2 v_2^2) + (\rho_2 - \rho_1)kg = 0, \quad (3.15)$$

koja predstavlja *disperzionu relaciju* za perturbacije u fluidu. Detaljno izvođenje opisano je u knjizama Pringla i Kinga, i Kundua i saradnika (Pringle & King 2007, Kundu et al. 2016). Dalje ćemo razmatrati ovu disperzionu jednačinu za neke specijalne slučajeve.

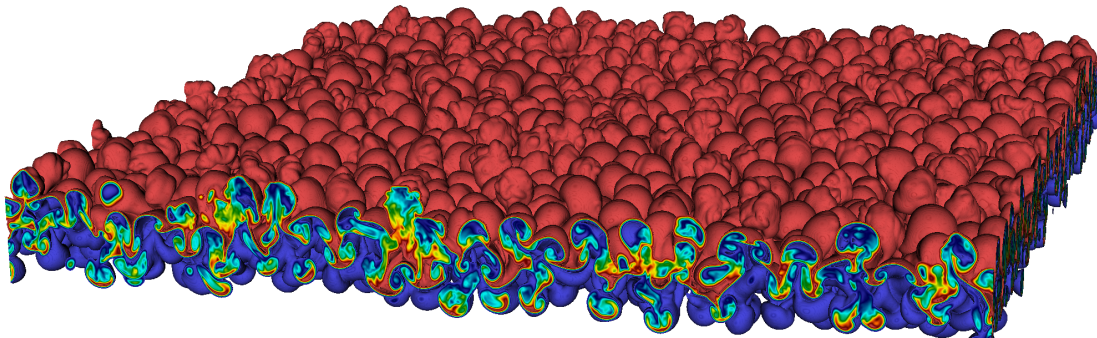
---

<sup>31</sup>*Daniel Bernoulli* (1700-1782).

**Rejli-Tejlorova nestabilnost.** Razmotrićemo slučaj fluida koji miruje, odnosno  $v_1 = v_2 = 0$ . Disperziona jednačina se u ovom slučaju svodi na:

$$\omega^2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)kg}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (3.16)$$

Vidimo da za  $\rho_2 > \rho_1$ , tj. u slučaju da se gušći fluid nalazi iznad ređeg fluida, postoje nestabilna rešenja sa  $\omega^2 < 0$ . Ovo je takozvana Rejli-Tejlorova nestabilnost.



Slika 7: Simulacija fluida u kome se javlja Rejli-Tejlorova nestabilnost u kasnijoj fazi evolucije, primenom 3D koda Miranda. (Izvor: Lawrence Livermore National Laboratory)

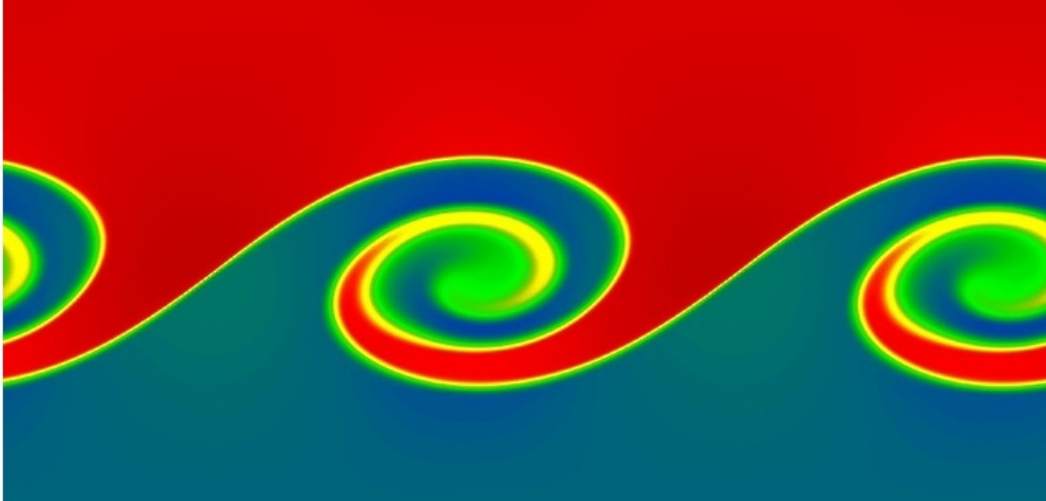
Javlja se usled sile potiska i dovodi do podizanja lakšeg fluida koji se nalazi ispod težeg (ili ekvivalentno, spuštanje gušćeg fluida u ređi), kao što je prikazano u simulaciji na slici 7. Slobodna energija koja se oslobađa ovom prilikom je gravitaciona potencijalna energija. Primetimo takođe da su za idealni fluid male talasne dužine nestabilne i ovi modovi najbrže rastu. U slučaju da važi  $\rho_1 > \rho_2$ , granična površina je stabilna i perturbacije će dovesti samo do oscilacija.

**Kelvin-Helmholcova nestabilnost.** Ako je gravitaciono polje zanemarljivo,  $g \approx 0$ , imamo slučaj čistog laminarnog kretanja. U ovom slučaju, rešenja disperzione jednačine data su kao:

$$\omega_{1/2} = \frac{k(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2)}{\rho_1 + \rho_2} \pm ik \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{\rho_1 + \rho_2} |v_1 - v_2|. \quad (3.17)$$

Zanimljivo je da u idealnom fluidu postoji imaginarni rastući mod za svako  $|v_1 - v_2| > 0$ . To znači da će mala talasna perturbacija na površini između dva fluida imati brzi rast u veće talase koji imaju karakterističan oblik u slučaju Kelvin-Helmholcovih

nestabilnosti. U nelinearnom režimu dostignutom u kasnijoj evoluciji ove nestabilnosti, dolazi do uvijanja talasa i stvaranja vrtložnih struktura, kao na slici 8. Kako nestabilnost raste najbrže na malim skalama (veliko  $k$ ), talasi postaju sve veći i veći tokom vremena.



Slika 8: Karakteristični talasi Kelvin-Helmholcove nestabilnosti koji nastaju u laminarnom toku fluida. (Izvor: Springel 2016)

Kelvin-Helmholcova nestabilnost praktično pokazuje da je svaki oštar gradijent brzine u laminarnom toku nestabilan u neprekidnom toku fluida, što čini ovu nestabilnost važnom za stvaranje turbulencija. Pod određenim uslovima, neki modovi mogu biti stabilni. Ovo se dešava ako, na primer, razmatramo laminarno kretanje sa  $v_1 \neq v_2$  u gravitacionom polju  $g > 0$ . U tom slučaju disperziona relacija ima rešenja:

$$\omega = \frac{k(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2)}{\rho_1 + \rho_2} \pm \frac{\sqrt{-k^2 \rho_1 \rho_2 (v_1 - v_2)^2 - (\rho_1 + \rho_2)(\rho_2 - \rho_1)kg}}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (3.18)$$

Stabilnost je moguća ako su ispunjena dva uslova. Prvo, potrebno je da važi  $\rho_1 > \rho_2$ , tj. lakši fluid mora biti iznad težeg (jer bi u suprotnom imali Rejli-Tejlorovu nestabilnost). Drugo, uslov:

$$(v_1 - v_2)^2 < \frac{(\rho_1 + \rho_2)(\rho_1 - \rho_2)g}{k\rho_1\rho_2}, \quad (3.19)$$

mora biti ispunjen. U poređenju sa običnom Kelvin-Helmholcovom nestabilnošću



bez gravitacionog polja, vidimo da su dovoljno male talasne dužine stabilne ispod neke vrednosti praga talasne dužine. Ovaj prag se pomera ka manjim skalama kako smicanje raste.

Rejli-Tejlorova i Kelvin-Helmholcova nestabilnost nisu jedine nestabilnosti koje se mogu javiti u idealnom fluidu. Na primer, postoji takođe i takozvana Rihtmajer-Meškova (eng. *Richtmyer-Meshov*) nestabilnost, koja se dešava kada se dodirna površina između dva fluida iznenada ubrza, na primer zbog prolaska udarnog talasa. Kod gasova sa sopstvenom gravitacijom, javlja se Džinsova nestabilnost (eng. *Jeans*), koja nastaje kada unutrašnji pritisak gasa nije dovoljno veliki da spreči pozitivnu perturbaciju gustine od rasta i kolapsa usled sopstvenog gravitacionog privlačenja. Ovaj tip nestabilnosti je posebno važan kod rasta kosmičkih struktura i procesu formiranja zvezda. Ako na dinamiku plazme utiču i spoljašnji izvori toplote (npr. polje zračenja), moguće su još mnoge nestabilnosti. Na primer, termalna nestabilnost se javlja kada je funkcija radijativnog hlađenja obrnuto proporcionalna temperaturi. Ako usled hlađenja temperatura negde padne, stopa hlađenja ovog hladnijeg delića će se povećati tako da je hlađenje još brže. Na ovaj način hladni oblaci mogu kolapsirati – što je osnov za nastanak galaksija, a i zvezda.

## 3.2 Ojlerova hidrodinamika

Mnoge fizičke teorije opisuju se pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačina, uključujući neke od osnovnih zakona vezanih za dinamiku fluida (Ojlerove i Navije-Stoksove jednačine), elektromagnetizam (Maksvelove jednačine) ili opštu teoriju relativnosti/gravitacije (Ajnštajnovе jednačine polja). U opštem slučaju, PDJ opisuju veze između parcijalnih izvoda neke nepoznate funkcije po nekoliko njenih nezavisnih promenljivih. Za razliku od običnih diferencijalnih jednačina (ODJ), ne postoji jedinstvena teorija za PDJ. Naime, postoje različiti tipovi PDJ i svaki od njih karakterišu neke specifične osobine (za detalje videti Šćepanović, Knežević-Miljanović & Protić 2008, Renardy & Rogers 2004).

U numeričkom proučavanju fluida mogu se koristiti dva pristupa; jedan u kome se prate promene fizičkih veličina kroz vreme u unapred zadatim fiksnim tačkama, pomoću kojih se diskretizuje fluid (Ojlerov pristup) i drugi, u kome se iste promene

prate u ograničenom broju pokretnih delića fluida (Lagranžov pristup). Prvi pristup, koji će biti opisan u ovom delu disertacije, vezuje se za metode koje zahtevaju unapred definisan raspored računskih tačaka u prostoru u vidu računске mreže, dok se kod numeričkih metoda zasnovanih na Langranžovom pristupu ne zahteva definisanje računске mreže (eng. *Mesh-free methods*).

Ojlerove jednačine, koje će biti proučavane u ovom delu disertacije, spadaju u takozvane *hiperboličke zakone održanja*. One su nelinearne zbog toga što sadrže nelinearne članove po nepoznatim funkcijama i (ili) njihove parcijalne izvode. Naglašavamo da potpuna i matematički stroga karakterizacija različitih tipova PDJ prevazilazi okvire ove disertacije, te se stoga zadržavamo na osnovnom nivou potrebnom za dalje razumevanje korišćenih numeričkih metoda.

### 3.2.1 Metode za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina

Za PDJ nije moguće dati opštu metodu koja rešava jednako dobro sve tipove jednačina. Različiti problemi zahtevaju drugačiji pristup rešavanju i ponekad je za određene vrste PDJ potrebno osmisliti metod rešavanja baziran na više pojedinačnih metoda.

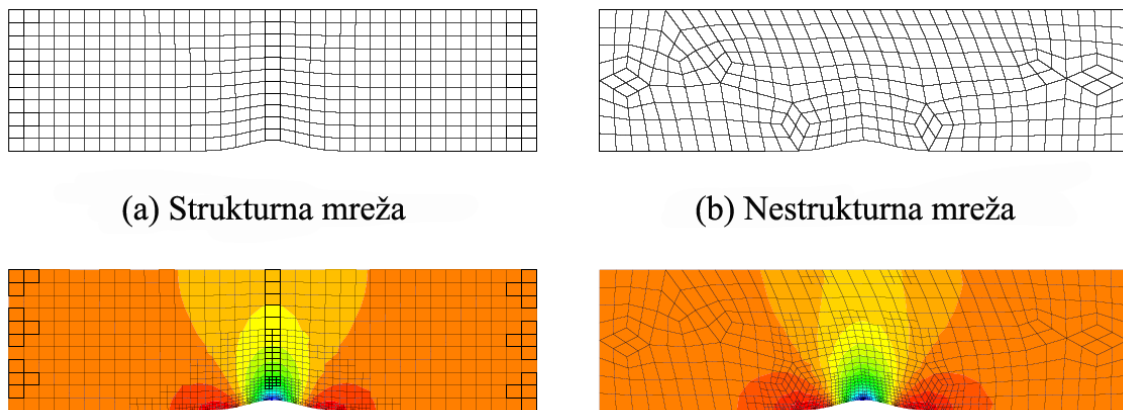
Prvi korak u numeričkom rešavanju PDJ predstavlja tzv. *diskretizacija*, pri čemu prvenstveno mislimo na prostornu diskretizaciju<sup>32</sup>. Mrežu nazivamo *strukturnom* ako svi unutrašnji čvorovi pripadaju istom broju ivica i ako svaka ćelija ima isti broj strana, u suprotnom mreža je *nestrakturna* (Dotlić 2015; videti sliku 9). Naveli smo strožu matematičku definiciju iz doktorske disertacije Milana Dotlića (Dotlić 2015), iako se u literaturi često sreću različita tumačenja i podele mreža. Specijalna i često korišćena vrsta strukturnih mreža su pravougaone mreže.

Ovde navodimo neke poznate klase numeričkih metoda koje se, između ostalog, koriste i u rešavanju astrofizičkih problema.

**Metoda konačnih razlika.** Osnovna ideja ove metode je da se parcijalni izvodi u PDJ aproksimiraju (približno predstavljaju) kao konačni priraštaji koristeći vred-

---

<sup>32</sup>Vremenska diskretizacija podrazumeva primenu nekog od standardnih algoritama za vremensku evoluciju sistema opisanih diferencijalnim jednačinama poput metoda Runge-Kuta (eng. *Runge-Kutta*).



Slika 9: Osnovni tipovi prostorne diskretizacije na računskim mrežama koje se koriste u simulacijama dinamike fluida: a) strukturna i b) nestrukturna. Slike u donjem delu predstavljaju konture pritiska na datim mrežama, iz simulacije Jua sa saradnicima. (Izvor: Yu et al. 2017)

nosti funkcija u diskretnim tačkama. Ova aproksimacija se obično radi na pravilnoj Dekartovoj<sup>33</sup> računskoj mreži (eng. *mesh*, *grid*), ili nekoj drugoj vrsti strukturne mreže (npr. polarne).

**Metoda konačnih zapremina.** Ova metoda se često smatra potklasom metode konačnih razlika. Slično metodi konačnih razlika, ovde je takođe domen rešavanja PDJ podeljen na konačan broj diskretnih tačaka okruženih odgovarajućim malim *konačnim zapreminama*. Ova metoda je posebno značajna za rešavanje hiperboličkih zakona održanja pa ćemo je stoga detaljnije razmotriti u narednim poglavljima.

**Spektralna metoda.** Spektralne metode su moćan alat za rešavanje PDJ. Rešenje je predstavljeno kao linearna kombinacija funkcija i na taj način se PDJ transformišu u algebarske jednačine ili ODJ. Ovakav pristup često podrazumeva primenu Furijeve transformacije. Međutim, spektralne metode daju dobra rešenja samo za glatke funkcije. U slučajevima kada se javljaju diskontinuiteti poput udarnih talasa, primena spektralnih metoda se ne preporučuje. Čak i prekidi u nekim izvodima funkcija višeg reda mogu pokvariti konvergenciju spektralnih metoda.

<sup>33</sup>Rene Dekart, *René Descartes* (1596-1650), nekada se umesto „Dekartov” koristi pridev „kartezijski”, od njegovog latinizovanog imena *Cartesius*.

**Metoda linija.** Ovaj pristup nije po svojoj prirodi u potpunosti diskretan, naime svi izvodi izuzev jednog se aproksimiraju pomoću konačnih priraštaja. Izvod koji nije aproksimiran je ujedno jedini preostali izvod pa dobijeni problem predstavlja skup ODJ. Ova metoda se najčešće koristi za vremenski zavisne probleme, a izvod koji ne podleže aproksimaciji konačnim priraštajem je upravo izvod po vremenu. U takvim problemima se diskretizuje prostor u vidu skupa od  $N$  tačaka  $x_i$  i za svaku od ovih tačaka dobijamo ODJ koja opisuje vremensku evoluciju funkcije u ovoj tački. PDJ je na ovaj način transformisana u sistem od  $N$  jednačina koje predstavljaju ODJ. Na primer, razmotrimo rešavanje jednačine prenosa toplote u 1D slučaju:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.20)$$

gde  $u(x, t)$  predstavlja funkciju temperature, a  $\lambda$  koeficijent toplotne provodljivosti. Ako prostor po  $x$ -osi podelimo na skup od  $N$  tačaka na međusobnoj udaljenosti  $h$ , dolazimo do sistema  $N$  jednačina:

$$\frac{du}{dt} + \lambda \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{h^2} = 0. \quad (3.21)$$

Ove jednačine se dalje mogu integraliti u vremenu kao ODJ (npr. primenom metode Runge-Kuta). Važno je napomenuti da ovakav pristup nije uvek nužno numerički stabilan i da neki problemi zahtevaju predstavljanje izvoda asimetrično konačnim priraštajima (za detalje videti knjigu Šisera, Schiesser 1991).

**Metoda konačnih elemenata.** Prostorni domen problema se deli na ćelije (elemente) proizvoljnog oblika. Rešenje je onda predstavljeno u obliku neke jednostavne, obično polinomske funkcije na pojedinačnim elementima. Na ovaj način je izvršena transformacija PDJ u algebarski problem koji podrazumeva određivanje koeficijenata u ovim jednostavnim funkcijama. Glavna razlika ovog pristupa u odnosu na metodu konačnih razlika je u tome što se ovde ne vrši aproksimacija izvoda nepoznate funkcije koja se javlja u ODJ već aproksimacija nepoznate funkcije tj. polja pomeranja svakog konačnog elementa pomoću interpolacionih funkcija.

### 3.2.2 Diskretizacija: osnovni koncepti

Tematika kojom se bavimo zahteva upotrebu numeričkih metoda za rešavanje PDJ. Numeričke metode omogućavaju prelazak sa kontinualnog skupa veličina, opisanog pomoću PDJ, na konačan skup diskretnih vrednosti. Prvi korak je diskretizacija domena PDJ u konačan skup tačaka ili zapremina pomoću već uvedenog koncepta računске mreže. Pomenuta diskretizacija kao rezultat daje diskretne vrednosti na mreži. Kod metoda konačnih razlika u tačkama na mreži nalaze se vrednosti određenih parametara fluida. Metod konačnih zapremina posmatra ove diskretne vrednosti kao usrednjene parametre fluida na odgovarajućim konačnim zapreminama. Nas najviše zanima drugi pristup, ali se, u svrhu uvođenja nekih osnovnih konceptata numeričkih metoda, takođe bavimo i konačnim razlikama.

Neka je data dovoljno glatka<sup>34</sup> funkcija  $f(x)$ . Tada korišćenjem dobro poznate Tejlorove teoreme (negde se navodi i kao Tejlorov razvoj ili red) možemo naći vrednosti funkcije  $f(x)$  u proizvoljnim susednim tačkama  $x_0 + \Delta x$  tačke  $x = x_0$ , ako znamo  $f(x_0)$  i sve njene izvode  $f^{(k)}(x)$  u  $x = x_0$ , što predstavljamo kao:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_k \frac{(\Delta x)^k}{k!} f^{(k)}(x_0). \quad (3.22)$$

Ograničavanjem broja članova u Tejlorovom razvoju, možemo dobiti aproksimativne vrednosti  $f(x_0 + \Delta x)$  i izvoda  $f^{(k)}(x_0)$ . Posmatrajmo sada funkciju  $f(x)$  i tri ravnomerno raspoređene tačke  $x_0 - \Delta x$ ,  $x_0$  i  $x_0 + \Delta x$ . Kao ilustraciju, izvešćemo tri aproksimacije izvoda funkcije  $f(x)$  u tački  $x_0$ . Zanimarivanjem članova trećeg i višeg reda,  $O(\Delta x^3)$ , možemo napisati:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f^{(1)}(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f^{(2)}(x_0) + O(\Delta x^3), \quad (3.23a)$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f^{(1)}(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f^{(2)}(x_0) + O(\Delta x^3). \quad (3.23b)$$

Zanimarivanjem članova drugog reda u jednačini (3.23a) dolazimo odmah do apro-

---

<sup>34</sup>Podrazumevamo da ima neprekidne izvode do određenog reda.

ksimacije prvog izvoda  $f^{(1)}(x)$  funkcije  $f(x)$  u tački  $x = x_0$ :

$$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (3.24)$$

Ovo je aproksimacija prvog reda. Vodeći član<sup>35</sup> u preostalom delu sadrži članove  $\Delta x$  sa eksponentom  $k = 1$ . To je takozvana *jednostrana* aproksimacija prvog izvoda funkcije  $f(x)$ , koja se obično naziva aproksimacija konačnih razlika *unapred*, zbog činjenice da su za računanje korišćene tačke  $x_0$  (u kojoj tražimo izvod) i njen desni sused  $x_0 + \Delta x$ .

Iz jednačine (3.23b), na sličan način dolazimo do aproksimacije konačnih razlika *unatrag*:

$$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (3.25)$$

Oduzimanjem jednačine (3.23b) od (3.23a) dobijamo:

$$f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.26)$$

Ovo je *centralna* (nekad se naziva i *simetrična*) aproksimacija konačnih razlika za  $f^{(k)}(x_0)$ , drugog reda tačnosti (slika 10). Centralna aproksimacija se može dobiti i kao srednja vrednost aproksimacija unapred i unazad. Pokazaćemo da je u nekim problemima jako bitno da li se uzima neka od jednostranih ili centralna aproksimacija.

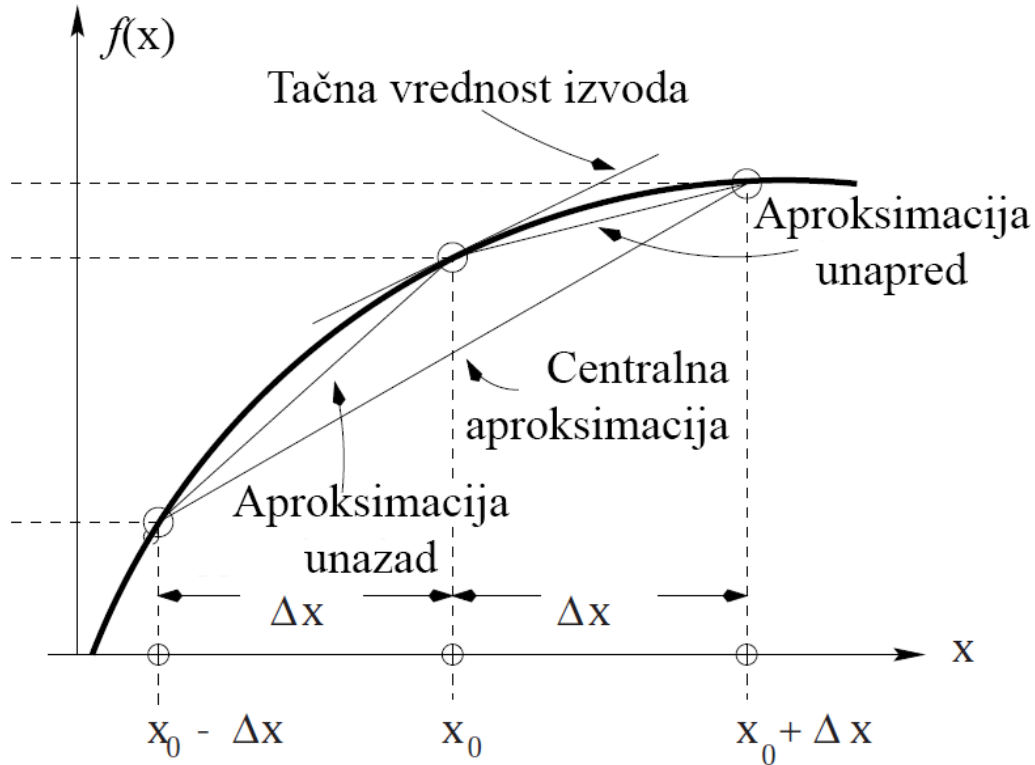
### 3.2.3 Slučaj jednodimenzione advekcije

Advekcija predstavlja prenošenje neke supstance u fluidu horizontalnim kretanjem (tokom) fluida. Hiperboličke jednačine prvog reda su posebno korisne za uvođenje numeričkih postupaka koji se sreću i kod složenijih nelinearnih zakona održanja (LeVeque 2004, Toro 2009). Jednodimenziona (1D) jednačina advekcije predstavlja najjednostavniju jednačinu ovog tipa i data je u obliku:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.27)$$

---

<sup>35</sup>Dodatnim zanemarivanjem članova drugog reda u jednačini (3.23a) dobija se  $O(\Delta x^2)$ , koje deljenjem obe strane sa  $\Delta x$  prelazi u  $O(\Delta x)$ .



Slika 10: Aproksimacije konačnih razlika za prvi izvod funkcije  $f(x)$  u tački  $x_0$ : unazad, centralna i unapred. (Izvor: Toro 2009)

gde je  $u = u(x, t)$  funkcija promenljivih  $x$  i  $t$ , dok je  $v$  konstantni parametar. Može se lako proveriti da  $u(x, t) = q(x - vt)$  predstavlja rešenje diferencijalne jednačine (3.27) za proizvoljnu funkciju  $q(x)$ . Pomenuta funkcija  $q(x)$  ima ulogu početnog uslova  $u(x, t = 0) = q(x)$  a rešenje u proizvoljnom trenutku  $t$  predstavlja identičnu kopiju funkcije  $q(x)$  transliranu za  $vt$  u smeru  $x$ -ose. U ovom delu ćemo se baviti numeričkim rešavanjem 1D jednačine advekcije i uvešćemo bitan parametar u hidrodinamičkim simulacijama, *Kurant*<sup>36</sup>-*Fridrih*<sup>37</sup>-*Levi*<sup>38</sup> (*KFL*, eng. *CFL*) kriterijum stabilnosti.

Jednačinu (3.27) diskretizujemo u prostornom domenu  $[a, b]$  na  $x$ -osi, pri čemu koristimo pravilnu mrežu sastavljenu od  $M + 1$  tačaka  $x_0 = a, x_1, \dots, x_{M-1}, x_M = b$  na međusobnom rastojanju  $\Delta x$ , gde važi:

$$\Delta x = \frac{b - a}{M}. \quad (3.28)$$

<sup>36</sup>Richard Courant (1888-1972).

<sup>37</sup>Kurt Otto Friedrichs (1901-1982).

<sup>38</sup>Hans Lewy (1904-1988).

Funkcija  $u(x, t)$  zavisi od vremena, pa za veličinu vremenskog koraka uzimamo  $\Delta t$ . Koristićemo notaciju  $x_i = i\Delta x$  i  $t^n = n\Delta t$ , gde  $i = 0, \dots, M$  ( $M$  je prirodan broj,  $M > 0$ ), a  $n$  predstavlja redni broj vremenskog koraka u integraciji. Diskretna vrednost funkcije  $u(x, t)$  u  $(i\Delta x, n\Delta t)$  biće označena sa  $u_i^n \equiv u(i\Delta x, n\Delta t) \equiv u(x_i, t^n)$ .

Numeričkim rešavanjem jednačine (3.27), polazimo od skupa poznatih diskretnih vrednosti funkcije  $u_i^n$ ,  $i = 0, \dots, M$  u vremenskom trenutku sa rednim brojem  $n$  i dobijamo novi skup diskretnih vrednosti  $u_i^{n+1}$ ,  $i = 0, \dots, M$  u narednom vremenskom trenutku  $n + 1$ . Krajnje tačke  $u_0^n$  i  $u_M^n$  određene su tzv. *graničnim uslovima* i radi jednostavnosti pretpostavljamo da su oni poznati u svakom vremenskom trenutku.

Primenom diskretizacije (videti poglavlje 3.2.2) i definicije parcijalnog izvoda, možemo napisati aproksimaciju izvoda funkcije  $u(x, t)$  po vremenu u tački  $(x_i, t^n)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \quad (3.29)$$

što predstavlja aproksimaciju unapred (prvog reda). Zatim na sličan način možemo izvod funkcije  $u(x, t)$  po prostornoj koordinati predstaviti centralnom aproksimacijom (drugog reda):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x}. \quad (3.30)$$

Zamenom izraza (3.29) i (3.30) u advekcionu jednačinu (3.27) dobija se:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (3.31)$$

koja predstavlja diskretni analogon pomenutoj PDJ. Na ovaj način je diferencijalna jednačina zamenjena jednačinom sastavljenom od konačnih razlika. Kako su vrednosti u svim tačkama domena, u prethodnom  $n$ -tom vremenskom trenutku poznati, može se dobiti rešenje u vremenskom trenutku  $n + 1$ :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2}c (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad (3.32)$$

gde smo uveli:

$$c = \frac{a\Delta t}{\Delta x} = \frac{a}{\Delta x / \Delta t}, \quad (3.33)$$



bezdimezionalnu veličinu poznatu kao KFL broj<sup>39</sup> (Courant, Friedrichs & Lewy 1928). Ovaj parametar predstavlja odnos dve brzine: brzine talasa  $a$  u advekcijonj jednačini i brzine mreže  $\Delta x/\Delta t$  određene diskretizacijom prostornog domena i izborom vremenskog koraka. Formula (3.32) predstavlja *eksplicitni* postupak za evoluciju sistema u vremenu i rezultat je aproksimacije konačnim razlikama prvog i drugog reda. Iako izgleda matematički korektno zasnovan, ispostavlja se da je ovaj postupak *bezuslovno nestabilan* (eng. *unconditionally unstable*, videti Toro 2009) i praktično neupotrebljiv u praksi. Razlog je pojava jakih oscilatornih grešaka u numeričkom rešenju koje se pojačavaju tokom vremena.

Objašnjenje za ovakvo ponašanje numeričkog postupka (3.32) matematički se može dokazati primenom *fon Nojmanove*<sup>40</sup> analize stabilnosti (Toro 2009). Detaljna analiza ove teorije izlazi izvan okvira disertacije pa ćemo se zadržati samo na kratkom objašnjenju fizičkih uzroka koji dovode do pomenutih numeričkih teškoća. Navodimo da je glavni problem u tome što informacija (svaka tačka je advektovana od početne koordinate  $x_0$  do nove  $x_n = vt + x_0$ ) putuje u smeru kretanja fluida (Springel 2016). Međutim, jednačina (3.32) za ažuriranje vrednosti  $u_i$  koristi položaje ispred  $u_{i+1}$  (eng. *upstream*) i iza  $u_{i-1}$  (eng. *downstream*) u odnosu na onaj do kog je informacija stigla. Ispostavlja se da, ukoliko je  $a > 0$ , jednostrana aproksimacija prostornog izvoda unazad (prvog reda) daje bolje rešenje. Umesto jednačine (3.30) tada koristimo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}, \quad (3.34)$$

i dobijamo:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c (u_i^n - u_{i-1}^n). \quad (3.35)$$

Sada su izbegnuti problemi sa numeričkim nestabilnostima. Ovaj postupak je stabilan ako KFL broj uzima vrednosti između nule i jedinice, odnosno *uslovno* je stabilan za  $0 \leq c \leq 1$ . U literaturi se sreće i termin KFL uslov stabilnosti za vremenski korak (Courant, Friedrichs & Lewy 1928), koji se u ovom slučaju svodi na  $\Delta t \leq \Delta x/a$ .

Iako uveden na osnovnom matematičkom nivou, KFL parametar igra bitnu ulogu u složenijim, višedimezionalnim simulacijama. Za većinu algoritama u kodu PLUTO,

<sup>39</sup>Nekada se naziva i samo *Kurantov* broj.

<sup>40</sup>*John von Neumann* (1903-1957).

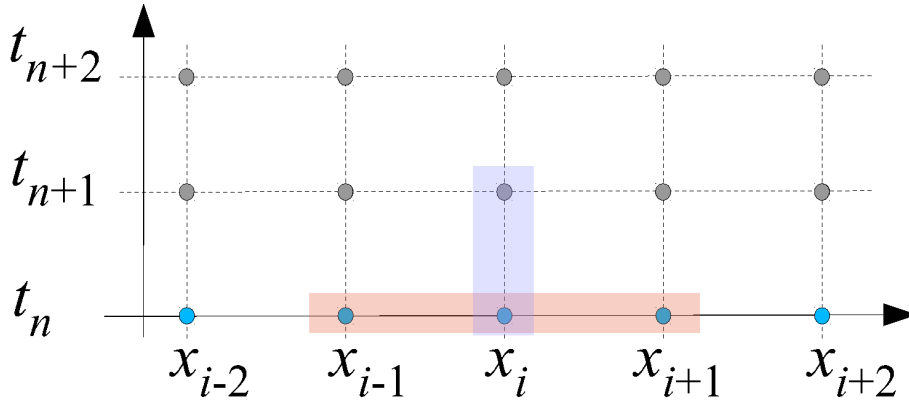
koristimo  $c \leq \frac{1}{N_{\text{dim}}}$ , gde je  $N_{\text{dim}} \in \{1, 2, 3\}$  broj prostornih dimenzija.

### 3.2.4 Hiperbolički zakoni održanja

Posmatrajmo jednačinu kontinuiteta, koja predstavlja zakon održanja hiperboličkog tipa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.36)$$

Oblik ove jednačine analogan je advekcionoj jednačini, pri čemu brzina dodatno zavisi od položaja  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ . Uvodimo fluks mase  $\mathbf{F} = \rho \mathbf{v}$ . Problem redukujemo na 1D slučaj, odnosno razmatramo diskretizaciju samo po  $x$ -osi i vremenu (slika 11).



Slika 11: Diskretizacija jednačine kontinuiteta u 1D slučaju. Crveni i plavi okviri pokazuju tačke koje su korišćene za računanje prostornih i vremenskih izvoda. (Izvor: Springel 2016)

Slično kao u slučaju advekcione jednačine, posle primene aproksimacije/aproksimacija konačnim razlikama, jednačina (3.36) se transformiše u oblik:

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (3.37)$$

iz koga se izvodi jednačina koja opisuje evoluciju gustine fluida:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n). \quad (3.38)$$

Ispostavlja se da je i ovaj metod numerički nestabilan, iz istih razloga kao u problemu advekcije. Međutim, u slučaju da znamo smer kretanja fluida, odnosno znak fluksa mase, lako možemo umesto jednačine (3.37) preći na oblik koji koristi jedno-

strane aproksimacije konačnim razlikama. Ovaj metod, iako prvog reda, ponovo daje stabilnije rešenje kao i u slučaju advektivne jednačine.

Kod problema posmatranog u ovom poglavlju lako je utvrditi smer prenošenja informacije, odnosno znak fluksa mase, na osnovu brzine fluida. Međutim, u opštem slučaju određivanje smera prenošenja informacije nije jednostavno za sisteme nelinearnih PDJ. Tada se rešavaju takozvani *Rimanovi*<sup>41</sup> *problemi*. koji nam daju informaciju o lokalnom rešenju i smeru prostiranja informacije u fluidu. Ovim se implicitno dobija odgovarajući metod za diskretizaciju diferencijalne jednačine. Došli smo dakle do ključnog koncepta neophodnog za numeričko modelovanje dinamike fluida.

### 3.2.5 Rešavanje Rimanovog problema

U teoriji diferencijalnih jednačina, *Košijev problem* predstavlja nalaženje rešenja diferencijalne jednačine koje zadovoljava zadate početne uslove. Specijalan slučaj Košijevog problema je Rimanov problem, gde se za početni uslov uzima stepenasta funkcija. Početni uslov u trenutku  $t_0$  za jednodimenzionalni Rimanov problem ima oblik:

$$u_0(x, t_0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases}, \quad (3.39)$$

gde su  $u_L$  i  $u_R$  konstante.

Posebno je važno rešavanje Rimanovog problema kod Ojlerovih jednačina. U ovom slučaju stanja levo (L) i desno (D) od diskontinuiteta mogu biti jedinstveno zadata pomoću tri primitivne (videti 3.1.1) veličine: gustine, pritiska i brzine

$$U_L = \begin{pmatrix} \rho_L \\ P_L \\ \mathbf{v}_L \end{pmatrix}, \quad U_D = \begin{pmatrix} \rho_D \\ P_D \\ \mathbf{v}_D \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

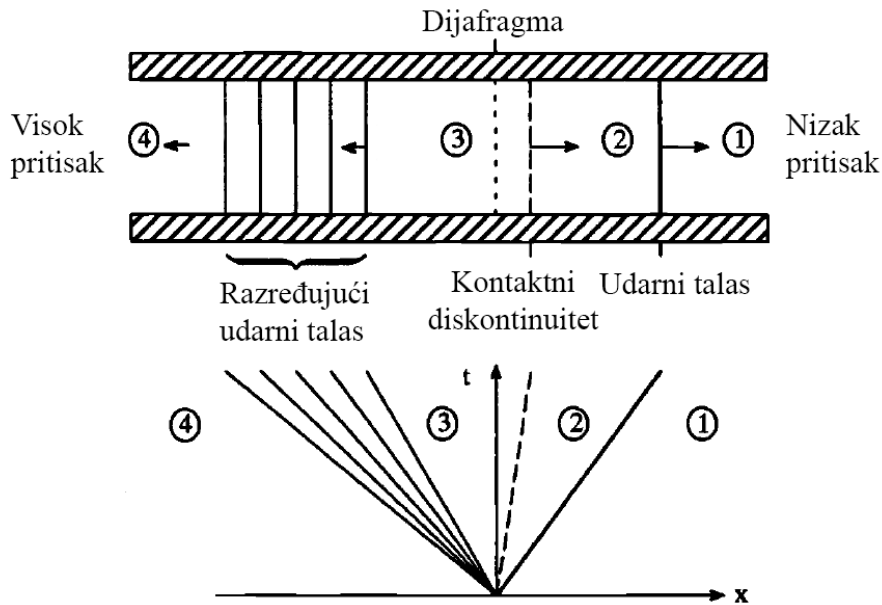
Početne uslove za rešavanje Rimanovog problema ovog tipa moguće je zadati i pomoću održanih veličina.

Ispostavlja se da u slučaju idealnog fluida postoji analitičko rešenje Rimanovog

---

<sup>41</sup> *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (1826-1866).

problema. Analitička razmatranja daju algebarsku jednačinu u kojoj se koreni dobijaju numerički tj. rešenje se ne može eksplicitno izraziti. Izvođenje je detaljno prikazano u knjizi Toro (2009), dok se mi zadržavamo samo na kvalitativnom opisu rešenja i primeni u kasnije analiziranom metodu Godunova. Rešenje se uvek sastoji



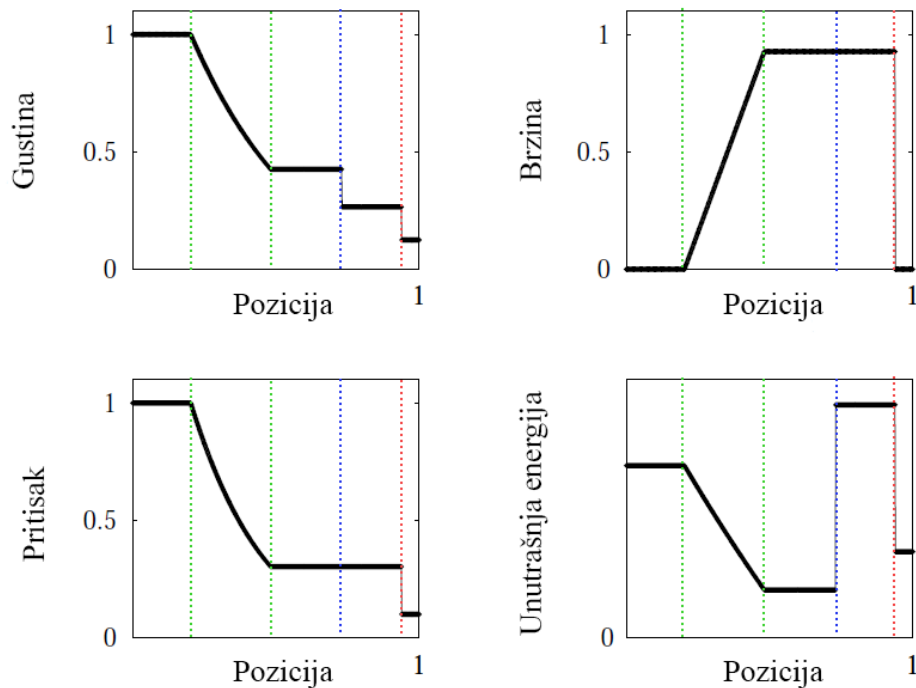
Slika 12: Konfiguracija analitičkog rešenja Rimanovog problema Sodovog tipa. (Izvor: Laney 1998)

od tri samoslična (eng. *self-similar*) udarna talasa, što je šematski prikazano na slici 12, sa sledećim osobinama:

- talas u sredini je uvek prisutan i predstavlja kontaktni talas koji označava granicu između početne leve i desne faze fluida;
- kontaktni talas se nalazi između udarnog talasa i razređujućeg talasa. Razređujući talas nije jedinstven već predstavlja „lepezu” talasa sa početkom i krajem;
- ovi talasi putuju konstantnom brzinom. Ako je rešenje poznato u nekom trenutku  $t > t_0$ , može se odrediti u bilo kom kasnijem trenutku primenom odgovarajućeg skaliranja. Važna posledica je da su u tački početnog diskontinuiteta ( $t = t_0$ ), veličine koje opisuju fluid ( $\rho^*$ ,  $P^*$ ,  $\mathbf{v}^*$ ) konstantne u toku evolucije za  $t > t_0$ ;

- početni uslov  $v_L = v_D = 0$  u određenoj meri pojednostavljuje rešavanje originalnog Rimanovog problema i naziva se Sodov problem udarnog talasa u cevi<sup>42</sup> (Sod 1978). Obično se pretpostavlja da dve različite faze gasa u dugačkoj cevi razdvaja nepropusna pregrada (dijafragma), koja se ukloni u početnom trenutku i gas počinje da se kreće usled razlike u pritisku.

Razmotrićemo kako ova struktura talasa izgleda u rešavanju realnog Rimanovog problema. Uzimamo Sodov tip Rimanovog problema sa početnim uslovima  $\rho_L = 1.0, P_L = 1.0, v_L = 0$  i  $\rho_D = 0.125, P_D = 0.1, v_D = 0$ . Adijabatski indeks gasa je  $\gamma = 1.4$ . Posle vremena  $t = 0.25$  relativnih jedinica, formira se talasna struktura koja je prikazana na slici 13 i sastoji se od razređujućeg talasa levo (obeležen zelenom tačkastom linijom), kontaktnog talasa u sredini (plava) i udarnog talasa desno (crvena).



Slika 13: Analitičko rešenje Rimanovog problema za gustinu, brzinu, pritisak i specifičnu unutrašnju energiju u trenutku  $t = 0.25$ . (Izvor: Toro 2009)

S obzirom na to da je analitički rešiv, Sodov problem udarnog talasa u cevi se

<sup>42</sup> Gary Andrew Sod (u dostupnoj literaturi nema biografskih podataka), eng. *Sod shock tube problem*. Sodov problem predstavlja jednodimenzioni Rimanov problem sastavljen od dva konstantna stanja levo i desno od početne barijere.

često u hidrodinamičkim simulacijama koristi za verifikaciju primenjenih numeričkih algoritama (Mignone et al. 2007).

### 3.2.6 Metod konačnih zapremina

Sledi nekoliko ključnih poglavlja gde ćemo videti kako se rešavanje Rimanovog problema primenjuje u numeričkom modelovanju dinamike fluida metodom konačnih zapremina. Opširan pregled metoda konačnih zapremina je dat u knjizi Leveka (LeVeque 2004).

Iskoristićemo kompaktan zapis hiperboličkih zakona održanja:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (3.41)$$

gde je  $\mathbf{U}$  vektor stanja a  $\mathbf{F}$  vektor fluksa. Na primer, Ojlerove jednačine iz poglavlja 3.1.1, u ovoj notaciji, mogu se predstaviti u formi:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v} \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + P \mathbf{I} \\ (\rho E + P) \mathbf{v} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Jednačina stanja idealnog gasa, kao što je ranije navedeno, daje pritisak kao  $P = (\gamma - 1)\rho e$  i omogućava zatvaranje sistema.

Metod konačnih zapremina opisuje sistem pomoću parametara fluida usrednjenih na konačnom skupu ćelija. Usrednjavanje po zapremini, različitih kvantitativnih karakteristika fluida definisano je kao:

$$\mathbf{U}_i \equiv \frac{1}{V_i} \int_{\text{ćelija } i} \mathbf{U}(\mathbf{x}) dV. \quad (3.43)$$

Sada ćemo prikazati glavne korake postupka za integraciju hiperboličkih zakona održanja. Za sada, radi jednostavnosti, razmatramo 1D slučaj.

1. Integralimo zakon održanja (jednačina 3.41, projekcija na  $x$ -osu) duž jedne

ćelije  $i$  u konačnom vremenskom intervalu:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} dx \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.44)$$

gde  $x_{i-\frac{1}{2}}$  i  $x_{i+\frac{1}{2}}$  predstavlja  $x$ -koordinate leve i desne ivice ćelije  $x_i$  (slika 14a).

2. Integracija daje:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} dx [\mathbf{U}(x, t_{n+1}) - \mathbf{U}(x, t_n)] + \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt [\mathbf{F}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - \mathbf{F}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)] = 0. \quad (3.45)$$

U prvom članu, prepoznavamo definiciju usrednjavanja po ćeliji (3.43), samo redukovanu na 1D slučaj:

$$\mathbf{U}_i^{(n)} \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(x, t_n) dx. \quad (3.46)$$

Primenom ove definicije, na odgovarajuće vremenske trenutke  $t_n$  i  $t_{n+1}$ , dobijamo:

$$\Delta x [\mathbf{U}_i^{(n+1)} - \mathbf{U}_i^{(n)}] + \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt [\mathbf{F}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - \mathbf{F}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)] = 0. \quad (3.47)$$

3. Fluks  $\mathbf{F}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)$  za  $t > t_n$  moguće je odrediti korišćenjem rešenja Rimanovog problema između oblasti levo sa stanjem  $\mathbf{U}_i^{(n)}$  i oblasti desno koju karakteriše  $\mathbf{U}_{i+1}^{(n)}$  (slika 14b). Analogno se dobija i fluks  $\mathbf{F}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)$ . Primenićemo jednu od ključnih osobina Rimanovog rešenja, a to je da u tački diskontinuiteta između dve oblasti ovo rešenje *ne zavisi* od vremena (videti poglavlje 3.2.5). Ako odgovarajuća vremenski nezavisna rešenja Rimanovih problema na levoj i desnoj granici ćelije  $x_i$  obeležimo redom sa  $\mathbf{F}(x_{i-\frac{1}{2}}, t) = \mathbf{F}_{\text{Riemann}}(\mathbf{U}_{i-1}^{(n)}, \mathbf{U}_i^{(n)}) \equiv \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^*$  i  $\mathbf{F}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) = \mathbf{F}_{\text{Riemann}}(\mathbf{U}_i^{(n)}, \mathbf{U}_{i+1}^{(n)}) \equiv \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^*$  konačno dobijamo:

$$\Delta x [\mathbf{U}_i^{(n+1)} - \mathbf{U}_i^{(n)}] + \Delta t [\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^*] = 0. \quad (3.48)$$

Iz prethodne jednačine sledi eksplicitni postupak za ažuriranje stanja u ćeliji

posle vremena  $\Delta t$ :

$$\mathbf{U}_i^{(n+1)} = \mathbf{U}_i^{(n)} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* \right]. \quad (3.49)$$

Prvi član u velikoj zagradi daje fluks koji dolazi u ćeliju sa leve, dok drugi član daje fluks sa desne strane. Ključni koncept korišćenja rešenja Rimanovog problema za računanje novog stanja u ćeliji prvi je predložio Godunov<sup>43</sup> (Godunov 1959) i ove metode se po njemu nazivaju *metode Godunova* (eng. *Godunov's scheme*).

U prethodnom izvođenju nisu korišćene aproksimacije. Ako se i fluksevi  $\mathbf{F}_{\text{Riemann}}$  računaju iz analitičkih rešenja Rimanovog problema, može se doći do zaključka da će metod Godunova davati tačna rešenja za veoma velike vremenske korake.

Ipak, ovde postoji nekoliko problema. Implicitno je pretpostavljeno da su rešenja Rimanovog problema međusobno nezavisna i da svako od njih opisuje beskonačne poluprostore. Ovo nije tačno u slučaju ćelija konačnih dimenzija, ali predstavlja razumnu aproksimaciju u slučaju kada je  $t_{n+1}$  dovoljno blisko trenutku  $t_n$ , tako da talasi sa jednog kraja ćelije nisu još uvek stigli do drugog kraja. Tako dolazimo do KFL vremenskog uslova  $\Delta t \leq \Delta x / c_{\max}$ , gde je  $c_{\max}$  maksimalna brzina kretanja talasa.

U slučaju kada posmatramo više vremenskih koraka, javlja se još jedan problem. Pretpostavljeno je da  $\mathbf{U}_i^{(n)}$  opisuje deo-po-deo konstantna stanja koja nam, uz rešenje Rimanovog problema, daju flukseve. Ipak, analitičko rešenje Rimanovog problema ima svoju složenu talasnu strukturu (videti sliku 12) koja se posle svakog vremenskog koraka gubi postupkom usrednjavanja u ćeliji. Ovo „brisanje” podstrukture Rimanovih rešenja dobijenih u prethodnim koracima unosi određenu grešku u opisani postupak.

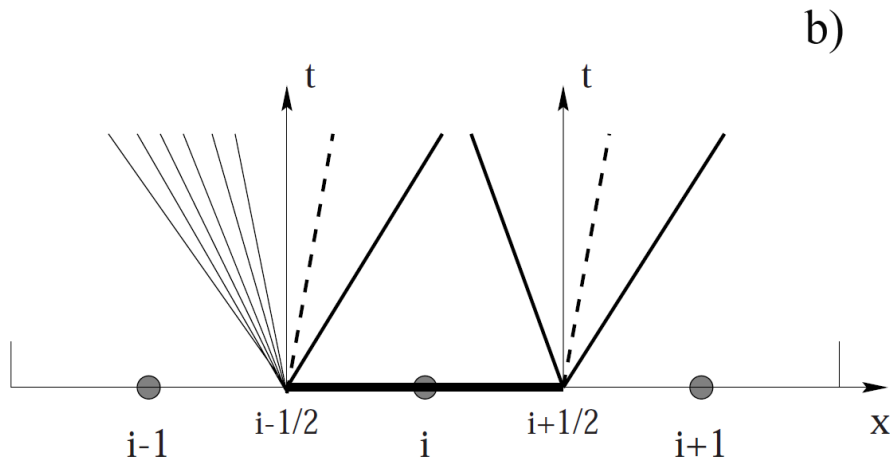
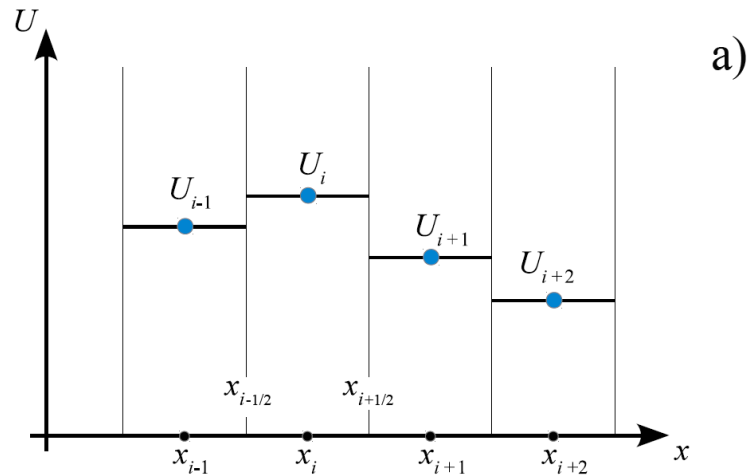
### 3.2.7 Metod Godunova i Rimanovi rešavači

Opisani metod Godunova ima veliki značaj u numeričkim simulacijama dinamike fluida. Postupci za rešavanje Rimanovog problema često se nazivaju *Rima-*

---

<sup>43</sup>*Sergei Konstantinovich Godunov* (1923–).





