УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Иван С. Димитријевић

ГЕОМЕТРИЈСКА ГЕНЕРАЛИЗАЦИЈА АЈНШТАЈНОВЕ ТЕОРИЈЕ ГРАВИТАЦИЈЕ

докторска дисертација

Београд, 2017

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Ivan S. Dimitrijević

GEOMETRIC GENERALIZATION OF EINSTEIN THEORY OF GRAVITY

doctoral dissertation

Belgrade, 2017

Садржај

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор
проф. др Зоран Ракић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије

проф. др Зоран Ракић, редовни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Стана Никчевић, редовни професор,
Фармацеутски факултет, Универзитет у Београду

проф. др Мирослава Антић, ванредни професор,
Математички факултет, Универзитет у Београду

проф. др Маја Бурић, редовни професор,
Физички факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране:

Захвалности

Велику захвалност дугујем менторима др Бранку Драговићу и др Зорану Ракићу на несебичној подршци и усмеравању током наших бројних стручних дискусија. Захваљујем се мојој сарадници др Јелени Станковић, као и др Алексеју Кошељеву на стручним дискусијама. Такође, желим да се захвалим и члановима комисије за преглед и оцену докторске дисертације: др Стана Никчевић, др Мирослава Антић и др Маја Бурић који су својим сугестијама и коментарима унапредили рад.

Ова дисертација је написана у оквиру пројекта "Геометрија, образовање и визуелизација са применама" (бр. 174012) Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Захваљујем се мом тати на великој подршци током писања дисертације.

Геометријска генерализација Ајнштајнове теорије гравитације

Резиме: Ајнштајнова теорија гравитације успешно описује појаве у Сунчевом систему. Она такође предвиђа постојање црних рупа, гравитационих сочива и гравитационих таласа, што је успешно опсервирано. Међутим Ајнштајнова теорија није довољно проверена на великим космичким растојањима. Због тога, посматрамо нелокалну модификацију гравитације и добијамо нова решења за скалирајући фактор $a(t)$. Такође, посматрамо и просторно-временске пертурбације де Ситеровог простора.
Кључне речи: космолошка решења, модификована гравитација, нелокална гравитација, једначине кретања, пертурбације де Ситеровог простора

Научна област: Математика
Ужа научна област: Геометрија
УДК број: $514.82 : 52 - 336(043.3)$

Geometric generalization of Einstein theory of gravity

Abstract: Einstein theory of gravity successfully describes the Solar system. It also predicts the existence of the black holes, gravitational lenses and gravitational waves, which have been observed successfully. On the other hand Einstein theory of gravity is not tested on the large cosmic sccale. Therefore, we consider the nonlocal modified gravity and get new solutions for the cosmic scale factor $a(t)$. Moreover we consider space-time perturbations of the de Sitter space.

Key words: cosmological solutions, modified gravity, nonlocal gravity, equations of motion, perturbations of the de Sittter space
Academic discipline: Mathematics
Academic sub-discipline: Geometry
UDK number: $514.82:52-336(043.3)$

Увод

Ајнштајнова теорија гравитације (општа теорија релативности) може да се зада Ајнштајн-Хилбертовим дејством

$$S_{AH} = \int_M \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + \mathcal{L}_m \right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x,$$

где је R скаларна кривина, Λ космолошка константа, $\mathcal{L}_m$ лагранжијан материје, g детерминанта метричког тензора и G Њутнова гравитациона константа (за брзину светлости се узима $c = 1$). Одговарајућом варијацијом горњег дејства по елементима метричког тензора $g^{\mu\nu}$ добијају се Ајнштајнове једначине кретања за гравитационо поље

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = 8\,\pi\, G\, T_{\mu\nu} - \Lambda\, g_{\mu\nu},$$

где је $R_{\mu\nu}$ Ричијев тензор и $T_{\mu\nu}$ тензор енергије-импулса. У почетку, ова теорија је успешно тестирана и потврђена објашњењем аномалног помака перихела Меркура, савијањем зрака светлости при пролазу поред Сунца и гравитационим црвеним помаком. Ајнштајнова теорија гравитације успешно описује појаве у Сунчевом систему. Она је такође предвидела постојање црних рупа, гравитационих сочива и гравитационих таласе, што је успешно опсервирано. Међутим Ајнштајнова теорија није довољно проверена на великим космичким растојањима ([59, 57, 19, 55, 12, 13, 14, 18, 17]).

На великим космичким растојањима васиона је хомогена и изотропна, тј. све тачке и сви правци су равноправни, па се користи Фридман-Робертсон-Вокерова (FRW) метрика за васиону као целину. Из услова да је простор-време хомогено и изотропно следи да се може разложити на унију хиперповрши $\Sigma(t)$, параметризованих временом t, таквих да је свака од њих константне кривине. FRW метрика је дата формулом

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2 \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 \right),$$

где константа k има вредности $0, \pm 1$. За $k = +1$ хиперповрши $\Sigma(t)$ су локално изометричне са сфером, за $k = 0$ хиперповрши $\Sigma(t)$ су локално изометричне са еуклидским простором и за $k = -1$ хиперповрши $\Sigma(t)$ су локално изометричне са хиперболичким простором. Када се елементи метричког тензора из FRW метрике убаце у Ајнштајнове једначине добијају се две Фридманове једначине за скалирајући фактор $a(t)$, који служи за описивање еволуције васионе.

Ако је Ајнштајнова теорија гравитације тачна и за васиону као целину, тада у васиони има око 95% додатне материје/енергије и само 5% наше стандардне (светлеће) материје. Према подацима астрономске мисије Планк, додатну материју/енергију у васиони чине *тамна енергија* са 68% и *тамна материја* са 27% ([1]). Тамна материја интерагује гравитационо, али и не електромагнетно због чега је невидљива, и даје могућност решења проблема великих орбиталних брзина галаксија у јатима галаксија и звезда у спиралним галаксијама. Тамна енергија има негативан притисак и могла би бити енергија вакуума и одговорна за убрзано ширење васионе које је откривено 1998. године. Пошто Ајнштајнова теорија гравитације није проверена на великим космичким растојањима, постојање тамне материје и тамне енергије у наведеним процентима треба узети са резервом. Поред тога, постојање тамне материје и тамне енергије још није експериментално потврђено. Ово даје повода да се траже алтернативна решења у виду модификације Ајнштајнове теорије гравитације.

Покушаји да се модификује Ајнштајнова теорија гравитације су почели непосредно по њеном објављивању. Ти почетни покушаји односили су се углавном на могућности математичке генерализације Ајнштајнове теорије гравитације. Општа теорија релативности је формулисана 1915. без Λ члана, а космолошку константу Λ је додао Ајнштајн 1917. што се може сматрати првом успешном модификацијом. И поред математичке лепоте ове теорије и њеног феноменолошког успеха, показало се током времена да она има и неке своје недостатке. Тако, на пример, она не може да се квантује. Такође, под доста општим условима, садржи космолошки сингуларитет. Било би веома необично да једна физичка теорија важи на свим просторно-временским скалама, од Планковог растојања ($10^{-35}\ m$) до граница видљиве васионе ($10^{26}\ m$). Овакви проблеми и запажања упућују на тражење неке општије теорије гравитације, која би садржавала Ајнштајнову теорију под одређеним условима. Нарочито током последње деценије се интензивно ради на модификацији Ајнштајнове теорије гравитације подстакнуто открићем убрзаног ширења васионе, за које још не постоји општеприхваћено теоријско објашњење.

Космолошка модификација Ајнштајнове теорије гравитације, да би била прихваћена, треба да садржи сва успешна својства Ајнштајнове теорије и да поред тога решава космолошке проблеме. То значи да нова теорија гравитације треба да садржи принцип опште релативности и принцип еквиваленције. Принцип опште релативности гласи: основни физички закон има исту форму у свим координатним системима. Другим речима, сваки физички закон је инваријантан у односу на произвољне диференцијабилне координатне трансформације, па се може записати у коваријантном облику. Принцип еквиваленције се односи на еквивалентност инерционе и гравитационе масе и изражава се у виду њихове једнакости. Модификација Ајнштајнове теорије гравитације практично значи погодну измену леве стране Ајнштајнове једначине за гравитационо поље, тј. њеног геометријског садржаја. Стога је математички оквир за модификацију теорије гравитације псеудо-Риманова геометрија.

Постоје бројни приступи модификацији Ајнштајнове теорије гравитације. Међу онима који привлаче највише пажње су $F(R)$ модификација и нелокална модификација. У случају $F(R)$ модификације, скаларна кривина R у Ајнштајн-Хилбертовом дејству S_{AH} је замењена диференцијабилном функцијом $F(R)$. Овај приступ је проучаван за различите облике функције $F(R)$ ([59, 57, 41, 42, 20]).

У овој дисертацији разматра се нелокалална модификација Ајнштајнове теорије гравитације. Нелокална модификација гравитације ([38, 11, 15, 16, 33, 54, 56]) је она модификација која садржи бесконачно много просторно-временских извода. Обично се узима у облику степеног реда по Даламберовом оператору $\Box = \nabla_\mu \nabla^\mu$ или његовом инверзу $\Box^{-1}$. У овој дисертацији се нелокална модификација разматра са додатним чланом у лагранжијану у облику $\mathcal{H}\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}$, где су $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ диференцијабилне функције скаларне кривине R и $\mathcal{F}$ аналитичка функција Даламберовог оператора. Нелокалност у овом облику изучавана је у радовима [2, 3, 6, 28, 26, 27, 25, 29, 30, 31, 25, 32, 23, 24, 43, 45]. Овај облик нелокалне модификације инспирисан је нелокалностима у теорији струна, специјално p-адичких скаларних струна ([37, 35, 36, 4]). Нелокалност која садржи $\Box^{-1}$ је разматрана у радовима [21, 39, 46, 47, 5, 53, 57, 65]. Овај модел се поклапа са резултатима Ајнштајнове теорије гравитације на нивоу Сунчевог система, али се не слаже са посматрачким подацима о формирању великих космичких структура ([64, 22]).

У Глави 1 се даје преглед основних појмова псеудо-Риманове геометрије неопходних у даљим разматрањима. Уводе се појмови псеудо-Риманове многострукости, метричког тензора, Риманове, Ричијеве и скаларне кривине. Дефинише се и појам интеграла на (оријентабилној) псеудо-Римановој многострукости. Глава 2 садржи Ајнштајнову теорију гравитације као и отворене космолошке проблеме који представљају основну мотивацију за њену модификацију. Глава 3 садржи нелокалну модификацију Ајнштајнове теорије гравитације дату дејством

$$S = \int_M \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + \mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) \right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x.$$

Изводе се одговарајуће једначине кретања и дају решења за скалирајући фактор $a(t)$, која углавном не садрже космолошке сингуларитете. Оригинални резултати су добијени за моделе $\mathcal{H}(R) = R^p$, $\mathcal{G}(R) = R^q$ $(p, q \in \mathbb{Z})$, $\mathcal{H}(R) = \mathcal{G}(R) = (R + R_0)^m$ $(R_0 \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Q})$ и $R = \mathrm{const}$. У Глави 4 су дати неки резултати који се односе на космолошке пертурбације де Ситеровог простора и дати су неки услови под којима су те пертурбације стабилне. У Закључку сумирани су добијени резултати и указани неки правци перспективног даљег истраживања. При крају дисертације су два додатка: увод у варијациони рачун и детаљи једног нелокалног модела. Дисертација се завршава са списком одговарајуће литературе.

Глава 1

Псеудо-Риманова геометрија

У овој глави уводимо основне појмове диференцијалне геометрије који су неопходни у наставку. Математички оквир Ајнштајнове теорије гравитације и њених модификација је псеудо-Риманова геометрија. На почетку дефинишемо псеудо Риманову многострукост. Затим, уводимо метрички тензор, Риманов тензор кривине, Ричијеву и скаларну кривину. На крају уводимо и појам интеграције на многострукости и наводимо Стоксову теорему која је неопходна за извођење једначина кретања у глави 3. Као основна литература за ову главу су послужиле књиге [58] и [34].

1.1 Диференцијабилне многострукости и глатке функције

Дефиниција 1.1. Нека је M тополошки простор и $U, V \in M$ отворени скупови, n - димензиона карта на M је уређен пар (U, x), где је x хомеоморфизам $x : U \to \mathbb{R}^n$. Две карте (U, x), (V, y) су компатибилне ако је пресликавање $x \circ y^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ глатко.

Карту (U, x) ћемо, у даљем тексту, краће обележавати са x. Координатне функције карте x су $x^i = x \circ u_i$ где су $u^0, u^1, \ldots, u^{n-1}$ координатне функције на $\mathbb{R}^n$. За ову карту кажемо да је карта у тачки p ако је $p \in U$.

Дефиниција 1.2. Атлас A димензије n на топлошком простору M је скуп n - димензионих карти на M такав да важи

1. за сваку тачку $p \in M$ постоји карта (U, x) таква да је $p \in U$,

2. сваке две карте $(U, x), (V, y) \in A$ су компатибилне.

Дефиниција 1.3. Атлас A димензије n је максималан ако је произвољна карта $(U, x) \in A$ на M компатибилна са сваком картом из A.

Лема 1.1. *Сваки атлас A димензије n на тополошком простору M одређује јединствен максимални атлас.*

Дефиниција 1.4. Глатка многострукост димензије n (у даљем тексту "многострукост") је Хаусдорфов тополошки простор који је снабдевен максималним атласом димензије n. Број n се назива димензија многострукости M и пишемо $n = \dim M$.

Нека је на многострукости M дата карта (U, x) и реална функција $f : M \to \mathbb{R}$. Функција $f \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}$ назива се координатна репрезентација функције f у карти (x, U).

Дефиниција 1.5. Нека је M многострукост и $f : M \to \mathbb{R}$. Тада за функцију f кажемо да је глатка ако је за сваку карту (U, x) координатна репрезентација $f \circ x^{-1}$ глатка функција. Скуп свих глатких функција на M обележавамо са $\mathfrak{R}M$.

Лако се показује да скуп $\mathfrak{R}M$ има структуру прстена у односу на уобичајене операције сабирања и множења функција тачка по тачка. Овако дефинисан појам глаткости уопштава се на случај пресликавања између две многострукости:

Дефиниција 1.6. Нека су M_1 и M_2 многострукости димензија n_1 и n_2 респективно. Функција $f : M_1 \to M_2$ је глатка ако за сваку карту (U, x) на M_1 и сваку карту (V, y) на M_2 функција $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}^{n_2}$ глатка,тамо где је композиција дефинисана.
Глатка функција f је дифеоморфизам ако има инверзну функцију f^{-1}, које је такође глатка.

1.2 Тангентни вектори

Дефиниција 1.7. Нека је M многострукост и $p \in M$ тачка на M. Тангентни вектор X_p на M у тачки p је функционал $X_p : \mathfrak{R}M \to \mathbb{R}$ који задовољава:

1. $X_p(\alpha f + \beta g) = \alpha X_p(f) + \beta X_p(g)$,

2. $X_p(fg) = X_p(f)g + fX_p(g)$,

за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathfrak{R}M$. Скуп свих тангентних вектора у тачки p се обележава са T_pM.

Дефиниција 1.8. Нека је $x = (x^0, x^1, \ldots, x^{n-1})$ карта на многострукости M у тачки p и $(u^0, u^1, \ldots u^{n-1})$ канонске координате на $\mathbb{R}^n$. Ако је $f \in \mathfrak{R}M$, онда

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial f \circ x^{-1}}{\partial u^i}(x(p)), \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

За пресликавање $\partial_i|_p : \mathfrak{R}M \to \mathbb{R}$ дефинисано са

$$\partial_i|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

се може показати да је тангентни вектор на M у тачки p. Штавише, важи и следећа теорема

Теорема 1.1. *Ако је x карта на M у тачки p тада је T_pM векторски простор димензије n и вектори $\partial_0|_p, \partial_1|_p, \ldots, \partial_{n-1}|_p$ чине једну његову базу.*

Дефиниција 1.9. Тангентно раслојење многострукости M је скуп

$$TM = \{(p, X_p) | p \in M, X_p \in T_pM\}.$$

Природна пројекција $\pi : TM \to M$ се дефинише са $\pi(p, X_p) = p$. Такође уведимо и пројекцију $\tau : TM \to \cup_{p \in M} T_pM$ такву да је $\tau(p, X_p) = X_p$.

Тангентно раслојење TM се на природан начин може снабдети структуром многострукости димензије $2n$. Нека је (U, x) једна карта на M у тачки p и (p, X_p). Дефинишимо пресликавање $\bar{x} : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{2n}$

$$\bar{x} = (x^0 \circ \pi, x^1 \circ \pi, \ldots, x^{n-1} \circ \pi, \dot{x}^0, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^{n-1})$$

где је $\dot{x}^i : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ дато са $\dot{x}^i(X_p) = X_p(x^i)$. Овим је дефинисана једна карта $(\pi^{-1}(U), \bar{x})$ на TM. Ако је A атлас многострукости M, може се показати да је скуп $\{(\pi^{-1}(U), \bar{x}) | (U, x) \in A\}$ атлас на TM.

Дуалан простор тангентног простора T_pM називамо котангентни простор многострукости M у тачки p (у ознаци $T_pM^\star$). Његове елементе називамо котангентним векторима на M у тачки p. Аналогно дефиницији тангентног раслојења дефинишемо и котангентно раслојење

Дефиниција 1.10. Котангентно раслојење многострукости M је скуп

$$TM^\star = \{(p, \omega_p) | p \in M, \omega_p \in T_pM^\star\}.$$

Природна пројекција $\pi^\star : TM^\star \to M$ се дефинише са $\pi^\star(p, \omega_p) = p$. Такође уведимо и пројекцију $\tau^\star : TM^\star \to \cup_{p \in M} T_pM^\star$ такву да је $\tau^\star(p, \omega_p) = \omega_p$.

1.3 Диференцијал функције

Нека су M_1 и M_2 многострукости димензија n_1 и n_2 респективно и $f : M_1 \to M_2$ глатка функција. Изаберимо тачку $p \in M_1$ и тангентни вектор $X_p \in T_pM$. Нека је $q = f(p)$, тада дефинишемо пресликавање $Y_q : \mathfrak{R}M_2 \to \mathbb{R}$ са

$$Y_q(h) = X_p(h \circ f).$$

Докажимо прво да је Y_q тангентни вектор на M_2 у тачки q. Заиста, за свако $h, k \in \mathfrak{R}M_2$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ имамо

$$\begin{aligned}
Y_q(\alpha h + \beta k) &= X_p((\alpha h + \beta k) \circ f) = X_p(\alpha h \circ f + \beta k \circ f) = \alpha Y_q(h) + \beta Y_q(k), \\
Y_q(hk) &= X_p(hk \circ f) = X_p((h \circ f)(k \circ f)) \\
&= k(f(p))X_p(h \circ f) + h(f(p))X_p(k \circ f) = k(q)Y_q(h) + h(q)Y_q(k).
\end{aligned}$$

Дефиниција 1.11. Нека је $f : M_1 \to M_2$ глатка функција. Тада је извод функције f у тачки $p \in M_1$ пресликавање $\mathrm{d}f_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ дефинисано са $\mathrm{d}f_p(X_p)(h) = X_p(h \circ f)$ ($X_p \in T_pM_1$ и $h \in \mathfrak{R}M_2$).

Овако дефинисано пресликавање $\mathrm{d}f_p$ је линеаран оператор. Ако је x карта на M_1 у тачки p и y карта на M_2 у тачки q, онда вектори $\left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n_1-1}}\right)$ одређују једну базу у T_pM_1, а $\left(\frac{\partial}{\partial y^0}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{n_2-1}}\right)$ одређују базу у T_qM_2. У односу на овај пар база матрица оператора $\mathrm{d}f_p$ је

$$A = \left(\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}\right)_{0 \le i \le n_2-1,\, 0 \le j \le n_1-1}.$$

1.4 Векторска поља

Дефиниција 1.12. Векторско поље X на многострукости M је глатка функција $X : M \to TM$ таква да је $\pi \circ X = id$. Скуп свих векторских поља на M обележавамо са $\mathfrak{X}M$.

Ову дефиницију можемо интерпретирати тако да је свакој тачки $p \in M$ додељен тангентни вектор $X_p \in T_pM$. Ако је $f \in \mathfrak{R}M$ онда дефинишемо $Xf \in \mathfrak{R}M$ са

$$(Xf)(p) = X_p(f), \quad p \in M.$$

Ако су $X, Y \in \mathfrak{X}M$ онда сабирање и множење функцијом $f \in \mathfrak{R}M$ дефинишемо тачка по тачка ($p \in M$)

$$\begin{aligned}(X+Y)_p &= X_p + Y_p,\\ (fX)_p &= f(p)X_p.\end{aligned}$$

У односу на ове операције $\mathfrak{X}M$ има структуру модула над прстеном $\mathfrak{R}M$.

Нека је (U, x) карта на M. Тада се на U, за свако $0 \leq i \leq n-1$, може дефинисати векторско поље ∂_i које тачки p додељује тангентни вектор $\partial_i|_p$. Из теореме 1.1 следи да се произвољно векторско поље X може представити у облику

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} X(x^i)\partial_i.$$

Дефиниција 1.13. Деривација на $\mathfrak{R}M$ је пресликавање $D : \mathfrak{R}M \to \mathfrak{R}M$ које задовољава ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathfrak{R}M$)

1. $\mathbb{R}$ - линеарност $D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g)$,
2. Лајбницово правило $D(fg) = fD(g) + D(f)g$.

Ако је дато векторско поље $X \in \mathfrak{X}M$, онда из дефиниције тангентног вектора следи да је пресликавање $f \mapsto X(f)$ једна деривација на $\mathfrak{R}M$. Обратно ако је дата деривација D, тада она одређује пресликавање $X_p(f) = D(f)(p)$. Својства 1 и 2 гарантују да је X_p тангентни вектор у тачки p, односно X векторско поље на M. На овај начин смо успоставили бијекцију између векторских поља на M и деривација на $\mathfrak{R}M$. Користећи ову интерпретацију векторских поља добијамо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.14. Комутатор векторских поља $X, Y \in \mathfrak{X}M$ је векторско поље

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Особине комутатора су наведене у следећој леми.

Лема 1.2. *За свако $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathfrak{R}M$ и $X, Y, Z \in \mathfrak{X}M$ важи*

$$\begin{aligned}&[\alpha X + \beta Y, Z] = \alpha[X, Z] + \beta[Y, Z],\\ &[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z],\\ &[X, Y] = -[Y, X],\\ &[X, X] = 0,\\ &[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,\\ &[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - g(Y(f))X.\end{aligned}$$

Приметимо да за произвољну карту x и два координатна векторска поља ∂_i и ∂_j комутирају, тј. $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

1.5 Тензори

Нека су $V_1, V_2, \ldots, V_s, W$ модули над прстеном K. Тада је Декартов производ $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_s$ такође модул над прстеном K. За функцију $A : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_s \to W$ кажемо да је $K-$ линеарна ако је линеарна по сваком од s аргумената, тј за свако $1 \leq i \leq s$ важи

$$\begin{aligned} &A(v_1, \ldots, v_{i-1}, \alpha v + \beta w, v_{i+1}, \ldots, v_s) = \\ &\quad \alpha A(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_s) + \beta A(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_s) \end{aligned}$$

Скуп свих линеарних функционала над модулом V се обележава са $V^\star$ и назива дуални модул модула V.

Дефиниција 1.15. Нека су r, s цели ненегативни бројеви и V модул над прстеном K.
Ако је $rs \neq 0$, онда је тензор типа (r, s) на модулу V, $K-$ линеарно пресликавање $A : (V^\star)^r \times V^s \to K$.
Ако је $r = 0$, $s \neq 0$, онда је тензор типа $(0, s)$ на модулу V, $K-$ линеарно пресликавање $A : V^s \to K$.
Ако је $s = 0$, $r \neq 0$, онда је тензор типа $(r, 0)$ на модулу V, $K-$ линеарно пресликавање $A : (V^\star)^r \to K$.
Тензор типа $(0, 0)$ на модулу V је елемент прстена K.
Скуп свих тензора типа (r, s) на V обележавамо са $\mathfrak{T}^r_s V$.