Slika 14: a) Deo-po-deo konstantna funkcija stanja fluida na 1D diskretnoj mreži (izvor: Springel 2016); b) grafički prikaz Rimanovih rešenja između oblasti sa stanjima  $U_{i-1}$  i  $U_i$ , kao i oblasti sa stanjima  $U_i$  i  $U_{i+1}$ . (Izvor: Toro 2009)

novi rešavači (eng. *Riemann solvers*) i sa shemom Godunova čine algoritam poznat pod imenom *Rekonstrukcija-evolucija-usrednjavanje* (REU, eng. REA: *Reconstruct-Evolve-Average*).

Smisao pojedinačnih koraka u algoritmu REU je sledeći:

1. *Rekonstrukcija*. Usrednjavanjem parametara dobijamo njihove vrednosti u svakoj ćeliji. Na slici 14a korišćena je rekonstrukcija funkcijom koja je deo-po-deo konstantna i ovaj pristup dovodi do tačnosti prvog reda;
2. *Evolucija*. Metod Godunova računa evoluciju sistema posle vremena  $\Delta t$  pri čemu se rešavaju Rimanovi problemi na ivicama ćelija. Rešenja su formalno

važea sve dok ne dođe do interakcije talasa sa različitim krajevima ćelije. U praksi se ovo postiže odgovarajućim odabirom vremenskog koraka  $\Delta t$ ;

3. *Usrednjavanje.* Rimanovi rešavači daju talasnu strukturu koja se usrednjava u svakoj ćeliji. Usrednjavanje nije potrebno vršiti eksplicitno, već je dovoljno obračunati flukseve koji ulaze i izlaze iz svake ćelije. Zatim se ciklus ponavlja.

Za drugi korak u algoritmu REU neophodan je približan ili tačan Rimanov rešavač koji kao početni uslov koristi stanja levo i desno od ivice posmatrane ćelije. Ovo formalno zapisujemo kao:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_{\text{Riemann}}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_D). \quad (3.50)$$

U praksi se najčešće koriste približni Rimanovi rešavači i često se prilikom izbora vodi računa o potrebnoj tačnosti određene simulacije, ali i o računarskim ograničenjima. Tačni Rimanovi rešavači sadrže iterativni postupak nalaženja korena nelinearne jednačine i kao takvi često utiču na vremensku složenost numeričke simulacije.

### 3.2.8 Proširenje u više dimenzija

Do sada smo u poglavlju 3.2.6 metod konačnih zapremina razmatrali samo u kontekstu 1D hiperboličkih zakona održanja u formi:

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, \quad (3.51)$$

pri čemu smo sada uveli skraćenu notaciju  $\partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$  i slično  $\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ .

U 3D slučaju, Ojlerove jednačine za idealni gas mogu se napisati u kompaktnom obliku:

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F} + \partial_y \mathbf{G} + \partial_z \mathbf{H} = 0, \quad (3.52)$$

gde funkcije  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{U})$  i  $\mathbf{H}(\mathbf{U})$  predstavljaju vektore fluksa, redom po  $x$ -,  $y$ - i  $z$ -osi. Tri Ojlerove vektorske jednačine (3.2) daju pet skalarnih i to je ujedno broj komponenti svakog od vektora  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$  i  $\mathbf{H}$  (za detalje videti Toro 2009).

Dalje razmatramo tri *dimenziono razdvojena* (eng. *dimensional splitting*) pro-

blema, izvedena iz jednačine (3.52):

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F} = 0, \quad (3.53a)$$

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_y \mathbf{G} = 0, \quad (3.53b)$$

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_z \mathbf{H} = 0. \quad (3.53c)$$

Vektori koji se javljaju u ovim jednačinama imaju istu dimenziju kao i kompletna jednačina (3.52) ali se diferenciranje obavlja samo u jednom smeru.

Pretpostavimo da možemo iz prethodnih razmatranja rešiti svaki od ovih jedno-dimenzionalnih problema i dobiti stanje posle vremena  $\Delta t$ . Ovo možemo formalno izraziti pomoću operatora vremenske evolucije  $E_x(\Delta t)$ ,  $E_y(\Delta t)$ , i  $E_z(\Delta t)$  koji pomeraju sistem u vremenu za  $\Delta t$ . Globalna evolucija sistema se može približno zapisati kao:

$$\mathbf{U}^{n+1} \simeq E_z(\Delta t)E_y(\Delta t)E_x(\Delta t)\mathbf{U}^n. \quad (3.54)$$

Ovo je samo jedna od mogućnosti za dimenziono podeljenu shemu evolucije i predstavlja aproksimaciju prvog reda.

Sledeći složeniji postupak ima tačnost drugog reda:

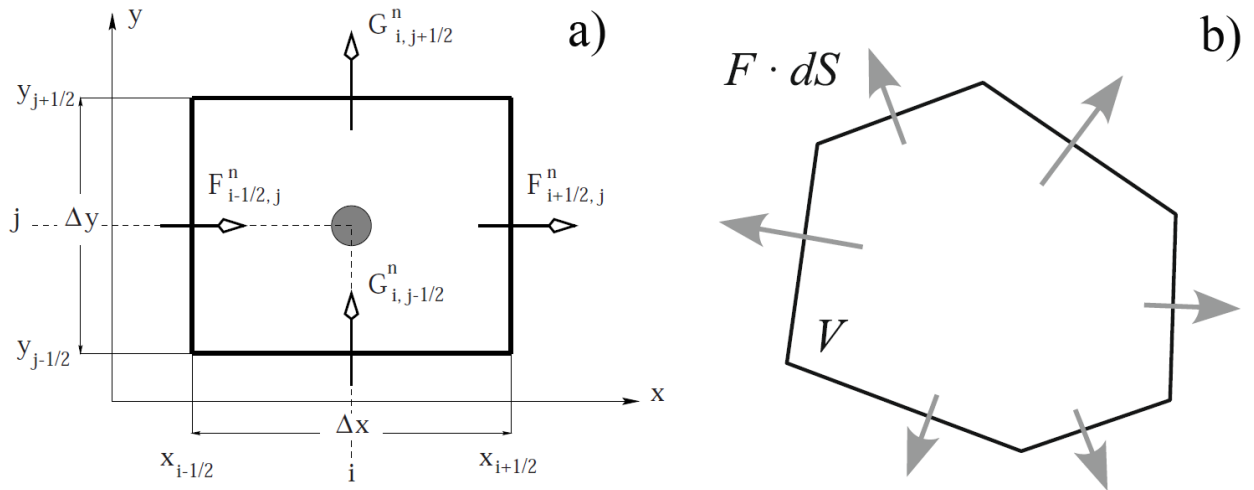
$$\mathbf{U}^{n+1} = E_x(\Delta t/2)E_y(\Delta t/2)E_z(\Delta t)E_y(\Delta t/2)E_x(\Delta t/2)\mathbf{U}^n. \quad (3.55)$$

Dimenziono razdvajanje redukuje problem na niz jednodimenzionih operacija. Svaki operator kao rezultat daje novi vektor  $\mathbf{U}$  i pre primene narednog operatora postupak računanja gradijenata i ostalih potrebnih parametara se ponavlja.

Za modelovanje višedimenzione dinamike fluida postoji još jedna jako važna klasa postupaka (eng. *unsplitted schemes*) koji računanje flukseva na ćeliji obavljaju u isto vreme, bez dimenzionog razdvajanja. Princip rada ovakvih postupaka opisaćemo

sledećom jednačinom na 2D primeru u Dekartovoj ravni (slika 15a):

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j} - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \mathbf{G}_{i,j-\frac{1}{2}} - \mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2}} \right). \quad (3.56)$$



Slika 15: a) Skica postupka na 2D strukturoj Dekartovoj mreži (izvor: Toro 2009);  
 b) skica postupka na 2D nestrukturoj mreži. (Izvor: Springel 2016)

Analogno, za 3D vremenski zavisne sisteme zakona održanja primenjuje se postupak:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i,j,k}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j,k} - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j,k} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \mathbf{G}_{i,j-\frac{1}{2},k} - \mathbf{G}_{i,j+\frac{1}{2},k} \right) \\ + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left( \mathbf{H}_{i,j,k-\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ovakav pristup se generalno više preporučuje u kodovima za modelovanje dinamike fluida jer se kod njega ne javljaju greške kao posledice razdvajanja operatora (Mignone et al. 2015).

Opisani postupak je primenljiv i za nepravilne ćelije koje se mogu javiti u nestrukturiranim mrežama (videti sliku 15b). Na primer, za integraciju po zapremini ćelije  $V$  (primenom formule Gausa-Ostrogradskog) možemo napisati postupak za evoluciju stanja u ćeliji:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \frac{\Delta t}{V} \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.58)$$

gde se integracija vrši na celoj površini ćeliji, sa vektorima površine  $d\mathbf{S}$  usmerenim ka spolja.

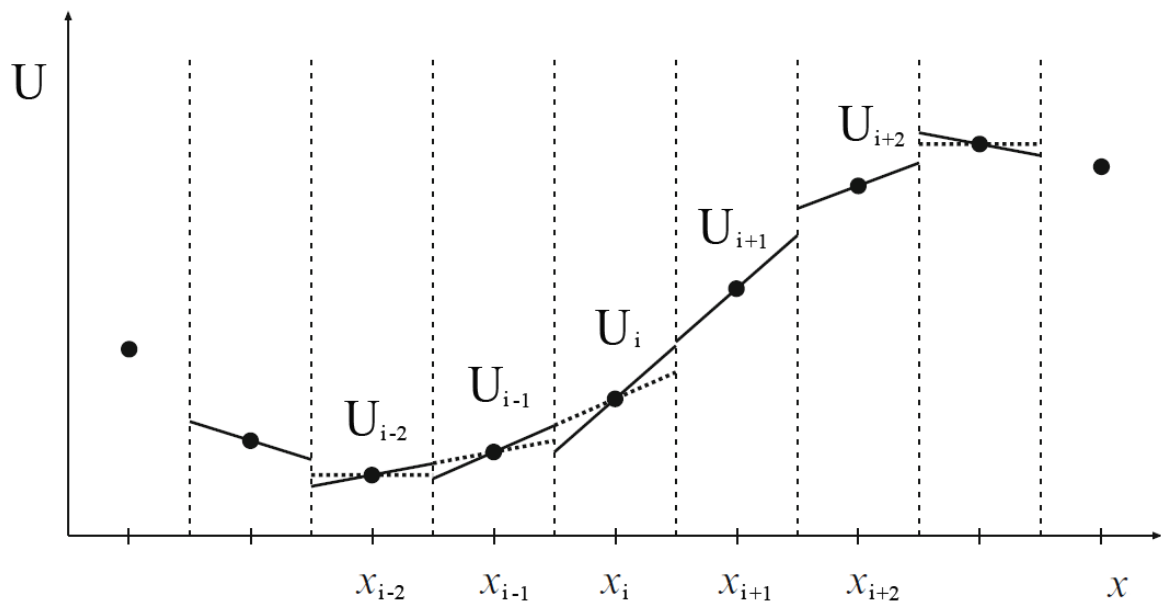
### 3.2.9 Postizanje višeg reda tačnosti

Navodimo najpre jedno uprošćeno i praktično objašnjenje termina *red tačnosti* metoda. Ovaj termin najčešće odgovara brzini konvergencije primenjenog numeričkog metoda u nekim oblastima fluida gde nema udarnih talasa i turbulencija, dakle u „mirnim” oblastima fluida. Ako je, na primer, poznato analitičko rešenje nekog problema  $\xi(x)$ , a u simulaciji se numerički dobijaju vrednosti  $\xi_i$  na mreži sastavljenoj od  $N$  tačaka sa koordinatama  $x_i$ , grešku možemo prikazati kao:

$$\Lambda_1(N) = \frac{1}{N} \sum_i |\xi_i - \xi(x_i)|. \quad (3.59)$$

Dobijena greška predstavlja takozvanu  $l_1$ -normu greške i predstavlja prosečnu grešku po ćeliji. Numerički postupak je *konvergentan* u slučaju kada povećanje broja tačaka na mreži tj. rezolucije smanjuje grešku  $\Lambda_1$ . Konvergencija određenog metoda omogućava da se povećanjem rezolucije simulacije greška spusti ispod potrebnog

nivoa. Različiti numerički pristupi mogu dovesti do drugačije stope konvergencije. Ako se greška nekog metoda skalira kao  $\Lambda_1 \propto N^{-1}$  tada kažemo da je ovaj metod *prvog reda tačnosti*. Metode *drugog reda tačnosti* karakteriše strmija zavisnost greške od rezolucije  $\Lambda_1 \propto N^{-2}$ . Očekivano, cilj je postići konvergenciju višeg reda jer se u tom slučaju potrebna tačnost dostiže na mreži manje rezolucije koja znači skromnije računarske resurse i/ili manje vreme izvršavanja.



Slika 16: Deo-po-deo linearna rekonstrukcija primenjena na stanje fluida na uniformnoj mreži. Srednje vrednosti u pojedinačnim ćelijama prikazane su punim tačkama. Pune linije prikazuju linearnu aproksimaciju vrednosti u ćeliji. Isprekidane linije pokazuju ograničenja nagiba. (Izvor: Durran 2010)

Prvi korak u postizanju tačnosti drugog reda u metodu Godunova predstavlja zamena deo-po-deo konstantne sa deo-po-deo linearnom funkcijom (slika 16) koja opisuje stanja u pojedinačnim ćelijama. Ovo zahteva računanje gradijenta za svaku ćeliju, što se može postići i standardnim metodom konačnih razlika. Neophodno je uvesti i takozvana *ograničenja nagiba* (eng. *slope limiter*) da bi se izbeglo stvaranje novih ekstemuma na ivicama ćelija posle ekstrapolacije. Kada su poznati ograničeni gradijenti za svaku ćeliju, računaju se stanja na ivicama ćelija neophodna za primenu Rimanovih rešavača.

Dodatno, potrebno je na prostornu dodati i vremensku ekstrapolaciju – jednu polovinu vremenskog koraka unapred, tako da se efektivno fluks na ivicama ćelija

računa u sredini vremenskog koraka. Ovo je neophodni dodatak u cilju postizanja stabilnosti i drugog reda tačnosti (Springel 2016). Za 1D slučaj, vektori stanja levo i desno od ivice  $x_{i+\frac{1}{2}}$  mogu se zapisati kao:

$$\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^L = \mathbf{U}_i + (\partial_x \mathbf{U})_i \frac{\Delta x}{2} + (\partial_t \mathbf{U})_i \frac{\Delta t}{2}, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^D = \mathbf{U}_{i+1} - (\partial_x \mathbf{U})_{i+1} \frac{\Delta x}{2} + (\partial_t \mathbf{U})_{i+1} \frac{\Delta t}{2}. \quad (3.61)$$

Postoje i poboljšanja višeg reda, kao što je deo-po-deo parabolički metod (eng. *piecewise parabolic method* – PPM) koji za rekonstrukciju stanja u ćelijama koriste polinome drugog stepena.

### 3.3 Lagranžova hidrodinamika

Hidrodinamika glatkih čestica<sup>44</sup> (eng. *smoothed particle hydrodynamics* – SPH, dalje ipak koristimo skraćenicu SPH kao mnogo poznatiju) je metod za modelovanje dinamike fluida, sa važnim mestom u astrofizičkim simulacijama. Ipak, SPH metod ima ograničenu primenu u simulacijama OSN i iz ovog razloga neće biti detaljno razmatran u ovoj disertaciji. Detaljnije o metodi SPH i njenoj primeni u astrofizici može se naći u preglednim radovima Rozvoga (Rosswog 2009) i Špringela (Springel 2010).

SPH koristi čestice za opisivanje dinamike fluida, koje u određenom smislu imaju ulogu interpolacionih tačaka. Glavna ideja je dakle praćenje promena na ograničenom broju fluidnih delića, bez korišćenja računске mreže (eng. *mesh-free method*). Hidrodinamičke jednačine se izvode za ove čestice (deliće fluida) i vode do jednostavne i intuitivne formulacije dinamike fluida. Održanje energije, impulsa, momenta implusa, mase i entropije (ako nema veštačke viskoznosti) je prirodno zadovoljeno u SPH postupku. Zbog svog Lagranžovog karaktera, lokalna rezolucija u SPH simulacijama prati tok mase, što je pogodno za predstavljanje velikih kontrasta gustine koji se često sreću u astrofizičkim problemima.

---

<sup>44</sup>Pokušaj prevoda engleske kovanice *smoothed particle hydrodynamics*, u duhu ruskog prevoda „гидродинамика сглаженных частиц“.

### 3.3.1 Interpolaciono jezgro

Prvi korak u SPH pristupu je opisivanje funkcija i njenih izvoda u kontinualnoj formi preko interpolacione funkcije koja se naziva „jezgro”, pa se zato ovaj korak obično naziva *interpolacija jezgrom* (eng. *kernel interpolation*). Primena interpolacionog jezgra zasnovana je na sledećoj jednakosti:

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (3.62)$$

gde je  $f(\mathbf{x})$  neka funkcija vektora položaja  $\mathbf{x}$ ,  $\Sigma$  oblast integracije, a  $\delta(\mathbf{x})$  tzv. Dirakova delta-funkcija. Integracija po  $d\mathbf{x}'$ , zavisno od toga da li se radi o 1D, 2D ili 3D slučaju, redom predstavlja linijsku, površinsku ili zapreminsku integraciju.

Za proizvoljno skalarno polje  $F(\mathbf{r})$  možemo definisati njegovu glatku interpoliranu verziju,  $F_s(\mathbf{r})$ , preko konvolucije sa jezgrom  $W(\mathbf{r}, h)$ :

$$F_s(\mathbf{r}) = \int F(\mathbf{r}') W(\mathbf{r} - \mathbf{r}', h) d\mathbf{r}'. \quad (3.63)$$

Ovde  $h$  opisuje karakterističnu širinu jezgra, koja je normirana na jedinicu i aproksimira Dirakovu  $\delta$ -funkciju u limesu  $h \rightarrow 0$ . Potrebno je da funkcija jezgra bude simetrična i dovoljno glatka da bi bila barem dva puta diferencijabilna. Jedna od mogućnosti za  $W$  je Gausijan, ali se ipak najčešće koristi kubni splajn<sup>45</sup>,  $W(r, h) = w(\frac{r}{2h})$  oblika:

$$w_{3D}(t) = \frac{8}{\pi} \begin{cases} 1 - 6t^2 + 6t^3, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1 - t)^3, & \frac{1}{2} < t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases} \quad (3.64)$$

Koji je glavni cilj uvođenja jezgra sa specifičnim zahtevima po pitanju neprekidnosti i diferencijabilnosti? Odgovor na ovo pitanje dobijamo analizom sledećeg primera. Pretpostavimo da znamo određeno polje (to može biti gustina, brzina, pritisak, itd) na konačnom skupu tačaka  $\mathbf{r}_i$ , tj.  $F_i = F(\mathbf{r}_i)$ . Ovim tačkama smo pridružili masu  $m_i$  i gustinu  $\rho_i$ , tako da je  $V_i \sim m_i/\rho_i$  zapremina njima dodeljenog

<sup>45</sup>Funkcija koja je na svakom intervalu polinom trećeg stepena, u tačkama spajanja takvih polinoma oni imaju iste vrednosti kao i prvi i drugi izvodi (za detalje videti npr. knjigu Desanke Radunović; Radunović 2004).



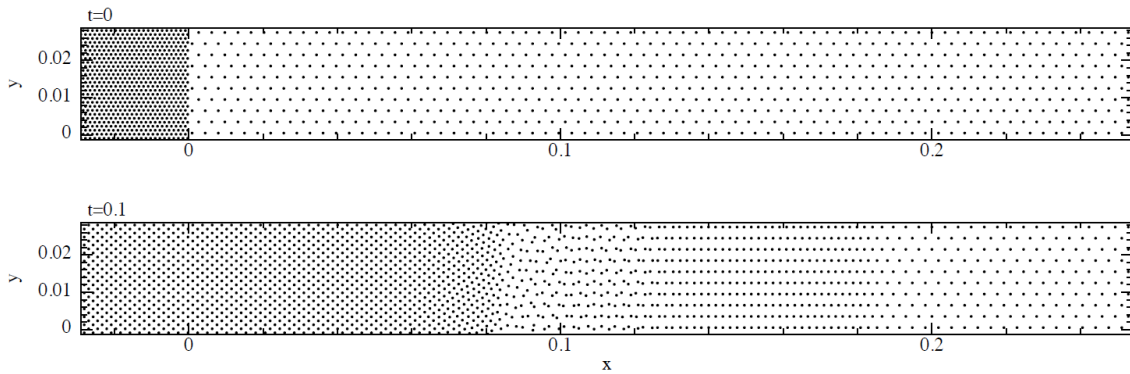
konačnog elementa. Ako su tačke dovoljno gusto raspoređene, integral iz jednačine (3.62) se može aproksimirati konačnom sumom, što efektivno predstavlja integraciju metodom Monte Karlo<sup>46</sup>:

$$F_s(\mathbf{r}) \simeq \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} F_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h). \quad (3.65)$$

Najvažnija posledica ove aproksimacije je da je novodobijena funkcija  $F_s(\mathbf{r})$  definisana svuda (ne samo na zadatom skupu tačaka) i diferencijabilna zahvaljujući diferencijabilnosti jezgra  $W$ . Ako dalje pretpostavimo da je, na primer,  $F(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$ , dobija se:

$$\rho_s(\mathbf{r}) \simeq \sum_j m_j W(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j, h), \quad (3.66)$$

što određuje gustinu u celoj oblasti samo na osnovu koordinata čestica i njihovih masa.



Slika 17: Čestice u 2D problemu udarnog talasa u cevi (eng. *shock tube problem*). Čestice su na početku simulacije raspoređene u gustom heksagonalnom pakovanju sa obe strane diskontinuiteta u  $x = 0$  (gornja slika). Udarni talas se širi (donja slika,  $t = 0.1$ ) i izaziva jednodimenzionu kompresiju čestica i samim tim njihova raspodela postaje nehomogena dok dalje od udarnog talasa zadržava homogenost. (Izvor: Price 2012)

Diferenciranje, npr. polja brzina, moguće je prikazati korišćenjem interpolacije jezgrom.

Lokalna divergencija polja brzina u proizvoljnom položaju  $\mathbf{r}_i$  se računa kao sledeća

<sup>46</sup>Deo šire klase takozvanih metoda *Monte Karlo* koji se oslanjaju na ponavljanje slučajnih pokušaja, najčešće primenom računara.

suma:

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_j \cdot \nabla_i W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h). \quad (3.67)$$

U opštem slučaju, širina jezgra može biti zavisna od položaja u prostoru i vremena  $h = h(\mathbf{r}, t)$ , kako bi se adaptirala na različite gustine tačaka.

### 3.3.2 Jednačine fluida u Lagranžovoj formi

Ojlerove jednačine (3.2) mogu se zapisati u tzv. Lagranžovoj formi kao:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.68a)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{\nabla P}{\rho} = 0, \quad (3.68b)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} + \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (3.68c)$$

gde je  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$  konvektivni (negde se naziva materijalni ili supstancijalni) izvod. Još je Ekart (Eckart 1960) pokazao da se Ojlerove jednačine mogu dobiti iz lagranžijana:

$$L = \int \rho \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \epsilon \right) dV. \quad (3.69)$$

Ovo je jedna od osnovnih ideja koja se koristi za dobijanje diskretnih jednačina dinamike fluida. Umesto rada sa kontinualnim jednačinama i pokušaja da se one diskretizuju, može se diferencirati lagranžijan i tako izvesti SPH jednačine kretanja primenom varijacionog principa klasične mehanike. Lagranžijan takođe garantuje važenje zakona održanja.

Sam postupak izvođenja pomenutih relacija neće biti detaljno predstavljen u okviru ove disertacije. Detalji se mogu videti u radu Špringela i Hernkvista (Springel & Hernquist 2002) a ovde dajemo samo konačni oblik jednačina kretanja:

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left[ f_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \nabla_i W_{ij}(h_i) + f_j \frac{P_j}{\rho_j^2} \nabla_i W_{ij}(h_j) \right], \quad (3.70)$$

gde se za  $f_i$  uzima:

$$f_i = \left[ 1 + \frac{h_i}{3\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial h_i} \right]^{-1}. \quad (3.71)$$

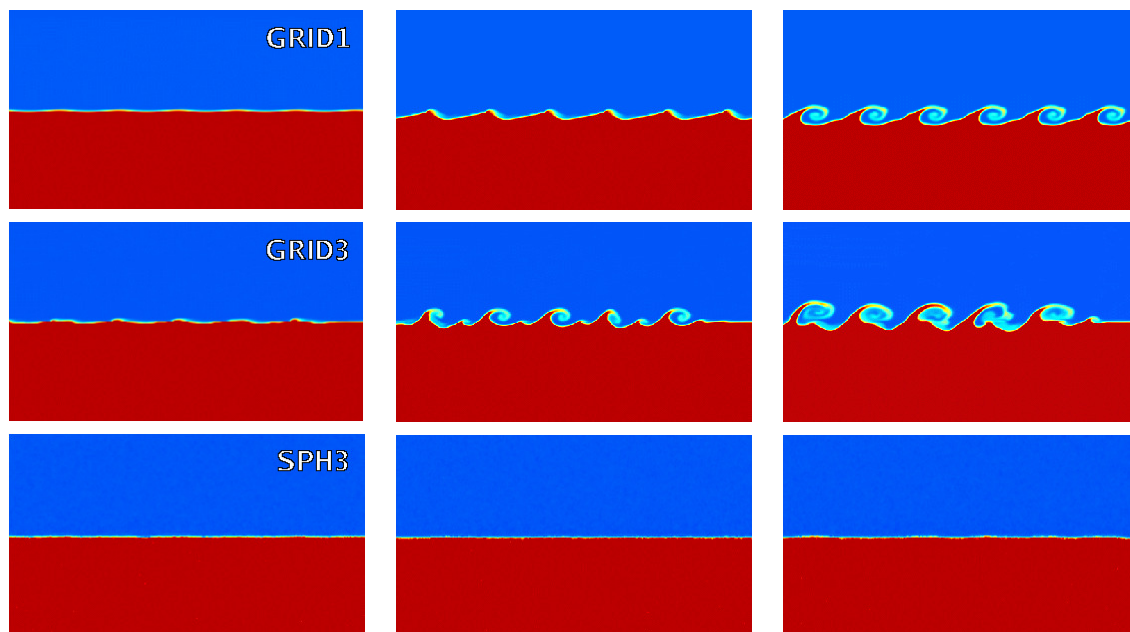
U gornjoj jednačini je uvedena oznaka  $W_{ij}(h) = W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)$ , dok se pritisak računa kao  $P_i = (\gamma - 1)\rho_i \epsilon_i$ .

### 3.3.3 Prednosti i mane Ojlerovog i Lagranžovog pristupa

Nijedan kôd ili numerički metod nije idealan za sve vrste problema. Tokom godina je postalo jasno da Ojlerov i Lagranžov SPH pristup poseduju neka od fundamentalnih ograničenja koja ih čine nepouzdanim u određenim režimima. Dva pomenuta pristupa ponekad daju kontradiktorne rezultate čak i za neke osnovne modele u neradijativnoj hidrodinamici. Navodimo samo neke od poznatih radova u kojima se detaljno upoređuju rezultati različitih Ojlerovih (eng. *mesh techniques*) i Lagranžovih (SPH) simulacija: Frenk sa saradnicima (Frenk et al. 1999), Agerc sa saradnicima (Agertz et al. 2007), Tasker sa saradnicima (Tasker et al. 2008), Mičel sa saradnicima (Mitchell et al. 2009), itd. Navodimo same neke od najbitnijih zaključaka.

SPH kodovi, u poređenju sa Ojlerovim, imaju manju rezoluciju za udarne talase, manju tačnost na kontaktnim diskontinuitetima i sadrže šum subsoničnih brzina. Jedan od ozbiljnijih nedostataka SPH metode je njeno svojstvo da prigušuje nestabilnosti u fluidu (kao što su Kelvin–Helmholcova ili Rejli–Tejlorova, videti sliku 18), pod određenim uslovima, kao rezultat pojave numeričkog efekta površinskog napona i netačnog računanja gradijenta u delovima gde se gustina skokovito menja. Sa druge strane i Ojlerov pristup pokazuje svoje slabosti u nekim slučajevima. Ovaj tip simulacije ne daje rezultate sa svojstvom Galilejeve invarijantnosti (invarijantnost u odnosu na Galilejeve transformacije), što može uticati na tačnost u slučajevima kada se javljaju relativna kretanja sistema kao celine (eng. *bulk velocities*).

Značajni naponi se ulažu u traganje za hidrodinamičkim metodama koje bi uklonile nedostatke oba pomenuta pristupa. Takođe, jedan od glavnih ciljeva je očuvanje tačnosti Ojlerovog metoda dok ih je u isto vreme potrebno uskladiti sa Galilejevom invarijantnošću i geometrijskom fleksibilnošću SPH metoda. Glavna ideja za posti-

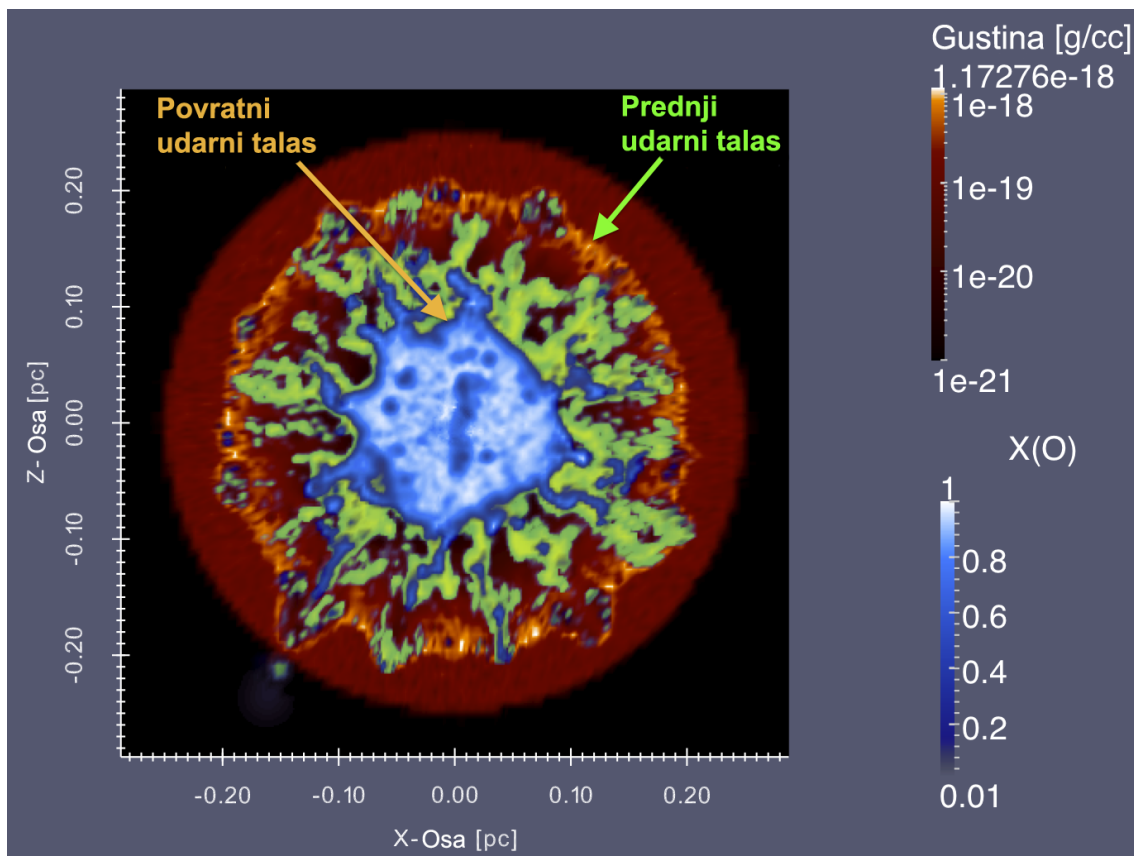


Slika 18: Raspodela gustine fluida, od vrha ka dnu, redom za modele GRID1, GRID3 i SPH3 iz rada Agerca sa saradnicima. GRID1 i GRID3 predstavljaju rezultate iz koda ENZO (Bryan et al. 2014, Enzo Collaboration), dok SPH3 ilustruje rezultate iz SPH koda GASOLINE (Wadsley et al. 2004). Slike pokazuju simulaciju Kelvin-Helmholcove nestabilnosti u vremenskim trenucima  $t = \tau_{KH}/3$ ,  $2\tau_{KH}/3$  i  $\tau_{KH}$ , gde je  $\tau_{KH}$  karakteristično vreme rasta ove nestabilnosti. Testovi jasno pokazuju da SPH metod „prigušuje” pomenutu nestabilnost. (Izvor: Agertz et al. 2007)

zanje ove sinteze dobrih osobina obe metode je računaska mreža kojoj je omogućeno da se kreće zajedno sa fluidom. Ovo nije tako nova ideja ali u sebi sadrži mnogo praktičnih poteškoća. „Uplitanje” mreže je jedan od tradicionalnih problema koji se javljaju u pokušajima da se simulira višedimenziona hidrodinamika primenom Lagranžovog formalizma. Ovde pod uplitanjem podrazumevamo preklapanje pojedinih ivica mreže.

Prethodna razmatranja na određeni način opravdavaju činjenicu da se za modelovanje OSN, SPH kodovi koriste neuporedivo manje od Ojlerovih hidrodinamičkih i MHD kodova, koji dinamiku fluida rešavaju na računskoj mreži. SPH simulacije ne pružaju adekvatan tretman udarnih talasa, fluidnih i termalnih nestabilnosti, koji predstavljaju osnovne karakteristike fizičkih procesa u OSN. SPH pristup daje zadovoljavajuće rezultate u proučavanju eksplozija supernovih što pokazuju radovi Frieri sa saradnicima (Fryer et al. 2006) i Elingera sa saradnicima (Ellinger et al. 2012).

Naredni rad Elingera sa saradnicima (Ellinger et al. 2013) je prvi ozbiljniji



Slika 19: Simulacija eksplozije supernove unutar molekuskog oblaka primenom koda SNSPH, 3D hidrodinamičkog koda Lagranžovog tipa. Crveni gradijent boje označava gustinu, plavi označava zvezdani materijal bogat kiseonikom. Zvezdani materijal u kome dominira vodonik označen je zelenom bojom. Strelicama su obeleženi položaji prednjeg i povratnog udarnog talasa. (Izvor: Ellinger et al. 2013)

pokušaj da se ova primena proširi i na OSN (videti sliku 19). Pomenuti autori modeluju evoluciju počev od eksplozije supernove pa do formiranja mladog OSN, kao i proces mešanja zvezdane i međuzvezdane materije u toku evolucije. Ipak ovaj rad do danas nije objavljen u nekom časopisu sa recenzijom.

### 3.4 Paralelno programiranje i superračunari

Ovo poglavlje sadrži kratak pregled paralelne računarske arhitekture i njene primene u računski zahtevnim astrofizičkim problemima. Živimo u vremenu kada razvoj računarske tehnologije kreće u jednom novom smeru. Za razliku od nekih prošlih vremena, brzine pojedinačnih procesorskih jezgara sada imaju umereniji rast.

Umesto brzine<sup>47</sup>, broj procesorskih jezgara je parametar koji se u poslednjoj deceniji izuzetno brzo i gotovo neograničeno povećava. Trenutno najbrži superračunar na svetu, kineski Sunway TaihuLight u Vusiju (Wuxi)<sup>48</sup>, ima više od deset miliona jezgara i ukupnu brzinu oko 100 PFlops/s.

Efikasno korišćenje ogromnih mogućnosti modernih superračunara (višejezgarni procesori postaju standard i za kućne računare) zahteva prilagođavanje postojećih serijskih algoritama i standardnih programerskih tehnika.

Korisne reference o primeni superračunara u nauci su knjige Hagera i Veleina (Hager & Wellein 2011) kao i Ejkouta sa saradnicima (Eijkhout et al. 2011). Detalji o paralelnom programiranju korišćenjem MPI tehnologije (eng. *message passing interface*) mogu se naći u knjigama Pačeka (Pacheco 1997, 2011).

### 3.4.1 Arhitektura višeprocessorskih sistema

Postoji više tipova paralelnih računarskih arhitektura, a najpoznatija klasifikacija ovakvih arhitektura je takozvana *Flinova*<sup>49</sup> *taksonomija* (Pacheco 1997). Majkl Flin je 1966. godine podelio ove sisteme prema broju tokova instrukcija i broju tokova podataka na sledeći način (Mitić 2009):

- **SISD** (jedna instrukcija, jedan podatak, eng. *Single Instruction – Single Data*). Standardni sistemi koji sadrže jedan procesor i koji serijski izvršavaju instrukcije iz ulaznog toka instrukcija (tzv. fon Nojmanova mašina);
- **SIMD** (jedna instrukcija, više podataka, eng. *Single Instruction – Multiple Data*). Sistemi sposobni da izvršavaju istu instrukciju nad više različitih podataka. Ove mašine imaju jednu jedinicu za obradu instrukcija i više jedinica za obradu podataka;
- **MISD** (više instrukcija, jedan podatak, eng. *Multiple Instruction – Single Data*). Sistemi koji mogu da prenesu niz podataka do skupa procesora koji

---

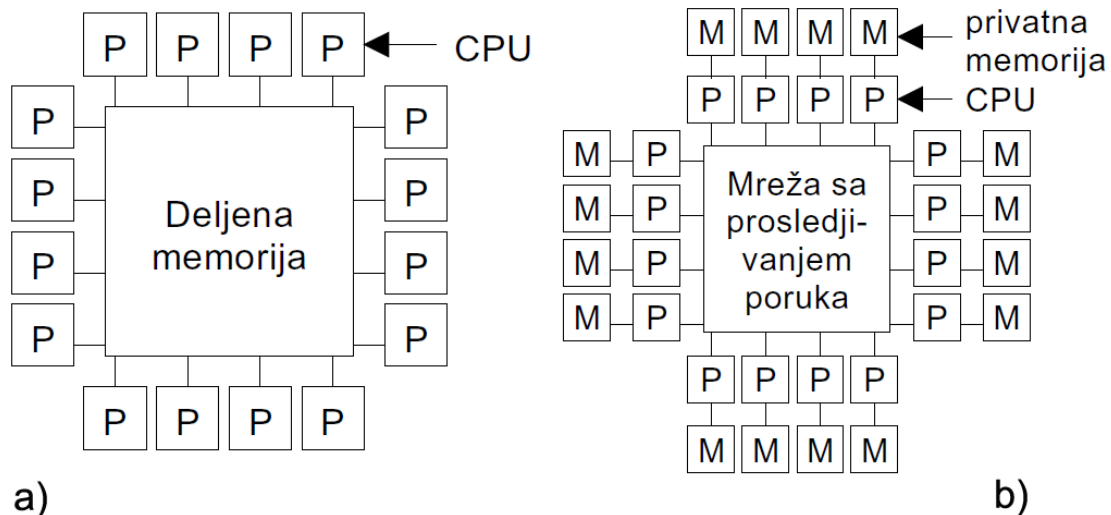
<sup>47</sup>Brzina jedne procesorske jedinice najčešće se prikazuje pomoću broja „računskih operacija sa pokretnim zarezom u sekundi”, eng. *floating point operations per second* (Flops).

<sup>48</sup>Nacionalni centar za superračunare, Vusi, Kina (izvor: <https://www.top500.org>, lista iz novembra 2017. godine).

<sup>49</sup>*Michael J. Flynn* (1934-), profesor emeritus na Univerzitetu Stanford, ujedno i počasni doktor nauka Univerziteta u Beogradu.

izvršavaju različite instrukcije nad istim podacima;

- **MIMD** (više instrukcija, više podataka, eng. *Multiple Instruction – Multiple Data*). Sistemi koji mogu istovremeno da izvršavaju različite instrukcije nad različitim podacima. Arhitektura koju najčešće koriste popularne astrofizičke i uopšte naučne simulacije.



Slika 20: Tipovi MIMD računara: a) deljena memorija i b) distribuirana memorija. Oznaka „P” označava pojedinačne procesore (CPU) ili procesorska jezgra dok je sa „M” obeležena RAM memorija vezana za pojedinačne procesorske jedinice. (Izvor: Mitić 2009)

MIMD je najčešći tip arhitekture superračunara na kojima se pokreću najzahtevnije računarske simulacije. Svet MIMD sistema podeljen je na one sa deljenom memorijom i one sa distribuiranom memorijom (slika 20). Sistemi sa deljenom memorijom su organizovani u obliku višeprosorskih sistema, dok su sistemi sa distribuiranom memorijom organizovani u obliku multiračunara. Postoji jedna bitna podvrsta sistema sa deljenom memorijom, tzv. NUMA sistemi (eng. *non-uniform memory access*), kod kojih je glavna memorija dostupna svim procesorima, ali se brzina pristupa raznim delovima memorije može razlikovati.

Superračunari današnjice se najčešće sastoje od mnoštva zasebnih mašina čvorova (eng. *computer nodes*) koje međusobno komuniciraju putem brze mreže. Pojedinačne mašine imaju najčešće NUMA arhitekturu, sastoje se od nekoliko višejezgarnih

procesora od koji svaki ima svoju memoriju sa kojom najbrže komunicira. Mreže koje povezuju čvorove mogu biti standardne gigabitne ethernet (eng. *ethernet*) mreže, ili često mnogo brže (i skuplje) specijalizovane mreže kao što je tzv. infiniband (eng. *infiniband*, IB).

### 3.4.2 Amdalov zakon

Amdalov zakon predviđa maksimalno teorijsko ubrzanje izvršavanja određenog računarskog zadatka korišćenjem paralelne arhitekture. Ovo svojstvo paralelizovanih programa prvi je predstavio Džin Amdal<sup>50</sup> na konferenciji „Spring Joint” 1967. godine (Amdahl 1967).

Pretpostavimo da određenom programu treba vreme  $T_\sigma$  za rešavanje nekog problema koristeći samo jedan proces (jedno procesorsko jezgro). Takođe, pretpostavimo da ovaj program sadrži određeni deo naredbi  $r$  koje je moguće efikasno paralelizovati ( $0 \leq r \leq 1$ ). Ovaj deo koda ima linearno ubrzanje i ako se pokrene na  $p$  procesorskih jezgara (nezavisno od broja  $p$ ), ukupno vreme izvršavanja će biti  $rT_\sigma/p$ . Za preostali deo  $1 - r$  pretpostavljamo da je isključivo serijski, odnosno da se ne može paralelizovati. Tada će vreme izvršavanja ovog dela biti  $(1 - r)T_\sigma$ , bez obzira na broj procesa  $p$ . Primer za ovakav kod može biti segment za unos, gde svi procesi dobijaju jednu određenu vrednost.

Pod ovim pretpostavkama, ubrzanje definišemo kao odnos vremena izvršavanja celokupnog koda na jednom jezgru i vremena izvršavanja korišćenjem  $p$  jezgara i možemo napisati:

$$S(p) = \frac{T_\sigma}{(1 - r)T_\sigma + rT_\sigma/p} = \frac{1}{(1 - r) + r/p}. \quad (3.72)$$

Ovde je  $S(p)$  rastuća funkcija od  $p$  i kada  $p \rightarrow \infty$  vidimo da važi

$$S(p) \rightarrow \frac{1}{1 - r}. \quad (3.73)$$

Dakle, ubrzanje paralelizovanog koda  $S(p)$  je ograničeno odozgo vrednošću  $(1 - r)^{-1}$ . Ako je na primer 99% paralelizovano tj.  $r = 0.99$ , maksimalno moguće ubrzanje iz

---

<sup>50</sup>Gene Amdahl (1922–2015).



Amdalovog zakona je, čak i u slučaju korišćenja  $10^4$  jezgara, najviše 100 puta, što implicira jako nisku efikasnost od svega 0.01.

Možemo se zapitati da li je Amdalov zakon ograničava smisao primene velikog broja jezgara. Na prvi pogled da, jer sledi da korišćenje stotina ili hiljada procesorskih jezgara nema smisla. Korišćenje ovolikog broja jezgara za male probleme (mali broj računskih operacija) zaista nema smisla, jer u tom slučaju serijski deo koda predstavlja značajan udeo u celokupnom kodu i samim tim Amdalov zakon ograničava maksimalno ubrzanje. Međutim glavni smisao korišćenja superračunara i jeste u tome da se resursi optimalno koriste, tj. da se obično rešavaju problemi koji zahtevaju veliki broj računskih koraka, odnosno, kodovi koji rešavaju ove problema sadrže veliki broj linija. U takvim problemima serijski deo koda predstavlja zanemarljivi deo, pa samim tim ubrzanje može težiti idealnom (Pacheco 1997).

## 4 Radio-evolucija ostatka G1.9+0.3

### 4.1 Uvod

Najmlađi ljuskasti OSN u Galaksiji, G1.9+0.3 (slika 21), prvi put je detektovan 1984. godine od strane Grina i Gala, koji su koristili radio-interferometar VLA (eng. *Very Large Array*) za posmatranja uzorka malih Galaktičkih radio-izvora (Green & Gull 1984). Interesovanje za ovaj OSN poraslo je posle radova Reynoldsa sa saradnicima i Grina sa saradnicima koji su ustanovili da je starost G1.9+0.3 reda veličine 100 godina i da predstavlja najmlađi OSN u Galaksiji (Reynolds et al. 2008, Green et al. 2008). Na osnovu veoma izražene apsorpcije, oni su utvrdili da se OSN G1.9+0.3 nalazi blizu centra Galaksije, na rastojanju oko 8.5 kpc, pri čemu njegov dijаметar iznosi oko 4 pc i brzina širenja udarnog talasa oko 14 000 km/s<sup>51</sup>. Roj i Pal su predložili donju granicu za daljinu ovog ostatka od 10 kpc (Roy & Pal 2014), koristeći merenja apsorpcije radio-teleskopom GMRT (eng. *Giant Metrewave Radio Telescope*), sa poznatim karakteristikama anomalnih brzina struktura blizu Galaktičkog centra.

Pretežno sinhrotronski spektar ostatka G1.9+0.3 u X-području ukazuje na efikasno ubrzavanje čestica, barem elektrona, imajući u vidu veliku brzinu udarnog talasa i malu gustinu okolne MZM (Reynolds et al. 2008). Takođe, dobijena karakteristična energija elektrona od oko 100 TeV je najveća zabeležena ikada kod ljuskastog OSN.

Borkovski sa saradnicima je spektroskopski posmatrao materijal odbačen eksplozijom (eng. *ejecta*) i na osnovu tih posmatranja utvrdio da se radilo o asimetričnoj eksploziji tipa Ia (Borkowski et al. 2013). Oni su takođe zaključili da najdalji delovi odbačenog materijala u slobodnom širenju imaju brzine oko 18 000 km/s. Nekoliko argumenata sugeriše na tip Ia ostatka G1.9+0.3 (videti rad Reynolds 2008): velika brzina širenja, više od 100 godina posle eksplozije, odsustvo centralne pulsarske magline (eng. *pulsar-wind nebula*), simetrična morfologija u X-području i značajna termalna emisija gvožđa. Posmatranja se ne mogu objasniti standardnom kolapsi-

---

<sup>51</sup>Izvedeno iz merenja prividnih kretanja kao i Doplerovih pomeranja linija iz izolovanih regiona sa termalnom emisijom.

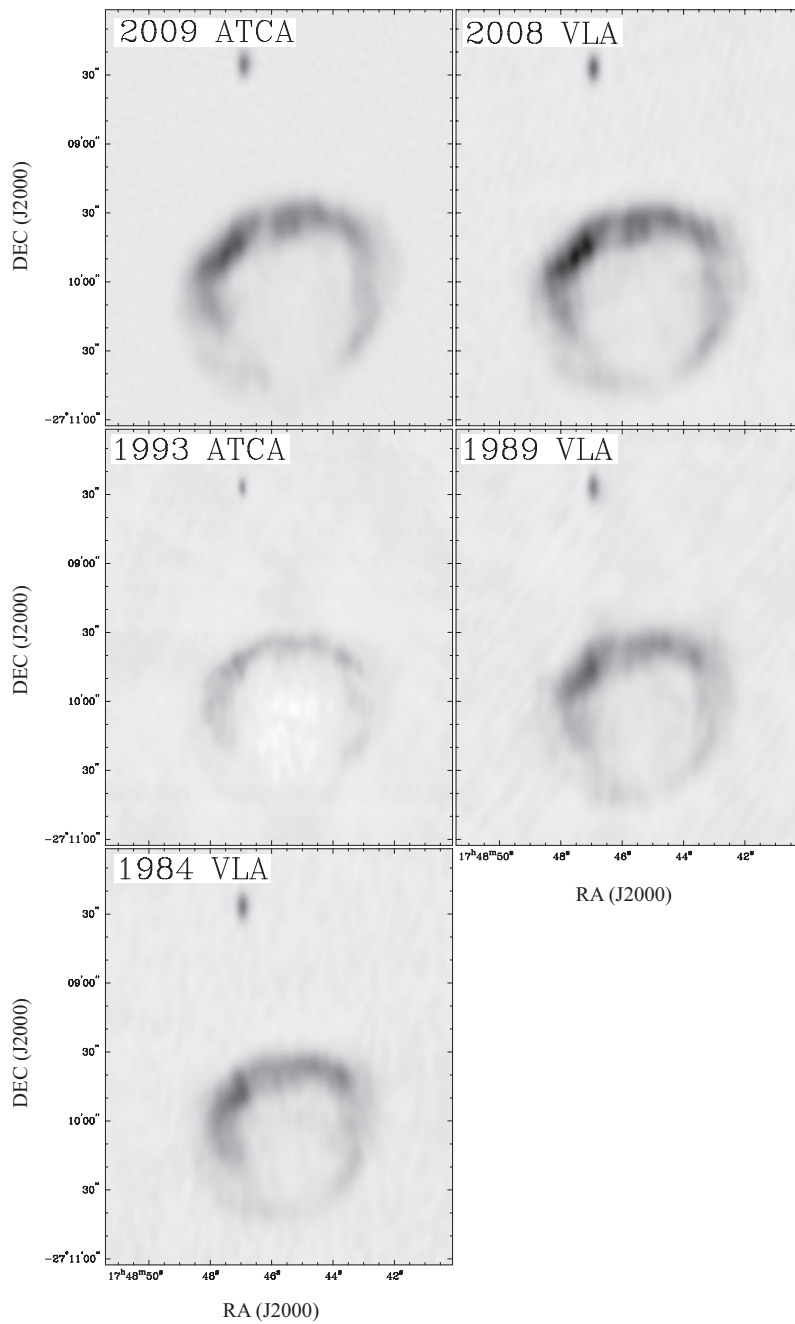


Slika 21: Kompozitna slika najmlađeg OSN u Galaksiji, G1.9+0.3, snimljena u radio (izvor: VLA, Green et al. 2008) i X-području (izvor: *Chandra*, Reynolds et al. 2008) elektromagnetnog spektra. Ovaj OSN se ne vidi u optičkom delu spektra usled velike apsorpcije u ravni Galaksije.

rajućom eksplozijom SN, dok tip Ia uspešno objašnjava posmatranu veličinu i brzinu ostatka za srednju gustinu MZM oko  $0.02 \text{ cm}^{-3}$  (Carlton et al. 2011).