Примери примене претходне дефиниције су $K = \mathfrak{R}M$ и $V = \mathfrak{X}M$, односно $K = \mathbb{R}$ и $V = T_pM$. Први од њих нам даје следећу дефиницију

Дефиниција 1.16. Тензорско поље типа (r, s) на многострукости M је тензор типа (r, s) на модулу $\mathfrak{X}M$. Скуп $\mathfrak{T}^r_s \mathfrak{X}M$ краће обележавамо са $\mathfrak{T}^r_s M$.

Тензоре типа $(0, s)$ $(s > 0)$ називамо коваријантним, а тензоре типа $(r, 0)$ $(r > 0)$ називамо контраваријантним. Тензоре типа (r, s) $(rs \neq 0)$ називамо мешовитим.

Нека су $A \in \mathfrak{T}^r_s M$ и $B \in \mathfrak{T}^{r'}_{s'} M$ тензорска поља на M, онда је њихов производ

$A \otimes B$ тензорско поље реда $(r+r', s+s')$ дефинсано са

$$
\begin{aligned}
&(A \otimes B)(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{r+r'}, X_1, X_2, \ldots, X_{s+s'}) \\
&= A(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r, X_1, X_2, \ldots, X_s) B(\omega^{r+1}, \omega^{r+2}, \ldots, \omega^{r+r'}, X_{s+1}, X_{s+2}, \ldots, X_{s+s'}).
\end{aligned}
$$

Ако је један од фактора тензор типа $(0,0)$ односно функција $f : M \to \mathbb{R}$ онда је

$$A \otimes f = f \otimes A = fA.$$

Овако дефинисана операција множења тензора је $\mathfrak{R}M$ билинеарна и асоцијативна, али не и комутативна. Приметимо такође да комутативност важи у случају да је један од фактора коваријантан а други контраваријантан. Функције $f : M \to \mathbb{R}$ комутирају са свим тензорима тј. за свака два тензора A и B важи $fA \otimes B = A \otimes fB = f(A \otimes B)$.

Нека је $X \in \mathfrak{X}M$ векторско поље. Уведимо пресликавање $\bar{X} : \mathfrak{X}M^\star \to \mathfrak{R}M$, формулом $\bar{X}(\omega) = \omega(X)$. Пресликавање $\bar{X}$ је $\mathfrak{R}M-$ линеарно и представља једно тензорско поље типа $(1,0)$. С друге стране, свако тензорско поље типа $(1,0)$ се добија овом конструкцијом и пишемо $\mathfrak{T}^1_0 M = \mathfrak{X}M$. Дуално, ако пођемо од $1-$ форме $\omega \in \mathfrak{X}M^\star$, пресликавање $X \mapsto \omega(X)$ дефинше тензорско поље $\bar{\omega}$ типа $(0,1)$ на M. Пресликавање $\omega \mapsto \bar{\omega}$ је један изоморфизам простора $\mathfrak{X}M^\star$ и $\mathfrak{T}^0_1 M$.

$\mathfrak{R}M-$ линеарно пресликавање $A : \mathfrak{X}M^s \to \mathfrak{X}M$ генерише тензорско поље $\bar{A}$ типа $(1,s)$ на следећи начин

$$\bar{A}(\omega, X_1, X_2, \ldots, X_s) = \omega(A(X_1, X_2, \ldots, X_s)).$$

Тада, и за само пресликавање A кажемо да је тензорско поље (типа $(1,s)$) и користимо ову идентификацију када је неопходно.

Лема 1.3. *Нека је (U,x) карта на M. Тада се свако тензорско поље $A \in \mathfrak{T}^r_s M$ може на јединствен начин представити у облику*

$$A = \sum A^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \partial_{i_1} \otimes \ldots \partial_{i_r} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}.$$

У претходној формули се подразумева сумирање по свим индексима од 0 до $n-1$, $n = \dim M$.

1.6 Диференцијалне 1− форме

Диференцијалне 1− форме на многострукости M су објекти дуални векторским пољима. Дуални простор T_pM^* тангентног простора T_pM се назива котангентни простор многострукости M у тачки p. Елементи простора T_pM^* се називају и ковектори а представљају линеарна пресликавања из T_pM у поље $\mathbb{R}$.

Дефиниција 1.17. Диференцијална 1− форма θ на многострукости M је функција која свакој тачки p придружује елемент θ_p котангентног простора T_pM^*.

За диференцијалну 1− форму θ на многострукости M и векторско поље $X \in \mathfrak{X}M$, дефинишемо $\theta X \in \mathfrak{R}M$ са $(\theta X)(p) = \theta_p(X_p)$. Диференцијална форма θ је глатка ако је θX глатко за свако $X \in \mathfrak{X}M$.

Нека је $\mathfrak{X}M^*$ скуп свих глатких диференцијалних 1− форми на M. На скупу $\mathfrak{X}M^*$ се природно уводи структура модула над $\mathfrak{R}M$.

Дефиниција 1.18. Извод функције $f \in \mathfrak{R}M$ је диференцијална 1− форма $\mathrm{d}f$ таква да важи $(\mathrm{d}f)(X) = X(f)$ за сваки тангентно векторско поље $X \in \mathfrak{X}M$.

Нека је (U, x) карта на M и $x = (x^0, \dots, x^{n-1})$. Базу дуалну бази $(\partial_0, \dots, \partial_{n-1})$ обележавамо са $(\mathrm{d}x^0, \dots, \mathrm{d}x^{n-1})$. Из линеарне алгебре знамо да је $\mathrm{d}x^i(\partial_j) = \delta^i_j$. Следи да за сваку диференцијалну 1− форму θ важи

$$\theta = \sum_{i=0}^{n-1} \theta(\partial_i) dx^i.$$

Специјално, за $f \in \mathfrak{R}M$ је $\mathrm{d}f(\partial_i) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, па следи

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Лема 1.4. *Нека су $f, g \in \mathfrak{R}M$ и $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатка функција. Извод $\mathrm{d} : \mathfrak{R}M \to \mathfrak{X}M^*$ има следећа својства:*

1. d *је* $\mathbb{R}-$*линеарно,*

2. $\mathrm{d}(fg) = g\ \mathrm{d}f + f\ \mathrm{d}g$ *(Лајбницово правило),*

3. $\mathrm{d}(h(f)) = h'(f)\mathrm{d}f$.

1.7 Метрика

Посматрајмо прво произвољан (коначнодимензиони) векторски простор V. Билинеарна форма B на V је пресликавање $B : V \times V \to \mathbb{R}$, које је $\mathbb{R}-$ линеарно по оба аргумента. Билинеарна форма B је симетрична ако је $B(x, y) = B(y, x)$.

Дефиниција 1.19. Нека је B симетрична билинеарна форма на векторском простору V. Тада кажемо да је B

- позитивно (негативно) дефинитна ако је за свако $v \neq 0$, $B(v, v) > 0(< 0)$.
- позитивно (негативно) семидефинитна ако је за свако v, $B(v, v) \geq 0(\leq 0)$.
- недегенерисана ако је $(\forall x)B(x, y) = 0 \Rightarrow y = 0$.

Дефиниција 1.20. Индекс симетричне билинеарне форме B на V је максимална димензија потпростора W таквог да је рестрикција форме B на W негативно дефинитна.

Лема 1.5. *Симетричне билинеарна форма B на V је недегенерисана ако је њена матрица у једној (а тиме и било којој) бази простора V инвертибилна.*

Дефиниција 1.21. Скаларни производ на V је недегенерисана симетрична билинеарна форма g.

За векторе $v, w \in W$ кажемо да су ортогонални ако је $g(v, w) = 0$. Ортогонални комплемент потпростора W је скуп свих вектора v који су ортогонални на све векторе потпростора W, тј. $W^{\perp} = \{v \in V | (\forall w \in W) g(v, w) = 0\}$. Потпростор W је недегенерисан ако је рестрикција скаларног производа $g|_W$ недегенерисана.

Лема 1.6. *Нека је W потпростор векторског простора V и g скаларни производ на V. Тада је*

1. $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$,
2. $(W^{\perp})^{\perp} = W$,
3. *W је недегенерисан потпростор акко је $V = W \oplus W^{\perp}$.*

База $e_1, e_2, \dots e_n$ векторског простора је ортогонална ако је $g(e_i, e_j) = 0$ за свако $i \neq j$. База $e_1, e_2, \dots e_n$ је ортонормирана ако је ортогонална и $|g(e_i, e_i)| = 1$, за све $i = 1, \dots n$.

Лема 1.7. *Нека је $V \neq \{0\}$ нетривијалан векторски простор и g скаларни производ на V, тада постоји ортонормирана база.*

Лема 1.8. *Нека је $e_1, e_2, \ldots e_n$ ортонормирана база простора V и $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$. Тада се сваки вектор $v \in V$ изражава као*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i \tag{1.1}$$

Лема 1.9. *Нека је $V \neq \{0\}$ нетривијалан векторски простор, g скаларни производ на V и $e_1, e_2, \ldots e_n$ ортонормирана база. Индекс скаларног производа g је једнак броју базних вектора e_i тако да је $g(e_i, e_i) = -1$.*

Индекс простора V је индекс скаларног производа g који је на њему дефинисан.

Дефиниција 1.22. Метрички тензор g на многострукости M је симетрично, недегенерисано тензорско поље типа $(0, 2)$ са константним индексом. Псеудо-Риманова многострукост је могострукост на којој је дефинисам метрички тензор g.

Дефиниција 1.23. Тангентни вектор $v_p \neq 0 \in T_pM$ је

- просторни ако је $g_p(v_p, v_p) > 0$.
- изотропан ако је $g_p(v_p, v_p) = 0$ и $v \neq 0$.
- временски ако је $g_p(v_p, v_p) < 0$.

1.8 Повезаност

Дефиниција 1.24. Повезаност ∇ на глаткој многострукости M је функција $\nabla : \mathfrak{X}M \times \mathfrak{X}M \to \mathfrak{X}M$ таква да за свако $f \in \mathfrak{R}M$ важи:

$(P1)$ $\nabla_X Y$ је $\mathfrak{R}M-$ линеарна по X,

$(P2)$ $\nabla_X Y$ је $\mathbb{R}-$ линеарна по Y,

$(P3)$ $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

$\nabla_X Y$ назива се коваријантни извод векторског поља Y у правцу векторског поља X за повезаност ∇.

Према аксиоми $(P1)$ видимо да је $\nabla_X Y$ тензор по X, а аксиома $(P3)$ показује да није тензор по Y. Дакле пресликавање ∇ није тензор.

Теорема 1.2. *За $X \in \mathfrak{X}M$, нека је X^* диференцијална форма на M тако да*

$$X^*(Y) = \langle X, Y \rangle \text{ за свако } Y \in \mathfrak{X}M.$$

Тада је пресликавање $X \mapsto X^*$ један $\mathfrak{R}M$-линеарни изоморфизам из $\mathfrak{X}M$ у $\mathfrak{X}M^*$.

Тако смо успоставили канонски изорморфизам између скупа векторски поља и диференцијалних форми. Пар X, X^* називамо метрички еквивалентним.

Теорема 1.3. *На многострукости M постоји јединствена повезаност ∇ таква да за свако $X, Y, Z \in \mathfrak{X}M$ важи:*

$(P4)$ $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, и

$(P5)$ $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

∇ се зове Леви-Чивита повезаност на M. Леви-Чивита повезаност се може израчунати на основу Козулове формуле:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = {} & X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ & - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle. \end{aligned}$$

Дефиниција 1.25. Нека је (U, x) карта на многострукости M. Кристофелови симболи (друге врсте) за овај координатни систем су реалне функције $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ такве да важи

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=0}^{n-1} \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (0 \leq i, j \leq n-1).$$

Пошто парцијални изводи ∂_i и ∂_j комутирају из $(P4)$ следи симетрија $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Теорема 1.4. *За Леви-Чивита конексију Кристофелови симболи (друге врсте) се изражавају као*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} g^{km} \Big(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \Big),$$

где је (g_{ij}) метрички тензор.

Тада је за свако векторско поље $Y \in \mathfrak{X}M$ у карти x

$$\nabla_{\partial_i}\Big(\sum Y^j \partial_j\Big) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k Y^j\Big)\partial_k.$$

Користећи својство $(P1)$ добијамо

$$\nabla_{\sum X^i \partial_i}\Big(\sum Y^j \partial_j\Big) = \sum_{k,i=0}^{n-1} X^i\Big(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k Y^j\Big)\partial_k.$$

Користећи канонски изоморфизам диференцијалних форми и векторских поља, пишемо и $\nabla_X \theta = (\nabla_X Y)^*$ где је $X \in \mathfrak{X}M$, и $\theta = Y^* \in \mathfrak{X}M^*$.

Векторско поље X је паралелно ако су његови коваријантни изводи $\nabla_Y X$ једнаки нули за свако $Y \in \mathfrak{X}M$. Следеће две дефиниције проширује појам коваријантног диференцирања са скупа $\mathfrak{X}M$ на $\mathfrak{R}M$ и $\mathfrak{T}_s^r M$.

Дефиниција 1.26. Коваријантни диференцијал функције $f \in \mathfrak{R}M$ је $(X \in \mathfrak{X}M)$

$$\nabla f(X) = \nabla_X f = Xf = \mathrm{d}f(X).$$

Дефиниција 1.27. Коваријантни диференцијал тензора $T \in \mathfrak{T}_s^r M$ је $(r, s+1)$ тензор ∇T такав да

$$\nabla T(\theta^0, \dots, \theta^{r-1}, X_0, \dots, X_{s-1}, V) = \nabla_V T(\theta^0, \dots, \theta^{r-1}, X_0, \dots, X_{s-1})$$
$$= V\big(T(\theta^0, \dots, \theta^{r-1}, X_0, \dots, X_{s-1})\big) + \sum_{i=0}^{r-1} T(\theta^0, \dots \theta^{i-1}, \nabla_V \theta^i, \dots, \theta^{r-1}, X_0, \dots, X_{s-1})$$
$$- \sum_{j=0}^{s-1} T(\theta^0, \dots, \theta^{r-1}, X_0, \dots X_{j-1}, \nabla_V X_j, \dots, X_{s-1}),$$

за све $V, X_0, \dots, X_{s-1} \in \mathfrak{X}M$ и $\theta^0, \dots, \theta^{r-1} \in \mathfrak{X}M^*$

У специјалном случају $r = s = 0$ коваријантни диференцијал трензора типа $(0,0)$, тј. функције се поклапа са дефиницијом 1.26.

Као и за векторска поља, за тензорско поље T кажемо да је паралелно ако је његов коваријантни диференцијал једнак нули, тј. ако је $\nabla_X A = 0$ за свако $X \in \mathfrak{X}M$. Користећи Лајбницово правило добијамо да је метрички тензор g паралелан због аксиоме $(P5)$.

За $T \in \mathfrak{T}_s^r M$ компоненте од ∇T у односу на координатни систем означимо са $\nabla_k T^{i_0 \dots i_{r-1}}_{j_0 \dots j_{s-1}}$. За $(1,1)$ тензорско поље T важи следећа формула

$$\nabla_l T^i_j = \frac{\partial}{\partial x^l} A^i_j + \sum_m T^m_j \Gamma^i_{ml} - \sum_m T^i_m \Gamma^m_{jl}.$$

1.9 Кривински тензори

Лема 1.10. *Нека је M дата многострукост и ∇ Леви-Чивита повезаност на њој. Функција $R : \mathfrak{X}M^3 \to \mathfrak{X}M$ дефинисана са*

$$R(X,Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

је $(1,3)$ тензорско поље на M које се зове Риманов тензор кривине многострукости M.

Ако фиксирамо тачку $p \in M$ добијамо оператор кривине, који за фиксирано $X, Y \in T_pM$ пресликава $Z \mapsto R(X,Y)Z$. Најважније особине овог оператора су дате у следећој теореми

Теорема 1.5. *Нека је $X, Y, Z, V, W \in T_pM$. Тада важи:*

1. $R(X,Y) = -R(Y,X)$,
2. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$,
3. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(први Бјанкијев идентитет),*
4. $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$,
5. $(\nabla_Z R)(X,Y) + (\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) = 0$ *(други Бјанкијев идентитет).*

Лема 1.11. *Ако је x карта на M онда се компоненте тензора кривине изражавају као*

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{lj} - \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{kj} + \sum_m \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{lj} - \sum_m \Gamma^i_{lm}\Gamma^m_{kj}.$$

1.10 Подизање и спуштање индекса

Нека је $T \in \mathfrak{T}^r_s M$, $0 \le a \le r-1$ и $0 \le b \le s-1$ цели бројеви. Дефинишемо пресликавање $L^a_b : \mathfrak{T}^r_s M \to \mathfrak{T}^{r-1}_{s+1} M$ тако да је

$$\begin{aligned}
&(L^a_b T)(\theta^0, \dots, \theta^{r-2}, X_0, \dots, X_s) \\
&= T(\theta^0, \dots, X^*_b, \dots, \theta^{r-2}, X_0, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_s),
\end{aligned}$$

На десној страни једнакости избачено је b-то векторско поље, а убацили смо њему метрички еквивалентну диференцијалну $1-$ форму на a-то место међу диференцијалним формама.

Као пример, узмимо тензор кривине R који је типа $(1,3)$. Тада је L_1^1R тензорско поље типа $(0,4)$ такво да је $(L_1^1R)(X,Y,Z,W) = R(X^*,Y,Z,W)$. У карти x, диференцијална форма дуална са ∂_i је $\sum_{j=0}^{n-1} g_{ij}\mathrm{d}x^j$. Према томе важи

$$R_{ijkl} = (L_1^1R)(\partial_i,\partial_j,\partial_k,\partial_l) = R\left(\sum_{m=0}^{n-1} g_{im}\mathrm{d}x^m,\partial_j,\partial_k,\partial_l\right) = \sum_{m=0}^{n-1} g_{im}R^m_{jkl}.$$

Пресликавање L_b^a се назива спуштање индекса. Добро је дефинисана и инверзно пресликавање U_b^a која избацује a-ту диференцијалну $1-$ форму и убацује њој метрички еквивалентно векторско поље на b-то место између векторских поља. Пресликавање U_b^a назива се подизање индекса. На пример, ако пођемо од тензора кривине типа $(1,3)$ и применимо U_1^2 добијамо тензор типа $(2,2)$ који је дефинисан са

$$(U_1^2R)(\mathrm{d}x^i,\mathrm{d}x^j,\partial_k,\partial_l) = R(\mathrm{d}x^i,(\mathrm{d}x^j)^*,\partial_k,\partial_l)$$

У карти, су његове координате дате са

$$(U_1^2R)^{ij}_{kl} = \sum_{m=0}^{n-1} g^{jm}R^i_{mkl}.$$

За тензоре који настају спуштањем и подизањем индекса кажемо да су метрички еквивалентни полазном тензору и често користимо исту ознаку (са промењеним распоредом индекса).

Уводимо трећу операцију на тензорима, метричку контракцију $C_{ab} : \mathfrak{T}^r_sM \to \mathfrak{T}^r_{s-2}M$ по пару коваријантних индекса a,b. У карти је контракција C_{ab} дата са

$$(C_{ab}A)^{i_0\dots i_{r-1}}_{j_0\dots j_{s-3}} = \sum_{p,q} g^{pq}A^{i_0\dots i_{r-1}}_{\underset{a\text{-ти индекс}}{\underset{\downarrow}{j_0\dots p}}\ \dots\ \underset{b\text{-ти индекс}}{\underset{\downarrow}{q\dots j_{s-3}}}}.$$

Аналогно, може се дефинисати контракција по пару контраваријантних индекса a,b $C^{ab} : \mathfrak{T}^r_sM \to \mathfrak{T}^{r-2}_sM$, заменом g^{pq} са g_{pq}. Такође, аналогно се уводи и контракција по пару индекса различитог типа $C^a_b : \mathfrak{T}^r_sM \to \mathfrak{T}^{r-1}_{s-1}M$, заменом g^{pq} са $g^p_q = \delta^p_q$.

Лема 1.12. *Коваријантни изводи (у односу на Леви-Чивита повезаност)* ∇_X *и коваријантни диференцијал* ∇ *комутирају са спуштањем, подизањем ин-*

декса и контракцијама.

1.11 Ричијева и скаларна кривина

Ричијев тензор дефинишемо као контракцију C_3^1 тензора кривине R:

Дефиниција 1.28. Нека је R Риманов тензор кривине на M. Ричијев тензор кривине Ric на M је контракција $C_3^1(R) \in \mathfrak{T}_2^0 M$. У произвољној карти на M $\mathrm{Ric}_{ij} = \sum_{m=0}^{n-1} R_{ijm}^m$.

Често се у литератури за Ричијев тензор користи иста ознака R као и за тензор кривине. Због симетрија тензора кривине R једине ненула контракције су $\pm\,\mathrm{Ric}$. Приметимо да важи и $\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Tr}\{V \mapsto R_{XV}Y\}$.

Лема 1.13. *Ричијев тензор кривине* Ric *је симетричан.*

За M кажемо да је Ричи равна ако је њен Ричијев тензор једнак нули. Равна многострукост је Ричи равна, док обрнуто не важи.

Дефиниција 1.29. Скаларна кривина R на M је контракција $C^{12}(\mathrm{Ric}) \in \mathfrak{R}M$ њеног Ричијевог тензора.

У координатама имамо

$$R = \sum g^{ij} R_{ij} = \sum g^{ij} R_{ijk}^k.$$

Уводимо и Ајнштајнов тензор који има велику примену у теорији гравитације.

Дефиниција 1.30. Ајнштајнов тензор на многострукости M је $G = \mathrm{Ric} - \frac{1}{2} Rg$.

На крају овог одељка наводимо још неке особине кривинских тензора које ће бити потребне касније.

Лема 1.14. *Нека је x произвољна карта на многострукости M. Тада је ($X \in \mathfrak{X}M$, $S \in \mathfrak{R}M$)*

1. $\nabla^i R_{ij} = \nabla^j R$,
2. $[\nabla_i, \nabla_j] X_k = -R_{kij}^l X_l$,
3. $[\Box, \nabla_i] S = R_{ij} \nabla^j S$,

где је $\nabla_i = \nabla_{\partial_i}$ и $\Box = \nabla_i \nabla^i$.

1.12 Интеграција на многострукостима

Из Линеарне алгебре знамо да две базе $e_0, ..., e_{n-1}$ и $e'_0, ..., e'_{n-1}$ векторског простора V имају исту оријентацију ако за матрицу преласка са једне на другу базу A важи $\det A > 0$. Оне имају супротну оријентацију ако је $\det A < 0$. Овим је дефисана једна релација еквиваленције на скупу свих база простора V. Постоје тачно две класе еквиваленције, које се зову оријентације од V. Оријентацију која садржи $e_0, ..., e_{n-1}$ означимо са $[e_0, ..., e_{n-1}]$.

Нека је (U, x) карта на M, посматрајмо пресликавање λ_x које свакој тачки многострукости p додељује једну оријентацију тангентног простора T_pM

$$\lambda_x(p) = [\partial_0|_p, ..., \partial_{n-1}|_p]$$

Оријентација λ многострукости M придружује свакој тачки $p \in M$ оријентацију $\lambda(p)$ од T_pM и за свако $p \in M$ постоји околина U тачке p и карта (U, x) таква да је $\lambda|_U = \lambda_x$. Многострукост је оријентабилна ако постоји оријентација од M. На пример, $\mathbb{R}^n$ је оријентабилан јер се у свакој тачки може изабрати канонска база.

Кажемо да је база $v_0, ..., v_{n-1}$ простора T_pM позитивно оријентисана ако важи $[v_0, ..., v_{n-1}] = \lambda(p)$. Слично, за карту (U, x) кажемо да је позитивно оријентисана ако важи $\lambda_x = \lambda$ на U.

Ако су (U, x) и (V, y) две карте на M $(U \cap V \neq \emptyset)$, дефинишимо

$$J(x, y) = \det(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}).$$

Тада карте (U, x) и (V, y) одређују исту оријентацију акко $J(x, y) > 0$.

Кажемо да је фамилија $\{f_\alpha\}$ диференцијабилних функција $f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ разбијање јединице ако је:

1. За свако α, $f_\alpha \geq 0$ и постоји карта (U, x) на M, таква да је носач од f_α подскуп од U

2. За сваку тачку $p \in M$ постоји околина U таква да је $U \cap V_\alpha$ непразан за коначно много вредности индекса α и $M \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$

3. $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$, за свако $p \in M$ (у овој суми само коначно много сабирака је различито од нуле, па нема потребе испитивати конвергенцију).

Каже се да је разбијање јединице $\{f_\alpha\}$ потчињена покривачу $\{V_\alpha\}$.

Дефинисаћемо интеграл диференцијалне форме (са компактним носачем) на оријентабилној могострукости. Нека је $n = \dim M$ и нека је $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ један атлас на M.

Дефиниција 1.31. Интеграл форме ω по многострукости M је

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega = \sum_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} (x_\alpha^{-1})^* \rho_\alpha \omega,$$

где $\{\rho_\alpha\}$ представља разбијање јединице потчињено покривачу $\{U_\alpha\}$.

Може се показати да ова дефиниција не зависи од избора покривача $\{U_\alpha\}$ и разбијања јединице $\{\rho_\alpha\}$.

Следећи појам који желимо да дефишемо је многострукост са границом (крајем). Обележимо са $\mathbb{H}^n$ "горњи полупростор" у $\mathbb{R}^n$, тј. $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$.

Дефиниција 1.32. Скуп M се зове глатка многострукост са границом (крајем) ако постоји атлас $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$, $x_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$, где је $V_\alpha \subset \mathbb{H}^n$ отворен скуп тако да су функције преласка

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

глатке. За тачку $p \in M$ кажемо да је унутрашња тачка ако је $x_\alpha^n(p) > 0$, односно гранична ако је $x_\alpha^n(p) = 0$.

Дефиниција 1.33. Скуп граничних тачака у ознаци ∂M се зове граница (крај) многострукости.

Теорема 1.6 (Стокс). *Ако је ω $(n-1)$-форма са компактним носачем на оријентисаној многострукости M димензије n и ако је граница ∂M снабдевена индукованом оријентацијом, онда важи*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Глава 2

Ајнштајнова теорија гравитације

Савремена теорија гравитације је Ајнштајнова општа теорија релативности, формулисана крајем 1915. године. То је релативистичка теорија заснована на два принципа: принцип опште релативности и принцип еквиваленције. Принцип опште релативности гласи: сваки физички закон има исту форму у свим координатним системима. Другим речима, основни физички закон је инваријантан у односу на произвољне диферецијабилне координатне трансформације, па се тиме може записати у коваријантном облику у односу на произвољне координате. Други принцип је принцип еквивалентности који захтева да су инерциона и гравитациона маса свих тела једнаке. Овај принцип потиче од Галилеја, који је тврдио да сва тела у вакууму падају истом брзином (ако су почетни услови исти). Принцип еквивалентности је доста добро експериментално потврђен. Математичким језиком, принцип еквивалентности каже да се увек може изабрати координатни систем који је локално простор Минковског. Ајнштајн је, са ова два принципа, кретање у гравитационом пољу описао кретањем по псеудо-Римановој многострукости.

Општа теорија релативности се у граничном случају нерелативистичких брзина, слабих и споро променљивих гравитационих поља своди на Њутнову теорију.

Ајнштајнова теорија гравитације изводи се из Ајнштајн-Хилбертовог дејства

$$S = \int \frac{c^4}{16\pi G} (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x + \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} \mathrm{d}^4 x, \tag{2.1}$$

где је R скаларна кривина, Λ космолошка константа, G Њутнова гравитациона константа, g детерминанта метричког тензора (тј. тензора гравитационог поља) и $\mathcal{L}_m$ Лагранжијан материје. Једначине кретања добијају се варијацијом по метричком тензору ($g^{\mu\nu}$).

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{2.2}$$

У даљем излагању користићемо природни систем јединица у којем је брзина светлости $c = 1$.

На левој страни једначине (2.2) је Ајнштајнов тензор који описује геометрију псеудо-Римановe многострукости M. Десна страна садржи тензор енергије-импулса $T_{\mu\nu}$, који описује расподелу материје, и космолошку константу Λ која представља густину енергије вакуума.

На великим космичким растојањима (већим од $100Mpc$, Mpc означава мега-парсек и $1Mpc \approx 3.08\ 10^{22}m$) васиона је хомогена и изотропна. Хомогеност значи да су све физичке особине исте у свим тачкама, а изотропност захтева да физичке особине не зависе од правца у коме се посматра. Изотропност у свакој тачки повлачи хомогеност, али обратно не важи.

За псеудо-Риманову могострукост M кажемо да је хомогена ако постоји глатко и транзитивно дејство групе G на M. Дејство групе G на M је пресликавање $G \times M \to M$, $(g, p) \to g \cdot p$ такво да важи

- $g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p, \quad g, h \in G, \, p \in M$ и
- $e \cdot p = p$, e је неутрал групе G и $p \in M$.

Дејство је транзитивно ако за сваке две тачке $p, q \in M$ постоји $g \in G$ тако да је $g \cdot p = q$. Нека је $G_p = \{g \in G | g \cdot p = p\}$. Многострукост M је изотропна ако постоји транзитивно дејство групе G_p на скупу једничних вектора у T_pM.

Постоје тачно три типа хомогених и изотропних простора димензије 3 који су просто повезани:

- сфера $\mathbb{S}^3$ (константне позитивне кривине),
- раван простор $\mathbb{R}^3$ (кривина је једнака нули),
- хиперболички простор $\mathbb{H}^3$ (константне негативне кривине).

Растојање у овим просторима се описује Фридман-Робертсон-Вокеровом метриком (FRW)

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2 \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \mathrm{d}\varphi^2 \right), \tag{2.3}$$

где узимамо јединице тако да је брзина светлости $c = 1$, $a(t)$ је скалирајући фактор који описује еволуцију васионе и параметар k описује кривину простора.

За $k = +1$ добијамо затворен простор константне кривине (сферу), за $k = 0$ добија се раван простор и за $k = -1$ добија се хиперболички простор константне негативне кривине.

У специјалном случају $k = 0$ и $a(t) = \mathrm{const}$ добијамо метрику простора Минковског, која се у декартовим координатама записује

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{2.4}$$

У случају $k = 0$ и $a(t) = e^{\lambda t}$ добијамо де Ситеров простор.
Материја се, у космолошким разматрањима, углавном описује идеалним флуидом. Тензор енергије-импулса за идеални флуид се задаје са

$$T = \mathrm{diag}(-\rho g_{00}, g_{11}p, g_{22}p, g_{33}p), \tag{2.5}$$

где су ρ и p респективно густина енергије и притисак. Приметимо да је траг тензора енергије-импулса $T = T^{\mu}_{\mu} = -\rho + 3p$.

Пре разматрања Ајнштајнових једначина, из нулте компоненте једначине одржања добијамо

$$0 = \nabla_\mu T^{\mu}_{0} = -\dot{\rho} - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \tag{2.6}$$

Сада бирамо једначину стања, која задаје везу између густине ρ и притиска p. У космологији се за идеални флуид узима једначина

$$p = w\rho, \tag{2.7}$$

где је w константа. Једначина (2.6) постаје

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}. \tag{2.8}$$

Интеграцијом ове једначине добијамо

$$\rho = Ca^{-3(1+w)}. \tag{2.9}$$

Два најпознатија примера материје у космологији су космичка прашина и радијација. Космичка прашина је нерелативистичка материја, без судара, за коју је $w = 0$ (примери су звезде и галаксије између којих је притисак занемарљив у односу на густину енергије). У овом случају густина енергије опада као $\rho = Ca^{-3}$, што се тумачи тако да густина опада како се простор шири.

Радијација описује електромагнетно зрачење или масивне честице које се крећу брзинама блиским брзини светлости. Тензор енергије импулса се за радијацију изражава као

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(F^{\mu\lambda}F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\kappa}F_{\lambda\kappa}). \tag{2.10}$$

Када ову једначину изједначимо са једначином (2.5) добијамо једначину стања

$$\rho = \frac{1}{3}p. \tag{2.11}$$

Густина енергије у овом моделу опада као $\rho = Ca^{-4}$. Густина фотона опада као a^{-3}, као и у случају космичке прашине, али и сами фотони губе енергију због црвеног помака. У овом тренутку однос густине материје и густине радијације је $\frac{\rho_m}{\rho_r} \approx 10^{-6}$. У почетку када је космос био знатно мањих димензија густина радијације је била доминантна.

Осим овога може се посматрати још један облик енергије, а то је енергија вакуума. Математички, то је еквивалентно увођењу космолошке константе Λ. Из Ајнштајнових једначина (2.2) видимо да је тензор енергије-импулса за вакуум

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}, \tag{2.12}$$

а одавде одмах следи да је једначина стања $\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G}$. Густина енергије је константа и не зависи од скалирајућег фактора a, што је и очекивано. Ако се васиона шири, за велике вредности космичког времена, густина материје и радијације се смањују, па енергија вакуума постаје доминантна.

У наредној леми дајемо и Кристофелове симболе (друге врсте) и компоненте кривинских тензора за FRW метрику.

Лема 2.1. *Постоји 13 (до на симетрију) линеарно независних Кристофелових симбола за FRW метрику дату формулом*

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{01} = \frac{\dot{a}}{a}, && \Gamma^2_{02} = \frac{\dot{a}}{a}, && \Gamma^3_{03} = \frac{\dot{a}}{a},\\
&\Gamma^0_{11} = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}, && \Gamma^1_{11} = \frac{kr}{1-kr^2}, && \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r},\\
&\Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, && && \\
&\Gamma^0_{22} = r^2a\dot{a}, && \Gamma^1_{22} = r(kr^2-1), && \Gamma^3_{23} = \cot\theta,\\
&\Gamma^0_{33} = r^2a\dot{a}\sin^2\theta, && \Gamma^1_{33} = r(kr^2-1)\sin^2\theta, && \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Тензор кривине FRW метрике има шест његових генеричких (до на симетрије) *компоненти различитих од нуле:*

$$\begin{aligned} R_{0110} &= \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2}, & R_{1221} &= -\frac{r^2a^2(\dot{a}^2+k)}{1-kr^2}, \\ R_{0220} &= r^2a\ddot{a}, & R_{1331} &= -\frac{r^2a^2\sin^2\theta(\dot{a}^2+k)}{1-kr^2}, \\ R_{0330} &= r^2a\ddot{a}\sin^2\theta, & R_{2332} &= -r^4a^2\sin^2\theta(\dot{a}^2+k). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ричијев тензор је дијагоналан, а дијагоналне компоненте су:

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_{11} = Ug_{11}, \quad R_{22} = Ug_{22}, \quad R_{33} = Ug_{33}, \tag{2.16}$$

где је $U = \frac{a\ddot{a}+2(\dot{a}^2+k)}{a^2}$. *Ајнштајнов тензор је такође дијагоналан и његове ненула компоненте су:*

$$G_{00} = \frac{3(\dot{a}^2+k)}{a^2}, \quad G_{11} = Vg_{11}, \quad G_{22} = Vg_{22}, \quad G_{33} = Vg_{33}, \tag{2.17}$$

где је $V = -\frac{2a\ddot{a}+\dot{a}^2+k}{a^2}$.

Скаларна кривина је

$$R = \frac{6(a\ddot{a}+\dot{a}^2+k)}{a^2}. \tag{2.18}$$

Посматрајмо Ајнштајнове једначине (2.2). Заменом метрике (2.3) добијамо

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho+3p) + \frac{\Lambda}{3}, \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Једначине (2.19) се називају Фридманове једначине и дефинишу Фридман-Робертсон-Вокерове васионе.

Постоји већи број космолошких параметара, који описују понашање васионе. Брзина ширења је описана Хабловим параметром

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{2.20}$$

Вредност Хабловог параметра у садашњем тренутку је Хаблова константа, чија вредност је још увек предмет дискусије. По најновијим мерењима (мисија Планк) њена вредност је око $67\frac{km}{s\,Mpc}$. Други параметар је параметар успоравања $q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}$, који мери промену брзине ширења. Такође, је интересантан и параметар густине

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_c}, \text{ где је } \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{2.21}$$

Из Фридманових једначина следи

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}. \tag{2.22}$$

Знак константе k је одређен тиме да ли је параметар Ω, већи или мањи од један, односно да ли је густина ρ већа или мања од критичне вредности ρ_c. На тај начин параметар Ω нам говори која од три Фридман-Робертсон-Вокерове геометрије описује васиону.

- $\Omega < 1$, $\rho < \rho_c$, $k = -1$,
- $\Omega = 1$, $\rho = \rho_c$, $k = 0$,
- $\Omega > 1$, $\rho > \rho_c$, $k = +1$.

У данашње време васиона изгледа практично равна, тј. $k = 0$.

Општа теорија релативности је у почетку потврђена у три класична теста:

1. Прецесија перихела Меркура,
2. Скретање светлосних зрака при проласку близу Сунца,
3. Гравитациони црвени помак спектралних линија.

Касније су успешно изведена још два теста:

4. Мерење временског закашњења радарског еха који долази са Сунца,
5. Прецесија жироскопа у Земљиној орбити.

Већ тридесетих година прошлог века Фриц Цвики је приметио да се галаксије у оквиру јата галаксија крећу брже него што предвиђа Њутнова теорија гравитације и Општа теорија релативности и изнео претпоставку да је потребно додати неку материју која својим гравитационим деловањем одржава јато на окупу. До сличног закључка дошла је и Вера Рубин крајем 1960-их посматрајући орбиталне брзине звезда у спиралним галаксијама. Овај вид материје је назван тамна материја и недавно је процењено да 27% материје у васиони представља тамна материја. За разлику од обичне материје тамна материја интереагује гравитационо, али не и електромагнетно. За сада, не постоји експериментално детектована елементарна честица која одговара тамној материји.

Убрзано ширење васионе је откривено 1998. године, проучавањем спектара супернових типа SN Ia. Из Фридманових једначина са обичом и тамном материјом не следи убрзано ширење васионе, па се мора додати нови вид материје који има негативан притисак и делује одбојно. Овај вид материје је такође хомогено распоређен у васиони. Тај нови вид материје назива се тамна енергија и на њу отпада 68% масе/енергије целокупне васионе.

Тамна материја и тамна енергија нису експериментално детектоване и њихова природа је још увек отворено питање у космологији и предмет актуелних истраживања. Осим тога Општа теорија релативности садржи сингуларитет (Велики прасак) у самом почетку и потребно ју је модификовати да би описали понашање на самом почетку развоја васионе.

Глава 3

Нелокална модификација Ајнштајнове теорије гравитације

Ајнштајнова теорија гравитације, као што је већ речено, не даје добро (тј. једноставно и општеприхваћено) објашњење за понашање звезда у спиралним галаксијама и галаксија у јатима галаксија. Овај проблем се превазилази увођењем додатне материје (тамна материја). Слично томе, убрзано ширење васионе захтева увођење тамне енергије. Заједно тамна материја и тамна енергија представљају око 95% материје у васиони. Такође сингуларитет на самом почетку васионе, када материја има бесконачну густину захтева неку модификацију Опште теорије релативности.

Други приступ, уместо додавања тамне материје и тамне енергије, је модификација Ајнштајн-Хилбертовог дејства и дефинисање теоријске генерализације Опште теорије релативности, која треба да буде потврђена у Сунчевом систему и да реши (бар неке) отворене космолошке проблеме са или без тамне материје и тамне енергије. Математички оквир за ове теорије је псеудо-Риманова геометрија. У дефинисању модификације полази се од Ајнштајн-Хилбертовог дејства

$$S = \int \frac{R}{16\pi G}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x + \int \mathcal{L}_m\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x, \tag{3.1}$$

и његовом модификацијом се дефинише нова теорија. Слобода избора при овој модификацији је практично неограничена. Издвојићемо два врло значајна правца.

Први је, $f(R)$ гравитација, која у Ајнштајн-Хилбертовом дејству замењује скаларну кривину R са њеном функцијом $f(R)$ и полази од дејства

$$S = \int \frac{f(R)}{16\pi G}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x + \int \mathcal{L}_m\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x. \tag{3.2}$$

Специјално, за $f(R) = R$ модификација представља саму општу теорију релативности. Варијацијом дејства (3.2) по метричком тензору $(g^{\mu\nu})$ добијамо једначине кретања

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)f'(R) = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{3.3}$$

где знак $'$ означава диференцирање по R, а $\Box = \nabla_\mu\nabla^\mu$ је Даламберов оператор.

Један од првих модела који је разматран у овој класи је $f(R) = R + \frac{\mu}{R}$, где је $\mu \sim H_0^{-4}$. Овај модел је убрзо напуштен. Друга класа модела је $f(R) = R + \alpha R^2$. Чланови овог типа се могу наћи и у инфлационим моделима ране васионе. Детаљи се могу наћи у раду [59], као и радовима који су тамо цитирани.

Нелокална модификација подразумева, да се у модификованом дејству осим скаларне кривине појављује и Даламберов оператор $\Box = \nabla_\mu\nabla^\mu$ у облику погодно изабране функције $f(R, \Box)$. Интересантан је следећи модел ([50]):

$$S = \int \left(\frac{1}{2}R + R\mathcal{F}_1(\Box)R + R_{\mu\nu}\mathcal{F}_2(\Box)R^{\mu\nu} + C_{\mu\nu\alpha\beta}\mathcal{F}_3(\Box)C^{\mu\nu\alpha\beta}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.4}$$

где су $\mathcal{F}_i(\Box)$ аналитичке функције Даламберовог оператора и $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ Вејлов тензор, тј.

$$C_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{2}\left(g_{\mu\alpha}R_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}R_{\nu\alpha} + R_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - R_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right) + \frac{R}{6}\left(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}\right). \tag{3.5}$$

У литератури се често разматрају и дејства која садрже члан облика $\Box^{-1}R$. На пример, у раду [40], се посматра дејство

$$S_1 = \int \frac{R}{16\pi G}\left(1 + f(\Box^{-1}R)\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.6}$$

а у раду [33] се разматра дејство

$$S_2 = \int \frac{R}{16\pi G}\left(1 - \frac{1}{6}m^2\Box^{-2}R\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{3.7}$$

У раду [48] се уместо Даламберовог оператора узима оператор $\triangle = \nabla_\mu Q^{\mu\nu}\nabla_\nu$, где је $Q^{\mu\nu}$ тензор који зависи од метрике $g_{\mu\nu}$ и дејство је у облику

$$S_3 = \int \frac{R}{2\kappa^2}\left(1 + f(\triangle^{-1}R)\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{3.8}$$

У овој дисертацији, даље ћемо детаљније разматрати једну класу нелокалних модела гравитације.

Нелокална модификација подразумева да се у Ајнштајн-Хилбертовом дејству скаларна кривина замени неком погодно изабраном функцијом $F(R, \Box)$ скаларне кривине R и Даламберовог оператора $\Box = \nabla_\mu \nabla^\mu$. Нелокалност подразумева да функција $F(R, \Box)$ садржи просторно-временске изводе до бесконачног реда. У овој глави посматрамо нелокалну модификацију Ајнштајнове теорије гравитације у којој је нелокални члан облика $\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)$. Разматрање се врши без материје да би се боље уочили ефекти нелокалности. Дејство је дато изразом

$$S = \int_M \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + \mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) \right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x, \tag{3.9}$$

где је Λ космолошка константа и $\mathcal{G}(R)$ и $\mathcal{H}(R)$ диференцијабилне функције скаларне кривине R, а $\mathcal{F}(\Box) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \Box^n$ аналитичка функција. Многострукост M је псеудо-Риманова могострукост сигнатуре $(1, 3) = (- + ++)$ са метриком $(g_{\mu\nu})$. Мотивација за избор овакве модификације потиче из теорије струна, где се појављују чланови оваквог облика. Са друге стране теорија која садржи само изводе коначног реда (бар 3) садржи и духове (духови представљају ситуацију у којој је кинетичка енергија негативна), па зато раматрамо изводе до бесконачног реда. Ови аспекти нелокалне модификације се могу наћи у [10].

3.1 Варијација кривинских тензора

На почетку доказујемо следећу техничку лему.

Лема 3.1. *На многострукости M важе следећи идентитети:*

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \tag{3.10}$$

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}, \tag{3.11}$$

$$\delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left(g_{\nu\alpha} \nabla_\mu \delta g^{\lambda\alpha} + g_{\mu\alpha} \nabla_\nu \delta g^{\lambda\alpha} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla^\lambda \delta g^{\alpha\beta} \right), \tag{3.12}$$

$$\delta R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \nabla_\beta \delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\alpha_{\mu\beta}, \tag{3.13}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}, \tag{3.14}$$

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - K_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \tag{3.15}$$

$$\delta \nabla_\mu \nabla_\nu \psi = \nabla_\mu \nabla_\nu \delta \psi - \nabla_\lambda \psi \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \tag{3.16}$$

где је $K_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \Box$.

Доказ. Детерминанта g се може изразити на следећи начин:

$$g_{\mu\nu}G^{(\alpha,\nu)} = g\delta^{\alpha}_{\mu}, \tag{3.17}$$

где је $G^{(\mu,\nu)}$ алгебарски кофактор елемента $g_{\mu\nu}$.
Одавде непосредно следи

$$g^{\mu\nu} = \frac{G^{(\mu,\nu)}}{g}. \tag{3.18}$$

Пошто $G^{\mu,\nu}$ не зависи од $g_{\mu\nu}$, из претходних једнакости следи први део једнакости (3.10)

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}. \tag{3.19}$$

Из тога што је $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = n$ и Лајбницовог правила следи $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ чиме је комплетиран доказ једнакости (3.10).
Да бисмо доказали једнакост (3.11) имамо следећи низ једнакости

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}. \tag{3.20}$$

Да бисмо доказали трећу формулу полазимо од

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\mu}g_{\kappa\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa}, \tag{3.21}$$

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta g^{\lambda\kappa}\left(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}\left(\partial_\mu \delta g_{\kappa\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \delta g_{\mu\nu}\right). \tag{3.22}$$

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta g^{\lambda\kappa}\left(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}\left(\partial_\mu \delta g_{\kappa\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa \delta g_{\mu\nu}\right) \tag{3.23}$$

$$= \frac{1}{2}\delta g^{\lambda\kappa}\left(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\mu\kappa} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}\left(\nabla_\mu \delta g_{\kappa\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\kappa} - \nabla_\kappa \delta g_{\mu\nu}\right)$$

$$+ g^{\lambda\kappa}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\delta g_{\kappa\alpha} \tag{3.24}$$

$$= \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}\left(\nabla_\mu \delta g_{\kappa\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\kappa} - \nabla_\kappa \delta g_{\mu\nu}\right). \tag{3.25}$$

Последња у овом низу једнакости следи из $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta}$. Коначно применом ове једнакости на преостале чланове добијамо једначину (3.12):

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}\left(\nabla_\mu(-g_{\kappa\alpha}g_{\beta\nu}\delta g^{\alpha\beta}) + \nabla_\nu(-g_{\mu\alpha}g_{\kappa\beta}\delta g^{\alpha\beta}) - \nabla_\kappa(-g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\delta g^{\alpha\beta})\right) \tag{3.26}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\delta^{\lambda}_{\alpha}g_{\beta\nu}\nabla_\mu\delta g^{\alpha\beta} + \delta^{\lambda}_{\beta}g_{\mu\alpha}\nabla_\nu\delta g^{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^{\lambda}\delta g^{\alpha\beta}\right) \tag{3.27}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(g_{\nu\alpha}\nabla_\mu\delta g^{\lambda\alpha} + g_{\mu\alpha}\nabla_\nu\delta g^{\lambda\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^{\lambda}\delta g^{\alpha\beta}\right). \tag{3.28}$$

Приметимо да је $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = -\frac{1}{2} g_{\lambda\alpha}\nabla_\mu \delta g^{\lambda\alpha}$.

$$
\begin{aligned}
\delta R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} &= \delta\left(\partial_\beta \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\right) \\
&= \partial_\beta \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} + \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} \\
&\quad - \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu}\delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}.
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

Приметимо такође да у последњој једнакости, чланови на непарним местима дају $\nabla_\beta \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$, а чланови на парним местима дају $-\nabla_\nu \delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$, па смо доказали једнакост (3.14). Једнакост (3.13) се добија из претходне контракцијом по α и β.