Grin sa saradnicima je poredio VLA radio-posmatranja ostatka G1.9+0.3 na frekvencijama 4.86 i 1.43 GHz sa ranijim posmatranjima slične rezolucije na 1.49 GHz (Green et al. 2008). Ispostavilo se da radio-sjaj ovog ostatka raste proteklih decenija brzinom od oko 2 procenta godišnje. Pomenuti autori su kao moguće razloge naveli da efikasnost ubrzavanja čestica i/ili pojačavanja magnetnog polja raste sa vremenom. De Horta i saradnici su takođe analizirali sva dostupna posmatranja ostatka G1.9+0.3 u radio-kontinuumu (De Horta et al. 2014), radio-teleskopima VLA i ATCA (eng. *Australia Telescope Compact Array*) i došli do sličnih rezultata vezanih za evoluciju radio-sjaja ovog ostatka (slika 22).

Koristeći vremenski zavisnu, nelinearnu kinetičku teoriju ubrzavanja kosmičkih



Slika 22: Radio-sjaj Galaktičkog ostatka G1.9+0.3 na talasnoj dužini od 6 cm, u istoj rezoluciji i u različitim epohama. Pojedinačni snimci sadrže godinu i instrument kojim su snimljeni, redom 2009. ATCA, 2008. VLA, 1993. ATCA, 1989. VLA i 1984. VLA. (Izvor: De Horta et al. 2014)

zraka, zajedno sa 1D sfernosimetričnom hidrodinamikom, Berežko i Folk su predviđeli porast radio-luminoznosti OSN u toku faze slobodnog širenja (Berezhko & Völk 2004). Ovi autori su kao glavni razlog naveli povećanje broja ubrzanih kosmičkih zraka. Ksenofontov sa saradnicima je takođe primenio sličan model nelinearnog ubrzavanja kosmičkih zraka na proučavanje netermalnog zračenja ostatka G1.9+0.3 (Ksenofontov et al. 2010). Dobili su da ukupna sinhrotronska radio-emisija raste sa vremenom, navodeći to kao posledicu brzog rasta ukupnog broja ubrzanih elektrona unutar rastuće zapremine ostatka  $V \propto R_s^3$ , gde  $R_s$  predstavlja trenutni radijus OSN.

U skorašnjem radu Čakrabortija i saradnika (Chakraborti et al. 2016), analitički je pokazano da se dugogodišnji rast fluksa i veličine ostatka G1.9+0.3 može objasniti pretpostavljajući da se početna eksplozija desila prilikom sudara dva bela patuljka čija ukupna masa prelazi  $1.4 M_\odot$  (eng. *double degenerate scenario*, DD). U svom razmatranju oni deflagraciju C/O belog patuljka u tesno dvojnog sistema navode kao manje verovatan scenario (eng. *single degenerate scenario*, SD). Ipak, za gustinu okolne okozvezdane materije  $\rho_{cs} \propto r^{-s}$ , oni pretpostavljaju indeks  $s = 2$  za SD i  $s = 0$  za DD slučaj, čija se opravdanost može dovesti u pitanje.

Potrebno je utvrditi da li je rast radio-sjaja OSN G1.9+0.3 jedinstvena pojava među ostacima u Galaksiji i da li zahteva neke posebne uslove. Jedan od ciljeva ove studije je takođe bilo razviti metode koje se kasnije mogu proširiti na bilo koje OSN ili dalje na čitave uzorke ostataka u različitim fazama evolucije.

Zašto mislimo da je važno modelovanje radio-evolucije? Elektroni koji emituju na radio-frekvencijama (tipične energije reda 1 GeV) se ubrzavaju na vremenskim skalama reda nedelje, ako se pretpostavi Bordova difuzija (Petruk & Kopytko 2016). Ovaj period je mnogo kraći od vremena ubrzavanja čestica sa najvišim energijama, koje je reda veličine starosti samog ostatka. Zbog toga modelovanje radio-evolucije i povezivanje modela sa posmatranjima može dati informacije o efikasnosti početne injekcije čestica, kao i njene vremenske zavisnosti (Petruk & Kopytko 2016).

Takođe,  $\Sigma - D$  relacija, veza između površinskog sjaja  $\Sigma$  i dijametra  $D$  ostatka, koja se koristi za procenu udaljenosti do ljuskastih OSN, može biti značajno unapređena ako se bolje razume radio-evolucija. Poznato je da ova relacija zavisi od osobina eksplozije supernove, kao što su energija eksplozije, masa odbačenog mate-

rijala, ali i od karakteristika MZM kao što su gustina, jačina magnetnog polja, itd. Jedan od glavnih nedostataka ove relacije je to što je dobijena iz uzorka u kome je prisutno veliko rasturanje tačaka, koje je najverovatnije posledica različitih vrednosti pomenutih parametara, kao dodatak na greške merenja i selekzione efekte (videti na primer Urošević et al. 2005, Arbutina & Urošević 2005, Urošević et al. 2010, Pavlović et al. 2014).

Teorijska razmatranja sadrže mnoga ograničenja jer se često zasnivaju na pojednostavljenim pretpostavkama o evolutivnim fazama OSN, spektru čestica i evoluciji spektra, magnetnom polju, itd. Numeričke simulacije bi trebalo da omoguće bolje razumevanje fizičkih procesa i posmatranih statističkih karakteristika.

Magnetno polje je jedan od bitnih faktora za ubrzavanje čestica i netermalnu emisiju. Numeričke simulacije omogućavaju konzistentno modelovanje procesa pojačanja magnetnog polja i njegove vremenske evolucije.

## 4.2 Model

Dinamičku evoluciju OSN modelujemo numeričkim rešavanjem vremenski zavisnih, hidrodinamičkih (HD) jednačina održanja mase, impulsa i energije, sa ključnim semi-analitičkim modelom ubrzavanja kosmičkih zraka i njihovog uticaja na dinamiku udarnog talasa. Uticaj energetskih čestica na udarni talas ogleda se u dodatnom pritisku koji deluje na udarni talas (Blasi 2004) i struji brzih kosmičkih zraka koji pojačavaju međuzvezdano magnetno polje (Bell 2004, Caprioli et al. 2009). Oba pomenuta efekta se javljaju ispred udarnog talasa, u prekursoru, o kome smo već govorili u poglavlju 2. Ovaj deo disertacije se bavi ukupnom radio-emisijom jednog određenog ostatka i njegovom radio-evolucijom, kao i razvojem modela koji kasnije može biti primenjen na bilo koji OSN ili uzorak OSN različitih osobina.

U ovoj disertaciji se bavimo „klasičnim” NLDSA modelom koji prirodno predviđa strmiji spektar na nižim i ravniji spektar na većim energijama. Naime, kosmički zraci velikih energija će otići dalje u nadolazeću plazmu, pa će im energetski spektar postati ravniji usled efekata koji se javljaju zbog većeg faktora kompresije (videti poglavlje 2). Međutim, novija posmatranja gama zračenja Galaktičnih OSN ukazuju na potencijalne probleme našeg razumevanja procesa ubrzavanja čestica na brzim

udarnim talasima. Postoje dokazi o visokoenergetskom delu spektra kosmičkih zraka strmijem od  $E^{-2}$  (ovo je značajno strmije od onoga što predviđa model NLDSA korišćen u našim simulacijama), dobijeni uglavnom iz posmatranja u gama oblasti (Caprioli 2012). Kaprioli je u pomenutom radu razvio model u kome pojačanje magnetnog polja stvara uslove za promenu pomenutog trenda i može dovesti do ustrmljavanja spektra kosmičkih zraka i na visokim energijama. Glavna ideja u modelu Kapriolija (Caprioli 2012) je da se Alfenova brzina računa u pojačanom magnetnom polju (gde važi  $\delta B \gg B_0$ ) umesto u dosta slabijem magnetnom polju lokalne MZM. Ovo nije od ključnog značaja za naš rad jer je deo spektra elektrona koji je bitan za radio-emisiju na znatno nižim energijama, ali bi to svakako trebalo razmotriti u budućem radu, posebno ukoliko bismo se bavili modelovanjem gama emisije pri hadronskom scenariju, gde spektar i emisivnost direktno zavisi od spektra čestica na najvišim energijama. Uprošćeni model evolucije gama emisije, koji je takođe razvijen u ovom radu, koristi tzv. aproksimaciju *probnih čestica* (eng. *test particles*) za računanje spektra ubrzanih čestica oblika  $E^{-2}$  na visokim energijama.

#### 4.2.1 Hidrodinamički model

Hidrodinamičku evoluciju ostatka G1.9+0.3 modelujemo numeričkim rešavanjem vremenski zavisnih zakona održanja mase, impulsa i energije (poglavlje 3.1, sistem jednačina 3.2).

Koristili smo numerički kod PLUTO (verzija 4.2, Mignone et al. 2007, 2012) za rešavanje sistema HD jednačina održanja pomoću Godunovog metoda konačnih zapremina. Dizajn koda omogućava korišćenje paralelnih računarskih arhitektura preko standardne biblioteke rutina za razmenu poruka između čvorova klaster računara (MPI).

Naš HD model ne uključuje disipativne članove: viskoznost, toplotno provođenje i gubitke zračenjem, pa je stoga pogodan za modelovanje faze slobodnog širenja i faze Sedov-Tejlora<sup>52</sup>, u retkoj, bezsudarnoj plazmi. Model Sedov-Tejlora primenljiv je sve do tzv. prelaznog vremena (eng. *transition time*), koji označava kraj tzv. neradijativnih i početak tzv. radijativnih faza i određen je aproksimacijom (videti

---

<sup>52</sup>Leonid Ivanovitch Sedov (1907-1999).

npr. Blondin et al. 1998, Petruk 2005, Orlando et al. 2011):

$$t_{\text{tr}} = 2.84 \times 10^4 E_{51}^{4/17} n_{\text{H}}^{-9/17} \text{ yr}, \quad (4.1)$$

gde je  $E_{51} = E_0/(10^{51} \text{ erg})$  i  $E_0$  je ukupna početna energija eksplozije, uglavnom u formi kinetičke energije. Za parametre gustine i energije eksplozije, korišćene u našim simulacijama, važi  $t_{\text{tr}} > 0.5 \text{ Myr}$ , pa stoga modelovani OSN nikad ne dostiže radijativne faze. Računamo integralnu radio-emisiju OSN pod pretpostavkom da ovo radio-zračenje nema uticaja na dinamičku evoluciju (npr. kroz hlađenje gasa, koje je zanemareno).

Naše modelovanje ne zahteva korišćenje PLUTO MHD implementacije zato što standardne MHD metode ne nude adekvatan opis stvaranja magnetnih turbulencija ispred udarnog talasa i odgovarajućeg pojačanja magnetnog polja. Ovako dobijeno pojačanje magnetnog polja dominira u odnosu na polje dobijeno samo kompresijom fluida (usled važenja zakona održanja magnetnog fluksa), posebno za mlade OSN gde je nelineranost veoma izražena. Za potrebe ove disertacije, razvijen je poseban NLDSA kod koji se pokreće u okviru PLUTO HD koda, računa pojačanje magnetnog polja, sintetizuje globalnu radio-emisiju u pojačanom magnetnom polju i takođe računa uticaj ubrzanih čestica na hidrodinamiku.

U našim simulacijama, koristimo sledeći skup osnovnih PLUTO algoritama: linearnu interpolaciju sa osnovnim ograničavanjem nagiba, HLLC<sup>53</sup> Rimanov rešavač i RK2<sup>54</sup> algoritam za vremensku evoluciju sistema. Dodatno, koristimo MULTID algoritam za *izravnavanje* udarnih talsa, koji ima ulogu unošenja dodatne disipacije u blizini jakih diskontinuiteta. Naše trodimenzione (3D) simulacije rešavaju hidrodinamiku u sfernom koordinatnom sistemu  $(r, \theta, \phi)$ , na statičkoj logaritamskoj mreži na kojoj veličina pojedinačnih ćelija raste sa radijusom OSN.

Detekcija i praćenje udarnog talasa u fluidu, koji se prostire u nekom pravcu  $x$  bazirani su na standardnim numeričkim uslovima  $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$  i  $\Delta x \frac{\nabla P}{P} > \epsilon_p$ , gde  $\epsilon_p$

---

<sup>53</sup>Modifikacija osnovnog Harten-Lax-van Leer (HLL) približnog Rimanovog rešavača, predloženog od strane Harten Laksa i van Lira 1983. godine. HLLC rešavač (gde C označava *contact*) predložio je Toro sa saradnicima (Toro et al. 1992).

<sup>54</sup>Metod Runge-Kuta drugog reda, za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina. Za detalje videti knjigu profesorka Radunović (Radunović 2004).



predstavlja parametar koji određuje jačinu udarnog talasa.

Za potrebe disertacije, PLUTO kod je modifikovan kako bi se u hidrodinamičku evoluciju OSN uključili dodatni efekti koji potiču od ubrzavanja kosmičkih zraka. Javno dostupna verzija PLUTO koda sadrži standardnu implementaciju jednačine stanja (eng. *equation of state*, EOS) idealnog gasa  $P = (\gamma - 1)\rho e$ , ali su sve one bazirane na pretpostavci o konstantnom adijabatskom indeksu  $\gamma$  (odnos specifičnih toplota idealnog gasa,  $\gamma = C_P/C_V$ ). Modifikovali smo hidrodinamičke jednačine u kodu i uveli prostorno i vremenski zavisni efektivni adijabatski indeks  $\gamma_{\text{eff}} = \gamma_{\text{eff}}(x, y, z, t)$ , odnosno  $P = (\gamma_{\text{eff}} - 1)e$ . Efektivni adijabatski indeks  $\gamma_{\text{eff}}$  je određen tako da proizvodi istu ukupnu kompresiju  $R_{\text{tot}}$  koju daje model NLDSA za zadate hidrodinamičke parametre. Efektivni adijabatski indeks se računa na samom udarnom talasu, a zatim advektuje unutar ostatka, pri čemu ostaje konstantan unutar svakog delića fluida (Ellison et al. 2004, Ferrand et al. 2010, Orlando et al. 2012). Prema interpretaciji Feron (Ferrand et al. 2010, 2012), svaki delić fluida (u Lagranžovom smislu) „pamti” efekat modifikacije udarnog talasa od strane ubrzanih kosmičkih zraka u trenutku kada je udarni talas prošao preko njega. Da bismo praktično implementirali ovaj zahtev u kodu, adijabatski indeks gasa tretiramo kroz već implementiranu opciju PLUTO koda „pasivni skalar” ili „boju” (označeno sa  $Q_k$ ), koji zadovoljava jednostavnu advekcionu jednačinu u obliku:

$$\frac{DQ_k}{Dt} = 0, \quad (4.2)$$

koja je dodata standardnom sitemu hidrodinamičkih jednačina (3.2), gde  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$  označava Lagranžov izvod.

Prekursor udarnog talasa nije eksplicitno modelovan u hidrodinamičkom delu naših simulacija. Karakteristike prekursora i profili bitnih fizičkih parametara u njemu, tretiraju se odvojeno u NLDSA kodu. Nelinearni efekti tj. njihov uticaj na hidrodinamiku OSN vidljivi su samo preko efektivnog adijabatskog indeksa, što će biti objašnjeno detaljnije u idućem poglavlju.

### 4.2.2 Difuzno udarno ubrzavanje

Detalji procesa nelinearnog difuznog udarnog ubrzavanja prikazani su u poglavlju 2. Ovaj proces je poznat i pod imenom Fermijevo ubrzanje prvog reda (Fermi 1949) jer se prilikom svakog čeonog sudara čestice sa nehomogenostima magnetnog polja čestica ubrzava i priraštaj njene energije je dat izrazom  $\Delta E/E \propto u/v$  (prvog je reda po  $u/v$ ), gde je  $u$  brzina perturbacije i  $v$  brzina čestice.

Blazijev semi-analitički model, detaljno opisan u poglavlju 2.2, rešava iterativno jednačine koje daju raspodelu ubrzanih čestica  $f(p)$  i profil brzine fluida  $U(p)$ . Numerička integracija integro-diferencijalnih jednačina kao rezultat daje kompresije  $R_{\text{sub}}$ ,  $R_{\text{prec}}$  i  $R_{\text{tot}}$  koje određuju rešenje  $U(p)$  tako da zadovoljava  $U(p_{\text{max}}) = 1$ . Opisani model na ovaj način nalazi samo kvazi-stacionarna rešenja tako da je neophodno pokretanje ovog dela koda posle svakog hidrodinamičkog koraka (videti rad Petruka i Kopitka koji opisuje vremenski zavisno difuzno ubrzanje na nerelativističkim udarnim talasima, Petruk & Kopytko 2016).

Imajući ukupnu kompresiju iz modela NLDSA,  $R_{\text{tot}}$ , efektivni adijabatski indeks računa se kao (Ellision et al. 2004):

$$\gamma_{\text{eff}} = \frac{M_{S,0}^2(R_{\text{tot}} + 1) - 2R_{\text{tot}}}{M_{S,0}^2(R_{\text{tot}} - 1)}, \quad (4.3)$$

gde  $M_{S,0}$  predstavlja Mahov broj daleko ispred udarnog talasa.

Blazijev model koji je originalno predstavljen u radovima iz 2002 i 2004 (Blasi 2002a, b, 2004) obično kao procene ukupnog faktora kompresije daje nerealno visoke vrednosti, koje mogu čak preći  $\sim 50$ – $100$  (Amato & Blasi 2005). Ovako velika kompresija se ne slaže sa posmatranjima koja ukazuju na vrednosti  $R_{\text{tot}} \sim 7$ – $10$  ili čak nešto manje (videti na primer Völk et al. 2005). Pretpostavljamo da deo energije u formi Alfenovih talasa, ekscitovanih od strane visokoenergetskih čestica i odgovornih za rasejanje naelektrisanih čestica, biva transformisan u toplotu koja zagreva plazmu u prekursoru. Za opisivanje kompresije gasa u prekursoru koja odstupa od adijabatske koristimo model Berežka i Elisona (Berezhko & Ellison 1999) opisan jednačinom (2.17), koji znatno redukuje modifikaciju udarnog talsa. Kaprioli i saradnici su uveli parametar  $\zeta \in [0, 1]$  koji definiše deo energije koja se iz MHD

talasa rasipa kroz fluid u vidu toplote (Caprioli et al. 2009). Vrednost parametra  $\zeta < 1$  ublažava proces prigušenja talasa u plazmi i omogućava pojačanje magnetnog polja.<sup>55</sup>

Koristimo model termalne injekcije Blazija sa saradnicima (Blasi et al. 2005), opisan jednačinom (2.13), i pretpostavljamo da deo čestica, određen parametrom  $\eta$ , ulazi u proces ubrzavanja iz repa Maksvelove termalne raspodele. Ovaj model pretpostavlja da čestice sa impulsom  $p_{inj} \geq (\xi - u_2/c) p_{th,2}$  ulaze u proces difuznog udarnog ubrzavanja, gde je  $p_{th,2} = \sqrt{2m_p k T_2}$  srednji termalni impuls iza udarnog talasa (plazma prebrisana od strane udarnog talasa),  $m_p$  je masa protona i  $T_2$  predstavlja temperaturu sredine preko koje je prešao udarni talas. Pomeranje  $-u_2/c$  je posledica pretpostavke da termalne čestice iza udarnog talasa imaju Maksvelov spektar u referentnom sistemu vezanom za fluid, dok se impuls  $p_{inj}$  računa u sistemu vezanom za udarni talas. Parametar injekcije  $\xi$  ima značajan uticaj na efikasnost ubrzavanja definisanu udelom  $\eta$ . Kaprioli i Spitkovski su iz svojih kinetičkih simulacija zaključili da za paralelne<sup>56</sup> nerelativističke udarne talase deo čestica koji ulazi u proces DSA iznosi oko  $10^{-3}$  do  $10^{-4}$ , dok injeksioni parametar obično uzima vrednosti iz intervala  $\xi \simeq 3-4$  (Caprioli & Spitkovsky 2014a). Sa druge strane, Bell uzima da čestice ulaze u proces ubrzavanja ako imaju brzinu veću ili jednaku dvostrukoj brzini udarnog talasa  $2u_0$  (Bell 1978b). Šlikajzer i Opoč su u svom analitičkom izvođenju dobili da ova granična brzina iznosi  $\sqrt{3}u_0$  za kompresiju na udarnom talasu približno veću od 2 (Schlickeiser & Oppotsch 2017).

Iako termalno curenje predstavlja model koji dovoljno dobro parametrizuje injekciju, on ne uzima u obzir zavisnost injekcije jona od geometrije udarnog talasa, odnosno nagiba vektora magnetnog polja u odnosu na udarni talas (Bell et al. 2011). Novije PIC simulacije (eng. *Particle In Cell*) ponovo ukazuju na zavisnost injekcije jona od pomenute geometrije (Caprioli et al. 2015). Kaprioli sa saradnicima je u ovom radu pokazao da se joni ne ubrizgavaju posle zagrevanja i curenja iz repa termalne raspodele, već u procesu takozvane *zrnaste refleksije* (eng. *specular reflec-*

<sup>55</sup>U graničnom slučaju, kada imamo  $\zeta \simeq 1$ , brzina prigušenja magnetnih talasa je uporediva sa brzinom njihovog rasta i time je pojačanje magnetnog polja znatno smanjeno.

<sup>56</sup>Paralelni udarni talasi su oni udarni talasi kod kojih važi  $\mathbf{B} \parallel \mathbf{n}$ , pri čemu  $\mathbf{B}$  predstavlja vektor magnetnog polja, a  $\mathbf{n}$  vektor normale na ravan udarnog talasa.

tion). U ovom slučaju, zavisnost parametra  $\eta$  od kompresije na udarnom talasu nije lako predstaviti u obliku sličnom jednačini (2.13). Međutim, mehanizam predubrzavanja jona ne spada u ciljeve ove disertacije, ali bi svakako trebalo da bude obuhvaćen u budućem radu.

Ovde naglašavamo da jednačina (2.13) uvodi vremensku zavisnost efikasnosti ubrzavanja, imajući u vidu da se kompresija na udarnom talasu, od koje  $\eta$  zavisi, menja tokom evolucije OSN. Ovakav pristup predstavlja određeno poboljšanje u odnosu na prethodne modele koji pretpostavljaju  $\eta = \text{const}$ , iako smo još uvek daleko od potpunog rešenja problema injekcije. Novi teorijski model, nedavno predložen od strane Petruka i Kopitka (Petruk & Kopytko 2016), koji uključuje vremensku zavisnog udarnog ubrzavanja čestica, pokazuje da promenljiva injekcija može biti ključna za objašnjavanje X i gama zračenja mladih OSN, ali ne i za radio-emisiju. Jasno je da vremensku zavisnost efikasnosti ubrzavanja nije lako modelovati, a još kompleksniji problem predstavlja vremenska evolucija odnosa broja protona i elektrona, koja je mnogo važnija za proučavanje radio-emisije. Kinetičke simulacije, polazeći od osnovnih fizičkih principa, ukazuju na mogućnost da injekcija jona ne varira značajno sve dok se radi o brzom udarnom talasu, dok je efikasnost injekcije elektrona u režimima koje ovde razmatramo još uvek nedovoljno dobro objašnjena.

U numeričkim simulacijama pretpostavljamo da se broj kosmičkih zraka na daljini  $\sim \chi_{\text{esc}} R_s$  ispred udarnog talasa može zanemariti, gde parametar  $\chi_{\text{esc}} < 1$  predstavlja deo radijusa ljuske ostatka  $R_s$ . Na ovaj način zapravo uvodimo prostornu granicu oko udarnog talasa, iza koje se čestice najvećih energija, uglavnom protoni, ne mogu vratiti nazad na udarni talas i tako postaju deo MZM (Caprioli et al. 2010, Morlino & Caprioli 2012). Koristeći pomenutu aproksimaciju, možemo odrediti maksimalni impuls ubrzanih protona  $p_{p,\text{max}}$ , pri čemu važi:

$$\frac{D(p_{p,\text{max}})}{u_0} = \chi_{\text{esc}} R_s, \quad (4.4)$$

gde je  $D(p)$  Bomov koeficijent difuzije, odnosno  $D(p) = \frac{1}{3}v(p)r_L(p)$ , dok  $v(p)$  i  $r_L(p)$  predstavljaju redom brzinu čestice i njen žiro-radijus, slično Belovom pristupu (Bell et al. 2013). U našem modelu koristimo  $\chi_{\text{esc}} = 0.1$ , predloženu od strane Morlina i

Kapriolija (Morlino & Caprioli 2012), koja zadovoljava uslov da je vreme ubrzavanja do impulsa  $p_{p,\max}$  manje od starosti OSN (Blasi et al. 2007).

### 4.2.3 Pojačanje magnetnog polja

Ubrzavanje Galaktičkih kosmičkih zraka do kolena u spektru tj. energija od nekoliko PeV, moguće je samo u slučaju kada je magnetno polje ispred udarnog talasa značajno pojačano od strane visokoenergetskih kosmičkih zraka koji napuštaju OSN (Bell et al. 2013). Konzistentno računanje jačine magnetnog polja, iako još uvek nedovoljno dobro razumemo proces njegovog pojačavanja, je od velikog značaja za radio-emisiju ubrzanih elektrona. Zbog svega navedenog, mehanizam pojačanja magnetnog polja predstavlja važan deo našeg modela.

Za pojačanje magnetnog polja odgovorne su nestabilnosti struje kosmičkih zraka (eng. *streaming instabilities*) u blizini udarnog talasa. Ove nestabilnosti mogu biti: 1) rezonantne (Bell 1978a, b), u slučaju da Alfenovi talasi, koje generiše struja čestica sa brzinama većim od Alfenove brzine, imaju talasnu dužinu reda veličine žiro-radijusa kosmičkih zraka; i 2) nerezonantne (Bell 2004), brzo rastuće nestabilnosti sa talasnim dužinama koje se razlikuju od žiro-radijusa kosmičkih zraka. Amato i Blasi su pokazali da su nerezonantni modovi prisutniji u ranim fazama evolucije OSN, pretežno u fazi slobodnog širenja i ranoj fazi Sedov-Tejlora, dok u kasnijoj evoluciji dominiraju rezonantni talasi (Amato & Blasi 2009). Ipak, Kaprioli i Spitkovski pokazuju da njihova jednačina, dobijena za rezonantne nestabilnosti, važi i u simulacijama sa Alfenovim Mahovim brojem  $M_A \simeq 100$  i može se ekstrapolirati do još većih vrednosti koje karakterišu mlade OSN poput G1.9+0.3 (Caprioli & Spitkovsky 2014b). Za udarne talase sa velikim Alfenovim Mahovim brojem  $M_A$ , Kaprioli i Spitkovski razlikuju dva regiona: region daleko ispred udarnog talasa, u kome dominiraju nerezonantne nestabilnosti, i prekursor, gde rezonantne i nerezonantne nestabilnosti imaju približne brzine rasta. Još bliže udarnom talasu počinju da dominiraju rezonantne nestabilnosti. Ipak, teško je modelovati procese koji se dešavaju za  $M_A \gg 100$  jer simulacije postaju veoma računski zahtevne i ovde preostaje mnogo otvorenih pitanja. Zbog svega navedenog, implementacija bilo kog modela nosiće sa sobom i mnogo dodatnih problema, sve dok buduće PIC simulacije

i bolja teorija ne omogućće bolje razumevanje ovih procesa.

Izabrali smo da pojaćanje magnetnog polja ogranićimo samo na model rezonantnih nestabilnosti, za koje već postoji razvijena analitićka formulacija (Caprioli 2009), koju je lako ukljućiti u Blazijev nelinearni model. Uz pretpostavku da su turbulencije u prekursoru posledica samo rezonantnih nestabilnosti struje kosmićkih zraka, model pojaćanja magnetnog polja opisujemo Kapriolijevom jednaćinom (2.21) koja daje profil pritiska Alfenovih talasa  $P_w(p)$  (Caprioli et al. 2009). Simulacije slićnog tipa i namene, poput onih koje razvijaju Li sa saradnicima i Feron sa saradnicima (Lee et al. 2012, Ferrand et al. 2014), takođe koriste ovaj model u opisivanju evolucije magnetnog polja. Jednostavnosti radi, naše simulacije ne ukljućuju već postojećće magnetne nestabilnosti u MZM, odnosno da se daleko od udarnog talasa nalazi homogeno magnetno polje  $\mathbf{B}_0$ . Ukupno magnetno polje u proizvoljnoj taćki  $x_p$  raćuna se kao

$$B_p^2 = B_0^2 + 8\pi P_{w,p}, \quad (4.5)$$

gde  $B_0$  oznaćava komponentu urećenog mećuzvezdanog magnetnog polja, pri ćemu se smatra da su pomenute dve komponente magnetnog polja mećusobno normalne, jer pretpostavljamo da se radi o pravim (ili ćistim) Alfenovim talasima<sup>57</sup>. Ipak, treba imati u vidu da je i ovo samo gruba procena. Naime, zanemarujemo mogućnost da je okolno magnetno polje u prekursoru  $B_0$  pojaćano od strane Belovih nerezonantnih nestabilnosti daleko od udarnog talasa i da moće biti veće od svega nekoliko  $\mu\text{G}$  Galaktićkog polja.

Magnetni pritisak pojaćanog polja postaje znaćajan, istog reda velićine ili ćak veći od termalnog pritiska, ćime njegova dinamićka uloga postaje nezanemarljiva (Caprioli 2009). Zbog toga je magnetni pritisak zajedno sa pritiskom ubrzanih ćestica uzet u obzir u NLDSA kodu i utiće na ukupnu kompresibilnost fluida preko efektivnog adijabatskog indeksa. Dakle, naš model uzima u obzir dinamićki pritisak  $\rho u^2$ , termalni pritisak  $P_{\text{th}}$ , netermalni pritisak kosmićkih zraka oblika  $P_{\text{CR}} = \frac{4\pi}{3} \int p^2 f(p) p v(p) dp$  i magnetni pritisak  $P_w$ . Parametar  $\zeta$  u našim simulacijama ima

---

<sup>57</sup>Pravim ili ćistim u literaturi se nazivaju oni Alfenovi talasi koji se prostiru duć magnenih linija sila, tj. za ćiji talasni vektor  $\mathbf{k}$  vaći  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$  (Vukićević-Karabin 1994). Brzina poremećaja  $\mathbf{v}'$  i poremećeno polje  $\mathbf{B}'$  su kolinearni vektori, normalni na neporemećeno magnetno polje ( $\mathbf{v}' \perp \mathbf{B}_0$ ).

vrednosti oko 1/2 što pojačanom magnetnom polju daje bitnu ulogu u dinamici OSN.

Kaprioli i Spitkovski naglašavaju da pojačanje magnetnog polja dovodi do zagrevanja plazme (turbulentno zagrevanje, pomenuto u odeljku 4.2.2) na takav način da su pritisak u plazmi i magnetni pritisak skoro u ekviparticipiji u prekursoru (Caprioli & Spitkovsky 2014a).

Maksimalna vrednost jačine pojačanog magnetnog polja  $B_1$  je dostignuta neposredno ispred udarnog talasa i računa se zamenom relacije  $U_p = u_1/u_0 = 1/R_{\text{prec}}$  u jednačinu (2.21). Koristimo standardnu pretpostavku da je ukupno magnetno polje slučajne orijentacije u prostoru, kao posledica jake turbulencije. Zatim pretpostavljamo da je magnetno polje iza udarnog talasa kompresovano samo usled kompresije fluida tako da je pojačana samo komponenta polja u ravni udarnog talasa i da su tri komponente polja ispred udarnog talasa približno jednake. Magnetno polje iza udarnog talasa je dato jednačinom  $B_2 = B_1 \sqrt{1/3 + 2/3 R_{\text{sub}}^2}$ .

U regionu dalje iza udarnog talasa dolazi do slabljenja pojačanog magnetnog polja na samom udaru. Za modelovanje ovog procesa koristimo jednačinu Morlina i Kapriolija, baziranu na nelinearnom mehanizmu Landaua,<sup>58</sup> koja opisuje prigušenju magnetnog polja (Morlino & Caprioli 2012):

$$B_d(r) \simeq B_2 \exp\left(-\frac{Rs - r}{\lambda_{\text{nl}}}\right). \quad (4.6)$$

Tipična skala dužine  $\lambda_{\text{nl}}$  za nelinearno Landauovo prigušenje magnetnog polja dato je sa:

$$\lambda_{\text{nl}} = \frac{3\chi_{\text{esc}}}{0.05} \frac{u_0^2}{v_A(B_2)c} R_s, \quad (4.7)$$

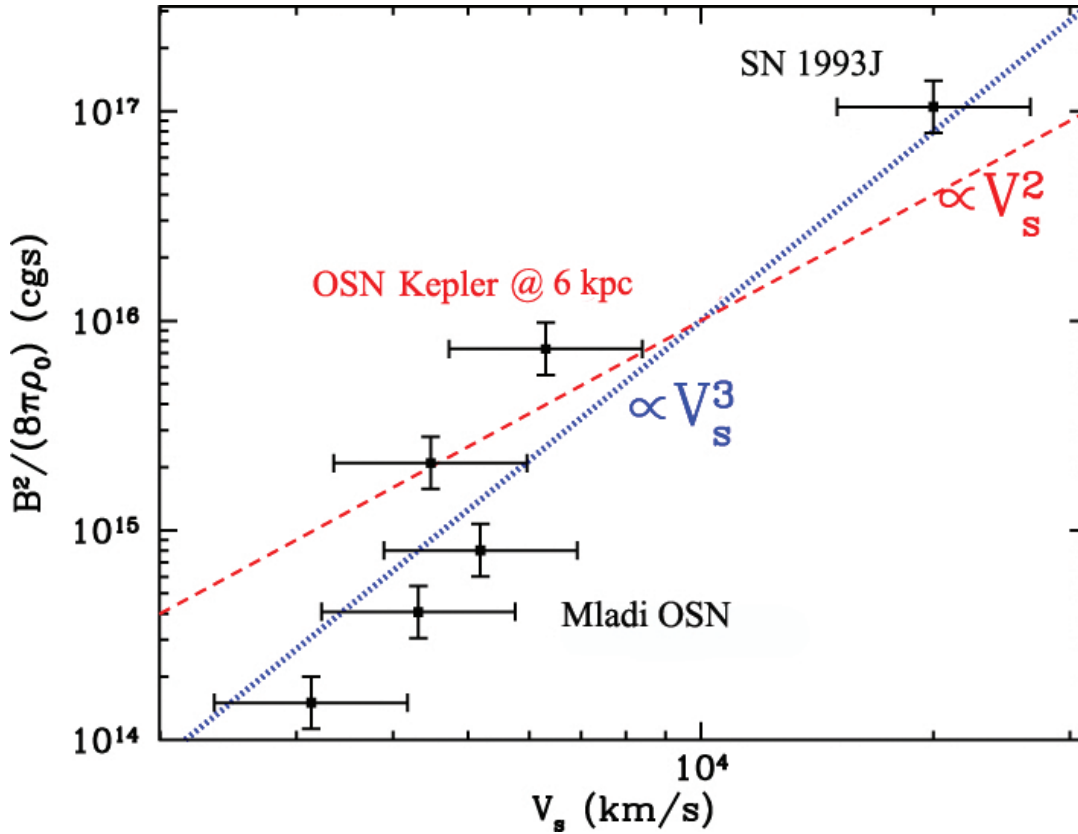
gde je  $v_A(B_2)$  Alfenova brzina u regionu iza udarnog talasa.

Belov model pojačanja magnetnog polja usled nerezonantnih nestabilnosti struje kosmičkih zraka (Bell 2004) predviđa ukupnu gustinu energije saturisanog magnetnog polja:

$$\frac{B_{\text{sat}}^2}{2\mu_0} \sim \frac{1}{2} \frac{u_0}{c} \epsilon_{\text{CR}}, \quad (4.8)$$

---

<sup>58</sup> *Lev Davidovich Landau* (1908-1968).



Slika 23: Zavisnost gustine energije magnetnog polja  $B^2/(8\pi)$  iza udarnog talasa od brzine udarnog talasa  $V_s$ . Isprekidana crvena linija pokazuje zavisnost od  $V_s^2$  dok tačkasta plava linija odgovara zavisnosti  $V_s^3$ . (Izvor: Vink 2012)

gde  $\epsilon_{CR}$  predstavlja gustinu energije kosmičkih zraka na udarnom talasu.

U aktivnim fazama evolucije OSN, kada je ispunjeno  $\epsilon_{CR} \sim \rho_0 u_0^2$ , za pojačano magnetno polje važi  $B \propto u_0^{3/2}$ . Sa druge strane, u slučaju ekviparticije između ukupne gustine energije kosmičkih zraka i magnetnog polja (Beck & Krause 2005, Arbutina et al. 2012), važiće  $B \propto u_0$ . Obe pomenute zavisnosti su uključene u model Ksenofontova i saradnika (Ksenofontov et al. 2010), dok Berežko i Folk koriste samo model zasnovan na ekviparticiji (Berezhko & Völk 2004). Vink u svom preglednom članku navodi da zavisnost  $B \propto u_0^{3/2}$  pokazuje bolje slaganje sa X-posmatranjima (slika 23), mada ovom zaključku dosta doprinosi ostatak SN 1993J za koji nije najjasnije da li je mehanizam pojačanja magnetnog polja sličan onom kod mladih OSN (Vink 2012). Model  $B \propto u_0^{3/2}$  koji je koristio Ksenofontov u svom modelu radio-evolucije ostatka G1.9+0.3 (Ksenofontov et al. 2010), daje previše sporo povećanje gustine radio-zračenja i ne pokazuje dobro slaganje sa posmatranjima.



Jednačina (2.21), korišćena u našem modelu evolucije magnetnog polja, pokazuje da magnetno polje, pored brzine udarnog talasa, zavisi i od drugih parametara. Iz jednačine (2.21) sledi  $P_{w,p} \sim \frac{\rho_0 u_0^2}{M_{A,0}}$ , pa dobijamo  $B \propto (u_0 B_0)^{1/2}$ , koju ipak treba uzeti sa rezervom jer član  $U_p^{-3/2}(1 - U_p^2)$  verovatno unosi dodatnu zavisnost od brzine udarnog talasa. U poglavlju 5.3 ćemo navesti numeričku zavisnost između magnetnog polja i brzine udarnog talasa, dobijenu u našoj simulaciji.

U prethodnim poglavljima smo objasnili razliku između pojačanja magnetnog polja putem rezonantnih i nerezonantnih nestabilnosti struje energetskih čestica. Saturacija rezonantnih nestabilnosti eksplicitno zavisi od početne vrednosti magnetnog polja  $B_0$ , što nije slučaj kod Belovih nerezonantnih nestabilnosti (videti, na primer, jednačine (12) i (13) iz rada Amato 2011).

Modelovanje magnetnog polja u našem radu ne uključuje njegovo uvijanje i pojačavanje usled početnih nehomogenosti u materijalu izbačenom eksplozijom i pojave Rejli-Tejlorovih nestabilnosti (Orlando et al. 2012). Modelovanje pomenutih efekata kao i morfološka evolucija radio-emisije OSN, biće razvijani u budućem radu, primenom MHD implementacije koda PLUTO.

#### 4.2.4 Radio-emisija

Iako o mehanizmu injekcije elektrona u proces ubrzavanja znamo neuporedivo manje u odnosu na isti mehanizam za protone, nemamo puno izbora, pa stoga pretpostavljamo da je injekcija elektrona ista kao i za protone. Spektar elektrona u svakom trenutku normalizujemo u odnosu na protonski:

$$f_e(p) = K_{ep} f_p(p), \quad (4.9)$$

gde parametar  $K_{ep}$  predstavlja odnos broja elektrona i protona, vrlo verovatno povezan sa različitim mehanizmima odgovornim za ubrzavanje leptona i hadrona. Dovoljavamo da ovaj parametar odstupa od vrednosti  $K_{ep} = 10^{-2}$ , dobijene iz posmatranja difuznog spektra kosmičkih zraka energija  $\sim$  GeV u blizini Zemlje. Kako energetski gubici elektrona na energijama oko GeV nisu značajni tokom njihovog boravka u Galaksiji, odnos broja elektrona i protona je takođe oko  $10^{-2}$  na izvoru.

Ipak, Zirakašvili ukazuje na mogućnost da ovaj odnos ne mora biti isti za mlade i stare ostake (Zirakashvili 2008). Mladi OSN, kao što je G1.9+0.3, su možda izvori Galaktičkih elektrona na energijama većim od 10 TeV, dok GeV elektrone možda proizvode stariji OSN. Sledi da je vrednost koju dobijamo iz posmatranja u kosmičkim zracima možda određena kasnijim fazama evolucije OSN (Sarbadhicary et al. 2017). Iz novijih PIC simulacija istovremenog ubrzavanja protona i elektrona, Park sa saradnicima je dobio vrednosti odnosa elektrona i protona  $K_{ep} \approx 10^{-3}$  do  $10^{-2}$ , za brzine udarnog talasa  $u_0/c \approx 0.02 - 0.1$  i redukovanu masu  $m_p/m_e$  koja ima vrednosti od 100 do 400<sup>59</sup> (Park et al. 2015). Pretpostavljamo da je spektar elektrona paralelan spektru protona, izuzev za velike energije, jer očekujemo da čestice sa istom rigidnošću  $pc/|q|$  (gde je  $p$  impuls,  $q$  naelektrisanje) imaju isti oblik spektra. Dinamičku ulogu elektrona zanemarujemo u našem modelu.

Pretpostavka o paralelnim spektrima protona i elektrona važi sve dok su sinhrotronski gubici zanemarljivi. Ipak, na energijama oko TeV, sinhrotronski gubici elektrona postaju značajni i treba ih uzeti u obzir uvođenjem dodatnog člana u odgovarajuću difuznu jednačinu (videti, na primer, Berezhko & Völk 2002, 2004). Strog numerički tretman *hlađenja* elektrona ipak neće biti uključen u naš model zbog toga što su ovi gubici zanemarljivi kod elektrona odgovornih za radio-emisiju. Ipak, implementiraćemo jako jednostavan model, namenjen visokoenergetskom delu elektronskog spektra, kako bismo dobili zadovoljavajući model sinhrotronskog zračenja od radio do X-domena, opisan u poglavlju 5.3. Pretpostavljamo da spektar elektrona iznad određene energije postaje strmiji, njegov oblik se menja od  $p^{-q}$  do  $p^{-(q+\delta)}$  (Tanaka et al. 2008, Longair 2011) i dozvoljavamo da se parametar  $\delta$  razlikuje od 1. Na osnovu modela Tanake i saradnika (Tanaka et al. 2008), računamo karakterističnu energiju iznad koje sinhrotronski gubici postaju značajni:

$$E_b = 1.25 \left( \frac{B_2}{100 \mu\text{G}} \right)^{-2} \left( \frac{t_0}{10^3 \text{yr}} \right)^{-1} \text{TeV}, \quad (4.10)$$

gde  $t_0$  predstavlja trenutnu starost OSN. Idući od  $E_b$  (odgovarajući impuls  $p_b$ ) ka višim energijama, prethodno dobijeni spektar elektrona se ustrmljava i primenjujemo

---

<sup>59</sup>Dolazi do beznačajne promene  $K_{ep}$  ako se redukovana masa  $m_p/m_e$  poveća od 100 na 400.

sledeći oblik „odsecanja” spektra (eng. *cut-off*)  $\exp[-(p/p_{e,\max})^2]$ , predložen u radu Zirakašvilija i Aharoniana za slučaj dominacije sinhrotronskih gubitaka (Zirakashvili & Aharonian 2007).

Maksimalni impuls elektrona  $p_{e,\max}$ , računamo u Bomovom režimu difuzije, primenom približne implicitne relacije iz rada Morlina i saradnika (Morlino et al. 2009). Ovaj pristup baziran je na izjednačavanju vremena ubrzavanja sa manjom od vremenskih skala za energetske gubitake i za starost OSN, u slučaju da se sinhrotronski gubici ne mogu zanemariti:

$$p_{e,\max} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{m_e^3 c^4}{e B_1 r_0} \frac{u_0}{c}} U_p(p_{e,\max}) \sqrt{\frac{1 - R_{\text{tot}}^{-1} U_p^{-1}(p_{e,\max})}{1 + R_B R_{\text{tot}} U_p(p_{e,\max})}}, \quad (4.11)$$

gde je  $r_0$  klasičan radijus elektrona,  $R_B$  je faktor kompresije magnetnog polja na udarnom talasu.

Spektar elektrona na udarnom talasu je u ovom slučaju dat kao:

$$f_{e,0}(p) = K_{\text{ep}} f_{p,0}(p) p^{-\delta} e^{-p^2/p_{e,\max}^2}, \quad (4.12)$$

gde  $\delta = 0$  za impulse  $p < p_b$  i  $\delta > 0$  za  $p \geq p_b$ . Ipak, ne bi trebalo očekivati oštar prekid energetskog spektra elektrona već njegovo postepeno ustrmljavanje (Blasi 2010). Stoga je u našem jednostavnom modelu potrebno da  $\delta$  bude neprekidna funkcija impulsa, što kasnije dobijamo fitovanjem posmatranog spektra. Standardno pretpostavljamo da je prostorna raspodela čestica za ravanski udarni talas konstantna iza udarnog talasa i opada ispred njega (Reynolds 2008). Zanemarujemo adijabatske gubitke jer pretpostavljamo da najveći deo radio-emisije potiče iz tanke ljuske oko glavnog udarnog talasa.

Ukupna zapreminska emisivnost (snaga po jediničnom frekvencionom intervalu, po jedinici zapremine) relativističkih elektrona definisana je kao:

$$\epsilon_\nu = \int_E P(\nu) N(E) dE. \quad (4.13)$$

Ovde,  $P(\nu)$  predstavlja ukupnu emisivnost jednog elektrona energije  $E$  koji ima ugao otklona  $\vartheta$  u odnosu na magnetno polje i dato je izrazom (Wilson, Rohlfs &

Huettemeister 2013):

$$P(\nu) = \frac{\sqrt{3}e^3 B \sin \vartheta}{m_e c^2} F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right), \quad (4.14)$$

gde je  $\nu_c = \frac{3eB_\perp p^2}{4\pi(m_e c)^3}$  kritična frekvencija elektrona i  $F(x)$  sinhrotronska funkcija definisana kao:

$$F(x) = x \int_x^\infty K_{5/3}(x') dx', \quad (4.15)$$

gde  $K_{5/3}(x)$  predstavlja modifikovanu Beselovu funkciju necelobrojnog reda (Abramowitz & Stegun 1972). Sa tačnošću manjom od 0.6 procenata, sinhrotronska funkcija  $F(x)$  može biti aproksimirana linearnom kombinacijom njenih poznatih aproksimacija za  $x \ll 1$  i  $x \gg 1$  (Fouka & Ouichaoui 2013).

Dalje, koristeći prethodne relacije, ukupnu radio-luminoznost OSN na frekvenciji  $\nu$  računamo iz dobijenog spektra elektrona  $f_{e,0}(p)$  primenom relacije:

$$L_\nu = \frac{16\pi^2 \sqrt{3}e^3}{m_e c^2} \int_{R_{cd}}^{R_s} B_\perp r^2 dr \int_{p_{inj}}^{p_{e,max}} p^2 f_{e,0}(p) F\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right) dp, \quad (4.16)$$

gde  $B_\perp$  predstavlja komponentu magnetnog polja normalnu na pravac vizure (eng. *line of sight*, LoS) i koristićemo  $B_\perp(r) = 0.5B_d(r)$ , gde je  $B_d$  vrednost magnetnog polja iza udarnog talasa.

Naš model koristi opravdanu aproksimaciju da radio-emisija ubrzanih elektrona dolazi samo iz ljuske između kontaktnog diskontinuiteta i prednjeg udarnog talasa, preko koje je prešao udarni talas. Ova pretpostavka se oslanja na činjenicu da, zbog kompresije magnetnog polja iza udarnog talasa, ukupno sinhrotronsko zračenje OSN dominantno potiče baš iz regiona iza udarnog talasa.

Gustinu radio-fluksa  $S_\nu$ , na datom rastojanju  $d$  ostatka, dobijamo iz sledeće jednačine:

$$S_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi d^2}. \quad (4.17)$$

Mnogi autori su razvijali ideju da se ubrzavanje kosmičkih zraka takođe dešava i na povratnom udarnom talasu mladih OSN (Ellison et al. 2005, Zirakashvili & Aharonian 2010, Zirakashvili & Ptuskin 2012, i drugi). Sa druge strane, teško je očekivati jako magnetno polje u materijalu odbačenom u eksploziji supernove kroz koji se kreće povratni udarni talas. Magnetno polje je „zamrznuto” u plazmi i

može oslabiti i do nekoliko redova veličina ispod nivoa potrebnog za ubrzavanje čestica, tokom ekspanzije OSN. Gotthelf sa saradnicima (Gotthelf et al. 2001) je identifikovao prednji i povratni udarni talas kod OSN Kasiopeja A i pokazao da radijalni profil radio-emisivnosti (kao i profil emisije silicijuma) karakteriše nagli rast u delu za koji smatraju da predstavlja povratni udarni talas. Ipak, Morlino i Kaprioli, ispitivanjem radijalnog profila radio-emisije, zaključuju da ne postoje čvrsti dokazi o ubrzavanju čestica na povratnom udarnom talasu (Morlino & Caprioli 2012), za slučaj relativno mladog ostatka Tiho (eng. *Tycho*). Slično primeru ostatka Tiho, trenutno dostupni radijalni profili radio-emisije ostatka G1.9+0.3, snimljeni u periodu od 1984. do 2009. godine radio-teleskopima VLA i ATCA (Green et al. 2008, De Horta et al. 2014), ne pokazuju emisiju koja bi bila pripisana povratnom udarnom talasu. Zbog svega navedenog, u ovom radu ćemo modelovati samo radio-emisiju sa prednjeg udarnog talasa ostatka G1.9+0.3 i videćemo da je to dovoljno da objasni posmatrani radio-fluks.

#### 4.2.5 Uprošćeni model integralne gama emisije

Tokom poslednje decenije, nove generacije gama teleskopa za detekciju fotona energija reda GeV i TeV, pružile su nam novi uvid u fenomenologiju OSN i procese ubrzavanja kosmičkih zraka. Smatra se da su dva različita procesa odgovorna za emisiju gama zračenja. Elektroni proizvode gama zračenje u procesu inverznog Komptonovog rasejanja na različitim mikrotalasnim, infracrvenim i optičkim fotonima, u takozvanom *leptonskom scenariju*. Doprinos netermalnog zakočnog zračenja takođe predstavlja leptonski proces, ali je često zanemarljiv kod OSN. U drugom slučaju, nazvanom *hadronski scenario*, gama zraci se proizvode u raspadu neutralnih piona ( $\pi^0$ ) proizvedenih u sudarima kosmičkih zraka i okolnog gasa.

Uprkos relativno dubokim ekspozicijama, podaci sa gama teleskopa H.E.S.S. (eng. *The High Energy Stereoscopic System*) nisu ukazali na postojanje značajne gama emisije u oblasti TeV energija ostatka G1.9+0.3 (H.E.S.S. Collaboration et al. 2014).

Kao što je istakao Ksenofontov sa saradnicima (Ksenofontov et al. 2010), očekuje se da gama fluks na energijama oko TeV raste tokom evolucije slično kao i radio-fluks,

najviše zahvaljujući porastu ukupnog broja ubrzanih kosmičkih zraka sa energijama preko 10 TeV. Bilo bi zanimljivo odrediti gama luminoznost ostatka G1.9+0.3 u funkciji od vremena i utvrditi da li će moći da se posmatra u budućnosti na energijama reda TeV sa instrumentima poput CTA (eng. *Cherenkov Telescope Array*).

Konzistentan model za predviđanje gamma emisije ostatke G1.9+0.3 izlazi iz okvira ove disertacije. Stoga se odlučujemo za pojednostavljeni model Zirakašvilija koji pretpostavlja oblik spektra  $E^{-2}$  za protone najvećih energija na udarnom talasu (Zirakashvili 2008). Ovo možda i nije toliko gruba pretpostavka, imajući u vidu da je spektar dobijen primenom standardne teorije NLDSA još strmiji od zahtevanog oblika spektra  $E^{-2.1} - E^{-2.2}$ , dobijenog iz posmatranja.

Diferencijalni gama fluks koji potiče od pionskog raspada na energijama u intervalu  $m_p c^2 < E < 0.1 E_{p,\max}$  (gde  $E_{p,\max}$  predstavlja maksimalnu energiju protona), može biti određen iz modela (Zirakashvili 2008):

$$E^2 F_{pp}(E) = \frac{R_s^3 K_{\pi\pi} \sigma_{pp} c n_H^2 \xi_{cr} m_p u_0^2}{d^2 \ln(p_{p,\max}/m_p c)} \left( 1 + 4 \frac{n_{He}}{n_H} \right)^2. \quad (4.18)$$

Ovde,  $K_{\pi\pi} = 0.17$  predstavlja deo energije protona koja se prenosi do neutralnih piona,  $\sigma_{pp}$  je potpuno neelastični  $p-p$  efikasni presek,  $\xi_{cr}$  je odnos pritiska kosmičkih zraka iza udarnog talasa i dinamičkog pritiska  $\rho_0 u_0^2$ , dok  $n_H$  i  $n_{He}$  redom predstavljaju koncentracije vodonika i helijuma u MZM, za koji smatramo da postoji veza  $n_H : n_{He} = 9 : 1$ . Koristimo vrednost  $\sigma_{pp} = 37.4 \text{ mb}^{60}$  za određivanje gama fluksa na energijama reda TeV (Kelner et al. 2006).

Diferencijalni fluks gama zraka iz procesa inverznog Komptonovog rasejanja u slučaju kada dominiraju sinhrotronski gubici, predložen od strane Zirakašvilija može se izračunati iz relacije (Zirakashvili 2008):

$$E^2 F_{IC}(E) = \frac{3\xi_{cr}}{8\xi_B} \frac{K_{ep} R_s^2 U_{rad} u_0}{d^2 \ln(p_{p,\max}/m_p c)}. \quad (4.19)$$

Ovde je  $\xi_B$  odnos gustine energije magnetnog polja  $B^2/8\pi$  i dinamičkog pritiska  $\rho_0 u_0^2$ ,  $U_{rad}$  je gustina energije rasejanih fotona, računatih za vrednost gustine energije mikrotalasnog pozadinskog zračenja (eng. *cosmic microwave background*, CMB)

---

<sup>60</sup>Barn (b) je merna jedinica za efikasne preseke, u upotrebi u nuklearnoj fizici,  $1b = 10^{-28} \text{ m}^2$ .

$U_{\text{rad}} = (4\sigma/c)T^4 \approx 4.2 \times 10^{-13} \text{ erg cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ . Fluks dat jednačinom (4.19) je validan za energije manje od karakteristične energije odsecanja, date jednačinom:

$$E_c \approx 5 \text{ TeV} \left( \frac{u_0}{3000 \text{ km/s}} \right)^2 \left( \frac{B_2}{100 \mu\text{G}} \right)^{-1} \frac{T}{2.7\text{K}}, \quad (4.20)$$

gde  $T$  predstavlja temperaturu rasejanih fotona. Proverili smo i pokazali a posteriori da energija gama zračenja od nekoliko TeV zadovoljava ovaj uslov do oko 2500 godina posle inicijalne eksplozije.

### 4.3 Rezultati i diskusija

Grinova posmatranja ostatka G1.9+0.3 radio-interferometrom VLA (Green 2004) ukazuju na izraženu asimetriju ljuske na talasnoj dužini od 21 cm, verovatno ukazujući na gradijent okolne gustine. Srednji radijus sjajnog prstena u X-području je oko 2 pc, dok su istočna i zapadna ljuska radijusa oko 2.2 pc (Reynolds 2008). U našem modelu zanemarujemo postojanje gradijenta gustine u okolnoj MZM, koji bi uticao na razvijanje složenije morfologije ostatka (videti Orlando et al. 2007), i kao krajnji rezultat želimo da dobijemo integralnu radio-emisiju u kontinuumu.

Eventualno modelovanje posmatrane radio-morfologije, uz pretpostavku da postoji globalni gradijent magnetnog polja, bilo bi teško zbog postojećeg neslaganja između posmatranja i teorije. Polarizaciona posmatranja ukazuju na pretežno radialno, uređeno magnetno polje mladih OSN (Helder et al. 2012, Reynolds, Gaensler & Bocchino 2012). Sa druge strane, moderne teorije i simulacije pojačanja magnetnog polja predviđaju jaku turbulenciju pojačanog polja (Bell 2004, Caprioli & Spitkovsky 2014b) kao rezultat interakcije kosmičkih zraka sa plazmom ispred udarnog talasa i okolnim magnetnim poljem.

Razvili smo 3D HD simulacije koje opisuju širenje OSN G1.9+0.3 u sfernim koordinatama, koristeći kod PLUTO, prema modelu opisanom u prethodnim poglavljima. Galaktičko magnetno polje nema značajan dinamički uticaj na evoluciju OSN, pa stoga ne koristimo MHD implementaciju koda PLUTO. Ipak, jačinu magnetnog polja i njegovo pojačanje računamo u odvojenom modulu NLDSA koji pokrećemo zajedno sa kodom PLUTO, s obzirom na to da ovo polje utiče na ubrzanje čestica,

kompresibilnost fluida i radio-emisiju.

Početni uslovi u našoj simulaciji izabrani su tako da reprodukuju izgled ostatka G1.9+0.3 posle oko 100 godina evolucije<sup>61</sup> u pogledu radijusa, koji je oko 2 pc (uglovni dijametar oko 100 lučnih sekundi) na lokaciji blizu centra Galaksije, i brzinu udarnog talasa  $14\,000\text{ km s}^{-1}$ , dobijenu na osnovu emisionih linija gvožđa, širine oko  $28\,000\text{ km s}^{-1}$  (Borkowski et al. 2010). U svim pokrenutim simulacijama uzima se jačina okolnog magnetnog polja od  $B_0 = 5\mu\text{G}$ , što predstavlja prosečno magnetno polje u Galaksiji. Prilikom početne inicijalizacije gustine odbačenog materijala u eksploziji koristimo eksponencijalni profil za koji je u radu Dvarkadasa i Ševaljea pokazano da predstavlja najbolju aproksimaciju modela eksplozije tipa Ia (Dvarkadas & Chevalier 1998), u kojoj dolazi do deflagracije belog patuljka. Na glatki eksponencijalni profil dodajemo zgušnjavanja (grudve) u vidu slučajnih perturbacija gustine u okviru ćelija (Orlando et al. 2012), koje aktiviraju Rejli-Tejlorove nestabilnosti na kontaktnom diskontinuitetu. Simulacija počinje od sfernog ostatka radijusa 0.05 pc (što predstavlja približno radijus 2.5 godine posle eksplozije), mase jednake Čandrasekarovoj masi  $M_{\text{ej}} = 1.4M_{\text{sun}}$  i ukupne energije  $E_0 = 10^{51}$  erg. OSN evoluira kroz homogenu izotermalnu plazmu temperature  $T = 10^4$  K (kojoj odgovara izotermalna brzina zvuka  $c_s = 9.9\text{ km/s}$  i Alfenova brzina  $v_A = 39\text{ km/s}$ <sup>62</sup> za koncentraciju čestica MZM  $n_{\text{H}} = 0.02\text{ cm}^{-3}$ ) i gustinu  $\rho_0 = \mu m_{\text{H}} n_{\text{H}}$ , gde je  $\mu = 1.4$  srednja atomska masa (pretpostavljajući kosmičke zastupljenosti) i masa atoma vodonika  $m_{\text{H}}$ .

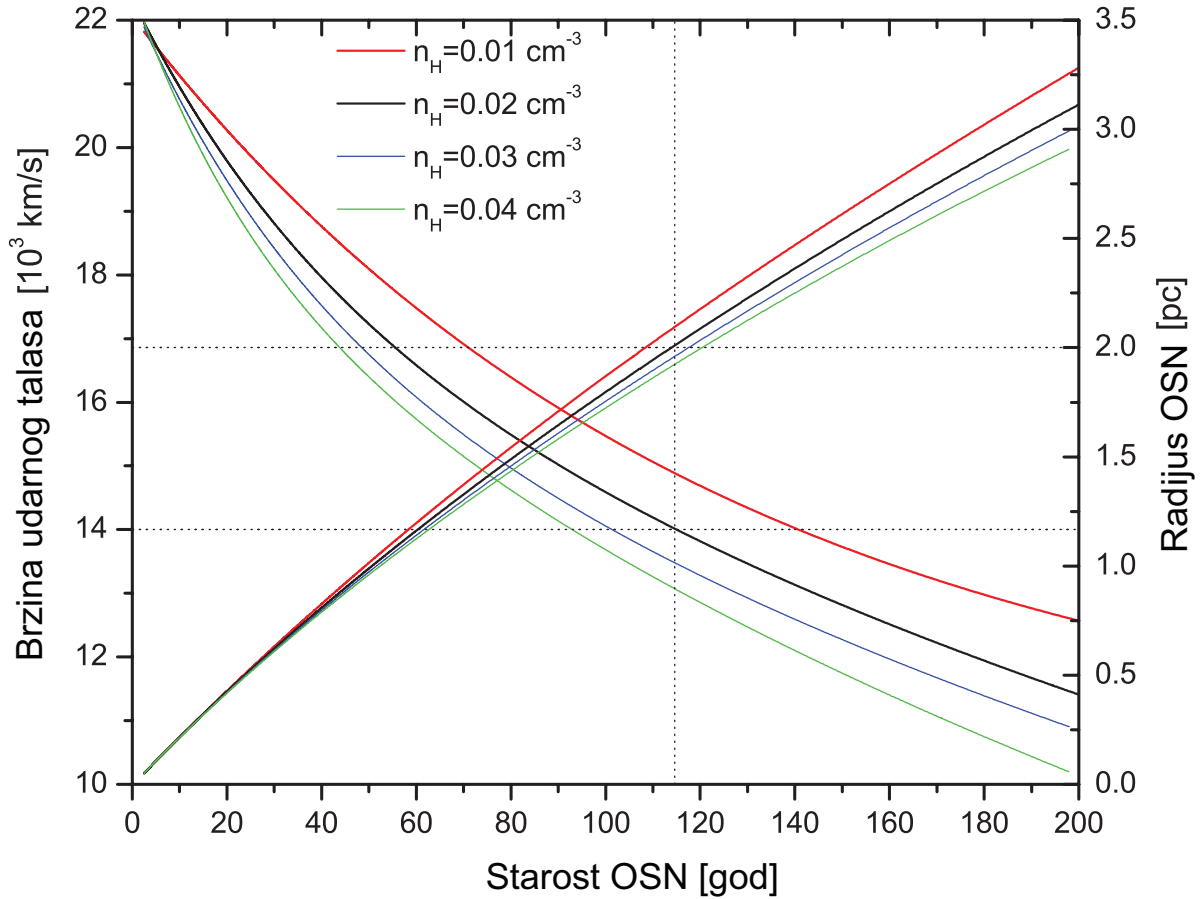
Kako bismo odredili gustinu okolne MZM i starost ostatka G1.9+0.3, pripremili smo set 3D hidrodinamičkih simulacija sa različitim gustinama plazme kroz koju evoluira OSN, od  $0.01\text{ cm}^{-3}$  do  $0.04\text{ cm}^{-3}$  (videti sliku 24). Simuliramo jedan oktant ostatka, tokom perioda od 200 godina, sa ukupnom rezolucijom mreže od  $2048 \times 512 \times 512$  ćelija, redom po pojedinačnim sfernim koordinatama  $r$ ,  $\theta$  i  $\phi$  (Slika 25). Ubrzo posle eksplozije, dinamičku evoluciju OSN karakteriše povećanje radijusa i opadanje brzine udarnog talasa<sup>63</sup>. Potrebno je da posmatrana brzina

<sup>61</sup>De Horta sa saradnicima predlaže najveću gornju granicu starosti ovog ostatka od 180 godine, uz pretpostavku konstantne brzine širenja (De Horta et al. 2014).

<sup>62</sup>Brzina od  $14\,000\text{ km/s}$  daje Mahov broj ispred udarnog talasa  $M_S \approx 1410$  i Alfenov Mahov broj  $M_A \approx 360$ .

<sup>63</sup>Naglašavamo da brzina udarnog talasa nije isto što i brzina fluida u našoj simulacionoj kutiji,





Slika 24: Evolucija brzine udarnog talasa i radijusa OSN G1.9+0.3, dobijena iz 3D HD simulacija, uključujući efikasno difuzno ubrzavanje. Na levoj osi je predstavljena brzina udarnog talasa u jedinicama  $10^3$  km/s, koja opada tokom evolucije. Desna osa predstavlja radijus ostatka u parsecima. Evolutivne trake radijusa i brzine odgovaraju gustinama MZM od 0.01 (puna crvena linija), 0.02 (crna), 0.03 (plava) i 0.04 (zeleni)  $\text{cm}^{-3}$ , u jedinicama broja atoma vodonika po  $\text{cm}^3$ . Horizontalna tačkasta linija odgovara trenutno dostupnim posmatranjima srednjeg radijusa (gornja linija) i brzine udarnog talasa (donja linija) iz 2008. godine. Vertikalna tačkasta linija označava epohu  $t_{\text{SNR}} = 115$  yr kada se poklapaju posmatrane i simulirane vrednosti radijusa i brzine, tj. predstavlja starost OSN dobijenu iz naših simulacija. Početno vreme i radijus u našim simulacijama iznose redom:  $t_0 \approx 2.5$  yr i  $R_0 \approx 0.05$  pc.

udarnog talasa od 14 000 km/s i radijus OSN od oko 2 pc budu dostignuti u isto vreme, kako bi ovo vreme proglasili starošću ostatka. Gustina plazme za koju je ispunjen ovaj uslov iznosi  $n_H = 0.02 \text{ cm}^{-3}$ , a odgovarajuća starost je 115 godina, za epohu 2008 kada su izvršena posmatranja koja poredimo sa modelom. Ovo ukazuje na to da se eksplozija dogodila negde oko 1893. godine i da je trenutna starost oko 123 godine.

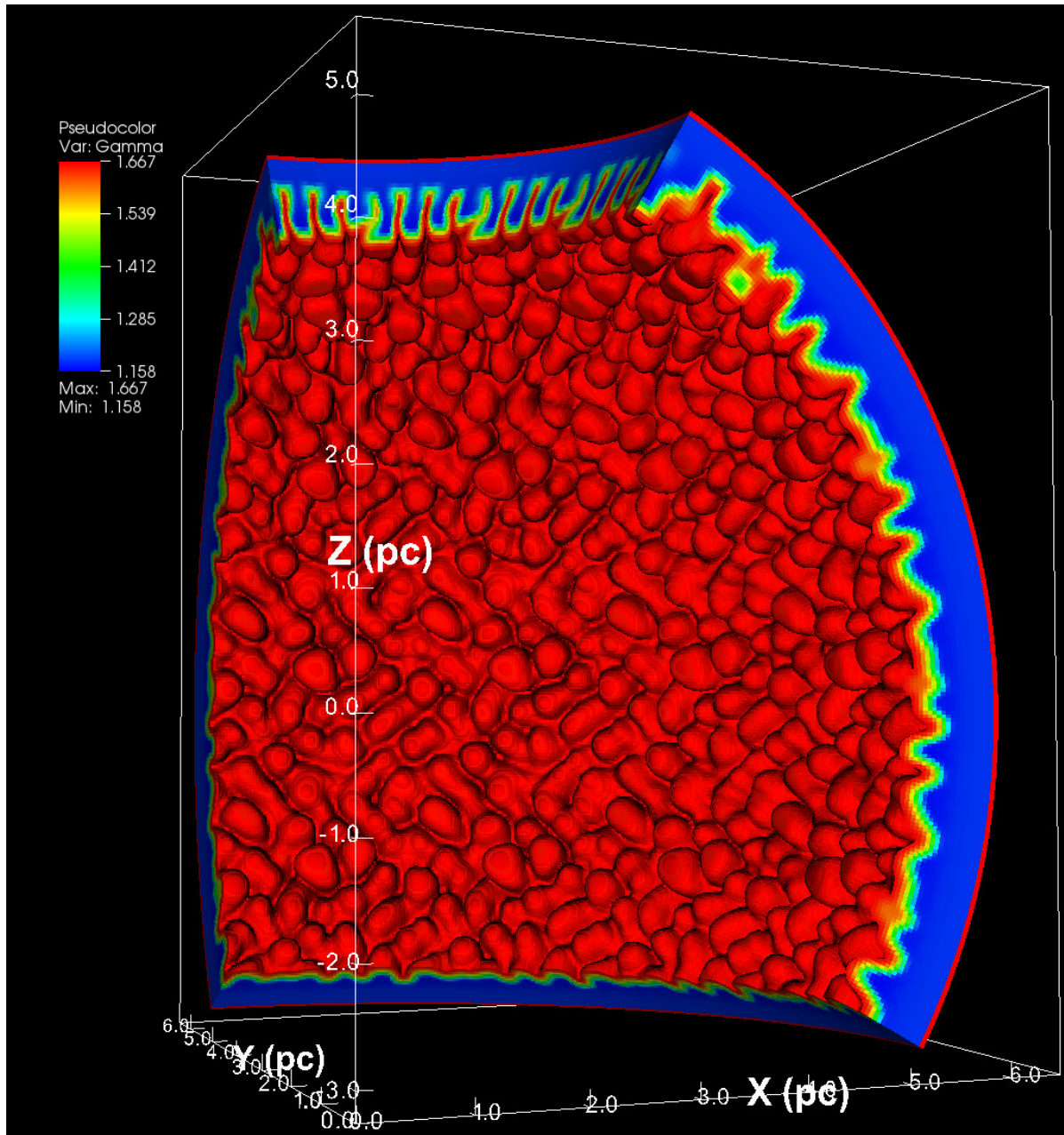
Referentne radio-flukseve za OSN G1.9+0.3 uzimamo iz Grinovih posmatranja radio-interferometrom VLA na 1.43 i 4.86 GHz i oni redom iznose  $0.935 \pm 0.047$  Jy i  $0.437 \pm 0.022$  Jy. Ovi integralni fluksevi daju strmu vrednost spektralnog indeksa  $\alpha$  (definisano tako da je gustina fluksa u funkciji frekvencije  $S_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ ) od  $0.62 \pm 0.06$ , uz pretpostavku da statističke greške pojedinačnih flukseva iznose 5%. Posmatranja uglavnom potvrđuju da mladi OSN imaju strmije spektralne indekse od očekivanog  $\alpha = 0.5$  (Urošević 2014), izvedenog iz osnovnog modela DSA (Bell 1978a, b). Bel sa saradnicima je pokazao da bi mladi OSN sa kvazi-normalnom orijentacijom magnetnog polja trebalo da imaju strmije spektralne indekse (Bell et al. 2011). Za detaljan pregled radio-spektara OSN i neka druga moguća objašnjenja strmih radio-spektara mladih OSN, pogledati pregledni rad Uroševića (Urošević 2014). Neke osobine vremenski zavisnih rešenja (umesto kvazi-stacionarnih koje koristimo u našim modelima) mogu takođe biti odgovorne za eventualna odstupanja posmatranih spektralnih indeksa kod mladih OSN u odnosu na vrednost 0.5 koju predviđa teorija (Petruk & Kopytko 2016).

Dostupna su nam i merenja promene radio-sjaja ostatka G1.9+0.3 na frekvenciji 843 MHz, radio-teleskopom MOST (eng. *The Molonglo Observatory Synthesis Telescope*), koja pokrivaju period od oko 20 godina, od 1988. do 2007. godine (Murphy et al. 2008). Dva najskorija merenja (najbliža epohi Grinovih posmatranja teleskopom VLA),  $0.97 \pm 0.11$  Jy iz epohe 2007.430 i  $1.32 \pm 0.09$  Jy iz epohe 2007.463, biće korišćena za poređenje sa našim fitom VLA spektra (Green et al. 2008), iako evidentno imaju velike greške merenja i nisu međusobno konzistentna.

De Horta i saradnici takođe u svom radu (De Horta et al. 2014) navode merenja gustine fluksa ostatka G1.9+0.3, ali su njihove vrednosti značajno manje u odnosu 

---

već brzina diskontinuiteta koji razdvaja fluide sa različitim parametrima.



Slika 25: Prostorna 3D raspodela efektivnog adijabatskog indeksa plazme u modelu koji uključuje modifikaciju udarnog talasa od strane kosmičkih zraka. Simulacija opisuje evoluciju OSN kroz okolnu MZM (koristili smo specijalizovani softver za obradu 3D izlaza simulacija, VisIT; Brugger et al. 2012).

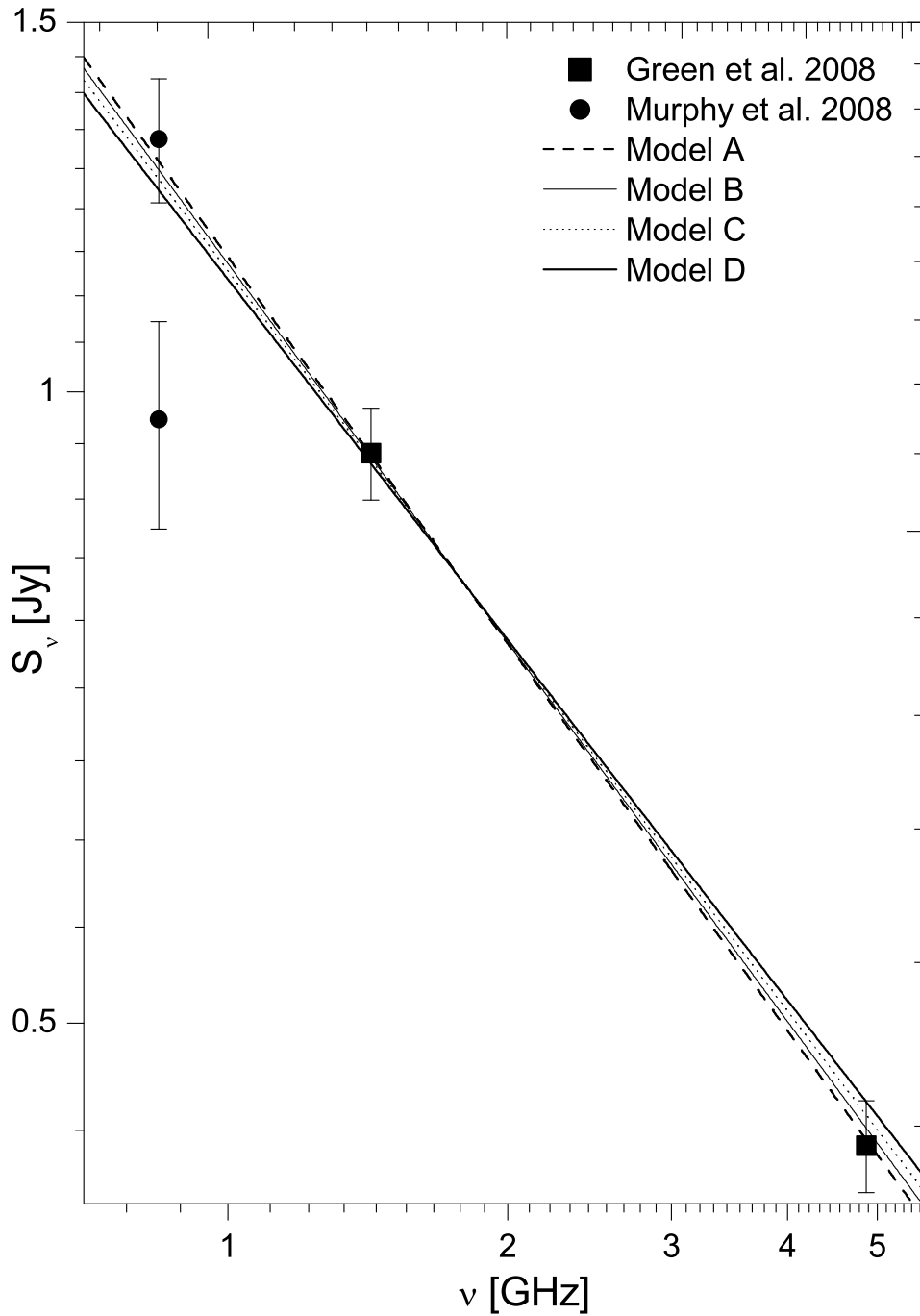
Tabela 1: Parametri modela za simulirane radio-spektre. U svim modelima, koncentracija okolne sredine iznosi  $0.02 \text{ cm}^{-3}$ ,  $\alpha$  predstavlja ranije uveden radio-spektralni indeks,  $\eta$  označava udeo čestica koje ulaze u proces ubrzavanja, dok  $S_{1.425}$  i  $S_{4.860}$  predstavljaju redom modelovane gustine fluksa na 1425 i 4860 MHz u Jy.

	$\xi$	$\zeta$	$\eta [\times 10^{-3}]$	$\alpha$	$S_{1.425}$	$S_{4.860}$	$R_{\text{tot}}$	$R_{\text{sub}}$
Model A	3.30	0.40	1.1	0.619	0.933	0.440	12.0	3.2
Model B	3.35	0.33	0.9	0.605	0.931	0.446	11.7	3.3
Model C	3.40	0.24	0.7	0.591	0.928	0.452	11.3	3.4
Model D	3.45	0.10	0.5	0.574	0.924	0.459	10.8	3.5

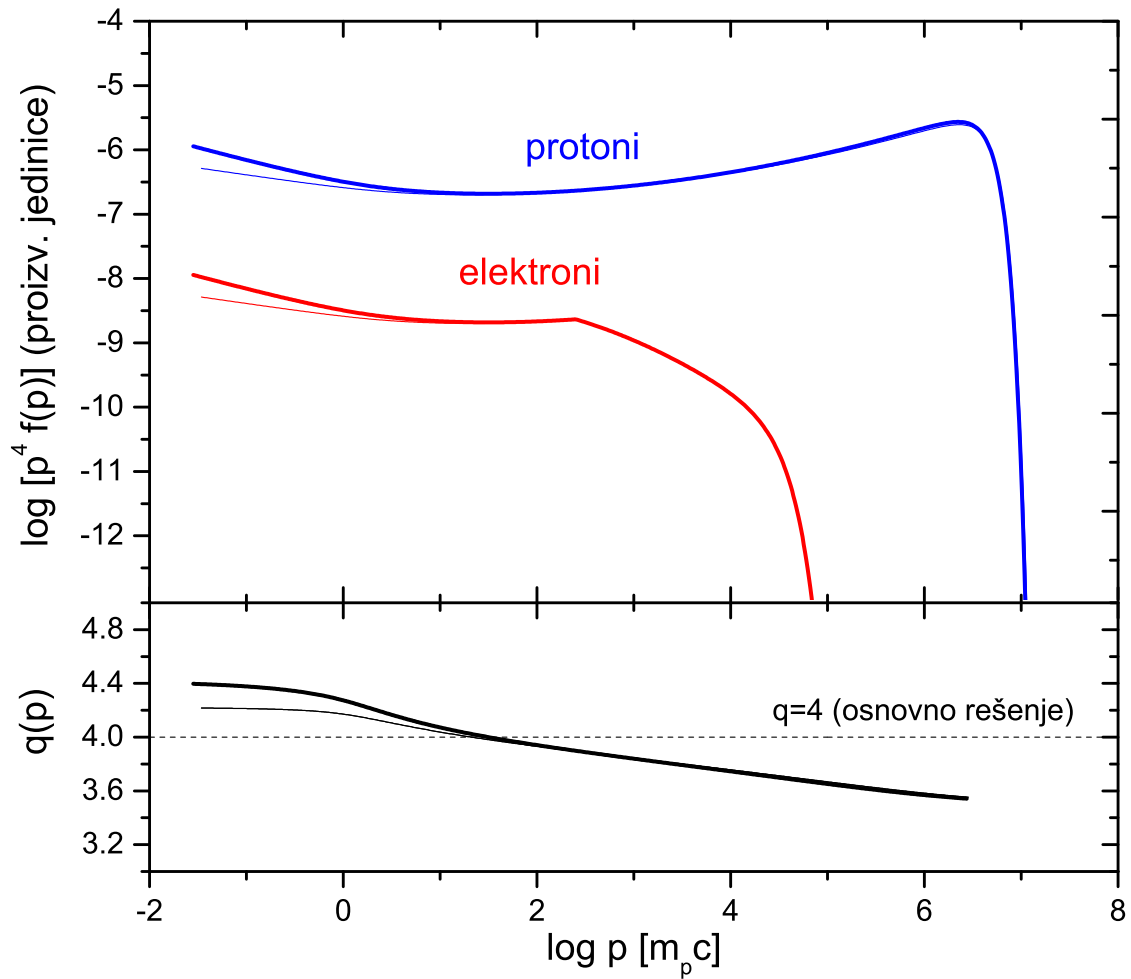
na merenja VLA (za čak  $\sim 50 \%$ ). Kao mogući razlog oni navode nedostatke konfiguracija sa manjim rastojanjem između antena i slabije  $uv$ -pokrivanje na ATCA snimcima koje su koristili.

Korišćeni hidrodinamički pristup ne omogućava samokonzistentan tretman magnetnih turbulencija i anizotropija višeg reda koje, po rezultatima Bela i saradnika (Bell et al. 2011), mogu ustrmljavati spektar na kvazi-normalnim (vektor normale i magnetnog polja približno normalni) udarnim talasima. Preostaje nam da radio-spektar ostatka G1.9+0.3 modelujemo koristeći Blazijev model NLDSA i pretpostavljajući efikasno ubrzavanje koje bi dovelo do ustrmljavanja spektra (efikasnost ubrzavanja  $\eta \approx 10^{-3}$  postiže se u našim modelima za  $\xi$  između 3.3 i 3.45). Kod ovako mladih ostataka prirodno je očekivati efikasno ubrzavanje, a to se slaže i sa radovima drugih autora (videti npr. Ksenofontov et al. 2010). Elektroni koji su odgovorni za emisiju zračenja putem sinhrotronskog mehanizma (u pojačanom magnetnom polju  $\sim 100 \mu\text{G}$ ) na frekvenciji  $\sim 1 \text{ GHz}$  imaju energiju  $\sim 1 \text{ GeV}$  i impuls  $\sim m_p c$ . Na energijama oko  $1 \text{ GeV}$ , naš energetski spektar ubrzanih čestica na modifikovanom udarnom talasu  $N(E) \propto E^{-\gamma}$  postaje „strmiji”, sa eksponentom  $\gamma$  oko 2.2, što daje traženo ustrmljavanje sinhrotronskog spektra.

Iz fita sinhrotronske emisije, dobijamo vrednost  $2 \times 10^{-3}$  za odnos broja elektrona i protona  $K_{\text{ep}}$ , koja je nešto niža od vrednosti izmerene u spektru kosmičkih zraka blizu Zemlje. Naša vrednost je ipak u dobrom slaganju sa vrednostima iz sličnih studija (na primer, Ksenofontov et al. 2010, Morlino & Caprioli 2012, Slane et al. 2014), iako Juan i saradnici (Yuan et al. 2012) predlažu model u kome je  $K_{\text{ep}} = 10^{-2}$  jedinstvena vrednost koja dobro opisuje sve Galaktičke ostatke. Dinamička uloga elektrona se zanemaruje u korišćenom modelu NLDSA, tako da pomenuti parametre



Slika 26: Mereni radio-fluksevi na 843 MHz (MOST, Murphy et al. 2008), zajedno sa merenjima na 1425 i 4860 MHz (VLA, Green et al. 2008) i četiri modelovana radio-spektra, za odgovarajuće modele iz tabele 1. Uključili smo dva fluksa dobijena teleskopom MOST na 843 MHz zbog poređenja, posmatrana u epohama 2007.46 i 2007.43, vremenski najbližim epohi VLA posmatranja iz 2008. godine. Eventualno dodavanje ranijih posmatranja teleskopom MOST na ovaj grafik bi morala da prati korekcija usled promene fluksa tokom godina. Za okolno magnetno polje uzimamo vrednost  $B_0 = 5 \mu\text{G}$ . Posmatrani i modelovani radio-fluksevi odgovaraju epohi 2008, kada je OSN G1.9+0.3 bio star oko 115 godina, koliko je dobijeno iz naših simulacija.



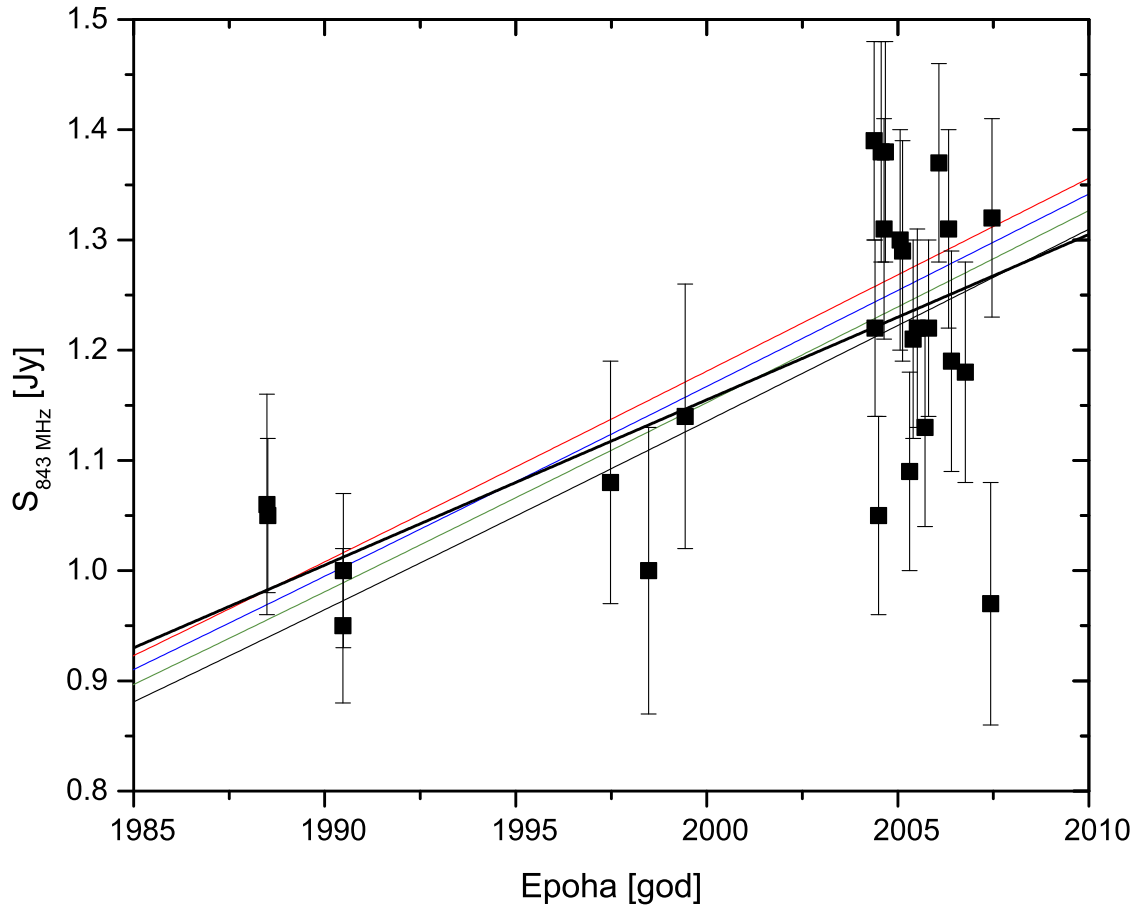
Slika 27: Netermalni deo spektra ubrzanih protona i elektrona (gornji panel) 115 godina posle eksplozije supernove i nagib protonskog spektra  $q(p) = -\frac{d \ln f_{p,0}(p)}{dp}$  za pretpostavljenu raspodelu čestica  $\propto p^{-q}$  (donji panel). Prikazana su dva karakteristična modela iz tabele 1, efikasno ubrzavanje u modelu A (deblja puna linija) i ubrzavanje najmanje efikasnosti u modelu D (tanka puna linija).

tar ima samo ulogu faktora skaliranja radio-emisije i ne očekuje se da kvalitativno utiče na radio-evoluciju.

Tri parametra su od presudnog značaja za ukupni radio-fluks u našim simulacijama: parametar injekcije  $\xi$ , njime određeni deo čestica  $\eta$  koje će ući u proces ubrzavanja i Kapriolijev parametar  $\zeta$ , koji kontroliše proces zagrevanja plazme usled nelinearnog prigušenja Alfenovih talasa i u određenoj meri redukuje modifikaciju udarnog talasa.

Već smo naglasili da je za dobijanja strmijeg radio-spektra neophodno efikasno ubrzavanje, međutim vrednosti parametra  $\xi$  oko 3.4 takođe dovode do efikasnog pojačanja magnetnog polja i povećanja radio-fluksa. Prema tome, opravdano je očekivati određeno prigušenje magnetnih talasa u plazmi i vrednosti Kapriolijevog parametra  $\zeta$  između 0.1 i 0.4 daju dobro slaganje simulacija sa dostupnim posmatranjima. Kang sa saradnicima je u svojim heurističkim modelima pojačanja magnetnog polja u prekursoru, kao razumnu procenu koristila  $\zeta = 0.5$  (Kang et al. 2013). Koristimo ukupno četiri modela sa parametrima injekcije  $\xi = 3.30, 3.35, 3.40$  i  $3.45$ , redom označeni kao modeli A, B, C i D (tabela 1 i slika 26). Pomenuti modeli daju kao krajnji rezultat slične integralne radio-flukseve za epohu 2008 ali je glavni cilj njihovog uvođenja ispitati da li i koliko parametri utiču na evoluciju radio-fluksa. Slika 26 ukazuje na to da merenje radio-teleskopom MOST na 843 MHz od  $0.97 \pm 0.11$  Jy verovatno nije pouzdano jer, pored statističkih, sadrži značajne instrumentalne greške. Naš model uspešno reprodukuje posmatrane radio-flukseve iz 2008. godine, pri čemu je dobijena jačina magnetnog polja iza udarnog talasa oko  $B_2 = 280 \mu\text{G}$ . Simulacije pokazuju dobro slaganje sa vrednošću  $\approx 230 \mu\text{G}$  dobijenom za ostatak G1.9+0.3 iz računa jednakog učešća (Arbutina et al. 2012). Takođe, posmatrane brze promene u X-području za značajno stariji OSN RX J1713.72–3946, ukazuju na pojačanje magnetnog polja za faktor oko 100 (Uchiyama et al. 2007). Iz simulacije koja prati evoluciju ostatka tokom 2500 godina, dobijena je zavisnost pojačanog magnetnog polja iza udarnog talasa od brzine udarnog talasa  $B_2 \propto u_0^{0.76} \approx u_0^{3/4}$  (za diskusiju teorijske pozadine ove zavisnosti videti poglavlje 4.2.3).

Grafik na slici 27 pokazuje da se spektar ubrzanih čestica razlikuje od predviđenog standardnom teorijom DSA, koja daje  $\propto p^{-4}$  u raspodeli po impulsima i od-



Slika 28: Posmatrana i simulirana evolucija integralnog radio-fluksa na frekvenciji 843 MHz. Crni kvadrati sa greškama predstavljaju radio-krivu sjaja za G1.9+0.3 dobijenu u periodu od 1988. do 2007. iz posmatranja teleskopom MOST (Murphy et al. 2008). Crna deblja linija predstavlja fit metodom najmanjih kvadrata sa gradijentom  $0.015 \text{ Jy yr}^{-1}$ . Predviđanja porasta radio-fluksa iz naših simulacija predstavljena su linijama u boji, za različite modele: model A (crvena), model B (plava), model C (zelena) i model D (crna), dajući jako slične vrednosti brzine promene fluksa od  $\approx 0.017 \text{ Jy yr}^{-1}$ .



govara energetske raspodeli  $\propto E^{-2}$  u ultrarelativističkom režimu. Slično uvođenju prekidne energije spektra elektrona (opisano u poglavlju 4.2.4), odsecanje spektra protona blizu njihovog maksimalnog impulsa postizemo množenjem njihove raspodele eksponencijalnim množiocem, u obliku predloženom od strane Lija i saradnika (Lee et al. 2012). Za dovoljno visoke energije, funkcija raspodele elektrona dodatno odstupa od spektra koji predviđa NLDSA zbog sinhrotronskih gubitaka.

Ranije smo već pomenuli da je posmatrana evolucija gustine radio-fluksa ostatka G1.9+0.3 bazirana na 25 merenja radio-teleskopom MOST (Murphy et al. 2008). Ova posmatranja su realizovana pomoću istog instrumenta, na jednoj frekvenciji koja iznosi 843 MHz i sa uporedivom rezolucijom ( $43 \times 91$  ili  $43 \times 95$  arcsec<sup>2</sup>). Zbog toga pokrećemo numeričke simulacije za različite parametre modela prikazane u tabeli 1 i sintetizujemo ukupnu gustinu fluksa na 843 MHz tokom perioda od 1985. do 2010. godine, kako bi napravili poređenje sa posmatranjima (slika 28). Dobili smo srednji gradijent fluksa od oko  $0.017 \text{ Jy yr}^{-1}$  tokom ovog perioda (1.8 procenata godišnje), što je u dobrom slaganju sa gradijentom dobijenim iz posmatranja teleskopom MOST i veoma blizu Grinovoj proceni od  $\sim 2$  procenata godišnje (Green et al. 2008), baziranoj na skupu posmatranja različitim instrumentima, sakupljenim iz literature. Tokom simuliranog dela faze slobodnog širenja, dobijena je zavisnost gustine fluksa od dijametra OSN  $S_\nu \propto D^{2.675}$ , kojoj odgovara zavisnost površinskog sjaja  $\Sigma_\nu \propto D^{0.675}$ , dok Berežko i Folk za ovu fazu evolucije dobijaju nešto strmiju zavisnost  $\Sigma_\nu \propto D$  (Berezhko & Völk 2004). Zanimljivo je da promena sjaja u X-području za G1.9+0.3, izmerena u radu Karltona i saradnika (Carlton et al. 2011), iznosi  $1.7 \pm 1.0$  procenata godišnje i približno odgovara posmatranim i modelovanim vrednostima u radio-području.

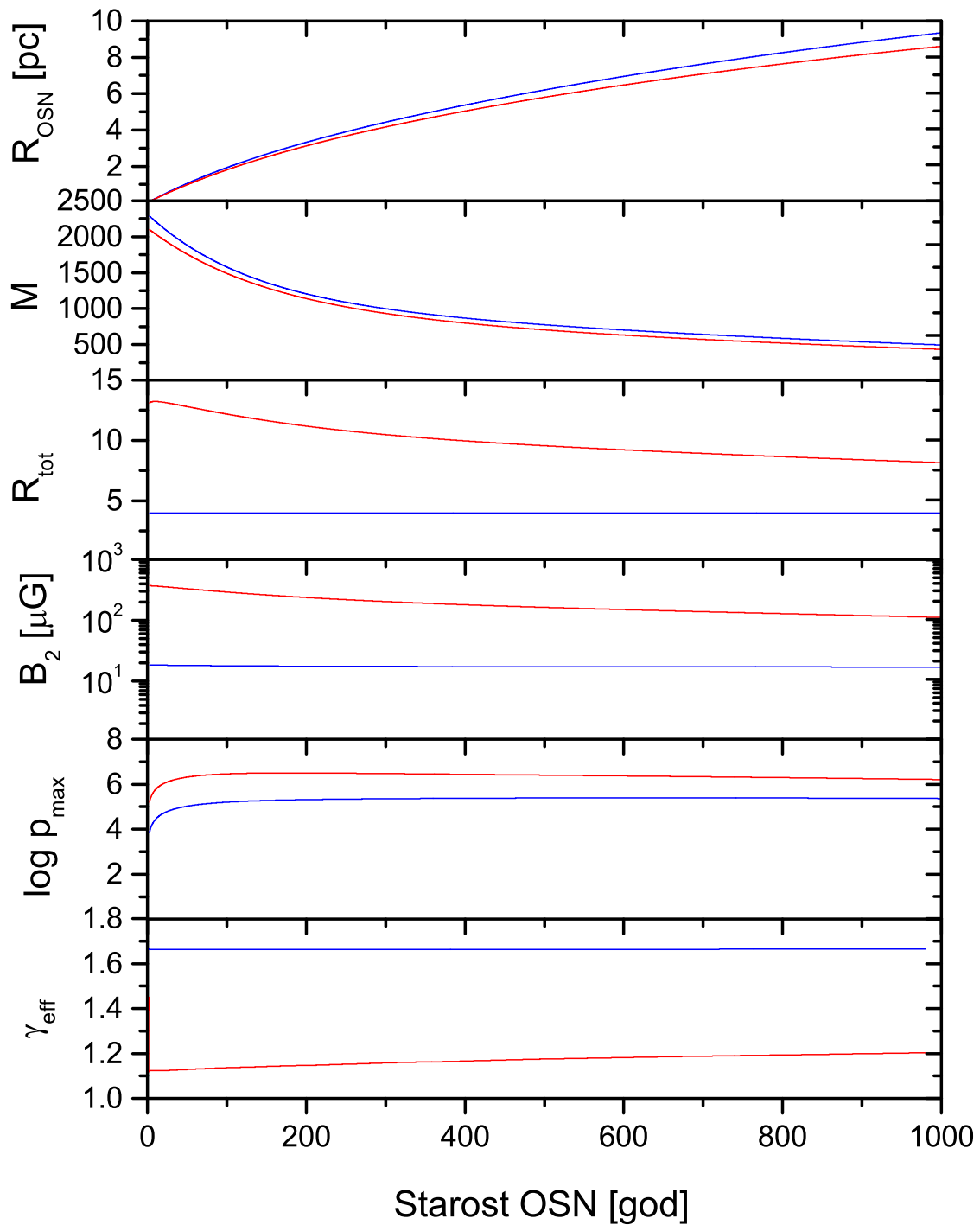
Tri merenja gustine fluksa OSN G1.9+0.3 na talasnoj dužini od 11 cm, 100-metarskim radio-teleskopom Efelsberg ukazuju na jasan trend rasta za period od oko 30 godina. Ova merenja su redom:  $0.44 \pm 0.05$  Jy iz epohe 1983.48 (Reich et al. 1984, Furst et al. 1990),  $0.61 \pm 0.02$  Jy iz epohe 2008.56 i  $0.65 \pm 0.02$  Jy iz epohe 2016.72 (Dr. Wolfgang Reich, privatna komunikacija). Brzina promene gustine radio-fluksa iz merenja teleskopom Efelsberg iznosi oko 0.006 Jy godišnje, dok naš model u odgovarajućem periodu predviđa 0.008 Jy godišnje na frekvenciji 2695 MHz.

Relativna promena fluksa, nezavisna od frekvencije, za podatke sa teleskopa Efel-sbeg iznost  $\approx 1.4$  procenata godišnje i u dobrom je slaganju sa drugim merenjima i simulacijama.