Да бисмо показали једначину (3.15) полазимо од $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. Применом оператора варијације δ добијамо

$$
\begin{aligned}
\delta R &= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \\
&= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\left(\nabla_\lambda \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right) \\
&= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(2g_{\nu\alpha}\nabla_\lambda\nabla_\mu \delta g^{\lambda\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\Box\delta g^{\alpha\beta} - g_{\lambda\alpha}\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g^{\lambda\alpha}\right) \\
&= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(2\delta^{\mu}_{\alpha}\nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g^{\lambda\alpha} - \delta^{\nu}_{\alpha}g_{\nu\beta}\Box\delta g^{\alpha\beta} - g_{\lambda\alpha}\Box\delta g^{\lambda\alpha}\right) \\
&= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(2\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}\Box\delta g^{\mu\nu}\right) \\
&= R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - K_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

Коначно, једначину (3.16) добијамо

$$
\begin{aligned}
\delta\nabla_\mu\nabla_\nu\psi &= \delta\left(\partial_\mu\nabla_\nu\psi - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\nabla_\lambda\psi\right) \\
&= \delta\left(\partial^2_{\mu\nu}\psi - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\partial_\lambda\psi\right) \\
&= \partial^2_{\mu\nu}\delta\psi - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\partial_\lambda\delta\psi - \partial_\lambda\psi\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \\
&= \nabla_\mu\nabla_\nu\delta\psi - \nabla_\lambda\psi\,\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}. \qquad \blacksquare
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

Лема 3.2. *За сваку скаларну функцију $\mathcal{H}(R)$ важи*

$$
\int_M \mathcal{H} g_{\mu\nu}(\Box\delta g^{\mu\nu})\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = \int_M g_{\mu\nu}(\Box\mathcal{H})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.32}
$$

$$
\int_M \mathcal{H}\nabla_\mu\nabla_\nu\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = \int_M \nabla_\mu\nabla_\nu\mathcal{H}\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.33}
$$

$$
\int_M \mathcal{H}K_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = \int_M K_{\mu\nu}\mathcal{H}\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{3.34}
$$

Доказ. Једначина (3.32) следи из Стоксове теореме, на следећи начин

$$\begin{aligned}
\int_M \mathcal{H} g_{\mu\nu} \Box \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x &= \int_M \mathcal{H} g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x \\
&= -\int_M \nabla_\alpha (\mathcal{H} g_{\mu\nu}) \nabla^\alpha \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x \\
&= \int_M g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla_\alpha \mathcal{H}\, \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x \\
&= \int_M g_{\mu\nu} \Box \mathcal{H}\, \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Да бисмо доказали једначину (3.33) посматрамо вектор $N^\mu = \mathcal{H} \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu \mathcal{H} \delta g^{\mu\nu}$. Дивергенција $\nabla_\mu N^\mu$ се трансформише као

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu N^\mu &= \nabla_\mu (\mathcal{H} \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu \mathcal{H} \delta g^{\mu\nu}) \\
&= \nabla_\mu \mathcal{H} \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} + \mathcal{H} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{H}\, \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\nu \mathcal{H} \nabla_\mu \delta g^{\mu\nu} \\
&= \mathcal{H} \nabla_\mu \nabla_\nu \delta g^{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{H}\, \delta g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Коначно, интеграцијом следи $\int_M \nabla_\mu N^\mu \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x = \int_{\partial M} N^\mu n_\mu \mathrm{d}\partial M$, где је n_μ јединична нормала хиперповрши ∂M. Како је рестрикција $N^\mu|_{\partial M}$ једнака нули, последњи интеграл се анулира, а тиме је и једначина (3.33) доказана.

Једначина (3.34) је директна последица (3.32) и (3.33). ■

Лема 3.3. *Нека су $\mathcal{H}(R)$ и $\mathcal{G}(R)$ скаларне функције. Тада за $n \in \mathbb{N}$ важи*

$$\begin{aligned}
\int_M \mathcal{H} \delta \Box^n \mathcal{G} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \int_M S_{\mu\nu}(\Box^l \mathcal{H}, \Box^{n-1-l} \mathcal{G}) \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x \\
+ \int_M \Box^n \mathcal{H}\, \delta \mathcal{G} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Доказ. Из дефиниције оператора $\Box$ следи

$$\begin{aligned}
I = \int_M \mathcal{H} \delta \Box^n \mathcal{G} \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x &= \int_M \mathcal{H} \delta (g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Box^{n-1} \mathcal{G}) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x \\
= \int_M \mathcal{H} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu\, \Box^{n-1} \mathcal{G} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta \nabla_\mu \nabla_\nu \Box^{n-1} \mathcal{G} \right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x \\
= \int_M \mathcal{H} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu\, \Box^{n-1} \mathcal{G} \delta g^{\mu\nu} + \Box \delta \Box^{n-1} \mathcal{G} - \nabla_\lambda \Box^{n-1} \mathcal{G} g^{\mu\nu} \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4x.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Са друге стране, из Леме 3.2 добијамо

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(g_{\nu\alpha}\nabla_{\mu}\delta g^{\lambda\alpha} + g_{\mu\alpha}\nabla_{\nu}\delta g^{\lambda\alpha} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^{\lambda}\delta g^{\alpha\beta}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\delta^{\mu}_{\alpha}\nabla_{\mu}\delta g^{\lambda\alpha} + \delta^{\nu}_{\alpha}\nabla_{\nu}\delta g^{\lambda\alpha} - \delta^{\nu}_{\alpha}g_{\nu\beta}\nabla^{\lambda}\delta g^{\alpha\beta}\right)\\ &= -\frac{1}{2}(2\nabla_{\mu}\delta g^{\lambda\mu} - g_{\mu\nu}\nabla^{\lambda}\delta g^{\mu\nu}).\end{aligned} \tag{3.39}$$

Заменом овог израза у једначину (3.38) и применом Стоксове теореме добија се

$$\begin{aligned}I =& \int_M \mathcal{H}\Big(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Box^{n-1}\mathcal{G}\delta g^{\mu\nu} + \Box\delta\Box^{n-1}\mathcal{G}\\ &+\frac{1}{2}\nabla_{\lambda}\Box^{n-1}\mathcal{G}(2\nabla_{\mu}\delta g^{\lambda\mu} - g_{\mu\nu}\nabla^{\lambda}\delta g^{\mu\nu})\Big)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x\\ &= \int_M \mathcal{H}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Box^{n-1}\mathcal{G}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x + \int_M \mathcal{H}\,\Box\delta\Box^{n-1}\mathcal{G}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x\\ &- \int_M \nabla_{\mu}(\mathcal{H}\nabla_{\lambda}\Box^{n-1}\mathcal{G})\delta g^{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x\\ &-\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\nabla^{\lambda}(\mathcal{H}\nabla_{\lambda}\Box^{n-1}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x\\ &= \int_M \mathcal{H}\,\Box\delta\Box^{n-1}\mathcal{G}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x - \int_M \nabla_{\mu}\mathcal{H}\nabla_{\nu}\Box^{n-1}\mathcal{G}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x\\ &-\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}(\nabla^{\lambda}\mathcal{H}\nabla_{\lambda}\Box^{n-1}\mathcal{G} + \mathcal{H}\Box\Box^{n-1}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x\\ &= \int_M \mathcal{H}\,\Box\delta\Box^{n-1}\mathcal{G}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x + \frac{1}{2}\int_M S_{\mu\nu}(\mathcal{H},\Box^{n-1}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x.\end{aligned} \tag{3.40}$$

Парцијалном интеграцијом у првом интегралу из претходне формуле добија се

$$I = \int_M \Box\mathcal{H}\;\delta\Box^{n-1}\mathcal{G}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x + \frac{1}{2}\int_M S_{\mu\nu}(\mathcal{H},\Box^{n-1}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{3.41}$$

Истим поступком полазећи од првог члана у последњој формули добијамо

$$I = \int_M \left(\Box^2\mathcal{H}\;\delta\Box^{n-2}\mathcal{G} + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{1} S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H},\Box^{n-1-l}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.42}$$

а после још $n-2$ корака добијамо

$$I = \int_M \left(\Box^n\mathcal{H}\;\delta\mathcal{G} + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1} S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H},\Box^{n-1-l}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{3.43}$$

■

Теорема 3.1. *За сваке две скаларне функције* $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{H}$ *важи*

$$\int_M \mathcal{H}\delta(\sqrt{-g})\,\mathrm{d}^4x = -\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\mathcal{H}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.44}$$

$$\int_M \mathcal{H}\delta R\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = \int_M (R_{\mu\nu}\mathcal{H} - K_{\mu\nu}\mathcal{H})\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}\int_M \mathcal{H}\delta(\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G})\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = &\int_M (R_{\mu\nu} - K_{\mu\nu})\,(\mathcal{G}'\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H})\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H}, \Box^{n-1-l}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x,\end{aligned} \tag{3.46}$$

где је $S_{\mu\nu}(A,B) = g_{\mu\nu}\nabla^\alpha A\nabla_\alpha B + g_{\mu\nu}A\Box B - 2\nabla_\mu A\nabla_\nu B$.

Доказ. Једначина (3.44) је директна последица једначине (3.11).
Из Леме 3.1 и Леме 3.2 следи

$$\begin{aligned}\int_M \mathcal{H}\delta R\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x &= \int_M (R_{\mu\nu}\mathcal{H}\delta g^{\mu\nu} - \mathcal{H}K_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\ &= \int_M (R_{\mu\nu}\mathcal{H} - K_{\mu\nu}\mathcal{H})\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Да бисмо доказали (3.46) уведимо следеће интеграле

$$J_n = \int_M \mathcal{H}\delta(\Box^n\mathcal{G})\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{3.48}$$

Тада је

$$\int_M \mathcal{H}\delta(\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G})\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n J_n. \tag{3.49}$$

На интеграл J_0 може се применти (3.45)

$$J_0 = \int_M (R_{\mu\nu}\mathcal{G}'\mathcal{H} - K_{\mu\nu}\mathcal{G}'\mathcal{H})\,\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.50}$$

а за $n > 0$ интеграл J_n се према Леми 3.3 изражава као

$$J_n = \int_M \Box^n\mathcal{H}\delta\mathcal{G}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H}, \Box^{n-1-l}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\,\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{3.51}$$

Применом једначине (3.45) на први интеграл у последњој формули добијамо

$$\begin{aligned} J_n = &\int_M \left(R_{\mu\nu}\mathcal{G}'\Box^n\mathcal{H} - K_{\mu\nu}(\mathcal{G}'\Box^n\mathcal{H})\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H}, \Box^{n-1-l}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\,\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Сумирањем по n добија се

$$\begin{aligned} I &= \int_M \mathcal{H}\delta(\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G})\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n J_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int_M \left(R_{\mu\nu}\mathcal{G}'\Box^n\mathcal{H} - K_{\mu\nu}(\mathcal{G}'\Box^n\mathcal{H})\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1} f_n \int_M S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H}, \Box^{n-1-l}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\,\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\ &= \int_M \left(R_{\mu\nu}\mathcal{G}'\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H} - K_{\mu\nu}(\mathcal{G}'\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H})\right)\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1} f_n \int_M S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H}, \Box^{n-1-l}\mathcal{G})\delta g^{\mu\nu}\,\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \qquad \blacksquare \end{aligned} \tag{3.53}$$

3.2 Једначине кретања

Посматрајмо дејство (3.9). Да бисмо израчунали варијацију δS уводимо помоћна дејства

$$S_0 = \int_M \frac{R - 2\Lambda}{16\pi G}\,\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x, \tag{3.54}$$

$$S_1 = \int_M \mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\,\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{3.55}$$

Дејство S_0 је Ајнштајн-Хилбертово дејство без материје и његова варијација је

$$\delta S_0 = \int_M \left(G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu}\,\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{3.56}$$

Лема 3.4. *Варијација дејства S_1 је*

$$
\begin{aligned}
\delta S_1 = &-\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\delta g^{\mu\nu}\ \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x \\
&+\int_M (R_{\mu\nu}W - K_{\mu\nu}W)\,\delta g^{\mu\nu}\ \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x \\
&+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H}(R),\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R))\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x,
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

где је $W = \mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + \mathcal{G}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R)$.

Доказ. Варијација δS_1 се изражава као

$$
\begin{aligned}
\delta S_1 = \int_M \Big(&\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\delta(\sqrt{-g}) + \delta\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\ \sqrt{-g} \\
&+ \mathcal{H}(R)\delta(\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R))\ \sqrt{-g}\Big)\mathrm{d}^4x.
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Сви сабирци из претходне формуле добијају се применом Теореме 3.1. Из једначине (3.44) следи

$$
\int_M \mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\delta(\sqrt{-g})\ \mathrm{d}^4x = -\frac{1}{2}\int_M g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\ \delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x.
\tag{3.59}
$$

Такође, из једначине (3.45) добијамо

$$
\begin{aligned}
&\int_M \delta(\mathcal{H}(R))\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\ \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x = \int_M \mathcal{H}'(R)\delta R\ \mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\ \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x. \\
&= \int_M R_{\mu\nu}\mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) - K_{\mu\nu}\left(\mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\right)\ \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

На крају, једначина (3.46) нам даје

$$
\begin{aligned}
&\int_M \mathcal{H}(R)\delta(\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R))\ \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x = \\
&\quad\int_M \Big(R_{\mu\nu}\mathcal{G}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R) - K_{\mu\nu}\left(\mathcal{G}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R)\right)\Big)\ \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x \\
&\quad+\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sum_{l=0}^{n-1}\int_M S_{\mu\nu}\left(\Box^l\mathcal{H}(R),\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R)\right)\ \sqrt{-g}\ \mathrm{d}^4x.
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

Сабирањем једначина (3.59), (3.60) и (3.61) се добија тврђење леме. ■

.

Теорема 3.2. *Варијација дејства* (3.9) *је једнака нули акко*

$$\frac{G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}}{16\pi G}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)+(R_{\mu\nu}W-K_{\mu\nu}W)+\frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}=0, \tag{3.62}$$

где је

$$W=\mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)+\mathcal{G}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R), \tag{3.63}$$

$$\Omega_{\mu\nu}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sum_{l=0}^{n-1}S_{\mu\nu}\left(\Box^l\mathcal{H}(R),\Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R)\right). \tag{3.64}$$

Доказ. Пошто је $\delta S=\frac{1}{16\pi G}\delta S_0+\delta S_1$ теорема је директна последица једначине (3.56) и леме 3.4. ∎

Једначине кретања (3.62) остају непромењене ако функције $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ замене места у дејству (3.9).

Лема 3.5. *Посматрајмо дејства* S *и* $S'=\int_M\left(\frac{R-2\Lambda}{16\pi G}+\mathcal{G}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R)\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x$, *које настаје од дејства* S *када функције* $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{H}$ *замене места. Одговарајуће једначине кретања су еквивалентне.*

Доказ. Приметимо да је израз W симетричан по $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ па је идентичан за дејства S и S'. Једначине кретања, дате једначином (3.62), за дејства S и S' су (Ω' се добија од Ω заменом места функција $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$)

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)+R_{\mu\nu}W-K_{\mu\nu}W+\frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}=-\frac{G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}}{16\pi G}, \tag{3.65}$$

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{G}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R)+R_{\mu\nu}W-K_{\mu\nu}W+\frac{1}{2}\Omega'_{\mu\nu}=-\frac{G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}}{16\pi G}. \tag{3.66}$$

Одузимањем претходне две једначине добијамо

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)-\mathcal{G}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sum_{l=0}^{n-1}\left(\Box^l\mathcal{H}(R)\Box^{n-l}\mathcal{G}(R)-\Box^l\mathcal{G}(R)\Box^{n-l}\mathcal{H}(R)\right).\end{aligned} \tag{3.67}$$

Чланови који се добијају за $l=0$ на десној страни једначине се поклапају са левом страном, па нам преостаје

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\sum_{l=1}^{n-1}\left(\Box^l\mathcal{H}(R)\Box^{n-l}\mathcal{G}(R)-\Box^l\mathcal{G}(R)\Box^{n-l}\mathcal{H}(R)\right)=0. \tag{3.68}$$

Ова једнакост се доказује променом индекса сумирања $l \to n-l$ у једном од сабирака. Тиме је доказ завршен. ■

Једначина (3.62) је једначина кретања гравитационог поља (метричког тензора) за модификовано Ајнштајн-Хилбертово дејство (3.9). Покажимо сада да је дивергенција једначине (3.62) једнака нули, тј.

$$\nabla^\mu\Big(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) - R_{\mu\nu}W + K_{\mu\nu}W - \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}\Big) = \frac{\nabla^\mu(G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu})}{16\pi G}. \tag{3.69}$$

Десна страна једначине се поништава на следећи начин

$$\nabla^\mu(G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}) = \nabla^\mu R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^\mu R = \frac{1}{2}\nabla_\nu R - \frac{1}{2}\nabla_\nu R = 0. \tag{3.70}$$

Лева страна се трансформише као

$$\begin{aligned}
&\nabla^\mu\Big(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + (R_{\mu\nu}W - K_{\mu\nu}W) + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}\Big)\\
&= -\frac{1}{2}\nabla_\nu(\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)) + \nabla^\mu(R_{\mu\nu}W) - \nabla^\mu K_{\mu\nu}W + \frac{1}{2}\nabla^\mu\Omega_{\mu\nu}\\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\nabla_\nu R - \frac{1}{2}\mathcal{H}(R)\nabla_\nu\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\\
&+ (\nabla^\mu R_{\mu\nu})W + R_{\mu\nu}\nabla^\mu W - (\Box\nabla_\nu W - \nabla_\nu\Box W) + \frac{1}{2}\nabla^\mu\Omega_{\mu\nu}\\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{H}(R)\nabla_\nu\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + \frac{1}{2}(\nabla_\nu\mathcal{G}(R))\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R) + \frac{1}{2}\nabla^\mu\Omega_{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Последња једначина се може расписати као ред по коефицијентима f_n:

$$-\mathcal{H}(R)\nabla_\nu\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + (\nabla_\nu\mathcal{G}(R))\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R) + \nabla^\mu\Omega_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n U_\nu^{(n)}, \tag{3.72}$$

где је

$$\begin{aligned}
U_\nu^{(n)} &= -\mathcal{H}(R)\nabla_\nu\Box^n\mathcal{G}(R) + (\nabla_\nu\mathcal{G}(R))\Box^n\mathcal{H}(R)\\
&+ \nabla^\mu\Big(\sum_{l=0}^{n-1} S_{\mu\nu}(\Box^l\mathcal{H}(R), \Box^{n-1-l}\mathcal{G}(R))\Big).
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Потребно је још доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $U_\nu^{(n)} = 0$. За $n = 1$ имамо следећу базу индукције

$$
\begin{aligned}
U_\nu^{(1)} &= -\mathcal{H}(R)\nabla_\nu \Box \mathcal{G}(R) + (\nabla_\nu \mathcal{G}(R))\Box \mathcal{H}(R) \\
&+ \nabla^\mu \Big(g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \mathcal{H}(R) \nabla_\alpha \mathcal{G}(R) - 2\nabla_\mu \mathcal{H}(R) \nabla_\nu \mathcal{G}(R) + g_{\mu\nu} \mathcal{H}(R) \Box \mathcal{G}(R) \Big) \\
&= \nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{H}(R) \nabla^\mu \mathcal{G}(R) - \Box \mathcal{H}(R) \nabla_\nu \mathcal{G}(R) \\
&- \nabla^\mu \mathcal{H}(R) \nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{G}(R) + \nabla_\nu \mathcal{H}(R) \Box \mathcal{G}(R) \\
&= \nabla_\mu (\nabla_\nu \mathcal{H}(R) \nabla^\mu \mathcal{G}(R)) - \nabla_\mu (\nabla^\mu \mathcal{H}(R) \nabla_\nu \mathcal{G}(R)) = 0.
\end{aligned} \tag{3.74}
$$

Да бисмо показали корак индукције претпоставимо да је једначина (3.73) задовољена за неко $n \in \mathbb{N}$ и све функције $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$. Заменом $\mathcal{G} \to \Box \mathcal{G}$ добијамо

$$
\begin{aligned}
&- \mathcal{H}(R)\nabla_\nu \Box^{n+1} \mathcal{G}(R) + (\nabla_\nu \Box \mathcal{G}(R))\Box^n \mathcal{H}(R) \\
&+ \nabla^\mu \Big(\sum_{l=0}^{n-1} \big(g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \Box^l \mathcal{H}(R) \nabla_\alpha \Box^{n-l} \mathcal{G}(R) - 2\nabla_\mu \Box^l \mathcal{H}(R) \nabla_\nu \Box^{n-l} \mathcal{G}(R) \\
&+ g_{\mu\nu} \Box^l \mathcal{H}(R) \Box^{n+1-l} \mathcal{G}(R) \big) \Big) = 0.
\end{aligned} \tag{3.75}
$$

Треба показати да је

$$
\begin{aligned}
U_\nu^{(n+1)} &= -\mathcal{H}(R)\nabla_\nu \Box^{n+1} \mathcal{G}(R) + (\nabla_\nu \mathcal{G}(R))\Box^{n+1} \mathcal{H}(R) \\
&+ \nabla^\mu \Big(\sum_{l=0}^{n} \big(g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \Box^l \mathcal{H}(R) \nabla_\alpha \Box^{n-l} \mathcal{G}(R) - 2\nabla_\mu \Box^l \mathcal{H}(R) \nabla_\nu \Box^{n-l} \mathcal{G}(R) \\
&+ g_{\mu\nu} \Box^l \mathcal{H}(R) \Box^{n+1-l} \mathcal{G}(R) \big) \Big) = 0.
\end{aligned} \tag{3.76}
$$

Одузимањем последње две једначине добија се ($A = \Box^n \mathcal{H}(R)$)

$$
\begin{aligned}
&\Box A \nabla_\nu \mathcal{G} - A \nabla_\nu \Box \mathcal{G} + \nabla_\mu \nabla_\nu A \nabla^\mu \mathcal{G} + \nabla^\mu A \nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{G} \\
&+ \nabla_\nu A \Box \mathcal{G} + A \nabla_\nu \Box \mathcal{G} - 2\Box A \nabla_\nu \mathcal{G} - 2\nabla^\mu A \nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{G} \\
&= \nabla_\mu (\nabla_\nu A \nabla^\mu \mathcal{G}) - \nabla_\mu (\nabla^\mu A \nabla_\nu \mathcal{G}) = 0.
\end{aligned} \tag{3.77}
$$

Специјално, ако посматрамо FRW метрику имамо само две линеарно независне једначине. Најчешће се посматрају траг и 00 једначине:

$$
\frac{-R + 4\Lambda}{16\pi G} - 2\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + (RW + 3\Box W) + \frac{1}{2}\Omega = 0, \tag{3.78}
$$

$$
\frac{G_{00} - \Lambda}{16\pi G} - \frac{1}{2}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) + (R_{00}W - K_{00}\Box W) + \frac{1}{2}\Omega_{00} = 0, \tag{3.79}
$$

где је $\Omega = g^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu}$.