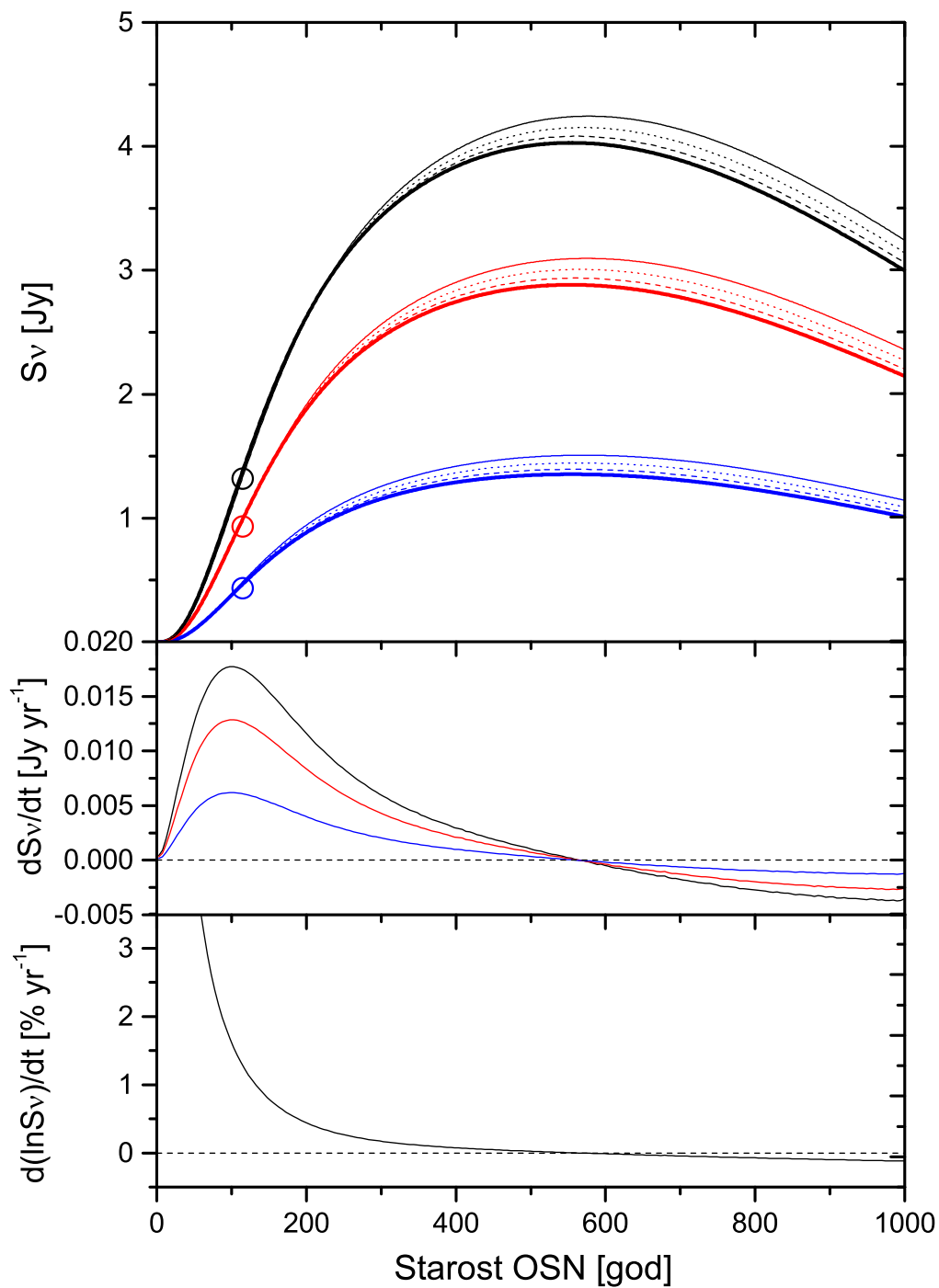
Iz naših simulacija takođe dobijamo i stopu širenja prednjeg udarnog talasa, za period od 1985. do 2010. godine, koji približno odgovara dostupnim posmatranjima. Simulacije daju vrednost od 0.9 procenata godišnje, što je blizu vrednostima  $\approx 0.65$  procenata godišnje, iz posmatranja teleskopom VLA (Green et al. 2008), i  $0.64 \pm 0.05$  procenata godišnje (Carlton et al. 2011), koja je dobijena upoređivanjem snimaka dobijenih teleskopom Čandra (eng. *Chandra*) u X-području.

Slika 29 prikazuje evoluciju različitih osobina razmatranog OSN za period od 1000 godina. Poredimo evoluciju koja odgovara slučajevima efikasnog ubrzavanja čestica (uključujući pojačanje magnetnog polja) i slučaj kada su nelinearni efekti zanemarljivi. Crvena linija odgovara slučaju sa izraženim nelinearnim efektima i modifikovanim udarnim talasom (parametri iz modela A), dok plava linija prikazuje evoluciju OSN sa parametrom injekcije  $\xi = 4.8$  koji znači skoro zanemarljiv broj ubrzanih kosmičkih zraka. Ukupna kompresija u drugom slučaju ograničena je na 4 i pojačanje magnetnog polja iza udarnog talasa odgovara samo kompresiji fluida, što je daleko ispod vrednosti potrebnih za radio-emisiju koja odgovara posmatranjima.

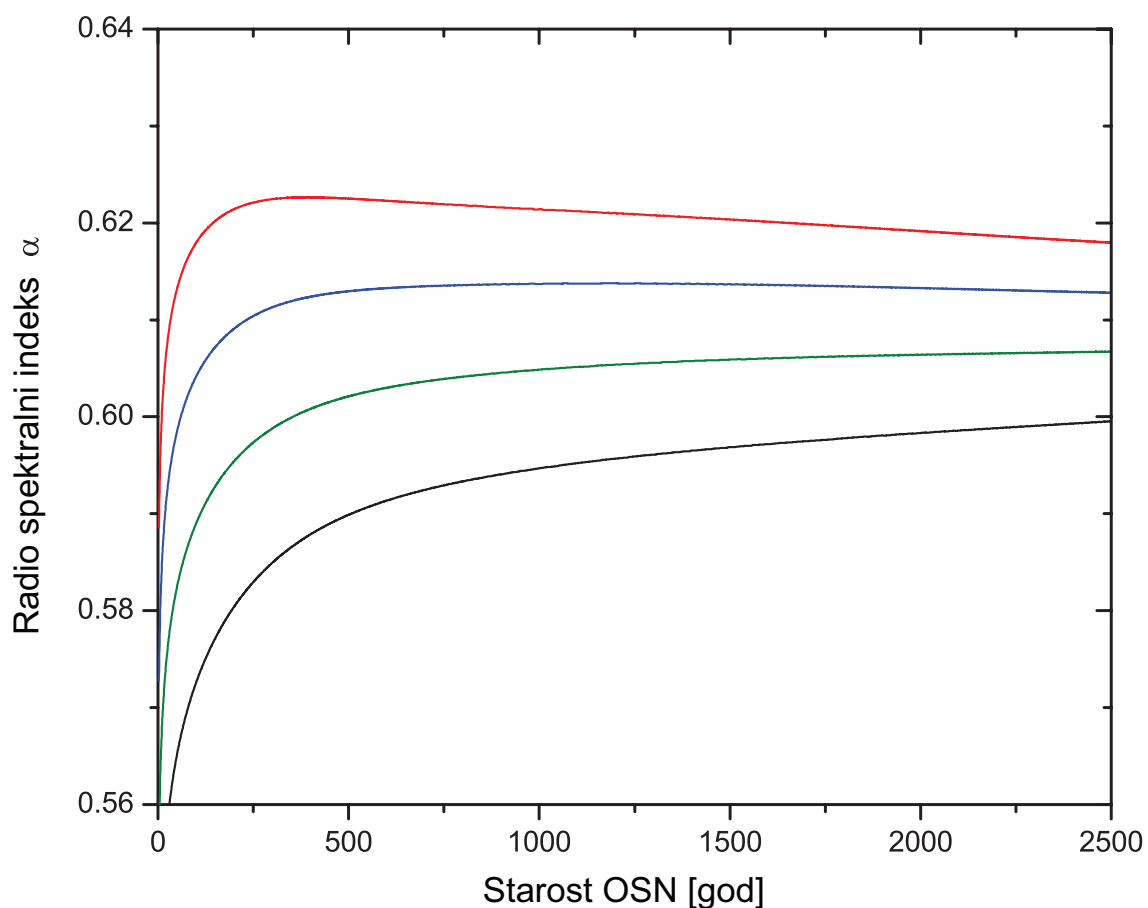
Kao jedan od glavnih ciljeva ovog dela disertacije, simuliramo vremensku zavisnost gustine fluksa  $S_\nu$  sinhrotronske radio-emisije na različitim frekvencijama sa odgovarajućom brzinom promene fluksa  $\dot{S}_\nu$  u  $\text{Jy yr}^{-1}$  i relativnom promenom, nezavisnom od frekvencije,  $\frac{\dot{S}_\nu}{S_\nu}$  u procentima (slika 30). Naš model predviđa rast radio-emisije ostatka G1.9+0.3 tokom početnog dela faze slobodnog širenja, dostizanje maksimuma posle oko 600 godina od eksplozije i opadanje sjaja tokom preostalog dela faze slobodnog širenja i kasnije Sedov-Tejlorove faze. Za dobijenu okolnu gustinu od  $0.02 \text{ cm}^{-3}$ , radijus oko 11.3 pc označava kraj faze slobodnog širenja (u kojoj je za celokupnu dinamiku OSN odgovoran materijal odbačen u eksploziji), koja traje dok važi  $M_{\text{sw}} \leq 3M_{\text{ej}}$ , gde je  $M_{\text{sw}}$  masa gasa koju je prebrisao udarni talas, a  $M_{\text{ej}}$  izbačena masa u eksploziji. U našim simulacijama faza slobodnog širenja traje  $\approx 1700$  godina. Model u tom trenutku takođe predviđa maksimalne gustine fluksa  $\sim 4.3, 3.1$  i  $1.5 \text{ Jy}$ , redom na frekvencijama 843, 1425 i 4860 MHz, koje su oko tri puta



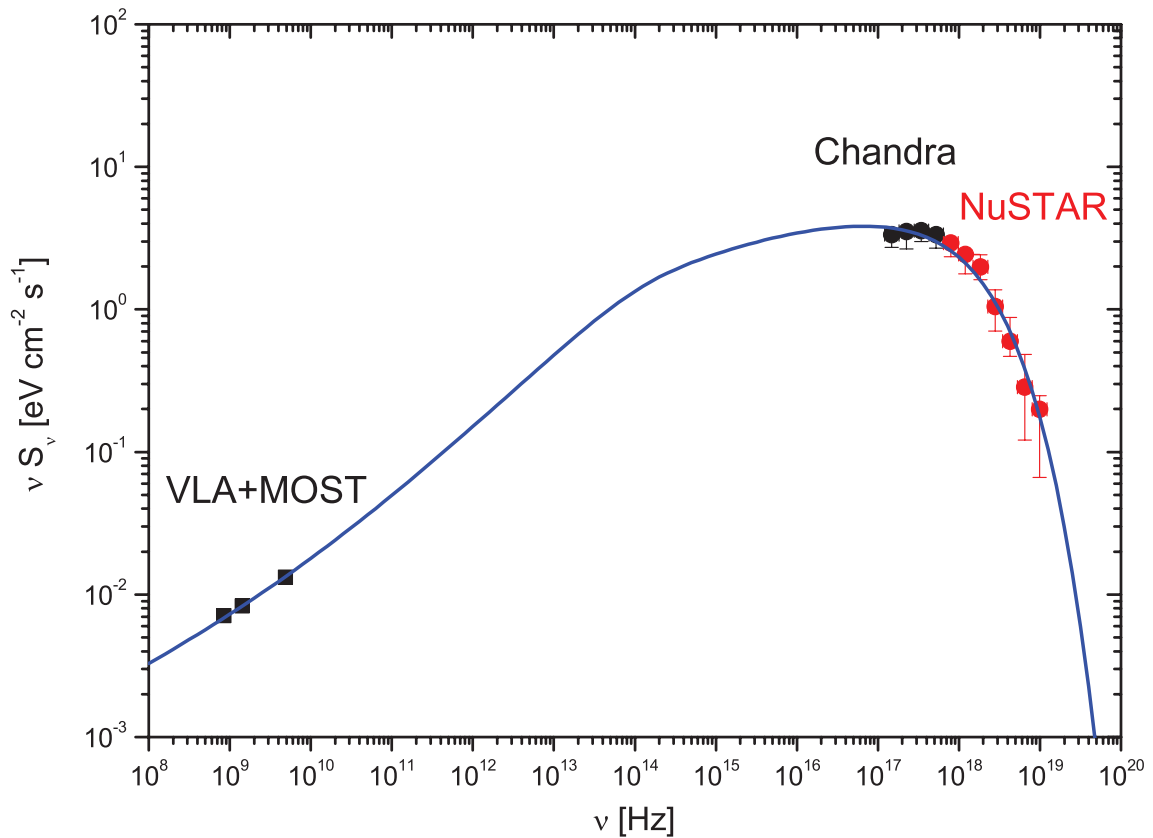
Slika 29: Evolucija parametara OSN G1.9+0.3 za period od 1000 godine. Plava linija predstavlja model sa malim brojem ubrzanih kosmičkih zraka ( $\xi = 4.8$ ) i zanemarljivim nelinearnim efektima, dok crvena linija predstavlja NLDSA slučaj sa parametrima iz modela A (najefikasnije ubrzavanje među modelima u tabeli 1).



Slika 30: Simulacija radio-evolucije ostatka G1.9+0.3 tokom perioda od 1000 godina posle eksplozije. Gornji panel pokazuje evoluciju gustine fluksa radio-zračenja na frekvencijama: 843 MHz (crne linije), 1425 MHz (crvene) i 4860 MHz (plave). Prikazani su svi modeli na različitim frekvencijama: model A (deblja puna linija), model B (isprekidana), model C (tačkasta) i model D (tanka puna linija). Krugovi označavaju gustine fluksa posmatrane 2008. godine. Panel u sredini pokazuje odgovarajuću brzinu promene gustine fluksa  $\frac{dS_\nu}{dt}$  u  $\text{Jy yr}^{-1}$ , usrednjenu na svakoj frekvenciji i boje linija imaju isto značenje kao na gornjem panelu. Donji panel pokazuje relativnu promenu fluksa,  $\frac{1}{S_\nu} \frac{dS_\nu}{dt}$ , u procentima po godini, koja ne zavisi od frekvencije.



Slika 31: Simulacija evolucije spektralnog indeksa  $\alpha$  u radio-području, definisanog tako da gustina fluksa zavisi od frekvencije kao  $S_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ . Model evolucije spektralnog indeksa zavisi od korišćenog modela NLDSA i zbog toga prikazujemo sve modele iz ovog rada: model A (crvena linija), model B (plava), model C (zelena) i model D (crna).

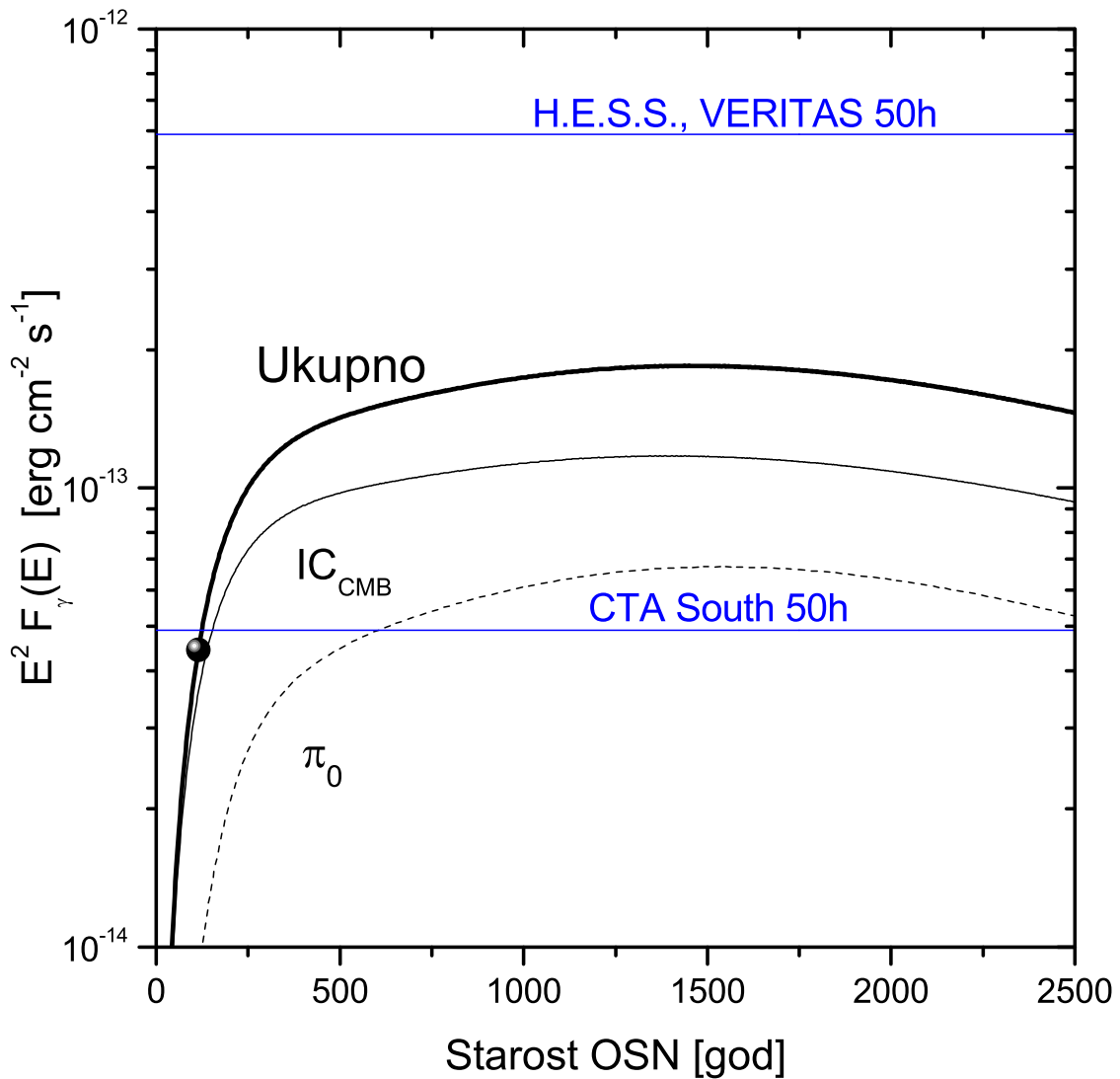


Slika 32: Integralna gustina fluksa sinhrotronskog zračenja u funkciji frekvencije, od radio do X-područja. Posmatrački podaci su redom: radio-posmatranja radio-interferometrima VLA (Green et al. 2008) i MOST (Murphy et al. 2008); fluksevi X-zračenja su preuzeti iz rada Janga sa saradnicima (Yang et al. 2016), koji su koristili originalna posmatranja teleskopima *Chandra* (Reynolds et al. 2008) i NuSTAR (Zoglauer et al. 2015).

veće od današnjih vrednosti. Sa slike 30 se takođe vidi da modeli sa većim parametrom injekcije  $\xi$  (manja efikasnost ubrzavanja) daju nešto veću gustinu fluksa u maksimumu, na izabranoj frekvenciji. Razlog je u rastućoj efikasnosti pojačavanja magnetnog polja za modele A do D (videti tabelu 1), koju određuje Kapriolijev parametar  $\zeta$ . Kada govorimo o brzini promene gustine fluksa tokom vremena (u  $\text{Jy yr}^{-1}$ ), naš model daje najbrži tempo rasta oko  $t_{\text{OSN}} \sim 100 \text{ yr}$ , koji je posle toga praćen usporavanjem porasta fluksa, sve do dostizanja maksimuma i faze opadanja. Zanimljivo je da se maksimum brzine rasta sjaja predviđa približno za sadašnji period, što, ukoliko je model tačan, znači da smo svedoci najbrže ikada promene sjaja OSN G1.9+0.3 i da su radio-posmatranja Grina, Marfija i Karltona i njihovih saradnika zabeležila baš ovu pojavu (Green et al. 2008, Murphy et al. 2008, Carlton et al. 2011).

Simulacije takođe pružaju uvid u evoluciju spektralnog indeksa radio-zračenja  $\alpha$ , (slika 31), odnosno evoluciju spektra ubrzanih elektrona sa energijama oko  $\sim \text{GeV}$ . Evolucija počinje od vrednosti blizu  $\alpha = 0.5$ , koje odgovaraju nemodifikovanom režimu, zatim sledi ustrmljavanje spektra i dostiže se maksimalni spektralni indeks, koji kasnije sporo opada i čini spektar ravnijim. Evolutivne trake spektralnog indeksa su dobijene implementiranjem modela iz tabele 1 i pokazuju jaku zavisnost od parametara modela. Veća efikasnost injekcije (manja vrednost parametra  $\xi$ ) prirodno vode do većeg spektralnog indeksa (strmijeg spektra) u maksimumu, pri čemu se maksimum dostiže nešto ranije. Ovaj zaključak je podržan značajnim brojem posmatračkih dokaza za strme spektralne indekse OSN koji su stari  $\sim 1000$  godina ili čak i nekoliko puta stariji, jer kao što vidimo, spektralni indeks sporo opada posle maksimalne vrednosti. Najveći broj starijih OSN ima spektralne indekse u intervalu  $0.5 \leq \alpha \leq 0.6$ , kao što predviđa osnovna teorija DSA (Urošević 2014).

Sinhrotronska emisija obuhvata interval od radio do X-područja. Reynolds sa saradnicima je došao do zaključka da je X-zračenje ostatka G1.9+0.3 sinhrotronskog porekla. Zanimljivo je stoga X-zračenje koje nastaje kao posledica termalnog zakočnog zračenja. Dobijamo sinhrotronski spektar do najviših energija koristeći elektronski spektar iz naših simulacija (slika 32) i prilagođavamo ga posmatranjima (videti sekciju 4.2.4). Magnetno polje  $B_2 = 280 \mu\text{G}$  dobijeno iz naših simulacija



Slika 33: Evolucija integralne gama emisije na 4 TeV, dobijena pionskim raspadom (isprekidana linija) i inverznim Komptonovim rasejanjem na mikrotalasnoj pozadini (tanka puna linija). Deblja puna linija označava zbir dva pomenuta doprinosa. Plave linije odgovaraju osetljivosti gama teleskopa H.E.S.S., VERITAS i CTA. Crni krug označava trenutni izmereni fluks gama zračenja.



za starost OSN  $t_0 = 115$  (iz 2008. godine) daje poziciju preloma u elektronskom spektru oko  $p_b \approx 10^3 m_p c$  (jednačina 4.10). Maksimalna vrednost ustrmljavanja koja dobro fituje posmatranja je  $\delta = 0.5$ , implementirana u našem jednostavnom modelu (poglavlje 4.2.4) kao ravnomerno rastuća funkcija koja počinje nešto pre impulsa  $p_b$ . Ovakav pristup omogućava modelovanje blažeg prelaza u režim hlađenja, umesto oštrog prelaza<sup>64</sup>. Sinhrotronski spektar sa slike 32 dobijen je samo za model A, maksimalni prekidni impuls elektrona  $p_{e,\max} = 10^{4.5} m_p c$  i odgovarajuću energiju  $E_{e,\max} = 27$  TeV, dobijenu u slučaju Bomove difuzije. Spektri preostalih modela iz tabele 1 su izostavljeni zbog sličnosti sa prikazanim. Takođe, modelovani spektar ostatka G1.9+0.3 otkriva oblik koji je konkavan, gledano odozgo, na milimetarskim i sub-milimetarskim talasnim dužinama. Konkavnost je očekivana i zapravo posmatrana teleskopom Plank<sup>65</sup> (eng. *Planck*), u radio-kontinuumu kod OSN Kasiopeja A (Onić & Urošević 2015). Ispitivanjem alternativnih objašnjenja za posmatrano zakrivljenje spektra, Onić i Urošević zaključuju da su nelinearni efekti ubrzavanja čestica najverovatnije odgovorni za zakrivljenje radio-spektra na visokim frekvencijama.

Primenom metoda opisanog u poglavlju 4.2.5, prati se evolucija OSN tokom 2500 godina i računa gama emisija na energiji 4 TeV, poreklom od pionskog raspada i inverznog Komptonovog rasejanja na fotonima mikrotalasnog pozadinskog zračenja (slika 33). Energija od 4 TeV je odabrana zbog maksimalne projektovane osetljivosti budućeg teleskopa CTA<sup>66</sup> na ovoj energiji. Naš model predviđa ukupan fluks gama emisije u oblasti TeV od  $4.4 \times 10^{-14}$  erg cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>. Ovaj fluks nije moguće detektovati gama teleskopima H.E.S.S.<sup>67</sup> ili VERITAS<sup>68</sup> za  $\sim 50$  h, budući da je više od jednog reda veličine ispod njihovih osetljivosti. Sa druge strane, sadašnje predviđanje gama fluksa iz našeg modela nalazi se neznatno ispod predviđene granice

<sup>64</sup>Tanaka sa saradnicima pominje mogućnost detekcije ovog prekida u sinhrotronskom zračenju na optičkim/infracrvenim talasnim dužinama kao dodatni argument u prilog jakom pojačanju magnetnog polja (Tanaka et al. 2008).

<sup>65</sup>Projekat evropske svemirske agencije (ESA). Ovim teleskopom se može posmatrati u devet različitih frekvencionih opsega koji pokrivaju 30–857 GHz, sa visokom osetljivošću i uglovnom rezolucijom.

<sup>66</sup>Grafik osetljivosti CTA, izvor: [www.cta-observatory.org](http://www.cta-observatory.org).

<sup>67</sup>H.E.S.S.: Preliminarni dijagrami osetljivosti za H.E.S.S.-I (Holler et al. 2015).

<sup>68</sup>eng. *Very Energetic Radiation Imaging Telescope Array System* (VERITAS), javna specifikacija instrumenta: [veritas.sao.arizona.edu](http://veritas.sao.arizona.edu).

osetljivosti teleskopa CTA *South* (južni instrument) od  $4.9 \times 10^{-14}$  erg cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup> za energije reda TeV i predviđamo da će za period od oko jedne decenije preći pomenuti prag detekcije. Fluks iz pionskog raspada predstavlja približno 1/4 gama fluksa koji potiče od inverznog Komptonovog zračenja, što može biti posledica male gustine okolnog gasa. Maksimalni gama fluks na energiji oko TeV predviđamo približno na kraju faze slobodnog širenja, kada starost OSN bude oko 1500 godina, i tada će dostići oko  $1.8 \times 10^{-13}$  erg cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>. Čak i ova vrednost se nalazi ispod linije osetljivosti teleskopa H.E.S.S., ali će verovatno OSN biti vidljiv budućim instrumentima, uključujući pomenuti CTA.

Tačan model širokopojasnog spektra OSN G1.9+0.3 izlazi iz okvira ove disertacije. Delovi spektra u X i gama oblasti dati su više kao ilustracija i testiranje našeg modela na dostupnim posmatranjima van radio-oblasti. Stroži tretman sinhrotronskih gubitaka neophodan je za modelovanje evolucije emisije zračenja OSN van radio-oblasti. Stoga ostavljamo detaljno modelovanje evolutivnih traka OSN na kraćim talasnim dužinama za budući rad.

## 4.4 Zaključak

Radio-evolucija najmlađeg OSN u Galaksiji, G1.9+0.3, modelovana je primenom Blazijeve nelinearne kinetičke teorije ubrzavanja kosmičkih zraka zajedno sa 3D hidrodinamikom koju rešavamo primenom koda PLUTO. Pretpostavljamo da ovaj OSN potiče od eksplozije supernove tipa Ia blizu centra Galaksije, sa energijom eksplozije od  $10^{51}$  erg i masom izbačenog materijala  $1.4 M_{\odot}$ . Standardne hidrodinamičke jednačine u kodu PLUTO su izmenjene kako bi se omogućio rad sa prostorno i vremenski zavisnim adijabatskim indeksom gasa, uzimajući u obzir efekte energetskih čestica na dinamiku udarnog talasa. Sledi pregled glavnih rezultata i zaključaka.

(i) Iz 3D hidrodinamičkih simulacija evolucije OSN, uključujući očekivano usponjenje udarnog talasa u MZM usled dodatnog dinamičkog uticaja ubrzanih kosmičkih zraka, dobijamo trenutnu starost ostatka G1.9+0.3 od nešto više od 120 godina i gustinu okolne MZM  $0.02 \text{ cm}^{-3}$ .

(ii) Efikasno ubrzavanje čestica je neophodno kako bi se objasnilo posmatrano

ustrmljavanje radio-spektra. Naime, model se dobro slaže sa posmatranjima za parametar injekcije  $\xi$  između 3.45 i 3.30, što odgovara efikasnosti ubrzavanja  $\eta = (0.5-1.1) \times 10^{-3}$  i magnetnom polju koje je pojačano više od 50 puta u odnosu na neporemećeno polje u MZM.

(iii) Numerički model pokazuje da je porast radio-emisije uobičajena pojava kod mladih OSN. Iz simulacije dobijamo prosečan rast fluksa na radio-frekvenciji 843 MHz tokom 20 godina od oko  $0.017 \text{ Jy yr}^{-1}$  (1.8 procenata godišnje), što je u veoma dobrom slaganju sa posmatranjima dobijenim teleskopom MOST i drugim radio-teleskopima. Model radio-evolucije na frekvenciji 2695 MHz predviđa gradijent fluksa od  $0.008 \text{ Jy yr}^{-1}$  tokom poslednjih 30 godina, što takođe odgovara posmatranjima dobijenim radio-teleskopom Efelsberg.

(iv) Radio-emisija ostatka G1.9+0.3 raste tokom faze slobodnog širenja, dostiže maksimalnu vrednost kada starost ostatka dostigne 600 godina da bi zatim ukupan sjaj opadao pred kraj faze slobodnog širenja i u fazi Sedov-Tejlora. Zanimljivo je da smo trenutno svedoci najbrže promene radio-sjaja ovog ostatka.

(v) Radio-sjaj će rasti, prema predviđanjima modela do maksimalnih vrednosti gustine fluksa od  $\sim 4.3, 3.1$  i  $1.5 \text{ Jy}$ , redom, na frekvencijama 843, 1425 i 4860 MHz, što su oko tri puta veće vrednosti od trenutnih.

(vi) Strmiji spektralni indeksi (u odnosu na vrednost koju predviđa standardna teorija DSA od  $\alpha = 0.5$ ) kod mladih OSN dobijaju se usled efikasnog mehanizma NLDSA i odgovarajućeg pojačanja magnetnog polja. Spektralni indeksi pokazuju sličnu evoluciju u kvalitativnom smislu kao i radio-fluks, dostižu maksimalnu vrednost  $\alpha_{\text{max}}$  (slučaj najstrmijeg spektra) da bi zatim spektri postajali blaži (spektralni indeksi bliži 0.5). Veća efikasnost injekcije  $\eta$  dovodi do većih vrednosti  $\alpha_{\text{max}}$  i one bivaju dostignute za kraći vremenski period. Ipak, pokazuje se da je vremenska evolucija spektralnih indeksa osetljiva na vrednosti parametara modela  $\xi$  i  $\zeta$ .

(vii) Pored radio-emisije, implementiran je i jednostavan model za sintezu sinhrotronskog spektra od radio do X-područja, koristeći spektar elektrona dobijen u našim simulacijama. Sprovedeno je fino podešavanje spektra elektrona, uvođenjem prekida u spektru, koji potiče od sinhrotronskih gubitaka na većim energijama i modelovanje X-zračenja koje je u dobrom slaganju sa posmatranjima teleskopa *Chandra*

i NuSTAR. Ovaj uprošćeni model daje spektre koji se dobro slažu sa tačnijim modelim koji sadrže numerički tretman sinhrotronskih gubitaka.

(viii) Razvijen je i aproksimativni model gama emisije ostatka G1.9+0.3. Ispitali smo vremensku evoluciju ukupnog gama fluksa i zaključili da će ovaj OSN biti vidljiv budućim instrumentima, uključujući CTA. Model predviđa rast gama emisije u oblasti energija oko TeV sve do kraja faze slobodnog širenja, dajući maksimalnu vrednost fluksa od  $1.8 \times 10^{-13}$  erg cm<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup> oko 1500 godina posle eksplozije supernove.

Model omogućava izvođenje važnih zaključaka o sadašnjim, kao i predviđanje budućih karakteristika radio-emisije najmlađeg poznatog Galaktičkog OSN. Želimo da naglasimo da i pored robusne implementacije modela, sve navedene kvantitativne procene treba uzeti sa dozom opreza. Pored ograničenog poznavanja fizičkih procesa koji dovode do ubrzavanja kosmičkih zraka i evolucije OSN, veliki broj parametara modela ostaje nedovoljno dobro poznat.

Očekujemo da će modeli radio-evolucije biti izuzetno korisni budućim posmatračkim projektima koji će biti realizovani radio-teleskopima ALMA (eng. *Atacama Large Millimeter/submillimeter Array*) i SKA (eng. *Square Kilometre Array*). Ovaj tip modelovanja može dati važne informacije o evolutivnim fazama OSN, kao i podatke o fizičkim uslovima na udarnim talasima koji su efikasni ubrzavači čestica.

## 5 Opšti model radio-evolucije ostataka supernovih

### 5.1 Uvod

Očekuje se da će buduća radio-posmatranja doneti bolje razumevanje osobina mnogih visokoenergijskih izvora, uključujući i OSN. Puštanje u rad novih generacija radio-teleskopa dovešće, neizbežno, do detekcije mnogih novih OSN i verovatno uvećati njihov trenutni broj u Galaktičkom i vangalaktičkim uzorcima. Kako bi se iskoristile sve prednosti novih instrumenata i posmatranja, moramo, što je moguće bolje, razumeti radio-evoluciju OSN, njihovu raznolikost kao i raznolikost sredine u kojoj evoluiraju, evolucionini status i implikacije na ubrzavanje čestica, stopu supernovih i njihov energetski doprinos MZM.

Pomenuto je već u poglavlju 2.1 da je danas široko prihvaćeno da se kosmički zraci ubrzavaju do tzv. energija „kolena” reda  $10^{15}$  eV (pa i više od toga) na udarnim talasima OSN. Najefikasniji poznati mehanizam ubrzavanja kosmičkih zraka, difuzno udarno ubrzavanje, daje odgovore na neka od bitnih pitanja, ali se takođe oslanja na više parametara koji nisu dovoljno precizno određeni. Jedan od ključnih problema je svakako ubrzanje elektrona na udarnim talasima, imajući u vidu da je dijagnostika OSN uglavnom bazirana na zračenju koje emituju elektroni. Odličan pregled mnogih aspekata fizičkih procesa vezanih za bezsudarne udarne talase dat je npr. u knjizi Baloha i Trumana (Balogh & Treumann 2013).

Mapiranje udarnog talasa sa jakim Balmerovim linijama u ostatku SN 1006, u visokoj rezoluciji, ukazuje na postojanje supratermalnih protona kao potencijalnih začetaka kosmičkih zraka visokih energija (Nikolić et al. 2013). Međutim, nedvosmisleni dokazi o ubrzanju hadrona iz kosmičkih zraka u OSN postoje samo za nekoliko izvora (npr. Tiho, W44, IC443, Vela, Morlino & Caprioli 2012, Ackerman et al. 2013, Fukui et al. 2017). Sa druge strane, visokoenergijski elektroni efikasno emituju zračenje od radio do X-područja putem sinhrotronskog mehanizma (magneto-zakočno zračenje) i njihova detekcija je daleko lakša.

Radio-zračenje sa nebeskih objekata detektujemo već više od 80 godina i ono i dalje ostaje jedan od najbitnijih dijagnostičkih alata kod OSN i temelj u ovoj oblasti. Većina poznatih OSN su izvori radio-sinhrotronske emisije, koja svedoči o

netermalnim procesima koji se tamo odvijaju usled postojanja relativističkih elektrona. Postoji nekoliko mladih OSN (starosti do nekoliko stotina godina) koji su aktivne laboratorije i omogućavaju nam da proučavamo radio-evoluciju gotovo od samih početaka. Na sreću, za većinu ovih ostataka postoji značajna količina posmatranja na različitim talasnim dužinama. Modeli kojima raspolazemo mogu biti testirani na ovim objektima i dostupnim posmatranjima, a zatim zaključke možemo primeniti na širi uzorak OSN u Galaksiji ili čak i šire (ranije smo u poglavlju 4 modele testirali na najmlađem Galaktičkom OSN G1.9+0.3). Ostatak SN 1987A je omogućio posmatranje specifične klase događaja tipa II u relativnoj blizini (Zanardo et al. 2010, Callingham et al. 2016). Od detekcije, intenzitet radio-emisije SN 1987A pokazuje stabilno povećanje i nadmašuje početni radio-sjaj. Ovaj ostatak može čak biti korišćen i kao primer za proučavanje veze između supernovih i njihovih ostataka (Orlando et al. 2015). Najmlađi Galaktički ostatak G1.9+0.3 takođe nam pruža jedinstvene informacije o ubrzavanju čestica i multifrekvencionalnoj emisiji u ranoj fazi evolucije OSN. Sa druge strane, najsjajniji ekstrasolarni izvor radio-zračenja na nebu, OSN Kasiopeja A, pokazuje suprotan trend. Gustina fluksa radio-zračenja ovog ostatka opada tempom od 0.6–0.7 procenata godišnje na frekvenciji 1 GHz (Baars et al. 1977, Reichart & Stephens 2000). Ku i Park su ovo smanjenje fluksa pripisali adijabatskim i radijativnim gubicima relativističkih čestica tokom ekspanzije, navodeći da proces može takođe zavisiti od ubrzavanja čestica kao i od fizičke strukture materijala odbačenog u eksploziji i okolne materije (Koo & Park 2016).

Šklovski je prvi predvideo promenu gustine fluksa Kasiopeje A (Shklovskii 1960a), kao razlog navodeći ekspanziju ostatka i odgovarajuće opadanje njegovog magnetnog polja. Šklovski je uveo vezu između površinskog radio-sjaja i dijametra za OSN (tzv.  $\Sigma - D$  relacija), koja predstavlja evolucionu put radio-zračenja, ali se takođe može primeniti za određivanje daljine do ostataka (Shklovskii 1960b). Modelovanje jedne takve zavisnosti, bez uzimanja u obzir različitih osobina pojedinačnih OSN, neizbežno dovodi do velikog rasturanja u posmatranoj  $\Sigma - D$  raspodeli ostataka. Postojanje odvojenih radio-evolutivnih traka za objekte sa različitim početnim energijama eksplozije, odbačenom masom, jačinom magnetnog polja, okolnim uslovima, zajedno sa selekcionim efektima (videti na primer Green 1991, Urošević et al. 2005,

2010), zahteva opreznost prilikom primene  $\Sigma - D$  relacije kao „kosmičkog lenjira”. Dodatno, pažnja treba da bude usmerena i na odgovarajući statistički tretman radio-evolucije OSN i, tokom poslednjih godina, postignut je primetan napredak u ovom smeru (Vukotić et al. 2014, Pavlović et al. 2013, 2014, Bozzetto et al. 2017).

Feron i Orlando su ukazali na nesumnjivi potencijal 3D simulacija visoke rezolucije za studije evolucije OSN (Ferrand et al. 2012, 2014, Orlando et al. 2012, 2015, 2016), koje mogu da reprodukuju najvažnije posmatračke rezultate, uključujući emisiju zračenja u različitim područjima. Razvoj hidrodinamičkih nestabilnosti na kontaktnom diskontinuitetu može se modelovati numerički u 3D, kako bi bilo moguće opisivanje strukture plazme iza udarnog talasa, posebno u regionu mešanja materijala, između prednjeg i povratnog udarnog talasa. Studije radio-emisije će imati najviše koristi od ovakvog modela, jer emitovanje radio-kontinuumu uglavnom potiče iz pomenutog regiona.

Model koji je prikazan u ovom delu, predstavlja proširenje modela iz poglavlja 4 na uzorak različitih OSN i trebalo bi da obezbedi osnovu za tumačenje radio-posmatranja OSN. Takođe, očekujemo da će ovaj tip modelovanja omogućiti pripremu posmatranja za buduće radio-instrumente, kao što su ALMA<sup>69</sup>, MWA<sup>70</sup>, ASKAP<sup>71</sup>, SKA<sup>72</sup> i FAST<sup>73</sup>.

## 5.2 Model i numerički metodi

### 5.2.1 Modelovanje dinamičke evolucije ostataka supernovih

Hidrodinamičku evoluciju OSN modelujemo numeričkim rešavanjem vremenski zavisnih zakona održanja (sistem jednačina 3.2), slično modelu iz poglavlja 4.2.1. Za razliku od modela hidrodinamičke evolucije OSN G1.9+0.3, ovde razvijamo 3D simulacije u Dekartovom koordinatnom sistemu  $(x, y, z)$ , ponovo uz zanemarivanje radijativnih gubitaka i toplotnog provođenja.

<sup>69</sup> *The Atacama Large Millimeter/submillimeter Array.*

<sup>70</sup> *The Murchison Widefield Array.*

<sup>71</sup> *The Australian Square Kilometre Array Pathfinder.*

<sup>72</sup> *The Square Kilometre Array.*

<sup>73</sup> *The Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope*, najveći i najosetljiviji jednoantenski radio-teleskop na svetu.

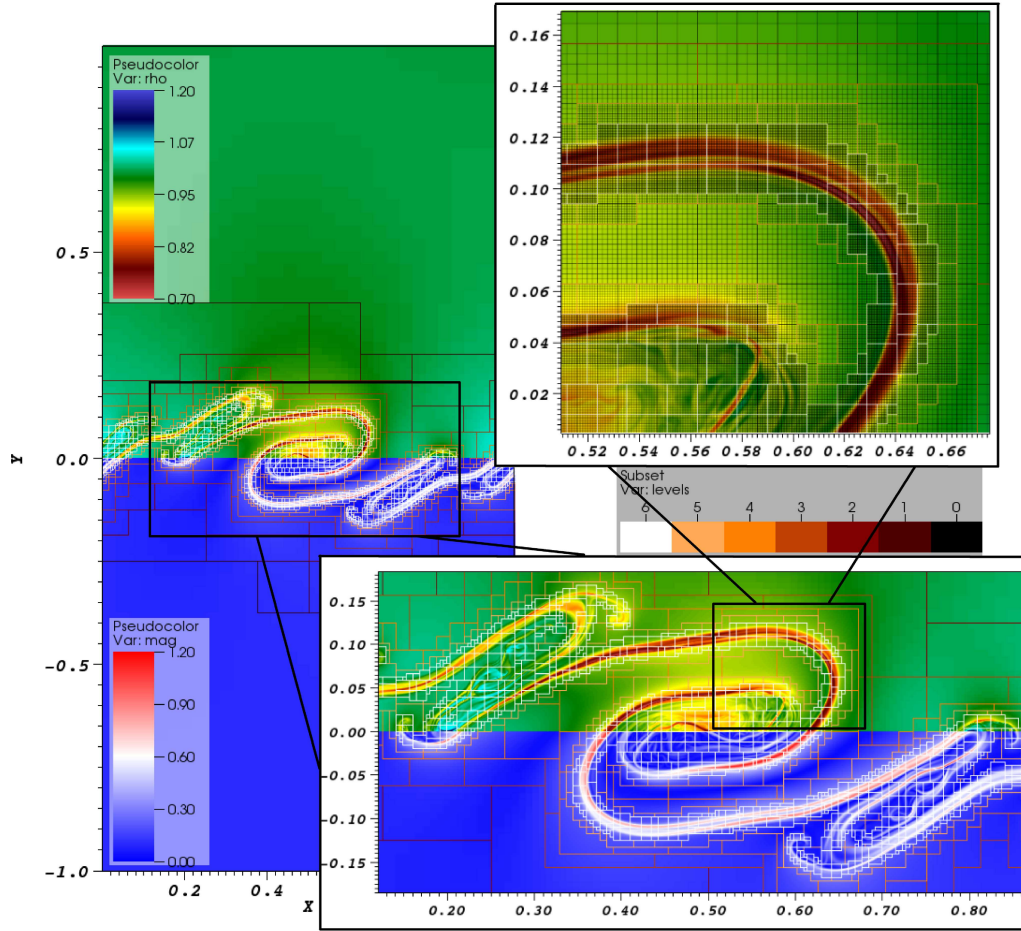
Naše simulacije su realizovane pomoću javno dostupnog i za naše potrebe modifikovanog koda za astrofizičku hidrodinamiku Godunovog tipa, PLUTO (verzija 4.2, Mignone et al. 2007, 2012). Simulacije su dizajnirane da prate evoluciju OSN tokom perioda i do nekoliko stotina hiljada godina, pri čemu je neophodno održati približno isti broj simulacionih ćelija duž radijusa OSN, koji u nekim slučajevima može porasti više od 2 reda veličine. U cilju postizanja konzistentnog tretmana problema na različitim vremenskim i prostornim skalama, koristimo biblioteku *Chombo*<sup>74</sup> za adaptivnu preciznost mreže (eng. *Adaptive Mesh Refinement*, AMR) sastavljene od blokova različite rezolucije. Kod za svoje proračune efikasno koristi distribuirane računarske sisteme preko standarda MPI. Koristimo isti set numeričkih algoritama, naveden u paragrafu 4.2.1: linearnu interpolaciju, HLLC, RK2 i MULTID. Koristimo 9 ugnježenih nivoa rezolucije, svaki finiji nivo ima 2 puta veću rezoluciju od prethodnog, što za rezoluciju osnovne mreže od  $32^3$ , dovodi do maksimalne rezolucije od  $16384^3$  (koja se koristi u slučajevima kada je maksimalna veličina ivice 3D mreže jednaka ili veća od 80 pc, videti tabelu 2). Optimizaciju korišćenja računarskih resursa postizemo smanjivanjem broja nivoa preciznosti, počev od 9 (za početni profil materijala odbačenog u eksploziji) do 3 (kraj evolucije), slično pristupu Orlanda i saradnika u slučaju koda FLASH (Orlando et al. 2012). Tokom izvršavanja simulacije, automatski pratimo poziciju udarnog talasa i na osnovu toga određujemo broj nivoa rezolucije u određenom trenutku, koji se dalje prosleđuje rutinama Chombo.

Početni uslovi za materijal odbačen u eksploziji supernove, određeni su preko eksponencijalnog profila gustine Dvarkadasa i Ševaljea i odgovarajućeg profila brzine i pritiska (Dvarkadas & Chevalier 1998). Iako korišćeni tip početnog profila najbolje odgovara eksploziji tipa Ia (termonuklearne eksplozije), isti profil primenjujemo i prilikom modelovanja eksplozija kolapsirajućih supernovih. Očekujemo da početni profili odbačenog materijala ne utiču značajno na radio-emisiju, posebno u kasnijim fazama, kada se formira ljuska. Eksponencijalni profil Dvarkadasa i Ševaljea predviđa da gustina raste od povratnog udarnog talasa<sup>75</sup> do kontaktnog diskontinu-

<sup>74</sup><https://commons.lbl.gov/display/chombo>.

<sup>75</sup>Na početku evolucije povratni udarni talas se kreće u istom smeru kao i prednji udarni talas OSN, zatim menja smer i kreće se ka centru OSN, da bi konačno nestao. U našim simulacijama životni vek povratnog udarnog talasa iznosi od  $\sim 1000$  godina (za okolnu sredinu najmanje gustine) do  $\sim 9000$  godina (sredina najveće gustine).





Slika 34: Simulacija relativističke Kelvin–Helmholcove nestabilnosti pomoću koda PLUTO sa uključenim paketom Chombo za postizanje adaptivne preciznosti mreže. Računska mreža se sastoji od osnovne mreže, rezolucije svega  $32 \times 64$ , sa dodatnih 6 nivoa finije mreže što dovodi do maksimalne efektivne rezolucije  $2048 \times 4096$ . Slika levo prikazuje gustinu (gornja polovina) i veličinu  $(B_x^2 + B_y^2)^{1/2}/B_z$  (donja polovina). Izabrani regioni su prikazani uvećani u desnom delu slike. (Izvor: Mignone et al. 2012)

iteta, dok stepeni profil daje obrnuti trend. Navedene osobine mogu uticati na radio-morfologiju tokom najranijih faza evolucije, kao i prisustvo zgušnjenja u početnom odbačenom materijalu (Orlando et al. 2012), dok ne očekujemo značajno dejstvo na radio-evoluciju u kasnijim fazama. Pretpostavljamo da je ukupna odbačena masa jednaka Čandrasekarovoj  $M_{ej} = 1.4M_{\odot}$  za tip Ia, dok za kolapsirajuće supernove pretpostavljamo da važi  $M_{ej} = 10M_{\odot}$ . U slučaju da eksplozija potiče od sudara dva bela patuljka, ukupna masa i energija eksplozije mogu biti veće od standardnih  $1.4 M_{\odot}$  i  $10^{51}$  erg, i mogu uticati na dinamiku i radio-emisiju. Pomenuti scenario sve više dobija na popularnosti poslednjih godina zahvaljujući radovima Gilfanova i

Bogdana, Olinga i saradnika, Mađa i saradnika, Vuds sa saradnicima (Gilfanov & Bogdán 2010, Olling et al. 2015, Maggi et al. 2016, Woods et al. 2017).

Ograničavamo simulacije na slučaj izotropne, tople MZM čija je temperatura  $T = 10^4$  K. Simulacije prate evoluciju OSN u pet različitih gustina MZM,  $n_H = 0.005, 0.02, 0.2, 0.5$  i  $2 \text{ cm}^{-3}$ . Ove vrednosti približno obuhvataju interval tipičnih procena gustine sredine oko nekih Galaktičkih (Arbutina & Urošević 2005) i vangelaktičkih OSN (Berkhujzen 1986). Ne očekujemo da naša aproksimacija konstantne gustine može značajno uticati na ukupnu radio-emisiju, ali naglašavamo da nehomogenosti postaju bitne za proučavanje radio-morfologije OSN (videti rad Slavina sa saradnicima, za osnovne ideje o simulacijama OSN u nehomogenoj sredini, iako se oni pretežno bave X-zračenjem, Slavin et al. 2017; i Kostića sa saradnicima za studiju uticaja fraktalne strukture gustine MZM na radio-evoluciju OSN, Kostić et al. 2016).

Simuliramo ostatke koji potiču od eksplozija sa ukupnim početnim energijama  $E_0 = (0.5, 1.0 \text{ i } 2.0) \times 10^{51}$  erg. Pretpostavljamo da je veliki deo ukupne energije eksplozije ( $> 98\%$ ) u obliku kinetičke energije. Orlando sa saradnicima je pokazao da je ovo dobra pretpostavka i važi u ranoj evoluciji OSN, čak nekoliko dana posle eksplozije. Tok gasa koji predstavlja odbačeni materijal, brzo posle eksplozije postaje homologan i stoga brzina linearno raste sa daljinom od centra do dela plazme najdaljeg od centra, gde dostiže maksimalnu vrednost,  $V_{ej}^{\max}$ . Iako se u eksplozijama supernovih materija izbacuje sa širokim opsegom brzina, karakteristična brzina odbačenog materijala je reda  $\sim 10^4 \text{ km s}^{-1}$  za tip Ia i  $\sim 5000 \text{ km s}^{-1}$  za kolapsirajuće supernove (Reynolds et al. 2008). U simulacijama ostataka tipa Ia, uzimamo  $V_{ej}^{\max} = 20\,000 \text{ km s}^{-1}$  za referentne slučajeve sa početnom energijom  $E_0 = 1.0 \times 10^{51}$  erg i menjamo u skladu sa energijom (bez promena u profilu gustine). Za kolapsirajuće ostatke, opravdano je pretpostaviti nešto niže brzine, od  $V_{ej}^{\max} = 10\,000 \text{ km s}^{-1}$  za slučajeve sa najvećom ukupnom energijom.