3.3 Модел са нелокалним чланом $R\mathcal{F}(\Box)R$

У овом одељку посматрамо дејство S у специјалном случају $\mathcal{G}(R) = \mathcal{H}(R) = R$. Дејство у овом облику је разматрано у великом броју радова [7, 8, 10, 9, 28, 26, 27, 49, 51, 50] и дисертацији [44]. Да бисмо добили нова решења користимо анзац облика

$$\Box R = rR + s, \tag{3.80}$$

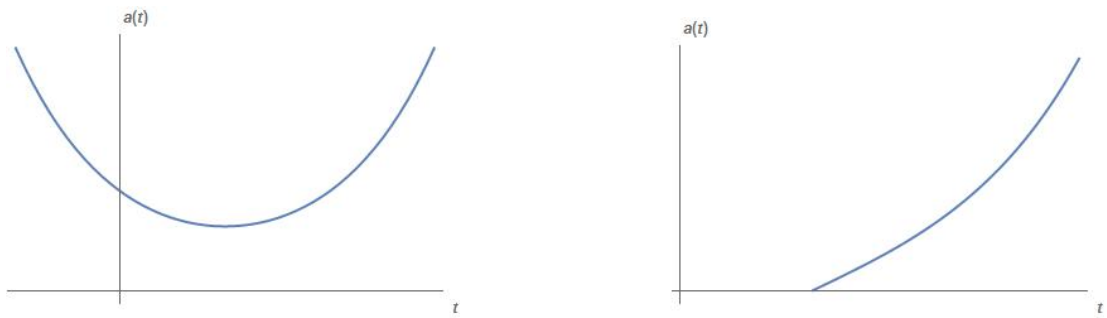
где су r и s реални параметри. Прве последице анзаца су

$$\Box^n R = r^n(R + \frac{s}{r}),\ n \geq 1, \qquad \mathcal{F}(\Box)R = \mathcal{F}(r)R + \frac{s}{r}(\mathcal{F}(r) - f_0). \tag{3.81}$$

Решење за скалирајући фактор $a(t)$ тражимо у облику линеарне комбинације $e^{\lambda t}$ и $e^{-\lambda t}$, тј.

$$a(t) = a_0(\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t}), \quad 0 < a_0, \lambda, \sigma, \tau \in \mathbb{R}. \tag{3.82}$$

$\Box R$ се може записати као



Слика 3.1: График функције $a(t)$ за $\sigma\tau > 0$ и $\sigma\tau < 0$.

$$\Box R = 2\lambda^2 R - 24\lambda^4, \qquad r = 2\lambda^2,\ s = -24\lambda^4. \tag{3.83}$$

Користећи ове изразе у (3.78) и (3.79) добијамо

$$\begin{aligned} &36\lambda^2\mathcal{F}(2\lambda^2)(R - 12\lambda^2) + \mathcal{F}'(2\lambda^2)\left(4\lambda^2(R - 12\lambda^2)^2 - \dot{R}^2\right) \\ &- 24\lambda^2 f_0(R - 12\lambda^2) = \frac{R - 4\Lambda}{8\pi G}, \end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned} &\left(2R_{00} + \frac{1}{2}R\right)\left(\mathcal{F}(2\lambda^2)R - 12\lambda^2(\mathcal{F}(2\lambda^2) - f_0)\right) - \frac{1}{2}\mathcal{F}'(2\lambda^2)\left(\dot{R}^2 + 2\lambda^2(R - 12\lambda^2)^2\right) \\ &- 6\lambda^2(\mathcal{F}(2\lambda^2) - f_0)(R - 12\lambda^2) + 6H\mathcal{F}(2\lambda^2)\dot{R} = -\frac{1}{8\pi G}(G_{00} - \Lambda). \end{aligned} \tag{3.85}$$

Решења се могу поделити у три случаја ([26])

Случај 1.

$$\mathcal{F}\left(2\lambda^2\right)=0, \quad \mathcal{F}'\left(2\lambda^2\right)=0, \quad f_0=-\frac{1}{64\pi G\Lambda}. \tag{3.86}$$

Случај 2.

$$3k=4a_0^2\Lambda\sigma\tau. \tag{3.87}$$

Случај 3.

$$\mathcal{F}\left(2\lambda^2\right)=\frac{1}{96\pi G\Lambda}+\frac{2}{3}f_0, \quad \mathcal{F}'\left(2\lambda^2\right)=0, \quad k=-4a_0^2\Lambda\sigma\tau. \tag{3.88}$$

У првом случају имамо фамилију решења за произвољно σ,τ и a_0

$$a(t)=a_0(\sigma e^{\lambda t}+\tau e^{-\lambda t})$$

где функција $\mathcal{F}$ задовољава (3.86) и произвољно $k=0,\pm1$. Тиме је обухваћен и случај $a(t)=a_0\cosh\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right)$, који је добијен у [10].

Други случај даје фамилију решења за произвољно $\sigma\neq 0$, a_0 и и произвољну аналитичку функцију $\mathcal{F}$

$$a(t)=a_0\left(\sigma e^{\lambda t}+\frac{3k}{4a_0^2\Lambda\sigma}e^{-\lambda t}\right).$$

Трећи случај такође даје фамилију решења

$$a(t)=a_0\left(\sigma e^{\lambda t}-\frac{k}{4a_0^2\Lambda\sigma}e^{-\lambda t}\right),$$

а функција $\mathcal{F}$ задовољава једначину (3.88). Приметимо да за $k=0$ једначина (3.87) и трећи услов у (3.88) се поклапају, σ или τ морају да буду нула, и имамо два решења

$$a_1(t)=a_0e^{\lambda t}, \qquad a_2(t)=a_0e^{-\lambda t}.$$

Ово су де Ситерова решења која су несингуларна ([9]).

3.4 Модел са нелокалним чланом облика $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$

У овом одељку посматрамо дејство S за $\mathcal{G}(R)=R$ и $\mathcal{H}(R)=R^{-1}$. Овај модел се први пут појављује у раду [27]. Приметимо када се аналитичка функција $\mathcal{F}$ развије у ред први члан је f_0 преузима улогу космолошке константе, бирамо

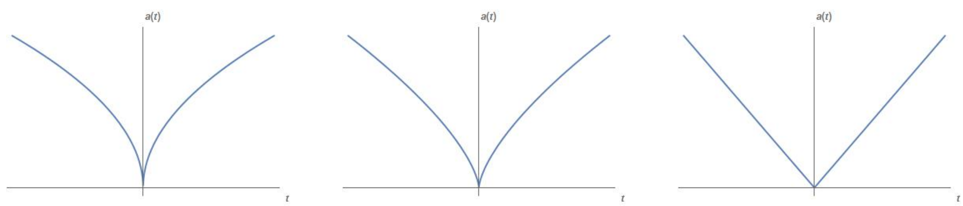
$\Lambda = 0$. Такође, нелокални члан $R^{-1}\mathcal{F}(\Box)R$ је инваријантан у односу на трансформацију $R \to CR$. То значи да утицај нелокалности зависи само од начина на који скаларна кривина R зависи од времена t, а не зависи од интензитета R. Тражимо решења у облику $a(t) = a_0|t-t_0|^\alpha$, која задовољавају анзац $\Box R = qR^2$, који у развијеној форми гласи

$$\begin{aligned}
&\alpha(2\alpha-1)(q\alpha(2\alpha-1)-(\alpha-1))(t-t_0)^{-4} \\
&+\frac{\alpha k}{3a_0^2}(1-\alpha+6q(2\alpha-1))(t-t_0)^{-2\alpha-2}+\frac{qk^2}{a_0^4}(t-t_0)^{-4\alpha}=0.
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Једначина (3.89) је задовољена у следећих шест случајева:

1. $k = 0$, $\alpha = 0$, $q \in \mathbb{R}$,
2. $k = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $q \in \mathbb{R}$,
3. $k = 0$, $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \frac{1}{2}$, $q = \frac{\alpha-1}{\alpha(2\alpha-1)}$,
4. $k = -1$, $\alpha = 1$, $q \neq 0$, $a_0 = 1$,
5. $k \neq 0$, $\alpha = 0$, $q = 0$,
6. $k \neq 0$, $\alpha = 1$, $q = 0$.

Графици скалирајућег фактора $a(t)$ за разиличите вредности параметра α су приказани на Слици 1.2. Случајеви (1), (2) и (4) задовољавају $R = 0$ и члан



Слика 3.2: График функције $a(t)$ за $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{2}{3}$ и $\alpha = 1$.

R^{-1} није добро дефинисан, па их не разматрамо. Случај (5) не задовољава једначине кретања. У наставку разматрамо преостала два случаја.

3.4.1 Случај $k = 0$, $q = \frac{\alpha-1}{\alpha(2\alpha-1)}$

У овом случају скаларна кривина и параметар q су дати са

$$q = \frac{\alpha-1}{\alpha(2\alpha-1)}, \quad R = 6\alpha(2\alpha-1)(t-t_0)^{-2}. \tag{3.90}$$

Заменом у једначине кретања добијамо (детаљније извођење се може наћи у [27])

$$\begin{aligned}
&r^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} f_n B(n,1)\left(-3r+6(1-n)(1-2n+3\alpha)\right)(t-t_0)^{-2n}\\
&+r\sum_{n=0}^{1} f_n\left(rB(n,-1)+3B(n+1,-1)\right)(t-t_0)^{-2n}\\
&+2r\sum_{n=1}^{\infty} f_n\gamma_n(t-t_0)^{-2n}=\frac{r^2}{16\pi G}(t-t_0)^{-2},\\
&\sum_{n=0}^{\infty} f_n r^{-1}B(n,1)\left(\frac{r}{2}-A_n\right)(t-t_0)^{-2n}\\
&+\sum_{n=0}^{1} f_n rB(n,-1)\,A_n\,(t-t_0)^{-2n}+\frac{r}{2}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\delta_n(t-t_0)^{-2n}\\
&=\frac{-r^2}{32\pi G}\frac{\alpha}{2\alpha-1}(t-t_0)^{-2},
\end{aligned}\tag{3.91}$$

где је $r=B(0,1)$ и

$$\begin{aligned}
B(n,1)&=6\alpha(2\alpha-1)(-2)^n n!\prod_{l=1}^{n}(1-3\alpha+2l),\ n\geq 1,\\
B(n,-1)&=(6\alpha(2\alpha-1))^{-1}2^n\prod_{l=1}^{n}(2-l)(-3-3\alpha+2l),\ n\geq 1,\\
\gamma_n&=\sum_{l=0}^{n-1}B(l,-1)(B(n-l,1)+2(1-l)(n-l)B(n-l-1,1)),\\
\delta_n&=\sum_{l=0}^{n-1}B(l,-1)(-B(n-l,1)+4(1-l)(n-l)B(n-l-1,1)),\\
A_n&=6\alpha(1-n)-r\frac{\alpha-1}{2(2\alpha-1)}=\frac{r}{2}\,\frac{3-2n-\alpha}{2\alpha-1}.
\end{aligned}\tag{3.92}$$

Једначине кретања се деле на системе од по две једначине по сваком од коефицијената f_n. За $n>1$, добијамо следећи пар:

$$\begin{aligned}
&f_n\Big(B(n,1)\left(-3r+6(1-n)(1-2n+3\alpha)\right)+2r^2\gamma_n\Big)=0,\\
&f_n\Big(B(n,1)\left(\frac{r}{2}-A_n\right)+\frac{r^2}{2}\delta_n\Big)=0.
\end{aligned}\tag{3.93}$$

Ако изаберемо α тако да је $\frac{3\alpha-1}{2}$ природан број добијамо:

$$B(n,1) = 6\alpha(2\alpha-1)4^n n! \frac{(\frac{3}{2}(\alpha-1))!}{(\frac{3}{2}(\alpha-1)-n)!}, \quad n < \frac{3\alpha-1}{2}, \tag{3.94}$$

$$B(n,1) = 0, \quad n \geq \frac{3\alpha-1}{2}, \tag{3.95}$$

$$\gamma_n = 2B(0,-1)B(n-1,1)(3n\alpha - 2n^2 - 3\alpha - 1), \quad n \leq \frac{3\alpha-1}{2}, \tag{3.96}$$

$$\delta_n = 2B(0,-1)B(n-1,1)(2n^2 + 3n + 3\alpha - 3\alpha n + 1), \quad n \leq \frac{3\alpha-1}{2}, \tag{3.97}$$

$$\gamma_n = \delta_n = 0, \quad n > \frac{3\alpha-1}{2}. \tag{3.98}$$

Тада је за $n > \frac{3\alpha-1}{2}$, $B(n,1) = \gamma_n = \delta_n = 0$ и самим тим систем је тривијално задовољен за произвољну вредност f_n. Са друге стране за $2 \leq n \leq \frac{3\alpha-1}{2}$ систем има само тривијално решење $f_n = 0$.

За $n = 0$ систем постаје

$$f_0\big(-2r + 6(1+3\alpha) + 3rB(1,-1)\big) = 0, \quad f_0 = 0 \tag{3.99}$$

и има само тривијално решење $f_0 = 0$. Последњи случај $n = 1$ је

$$\begin{aligned} &f_1\big(-3r^{-1}B(1,1) + rB(1,-1) + 2\gamma_1\big) = \frac{r}{16\pi G}, \\ &f_1\Big(A_1(rB(1,-1) - r^{-1}B(1,1)) + \frac{1}{2}(B(1,1) + r\delta_1)\Big) = \frac{-r^2}{32\pi G}\,\frac{\alpha}{2\alpha-1}, \end{aligned} \tag{3.100}$$

и његово решење је $f_1 = -\frac{3\alpha(2\alpha-1)}{32\pi G(3\alpha-2)}$.

3.4.2 Случај $k \neq 0$, $\alpha = 1$, $q = 0$

У овом случају је

$$\begin{aligned} a = a_0|t-t_0|, \quad H = (t-t_0)^{-1}, \quad R = r(t-t_0)^{-2}, \\ r = 6(1+\frac{k}{a_0^2}), \quad \Box R = 0, \\ \Box^n R^{-1} = B(n,-1)(t-t_0)^{2-2n}, \\ B(0,-1) = s^{-1}, \quad B(1,-1) = -8r^{-1}, \quad B(n,-1) = 0,\ n \geq 2. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Заменом у једначине кретања добијамо следеће услове за коефицијенте f_0 и

f_1:

$$-2f_0 - 4f_1(t-t_0)^{-2} = \frac{s}{16\pi G}(t-t_0)^{-2},$$
$$\frac{1}{2}f_0 + 2f_1(t-t_0)^{-2} = -\frac{s}{32\pi G}(t-t_0)^{-2}. \tag{3.102}$$

Решење система је

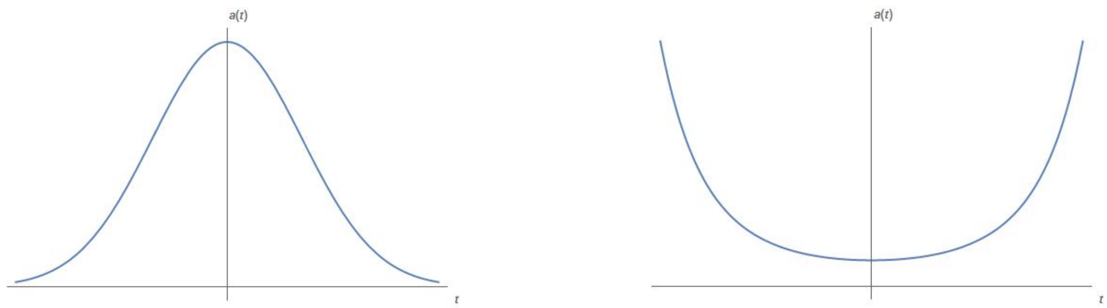
$$f_0 = 0, \quad f_1 = \frac{-r}{64\pi G}, \quad f_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2. \tag{3.103}$$

3.5 Модел са нелокалним чланом облика $R^p\mathcal{F}(\Box)R^q$

Овај одељак је посвећен дејству S у случају $\mathcal{H} = R^p$ и $\mathcal{G} = R^q$ за неке природне бројеве p и q. Овај модел се разматрао у радовима [24] и [25]. Посматрамо скалирајући фактор у облику

$$a(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{12}t^2}. \tag{3.104}$$

Скалирајући фактор у овом облику је раније уведен као решење за $\mathcal{G}(R) =$



Слика 3.3: график функције $a(t)$ за $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$

$\mathcal{H}(R) = R$ у раду [51]. Такође је разматран и у контексту R^2 гравитације ([63, 60, 61]). Веза између ова два приступа је разматрана у [52]. У овом одељку посматрамо $\mathcal{H}(R) = R^p$ и $\mathcal{G}(R) = R^q$. Дејство S, (3.9) са овим вредностима функција $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ обележавамо са S_{pq}. Приметимо да се за $\gamma = 0$ добија простор Минковског и да је он решење једначина кретања (3.62) за $\Lambda = 0$. Анализа која следи је независна од знака параметра γ и добијају се модели у којима се васиона шири (за $\gamma < 0$) и скупља (за $\gamma > 0$).

Хаблов параметар и скаларна кривина су респективно линеарна и квадратна функција космичког времена t:

$$H(t) = -\frac{1}{6}\gamma t, \qquad R(t) = \frac{1}{3}\gamma(\gamma t^2 - 3). \tag{3.105}$$

Директан рачун показује да за сваки природан број p, $\Box R^p$ је линеарна комбинација R^p, R^{p-1} и R^{p-2}, тј.

$$\Box R^p = p\gamma R^p - \frac{p}{3}(4p-5)\gamma^2 R^{p-1} - \frac{4}{3}p(p-1)\gamma^3 R^{p-2}. \tag{3.106}$$

Једнакост (3.106) показује да за фиксирану вредност параметра γ оператор $\Box$ можемо схватити као линеаран оператор на простору полинома по R.

Лема 3.6. *Посматрајмо простор $P_p(R)$ полинома по R степена највише p и његову базу $v_p = \begin{pmatrix} R^p & R^{p-1} & \dots & R & 1 \end{pmatrix}^T$. Оператор $\Box$ је линеарни оператор на $P_p(R)$. Матрица оператора $\Box$ у бази v_p је*

$$M_p = \gamma \begin{pmatrix} p & \frac{p}{3}(5-4p)\gamma & \frac{4}{3}p(1-p)\gamma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p-1 & \frac{p-1}{3}(9-4p)\gamma & \frac{4}{3}(1-p)(p-2)\gamma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{\gamma}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.107}$$

Доказ. Пошто је $\Box h(t) = -\partial_t^2 h(t) - 3H\partial_t h(t)$ и диференцирање је линеарни оператор на $P_p(R)$ јасно је да је $\Box$ линеарни оператор. Треба показати да је $\Box R^s \in P_p(R)$ за свако $0 \leq s \leq p$. За $s = 0$, очигледно $\Box 1 = 0 \in P_p(R)$. За $s = 1$ једначина (3.106) постаје $\Box R = \gamma R + \frac{\gamma^2}{3}$ што је линеарни полином по R, па припада простору $P_p(R)$. За $2 \leq s \leq p$ из једначине (3.106) следи да је $\Box R^s$ полином степена s по R па припада $P_p(R)$. Из свих претходних случајева заједно следи да матрица M_p има облик који је дат у формулацији леме. ∎

Последица Леме 3.6 је да $\Box^n \mathcal{H}(R)$ може да се напише као полином степена p по R. Нека је F_p матрица оператора $\mathcal{F}(\Box)$ у бази v_p, тј.

$$F_p = \sum_{n=0}^{\infty} f_n M_p^n = \mathcal{F}(M_p). \tag{3.108}$$

Према Леми 3.5 можемо без смањења општости претпоставити да је $p \geq q$.

Приметимо да је W_{pq} полином степена $p+q-1$ по R, као и

$$\mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R) = e_p F_p v_p, \tag{3.109}$$
$$W_{pq} = pR^{p-1} e_q F_q v_q + qR^{q-1} e_p F_p v_p, \tag{3.110}$$
$$\Box W_{pq} = -\frac{4}{3}\gamma^2 (R+\gamma) W''_{pq} - \frac{2}{3}\gamma^2 W'_{pq}, \tag{3.111}$$
$$K_{00} W_{pq} = \gamma(R+\gamma) W'_{pq}, \tag{3.112}$$

где знак $'$ означава диференцирање по R. Ω_{pq} и $\Omega_{pq\,00}$ су такође полиноми по R степена $p+q-1$ и $p+q$ редом

$$\Omega_{pq} = -2S_1 + 4S_2, \tag{3.113}$$
$$\Omega_{pq\ 00} = -S_1 - S_2, \tag{3.114}$$
$$S_1 = \frac{4}{3}\gamma^2 (R+\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} e_p M_p^l D_p v_p e_q M_q^{n-1-l} D_q v_q, \tag{3.115}$$
$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} e_p M_p^l v_p e_q M_q^{n-l} v_q. \tag{3.116}$$

Дакле, једначине (3.78) и (3.79) су полиномијалног типа по R степена $p+q$. Посматрајмо прво само најстарији коефицијент у обе једначине. За $p \neq q$ добијамо следећи систем:

$$p\mathcal{F}(q\gamma)(q-p+2) + q\mathcal{F}(p\gamma)(q-p-2) = 0, \tag{3.117}$$
$$(-q - \frac{1}{2}p(q-p))\mathcal{F}(q\gamma) + (-\frac{1}{2}q(q-p) + q)\mathcal{F}(p\gamma) = 0. \tag{3.118}$$

Ове две једначине су линеарно зависне за све вредности параметара $p \neq q$. Са друге стране, ако је $p = q$ претходни систем постаје

$$(p-1)\mathcal{F}(p\gamma) + p\gamma\mathcal{F}'(p\gamma) = 0, \tag{3.119}$$
$$-\frac{1}{2}(p-1)\mathcal{F}(p\gamma) - \frac{1}{2}p\gamma\mathcal{F}'(p\gamma) = 0. \tag{3.120}$$

И у овом случају такође добијамо линеарно зависне једначине.

3.5.1 Случај $p = 1, q = 1$

Размотримо, на почетку, најједноставнији случај $p = q = 1$. Скалирајући фактор у облику $a(t) = A\exp(\Lambda t^2)$ су први пут добили Кошељев и Вернов у раду [51].

Теорема 3.3. *Ако је скалирајући фактор облика* $a(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{12}t^2}$ *и* $p = q = 1$, *онда је систем* (3.78), (3.79) *задовољен акко* $\gamma = -12\Lambda$, $\mathcal{F}'(\gamma) = 0$ *и* $f_0 = \frac{3\kappa}{2\gamma} - 8\mathcal{F}(\gamma)$ *где је* $\kappa = \frac{1}{16\pi G}$.

Доказ. Траг и 00 једначина се могу записати као квадратни полиноми по R

$$T_2R^2 + T_1R + T_0 = 0, \tag{3.121}$$

$$Z_2R^2 + Z_1R + Z_0 = 0, \tag{3.122}$$

где су коефицијенти дати са

$$\begin{aligned}
T_0 &= \frac{2}{9}\left(-5\mathcal{F}'(\gamma)\gamma^3 + 8\mathcal{F}(\gamma)\gamma^2 + f_0\gamma^2 + 18\kappa\Lambda\right),\\
T_1 &= \frac{1}{3}\left(-3\kappa + 16\gamma\mathcal{F}(\gamma) + 2\gamma f_0\right),\\
T_2 &= 2\gamma\mathcal{F}'(\gamma),\\
Z_0 &= \frac{1}{36}\left(-26\mathcal{F}'(\gamma)\gamma^3 - 64\mathcal{F}(\gamma)\gamma^2 - 8f_0\gamma^2 + 9\kappa\gamma - 36\kappa\Lambda\right),\\
Z_1 &= \frac{1}{12}\left(-12\mathcal{F}'(\gamma)\gamma^2 - 16\mathcal{F}(\gamma)\gamma - 2f_0\gamma + 3\kappa\right),\\
Z_2 &= -\frac{1}{2}\gamma\mathcal{F}'(\gamma).
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Приметимо да је $T_0 + 4Z_0 = 4\gamma Z_1$, $T_1 + 4Z_1 = 8\gamma Z_2$, $T_2 + 4Z_2 = 0$, па су једначине (3.121) и (3.122) еквивалентне. Довољно је посматрати само траг једначину. Из једначине (3.105) видимо да је R квадратна функција времена t, па је једначина (3.121) задвољена за све вредности времена t акко $T_0 = T_1 = T_2 = 0$. Добијамо систем линеарних једначина по f_0, $\mathcal{F}(\gamma)$ и $\mathcal{F}'(\gamma)$. Овај систем има решење само ако је $\gamma = -12\Lambda$ и решење је

$$\mathcal{F}'(\gamma) = 0, \qquad f_0 = \frac{3\kappa}{2\gamma} - 8\mathcal{F}(\gamma). \qquad \blacksquare \tag{3.124}$$

3.5.2 Случај $(p, q) \neq (1, 1)$

Из Леме 3.6 следи

$$\mathcal{H}(R) = e_p v_p, \quad \Box^n\mathcal{H}(R) = e_p M_p^n v_p, \quad \mathcal{F}(\Box)\mathcal{H}(R) = e_p F_p v_p, \tag{3.125}$$

где су e_p координате вектора $\mathcal{H}(R)$ у бази v_p и D_p матрица таква да је $\dfrac{\partial v_p}{\partial R} = D_p v_p$, $p \in \mathbb{N}$. У овим ознакама систем (3.78), (3.79) се може написати као:

$$\frac{R-4\Lambda}{16\pi G} = RW_{pq} - 4\gamma^2(R+\gamma)W''_{pq} - 2\gamma^2 W'_{pq} - 2e_p v_p e_q F_q v_q - S_1 + 2S_2, \tag{3.126}$$
$$\frac{\Lambda - G_{00}}{16\pi G} = \frac{1}{2}e_p v_p e_q F_q v_q + \frac{\gamma}{4}(\gamma - R)W_{pq} - \gamma(R+\gamma)W'_{pq} - \frac{1}{2}(S_1+S_2), \tag{3.127}$$

где је

$$W_{pq} = e_p D_p v_p e_q F_q v_q + e_q D_q v_q e_p F_p v_p, \tag{3.128}$$
$$S_1 = \frac{4}{3}\gamma^2(R+\gamma)\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} e_p M_p^l D_p v_p e_q M_q^{n-1-l} D_q v_q, \tag{3.129}$$
$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} e_p M_p^l v_p e_q M_q^{n-l} v_q. \tag{3.130}$$

Теорема 3.4. *Нека је*

$$\begin{aligned} T = &-2e_p v_p e_q F_q v_q + RW_{pq} - 4\gamma^2(R+\gamma)W''_{pq} - 2\gamma^2 W'_{pq} \\ &- S_1 + 2S_2 - \frac{R-4\Lambda}{16\pi G}, \end{aligned} \tag{3.131}$$
$$\begin{aligned} Z = &\frac{1}{2}e_p v_p e_q F_q v_q + \frac{\gamma}{4}(\gamma - R)W_{pq} - \gamma(R+\gamma)W'_{pq} \\ &- \frac{1}{2}(S_1+S_2) + \frac{G_{00}-\Lambda}{16\pi G}, \end{aligned} \tag{3.132}$$

тада $T + 4Z = 4\gamma Z'$. *Једначине* (3.126) *и* (3.127) *су еквивалентне.*

Доказ. Директним рачуном се показује

$$T + 4Z = \gamma W_{pq} - \gamma(R+3\gamma)W'_{pq} - 4\gamma^2(R+\gamma)W''_{pq} - 3S_1, \tag{3.133}$$
$$\begin{aligned} 4\gamma Z' = &\, 2\gamma\left(\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\right)' - \gamma W_{pq} - \gamma(R+3\gamma)W'_{pq} \\ &- 4\gamma^2(R+\gamma)W''_{pq} - 2\gamma\left(S_1+S_2\right)'. \end{aligned} \tag{3.134}$$

Ако све чланове који садрже W_{pq} пребацимо на леву страну, а преостале на десну страну једначине добијамо

$$W_{pq} - \left(\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R)\right)' = \frac{3}{2}\gamma^{-1}S_1 - S_1' - S_2'. \tag{3.135}$$

Уместо да, као до сада, $\Box^n\mathcal{H}(R)$ изражавамо у бази v_p и $\Box^n\mathcal{G}(R)$ изражавамо у бази v_q, једноставније је да све изразе запишемо у бази v_{p+q}. Нека су ε_p и ε_q координате вектора $\mathcal{H}(R)$ и $\mathcal{G}(R)$ редом у бази v_{p+q}. Претходна једначина постаје

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \varepsilon_p \left(M_{p+q}^n v_{p+q} \varepsilon_q - v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^n\right) D_{p+q} v_{p+q} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n q_n \tag{3.136}$$

где је

$$\begin{aligned} q_n = \sum_{l=0}^{n-1} \Big(& 2\gamma(R + \frac{\gamma}{3}) \varepsilon_p M_{p+q}^l D_{p+q} v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^{n-l-1} D_{p+q} v_{p+q} \\ & - \frac{4}{3}\gamma^2 (R+\gamma) \varepsilon_p M_{p+q}^l D_{p+q}^2 v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^{n-l-1} D_{p+q} v_{p+q} \\ & - \frac{4}{3}\gamma^2 (R+\gamma) \varepsilon_p M_{p+q}^l D_{p+q} v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^{n-l-1} D_{p+q}^2 v_{p+q} \\ & - \varepsilon_p M_{p+q}^l D_{p+q} v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^{n-l} v_{p+q} \\ & - \varepsilon_p M_{p+q}^l v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^{n-l} D_{p+q} v_{p+q} \Big). \end{aligned} \tag{3.137}$$

Довољно је показати да је

$$M_{p+q}^n v_{p+q} \varepsilon_q - v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^n = q_n. \tag{3.138}$$

Пребацимо последњи члан у q_n на леву страну једначине и после преименовања неких индекса добијамо

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{n-1} \varepsilon_p M_{p+q}^{l+1} v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^{n-l-1} D_{p+q} v_{p+q} \\ & = \sum_{l=0}^{n-1} \Big(2\gamma(R + \frac{\gamma}{3}) \varepsilon_p M_{p+q}^l D_{p+q} v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^{n-l-1} D_{p+q} v_{p+q} \\ & - \frac{4}{3}\gamma^2 (R+\gamma) \varepsilon_p M_{p+q}^l D_{p+q}^2 v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^{n-l-1} D_{p+q} v_{p+q} \\ & - \frac{4}{3}\gamma^2 (R+\gamma) \varepsilon_p M_{p+q}^l D_{p+q} v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^{n-l-1} D_{p+q}^2 v_{p+q} \\ & - \varepsilon_p M_{p+q}^l D_{p+q} v_{p+q} \varepsilon_q M_{p+q}^{n-l} v_{p+q} \Big). \end{aligned} \tag{3.139}$$

Уведимо матричну функцију α :

$$\alpha(X) = \sum_{l=0}^{n-1} M_{p+q}^l X M_{p+q}^{n-l-1}. \tag{3.140}$$

Једначина (3.139) постаје

$$\begin{aligned}\varepsilon_p M_{p+q}\alpha(v_{p+q}\varepsilon_q)D_{p+q}v_{p+q} &= 2\gamma(R+\frac{\gamma}{3})\varepsilon_p\alpha(D_{p+q}v_{p+q}\varepsilon_q)D_{p+q}v_{p+q}\\ &- \frac{4}{3}\gamma^2(R+\gamma)\varepsilon_p\alpha(D^2_{p+q}v_{p+q}\varepsilon_q)D_{p+q}v_{p+q}\\ &- \frac{4}{3}\gamma^2(R+\gamma)\varepsilon_p\alpha(D_{p+q}v_{p+q}\varepsilon_q)D^2_{p+q}v_{p+q}\\ &- \varepsilon_p\alpha(D_{p+q}v_{p+q}\varepsilon_q)M_{p+q}v_{p+q}.\end{aligned} \tag{3.141}$$

Претходна једначина је еквивалентна са

$$\begin{aligned}\varepsilon_p\Big(&M_{p+q}\alpha(v_{p+q}\varepsilon_q) - \gamma(R+\frac{\gamma}{3})\alpha(D_{p+q}v_{p+q}\varepsilon_q)\\ &+\frac{4}{3}\gamma^2(R+\gamma)\alpha(D^2_{p+q}v_{p+q}\varepsilon_q)\Big)D_{p+q}v_{p+q} = 0.\end{aligned} \tag{3.142}$$

Према једначини (3.111) следи

$$\begin{aligned}M_{p+q}v_{p+q} - \gamma(R+\frac{\gamma}{3})v'_{p+q} + \frac{4}{3}\gamma^2(R+\gamma)v''_{p+q} = 0,\\ M_{p+q}v_{p+q} - \gamma(R+\frac{\gamma}{3})D_{p+q}v_{p+q} + \frac{4}{3}\gamma^2(R+\gamma)D^2_{p+q}v_{p+q} = 0.\end{aligned} \tag{3.143}$$

Множењем са M^l_{p+q} са леве стране и $\varepsilon_q M^{n-1-l}_{p+q}$ са десне стране и сумирањем по l од 0 до $n-1$ добијамо

$$\begin{aligned}&M_{p+q}\alpha(v_{p+q}\varepsilon_q) - \gamma(R+\frac{\gamma}{3})\alpha(D_{p+q}v_{p+q}\varepsilon_q)\\ &+ \frac{4}{3}\gamma^2(R+\gamma)\alpha(D^2_{p+q}v_{p+q}\varepsilon_q) = 0.\end{aligned} \tag{3.144}$$

На крају, множење са ε_p са леве стране и са $D_{p+q}v_{p+q}$ са десне стране комплетира доказ првог дела теореме.

Као што смо већ приметили, T и Z су полиноми по R степена $p+q$. Означимо њихове коефицијенте са T_j и Z_j $(0 \le j \le p+q)$ редом. До сада смо показали да је

$$\begin{aligned}T_{p+q} + 4Z_{p+q} = 0,\\ T_j + 4Z_j = 4\gamma(j+1)Z_{j+1}, (j \le 0 < p+q).\end{aligned} \tag{3.145}$$

Такође, систем (3.145) показује да системи једначина $T_{p+q} = T_{p+q-1} = \ldots = T_0 = 0$ и $Z_{p+q} = Z_{p+q-1} = \ldots = Z_0 = 0$ су еквивалентни, тј. једначине (3.126) и (3.127) су еквивалентне. ■

Претходна теорема може се доказати и на други начин користећи једначину (3.69). Преостаје да се реши једначина (3.126). То је врло тежак задатак и може да се реши само за конкретне вредности параметара p и q. Наредна теорема даје случајеве за $q \leq p \leq 4$. У наредној теореми дајемо решења за $1 \leq q \leq p \leq 2$, а преостали случајеви за $1 \leq q \leq p \leq 4$ су дати у додатку Б.

Теорема 3.5. *Једначина* (3.126) *је задовољена у следећим случајевима* ($\kappa = \frac{1}{16\pi G}$)*:*

- $p = 2$, $q = 1$:
  $f_0 = -\frac{\kappa(4\gamma+15\Lambda)}{7\gamma^3}$,
  $\mathcal{F}(\gamma) = \frac{9\kappa(\gamma+9\Lambda)}{112\gamma^3}$, $\quad \mathcal{F}'(\gamma) = -\frac{3\kappa(\gamma+9\Lambda)}{8\gamma^4}$,
  $\mathcal{F}(2\gamma) = \frac{3\kappa(\gamma+9\Lambda)}{56\gamma^3}$,

- $p = 2$, $q = 2$:
  $f_0 = \frac{\kappa(145\gamma+576\Lambda)}{876\gamma^4}$,
  $\mathcal{F}(\gamma) = \frac{369\kappa(\gamma+8\Lambda)}{9344\gamma^4}$, $\quad \mathcal{F}'(\gamma) = -\frac{639\kappa(\gamma+8\Lambda)}{2336\gamma^5}$,
  $\mathcal{F}(2\gamma) = \frac{27\kappa(\gamma+8\Lambda)}{4672\gamma^4}$, $\quad \mathcal{F}'(2\gamma) = -\frac{27\kappa(\gamma+8\Lambda)}{9344\gamma^5}$,

Доказ. Приметимо да су за сваку од вредности параметара p и q наведених у теореми, коефицијенти T_j линеарне комбинације $p + q + 1$ "променљивих" $f_0 = \mathcal{F}(0)$, $\mathcal{F}(\gamma)$, ..., $\mathcal{F}(p\gamma)$, $\mathcal{F}'(\gamma)$, ..., $\mathcal{F}'(q\gamma)$, па се траг једначина своди на линеарни систем од $p+q+1$ једначина по $p+q+1$ непознатој. Решавање овог система у сваком појединачном случају даје исказ теореме. За $p = 2$ и $q = 1$ коефицијенти T_j су:

$$
\begin{aligned}
T_0 &= \frac{4}{9}\left(-5\mathcal{F}'(\gamma)\gamma^4 - 32\mathcal{F}(\gamma)\gamma^3 - 19\mathcal{F}(2\gamma)\gamma^3 - 3f_0\gamma^3 + 9\kappa\Lambda\right), \\
T_1 &= \frac{1}{3}\left(10\mathcal{F}(\gamma)\gamma^2 - 55\mathcal{F}(2\gamma)\gamma^2 - 9f_0\gamma^2 - 3\kappa\right), \\
T_2 &= 2\gamma\left(10\mathcal{F}(\gamma) - \mathcal{F}(2\gamma) + 2\gamma\mathcal{F}'(\gamma)\right), \\
T_3 &= 3\mathcal{F}(2\gamma) - 2\mathcal{F}(\gamma),
\end{aligned}
\tag{3.146}
$$

Преостаје да се реши систем

$$
\begin{aligned}
-5\mathcal{F}'(\gamma)\gamma^4 - 32\mathcal{F}(\gamma)\gamma^3 - 19\mathcal{F}(2\gamma)\gamma^3 - 3f_0\gamma^3 &= -9\kappa\Lambda, \\
10\mathcal{F}(\gamma)\gamma^2 - 55\mathcal{F}(2\gamma)\gamma^2 - 9f_0\gamma^2 &= 3\kappa, \\
10\mathcal{F}(\gamma) - \mathcal{F}(2\gamma) + 2\gamma\mathcal{F}'(\gamma) &= 0, \\
3\mathcal{F}(2\gamma) - 2\mathcal{F}(\gamma) &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.147}
$$

Решење овог система је дато у формулацији теореме. Други случајеви се показују на исти начин. ∎

3.6 Модел са нелокалним чланом облика $(R+R_0)^m\mathcal{F}(\Box)(R+R_0)^m$

У овом одељку посматрамо дејство (3.9) за $\mathcal{G}=\mathcal{H}=(R+R_0)^m$, где су R_0 и m реалне константе и скалирајући фактор $a(t)$ у облику

$$a(t) = A\,t^n e^{-\frac{\gamma}{12}t^2}. \tag{3.148}$$

Такође, посматрајмо анзац

$$\Box(R+R_0)^m = r(R+R_0)^m + s, \tag{3.149}$$

где су R_0,r, s, m и n реалне константе.
Ако је $s=0$, анзац се своди на следећи систем једначина

$$\begin{aligned}
&-648mn^2(2n-1)^2(2m-3n+1)=0,\\
&-324n(2n-1)\left(-\gamma m+6\gamma mn^2-4\gamma mn-mnR_0+mR_0+2n^2r-nr\right)=0,\\
&18n(2n-1)\left(8\gamma^2m^2-13\gamma^2m+12\gamma^2mn-3\gamma mR_0+24\gamma nr+6\gamma r-6rR_0\right)=0,\\
&-2\gamma^3m-24\gamma^3mn^2-14\gamma^3mn+6\gamma^2mnR_0+2\gamma^2mR_0+72\gamma^2n^2r+12\gamma^2nr\\
&-24\gamma nrR_0+3\gamma^2r-6\gamma rR_0+3rR_0^2=0,\\
&-\gamma^2\left(4\gamma^2m^2+\gamma^2m+18\gamma^2mn-3\gamma mR_0-24\gamma nr-6\gamma r+6rR_0\right)=0,\\
&-\gamma^4(r-\gamma m)=0.
\end{aligned}$$

Решавање овог система даје пет могућности:

1. $r=m\gamma$, $n=0$, $R_0=\gamma$, $m=\frac{1}{2}$
2. $r=m\gamma$, $n=0$, $R_0=\frac{\gamma}{3}$, $m=1$
3. $r=m\gamma$, $n=\frac{1}{2}$, $R_0=\frac{4}{3}\gamma$, $m=1$
4. $r=m\gamma$, $n=\frac{1}{2}$, $R_0=3\gamma$, $m=-\frac{1}{4}$
5. $r=m\gamma$, $n=\frac{2m+1}{3}$, $R_0=\frac{7}{3}\gamma$, $m=\frac{1}{2}$.

Случај 2. је већ разматран у претходном одељку, а случај 3. је познат у литератури ([60]). Размотримо преостала три случаја.

У овом одељку посматрамо дејство (3.9), уз услов $\mathcal{G}(R)=\mathcal{H}(R)=(R+r)^m$, тј.

$$S_2=\int\left(\frac{R-2\Lambda}{16\pi G}+(R+r)^m\mathcal{F}(\Box)(R+r)^m\right)\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x. \tag{3.150}$$

Једначине кретања добијају следећи облик:

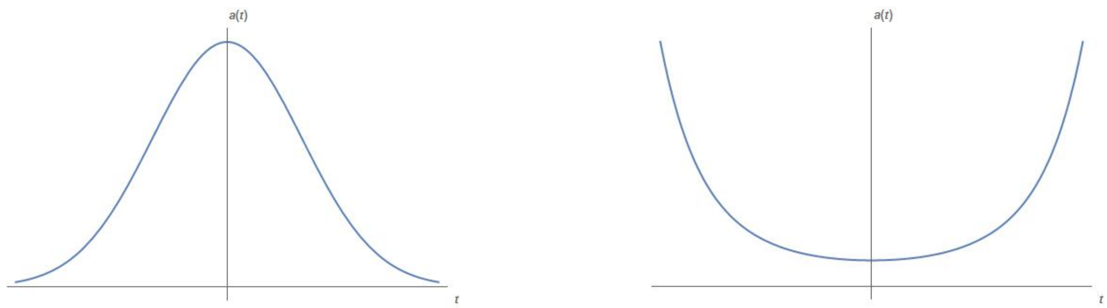
$$\frac{G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}}{16\pi G} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R+r)^m \mathcal{F}(\Box)(R+r)^m + (R_{\mu\nu}W - K_{\mu\nu}W) + \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu} = 0, \tag{3.151}$$

где је

$$W = 2m(R+r)^{m-1}\mathcal{F}(\Box)(R+r)^m, \tag{3.152}$$

$$\Omega_{\mu\nu} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} S_{\mu\nu}\left(\Box^l (R+r)^m, \Box^{n-1-l}(R+r)^m\right). \tag{3.153}$$

У случају $n = 0$, $m = \frac{1}{2}$, анзац постаје $\Box\sqrt{R+\gamma} = \frac{1}{2}\gamma\sqrt{R+\gamma}$. Директна



Слика 3.4: скалирајући фактор $a(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{12}t^2}$ за $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$

последица анзаца је

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\Box)\sqrt{R+\gamma} &= \mathcal{F}(\frac{1}{2}\gamma)\sqrt{R+\gamma}, \\ W &= \mathcal{F}(\frac{1}{2}\gamma), \\ \Omega_{\mu\nu} &= \mathcal{F}'(\frac{1}{2}\gamma) S_{\mu\nu}\left(\sqrt{R+\gamma}, \sqrt{R+\gamma}\right). \end{aligned} \tag{3.154}$$

Траг и 00 компоненте једначине (3.151) су линеарне једначине по R, па се разлажу на следећа два система једначина:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{16\pi G} + \frac{\Lambda}{4\pi G} - \gamma\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) - \frac{\gamma^2}{3}\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2}) &= 0, \\ -\frac{108\gamma^2}{\pi G} - \frac{\gamma^2}{3}\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) + \frac{\gamma^3}{3}\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.155}$$

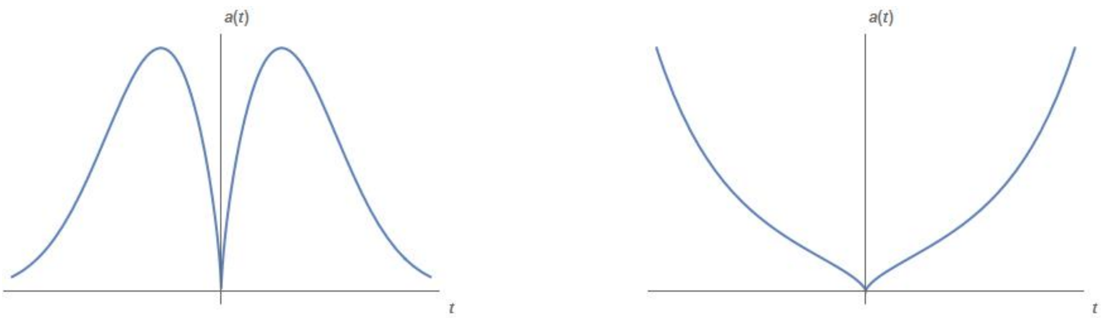
$$\begin{aligned} &\frac{\Lambda}{16\pi G} - \frac{\gamma}{2}\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) + \frac{\gamma^2}{6}\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2}) = 0, \\ &\frac{27\gamma^2}{\pi G} + \frac{\gamma^2}{12}\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) + \frac{\gamma^3}{6}\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2}) = 0. \end{aligned} \tag{3.156}$$

Решење ових система је

$$\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) = \frac{24\gamma + \Lambda}{768\gamma\pi G}, \qquad \mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2}) = \frac{3\Lambda - 3\gamma}{16\gamma^2\pi G}. \tag{3.157}$$

Приметимо да се овај случај може посматрати као генерализација претходног одељка, тако што се природни експоненти у дејству S постају рационални бројеви. У овом случају имамо $p + q = 1$ и као и раније имамо јединствено решење по променљивим $\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2})$ и $\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2})$.

У случају 5. имамо следеће вредности параметара $r = \frac{\gamma}{2}$, $n = \frac{2}{3}$, $R_0 = \frac{7}{3}\gamma$, $m = \frac{1}{2}$.



Слика 3.5: Скалирајући фактор $a(t) = At^{\frac{2}{3}}\ e^{-\frac{\gamma}{12}t^2}$ за $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$.

Дејство S_2 је идентично као и у претходном случају, па сличан рачун даје следећа два система који одговарају трагу и 00 једначини:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2}) = 0, \qquad & \frac{11\gamma}{48\pi G} + \frac{\Lambda}{4\pi G} - \gamma\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) = 0, \\ \frac{1}{16\pi G} + \mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) = 0, \qquad & \frac{\gamma^2}{16\pi G} + \gamma^2\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) = 0, \end{aligned} \tag{3.158}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2}) = 0, \qquad & -\frac{\gamma}{24\pi G} - \frac{\Lambda}{16\pi G} + \frac{1}{2}\gamma\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) = 0, \\ \frac{1}{16\pi G} + c\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) = 0, \qquad & \frac{\gamma^2}{16\pi G} + c\gamma^2\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) = 0. \end{aligned} \tag{3.159}$$

Решење овог система је

$$\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2}) = \frac{-1}{16\pi G}, \qquad \mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2}) = 0, \qquad \Lambda = -\frac{7}{6}\gamma. \tag{3.160}$$

Приметимо да осим вредности за $\mathcal{F}(\frac{\gamma}{2})$ и $\mathcal{F}'(\frac{\gamma}{2})$ имамо и услов који повезује космолошку константу и параметар γ, слично случају $p = q = 1$ из претходног одељка.

На крају, случај 4, $n = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{4}$, се анализира на исти начин и не постоји решење једначина кретања.

3.7 Решења са константном скаларном кривином

У овом одељку посматрамо дејство (3.9), без ограничења на функције $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$. Као анзац узимамо услов да је скаларна кривина константна, тј. $R = const.$ У случају $\mathcal{H}(R) = R^{-1}$ и $\mathcal{G}(R) = R$ овај анзац се разматра у радовима [29, 31] и докторској дисертацији [44].

Теорема 3.6. *Нека је $R = R_0 = const.$ Тада су решења једначина кретања (3.62) дата у следећем облику Нека је $R = R_0 = \mathrm{const}.$ Тада су решења једначина кретања дата у следећем облику*

1. *За $R_0 > 0$, $a(t) = \sqrt{\frac{6k}{R_0} + \sigma e^{\sqrt{\frac{R_0}{3}}t} + \tau e^{-\sqrt{\frac{R_0}{3}}t}}$, ,*
2. *За $R_0 = 0$, $a(t) = \sqrt{-kt^2 + \sigma t + \tau}$, ,*
3. *За $R_0 < 0$, $a(t) = \sqrt{\frac{6k}{R_0} + \sigma \cos\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t + \tau \sin\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t}$, ,*

ако је $R_0 + 4R_00 = 0$ и параметри σ, τ задовољавају

$$\begin{aligned} R_0 > 0, \qquad & 9k^2 = R_0^2\sigma\tau, \\ R_0 = 0, \qquad & \sigma^2 + 4k\tau = 0, \\ R_0 < 0, \qquad & 36k^2 = R_0^2(\sigma^2 + \tau^2), \end{aligned}$$

или је $\mathcal{G}(R_0)\mathcal{H}(R_0) - (R_0 - 2\Lambda)\frac{\partial}{\partial R}(\mathcal{G}(R)\mathcal{H}(R))|_{R=R0} = 0$.