Od slučajeva koje razmatramo, simulacije sa većim gustinama MZM,  $n_H = 0.5$  i  $2 \text{ cm}^{-3}$  očekivano predstavljaju OSN koji potiču od kolapsa jezgra masivnih zvezda (eng. *core-collapse*, CC; svrstavamo ih u tipove II, Ib i Ic). Bitna stavka, barem za ranu interakciju između supernove i okolne sredine, je gubitak mase neposredno

pre eksplozije. Ove masivne zvezde-roditelji imaju spore zvezdane vetrove tipičnih brzina  $10\text{--}50\text{ km s}^{-1}$  i brzinu gubitka mase u intervalu  $10^{-6}\text{--}10^{-5}M_{\odot}\text{ yr}^{-1}$  (videti, na primer, rad Reynoldsa sa saradnicima, Reynolds et al. 2017). Sa standardnim profilom gustine zvezdanog vetra  $\propto r^{-2}$  (gde je  $r$  radijalno rastojanje od centralne zvezde), gustinu materijala na koji nailazi udarni talas predstavljamo u obliku:

$$n(r) = n_{\text{H}} + n_{\text{w}} = n_{\text{H}} + \frac{\dot{M}_{\text{w}}}{4\pi r^2 v_{\text{w}} \mu m_{\text{H}}}, \quad (5.1)$$

gde smo pretpostavili sferno simetrični zvezdani vetar sa brzinom gubitka mase od  $\dot{M}_{\text{w}} = 10^{-5}M_{\odot}\text{ yr}^{-1}$  i brzinom zvezdanog vetra  $v_{\text{w}} = 10\text{ km s}^{-1}$ . Očekivano je da se formira određeni region u kome zvezdani vetar interaguje sa okolnom MZM, ali smo u ovom uprošćenom modelu to zanemarili i planiramo da razmotrimo detaljnije u daljem radu. Takođe, naglašavamo da u jednačini (5.1) dodajemo izotropnu komponentu zvezdanog vetra na konstantnu gustinu, tako da je gustina u svakoj tački „precejnena” za konstantnu vrednost. Ne očekujemo značajan efekat na dinamiku udarnog talasa, uzimajući u obzir vremenske i prostorne skale u našim simulacijama. Za detaljan model interakcije OSN sa okozvezdanim materijom videti rad Orlando sa saradnicima (Orlando et al. 2015).

Već je rečeno da su gubici na zračenje zanemareni u ovim simulacijama, pa stoga simulacije traju dok je adijabatski uslov potpuno zadovoljen. Prelaz od potpuno adijabatskog do potpuno radijativnog OSN nije previše oštar i traje gotovo isti vremenski period kao i adijabatska faza, predstavljajući takozvanu post-adijabatsku fazu (Petruk et al. 2016). Potpun adijabatski režim se završava blizu tzv. prelaznog vremena (teorijski, trenutak kada se ohladi prvi delić fluida) i on označava početak post-adijabatske faze (Blondin et al. 1998):

$$t_{\text{tr}} = 2.83 \times 10^4 E_{51}^{4/17} n_{\text{H}}^{-9/17} \text{ yr}, \quad (5.2)$$

dok dalje ova faza prelazi u radijativnu oko trenutka nastanka tanke i guste ljuske  $t_{\text{sf}} \approx 1.8t_{\text{tr}}$  (Cox & Anderson 1982, Petruk et al. 2016), gde je  $E_{51} = E_0/(10^{51}\text{erg})$ . U periodu blizu prelaznog vremena, Sedov-Tejlorov udarni talas je dostigao radijus od  $R_{\text{ST}} \approx 19.1E_{51}^{5/17} n_{\text{H}}^{-7/17} \text{ pc}$  i brzinu  $V_{\text{ST}} \approx 260E_{51}^{1/17} n_{\text{H}}^{2/17} \text{ km/s}$  (Blondin et al. 1998).

Opravdano je pretpostaviti da se radio-OSN mogu posmatrati sve do kraja faze Sedov-Tejlora, kada njihova radio-emisija značajno opada (Bandiera & Petruk 2010). Bandiera i Petruk, i Bozeto sa saradnicima (Bandiera & Petruk 2010, Bozzetto et al. 2017) čak izvode statističke argumente o radio-vidljivosti OSN sve do kraja adijabatske faze. Zbog toga, kao i zbog zanemarivanja efekata radijativnog hlađenja, u celom skupu naših simulacija, hidrodinamičku i radio-evoluciju posmatramo strogo pre dostizanja prelaznog vremena.

Na početku simulacije pretpostavljamo da je OSN loptastog oblika sa radijusom  $R_0=0.5$  pc (početne starosti oko 30 godina) i da njegova evolucija počinje iz centra 3D Dekartovog koordinatnog sistema  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ , pritom simulirajući jedan oktant ostatka.

Prostorni domen simulacije obuhvata 20 do 200 parseka po  $x, y$  i  $z$  osi, zavisno od konkretnog slučaja (maksimalnog radijusa koji dostiže OSN). Koristimo granične uslove nultog gradijenta<sup>76</sup> na svim granicama domena. Za simulacije kolapsirajućih OSN (u gušćoj MZM), izabrani parametri i jednačina (5.1) daju gustinu zvezdanog vetra od  $n_w \approx 9 \text{ cm}^{-3}$ , na početnom radijusu 0.5 pc.

### 5.2.2 Nelinearno difuzno ubrzavanje i pojačanje magnetnog polja

Modelovanju hidrodinamike u 3D dodajemo uticaj ubrzanih kosmičkih zraka i pojačanje magnetnog polja, na način opisan u poglavljima 4.2.2 i 2.2, odnosno u radovima Pavlović (2017) i Pavlović et al. (2018).

Fromer sa saradnicima razvio je nove metode za integraciju jednačina evolucije kosmičkih zraka i povezivanje sa MHD simulacijom na nestruktuiranoj, pokretnoj mreži, u okviru koda AREPO (Pfrommer et al. 2017). Kod AREPO, namenjen pretežno primeni u kosmološkim simulacijama, prati advektivni transport kosmičkih zraka u plazmi sa magnetnim polje, kao i anizotropni difuzni transport kosmičkih zraka u lokalnom magnetnom polju. Fromer sa saradnicima je pokazao da ubrzavanje kosmičkih zraka ne narušava značajno samosličnost Sedov-Tejlorovog rešenja. Najbitniji rezultat za naš rad je da rezultujuće modifikacije udarnog talasa mogu biti

---

<sup>76</sup>Ako sa  $q$  označimo skalarne veličine u kodu PLUTO, a sa  $n$  smer duž neke od koordinatnih osa, ovaj uslov na granici podrazumeva:  $\frac{\partial q}{\partial n} = 0$  i  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n} = 0$ .

adekvatno aproksimirane prilagođenim adijabatskim indeksom, kako je to učinjeno u našem modelovanju.

Unapredili smo u određenoj meri model pojačanja magnetnog polja, u poređenju sa modelom koji smo koristili za OSN G1.9+0.3, gde su razmatrane samo rezonantne nestabilnosti. Za vreme evolucije OSN, dva različita tipa nestabilnosti izazvana tokom kosmičkih zraka odgovorna su za pojačanje magnetnog polja (Amato & Blasi 2009). Amato i Blasi su pokazali da nerezonantni modovi dominiraju u fazi slobodnog širenja i ranoj Sedov-Tejlorovoj, dok u kasnijim fazama dominiraju rezonantne nestabilnosti. Bikov sa saradnicima (Bykov et al. 2014) je među prvima u svoj nelinearni, Monte-Karlo model efikasnog DSA uključio rast turbulencija od rezonantnih i nerezonantnih nestabilnosti izazvanih tokom kosmičkih zraka. Sarbadihari sa saradnicima je takođe razmatrao oba pomenuta doprinosa u cilju boljeg teorijskog objašnjenja statističke studije (Sarbadhicary et al. 2017). Ukoliko dominiraju nerezonantni modovi, pojačano magnetno polje dostiže saturaciju za vrednost  $B^2/8\pi \sim \frac{1}{2} \frac{v_s}{c} \sigma_{\text{cr}} \rho_0 v_s^2$  (Bell 2004), dok su Kaprioli i Spitkovski (Caprioli & Spitkovsky 2014) pokazali da važi  $B^2/B_0^2 \approx 3\sigma_{\text{cr}} \tilde{M}_A$  za pojačano magnetno polje sa značajnim doprinosom rezonantnih modova. Ovde  $B$  predstavlja pojačano magnetno polje,  $B_0$  je jačina Galaktičkog magnetnog polja,  $v_s$  je brzina udarnog talasa,  $\sigma_{\text{cr}}$  je pritisak kosmičkih zraka<sup>77</sup> na udarnom talasu normalizovan na  $\rho_0 v_s^2$ , sa  $\rho_0$  je obeležena gustina okolne MZM i  $\tilde{M}_A = (1 + 1/R_{\text{tot}})M_A$  označava Alfenov Mahov broj u referentnom sistemu vezanom za udarni talas ( $M_A = v_s/v_A$ , gde je  $v_A$  Alfenova brzina). Jednostavne algebarske transformacije daju gustinu energije nerezonantno pojačanog magnetnog polja:

$$\epsilon_{\text{B}}^{(1)} \approx \frac{1}{2} \frac{\sigma_{\text{cr}}}{c} \rho_0 v_s^3, \quad (5.3)$$

i dalje, za rezonantne modove važi:

$$\epsilon_{\text{B}}^{(2)} \approx \frac{3}{2} \frac{\sigma_{\text{cr}}}{\tilde{M}_A} \rho_0 v_s^2. \quad (5.4)$$

Odnos gustina energije nerezonantno i rezonantno pojačanog magnetnog polja može

---

<sup>77</sup>Za čestice ispred udarnog talasa, sa raspodelom  $f_0$  u intervalu impulsa od  $p_{\text{min}}$  do  $p_{\text{max}}$ , pritisak  $P_{\text{cr},0}$  se može izračunati kao  $P_{\text{cr},0} = \int_{p_{\text{min}}}^{p_{\text{max}}} \frac{pv}{3} f_0(p) 4\pi p^2 dp$ , gde je  $v(p)$  brzina čestice sa impulsom  $p$ .

se dobiti kao:

$$\lambda \approx \frac{1}{3} \frac{v_s}{c} \tilde{M}_A, \quad (5.5)$$

Dakle, uveli smo korekciju  $(1 + \lambda)$  u originalnu relaciju za rezonantno pojačanje magnetnog polja, ranije opisano jednačinom (2.21) (Caprioli et al. 2009), u cilju računanja udruženog uticaja rezonantnih i nerezonantnih nestabilnosti izazvanih tokom čestica:

$$\frac{P_{w,p}}{\rho_0 v_s^2} \cong \frac{1 - \zeta}{4M_{A,0}} U_p^{-3/2} (1 - U_p^2) (1 + \lambda). \quad (5.6)$$

Odnos  $\lambda$  teži nuli kako se OSN približava kasnoj fazi Sedov-Tejlora i jednačina (5.6) se svodi na ranije korišćeni oblik (2.21), koji važi za slučaj dominacije rezonantnih nestabilnosti.

### 5.2.3 Teorijsko razmatranje radio-evolucije

Naš cilj u ovom poglavlju je primena jednostavnog analitičkog pristupa na predviđanje nekih rezultata naših simulacija, koji kasnije može biti korišćen za upoređivanje sa numerički dobijenim rezultatima. Analiziramo ponašanje površinskog radio-sjaja u fazi Sedov-Tejlora, u kojoj većina OSN provodi najveći deo vremena tokom svoje evolucije.

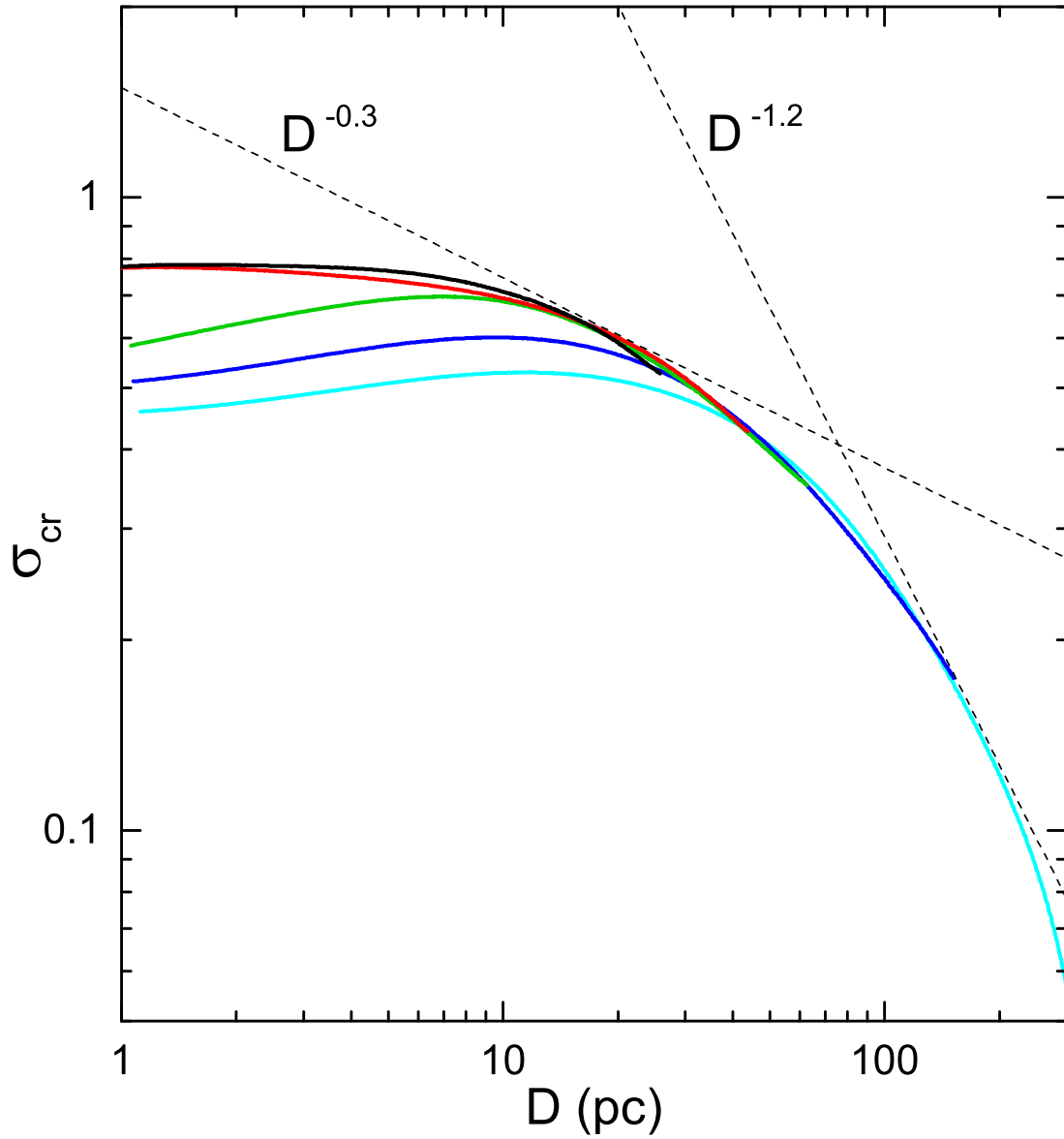
Ukupna gustina energije kosmičkih zraka je, pretpostavljajući stepeni oblik raspodele po impulsima i zanemarujući energetske gubitke, približno (Arbutina et al. 2012):

$$\epsilon_{\text{CR}} = K_e (m_e c^2)^{2-\gamma} \frac{\Gamma(\frac{3-\gamma}{2}) \Gamma(\frac{\gamma-2}{2})}{2\sqrt{\pi}(\gamma-1)} (1 + \kappa), \quad (5.7)$$

gde  $\kappa$  predstavlja odnos energija jona i elektrona,  $\gamma$  je energetski spektralni indeks ( $2 < \gamma < 3$ ) i  $K_e$  je konstanta u stepenoj raspodeli elektrona po energijama  $N(E)dE = K_e E^{-\gamma} dE$ .

Gustina radio-fluksa sinhrotronskog zračenja ultrarelativističkih elektrona, dobijena u knjizi Paholjčika (Pacholczyk 1970) posle zamene koeficijenta emisije  $\varepsilon_\nu$  gustinom fluksa  $S_\nu$ , je:

$$S_\nu \propto K_e B^{1+\alpha} V \nu^{-\alpha} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ Hz}} \right], \quad (5.8)$$



Slika 35: Evolucija odnosa  $\sigma_{\text{cr}}$ , koji predstavlja pritisak kosmičkih zraka na udarnom talasu, normalizovan na pritisak udarnog talasa  $\rho_0 v_s^2$ . Različite boje linija odgovaraju gustinama okolne MZM i to:  $n_{\text{H}}/\text{cm}^3 = 0.005$  (cijan), 0.02 (plava), 0.2 (zelena), 0.5 (crvena) i 2.0 (crna).

gde je  $V$  zapremina a  $\nu$  je frekvencija. Tada je površinski radio-sjaj, definisan kao  $\Sigma_\nu = S_\nu/\Omega$ , gde je  $\Omega$  prostorni ugao radio-izvora (u steradianima), oblika:

$$\Sigma_\nu \propto S_\nu D^{-2} = K_e B^{1+\alpha} D \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{ Hz sr}} \right]. \quad (5.9)$$

Iz jednačine (5.7) dobijamo:

$$K_e \propto \epsilon_{\text{CR}} \propto \sigma_{\text{cr}} \rho_0 v_s^2, \quad (5.10)$$

gde na desnoj strani ne koristimo jednakost zbog toga što se udeo gustine energije udarnog talasa u kosmičkim zracima (joni i elektroni) razlikuje od  $\sigma_{\text{cr}}$  (definisanog u poglavlju 5.2.2) do na faktor  $(\gamma_{\text{cr}} - 1)$ , gde je  $\gamma_{\text{cr}} \simeq 4/3$  adijabatski indeks ultrarelativističkog fluida sastavljenog od čestica.

U poglavlju 5.2.2 je naglašeno da rezonantni modovi dominiraju u fazi Sedov-Tejlora (jednačina 5.4) pa stoga imamo:

$$B \propto (\sigma_{\text{cr}} v_s)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.11)$$

Evolucija dijametra u Sedov-Tejlorovoj fazi može se opisati kao  $D \propto t^{\frac{2}{5}}$  (Sedov 1959) i ovo vodi do  $v_s \propto t^{-\frac{3}{5}} \propto D^{-\frac{3}{2}}$ . Zamenom jednačine (5.10) i (5.11) u jednačinu (5.9) dobija se:

$$\Sigma_\nu \propto \sigma_{\text{cr}}^{\frac{\alpha+3}{2}} D^{-\frac{3\alpha+11}{4}}. \quad (5.12)$$

Zamena prosečnog spektralnog indeksa OSN  $\alpha = 0.5$ , redukuje prethodnu zavisnost na  $\Sigma_\nu \propto \sigma_{\text{cr}}^{1.75} D^{-3.125}$ .

Slika 35 prikazuje evoluciju odnosa  $\sigma_{\text{cr}}$  u funkciji dijametra OSN, dobijenog iz simulacija sa početnom energijom eksplozije  $10^{51}$  erg. Zaključujemo da evolucija  $\sigma_{\text{cr}}$  može biti aproksimirana kao  $\sigma_{\text{cr}}^{\frac{\alpha+3}{2}} \approx D^{-0.5}$  u ranijim i  $D^{-2}$  kasnijim fazama evolucije (odgovara graničnim slučajevima  $\sigma_{\text{cr}} \propto D^{-0.3}$  i  $\sigma_{\text{cr}} \propto D^{-1.2}$ , videti sliku 35). Ovaj jednostavni teorijski pristup, zajedno sa ograničenim uvidom u NLDSA modelovanje, predviđa radio-evoluciju grubo između  $\Sigma_\nu \propto D^{-3.5}$  i  $\Sigma_\nu \propto D^{-5}$ , i to za spektralni indeks  $\alpha = 0.5$ , očekivan u nemodifikovanom režimu<sup>78</sup>. Ovo razmatra-

<sup>78</sup>Slučaj kada se ubrzane čestice razmatraju kao test-čestice, bez dinamičke uloge.



Tabela 2: Korišćeni parametri i početni uslovi za hidrodinamičke modele koje smo koristili za dobijanje radio-evolucije različitih OSN.

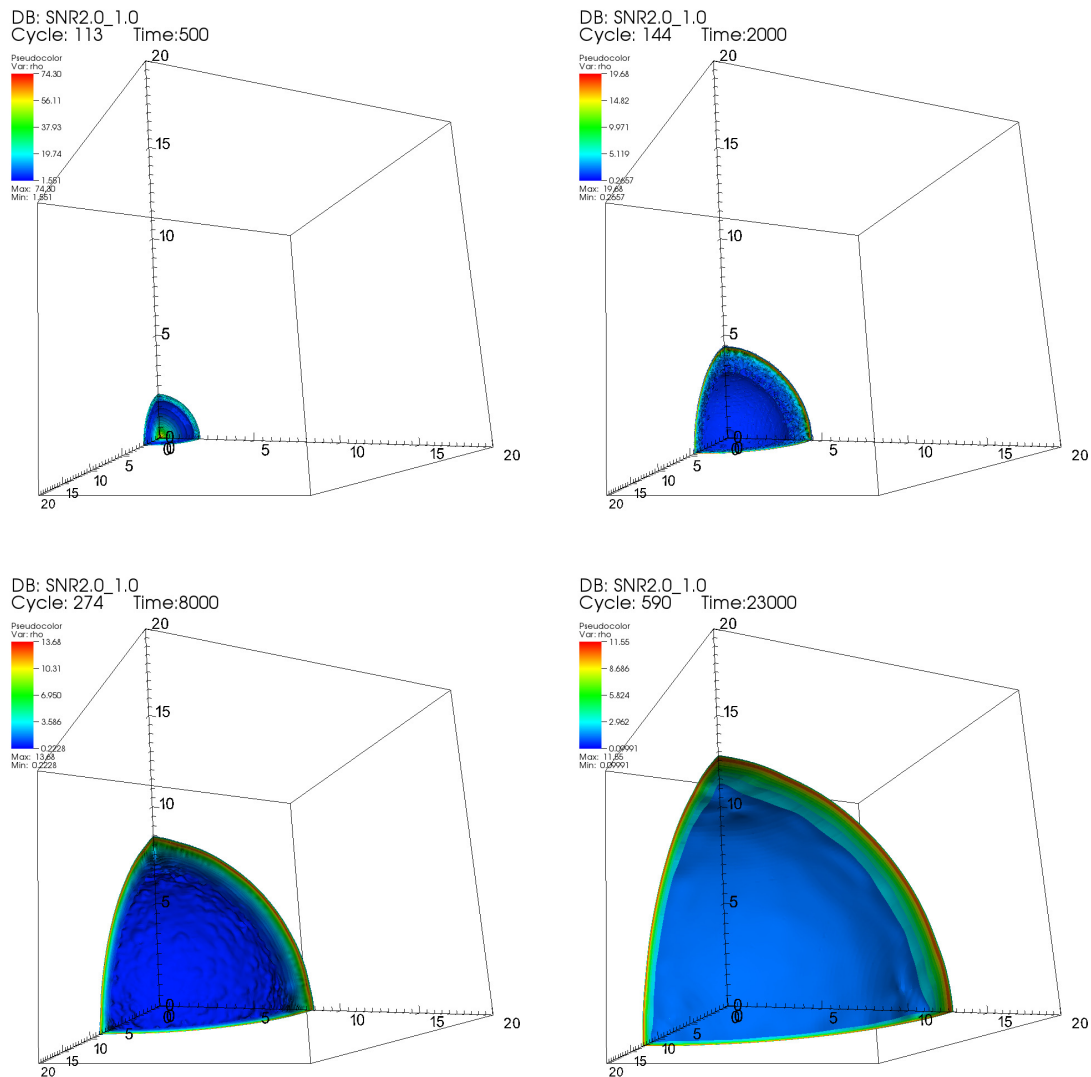
Oznaka modela	Početna masa ( $M_{\odot}$ )	Energija eksplozije ( $10^{51}$ erg)	Gustina lokalne MZM ( $\text{cm}^{-3}$ )	Ukupno vreme ( $10^3$ yr)	Veličina računске mreže (pc)
SNR0.005_0.5	1.4	0.5	0.005	400	140
SNR0.005_1.0	1.4	1.0	0.005	400	160
SNR0.005_2.0	1.4	2.0	0.005	500	200
SNR0.02_0.5	1.4	0.5	0.02	150	80
SNR0.02_1.0	1.4	1.0	0.02	150	80
SNR0.02_2.0	1.4	2.0	0.02	150	90
SNR0.2_0.5	1.4	0.5	0.2	60	35
SNR0.2_1.0	1.4	1.0	0.2	60	35
SNR0.2_2.0	1.4	2.0	0.2	70	35
SNR0.5_0.5	10	0.5	0.5	35	20
SNR0.5_1.0	10	1.0	0.5	40	25
SNR0.5_2.0	10	2.0	0.5	50	32
SNR2.0_0.5	10	0.5	2.0	23	20
SNR2.0_1.0	10	1.0	2.0	23	20
SNR2.0_2.0	10	2.0	2.0	23	20

nje, ipak, daje očekivanu zavisnost za ograničeni period evolucije. Kasnije ćemo iz naših numeričkih simulacija dobiti precizan uvid u vremensku evoluciju i doprinose različitih fizičkih parametara.

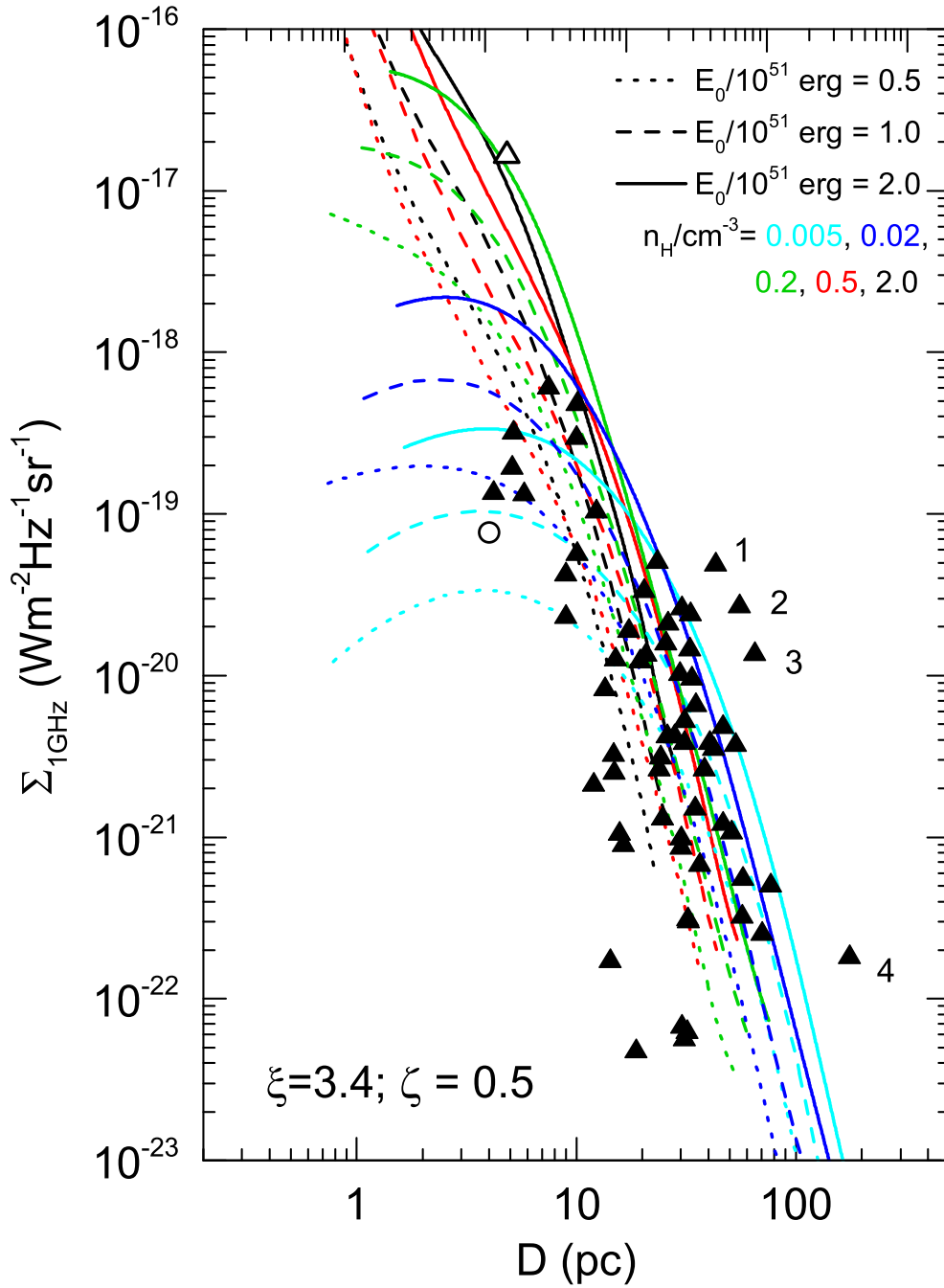
### 5.3 Rezultati

3D hidrodinamičke simulacije, razvijene u ovom radu (slika 36), opisuju evoluciju OSN u Dekartovom koordinatnom sistemu primenom koda PLUTO. Koristimo model detaljnije opisan u poglavlju 4, sa unapređenim modelom pojačanja magnetnog polja. U toku hidrodinamičke evolucije, naš kod računa raspodelu ubrzanih čestica i njihovu odgovarajuću sinhrotronsku radio-emisiju, za trenutnu starost OSN.

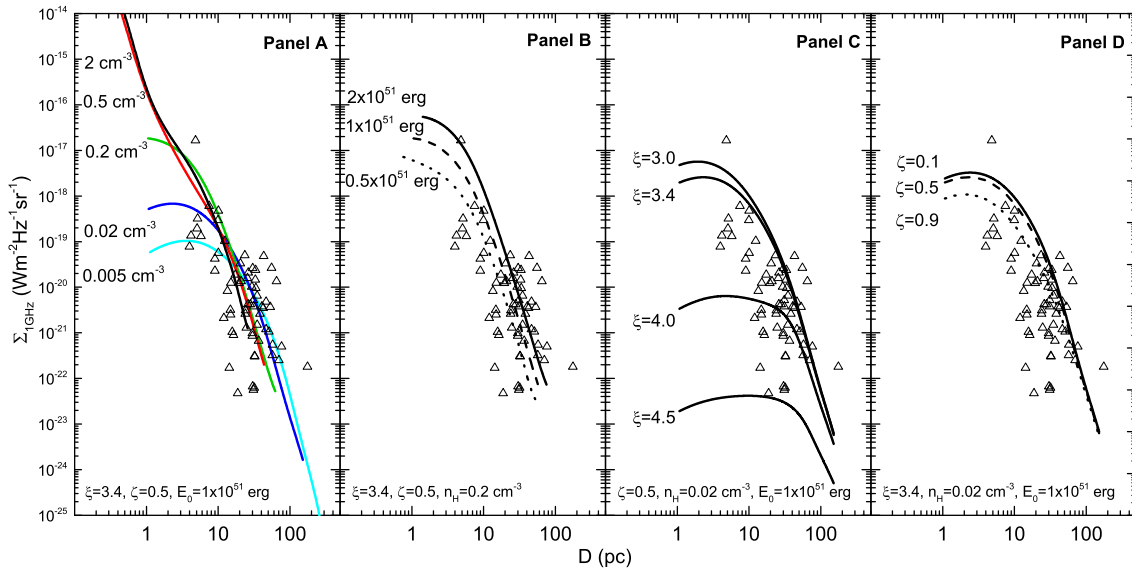
Glavni cilj ovog rada nije modelovanje pojedinačnih OSN, za koje postoji kompletan skup posmatranih dinamičkih i spektralnih karakteristika. Umesto toga, koristimo ograničeni skup karakterističnih parametara i pokušavamo da na zadovoljavajući način objasnimo i, u nekoj meri, reprodukujemo posmatranja. Naše simulacije nude adekvatan opis posmatrane populacije, iako ne možemo očekivati precizne rezultate za svaki pojedinačni objekat jer smo simulacije uradili sa sred-



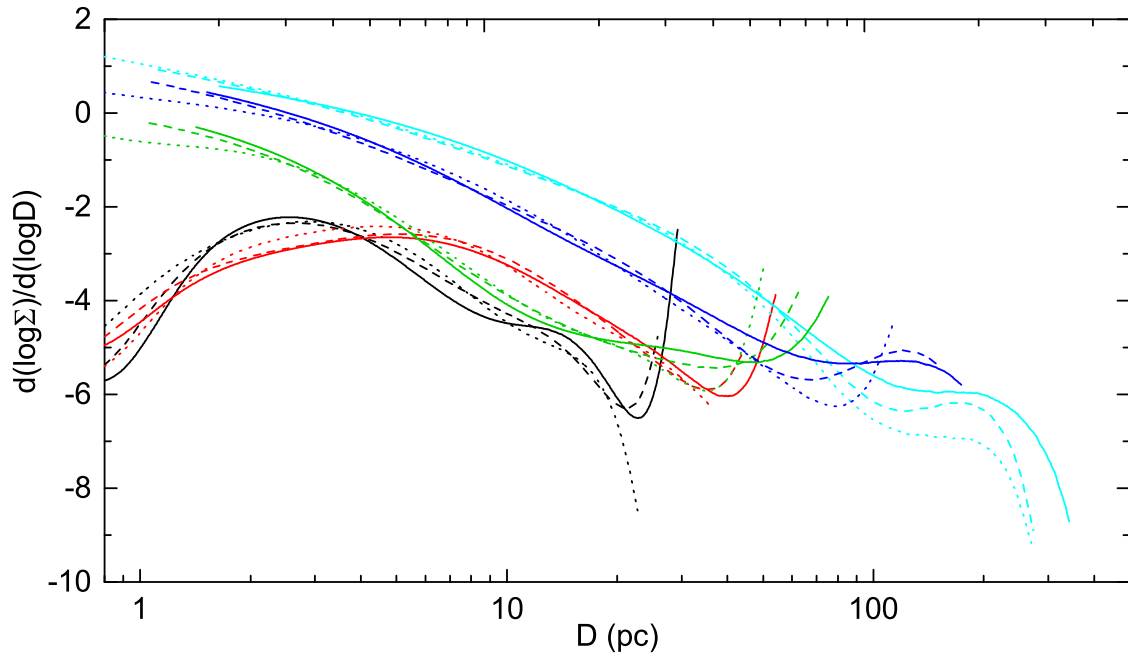
Slika 36: Domen simulacije (eksplozija supernove potiče iz centra oktanta u 3D Dekartovom koordinatnom sistemu  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ ), gde regioni različitih boja označavaju različite gustine. Niz izopovršina (3D površina koja sadrži ćelije sa istom gustinom) predstavlja hidrodinamičku evoluciju koja odgovara modelu SNR2.0\_1.0 (videti tabelu 2) vremenskim trenucima:  $t = 500$  yr (gornji levi panel),  $t = 2000$  yr (gornji desni),  $t = 8000$  yr (donji levi) i  $t = 23000$  yr (donji desni). Prikazane konture odgovaraju linearno skaliranim vrednostima između najmanje i najveće vrednosti u prostoru između prednjeg udarnog talasa i kontaktnog diskontinuiteta. Simulaciona kutija je dužine 20 pc duž svake ose. Efektivna rezolucije se menja od  $8192^3$  na početku do  $512^3$  na kraju simulacije (23000 yr).



Slika 37: Dijagram zavisnosti površinskog radio-sjaja i dijametra za ostatke na frekvenciji  $\nu = 1$  GHz, dobijen iz naših numeričkih simulacija. Različite boje linija odgovaraju različitim gustinama, redom,  $n_H/\text{cm}^3 = 0.005$  (cijan), 0.02 (plava), 0.2 (zelena), 0.5 (crvena) i 2.0 (crna). Različiti tipovi linija označavaju energije eksplozije, redom,  $E_0/10^{51}\text{erg} = 0.5$  (tačkasta linija), 1.0 (isprekidana) i 2.0 (puna). Posmatrački podaci predstavljaju 65 Galaktičkih OSN sa poznatim daljinama (trouglovi), uzeti iz rada Pavlovića sa saradnicima (Pavlović et al. 2014). Kasiopeja A je prikazana otvorenim trouglom, dok prazan krug predstavlja najmlađi Galaktički OSN G1.9+0.3 (videti poglavlje 4). Brojevima su označeni sledeći ostaci: (1) CTB 37A, (2) Kes 97, (3) CTB 37B i (4) G65.1+0.6. Navodimo evolucione trake za reprezentativni slučaj sa parametrom injkcije  $\xi = 3.4$  i parametrom nelinearnog prigušenja magnetnog polja  $\zeta = 0.5$ .



Slika 38: Uticaj različitih parametara simulacije na prirodu radio-evolutivnih traka OSN. Prikazujemo četiri panela od kojih svaki sadrži radio-evoluciju u slučaju da samo jedan parametar držimo konstantnim. Ispitana je zavisnost evolutivnih traka od gustine okolne sredine,  $n_H$  (panel A), energije eksplozije  $E_0$  (panel B), parametra injekcije  $\xi$  (panel C) i parametra nelinearnog prigušenja magnetnog polja  $\zeta$  (panel D). U donjem levom uglu svakog panela nalaze se vrednosti konstantnih parametara, izabranih kao reprezentativni slučajevi.



Slika 39: Numerički logaritamski izvod površinskog radio-sjaja po dijimetru  $\frac{d \log \Sigma_\nu}{d \log D}$ . Različite vrste linija i njihove boje odgovaraju slučajevima kao na slici 37. Prikazane evolucione trake imaju parametar injekcije  $\xi = 3.4$  i parametar prigušenja magnetnog polja  $\zeta = 0.5$ .

njim vrednostima početnih parametara.

Parametar injekcije kosmičkih zraka  $\xi$  uglavnom leži u intervalu 3.0–4.5, gde visoke vrednosti  $\xi \geq 4.0$  odgovaraju približno režimu bez modifikacije udarnog talasa, dok niske vrednosti  $\xi \leq 3.5$  odgovaraju efikasnom DSA (Kosenko et al. 2014). Koristimo srednju vrednost  $\xi = 3.4$ , ali takođe u nekim simulacijama  $\xi = 3.3$  i  $\xi = 3.2$ , u cilju testiranja osetljivosti modela na vrednosti ovog parametra.

Parametar  $\zeta$  određuje udeo energije MHD talasa koji se rasipaju u plazmi i prelaze u toplotu, kroz proces nelinearnog prigušenja. Očekujemo da je prigušenje uvek prisutno u određenoj meri i koristimo vrednost medijane  $\zeta = 0.5$ , kao razumnu procenu (videti, na primer, Kang et al. 2013, Ferrand et al. 2014).

U simulacijama koristimo konstantan odnos protona i elektrona  $K_{ep} = 10^{-2}$ , vrednost koja je karakteristična za spektar kosmičkih zraka blizu Zemlje i izgleda da karakteriše kasnije faze evolucije OSN (Sarbadchicary et al. 2017). Sa druge strane, ova vrednost može dovesti do precenjivanja emisije mladih ostataka (ispostaviće se da je to slučaj kod G1.9+0.3<sup>79</sup>).

Kao što je naznačeno u radu Berežka i Folka, injekcija čestica se dešava samo na delu površine udarnog talasa (emitujuća površina je manja od  $4\pi R_s^2$ , gde je  $R_s$  radijus OSN), zavisno od veličine OSN (Berezhko & Völk 2004). To znači da radio-fluks dobijen u sferosimetričnom modelu mora biti renormalizovan tj. smanjen u određenoj meri koja može biti različita za različite ostatke. Izabrali smo da izostavimo ovu vrstu smanjenja kako bismo dobili gornju granicu simuliranih evolutivnih traka.

Tabela 2 prikazuje hidrodinamičke parametre svih simulacija. Na slici 37 prikazujemo simulaciju površinskog radio-sjaja<sup>80</sup>  $\Sigma_\nu$ , na frekvenciji  $\nu = 1$  GHz u funkciji dijametra  $D$ . Na sliku 37 dodali smo i podatke koji predstavljaju posmatranja 65 Galaktičkih ljuskastih OSN (uključujući Kasiopeju A) sa poznatim daljinama (Pavlović et al. 2014) i dodatno, prikazan je i najmlađi Galaktički OSN G1.9+0.3.

Simulirana zavisnost evolucije površinskog radio-sjaja od dijametra (slika 37), dobijena za tipične hidrodinamičke parametre date u tabeli 2, pokriva region Ga-

<sup>79</sup>U radu Pavlovića, dobijeno je  $K_{ep} = 2 \times 10^{-3}$  (Pavlović 2017).

<sup>80</sup>Izražen je u jedinicama  $\text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$  i nezavisan od daljine do izvora, sve dok se zanemaruju efekti difrakcije i interferencije (Wilson et al. 2013).

laktičkih eksperimentalnih podataka, uz dobro slaganje. Vide se četiri istaknuta OSN: CTB 37A, Kes 67, CTB 37B i G65.1+0.6 (označeni brojevima od 1 do 4, slika 37), koji imaju značajno veći radio-sjaj u odnosu na onaj koji predviđaju naši modeli. Ovo ipak nije iznenađujuće, s obzirom na to da posmatranja ukazuju na interakciju ovih ostataka sa molekulkim oblacima. U slučaju OSN CTB 37A (G348.5+0.1), na interakciju udarnog talasa sa molekulkim oblacima ukazuje prisustvo OH maserske emisije na 1720 MHz (Frail et al. 1996) prema veoma širokim molekulkim komponentama (Reynoso & Mangum 2000) koji takođe sadrže guste ( $> 10^3 \text{ cm}^{-1}$ ) regione (Maxted et al. 2013). Slično važi za OSN CTB 37B (348.7+0.3) koji se nalazi u jednom od najaktivnijih regiona u Galaksiji, gde je značajan broj ljuskastih struktura verovatno povezan sa skorijim OSN (Kassim et al. 1991) i takođe, detektovani su maserski OH izvori u radio-području (Frail et al. 1996). Dabner sa saradnicima, Tian sa saradnicima i Paron sa saradnicima predložili su da Kes 67 (G18.8+0.3) interaguje sa gustim molekulkim gasom (Dubner et al. 1999, 2004, Tian et al. 2007, Paron et al. 2012). Frobrich sa saradnicima je OSN G65.1+0.6 uključio na listu ostataka sa identifikovanom proširenim emisionim linijama  $\text{H}_2$  iz svog pregleda (Froebrich et al. 2015). Ovi autori predlažu da moguća interakcija sa obližnjim molekulkim oblakom čini G65.1+0.6 primarnom metom za gama posmatranja u oblasti TeV. OSN tipa Ia evoluiraju kroz sredinu male gustine i za to vreme ne usporavaju značajno. Kada ovi OSN naiđu na guste molekulske oblake, pri čemu njihovi udarni talasi imaju prilično visoke Mahove brojeve (oko nekoliko stotina), stvaraju se uslovi za efikasno ubrzavanje čestica i povećanu radio-emisiju.

Objašnjenje posmatranja koja leže ispod modelovanih traka je lakši zadatak. Podsećamo da su simulacije implementirane sa pretpostavkom da se injekcija dešava na celoj površini udarnog talasa. Ako se to dešava samo na nekom manjem delu, ukupna radio-emisija će biti manja. Takođe, može se zaključiti sa slike 38 (panel C) da parametar injekcije veći od  $\xi = 3.4$  dovodi do značajno niže vrednosti udela čestica  $\eta$  koje će biti uključene u proces ubrzanja. Ovo direktno vodi do niže ukupne radio-emisije. Ipak, nije sasvim jasno šta je uzrok neefikasne injekcije kod pojedinih OSN.

Tokom evolucije OSN, približno do oko 10 pc, površinski sjaj u radio-području

pokazuje relativno visoku osetljivost na vrednosti energije eksplozije  $E_0$ , okolne gustine  $n_H$ , parametra injekcije  $\xi$  i takođe parametra Alfenovog zagrevanja  $\zeta$  (videti sliku 38 koja pokazuje četiri panela na kojima smo želeli da istaknemo pojedinačno tip zavisnosti od svakog pomenutog parametra). Sa panela C (slika 38) se može zaključiti da modeli pokazuju izraženu zavisnost od injekcije  $\xi$ . Ipak, treba imati u vidu da prikazane trake pokrivaju širok opseg vrednosti za  $\xi$ , koji obuhvata približno pet redova veličine odnosa čestica koje bivaju uključene u proces ubrzanja  $\eta$  ( $\eta \sim 10^{-2}$  do  $10^{-7}$ , za kompresiju na udarnom talasu oko 4, videti rad Blazija sa saradnicima, Blasi et al. 2005). Slika 38 takođe pokazuje da evolutivne trake manjih ostataka pokazuju veću osetljivost na varijacije u osnovnim parametrima simulacije. U kasnijoj evoluciji ova zavisnost slabi i evolutivne trake pokrivaju znatno užu region.

Evolutivne trake za OSN tipa Ia, koji evoluiraju u retkoj sredini<sup>81</sup> dostižu maksimum radio-emisije za relativno male dijemetre (reda veličine nekoliko parseka) i zatim sledi faza opadanja sjaja. Dijametar koji odgovara maksimumu sjaja, je manji za slučaj MZM veće gustine. Evolutivne trake za evoluciju u sredini sa gustinom  $n_H = 0.2 \text{ cm}^{-2}$  imaju trend opadanja tokom cele evolucije OSN. Ovo nije u kontradikciji sa zaključcima o evoluciji gustine radio-fluksa  $S_\nu$  iz rada Pavlovića (Pavlović 2017), već sledi iz relacije između dve veličine kojima opisujemo radio-zračenje  $\Sigma_\nu \propto S_\nu D^{-2}$ . Radio-evolucija ostataka koji potiču od kolapsirajućih supernovih prati trend dobijen za OSN tipa Ia u najvećoj gustini okolne sredine i njihove evolutivne trake ne sadrže fazu rasta sjaja već predstavljaju monotono opadajuće funkcije dijametra OSN. Glavni razlog za ovakav oblik evolucije leži u početnoj interakciji sa okozvezdanom materijom.

Kako se OSN približava kraju Sedov-Tejlorove faze, efikasnost ubrzanja kosmičkih zraka takođe opada kao rezultat postepenog opadanja Alfenovog Mahovog broja  $M_A$ . Slike 37 i 38 jasno pokazuju da efikasnost ubrzanja ne utiče značajno na evoluciju radio-sjaja u ovoj fazi. Takođe, u nekim ranijim radovima predloženo je da veća gustina okolne MZM nužno vodi ka većoj sinhrotronskoj emisiji OSN (videti, na primer Duric & Seaquist 1986, Arbutina & Urošević 2005). Slika 37 pokazuje da

<sup>81</sup>U slučaju eksplozija tipa Ia, ovo je zadovoljeno u opštem slučaju i zaista očekujemo interakciju sa neporemećenom, retkom MZM (Reynolds 2008). Ipak, neki ostaci, kao što su Kepler, N103B i verovatno 3C 397, predstavljaju izuzetke i evoluiraju u nehomogenoj sredini.

evolutivne trake OSN iz guste sredine nisu uvek iznad traka dobijenih za ostatke u retkoj sredini, posebno u kasnijim fazama evolucije (u kojima OSN provode najveći deo evolucije) pa su stoga ova svojstva evolutivnih traka od najvećeg značaja.

Gusta sredina dovodi do značajnog usporavanja udarnog talasa i stoga, do manje efikasnog ubrzavanja čestica. Prema analitičkoj teoriji, baziranoj na Belovoj teoriji DSA u test-režimu, površinski sjaj u radio-kontinuumu ima oblik  $\Sigma_\nu \propto B^{1+\alpha} n_H D^{-2}$ , za datu brzinu udarnog talasa, gde je  $\alpha$  sinhrotronski spektralni indeks (Bell 1978b, Duric & Seaquist 1986). Zbog toga, bilo bi intuitivno očekivati da evolutivne trake OSN u gustoj sredini leže iznad onih u sredini niske gustine. Ovo je bila jedna od početnih teorijskih pretpostavki u radu Arbutine i Uroševića koji se bavi radio-evolucijom i klasifikacijom ostataka baziranoj na gustini okolne sredine (Arbutina & Urošević 2005). Međutim, naše simulacije pokazuju da to nije toliko jasan trend kod OSN sa dijametrom od nekoliko desetina do nekoliko stotina parseka. Zaključujemo da OSN u retkoj okolnoj sredini često imaju veći radio-sjaj u poređenju sa ostacima u gustoj sredini, za dati dijаметar. Iako može izgledati kontraintuitivno, ovo je potpuno očekivano u slučaju kada se u modelovanje uključi konzistentan tretman hidrodinamičke evolucije. Jasno je da udarni talas OSN koji nailazi na gustu sredinu usporava znatno ranije, što ponekad dovodi do skoro 10 puta manjeg Mahovog broja od onog koji bi ostatak imao u retkoj sredini (kada dostigne isti dijаметar). Veća vrednost Mahovog broja znači i veću energiju injekcije, kao i veći porast energije tokom prelaska čestica ispred i iza udarnog talasa, i obrnuto. To će dalje kao posledicu imati veći broj elektrona ubrzanih do energija reda  $\sim$  GeV (koji su odgovorni za emisiju zračenja putem sinhrotronskog mehanizma) u retkoj sredini i samim tim veću radio-emisiju. Naše simulacije ukazuju na to da svaka klasifikacija OSN, bazirana na gustini okolne sredine i položaju na  $\Sigma - D$  evolutivnom dijagramu, može dovesti do pogrešnih zaključaka i zahteva opreznost u primeni. Izuzetak predstavljaju ostaci sa malim dijametrima (mladi OSN) jer razlika između Mahovih brojeva kod njih nije toliko izražena, a energija injekcije je relativno velika zbog visokih temperatura iza udarnog talasa.

Tradicionalno, statističke studije (videti, na primer, radove Uroševića i Pavlovića sa saradnicima, kao i reference u njima, Urošević 2002, Pavlović et al. 2013, 2014)



često koriste zavisnost  $\Sigma_\nu = AD^\beta$ , baziranu na fizičkim argumentima, i zatim koriste posmatračke podatke za kalibraciju relacije (određivanje parametara  $\beta$  i  $A$ ). Ipak, na ovaj način dobijena relacija može predstavljati samo usrednjenu evolutivnu traku za dati uzorak OSN. Parametar nagiba  $\beta$  može biti shvaćen kao kvantitativni opis brzine promene površinskog sjaja u radio-području u odnosu na dijametar. Simulacije koristimo kao alat za dobijanje evolucije parametra  $\beta$  (slika 39) jednostavnim numeričkim računanjem  $\frac{d \log \Sigma_\nu}{d \log D}$  i primenom Savicki-Golaj filtera<sup>82</sup>, kako bi se izbegla pojava nefizičkih skokova vrednosti nagiba usled konačne vremenske rezolucije. Sa slike 39 zaključujemo da evolucija nagiba  $\Sigma - D$  relacije više zavisi od gustine okolne sredine, a manje od energije eksplozije. Za starije ostatke, pretežno one sa dijametrima između 10 i nekoliko stotina parseka (faza Sedov-Tejlora),  $\beta$  se približava vrednostima između  $-6$  i  $-4$ . Empirijska vrednost parametra  $\beta$  dobijena u radovima Pavlovića sa saradnicima (Pavlović et al. 2013, 2014) je  $\approx -5$  za Galaktički uzorak OSN. Ipak, treba imati u vidu da su ovi nagibi dobijeni primenom ortogonalne regresije na celokupni uzorak. Teško je razdvojiti faze evolucije radio-sjaja iz naših simulacija i povezati ih sa odgovarajućim dinamičkim fazama evolucije OSN, kao što je urađeno semi-analitički u radu Berežka i Folka (Berezhko & Völk 2004). Jedan od razloga je verovatno njihov uprošćeni opis hidrodinamike OSN, koji pretpostavlja da se odbačeni materijal na početku širi kao celina brzinom  $V_0$ .