Услов да је скаларна кривина $R = R_0$ констана даје следећу диференцијалну једначину другог реда :

$$6\Big(\frac{\ddot{a}}{a} + \big(\frac{\dot{a}}{a}\big)^2 + \frac{k}{a^2}\Big) = R_0. \tag{3.161}$$

Смена променљиве $b(t) = a^2(t)$ је преводи у линеарну диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима

$$3\ddot{b} - R_0 b = -6k. \tag{3.162}$$

Зависно од знака константе R_0 претходна једначина има следећа решења по $b(t)$

$$\begin{aligned} R_0 > 0, &\qquad b(t) = \frac{6k}{R_0} + \sigma e^{\sqrt{\frac{R_0}{3}}t} + \tau e^{-\sqrt{\frac{R_0}{3}}t}, \\ R_0 = 0, &\qquad b(t) = -kt^2 + \sigma t + \tau, \\ R_0 < 0, &\qquad b(t) = \frac{6k}{R_0} + \sigma \cos\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t + \tau \sin\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t. \end{aligned} \tag{3.163}$$

Заменом услова $R = const$ у траг једначину (3.78) и 00 једначину (3.79) добијамо систем једначина који одређује коефицијент f_0. Имамо

$$-2U + R_0 W = \frac{R_0 - 4\Lambda}{16\pi G}, \qquad \frac{1}{2}U + R_{00}W \; = \frac{\Lambda - G_{00}}{16\pi G}, \tag{3.164}$$

где је $U = f_0 \mathcal{G}(R_0)\mathcal{H}(R_0)$ и $W = f_0 \frac{\partial}{\partial R}(\mathcal{G}(R)\mathcal{H}(R))|_{R=R_0}$.

Елиминацијом променљиве U из претходног система следи

$$(R_0 + 4R_{00})\left(W + \frac{1}{16\pi G}\right) = 0. \tag{3.165}$$

Посматрајмо, као први случај, услов $R_0 + 4R_{00} = 0$. Тада добијамо следеће услове за параметре σ и τ:

$$\begin{aligned} R_0 > 0, &\qquad 9k^2 = R_0^2 \sigma\tau, \\ R_0 = 0, &\qquad \sigma^2 + 4k\tau = 0, \\ R_0 < 0, &\qquad 36k^2 = R_0^2(\sigma^2 + \tau^2), \end{aligned} \tag{3.166}$$

као и

$$U = \frac{1}{2}R_0\left(W - \frac{1}{16\pi G}\right) + \frac{\Lambda}{8\pi G}, \tag{3.167}$$

односно

$$f_0\left(\mathcal{G}(R_0)\mathcal{H}(R_0) - \frac{1}{2}R_0\right) = -\frac{R_0 - 4\Lambda}{32\pi G}. \tag{3.168}$$

Решења (3.163) и услови (3.166) ограничавају избор параметра k.

Теорема 3.7. *1. Ако је $R_0 > 0$ онда за $k = 0$ постоји решење са константним Хабловим параметром и $a(t) \sim \exp(\lambda t)$, а за $k = +1$ решење је дато са $a(t) = \sqrt{\frac{12}{R_0}} \cosh \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}t + \varphi\right)$ и за $k = -1$ решење је $a(t) = \sqrt{\frac{12}{R_0}} \left|\sinh \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}t + \varphi\right)\right|$, где је φ изабрано тако да је $\sigma + \tau = \frac{6}{R_0}\cosh\varphi$ и $\sigma - \tau = \frac{6}{R_0}\sinh\varphi$.*

2. *Ако је* $R_0 = 0$ *онда је за* $k = 0$ *решење* $a(t) = \sqrt{\tau} = const$, *а за* $k = -1$ *решење је* $a(t) = |t + \frac{\sigma}{2}|$.

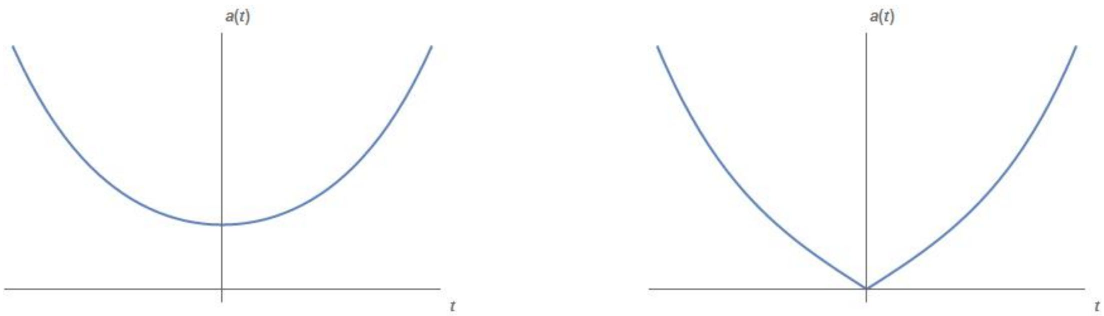
3. *Ако је* $R_0 < 0$ *онда је за* $k = -1$ *решење* $a(t) = \sqrt{\frac{-12}{R_0}}\left|\cos\frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{R_0}{3}}t - \varphi\right)\right|$, *где је* φ *изабрано тако да је* $\sigma = \frac{-6}{R_0}\cos\varphi$ *и* $\tau = \frac{-6}{R_0}\sin\varphi$.

Доказ. Нека је $R_0 > 0$. За $k = 0$ добијамо да је $\sigma = 0$ или $\tau = 0$, па је скалирајући фактор облика $a(t) = a_0 e^{\lambda t}$ и Хаблов параметар је константан. У другом случају, ако изаберемо $k = +1$ постоји јединствено φ такво да је $\sigma + \tau = \frac{6}{R_0}\cosh\varphi$ и $\sigma - \tau = \frac{6}{R_0}\sinh\varphi$. Тада је и

$$b(t) = \frac{12}{R_0}\cosh^2\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}t + \varphi\right), \quad a(t) \ = \sqrt{\frac{12}{R_0}}\cosh\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}t + \varphi\right). \tag{3.169}$$

На крају, ако је $k = -1$, $b(t)$ се трансформише у

$$b(t) = \frac{12}{R_0}\sinh^2\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}t + \varphi\right), \quad a(t) \ = \sqrt{\frac{12}{R_0}}\left|\sinh\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}t + \varphi\right)\right|. \tag{3.170}$$



Слика 3.6: Скалирајући фактор $a(t)$ за $k = 1$ и $k = -1$.

Нека је $R_0 = 0$. Ако је $k = 0$ онда се функције $b(t)$ и $a(t)$ своде на константе. Са друге стране, ако је $k \neq 0$, $b(t)$ се може записати као

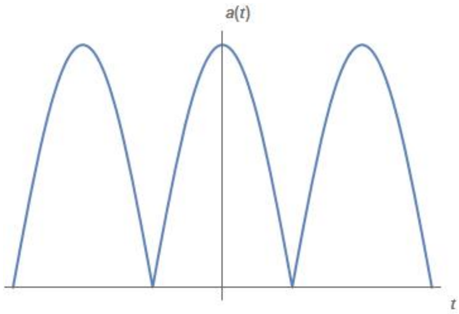
$$b(t) = -k(t - \frac{\sigma}{2k})^2. \tag{3.171}$$

Ако је $k = +1$ тада нема решења за скалирајући фактор $a(t)$ јер је $b(t) \leq 0$. За $k = -1$ скалирајући фактор је

$$a(t) = |t + \frac{\sigma}{2}|. \tag{3.172}$$

Последњи случај је $R_0 < 0$. За $k = -1$ постоји јединствено φ тако да је $\sigma = \frac{-6}{R_0}\cos\varphi$ и $\tau = \frac{-6}{R_0}\sin\varphi$. Тада су $a(t)$ и $b(t)$ у облику:

$$b(t) = \frac{-12}{R_0}\cos^2\frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{R_0}{3}}t - \varphi\right),$$
$$a(t) = \sqrt{\frac{-12}{R_0}}\left|\cos\frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{R_0}{3}}t - \varphi\right)\right|. \tag{3.173}$$



Слика 3.7: Скалирајући фактор $a(t)$ за $k = -1$.

У случају $k = +1$, $b(t)$ се може записати као $b(t) = \frac{12}{R_0}\sin^2\frac{1}{2}\left(\sqrt{-\frac{R_0}{3}}t - \varphi\right)$. Пошто је $b(t) \leq 0$ нема решења за скалирајући фактор $a(t)$. ■

Вратимо се сада на једначину (3.165). Као други случај посматрајмо

$$W = \frac{-1}{16\pi G}, \quad U = \frac{2\Lambda - R_0}{16\pi G}. \tag{3.174}$$

Једначине (3.164) имају заједничко решење по f_0 акко

$$\mathcal{G}(R_0)\mathcal{H}(R_0) - (R_0 - 2\Lambda)\frac{\partial}{\partial R}(\mathcal{G}(R)\mathcal{H}(R))|_{R=R0} = 0. \tag{3.175}$$

Глава 4

Космолошке пертурбације

Кратак увод у космолошке пертурбације изложићемо као у књизи Муханова [55]. FRW метрику са малим пертурбацијама коју записујемо

$$\mathrm{d}s^2 = (g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu})\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \tag{4.1}$$

где је $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}|$. За анализу пертурбација погодније је да уместо космичког времена t, користимо конформно време τ које је дефинсано релацијом

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = a(\tau)\left(-\mathrm{d}\tau^2 + g_{ij}\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j\right), \tag{4.2}$$

где индекси μ, ν узимају вредности од 0 до 3, а индекси i, j узимају вредности од 1 до 3. Пертурбације се деле на три врсте: скаларне, векторске и тензорске пертурбације. Ова подела је базирана на симетрији хомогене и изотропне позадине, која је у сваком фиксираном тренутку инваријантна у односу на групу просторних ротација и транслација. Компонента δg_{00} је инваријантна у односу на просторне ротације и зато је пишемо у облику

$$\delta g_{00} = 2a(\tau)^2\phi, \tag{4.3}$$

где је ϕ инваријантна у односу на просторне ротације и транслације.

Компоненте δg_{0i} се разлажу у збир (просторног) градијента скаларне функције B и вектора S_i, чија је дивергенција нула:

$$\delta g_{0i} = a(\tau)^2(\partial_i B + S_i). \tag{4.4}$$

Приметимо да вектор S_i има две независне компоненте. Слично претходном случају преостале компоненте δg_{ij} се разлажу на четири дела

$$\delta g_{ij} = a(\tau)^2(2\psi g_{ij} + 2\partial^2_{ij}E + \partial_i F_j + \partial_j F_i + h_{ij}), \tag{4.5}$$

где су ψ и E скаларне функције, за вектор F_i важи $\operatorname{div} F_i = 0$ и тензор h_{ij} задовољава улове $h^i_i = 0$ и $\partial_i h^i_j = 0$.

Скаларне пертурбације су описане са четири функције ϕ, ψ, B, E. Векторске пертурбације су описане са два вектора S_i и F_i. Због услова да се дивергенција ових вектора анулира имамо четири независнне компоненте. Тензорске пертурбације су описане са h_{ij} који је ограничен са четири услова па има само две независне комопненте. У даљем тексту анализирамо само скаларне пертурбације. Формула (4.1) се тада трансформише у

$$\mathrm{d}s^2 = a(\tau)^2 \left(-(1-2\phi)\mathrm{d}\tau^2 - 2\partial_i B \mathrm{d}x^i \mathrm{d}\tau + ((1+2\psi)g_{ij} - 2\partial^2_{ij}E)\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j\right). \tag{4.6}$$

Посматрајмо координатну трансформацију $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, где је $\xi^\mu = (\xi_0, \xi^i)$ инфинитезимални вектор. Такође просторни део разлажемо као $\xi^i = \xi^i_\perp + \partial^i\zeta$, где је дивергенција вектора $\xi_\perp$ једнака нули, а ζ скаларна функција. При овој координатној трансформацији функције ϕ, ψ, B, E се трансформишу на следећи начин ($'$ означава диференцирање по τ):

$$\begin{aligned}
\phi &\to \phi - \frac{1}{a}(a\xi^0)', \\
\psi &\to \psi + \frac{a'}{a}\xi^0, \\
B &\to B + \zeta' - \xi^0, \\
E &\to E + \zeta.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Приметимо да у трансформацији скаларних пертурбација учествују само функције ζ и ξ^0, тако да се њиховим погодним избором могу било које две од функција ϕ, ψ, B, E поништити. Из овога следи да је простор физичких пертурбација дводимензион. Функције

$$\begin{aligned}
\Phi &= \phi - \frac{1}{a}(a(B - E'))', \\
\Psi &= \psi + \frac{a'}{a}(B - E'),
\end{aligned} \tag{4.8}$$

се називају Бардинови потенцијали. Φ и Ψ су инваријантне у односу на трансформације $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$. Ако је $\Phi = \Psi = 0$ онда се пертурбације могу елиминисати погодном координатном трансформацијом.

У наставку посматрамо пертурбације за раван простор са де Ситеровим решењем $a(t) = a_0 \exp(Ht)$, где константа H игра улогу Хабловог параметра и метрика је

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2). \tag{4.9}$$

За анализу пертурбација погодније је да уместо космичког времена t, користимо конформно време τ које се уводи релацијом $a\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t$. Тада FRW метрика постаје

$$ds^2 = a(\tau)^2(-\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2). \tag{4.10}$$

За де Ситерово решење имамо

$$\tau = -\frac{1}{a_0 H} e^{-Ht} \ \Rightarrow \ a(\tau) = -\frac{1}{H\tau}. \tag{4.11}$$

Када t пролази скуп $\mathbb{R}$, τ се креће од $-\infty$ до 0_-. Тренутак $t = 0$ одговара вредности $\tau = -\frac{1}{a_0 H}$.

4.1 Пертурбације

Пертурбације једначина кретања до линеарног члана, де Ситеровог решења се лако добијају јер се многи чланови поништавају. Директним рачуном се добијају једначине у облику

$$-m^2 \delta G^\mu_\nu + (R^\mu_\nu - K^\mu_\nu) v(\Box) \delta R = 0, \tag{4.12}$$

где је $m^2 = M_P^2 + 2f_0(\mathcal{G}'\mathcal{H} + \mathcal{H}'\mathcal{G})$ и $v(\Box) = -2(\mathcal{G}''\mathcal{H} + \mathcal{H}''\mathcal{G})f_0 + 2\mathcal{G}'\mathcal{H}'\mathcal{F}(\Box)$.

Приметимо да варијација оператора $\Box$ представља диференцијални оператор. Заиста, варијација оператора $\Box$ даје

$$(\delta\Box)f = [\delta g^{\mu\nu}(\partial_\mu\partial_\nu - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho) - g^{\mu\nu}\gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho]f. \tag{4.13}$$

Варијацију Кристофелових симбола обележавамо са $\gamma^\rho_{\mu\nu}$, тј.

$$\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\nabla_\mu h^\rho_\nu + \nabla_\nu h^\rho_\mu - g^{\rho\sigma}\nabla_\sigma h_{\mu\nu}). \tag{4.14}$$

Ако је f константна функција онда је $(\delta\Box)f = 0$. Слично важи и за оператор K^μ_ν:

$$(\delta K^\mu_\nu) = [\delta g^{\mu\sigma}(\partial_\sigma\partial_\nu - \Gamma^\rho_{\sigma\nu}\partial_\rho) - g^{\mu\sigma}\gamma^\rho_{\sigma\nu}\partial_\rho - \delta^\mu_\nu \delta\Box]f, \tag{4.15}$$

Дакле ако је f константна функција, онда је $(\delta K^\mu_\nu)f = 0$.

Траг једначине (4.12) је

$$[m^2 + (R+3\Box)v(\Box)]\delta R = \mathcal{U}(\Box)\delta R = 0. \tag{4.16}$$

За решавање ове једначине користимо Вајерштрасову теорему о факторизацији.

$$\mathcal{U}(\Box)\delta R = \prod_i (\Box - \omega_i^2) e^{\gamma(\Box)} \delta R = 0, \tag{4.17}$$

где су ω_i^2 корени једначине $\mathcal{U}(\omega^2) = 0$ и $\gamma(\Box)$ је цела функција, па $e^{\gamma(\omega^2)}$ нема нуле. Претпостављамо такође да нема вишеструких корена. Сваки од корена ω_i^2 добијамо као решења сопственог проблема

$$(\Box - \omega_i^2)\delta R = 0. \tag{4.18}$$

Одговарајуће сопствене функције које одговарају сопственој вредности ω_i^2 обележавамо са δR_i. Опште решење по δR је сума по свим вредностима ω_i^2

$$\delta R = \sum_i \delta R_i. \tag{4.19}$$

Напоменимо да је случај $\delta R = 0$ врло интересантан и има битну улогу у наставку анализе.

4.2 Решења једначине (4.16)

Као што је већ речено, потребно је решити једначину (4.18). То је једначина другог реда, која се експлицитно расписује као

$$\left(\partial_\tau^2 - \frac{2}{\tau}\partial_\tau + k^2 + \frac{\omega_i^2}{H^2\tau^2}\right)\delta R = 0. \tag{4.20}$$

Опште решење је

$$\delta R_i = (-k\tau)^{3/2}\left(C_{1i}J_{\nu_i}(-k\tau) + C_{2i}Y_{\nu_i}(-k\tau)\right), \tag{4.21}$$

где су J, Y Беселове функције прве и друге врсте, $\nu_i = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{\omega_i^2}{H^2}}$ и $C_{1i,2i}$ су интеграционе константе. Комплетно решење δR се добија као сума појединачних δR_i.

$$\delta R = \sum_i \delta R_i = \sum_i (-k\tau)^{3/2}\left(C_{1i}J_{\nu_i}(-k\tau) + C_{2i}Y_{\nu_i}(-k\tau)\right). \tag{4.22}$$

4.2.1 Бардинови потенцијали

Потребно је одредити Бардинове потенцијале, који су уведени једначином (4.8). Варијација δR се преко Φ и Ψ изражава као

$$\delta R = \frac{2}{a^2}\left(k^2(\Phi - 2\Psi) - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 6\frac{a''}{a}\Phi - 3\Psi'' - 9\frac{a'}{a}\Psi'\right). \tag{4.23}$$

Овај израз важи за произвољан скалирајући фактор $a(t)$. Специјално за де Ситеров простор овај израз је

$$\delta R = -6H^2\left(4\Phi - \tau(\Phi' + 3\Psi') + \tau^2\Psi''\right) + 2\tau^2 H^2 k^2\left(\Phi - 2\Psi\right). \tag{4.24}$$

Још једну једначину добијамо из система (4.12), на позицијама $i \neq j$,

$$-m^2\delta G^i_j - g^{ik}\partial_k\partial_j v(\Box)\delta R = 0. \tag{4.25}$$

Када се све изрази у функцији потенцијала Φ и Ψ добија се

$$-m^2(\Phi - \Psi) + v(\Box)\delta R = 0. \tag{4.26}$$

4.3 Решења по Φ и Ψ

Треба решити једначине (4.16), (4.24) и (4.26). Претпоставимо да је $m^2 \neq 0$ и комбиновањем (4.26) и (4.16) добијамо

$$\delta R + (R + 3\Box)(\Phi - \Psi) = 0. \tag{4.27}$$

Заменом израза за варијацију δR (4.24) у (4.27) добијамо хомогену једначину по $\Phi + \Psi$

$$(\tau^2\partial_\tau^2 - 4\tau\partial_\tau + 4 + \frac{k^2\tau^2}{3})(\Phi + \Psi) = 0, \tag{4.28}$$

и њено решење је

$$\Phi + \Psi = \eta(c_1(\cos(\eta) + \eta\sin(\eta)) + c_2(-\eta\cos(\eta) + \sin(\eta)))\ , \tag{4.29}$$

где је $\eta = \frac{k\tau}{\sqrt{3}}$. Пошто, већ знамо варијацију δR (једначина (4.22)) из једначине (4.26) одмах добијамо разлику $\Phi - \Psi$

$$\Phi - \Psi = \frac{1}{m^2}\sum_i v(\omega_i^2)\delta R_i. \tag{4.30}$$

Коначно, Φ и Ψ се добијају у облику

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\eta}{2}(c_1(\cos(\eta) + \eta\sin(\eta)) + c_2(-\eta\cos(\eta) + \sin(\eta))) + \frac{1}{2m^2}\sum_i v(\omega_i^2)\delta R_i,\\ \Psi &= \frac{\eta}{2}(c_1(\cos(\eta) + \eta\sin(\eta)) + c_2(-\eta\cos(\eta) + \sin(\eta))) - \frac{1}{2m^2}\sum_i v(\omega_i^2)\delta R_i.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Специјално, ако је $m = 0$, из једначине (4.16) и (4.26) није могуће одредити Барденове потенцијале експлицитно. Једначина (4.12) такође не даје нову информацију јер се за $m = 0$ своди на $v(\Box)\delta R = 0$.
Приметимо да су Φ и Ψ ограничене акко су $\Phi + \Psi$ и $\Phi - \Psi$ ограничене. Ако $t \to \infty$, онда $\tau \to 0-$.

$$\lim_{t\to+\infty}(\Phi + \Psi) = \lim_{t\to+\infty}\eta[c_1(\cos(\eta) + \eta\sin(\eta)) + c_2(-\eta\cos(\eta) + \sin(\eta))] = 0, \tag{4.32}$$

$$\lim_{t\to+\infty}(\Phi - \Psi) = \frac{1}{m^2}\sum_i v(\omega_i^2)\lim_{t\to+\infty}(-k\tau)^{3/2}\left(C_{1i}J_{\nu_i}(-k\tau) + C_{2i}Y_{\nu_i}(-k\tau)\right). \tag{4.33}$$

Асимптотско понашање Беселових функција ($z \to 0$) је

$$\begin{aligned}J_\nu(z) &\sim z^{\Re\nu},\\ Y_\nu(z) &\sim z^{-|\Re\nu|}, \Re\nu \neq 0,\\ Y_\nu(z) &\sim \ln z, \Re\nu = 0.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Дакле, Барденови ппотенцијали су ограничени за

$$|\Re\nu| < \frac{3}{2}. \tag{4.35}$$

Овај резултат се у потпуности слаже са радом [9]. У том раду је посматрана шира класа решења, која за велике вредности времена конвергира ка де Ситеровом решењу, а модификација Ајнштајн-Хилбертовог дејства је у облику $R\mathcal{F}(\Box)R$.
У овој дисертацији се посматрају само де Ситерова решења, али је Лагранжијан општији. Специјално, за $\mathcal{G}(R) = \mathcal{H}(R) = R$ добијају се разултати као у раду [9].

4.4 Интерпретација услова (4.35)

У претходном одељку је стабилност решења сведена на услов (4.35). Параметар ν зависи од оператора $\mathcal{U}(\Box)$, тако да је

$$\nu = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{\omega^2}{H^2}} \tag{4.36}$$

и $\mathcal{U}(\omega^2) = 0$. Штавише, да не би било духова неопходно је да постоји највише један корен ω^2 оператора $\mathcal{U}$.

Ако се вратимо на дефинцију оператора $\mathcal{U}$ и узимајући у обзир број корена, тада

$$\begin{aligned} \mathcal{U} =& m^2 + (R + 3\Box)v(\Box) \\ =& [M_P^2 + 2f_0(\mathcal{H}'\mathcal{G} + \mathcal{G}'\mathcal{H})] + 2(R + 3\Box)[-(\mathcal{H}''\mathcal{G} + \mathcal{G}''\mathcal{H})f_0 + \mathcal{G}'\mathcal{H}'\mathcal{F}(\Box)] \\ =& (\Box - \omega^2)e^{\gamma(\Box)}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

где је $\gamma(\Box)$ цела функција. Из последње једначине се може изразити $\mathcal{F}(\Box)$ и добити одговарајућа ограничења. У наставку посматрамо случај

$$\mathcal{H}(R) = R^p, \quad \mathcal{G}(R) = R^q, \tag{4.38}$$

за неке ненула целе бројеве p и q.