Zanimljivo je da je Kostić sa saradnicima zaključio, primenom statističkih metoda u simulacijama sa fraktalnom strukturom MZM, da se nagib evolucije površinskog radio-sjaja ustrmljava ako je gustina okolne sredine veća (Kostić et al. 2016). Naše simulacije delimično potvrđuju ovaj zaključak. Naime, za ostatke malog dijametara ( $D \lesssim 20$  pc; videti sliku 39) dobijamo isti zaključak, dok za veće dijametre ovi nagibi postaju isti za različite gustine i njihove vrednosti iznose između  $-6$  i  $-4$ .

Iz simulacija se može izvesti zaključak da rasturanje tačaka na  $\Sigma - D$  dijagramu za dati dijametar ostatka  $D$  potiče od energije eksplozije  $E_0$ , kao i od različitih okolnih gustina. Takođe, treba imati u vidu da naše simulacije ne primenjuju re-normalizaciju fluksa usled činjenice da se injekcija dešava na delu udarnog talasa.

---

<sup>82</sup>Eng. *Savitzky-Golay*, metod primenjuje polinomijalnu regresiju na diskretne podatke, unutar pokretnog intervala (Savitzky & Golay 1964).

Ovaj parametar bi takođe uneo dodatno rasturanje u  $\Sigma - D$  ravni. Evolutivne trake su približno međusobno paralelne i takođe približno formiraju pravilan oblik za dijometre veće od  $\sim 10$  pc. Ova pravilnost može biti shvaćena kao teorijska osnova za korišćenje  $\Sigma - D$  relacije kao instrumenta za određivanje daljine do OSN. Merenje horizontalne širine regiona ograničenog simuliranim evolutivnim trakama, za površinski sjajeve  $10^{-20}, 10^{-21}$  i  $10^{-22} \text{ Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}\text{sr}^{-1}$  daje karakterističnu grešku od  $\approx 50\%$  za izračunatu donju granicu dijametra (daljine) OSN.

Slika 37 takođe pokazuje da postoji glatki prelaz između evolutivnih traka za dva tipa OSN, onih koji potiču od SN tipa Ia i onih koji potiču od kolapsirajućih SN (ostaci tipa Ia u gustoj sredini na dijagramu se nalaze blizu onih koji potiču od kolapsirajućih supernovih). Ova svojstva otežavaju eventualno određivanje tačnog tipa supernove od koje potiče OSN, samo na osnovu radio-posmatranja. Povezivanje OSN sa SN zahteva dodatne posmatračke podatke na različitim talasnim dužinama.

Na slici 40 je prikazana simulirana zavisnost radio-sjaja na frekvenciji  $\nu = 5$  GHz, kako bi se dodatno proverilo slaganje sa vangalaktičkim uzorcima OSN. Uzorci koje smo koristili u disertaciji sadrže dostupne podatke o vangalaktičkim populacijama OSN, uglavnom dobijene iz rada Bozeta sa saradnicima (Bozzetto et al. 2017). Dodatne uzorke, kao što je na primer NGC 6744, treba uključiti u budućnosti, kada budu dostupna novija merenja (Yaw et al. 2018). Izostavili smo uzorak OSN iz galaksije Arp 220, u odnosu na rad Bozeta sa saradnicima (Bozzetto et al. 2017), jer je sastavljen od ostataka sa dijametrima koji su manji od početnog dijametra odbačenog materijala u našim simulacijama. Slika 40 sadrži ukupno 215 OSN, koji su prikazani zajedno sa modelovanim evolutivnim trakama na 5 GHz. Posmatrani uzorak sadrži i ostatak SN 1987A, iako njegova kompleksna morfologija zahteva napredniji i specijalizovani tretman (Orlando et al. 2015). Značajnije odstupanje posmatranja od modela postoji samo za udruženi uzorak ostataka iz četiri nepravilne galaksije: NGC 1569, 2366, 4214 i 4449 (radio-fluksevi su uzeti iz rada Čomiuk i Wilkotsa, pri čemu nisu uključeni ostaci sa dijametrima koje je bilo nemoguće razlučiti usled ograničene rezolucije interferometra VLA, Chomiuk & Wilcots 2009a). U poređenju sa radio-sjajem koji predviđa naš model, ove galaksije sadrže ostatke koji su nadprosečno sjajni, imajući u vidu njihovu veličinu. Jedno od mogućih objašnjenja

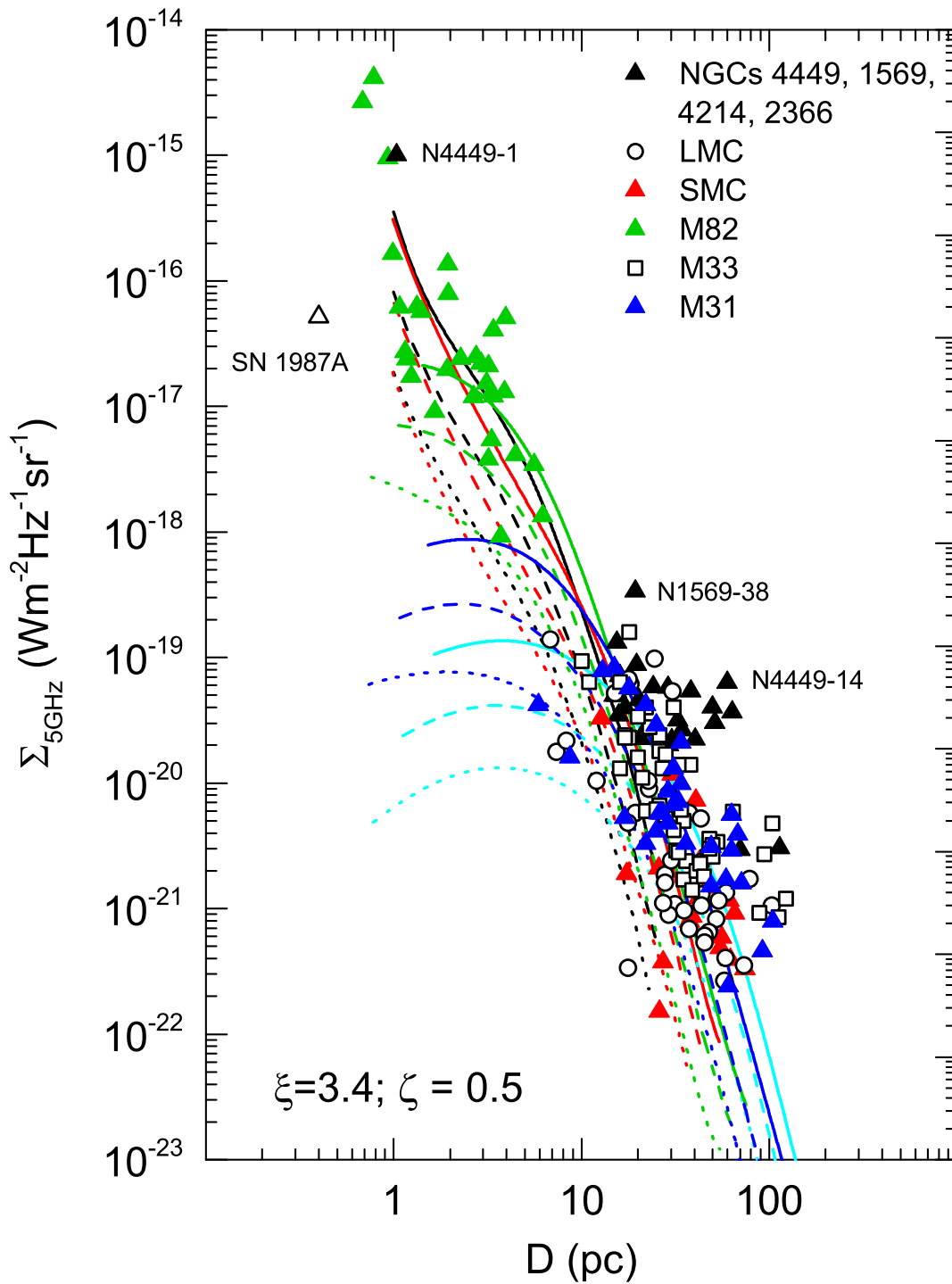
može biti visoka stopa formiranja zvezda (eng. *star formation rate*, SFR), posebno za NGC 1569 i NGC 4449. Najsjajniji OSN u NGC 1569 je N1569-38 i on je samo upola manje luminozan od Kasiopeje A. NGC 4449 sadrži jako mlad ostatak N4449-1 (poznat i kao J1228+441 ili 1AXG J122810+4406), koji je izuzetno sjajan, čak pet puta sjajniji od Kasiopeje A. Udarni talas ostatka N4449-1, umesto sa okolnom MZM, verovatno još uvek interaguje sa zvezdanim vetrom masivne zvezde roditelja (Bietenholz et al. 2010). Drugi po luminoznosti OSN u ovoj galaksiji je N4449-14, sa luminoznošću nešto manjom od luminoznosti Kasiopeje A (Chomiuk & Wilcots 2009a). U galaksiji sa većom stopom formiranja zvezda, očekujemo veću populaciju veoma masivnih zvezda i, ako  $E_0$  zavisi od mase zvezde roditelja (Chomiuk & Wilcots 2009b), ova energija može biti veća od najveće vrednosti iz naših simulacija  $E_0 = 2 \times 10^{51}$  erg.

## 5.4 Diskusija

U ovom delu disertacije proučavali smo evoluciju netermalne emisije OSN u radiopodručju, sa odgovarajućim tretmanom hidrodinamike i difuznog udarnog ubrzavanja. Hidrodinamička evolucija OSN je modelovana pomoću 3D hidrodinamičkog koda PLUTO, na mreži sastavljenoj od blokova adaptivne preciznosti. U modelovanje je uključeno vremenski zavisno ubrzavanje čestica na prednjem udarnom talasu i odgovarajući uticaj na fluid, koji se računa primenom nelinearnog semi-analitičkog modela Blazija sa saradnicima (Blasi et al. 2004, 2005).

Takođe smo implementirali i model pojačanja magnetnog poja u blizini udarnog talasa, uzevši u obzir nestabilnosti koje izaziva tok kosmičkih zraka. Uzimamo u obzir rezonantne i nerezonantne modove, po prvi put u simulacijama OSN na velikoj skali, pri čemu implementiramo numeričke recepte dobijene iz PIC simulacija, baziranih na osnovnim fizičkim principima, i nelinearnih MHD simulacija turbulencije koju izazivaju kosmički zraci. Ipak, pomenuti pristup ima veći značaj za simulacije mladih ostataka, dok se kod starijih, zbog manjih brzina udarnog talasa, svodi na pristup koji uzima u obzir samo rezonantne modove.

Analitički pristup pomenutim fenomenima često je baziran na jednostavnim pretpostavkama o evolutivnoj fazi OSN, spektru ubrzanih čestica i njegovoj evoluciji,



Slika 40: Dijagram zavisnosti površinskog sjaja radio-zračenja u funkciji dijametra OSN, na frekvenciji  $\nu = 5$  GHz, dobijen iz naših numeričkih simulacija. Prikazane tačke predstavljaju posmatračke podatke iz sledećih galaksija: M82 (zelena boja); NGC 4449, NGC 1569, NGC 4214, NGC 2366 (crna); M31 (plava); SMC (crvena; eng. *Small Magelanic Cloud*); M33 (otvoreni kvadrati); LMC (otvoreni krugovi). Iako pripada galaksiji LMC, mladi OSN 1987A je prikazan odvojen od ostalih (otvoreni trougao) i predstavlja najbližu eksploziju supernove viđenu u modernom dobu od kada možemo da vršimo radio-posmatranja. Različite boje i oblik linija odgovaraju istim slučajevima kao na slici 37.

evoluciji magnetnog polja, itd. Pouzdane numeričke simulacije predstavljaju dobar način za prevazilaženje ovih ograničenja, u cilju boljeg razumevanja osnovnih fizičkih procesa i objašnjavanja posmatranih statističkih osobina.

NLDSA i pojačanje magnetnog polja uključeni su u veliki broj hidrodinamičkih kodova i baziraju se na sličnim fizičkim modelima. Njihov uticaj na hidrodinamku je modelovan kroz računanje efektivnog adijabatskog indeksa i njegovu advekciju iza udarnog talasa, koji predstavlja aproksimativni pristup. Ellison sa saradnicima koristio je približni, algebarski model DSA (Ellison et al. 2004), koji sadrži osnovne fizičke procese koji opisuju nelinearno ubrzavanje, date radovima Berežka i Elisona, kao i Elisona sa saradnicima (Berezhko & Ellison 2004, Ellison et al. 2000). Noviji radovi, kao što je rad Lija sa saradnicima, Feron sa saradnicima i Orlando sa saradnicima (Lee et al. 2012, Ferrand et al. 2012, Orlando et al. 2016) se uglavnom oslanjaju na statički model NLDSA, razvijen od strane Blazija i saradnika (Blasi 2004, Blasi et al. 2005). Stoga je očekivano da se dobija veoma dobro slaganje dobijenih spektara ubrzanih čestica u pomenutim radovima i onih u našem radu (videti, na primer, sliku 27). Mi smo uglavnom zainteresovani za netermalnu, sinhrotron-sku radio-evoluciju, vezanu za elektrone iz kosmičkih zraka, pa zato ne uključujemo termalnu populaciju čestica. Simulacije ne sadrže račun 3D profila radio-sjaja, s obzirom na to da je glavni cilj disertacije evolucija ukupne radio-emisije. Ipak, ne očekujemo da bi se profil sjaja dobijen u našem modelu mnogo razlikovao od onog dobijenog u radu Feron sa saradnicima (Ferrand et al. 2012).

Naš cilj u ovoj glavi nije bio modelovanje nekog određenog OSN, bazirano na posmatranim dinamičkim i spektralnim karakteristikama. Koristeći skup reprezentativnih parametara, dobili smo usrednjene evolutivne trake, koje dobro fituju trenutno dostupne skupove posmatračkih podataka. Takođe proučavamo uticaj relevantnih fizičkih parametara na radio-emisiju OSN, kao i na evoluciju ove emisije. Pokazali smo da tipični hidrodinamički parametri, kao i parametri ubrzavanja kosmičkih zraka, kao rezultat daju radio-evoluciju koja je konzistentna sa radio-posmatranjima Galaktičkih OSN. Simulacije pokazuju da evolutivne trake OSN u gustoj sredini nisu uvek iznad traka za ostatke koji evoluiraju u retkoj MZM. Kao glavni razlog navodimo značajno usporenje udarnog talasa OSN u gustoj sredini,

koje dalje vodi do smanjene efikasnosti ubrzavanja čestica. Ukoliko OSN evoluiraju u gustoj sredini (takođe, važi pretpostavka o izotropnosti), to može kao rezultat imati odsustvo faze rasta radio-sjaja tj. radio-evoluciju karakteriše samo faza opadanja površinskog sjaja.

Nakon dobijanja glavnih rezultata ovog modela, dodatno razmatramo mnogo puta kritikovanu upotrebu  $\Sigma - D$  relacije kao alata za određivanje udaljenosti. Evolutivne trake imaju veoma sličnu zajedničku formu za dijemetre veće od  $D \sim 10$  pc. Čak i u slučaju konstantnog parametra renormalizacije za sve OSN (koja u obzir uzima ubrzavanje čestica samo na delu udarnog talasa), simulirane evolutivne krive ukazuju na to da će greška za dijometar (daljinu) biti oko 50%. Dodatni problemi se javljaju usled grešaka merenja i selekcionih efekata (videti, na primer, Arbutina & Urošević 2005, Urošević et al. 2010, Pavlović et al. 2014).

Dobijamo dobro slaganje u  $\Sigma - D$  ravni između posmatranih OSN i naših numeričkih rezultata. Ipak, OSN iz galaksija koje karakteriše visoka stopa formiranja zvezda pokazuju sistematski trend povećane radio-emisije u odnosu na onu predviđenu modelom. Moguće objašnjenje je veća energija eksplozije u gustoj sredini zahvaljujući populaciji izuzetno masivnih zvezda.

## 5.5 Sažetak i zaključak

Predstavili smo 3D hidrodinamičko modelovanje OSN, koje uključuje NLDSA, pojačanje magnetnog polja i njihov uticaj na udarni talas. Uglavnom proučavamo osobine radio-sinhrotronske emisije OSN, kao i njenu evoluciju. Neki od najvažnijih rezultata našeg modelovanja su:

- 1) Testirali smo naš model na dostupnim posmatranjima Galaktičkih i vanga-laktičkih OSN. Simulacija zavisnosti radio-evolucije OSN je konzistentna sa opsegom parametara koje očekujemo u prirodi.

- 2) Tokom početne evolucije OSN, približno do dijametra od 10 parseka, površinski radio-sjaj karakteriše relativno visoka osetljivost na vrednosti energije eksplozije, okolne gustine, parametra termalne injekcije i parametra Alfenovog zagrevanja. U kasnijoj evoluciji, ove zavisnosti slabe.

- 3) Radio-evolutivne trake za OSN koji evoluiraju u sredini različite gustine seku

se između  $\approx 10$  pc i nekoliko desetina parseka.  $\Sigma - D$  trake za veću gustinu MZM se posle toga nalaze ispod traka koje odgovaraju retkoj sredini. Stoga korelacija između okolne gustine i položaja na  $\Sigma - D$  dijagramu nije uvek jednoznačna i njena primena zahteva opreznost.

4) Evolutivne trake za radio-emisiju OSN mogu vrlo rano pokazati trend opadanja, posebno u slučajevima kada ostaci evoluiraju kroz gustu MZM. Ovo može u nekim slučajevima imati kao rezultat potpuno odsustvo faze rasta radio-sjaja. Situacija se dodatno komplikuje kod radio-supernovih u fazi kada dominira materijal koji je odbacila zvezda-roditelj.

5) Udarni talasi koji napuštaju mehurove razređenog gasa i nailaze na guste molekulske oblake, dok još uvek imaju velike Mahove brojeve (oko nekoliko stotina), pokazuju povećanu radio-emisiju u poređenju sa OSN koji se tokom cele evolucije nalaze u gustom sredini.

6) U našim simulacijama se dobijaju nagibi  $\Sigma - D$  relacije između  $-4$  i  $-6$  za potpuni režim Sedov-Tejlora, koji se dobro slažu sa teorijskim predviđanjima i vrednostima za posmatrane uzorke OSN.

7) U slučaju da se  $\Sigma - D$  relacija koristi kao alat za određivanje daljine, simulacije ukazuju na postojanje greške od oko 50%, čak i kada se zanemare morfološke karakteristike.

Evolutivne trake, dobijene u ovom radu, mogu biti veoma korisne za radio-posmatrača. Oni ih mogu primeniti na određivanje evolutivnog statusa svih posmatranih Galaktičkih i vangalaktičkih OSN, za koje je nepoznata starost ili parametri okolne sredine. Dodatno, očekujemo da ovaj tip modelovanja bude koristan alat za buduće posmatrača na radio-teleskopima nove generacije kao što su ALMA, MWA, ASKAP, SKA i FAST.

## 6 Fizička zasnovanost ekviparticije kod ostataka supernovih

### 6.1 Uvod

U prethodnim poglavljima, jasno se ističe važnost magnetnog polja i njegovog pojačanja unutar OSN za evoluciju posmatrane radio-emisije, kao i za ubrzavanje i propagaciju kosmičkih zraka. Dodatno, poznatno je da magnetno polje utiče na ukupnu stopu formiranja zvezda (Li et al. 2017) i dinamiku gasa u molekulskim oblacima (videti pregledne članke Beka i Hana, Beck 2015, Han 2017). Ipak, određivanje jačine magnetnog polja u MZM nije jednostavan zadatak. Postoje tri standardne metode kojima se procenjuje jačina magnetnog polja: Zemanov<sup>83</sup> efekat, mera rotacije i račun ekviparticije. Zemanov efekat se uglavnom primenjuje na veoma gustu MZM, tj. jezgra molekulskih oblaka. Faradejeva rotacija daje paralelnu komponentu magnetnog polja u pravcu prostiranja radio-talasa. U ovom delu naglašavamo značaj računa ekviparticije za OSN gde pojačanje magnetnog polja stvara uslove za globalnu ekviparticiju u MZM.

Ekviparticija između gustine energije kosmičkih zraka i gustine energije magnetnog polja je početna pretpostavka za jednu od metoda koja služi za procenu jačine magnetnog polja (Pacholczyk 1970, Beck & Krause 2005, Arbutina et al. 2012, 2013). Ova pretpostavka je neophodna za računanje magnetnog polja pomoću izraza za ukupnu energiju sinhrotronskog izvora. Izraz za ukupnu energiju ima dve nepoznate: gustinu energije kosmičkih zraka  $\epsilon_{CR}$  i gustinu energije magnetnog polja  $\epsilon_B$ . Jednačina sinhrotronske emisivnosti je neophodna za rešavanje problema ekviparticije. Relacije između  $\epsilon_{CR}$  i  $\epsilon_B$  se dobija diferenciranjem jednačine za ukupnu energiju po nezavisnoj promenljivoj  $B$ . Na ovaj način možemo izračunati vrednost jačine magnetnog polja za minimalnu ukupnu energiju sistema. Pretpostavka o ekviparticiji je tako praktično ekvivalentna uslovu minimuma energije (videti, na primer, rad Arbutine sa saradnicima, Arbutina et al. 2012).

U ovom delu disertacije, primenom numeričkih simulacija razvijenih za potrebe

---

<sup>83</sup>*Pieter Zeeman* (1865-1943).



proučavanja radio-evolucije, razmatramo fizičku opravdanost ekviparticije. Uvodimo pojam *particije* između gustina energije kosmičkih zraka i magnetnog polja u OSN, koji obuhvata i slučajeve kada ove gustine energija nisu nužno jednake već je njihov odnos približno konstantan tokom evolucije OSN.

Da bi se dokazali fizički temelji ekviparticije (ili particije) u OSN, primenili smo hidrodinamičke simulacije sa uključenim nelinearnim ubrzavanjem kosmičkih zraka (modeli koji su već opisani u glavama 4 i 5). U ovim simulacijama se tokom evolucije OSN računaju odnosi gustina energija kosmičkih zraka (ili samo elektrona iz kosmičkih zraka) i magnetnog polja  $\epsilon_{CR}/\epsilon_B$  (ili  $\epsilon_e/\epsilon_B$ ).

## 6.2 Ekviparticija i particija

Ekviparticija u MZM se najverovatnije javlja kao posledica redistribucije gravitacione energije u MZM. Gustine energije elektromagnetnog zračenja, magnetnog polja, kosmičkih zraka i toplotnog kretanja MZM u okolini Sunca su istog reda veličine, oko  $1 \text{ eV cm}^{-3}$  (Longair 1994, Lequeux 2005, Ptuskin 2007). Đurić je predložio da je ekviparticija između gustina energije magnetnog polja i kosmičkih zraka zadovoljena u četiri obližnje spiralne galaksije (Duric 1990). Sa druge strane, Yoast-Hull sa saradnicima zaključuje, na osnovu gama posmatranja, da ekviparticija ne važi u centralnim molekulskim kompleksima zvezdorodnih galaksija M82, NGC 253 i Arp 220 (Yoast-Hull et al. 2016). Ipak, njihovo modelovanje takođe daje gustine energija magnetnog polja i kosmičkih zraka približno istog reda veličine (videti tabelu 2 iz rada Yoast-Hulla sa saradnicima, Yoast-Hull et al. 2016) što navodi na zaključak da pod ekviparticijom ovi autori podrazumevaju strožu jednakost ovih komponenti.

U ovom delu disertacije, koristimo 3D hidrodinamičke simulacije evolucije OSN, u koje smo uključili proizvodnju visokoenergijskih relativističkih čestica (bazirano na ranije opisanom modelu NLDSA). Dobijeni spektar elektrona i pojačanje magnetnog polja usled nelinearnih efekata koriste se za računanje radio-emisije. Parametre simulacija određujemo primenom minimizacione procedure pomoću koje se traže vrednosti parametara koje daju radio-emisiju najbližu posmatranoj. Sličan pristup korišćen je u radovima Berežka i Folka, i Lija sa saradnicima, samo ograničen na 1D hidrodinamiku (Berezhko & Völk 2006, Lee et al. 2012). 3D simulacije omogućavaju

adekvatan tretman struktura u regionu mešanja fluida između prednjeg i povratnog udarnog talasa, odakle uglavnom potiče emisija u radio-kontinuumu (ima još veću važnost u simulacijama koje uključuju 3D raspodelu radio-sjaja).

Dinamičku evoluciju OSN modelujemo numerički, primenom modifikovanog koda PLUTO i biblioteke *Chombo*, koja obezbeđuje adaptivnu preciznost mreže (za detaljan opis hidrodinamičkog modela videti poglavlje 5.2.1). Modelovanju hidrodinamike u 3D dodajemo uticaj ubrzanih kosmičkih zraka i pojačanje magnetnog polja kao posledicu rezonantnih i nerezonantnih nestabilnosti izazvanih tokom ubzanih čestica (videti poglavlje 5.2.2).

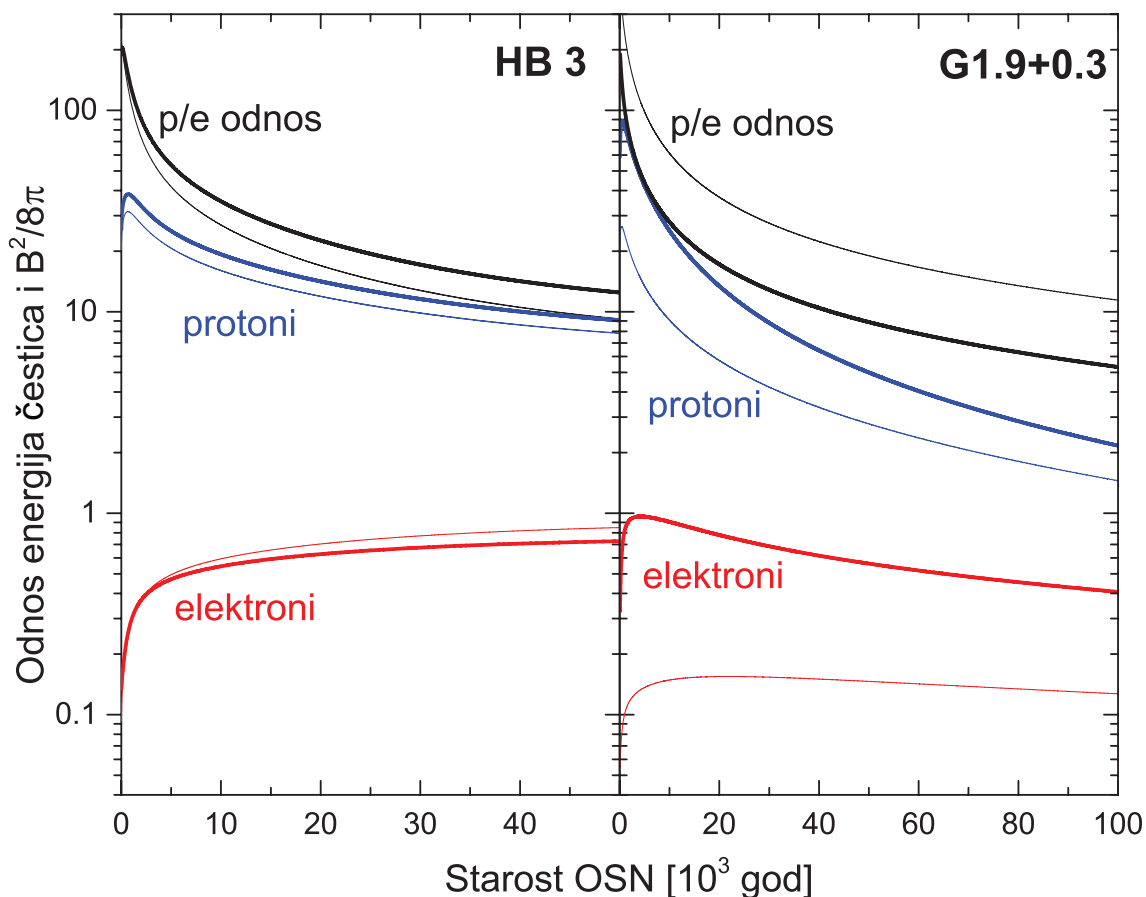
Između ostalog, kao izlaz iz simulacija, dobijamo odnose između gustine energija kosmičkih zraka (ili samo elektrona) i magnetnog polja, tokom evolucije OSN. Modelujemo evoluciju OSN počev od  $\approx 30$  godina posle eksplozije pa sve do kraja faze Sedov-Tejlora, jer u kasnijoj evoluciji gubici energije na zračenje postaju značajni.

Očekujemo da spektar ubzanih čestica (protonski i elektronski), dobijen u NL-DSA modelu, bude dobra aproksimacija stvarnog spektra čestica u OSN. U suprotnom, ne bi bilo moguće postići dobro slaganje sa posmatranim osobinama zračenja. Pažljivo smo podesili skup ulaznih parametara za naše simulacije kako bismo dobili gustine fluksa približno jednake onim koje su dobijene iz radio-posmatranja. Ovaj skup parametara je u većini slučajeva jedinstven, odnosno male promene ulaznih parametara mogu narušiti slaganje sa posmatranjima, što je glavni cilj ovog modelovanja. Dalje objašnjenje o izboru vrednosti ulaznih parametara predstavljeno je u sledećim poglavljima ove disertacije.

Na osnovu rezultata simulacija prikazanih na slici 41, zaključujemo da je približno zadovoljena ekviparticipija između gustine energije ultrarelativističkih elektrona i magnetnog polja. Iako nije baš najjasniji fizički mehanizam koji dovodi do takve vrste ekviparticipije, ova pretpostavka bi trebala da omogući pouzdaniju procenu magnetnog polja iz računa ekviparticipije u odnosu na pretpostavku o minimumu energije. Jednačina (2) iz rada Arbutine i saradnika (Arbutina et al. 2012) određuje gustinu energije elektrona:

$$\epsilon_e = K_e (m_e c^2)^{2-\gamma} \frac{\Gamma(\frac{3-\gamma}{2})\Gamma(\frac{\gamma-2}{2})}{2\sqrt{\pi}(\gamma-1)}, \quad (6.1)$$

gde je  $K_e$  konstanta u stepenoj raspodeli elektrona po energiji i  $\gamma$  je energetski in-



Slika 41: Vremenska evolucija odnosa gustina energija protona (elektrona) i magnetnog polja na udarnom talasu, sa pretpostavljenim  $K_{ep} = 0.01$ , prikazana je debljom plavom (crvenom) linijom. Parametri simulacije su podešeni tako da reprodukuju trenutne posmatračke karakteristike dva odabrana ostatka: OSN HB3, koji evoluira u gustom sredini i najmlađeg Galaktičkog ostatka G1.9+0.3 koji evoluira u retkoj sredini. Takođe, dajemo odnose gustina energije protona i elektrona tokom evolucije OSN (deblja crna linija). Tanke linije prikazuju evoluciju istog odnosa, sa pretpostavljenim drugačijim parametrom  $K_{ep} = 0.007$  za HB3, i  $K_{ep} = 0.004$  za G1.9+0.3.

deks ultrarelativističkih elektrona. Ako tražimo minimum ukupne energije koristeći izraz za gustinu energije elektrona (6.1), prateći isti algebarski postupak kao u radu Arbutine sa saradnicima (Arbutina et al. 2012), dobijamo jednačinu za računanje magnetnog polja sličnu jednačini (12) iz pomenutog rada. Naša jednačina za magnetno polje, dobijena uz uslov minimuma ukupne energije (zbir energija elektrona i magnetnog polja) daje  $(1 + \kappa)^{2/(\gamma+5)}$  puta<sup>84</sup> manje vrednosti nego u radu Arbutine i saradnika (Arbutina et al. 2012), i ima sledeći oblik:

$$B \text{ [G]} \approx \left( 6.286 \cdot 10^{(9\gamma-79)/2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\Gamma(\frac{3-\gamma}{2})\Gamma(\frac{\gamma-2}{2})\Gamma(\frac{\gamma+7}{4})}{\Gamma(\frac{\gamma+5}{4})} (m_e c^2)^{2-\gamma} \cdot \right. \quad (6.2)$$

$$\left. \cdot \frac{(2c_1)^{(1-\gamma)/2}}{c_5} \frac{S_\nu [\text{Jy}]}{f d [\text{kpc}] \theta [']^3} \nu [\text{GHz}]^{(\gamma-1)/2} \right)^{2/(\gamma+5)},$$

gde  $m_e c^2 \approx 8.187 \times 10^{-7}$  erg,  $S_\nu$  je gustina fluksa,  $f$  je faktor ispunjavanja zapremine (eng. *volume filling factor*),  $d$  je daljina do OSN,  $\theta$  je ugaoni dijametar i  $\nu$  predstavlja frekvenciju. Dalje imamo:

$$\epsilon_B = \frac{\gamma+1}{4} \epsilon_e, \quad \epsilon_{\min} = \frac{\gamma+5}{\gamma+1} \epsilon_B, \quad (6.3)$$

gde je  $\epsilon_{\min}$  minimalna ukupna gustina energije. Ovo su iste jednačine kao u radu Arbutine i saradnika (Arbutina et al. 2012).

Koncept particije je već pomenut u radu Arbutine i saradnika (jednačina 28). Ako je  $\epsilon_B/\epsilon_{\text{CR}} = \beta = \text{const}$ , onda sledi:

$$B' = \left( \frac{4\beta}{\gamma+1} \right)^{2/(\gamma+5)} B, \quad (6.4)$$

gde je  $B'$  nanovo izračunato polje za  $\beta = \text{const}$ , dok je  $B$  polje koje odgovara minimumu energije.

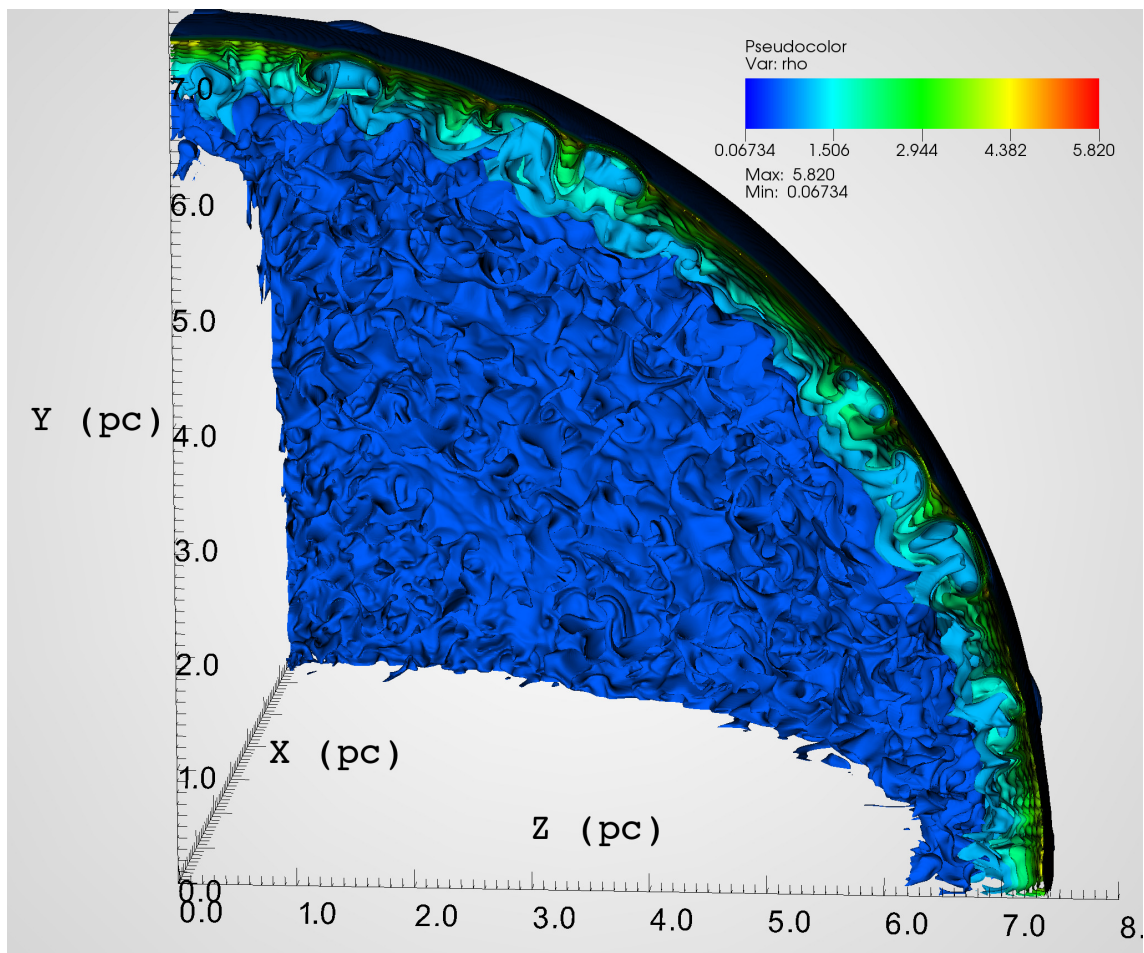
---

<sup>84</sup> $\kappa$  je definisano u radu Arbutine i saradnika (Arbutina et al. 2012) i predstavlja odnos energija jona i elektrona.

### 6.2.1 Primeri: ostaci supernovih G1.9+0.3 i HB3

Odabrali smo dva reprezentativna primera OSN na kojima ćemo proveriti ispunjenje ekvipartacije (ili particije). Prvi OSN je G1.9+0.3 razmatran u glavi 4, koji evoluirao u retkoj sredini, i drugi OSN HB3, poreklom od kolapsirajuće supernove, koji evoluirao u gustom sredini (slika 42). OSN G1.9+0.3 je tipičan predstavnik mladih ostataka tipa Ia u retkoj okolnoj sredini. Sa druge strane, HB3 je tipičan predstavnik starog ostatka, mešane morfologije, koji potiče od kolapsirajuće supernove i interaguje sa gustom molekulskom sredinom. Zbog toga smo za detaljno proučavanje u disertaciji odabrali baš ova dva ostatka, kao tipične predstavnike dve suprotne klase OSN. U budućim radovima, planirana je analiza svih posmatranih mladih ostataka: onih sa izraženim Balmerovim linijama (eng. *Balmer dominated*), linijama kiseonika (eng. *oxygen rich*), kao i starijih OSN, posebni onih u gustom sredini, sa ciljem da se ispita ekvipartacija u ostacima i MZM kao celini. Kao što je ranije naglašeno, koristimo podatke iz posmatranja za kalibraciju simulacija.

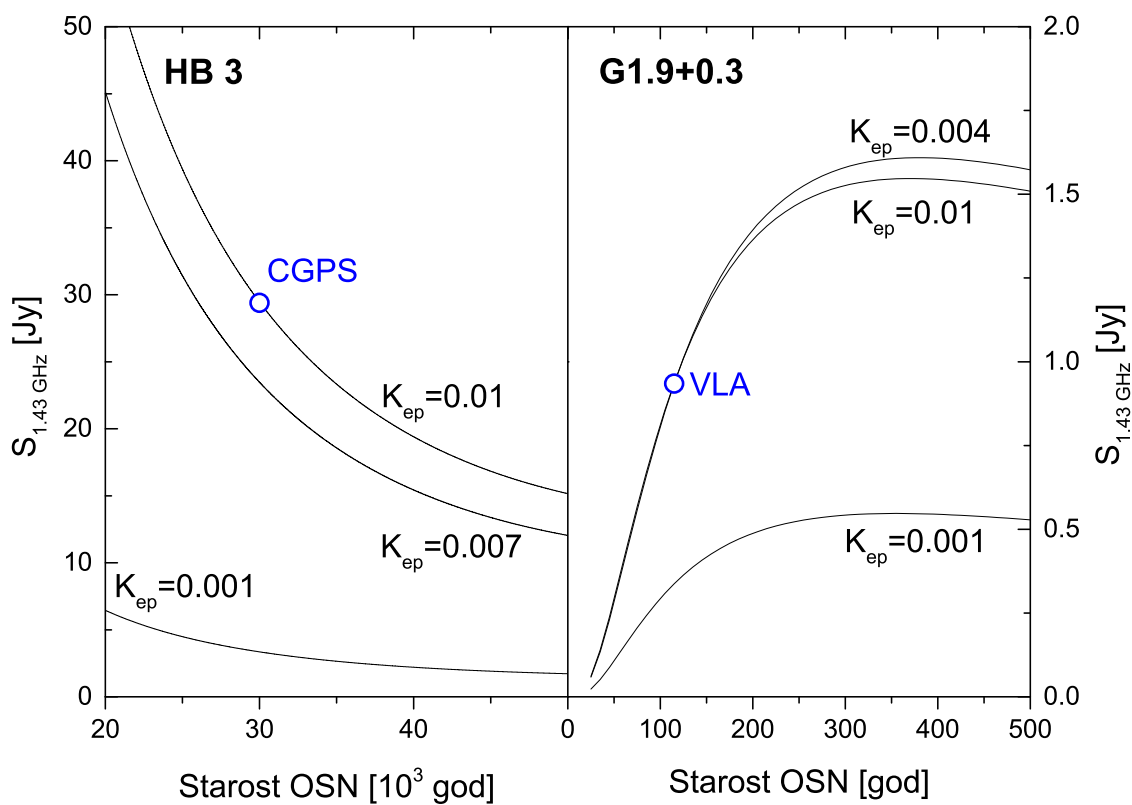
Za injekciju elektrona, uzimamo  $K_{\text{ep}} = 10^{-2}$ , kao vrednost dobijenu iz posmatranja fluksa kosmičkih protona i elektrona energije oko 10 GeV, u blizini Zemlje. Ovo može delovati kao gruba pretpostavka, ali ona nije u kontradikciji sa posmatranjima (Yuan et al. 2012). Vrednost ove konstante može uticati samo na konačnu vrednost odnosa gustine energije elektrona i magnetnog polja, ali ne i na njegovo kvalitativno ponašanje tokom životnog veka OSN. Još bitnije, neka multifrekvenciona posmatranja, uglavnom mladih OSN, daju  $K_{\text{ep}} = 10^{-3}$  ili manje (Völk et al. 2005, Morlino & Caprioli 2012), dok vrednosti oko  $10^{-2}$  izgledaju verovatnije kod starijih OSN (Sarbadhicary et al. 2017). Zbog toga, neodređenost parametra  $K_{\text{ep}}$  je verovatno manje izražena u kasnijim fazama evolucije, kada i inače naše simulacije predviđaju približnu ekvipartaciju između elektrona i magnetnog polja. Dodatno, u cilju kvantitativne provere opravdanosti korišćenja vrednosti  $K_{\text{ep}} = 10^{-2}$ , implementirali smo skup dodatnih simulacija sa manjim vrednostima ovog parametra. Glavni kriterijum validnosti novog skupa parametara je slaganje gustine fluksa iz simulacije sa posmatranim vrednostima. Ako pretpostavimo  $K_{\text{ep}} = 10^{-3}$ , naše simulacije ne daju vrednosti blizu posmatranih, za oba OSN, uz uslov da ostali parametri ostanu u granicama vrednosti koje imaju fizički smisao (videti sliku 43). Vrednost parametra



Slika 42: 3D raspodela gustine plazme za OSN HB3, u linearnoj skali, u jedinicama  $\text{cm}^{-3}$  (videti oznake boja u gornjem desnom uglu slike) posle 2000 godina evolucije kroz homogenu MZM gustine  $0.5 \text{ cm}^{-3}$ .  $(X, Y, Z)$  predstavlja Dekartov koordinatni sistem, čiji koordinatni početak predstavlja centar početne eksplozije. Primenili smo operator za isecanje površina sa konstantnom gustinom, odabran tako da prikaže 10 slojeva gustine (linearna skala) iz 3D baze tipa HDF5 (VisIT; Brugger et al. 2012).

injekcije  $\xi$  se uglavnom očekuje u intervalu 3.0–4.5 (Kosenko et al. 2014). Parametar  $\zeta$  određuje stepen disipacije MHD talasa kroz proces zagrevanja plazme i može teorijski uzimati vrednosti od 0 to 1 (Caprioli et al. 2009). Ipak, odlučili smo da izbegnemo „ekstremne” vrednosti ( $\zeta = 0$  ili 1) u našim simulacijama zbog toga što slučajevi između ovih vrednosti izgledaju verovatniji u realnosti (Kang et al. 2013). Poklapanje simulacije sa posmatranim vrednostima gustine fluksa ostatka G1.9+0.3 moguće je postići i za  $K_{\text{ep}} = 0.004$  ( $\xi = 3.34$ ,  $\zeta = 0.34$ ; videti sliku 43, desni panel), pri čemu je ova evolutivna traka veoma blizu dobijenoj za  $K_{\text{ep}} = 10^{-2}$ , sa određenim odstupanjima u gustinama energije. Zbog toga zaključujemo da  $K_{\text{ep}} = 10^{-2}$  predstavlja dobru pretpostavku i može dati dobro poklapanje simuliranog i posmatranog radio-fluksa kod oba ostatka, uz odgovarajući izbor ostalih parametara. Potvrdili smo da postoji značajnije odstupanje  $K_{\text{ep}}$  od vrednosti  $10^{-2}$  za mlade ostatke kao što je G1.9+0.3, u odnosu na slučaj starijeg HB3. Kako bismo proverili uticaj izbora parametra  $K_{\text{ep}}$  na rezultate simulacija, dodatno smo simulirali slučaj sa  $K_{\text{ep}} = 0.004$  za G1.9+0.3, i  $K_{\text{ep}} = 0.007$  za HB3. Glavni rezultati su prikazani na slici 41. Prikazani odnosi energija pokazuju da varijacije parametra  $K_{\text{ep}}$  ne menjaju značajno trend i kvantitativne zaključke. Nešto veća razlika (oko 3.5 puta manja vrednost) je dobijena za odnos gustina energija elektrona i magnetnog polja, za OSN G1.9+0.3 (slika 41). Sa druge strane, pomenuta 3.5 puta manja vrednost kao rezultat ima samo 25% manju vrednost izračunatog magnetnog polja iz elektronske ekviparticije, predložene u ovom radu. Zaključujemo da je  $K_{\text{ep}} = 10^{-2}$  opravdano pretpostavljena vrednost za naša dva reprezentativna OSN, tako da su dalje analize i zaključci u ovom radu zasnovani na ovoj pretpostavci.

Naši početni uslovi su odabrani tako da reprodukuju ostatak G1.9+0.3 posle oko 120 godine evolucije, sa radijusom udarnog talasa od oko 2 parseka, za pretpostavljenu lokaciju u blizini centra Galaksije (Reynolds 2008) i brzinu udarnog talasa  $14000 \text{ km s}^{-1}$  (Borkowski et al. 2010). Radijus početnog odbačenog materijala iznosi 0.5 pc (odgovarajuća starost na početku iznosi  $\approx 30$  godina), masa  $M_{\text{ej}} = 1.4M_{\odot}$ , energija eksplozije  $E_0 = 10^{51}$  erg, gustina okolne sredine  $n_{\text{H}} = 0.02 \text{ cm}^{-3}$  i temperatura  $T = 10^4$  K. Koristimo tipične NLDSA parametre, injekcioni parametar  $\xi = 3.4$  i lokalni parametar disipacije magnetnih talasa  $\zeta = 0.7$  (Pavlović



Slika 43: Simulacija evolucije gustine fluksa za različite vrednosti odnosa elektrona i protona  $K_{ep}$ . Otvoreni krugovi predstavljaju posmatrane vrednosti gustine fluksa.



2017). Referentni radio-podaci za OSN G1.9+0.3 su dobijeni radio-interferometrom VLA na 1.43 i 4.86 GHz, i iznose redom  $\approx 0.9$  Jy i  $\approx 0.4$  Jy, a spektralni indeks je  $\alpha \approx 0.6$  (Green et al. 2008). Efektivna rezolucija računске mreže varira od  $32768^3$  na početku do  $512^3$  na kraju simulacije (100 000 godina). Posle analize rezultata simulacije, prikazanih na slici 41, zaključujemo da ekviparticipija u klasičnom smislu (odnos energije protona i magnetnog polja) nije zadovoljena u prvih 90 000 godina evolucije, jer vrednost ovog odnosa opadne za približno jedan red veličine. Ipak, ova promena i nije tako velika za posmatrani period evolucije OSN. Osim toga, odnos energija elektrona i magnetnog polja pokazuje približno konstantan trend za period od 90 000 godina (od 10 000 do 100 000 godina, od eksplozije) evolucije ostatka G1.9+0.3 (videti sliku 41). Približna ekviparticipija ( $\epsilon_e/\epsilon_B \sim 0.5$ , slika 41) je zadovoljena sa tačnošću od oko 20% za 90 000 godina. Magnetno polje ostatka G1.9+0.4 izračunato u radu Arbutine sa saradnicima iznosi približno  $175 \mu\text{G}$  (Arbutina et al. 2012). Vrednost dobijena u ovom radu, bazirana na uočenoj elektronskoj ekviparticipiji, iznosi  $75 \mu\text{G}$ . Ona se može jednostavno dobiti kada se vrednost iz rada Arbutine sa saradnicima (Arbutina et al. 2012) smanji  $(1 + \kappa)^{2/(\gamma+5)}$  puta, gde je  $\kappa$  izračunato za plazmu 100% sastavljenu od vodonika. Sa druge strane, ovaj ostatak je star samo 120 godina i ekviparticipija (ili particija) nije validna pretpostavka za računanje magnetnog polja u sadašnjem periodu (videti sliku 41), ali posle 10 000 godine će to biti slučaj. Direktno iz simulacija se dobija vrednost jačine magnetnog polja od oko  $300 \mu\text{G}$ . Zanimljivo je da su obe prethodno izračunate vrednosti približno istog reda veličine kao vrednost dobijena iz simulacije.

Za OSN HB3 (G132.7+1.3), pretpostavljamo starost od oko 30 000 godina (Lazendic & Slane 2006), ukupnu masu odbačenog materijala  $M_{ej} = 10M_\odot$  i energiju eksplozije  $E_0 = 2.5 \times 10^{51}$  erg. Početna starost i radijus redom iznose  $\approx 30$  yr i  $0.5$  pc. NLDSA modul sa parametrima  $\xi = 3.4$  i  $\zeta = 0.6$  daje spektralne karakteristike koje se dobro slažu sa posmatranjima, radio-fluks od  $\approx 30$  Jy i spektralni indeks  $\alpha = 0.6$  na frekvenciji 1420 MHz (Kothes et al. 2006), za gustinu okolne sredine  $n_H = 0.5 \text{ cm}^{-3}$ . Efektivna rezolucija 3D računске mreže se menja od  $16384^3$  na početku simulacije, do  $512^3$  na kraju, posle 50 000 godina. Simulacija pokazuje da postoji particija ( $\epsilon_{CR}/\epsilon_B \sim 10$ , slika 41) sa blagim trendom opadanja od 50% za 40 000 go-

dina (od 10 000 do 50 000 godina od početka evolucije). Primenom jednačine 6.4, sa  $\beta = 1/12$ , dobijamo jačinu magnetnog polja oko 20  $\mu\text{G}$ . Dodatno, koncept elektronske ekvipartitije je zadovoljen i u ovom slučaju ( $\epsilon_e/\epsilon_B \sim 0.7$ , slika 41) sa prisutnim trendom rasta od samo 35% tokom 40 000 godina evolucije. Elektronska ekvipartitija, izračunata primenom jednačine 6.2, daje vrednost 17  $\mu\text{G}$  (tabela 3). Jačina magnetnog polja od 40  $\mu\text{G}$  se dobija direktno iz simulacije. Rezultat  $\epsilon_e/\epsilon_B \sim 0.7$  sa povećanjem od 35% za 40 000 godina evolucije podržava zaključak da je elektronska ekvipartitija bolja aproksimacija od standardne, koja podrazumeva sve kosmičke zrake, u ostacima kod kojih vrednost parametra  $\beta$  nije poznata. Drugim rečima, partitija kosmičkih zraka u odnosu na magnetno polje je, ako postoji, ekvivalentna ekvipartitiji elektrona u odnosu na magnetno polje OSN. Dolazimo do opšteg zaključka: račun elektronske ekvipartitije daje vrednosti magnetnog polja koje se ne razlikuju bitno od pravih vrednosti i tačnost izračunatih vrednosti je u opsegu jednog reda veličine. U tabeli 3 dajemo izračunate vrednosti jačina magnetnog polja za uzorak Galaktičkih OSN iz rada Pavlovića i saradnika (Pavlović et al. 2014), koristeći račun elektronske ekvipartitije.

Slika 41 pokazuje vremensku evoluciju odnosa gustine energije protona i elektrona tokom evolucije OSN. Zanimljivo je da ovaj odnos drastično opada za približno jedan red veličine ili čak nešto više, na približno isti način kod oba ostatka, koji se bitno razlikuju u pogledu parametara okolne sredine i energija eksplozije.

Tabela 3: Izračunate vrednosti magnetnog polja za uzorak Galaktičkih OSN iz rada Pavlovića sa saradnicima (Pavlović et al. 2014).  $B_1$  predstavlja polje dobijeno primenom jednostavnog pristupa iz rada Arbutine sa saradnicima (Arbutina et al. 2012) a  $B_2$  je polje dobijeno uz pretpostavku  $\kappa = 0$  tj. nalaženjem minimuma energije zbira energije magnetnog polja i elektrona.

Ime	Alternativno ime	$B_1$ [ $\mu\text{Ga}$ ]	$B_2$ [ $\mu\text{Ga}$ ]
G4.5+6.8	Kepler, SN1604, 3C358	365	172
G11.2-0.3		326	141
G18.1-0.1		235	82
G21.8-0.6	Kes 69	173	60
G23.3-0.3	W41	142	50

*Nastavljeno na sledećoj strani*

Tabela 3 – *Nastavak sa prethodne strane*

Ime	Alternativno ime	$B_1$ [ $\mu$ Ga]	$B_2$ [ $\mu$ Ga]
G27.4+0.0	4C–04.71	197	101
G33.6+0.1	Kes 79	207	72
G35.6-0.4		157	54
G46.8-0.3	HC30	126	44
G53.6-2.2	3C400.2, NRAO 611	63	37
G54.4-0.3	HC40	84	29
G55.0+0.3		36	13
G65.1+0.6		17	8
G78.2+2.1	DR4, $\gamma$ Cygni SNR	159	55
G84.2-0.8		108	38
G93.7-0.2	CTB 104A, DA 551	51	24
G96.0+2.0		32	11
G108.2-0.6		41	14
G109.1-1.0	CTB 109	107	37
G111.7-2.1	Cassiopeia A, 3C461	1245	763
G114.3+0.3		51	18
G116.5+.1.1		48	17
G116.9+0.2	CTB 1	55	24
G119.5+10.2	CTA 1	38	17
G120.1+1.4	Tycho, 3C10, SN1572	280	135
G132.7+1.3	HB3	40	17
G152.4-2.1		21	10
G156.2+5.7		30	11
G160.9+2.3	HB9	46	22
G190.9-2.2		23	11
G205.5+0.5	Monoceros Nebula	43	15
G260.4-3.4	Puppis A, MSH 08–44	112	39
G292.2-0.5		89	31

*Nastavljeno na sledećoj strani*

Tabela 3 – *Nastavak sa prethodne strane*

Ime	Alternativno ime	$B_1$ [ $\mu\text{Ga}$ ]	$B_2$ [ $\mu\text{Ga}$ ]
G296.5+10.0	PKS 1209–51/52	64	22
G296.7-0.9		99	34
G296.8-0.3	1156-62	62	27
G308.4-1.4		76	39
G315.4-2.3	RCW 86, MSH 14–63	69	30
G327.4+0.4	Kes 27	87	37
G327.6+14.6	SN1006	76	33
G332.4-0.4	RCW 103	280	97
G337.0-0.1	CTB 33	306	132
G337.8-0.1	Kes 41	224	78
G344.7-0.1		115	40
G346.6-0.2		184	64
G349.7+0.2		629	219
G352.7-0.1		111	48

### 6.3 Diskusija ekviparticije

Ovaj deo disertacije nameće zanimljivo pitanje: kako se ekviparticija između energije kosmičkih zraka i magnetnog polja dostiže u MZM? Ranije je navedeno da je ekviparticija između ovih komponenti MZM široko prihvaćena pretpostavka. Naše simulacije pokazuju da evolucija OSN obezbeđuje uslove za ekviparticiju između protona i magnetnog polja na kraju faze Sedov-Tejlora. Odnos gustina energije protona i magnetnog polja teži približnoj ekviparticiji ( $\epsilon_{\text{CR}}/\epsilon_B \approx 2$ , slika 41, desni panel). Posle faze Sedov-Tejlora, ostatak ulazi u radijativnu fazu. Radijativna faza obezbeđuje veliku kompresiju na udarnom talasu, koja zavisi od kvadrata Mahovog broja. Visoka kompresija će obezbediti veću gustinu energije magnetnog polja, ali takođe i gustinu energije kosmičkih zraka. Zbog toga se može očekivati da ekviparticija nastavlja da postoji do kraja evolucije OSN. Međutim, difuzno udarno

ubrzavanje nije efikasno za manje Mahove brojeve (Salvesen, Raymond & Edgar 2009), tako da detaljnu analizu radijativne faze ostavljamo za budući rad.

Navodimo zanimljivu interpretaciju fizičke zasnovanosti ekvipartacije, iz rada Uroševića, Pavlovića i Arbutine (2018). OSN su jaki sinhrotronski emiteri od radio do X-područja. Za ovu vrstu zračenja neophodno je magnetno polje i ultrarelativistički elektroni. Ako se ova dva činioca nalaze u nekom sistemu i imaju nezamisljive gustine energije možemo očekivati sinhrotronsku emisiju iz sistema. Ako važi  $\epsilon_e \gg \epsilon_B$ , sinhrotronski mehanizam će biti transformisan u netermalno zakočno zračenje. Posmatrački, OSN su objekti sa blažim spektrom u odnosu na onaj koji bismo očekivali u slučaju emisije netermalnog zakočnog zračenja. Za populaciju ultrarelativističkih elektrona na udarnom talasu OSN, očekujemo energetski indeks  $\gamma = 2$  (videti rad Bela, i rad Dejana Uroševića i reference u njemu, Bell 1978a, Urošević 2014). Za ovu vrednost energetskog indeksa, radio-spektralni indeks iznosi  $\alpha = 0.5$ . Sa druge strane, ista populacija elektrona bi imala spektralni indeks netermalnog zakočnog zračenja  $\alpha = 1$  (Helder et al. 2012). Zbog toga, zaključujemo da OSN nisu jaki emiteri netermalnog zakočnog zračenja i da gustina energije magnetnog polja ne može biti zanemarljiva u odnosu na gustinu energije ultrarelativističkih elektrona. Dalje, u slučaju da važi  $\epsilon_e \ll \epsilon_B$ , možemo očekivati jaku sinhrotronsku emisiju u gama oblasti (slično pulsarima), ali ova vrsta zračenja se ne detektuje u OSN. Analogno, dolazimo do zaključka da gustina energije elektrona ne može biti zanemarljiva u odnosu na magnetno polje u OSN. Simulacije su nam pokazale da se odnosi između neophodnih sastojaka za emisiju sinhrotronskog zračenja (energetski elektroni i magnetno polje) nalaze između 0.1 i 0.9 (slika 41) i da bi energija sadržana u ovim komponentama trebalo da bude istog reda veličine.

Postoje neke indikacije da su ekvipartacija i particija između gustina energije elektrona i magnetnog polja prisutni kod nekih OSN koji emituju gama zračenje u oblasti TeV, čija je emisija mahom bazirana na leptonskom mehanizmu (videti rad Janga sa saradnicima, kao i reference iz ovog rada, Yang et al. 2014). Ipak, procene Janga sa saradnicima (Yang et al. 2014) vezane za ekvipartaciju zavise od daljina do OSN i treba ih prihvatiti sa rezervom.

Pomenuli smo u prethodnom poglavlju da se očekuje ekvipartacija na nivou cele

galaksije (Duric 1990). Međutim, odnos  $\epsilon_{CR}/\epsilon_B$  u ostacima, koji su izvori kosmičkih zraka, treba da bude veći u početnim fazama evolucije u odnosu na čitavu galaksiju. Naime, gustina energije kosmičkih zraka će se smanjiti usled „curenja” (eng. *leakage*) kosmičkih zraka sa najvećim energijama i njihove difuzije u galaksiji (Longair 1994, Duric et al. 1995). Ipak, kosmički zraci najvećih energija sadrže zanemarljivi deo ukupne energije u česticama. Zbog toga možemo očekivati da OSN na kraju evolucije daju doprinos uspostavljanju ekviparticije u MZM.

## 6.4 Zaključak

Na osnovu rezultata 3D hidrodinamičkih simulacija evolucije OSN, uključujući proizvodnju kosmičkih zraka u nelinearnom modelu difuznog ubrzavanja na udarnim talasima, navodimo najbitnije zaključke iz rada Uroševića, Pavlovića i Arbutine (2018):

- i) Ekviparticija je opravdana pretpostavka, posebno između elektrona iz kosmičkih zraka i magnetnog polja u starijim ostacima, u fazi Sedov-Tejlora ( $\epsilon_e/\epsilon_B \sim 0.5$ );
- ii) U radu predlažemo primenu elektronske ekviparticije za određivanje jačine magnetnog polja u OSN. Dobijene vrednosti su približno 2.5 puta manje od dobijenih u ranije korišćenim proračunima;
- iii) Stariji OSN, posebno oni koji evoluiraju u retkoj okolnoj sredini, na kraju faze Sedov-Tejlora mogu obezbediti ekviparticiju između kosmičkih zraka i magnetnog polja, sličnu onoj koja postoji u MZM ( $\epsilon_e/\epsilon_B \sim 0.5$ ).

## 7 Zaključak i planovi za dalji rad

U ovom delu sumiramo glavne rezultate disertacije i govorimo o planovima za dalji rad.

1. Glavna ideja ove doktorske disertacije je bila da se primeni što veći deo dosadašnjih saznanja o OSN, ubrzanju čestica i pojačanju magnetnog polja u jedan kompletan i konzistentan numerički model radio-evolucije OSN. Ispostavlja se da efikasno difuzno ubrzavanje čestica modifikuje strukturu udarnog talasa i značajno pojačava međuzvezdano magnetno polje, čime proces ubrzavanja elektrona koji su odgovorni za radio-emisiju postaje nelinearan i zahteva primenu numeričkih simulacija. Razvijeni model sadrži dva međusobno povezana dela. Prvi deo obuhvata dinamičku evoluciju u neradijativnim fazama, koju modelujemo primenom paralelizovanog hidrodinamičkog koda PLUTO, namenjenog rešavanju sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina metodom Godunova. Ovaj kod je modifikovan uvođenjem vremenski i prostorno zavisnog adijabatskog indeksa gasa, na koji utiču ubrzane čestice prisutne u gasu. Drugi deo modela obuhvata računanje spektra ubrzanih kosmičkih zraka primenom Blazijevog semi-analitičkog modela nelinearnog difuznog ubrzavanja na udarnim talasima (Blasi et al. 2002a, b, Blasi 2004). Po prvi put, u simulacijama ovog tipa, uključen je efekat pojačavanja magnetnog polja udruženim efektom rezonantnih i nerezonantnih nestabilnosti izazvanih tokom kosmičkih zraka (Pavlović et al. 2018). Iz dobijenog spektra ovaj segment numeričkog koda računa radio-emisiju i uticaj visokoenergijskih čestica na dinamiku udarnog talasa.
2. Modelovali smo specifičnu radio-evoluciju najmlađeg poznatog Galaktičkog OSN G1.9+0.3 (Pavlović 2017). Procenjena starost ovog OSN iz našeg modela iznosi oko 120 godina, dok gustina okolne MZM iznosi  $0.02 \text{ cm}^{-3}$ . Strmiji spektralni indeksi (u odnosu na vrednost koju predviđa standardna teorija DS  $\alpha = 0.5$ ) kod mladih OSN dobijaju se putem efikasnog mehanizma NLDSA i odgovarajućeg pojačanja magnetnog polja. Model se dobro slaže sa posmatranjima za parametar injekcije  $\xi$  između 3.45 i 3.30, što odgovara efikasnosti

ubrzavanja  $\eta = (0.5-1.1) \times 10^{-3}$  i magnetnom polju koje je pojačano više od 50 puta u odnosu na Galaktičko polje.

3. Radio-emisija ostatka G1.9+0.3 raste tokom faze slobodnog širenja, dostiže maksimalnu vrednost 600 godina posle eksplozije da bi zatim ukupan sjaj opadao do kraja faze slobodnog širenja i u fazi Sedov-Tejlora. Numerički model pokazuje da je porast radio-emisije uobičajena pojava kod mladih OSN. Iz simulacije dobijamo prosečan rast fluksa na radio-frekvenciji 843 MHz tokom 20 godina od oko  $0.017 \text{ Jy yr}^{-1}$  (1.8 procenata godišnje), što je u veoma dobrom slaganju sa posmatranjima MOST i drugih radio-teleskopa. Model radio-evolucije na frekvenciji 2695 MHz predviđa gradijent fluksa od  $0.008 \text{ Jy yr}^{-1}$  tokom poslednjih 30 godina, što takođe odgovara posmatranjima radio-teleskopom Efelsberg. Radio-sjaj će, prema predviđanjima modela u radu, dostići maksimalne vrednosti gustine fluksa od  $\sim 4.3, 3.1$  i  $1.5 \text{ Jy}$ , redom, na frekvencijama 843, 1425 i 4860 MHz, što su oko tri puta veće vrednosti od trenutnih.
4. Pored radio-emisije, implementiran je i jednostavan model za sintezu sinhrotronskog spektra OSN G1.9+0.3 od radio do X-područja, koji pokazuje dobro slaganje sa posmatranjima. Razvijen je i aproksimativni model gama emisije kojim se predviđa da će ovaj OSN biti vidljiv budućim instrumentima, uključujući CTA. Model predviđa rast TeV gama emisije sve do kraja faze slobodnog širenja, dostižući maksimalnu vrednost fluksa od  $1.8 \times 10^{-13} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  oko 1500 godina posle eksplozije supernove.
5. Razvili smo i opšti model radio-evolucije OSN, primenom simulacija na širi spektar relevantnih fizičkih parametara, kao što su gustina okolne sredine, energija eksplozije supernove, efikasnost ubrzavanja i pojačanje magnetnog polja. Pouzdanost naših evolutivnih traka potvrđena je na posmatračkom uzorku, koji se sastoji od Galaktičkih i vangalaktičkih OSN. Evolutivne trake, dobijene u ovom radu, mogu biti veoma korisne za radio-posmatračke. Oni ih mogu primeniti na određivanje evolutivnog statusa svih posmatranih Galaktičkih i vangalaktičkih OSN, za koje je nepoznata starost ili parametri oko-



line.

6. Radio-evolutivne trake za OSN koji evoluiraju u sredinama različite gustine seku se za vrednosti dijametra između  $\approx 10$  pc i nekoliko desetina parseka.  $\Sigma - D$  trake za ostatke u gušćoj MZM posle tačke preseka evoluciju nastavljaju ispod traka koje odgovaraju ostacima u retkoj sredini. Stoga korelacija između okolne gustine i položaja na  $\Sigma - D$  dijagramu nije jednoznačna, pogotovu ne za starije OSN. Evolutivne trake za radio-emisiju OSN mogu vrlo rano pokazati trend opadanja, posebno u slučajevima kada ostaci evoluiraju kroz gustu MZM. Udarni talasi koji napuštaju mehurove razređenog gasa i nailaze na guste molekulske oblake, dok još uvek imaju velike Mahove brojeve (nekoliko stotina), pokazuju povećanu radio-emisiju u poređenju sa OSN koji se tokom cele evolucije nalaze u gustoj sredini.
7. U našim simulacijama se dobijaju  $\Sigma - D$  nagibi između  $-4$  i  $-6$  za potpuni režim Sedov-Tejlora, koji se dobro slažu sa teorijskim predviđanjima i vrednostima za posmatrane uzorke OSN. U slučaju da se  $\Sigma - D$  relacija koristi kao alat za određivanje daljine, simulacije ukazuju na postojanje greške od oko 50%, čak i kada se zanemare morfološke karakteristike.
8. Bavimo se i jednom od fundamentalnih hipoteza vezanih za magnetno polje u OSN. Zaključujemo da je ekviparticipija opravdana pretpostavka za energiju elektrona i magnetnog polja u starijim OSN, tokom faze Sedov-Tejlora. Takođe, simulacije nude moguće objašnjenje za ekviparticipiju između kosmičkih zraka i magnetnog polja u MZM.

Pomenućemo i planove za buduća istraživanja u ovoj i sličnim oblastima, koja slede iz rezultata prikazanih u ovoj disertaciji.

1. Neophodan je rad na razvoju numeričkih modela hidrodinamičke evolucije OSN u radijativnim fazama. To podrazumeva uključivanje gubitaka na zračenje koje smo zanemarivali u dosadašnjem radu. Planiramo razvijanje (ili implementaciju već postojećih) kodova za emisiju zračenja na svim talasnim dužinama, uključujući i zračenje u linijama. Takođe, planira se dalji razvoj

modela radio-emisije OSN koji pored integralnog sjaja računa i 3D raspodelu sjaja i evoluciju radio-morfologije.

2. Od velikog značaja, posebno kod mladih OSN, bi bilo uključivanje Alfenovog drifta u model NLDSA i rešavanje problema koje pokazuje ovaj model u kasnijim fazama evolucije OSN.
3. Od značaja bi bio i rad na dinamičkoj evoluciji OSN mešane morfologije i ubrzavanju čestica u ovom slučaju.
4. Planirano je povezivanje simulacija OSN razvijenih u ovom radu sa simulacijama eksplozija supernovih na znatno manjim skalama. Integracija ovih modela bi pružila uvid u evoluciju magnetnog polja u odbačenom materijalu i objasnila radio-emisiju sa povratnog udarnog talasa kod nekih OSN. Takođe, ovakav tip modela bi omogućio određivanje karakteristika i tipa roditeljskih supernovih na osnovu današnjih posmatranja OSN. Dobar model povezan sa statističkim razmatranjima dao bi odgovor na pitanje koji scenario za nastajanje supernovih tipa Ia je najzastupljeniji u prirodi i da li to menja zaključke o ubrzanom širenju Univerzuma.
5. Planiramo da analizu ekviparticije proširimo na sve OSN za koje postoji dovoljno posmatranja u različitim oblastima elektromagnetnog spektra. Na ovaj način dolazimo do mnogo opštijih zaključaka vezanih za fizičku zasnovanost ekviparticije u OSN. Još važnije je utvrditi da li zaista OSN imaju važnu ulogu u održavanju ekviparticije u MZM.
6. Kao jedan od glavnih nerešenih problema u oblasti vidimo injekciju i ubrzavanje elektrona na udarnim talasima. Očekujemo da će dalji razvoj PIC simulacija visoke rezolucije i povezivanje ovih simulacija sa MHD modelima, omogućiti napredak u ovoj oblasti. Od značaja bi bilo i sprovođenje analize dostupnih posmatranja ubrzanih čestica na Zemljinom lučnom udarnom talasu (eng. bow shock) i upoređivanje sa predviđanjima koje daju naši modeli u ovakvim uslovima. Takođe daljim izučavanjem ekviparticije moža se može doći do objašnjenja fizičkih procesa koji obezbeđuju DSA ubrzavanje elektrona.

## Literatura

- Abramowitz, M., & Stegun, I. A., 1972, *Handbook of Mathematical Functions*, (New York: Dover Publications)
- Ackermann, M., Ajello, M., Allafort, A., et al., 2013, *Science*, **339**, 807
- Adams, M., Colella, P., Graves, D. T., Johnson, J. N., Keen, N. D. et al., 2013, *Chombo Software Package for AMR Applications-Design Document*, (Lawrence Berkeley National Laboratory Technical Report LBNL-6616E)
- Agertz, O., Moore, B., Stadel, J., et al., 2007, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, **380**, 963
- Aharonian, F., Sun, X.-n., & Yang, R.-z., 2017, *Astron. Astrophys.*, **603**, A7
- Amato, E., Blasi, P., 2005, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **364**, L76
- Amato, E., & Blasi, P., 2009, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **392**, 1591
- Amato, E., 2011, *Mem. Soc. Astron. Ital*, *82*, 806
- Amdahl, G. M., 1967, *Proceedings of the Spring Joint Computer Conference* (ACM, New York, NY, USA), 48
- Arbutina, B., 2005, Magistarska teza, Univerzitet u Beogradu
- Arbutina, B., & Urošević, D., 2005, *Mon. Notices Royal Astron. Soc.*, **360**, 76
- Arbutina, B., Urošević, D., Andjelić, M. M., Pavlović, M. Z., & Vukotić, B., 2012, *Astrophys. J.*, **746**, 79
- Arbutina, B., Urošević, D., Vučetić, M. M., Pavlović, M. Z., Vukotić, B., 2013, *Astrophys. J.*, **777**, 31
- Arbutina, B., 2017, *Publ. Astron. Obs. Belgrade*, **97**, 1
- Axford, W. I., Leer, E., Skadron, G., 1977, *Proceedings the 15th International Cosmic Ray Conference*, **11**, 132
- Baade, W., Zwicky, F., 1934, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **20**, 259
- Balogh, A., Treumann, R. A., *Physics of Collisionless Shocks*, 2013, ISSI Scientific Report Series, Vol. 12 (Springer, Berlin)
- Baars, J. W. M., Genzel, R., Pauliny-Toth, I. I. K., & Witzel, A., 1977, *Astron. Astrophys.*, **61**, 99
- Bandiera, R., & Petruk, O., 2010, *Astron. Astrophys.*, **509**, A34

- Bartel, N. 2009, *Approaching Micro-Arcsecond Resolution with VSOP-2: Astrophysics and Technologies*, **402**, 243
- Beck, R., & Krause, M., 2005, *Astron. Nachr.*, **326**, 414
- Beck, R., 2015, *Astron. & Astrophys. Rev.*, **24**, 4
- Bell, A. R., 1978a, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **182**, 147
- Bell, A. R., 1978b, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **182**, 443
- Bell, A. R., 2004, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **353**, 550
- Bell, A. R., Schure, K. M., & Reville, B., 2011, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **418**, 1208
- Bell, A. R., Schure, K. M., Reville, B., & Giacinti, G., 2013, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **431**, 415
- Berezhko, E. G. and Ellison, D. C., 1999, *Astrophys. J.*, **526**, 385
- Berezhko, E. G., Ksenofontov, L. T., & Völk, H. J., 2002, *Astron. Astrophys.*, **395**, 943
- Berezhko, E. G., Völk, H. J., 2004, *Astron. Astrophys.*, **427**, 525
- Berezhko, E. G., & Völk, H. J., 2006, *Astron. Astrophys.*, **451**, 981
- Berkhuijsen, E. M., 1986, *Astron. Astrophys.*, **166**, 257
- Bietenholz, M. F., Bartel, N., Milisavljevic, D., et al., 2010, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **409**, 1594
- Blandford, R. D., Ostriker, J. P., 1978, *Astrophys. J.*, **221**, L2
- Blasi, P., 2002a, *Nucl. Phys. B - Proc. Suppl.*, **110**, 475
- Blasi, P., 2002b, *Astropart. Phys.*, **16**, 429
- Blasi, P., 2004, *Astropart. Phys.*, **21**, 45
- Blasi, P., Gabici, S., and Vannoni, G., 2005, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **361**, 907
- Blasi, P., Amato, E., and Caprioli, D., 2007, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **375**, 1471
- Blasi, P., 2010, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **402**, 2807
- Blasi, P., 2013, *Astron. Astrophys.*, **21**, 70
- Blondin, J. M., Wright, E. B., Borkowski, K. J., & Reynolds, S. P., 1998, *Astrophys. J.*, **500**, 342
- Borkowski K. J., Reynolds S. P., Green D. A., Hwang U., Petre R., Krishnamurthy K., Willett R., 2010, *Astrophys. J. Lett.*, **724**, L161

- Borkowski, K. J., Reynolds, S. P., Hwang, U., Green, D. A., Petre, R., Krishnamurthy, K., Willett, R., 2013, *Astrophys. J. Lett.*, **771**, L9
- Bozzetto, L. M., Filipović, M. D., Vukotić, B., et al., 2017, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **230**, 2
- Brugger, C. E. et al., 2012, *VisIt: An End-User Tool For Visualizing and Analyzing Very Large Data* (Chapman and Hall/CRC)
- Bryan, G. L., Norman, M. L., O’Shea, B. W., et al., 2014, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* , **211**, 19
- Bykov, A. M., Ellison, D. C., Osipov, S. M., & Vladimirov, A. E., 2014, *Astrophys. J.*, **789**, 137
- Cabannes, H., 1970, *Theoretical Magnetofluidynamics*, Applied Math. and Mech., 13 (New York: Academic Press)
- Callingham, J. R., Gaensler, B. M., Zanardo, G., et al., 2016, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **462**, 290
- Caprioli, D., Blasi, P., Amato, E., and Vietri, M., 2008, *Astrophys. J. Lett.*, **679**, L139
- Caprioli, D., Blasi, P., Amato, E., & Vietri, M., 2009, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **395**, 895
- Caprioli, D., Amato, E., & Blasi, P., 2010, *Astroparticle Physics*, **33**, 307
- Caprioli, D., 2012, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **7**, 038
- Caprioli, D., & Spitkovsky, A., 2014a, *Astrophys. J.*, **783**, 91
- Caprioli, D., & Spitkovsky, A., 2014b, *Astrophys. J.*, **794**, 46
- Caprioli, D., Pop, A.-R., & Spitkovsky, A., 2015, *Astrophys. J. Lett.*, **798**, L28
- Carlton, A. K., Borkowski, K. J., Reynolds, S. P., et al., 2011, *Astrophys. J. Lett.*, **737**, L22
- Chandrasekhar, S., 1961, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, (Oxford: University Press)
- Chakraborti, S., Childs, F., & Soderberg, A., 2016, *Astrophys. J.*, **819**, 37
- Chomiuk, L., & Wilcots, E. M., 2009a, *Astron. J.*, **137**, 3869
- Chomiuk, L., & Wilcots, E. M., 2009b, *Astrophys. J.* **703**, 370
- Courant, R., Friedrichs, K., Lewy, H., 1928, *Math. Ann.*, **100**, 32

- Cox, D. P., & Anderson, P. R., 1982, *Astrophys. J.*, **253**, 268
- De Horta, A. Y., Filipovic, M. D., Crawford, E. J., et al., 2014, *Serb. Astron. J.*, **189**, 41
- Dotlić, M. D., 2015, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu
- Drury, L'O. C., 1983, *Rep. Prog. Phys.*, **46**, 973
- Drury, L'O. C., & Strong, A. W., 2015, arXiv:1508.02675
- Dubner, G., Giacani, E., Reynoso, E., et al., 1999, *Astron. J.*, **118**, 930
- Dubner, G., Giacani, E., Reynoso, E., & Parón, S., 2004, *Astron. Astrophys.*, **426**, 201
- Duric, N., & Seaquist, E. R., 1986, *Astrophys. J.*, **301**, 308
- Duric, N., 1990, IAU Symp. 140, *Galactic and Intergalactic Magnetic Fields*, ed. R. Beck, P. P. Kronberg, & R. Wielebinski (Dordrecht: Kluwer), 235
- Duric, N., Gordon, S. M., Goss, W. M., Viallefond, F., Lacey, C., 1995, *Astrophys. J.*, **445**, 173
- Durran, D. R., 2010, *Numerical Methods for Fluid Dynamics, With Applications to Geophysics*, (Berlin: Springer)
- Dwarkadas, V. V., & Chevalier, R. A., 1998, *Astrophys. J.*, **497**, 807
- Eckart, C., 1960, *Physics of Fluids*, **3**, 421
- Eijkhout, V., Chow, E., van de Geijn, R., 2011, *Introduction to High Performance Scientific Computing* (Cambridge: The MIT Press)
- Ellinger, C. I., Young, P. A., Fryer, C. L., & Rockefeller, G., 2012, *Astrophys. J.*, **755**, 160
- Ellinger, C. I., Rockefeller, G., Fryer, C. L., Young, P. A., & Park, S., 2013, arXiv:1305.4137
- Ellison, D. C., Berezhko, E. G., & Baring, M. G., 2000, *Astrophys. J.*, **540**, 292
- Ellison, D. C., Decourchelle, A., & Ballet, J., 2004, *Astron. Astrophys.*, **413**, 189
- Ellison, D. C., Decourchelle, A., & Ballet, J., 2004, *Astron. Astrophys.*, **413**, 189
- Ellison, D. C., Decourchelle, A., & Ballet, J., 2005, *Astron. Astrophys.*, **429**, 569
- Fukui, Y., Sano, H., Sato, J., et al., 2017, *Astrophys. J.*, **850**, 71
- Ferrand, G., Decourchelle, A., Ballet, J., Teyssier, R., & Fraschetti, F., 2010, *Astron. Astrophys.*, **509**, L10

- Ferrand, G., Decourchelle, A., & Safi-Harb, S., 2012, *Astrophys. J.*, **760**, 34
- Ferrand, G., Decourchelle, A., & Safi-Harb, S., 2014, *Astrophys. J.*, **789**, 49
- Fermi, E., 1949, *Phys. Rev.*, **75**, 1169
- Fermi, E., 1954, *Astrophys. J.*, **119**, 1
- Fouka, M., & Ouichaoui, S., 2013, *Res. Astron. Astrophys.*, **13**, 680
- Frail, D. A., Goss, W. M., Reynoso, E. M., et al., 1996, *Astron. J.*, **111**, 1651
- Frenk, C. S., White, S. D. M., Bode, P., et al., 1999, *Astrophys. J.*, **525**, 554
- Froebrich, D., Makin, S. V., Davis, C. J., et al., 2015, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **454**, 2586
- Fryer, C. L., Rockefeller, G., & Warren, M. S., 2006, *Astrophys. J.*, **643**, 292
- Furst, E., Reich, W., Reich, P., & Reif, K., 1990, *Astron. Astrophys.*, **85**, 805
- Garnavich, P. M., Jha, S., Challis, P., et al., 1998, *Astrophys. J.*, **509**, 74
- Gieseler, U. D. J., Jones, T. W., Kang, H., 2000, *Astron. Astrophys.*, **364**, 911
- Gilfanov, M., & Bogdán, Á., 2010, *Nature*, **463**, 924
- Godunov, S.K., 1959, *Mat. Sbornik*, **47**, 271
- Goedbloed J. P., Keppens R., Poedts S., 2010, *Advanced Magnetohydrodynamics: With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas* (Cambridge University Press, Cambridge)
- Goedbloed J. P., Poedts S., 2004, *Principles of Magnetohydrodynamics: With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Goldston R. J., Rutherford, P. H., 1995, *Introduction to plasma physics* (IOP Publishing Ltd., London)
- Gotthelf, E. V., Koralesky, B., Rudnick, L., et al., 2001, *Astrophys. J. Lett.*, **552**, L39
- Green, D. A., & Gull, S. F., 1984, *Nature*, **312**, 527
- Green, D. A., 1991, *Publ. Astron. Soc. Pac.*, **103**, 209
- Green, D. A., 2004, *Bull. Astron. Soc. India*, **32**, 335
- Green, D. A., 2014, *Bull. Astron. Soc. India*, **42**, 47
- Green, D. A., Reynolds, S. P., Borkowski, K. J., et al., 2008, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **387**, L54

- Gurnett, D. A., Bhattacharjee, A., 2005, *Introduction to Plasma Physics with Space and Laboratory Applications* (Cambridge University Press, Cambridge)
- Hager, G. & Wellein, G., 2011, *Introduction to High Performance Computing for Scientists and Engineers* (London: Chapman & Hall/CRC)
- Han, J. L., 2017, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **55**, 111
- Helder, E.A., Vink, J., Bykov, A.M., *et al.*, 2012, *Space Sci. Rev.*, **173**, 369
- Helmboldt, J. F., & Kassim, N. E., 2009, *Astron. J.*, **138**, 838
- HESS Collaboration, Abramowski, A., Aharonian, F., *et al.*, 2016, *Nature*, **531**, 476
- Holler, M., Berge, D., van Eldik, C., *et al.*, 2015, *Proceedings of the 34th International Cosmic Ray Conference (ICRC 2015)* : Hague, Netherlands, July 30, August 6
- Kang, H., Jones, T. W., & Gieseler, U. D. J., 2002, *Astrophys. J.*, **579**, 337
- Kang, H., Jones, T. W., & Edmon, P. P., 2013, *Astrophys. J.*, **777**, 25
- Kassim, N. E., Weiler, K. W., & Baum, S. A., 1991, *Astrophys. J.*, **374**, 212
- Kelner, S. R., Aharonian, F. A., & Bugayov, V. V., 2006, *Phys. Rev. D*, **74**, 034018
- Knežević, S., Läsker, R., van de Ven, G., *et al.*, 2017, *Astrophys. J.*, **846**, 167
- Koo, B.-C. and Park, C., 2017, *Supernova Remnant Cassiopeia A, Handbook of Supernovae* (Berlin Heidelberg: Springer-Verlag)
- Kosenko, D., Ferrand, G., & Decourchelle, A., 2014, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **443**, 1390
- Kostić, P., Vukotić, B., Urošević, D., Arbutina, B., & Prodanović, T., 2016, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **461**, 1421
- Kothes, R., Fedotov, K., Foster, T. J., & Uyaniker, B., 2006, *Astron. Astrophys.*, **457**, 1081
- Krymsky, G. F., 1977, *Doklady Akademiyi Nauk SSSR*, **234**, 1306
- Ksenofontov, L. T., Völk, H. J., & Berezhko, E. G., 2010, *Astrophys. J.*, **714**, 1187
- Kundu, P. K., Cohen, I. M. & Dowling, D. R., 2016, *Fluid Mechanics* (Cambridge: Academic Press)
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., 1987, *Fluid Mechanics* (Oxford: Pergamon Press)
- Laney, C. B., 1998, *Computational Gasdynamics* (Cambridge: Cambridge University Press)



- Lazendic, J. S., & Slane, P. O., 2006, *Astrophys. J.*, **647**, 350
- Lee, S.-H., Ellison, D. C., & Nagataki, S., 2012, *Astrophys. J.*, **750**, 156
- Lequeux, J., 2005, *The Interstellar Medium* (Berlin: Springer)
- LeVeque, R. J., 2004, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Longair, M. S., 2011, *High Energy Astrophysics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Maggi, P., Haberl, F., Kavanagh, P. J., et al., 2016, *Astron. Astrophys.*, **585**, A162
- Malkov, M. A., 1998, *Phys. Rev. E*, **58**, 4911
- Malkov, M. A., Drury, L'O. C., 2001, *Rep. Prog. Phys.*, **64**, 429
- Maxted, N. I., Rowell, G. P., Dawson, B. R., et al., 2013, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **434**, 2188
- McKee, C. F. & Ostriker, J. P., 1977, *Astrophys. J.*, **218**, 148
- Mignone, A., Bodo, G., Massaglia, S., et al., 2007, *Astrophys. J. Suppl.*, **170**, 228
- Mignone, A., Zanni, C., Vaidya, B., Matsakos, T., Muscianisi, G. et al., 2015, *PLUTO User's Guide, version 4.2* (<http://plutocode.ph.unito.it>)
- Milić, B. S., 1983, *Kurs klasične teorijske fizike, I deo, Njutnova mehanika*, Univerzitet u Nišu, Niš
- Milić, I., 2014, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu
- Mitchell, N. L., McCarthy, I. G., Bower, R. G., Theuns, T., & Crain, R. A., 2009, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **395**, 180
- Mitić, N., 2009, *Uvod u organizaciju računara* (Beograd: Matematički fakultet)
- Morlino, G., Amato, E., & Blasi, P., 2009, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **392**, 240
- Morlino, G., & Caprioli, D., 2012, *Astron. Astrophys.*, **538**, A81
- Murphy, T., Gaensler, B. M., & Chatterjee, S., 2008, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **389**, L23
- Mušicki, Đ., Milić, B., 1975, *Matematičke osnove teorijske fizike sa zbirkom rešenih zadataka*, Naučna knjiga, Beograd
- Ng, C.-Y., Gaensler, B. M., Staveley-Smith, L., et al., 2008, *Astrophys. J.*, **684**, 481
- Ng, C.-Y., Zandaro, G., Potter, T. M., et al., 2013, *Astrophys. J.*, **777**, 131
- Nikolić, S., van de Ven, G., Heng, K., et al., 2013, *Science*, **340**, 45

- Olling, R. P., Mushotzky, R., Shaya, E. J., et al., 2015, *Nature*, **521**, 332
- Onić, D., 2013, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu
- Onić, D., & Urošević, D., 2015, *Astrophys. J.*, **805**, 119
- Orlando, S., Bocchino, F., Reale, F., Peres, G., & Petruk, O., 2007, *Astron. Astrophys.*, **470**, 927
- Orlando, S., Petruk, O., Bocchino, F., & Miceli, M., 2011, *Astron. Astrophys.*, **526**, A129
- Orlando, S., Bocchino, F., Miceli, M., Petruk, O., & Pumo, M. L., 2012, *Astrophys. J.*, **749**, 156
- Orlando, S., Miceli, M., Pumo, M. L., & Bocchino, F., 2015, *Astrophys. J.*, **810**, 168
- Orlando, S., Miceli, M., Pumo, M. L., & Bocchino, F., 2016, *Astrophys. J.*, **822**, 22
- Pacheco, P. S., 1997, *Parallel Programming with MPI* (San Francisco, California: Morgan Kaufmann Publishers, Inc.)
- Pacheco, P. S., 2011, *An Introduction to Parallel Programming* (San Francisco, California: Morgan Kaufmann Publishers, Inc.)
- Pacholczyk, A. G., 1970, *Radio Astrophysics* (San Francisco: Freeman)
- Park, J., Caprioli, D., & Spitkovsky, A., 2015, *Phys. Rev. Lett.*, **114**, 085003
- Paron, S., Ortega, M. E., Petriella, A., et al., 2012, *Astron. Astrophys.*, **547**, A60
- Pavlović, M. Z., Urošević, D., Vukotić, B., Arbutina, B., & Göker, Ü. D., 2013, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **204**, 4
- Pavlović, M. Z., Dobardžić, A., Vukotić, B., & Urošević, D., 2014, *Serb. Astron. J.*, **189**, 25
- Pavlović, M. Z., Urošević, D., Arbutina, B., Orlando, S., Maxted, N., Filipović, M., 2018, *Astrophys. J.*, **852**, 84
- Pavlović, M. Z., 2017, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **468**, 1616
- Perlmutter, S., Aldering, G., della Valle, M., et al., 1998, *Nature*, **391**, 51
- Petruk, O., 2005, *J. Phys. Stud.*, **9**, 364
- Petruk, O., Kopytko, B., 2016, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **462**, 3104
- Pfrommer, C., Pakmor, R., Schaal, K., Simpson, C. M., & Springel, V., 2017, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **465**, 4500

- Pierre Auger Collaboration, Aab et al., 2017, *Science*, **357**, 1266
- Potgieter, M. S. 2013, *Living Rev. Sol. Phys.*, **10**, 3
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P., 1992, *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Third edition* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Price, D. J., 2012, *Journal of Computational Physics*, **231**, 759
- Pringle, J., King, A., 2007, *Astrophysical flows* (Cambridge: Cambridge University Press)
- Ptuskin, V. S., 2007, *Phys. Usp.*, **50**, 534
- Radunović, D., 2004, *Numeričke metode* (Beograd: Akademska misao)
- Reich, W., Fuerst, E., Haslam, C. G. T., Steffen, P., & Reif, K., 1984, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **58**, 197
- Reichart, D. E., & Stephens, A. W., 2000, *Astrophys. J.*, **537**, 904
- Renardy, M., Rogers, R., 2004, *An Introduction to Partial Differential Equations, Texts in Applied Mathematics* (Berlin Heidelberg: Springer Verlag)
- Reynolds, S. P., Borkowski, K. J., Green, D. A., Hwang, U., Harrus, I., Petre, R., 2008, *Astrophys. J. Lett.*, **680**, L41
- Reynolds, S. P., 2008, *Astron. Astrophys. Rev.*, **46**, 89
- Reynolds, S. P., 2011, *Astrophys. Space Sci.*, **336**, 257
- Reynolds, S. P., Gaensler, B. M., & Bocchino, F., 2012, *Space Sci. Rev.*, **166**, 231
- Reynolds, S. P., 2017 *Dynamical Evolution and Radiative Processes of Supernova Remnants, Handbook of Supernovae* (Berlin Heidelberg: Springer Verlag)
- Reynoso, E. M., & Mangum, J. G., 2000, *Astrophys. J.*, **545**, 874
- Riess, A. G., Strolger, L.-G., Casertano, S. et al., 2007, *Astrophys. J.*, **659**, 98
- Rosswog, S., 2009, *New Astron. Rev.*, **53**, 78
- Roy, S., & Pal, S., 2014, IAU Symp. 296, *Supernova Environmental Impacts*, ed. A. Ray & R. A. McCray (Cambridge: Cambridge Univ. Press), 197
- Sarbadhicary, S. K., Badenes, C., Chomiuk, L., Caprioli, D., & Huizenga, D., 2017, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **464**, 2326
- Salvesen, G, Raymond, J. C., & Edgar, R. J, 2009, *Astrophys. J.*, **702**, 327
- Savitzky, A., & Golay, M. J. E., 1964, *Analytical Chemistry*, **36** (8), 1627

- Schiesser, W. E., 1991, *The Numerical Method of Lines* (Academic Press, San Diego)
- Schlickeiser, R. & Oppotsch, J., 2017, *Astrophys. J.*, **850**, 160
- Sedov, L. I., 1959, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* (New York: Academic Press)
- Shklovskii, I. S., 1960, *Astron. Zh.*, **37**, 256
- Shklovskii, I. S., 1960, *Astron. Zh.*, **37**, 369
- Shklovskii, I. S., 1953, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **91** (3), 475
- Shu, F. H., 1992, *The physics of astrophysics. Volume II: Gas dynamics* (Sausalito: University Science Books)
- Slane, P., Lee, S.-H., Ellison, D. C., Patnaude, D. J., Hughes, J. P. et al., 2014, *Astrophys. J.*, **783**, 33
- Slavin, J. D., Smith, R. K., Foster, A., et al., 2017, *Astrophys. J.* **846**, 77
- Sod, G. A., 1978, *J. Comput. Phys.*, **27**, 1
- Springel, V., 2010, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **48**, 391
- Springel, V., 2016, *High Performance Computing and Numerical Modelling, Star Formation in Galaxy Evolution: Connecting Numerical Models to Reality*, Saas-Fee Advanced Course, 43, pp. 251–355 (Berlin Heidelberg: Springer Verlag)
- Tammann, G. A., Loeffler, W., & Schroeder, A., 1994, *Astrophys. J. Suppl.*, **92**, 487
- Tanaka, T., Uchiyama, Y., Aharonian, F. A., et al., 2008, *Astrophys. J.*, **685**, 988
- Tasker, E. J., Brunino, R., Mitchell, N. L., et al., 2008, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **390**, 1267
- Tian, W. W., Leahy, D. A., & Wang, Q. D., 2007, *Astron. Astrophys.*, **474**, 541
- Toro, E. F., Spruce, M., Speares, W., 1992, *Technical Report CoA-9204* (Department of Aerospace Science, College of Aeronautics, Cranfield Institute of Technology, UK)
- Toro, E. F., 2009, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics* (Berlin Heidelberg: Springer Verlag)
- Truelove, J. K., & McKee, C. F., 1999, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **120**, 299
- Uchiyama, Y., Aharonian, F. A., Tanaka, T., Takahashi, T., & Maeda, Y., 2007, *Nature*, **449**, 576

- Urosevic, D., 2002, *Serb. Astron. J.*, **165**, 27
- Urošević, D., Pannuti, T. G., Duric, N., & Theodorou, A., 2005, *Astron. Astrophys.*, **435**, 437
- Urošević, D., Milogradiv-Turin, J., 2007, *Teorijske osnove radio-astronomije* (Beograd: Matematički fakultet)
- Urošević, D., Vukotić, B., Arbutina, B., & Sarevska, M., 2010, *Astrophys. J.*, **719**, 950
- Urošević, D., 2014, *Astrophys. Space Sci.*, **354**, 541
- Urošević, D., Pavlović, M. Z., Arbutina, B., 2018, *Astrophys. J.*, u štampi (arXiv: 1801.10422)
- Vainio, R., & Schlickeiser, R., 1999, *Astron. Astrophys.*, **343**, 303
- Vink, J., 2012, *Astron. Astrophys. Rev.*, **20**, 49
- Völk, H. J., Berezhko, E. G., & Ksenofontov, L. T., 2005, *Astron. Astrophys.*, **433**, 229
- Vukićević-Karabin M., Atanacković-Vukmanović, O., 2004, *Opšta astrofizika* (Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva)
- Vukićević-Karabin M., 1994, *Teorijska astrofizika* (Beograd: Naučna knjiga)
- Vukotić, B., Jurković, M., Urošević, D., & Arbutina, B., 2014, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **440**, 2026
- Šćepanović, R., Knežević-Miljanović, J., Protić, Lj., 2008, *Diferencijalne jednačine* (Beograd: Matematički fakultet)
- Wadsley, J. W., Stadel, J., & Quinn, T., 2004, *New Astron.*, **9**, 137
- Weiler, K. W., Panagia, N., Montes, M. J., & Sramek, R. A., 2002, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, **40**, 387
- West, J. L., Jaffe, T., Ferrand, G., Safi-Harb, S., & Gaensler, B. M., 2017, *Astrophys. J. Lett.*, **849**, L22
- Wilson, T. L., Rohlfs, K. & Huettemeister, S., 2013, *Tools of Radio Astronomy* (Berlin: Springer)
- Woods, T. E., Ghavamian, P., Badenes, C., & Gilfanov, M., 2017, *Nature Astronomy*, **1**, 800
- Yang, R-z., Zhang, X., Yuan, Q., & Liu, S., 2014, *Astron. Astrophys.*, **567**, 23

- Yew, M., Filipović, M. D., Roper, Q., Collier, J. D., Crawford, E. J. et al., 2018, *Publ. Astron. Soc. Aust.*, u štampi (arXiv:1802.03075)
- Yoast-Hull, T. M., Gallagher, J. S., & Zweibel, E. G., 2016, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **457**, L29
- Yu, S., Cheng, J., Yue, H., Liu, T., 2017, *Comput. Fluids*, **156**, 470
- Yuan, Q., Liu, S., & Bi, X., 2012, *Astrophys. J.*, **761**, 133
- Zanardo, G., Staveley-Smith, L., Ball, L., et al., 2010, *Astrophys. J.* **710**, 1515
- Zhou, X., Yang, J., Fang, M., et al., 2016, *Astrophys. J.*, **833**, 4
- Zirakashvili, V. N., & Aharonian, F., 2007, *Astron. Astrophys.*, **465**, 695
- Zirakashvili, V. N., 2008, *AIP Conf. Proc.*, **1085**, 129
- Zirakashvili, V. N., & Aharonian, F. A., 2010, *Astrophys. J.*, **708**, 965
- Zirakashvili, V. N., & Ptuskin, V. S., 2012, *Astropart. Phys.*, **39**, 12
- Zoglauer, A., Reynolds, S. P., An, H., et al., 2015, *Astrophys. J.*, **798**, 98

## Biografija autora

Marko Pavlović je rođen 16. jula 1987. godine u Pirotu. Osnovnu školu i gimnaziju završio je u Pirotu. Školske 2006/07. godine upisao je osnovne studije na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Astrofizika. Diplomirao je sa prosečnom ocenom 9.97, a školske 2010/11. godine na istom fakultetu upisuje master studije. Master studije završava 2011. godine odbranom master rada „Nova  $\Sigma - D$  relacija za Galaktičke ostatke supernovih” i stiče zvanje master-astronom. Školske 2011/12. godine upisuje doktorske studije na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu, studijski program Astronomija i astrofizika. Od januara 2011. godine je zaposlen na Matematičkom fakultetu u Beogradu, kao istraživač-pripravnik na projektu Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja „Emisione magline: struktura i evolucija“ (br. 176005), pod rukovodstvom prof. dr Dejana Uroševića. U zvanje istraživač-saradnik izabran je juna 2012. godine, a u isto zvanje je reizabran juna 2015. godine.

Naučno-istraživački rad kandidata se odvija u oblasti proučavanja ostataka supernovih, njihove radio-evolucije i difuznog ubrzavanja čestica na udarnim talasima. Autor je, odnosno koautor, 12 naučnih radova (10 radova kategorije M21, 1 kategorije M22, 1 kategorije M23) objavljenih u međunarodnim naučnim časopisima sa tzv. SCI liste (*Astrophysical Journal Supplement Series*, *Astrophysical Journal*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, *Serbian Astronomical Journal*, *International Journal of Modern Physics A*) i 6 radova prikazanih na naučnim skupovima u zemlji i inostranstvu.

Прилог 1.

## Изјава о ауторству

Потписани-а Марко Павловић

број уписа 2004/2011

### Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Моделовање радио-евољуције остатака супернових на основу  
хидродинамичких симулација и нелинеарног дифузног убрзавања честица

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 18.02.2018.

  
\_\_\_\_\_



Прилог 2.

## Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора \_\_\_\_\_ Марко Павловић \_\_\_\_\_

Број уписа \_\_\_\_\_ 2004/2011 \_\_\_\_\_

Студијски програм \_\_\_\_\_ Астрономија и астрофизика \_\_\_\_\_

Наслов рада Моделовање радио-еволуције остатака супернових на основу хидродинамичких симулација и нелинеарног дифузног убрзавања честица

Ментор \_\_\_\_\_ проф. др Дејан Урошевић \_\_\_\_\_

Потписани \_\_\_\_\_ Марко Павловић \_\_\_\_\_

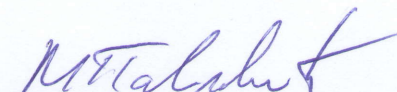
изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, \_\_\_\_\_ 18.02.2018. \_\_\_\_\_

  
\_\_\_\_\_

Прилог 3.

## Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом

Моделовање радио-еволуције остатака супернових на основу  
хидродинамичких симулација и нелинеарног дифузног убрзавања честица

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 18.02.2018.



---

1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.