Једначина кретања постаје

$$M_P^2 R - 4\Lambda + 2f_0 R^{p+q}(2 - p - q) = 0. \tag{4.39}$$

Ова полиномијална једначина се може експлицитно решити по R за $-3 \leq p + q \leq 4$. Такође, имамо да је

$$m^2 = M_P^2 + 2(p + q)R^{p+q-1} f_0, \tag{4.40}$$

$$v(\Box) = -2R^{p+q-2}((p^2 - p + q^2 - q)f_0 + 2pq\mathcal{F}(\Box)). \tag{4.41}$$

Корисно је, на почетку, посматрати $\mathcal{U}(0)$. Неопходан услов стабилности је

$$M_P^2 + 2R^{p+q-1}(p + q)(2 - p - q)f_0 = -\omega^2 e^{\gamma(0)}. \tag{4.42}$$

Из услова (4.36), ω^2 мора бити реално и позитивно да би се задовољио услов

(4.35). Тај услов се своди на неједнакост

$$M_P^2 + 2R^{p+q-1}(p+q)(2-p-q)f_0 < 0. \tag{4.43}$$

Приметимо да за $p+q=0$ и $p+q=2$ не постоји стабилно решење. У општем случају треба решити (4.39) и (4.43). Користећи једначине кретања (4.39) услов (4.43) постаје

$$M_P^2 R(p+q-1) > 4\Lambda(p+q). \tag{4.44}$$

У случају $p+q=1$ можемо да добијемо стабилно решење ако је $\Lambda < 0$. Овај услов је могућ за $f_0 < 0$. Да би решили систем (4.39) и (4.43) напишимо га као

$$1 - s + u = 0, \qquad 1 + uz < 0, \tag{4.45}$$

где је $s = \frac{4\Lambda}{M_P^2 R}, z = p+q, u = \frac{2f_0}{M_P^2} R^{z-1}(2-z)$. Овај систем, иако изгледа једноставан, не даје јасну физичку интерпретацију.

4.5 Пертурбације простора Минковског

У Ајнштајновој теорији гравитације се једначине гравитационих таласа добијају пертурбацијама једначина кретања метрике Минковског у блику

$$\Box\psi_{\mu\nu} = 0, \qquad \nabla_\mu \psi^{\mu\nu} = 0, \tag{4.46}$$

где је $\psi_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} h$, $h_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}$, $h = g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$ и $|h_{\mu\mu}| \ll 1$. Ове једначине подсећају на једначиње кретања електормагнетних таласа са Лоренцовим условом ([12]). У овом одељку метрика $g_{\mu\nu}$ се узима да је метрика Минковског тј.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-1,1,1,1). \tag{4.47}$$

Тада је коваријантни извод једнак парцијалном изводу и $\Box = -\partial_{tt}^2 + \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2$.

Пертурбације једначина кретања (3.62) до линеарног члана, метрике Минковског се добијају у облику

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) - g_{\mu\nu}\mathcal{H}'(R) f_0 \mathcal{G}(R)\delta R - h_{\mu\nu} f_0 \mathcal{G}(R)\mathcal{H}(R)\right) \\ &+ \delta R_{\mu\nu} W - K_{\mu\nu}\delta W + \frac{1}{16\pi G}(\delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\delta R + h_{\mu\nu}\Lambda), \end{aligned} \tag{4.48}$$

где је $\delta W = -2\mathcal{G}'(R)\mathcal{H}'(R)\mathcal{F}(\Box)\delta R - f_0(\mathcal{G}''(R)\mathcal{H}(R) + \mathcal{H}''(R)\mathcal{G}(R))\delta R$ и варијације кривинских тензора су $\delta R = -K_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$, $\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\mu \gamma^\lambda_{\lambda\nu}$.

Користећи тензор $\psi_{\mu\nu}$ једначина (4.48) се записује у облику

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{G}'(0)\mathcal{H}(0) - 2\mathcal{G}'(0)\mathcal{H}'(0)K_{\mu\nu}\right)\mathcal{F}(\Box)\delta R \\
&+\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}f_0\mathcal{H}'(0)\mathcal{G}(0) - f_0(\mathcal{G}''(0)\mathcal{H}(0) + \mathcal{H}''(0)\mathcal{G}(0))K_{\mu\nu} + \frac{1}{32\pi G}\right)\delta R \\
&- h_{\mu\nu}\left(\Lambda - \frac{1}{2}f_0\mathcal{G}(0)\mathcal{H}(0)\right) + \delta R_{\mu\nu}\left(f_0(\mathcal{G}\mathcal{H})'(0) + \frac{1}{16\pi G}\right) = 0, \\
&\delta R = \nabla_\mu\nabla_\nu\psi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Box(g_{\mu\nu}\psi^{\mu\nu}).
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

Приметимо да ако претпоставимо да су једначине (4.46) задовољене онда се варијације δR и $\delta R_{\mu\nu}$ поништавају и претходна једначина се своди на

$$
\Lambda = \frac{1}{2}f_0\mathcal{G}(0)\mathcal{H}(0), \tag{4.50}
$$

и гравитациони таласи се понашају идентично као и у Ајнштајновој теорији гравитације.

Закључак

Разматрали смо класу модела нелокалне гравитације без материје, која је задата дејством

$$S = \int_M \left(\frac{R - 2\Lambda}{16\pi G} + \mathcal{H}(R)\mathcal{F}(\Box)\mathcal{G}(R) \right) \sqrt{-g}\, \mathrm{d}^4 x.$$

Презентовано је извођење једначина кретања за дејство S. Решавање једначина кретања је веома компликовано и није могуће добијање њихових општих решења. Разматрана су три модела, први са нелокалним чланом $R^p\mathcal{F}(\Box)R^q$ где су p и q неки цели бројеви, други са нелокалним чланом $(R+R_0)^m\mathcal{F}(\Box)(R+R_0)^m$ где су R_0 и m константе и трећи у коме су функције $\mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ произвољне диференцијабилне функције и скаларна кривина R је константна.

Модел са нелокалним чланом $R\mathcal{F}(\Box)R$ су посматрали више аутора [7, 8, 10, 9, 49, 51, 50] и добили космолошка решења у облику $a(t) \sim \cosh \lambda t$ и $a(t) \sim e^{-\frac{\gamma}{12}t^2}$. Ова дисертација садржи општије решење $a(t) = a_0(\sigma e^{\lambda t} + \tau e^{-\lambda t})$. Ако су p и q природни бројеви дејство је први пут уведено у раду [24] и представљена су оригинална решења у облику $a(t) = a_0 \exp(-\frac{\gamma}{12}t^2)$, која су уопштења претходних резултата. Ово су несингуларна космолошка решења са прескоком. Добијена су решења за $1 \le q \le p \le 4$. У свим случајевима, аналитичка функција $\mathcal{F}$ и њен извод $\mathcal{F}'$ морају да задовоље услове у облику

$$f_0 = x_0, \quad \mathcal{F}(k\gamma) = x_k \ \ (1 \le k \le p), \quad \mathcal{F}'(l\gamma) = y_l \ \ (1 \le l \le q),$$

за неке константе x_k и y_l. Приметимо да у свим случајевима осим $p = q = 1$ константе x_k и y_l су јединствено одређене (за фиксиране вредности параметара γ и Λ). Такође, за $p = q = 1$ константа γ је одређена космолошком константом ($\gamma = -12\Lambda$), што значи да је космолошка константа неопходна да бисмо имали решење које није константно. У другим случајевима нема ограничења за константу γ.

За други модел, са нелокалним чланом $(R+R_0)^m\mathcal{F}(\Box)(R+R_0)^m$, разматрана су решења у облику $a(t) = a_0 t^n \exp(-\frac{\gamma}{12}t^2)$ у три случаја. Добијена су космолошка решења у случајевима 1. $n = 0$, $m = \frac{1}{2}$, 2. $n = \frac{2}{3}$, $m = \frac{1}{2}$,

3. $n = \frac{1}{2}, m = 1$, док је у случају $n = \frac{1}{2}$, $m = -\frac{1}{4}$ показано да нема решења. Услови на аналитичку функцију $\mathcal{F}$ су сличног облика као и за претходно дејство. Решења са скалирајућим фактором у облику $a(t) = At^{\frac{2}{3}} \exp(\frac{\gamma}{12}t^2)$ и $a(t) = t^{\frac{1}{2}} \exp(\frac{\gamma}{12}t^2)$ $(\gamma > 0)$ су интересантна јер када $t \to 0$ асимптотски су еквивалентна са решењима $a(t) = t^{\frac{2}{3}}$ и $a(t) = t^{\frac{1}{2}}$ респективно, која у Ајнштајновој гравитацији представљају васиону у којој доминира материја, односно радијација. Ова решења указују на могућност да уведена нелокална модификација Ајнштајнове теорије гравитације делимично имитира тамну материју и тамну енергију. У будућем раду, уз додавање материје, боље ће се сагледати физички значај ових решења.

У случају када је скаларна кривина константна $(R = R_0)$ добијена су сва релевантна космолошка решења за дејство (3.9). Добијена су решења у облику

$$
\begin{aligned}
R_0 > 0, &\qquad a(t) = \sqrt{\frac{6k}{R_0} + \sigma e^{\sqrt{\frac{R_0}{3}}t} + \tau e^{-\sqrt{\frac{R_0}{3}}t}}, \quad 9k^2 = R_0^2\sigma\tau; \\
R_0 = 0, &\qquad a(t) = \sqrt{-kt^2 + \sigma t + \tau}, \quad \sigma^2 + 4k\tau = 0; \\
R_0 < 0, &\qquad a(t) = \sqrt{\frac{6k}{R_0} + \sigma \cos\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t + \tau \sin\sqrt{\frac{-R_0}{3}}t}, \quad 36k^2 = (\sigma^2 + \tau^2).
\end{aligned}
$$

Пошто је $\Box R = 0$ добијамо услове искључиво за коефицијент f_0. Ова решења су погодна за анализу малих пертурбација. Очекује се да та анализа да додатне услове за аналитичку функцију $\mathcal{F}$. Имамо две групе решења, једну дату условом $R_0 + 4R_{00} = 0$, који ограничава вредности параметара σ и τ, и другу $W = -\frac{1}{16\pi G}$ која даје услов на производ $\mathcal{G}(R)\mathcal{H}(R)$ у тачки R_0. У првој групи услов $R_0 + 4R_{00} = 0$ ограничава избор параметра k па су могућа решења:

- $R_0 > 0$, $k = 0$, $a(t) = a_0 \exp(\lambda t)$,
- $R_0 > 0$, $k = 1$, $a(t) = \sqrt{\frac{12}{R_0}} \cosh \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}t + \varphi \right)$,
- $R_0 > 0$, $k = -1$, $a(t) = \sqrt{\frac{12}{R_0}} \left| \sinh \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{R_0}{3}}t + \varphi \right) \right|$,
- $R_0 = 0$, $k = 0$, $a(t) = \mathrm{const}$,
- $R_0 = 0$, $k = -1$, $a(t) = |t + \frac{\sigma}{2}|$,
- $R_0 < 0$, $k = -1$, $a(t) = \sqrt{\frac{-12}{R_0}} \left| \cos \frac{1}{2} \left(\sqrt{-\frac{R_0}{3}}t - \varphi \right) \right|$,

где је параметар φ изабран на погодан начин. Космолошке пертурбације око де Ситеровог решења су разматране у петој глави. Изведени су неопходни услови за пертурбације да де Ситерово решење буде стабилно. Интересантно је да у случајевима $p+q=0$ и $p+q=2$ нема стабилних решења. Први случај се може схватити као "уопштена космолошка константа", јер је $\mathcal{GH}=1$, али се стабилност решења не може добити. Други случај је нелокална генерализација R^2 теорије([62]). Стабилост решења је у општем случају дата условом

$$1-s+u=0, \qquad 1+uz<0.$$

У наставку истраживања могу се разматрати презентовани модели уз додатак материје, што је реалнији случај и што би требало да даје додатне услове на функцију $\mathcal{F}$. Такође може се разматрати под којим условима теорија не садржи духове и тахионе (честице чија је брзина већа од брзине светлости c). За даље истраживање, нарочито је привлачан и обећавајући модел са нелокалним чланом облика $\sqrt{R-2\Lambda}\mathcal{F}(\Box)\sqrt{R-2\Lambda}$. Прелиминарни резултати показују да овај модел садржи космолошка решења која одговарају тамној материји и тамној енергији.

Додатак A

Увод у варијациони рачун

У додатку дајемо дефиницију варијације функционала на нормираном простору и нека њена основна својства. Главна примена варијационог рачуна у физици се односи на принцип минималног дејства, који даје потребне услове за одређивање екстремних вредности функционала. Као резултат добијају се једначине кретања за физичке величине.

Нека је V (реалан) векторски простор и $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$ пресликавање које за свако $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$ задовољава:

1. $\|x\| = 0$ акко $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$ и
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неједнакост троугла).

Пресликавање $\|\cdot\|$ се назива норма на векторском простору V, а векторски простор V снабдевен нормом се назива нормирани векторски простор. Нека је $A \subset V$ и $S : A \to \mathbb{R}$ функционал на A. Варијацију функционала S дефишемо на следећи начин

Дефиниција A.1. Нека је $x \in A$, $\eta \in V$, $\delta, \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$ тако да је $\|\varepsilon\eta\| < \delta$ за $|\epsilon| < \epsilon_0(\delta)$. Тада се варијација функционала S у тачки x и правцу η дефинише као

$$\delta S(x, \eta) = \frac{\mathrm{d}S(x + \varepsilon\eta)}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$$

ако назначени извод постоји. Такође, обележимо са $\delta x = \varepsilon\eta$ варијацију од x.

Вектор $x \in A$ је релативни минимум функционала S ако постоји лопта $B = \{y \in V | \|y - x\| < R\}$ таква да је $S(x) \leq S(y)$ за свако $y \in A \cap B$. У следећој теореми дајемо неопходан услов да вектор $x \in A$ буде релативни минимум.

Теорема А.1. *Нека је $x \in A$ и $\eta \in V$ задовољава услове из дефиниције А.1. Ако је x релативни минимум функционала $S : A \to \mathbb{R}$, онда је $\delta S(x, \eta) = 0$.*

Изаберимо сада за векторски простор V простор $\mathfrak{T}^0_2 M$, а за скуп A бирамо скуп свих метричких тензора на M. Ако је x карта на M онда се сваки елемент $X \in V$ разлаже као

$$X = X_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j. \tag{A.1}$$

Тада се норма на V дефинише са

$$\|X\| = \sqrt{\int_M \left(\sup_{y \in \mathbb{S}^{n-1}} \|X_{ij}(p)y\| \right)^2 \sqrt{-g} \mathrm{d}^n x}, \tag{A.2}$$

где је $\mathbb{S}^{n-1}$ јединична сфера у $\mathbb{R}^n$.

Следећи корак је да проширимо дефиницију варијације на функционале чији је кодомен скуп глатких функција $\mathfrak{R}M$, односно скуп свих тензорских поља $\mathfrak{T}^r_s M$.

Дефиниција А.2. Нека је $S : A \to \mathfrak{R}M$, $x \in A$ и $p \in M$. Тада је $\delta S : A \to \mathfrak{R}M$ дефинисано са

$$(\delta S)(x)(p) = \delta(S(x)(p)). \tag{A.3}$$

У случају тензорских поља $X \in \mathfrak{T}^r_s M$, слично претходном имамо да је

$$X = X^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}. \tag{A.4}$$

Варијацију тензорског поља X дефинишемо по координатама, тј.

Дефиниција А.3. Нека је $S : A \to \mathfrak{T}^r_s M$, $X \in A$ и $p \in M$. Тада је $\delta S : A \to \mathfrak{T}^r_s M$ дефинисано са

$$(\delta S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s})(X)(p) = \delta(S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(X)(p)). \tag{A.5}$$

Приметимо да дефиниција А.3 не зависи од избора карте на многострукости M.

Теорема А.2. *Нека је $C : A \to \mathbb{R}$ константан функционал. Тада је $\delta C = 0$.*

Теорема А.3. *Нека су $S_1, S_2 \in \mathfrak{T}^r_s M$ тензорска поља и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тада је $\delta(\alpha S_1 + \beta S_2) = \alpha \delta S_1 + \beta \delta S_2$ тј. варијација је линеаран оператор на простору $\mathfrak{T}^r_s M$.*

Теорема А.4. *Нека је $S \in \mathfrak{T}^r_s M$ тензорско поље и x карта на M. Тада је $\delta(\partial_\mu S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}) = \partial_\mu(\delta S^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s})$.*

Теорема А.5. *Нека је* $L : A \to \mathfrak{R}M$ *и* $S(a) = \int_M L(a)(x)\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x$ *функционал на* A. *Тада је* $\delta S = \int_M \delta L(a)(x)\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x$.

Приметимо да варијације Кристофелових симбола друге врсте (дефинисана координатно) представљају тензорско поље типа $(1,2)$.

Додатак Б

Модел са нелокалним чланом облика $R^p\mathcal{F}(\Box)R^q$

У овом додатку презентујемо још седам решења једначине (3.126). Доказ ове теореме је сличан доказу Теореме 3.5.

Теорема Б.1. *Једначина* (3.126) *је задовољена у следећим случајевима* ($\kappa = \frac{1}{16\pi G}$)*:*

- $p = 3,\ q = 1$:
  $f_0 = -\frac{\kappa(95\gamma+768\Lambda)}{268\gamma^4}$,
  $\mathcal{F}(\gamma) = \frac{\kappa(107\gamma+408\Lambda)}{6432\gamma^4}$, $\quad \mathcal{F}'(\gamma) = -\frac{9\kappa(\gamma+8\Lambda)}{88\gamma^5}$,
  $\mathcal{F}(2\gamma) = -\frac{\kappa(173\gamma+840\Lambda)}{7504\gamma^4}$,
  $\mathcal{F}(3\gamma) = 0$,

- $p = 3,\ q = 2$:
  $f_0 = -\frac{3\kappa(7099\gamma+23949\Lambda)}{15355\gamma^5}$,
  $\mathcal{F}(\gamma) = \frac{3\kappa(10702\gamma+40497\Lambda)}{245680\gamma^5}$, $\quad \mathcal{F}'(\gamma) = -\frac{3\kappa(11614\gamma+68865\Lambda)}{270248\gamma^6}$,
  $\mathcal{F}(2\gamma) = -\frac{27\kappa(6\gamma+25\Lambda)}{24568\gamma^5}$, $\quad \mathcal{F}'(2\gamma) = \frac{513\kappa(6\gamma+25\Lambda)}{171976\gamma^6}$,
  $\mathcal{F}(3\gamma) = -\frac{27\kappa(6\gamma+25\Lambda)}{49136\gamma^5}$,

- $p = 3,\ q = 3$:
  $f_0 = \frac{9\kappa(77093\gamma+441108\Lambda)}{1405352\gamma^6}$,
  $\mathcal{F}(\gamma) = \frac{\kappa(338597\gamma+1847844\Lambda)}{9513152\gamma^6}$, $\quad \mathcal{F}'(\gamma) = -\frac{3\kappa(1462285\gamma+8126148\Lambda)}{13080584\gamma^7}$,
  $\mathcal{F}(2\gamma) = -\frac{21\kappa(379\gamma+2076\Lambda)}{432416\gamma^6}$, $\quad \mathcal{F}'(2\gamma) = \frac{255\kappa(379\gamma+2076\Lambda)}{1324274\gamma^7}$,
  $\mathcal{F}(3\gamma) = -\frac{9\kappa(379\gamma+2076\Lambda)}{864832\gamma^6}$, $\quad \mathcal{F}'(3\gamma) = \frac{3\kappa(379\gamma+2076\Lambda)}{432416\gamma^7}$,

- $p=4,\ q=1$:

$$f_0=-\frac{3\kappa(1111\gamma+5361\Lambda)}{56279\gamma^5},$$
$$\mathcal{F}(\gamma)=\frac{3\kappa(1570\gamma+11679\Lambda)}{1800928\gamma^5},\qquad \mathcal{F}'(\gamma)=-\frac{27\kappa(2\gamma+15\Lambda)}{2320\gamma^6},$$
$$\mathcal{F}(2\gamma)=-\frac{9\kappa(50102\gamma+262581\Lambda)}{80141296\gamma^5},$$
$$\mathcal{F}(3\gamma)=-\frac{3\kappa(105430\gamma+726207\Lambda)}{49525520\gamma^5},$$
$$\mathcal{F}(4\gamma)=-\frac{3\kappa(1570\gamma+11679\Lambda)}{2251160\gamma^5},$$

- $p=4,\ q=2$:

$$f_0=\frac{27\kappa(9773\gamma+38204\Lambda)}{6651260\gamma^6},$$
$$\mathcal{F}(\gamma)=\frac{27\kappa(116489\gamma+976692\Lambda)}{2128403200\gamma^6},\qquad \mathcal{F}'(\gamma)=-\frac{9\kappa(36889711\gamma+230208108\Lambda)}{22044176000\gamma^7},$$
$$\mathcal{F}(2\gamma)=-\frac{27\kappa(4591\gamma+19308\Lambda)}{170272256\gamma^6},\qquad \mathcal{F}'(2\gamma)=\frac{9\kappa(1257961\gamma-26340492\Lambda)}{108244505600\gamma^7},$$
$$\mathcal{F}(3\gamma)=\frac{9\kappa(2632969\gamma+9126132\Lambda)}{93649740800\gamma^6},$$
$$\mathcal{F}(4\gamma)=0,$$

- $p=4,\ q=3$:

$$f_0=\frac{3\kappa(3321165266\gamma+25006112775\Lambda)}{75401995915\gamma^7},$$
$$\mathcal{F}(\gamma)=\frac{\kappa(21007019473\gamma+144494046423\Lambda)}{2412863869280\gamma^7},\qquad \mathcal{F}'(\gamma)=-\frac{3\kappa(43005362079625\gamma+307070903674071\Lambda)}{1924258935750800\gamma^8},$$
$$\mathcal{F}(2\gamma)=-\frac{3\kappa(1426277827\gamma+10110884265\Lambda)}{1206431934640\gamma^7},\qquad \mathcal{F}'(2\gamma)=\frac{\kappa(15505640343740\gamma+110842995690981\Lambda)}{1503214190561440\gamma^8},$$
$$\mathcal{F}(3\gamma)=\frac{9\kappa(32585957\gamma+237505338\Lambda)}{4825727738560\gamma^7},\qquad \mathcal{F}'(3\gamma)=-\frac{109\kappa(32585957\gamma+237505338\Lambda)}{26541502562080\gamma^8},$$
$$\mathcal{F}(4\gamma)=\frac{\kappa(32585957\gamma+237505338\Lambda)}{1206431934640\gamma^7},$$

- $p=4,\ q=4$:

$$f_0=\frac{33\kappa(131820287\gamma+420903432\Lambda)}{343872804172\gamma^8},$$
$$\mathcal{F}(\gamma)=\frac{3\kappa(37038228809\gamma+146181469392\Lambda)}{127137036761600\gamma^8},\qquad \mathcal{F}'(\gamma)=-\frac{81\kappa(261799491587\gamma+967343633136\Lambda)}{4608717582608000\gamma^9},$$
$$\mathcal{F}(2\gamma)=-\frac{9\kappa(238071667\gamma+847503216\Lambda)}{7803583635712\gamma^8},\qquad \mathcal{F}'(2\gamma)=\frac{3\kappa(1392867522289\gamma+4562593829712\Lambda)}{6945189435783680\gamma^9},$$
$$\mathcal{F}(3\gamma)=\frac{537\kappa(765701\gamma+2682288\Lambda)}{9644878650880\gamma^8},\qquad \mathcal{F}'(3\gamma)=-\frac{4569\kappa(765701\gamma+2682288\Lambda)}{26523416289920\gamma^9},$$
$$\mathcal{F}(4\gamma)=\frac{3\kappa(765701\gamma+2682288\Lambda)}{219201787520\gamma^8},\qquad \mathcal{F}'(4\gamma)=-\frac{9\kappa(765701\gamma+2682288\Lambda)}{876807150080\gamma^9}.$$

Литература

[1] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron.Astrophys.*, 571:A16, 2014, `arXiv:1303.5076`.

[2] I. Ya. Aref'eva, L.V. Joukovskaya, and S. Yu. Vernov. Bouncing and accelerating solutions in nonlocal stringy models. *JHEP*, 0707:087, 2007, `arXiv:hep-th/0701184`.

[3] I. Ya. Aref'eva and A.S. Koshelev. Cosmological Signature of Tachyon Condensation. *JHEP*, 0809:068, 2008, `arXiv:0804.3570`.

[4] N. Barnaby, T. Biswas, and J. M. Cline. p-adic Inflation. *JHEP*, 0704:056, 2007, `arXiv:hep-th/0612230`.

[5] A.O. Barvinsky. Dark energy and dark matter from nonlocal ghost-free gravity theory. *Phys. Lett.*, B710:12–16, 2012, `arXiv:1107.1463`.

[6] T. Biswas, A. Conroy, A. S. Koshelev, and A. Mazumdar. Generalized ghost-free quadratic curvature gravity. *Class.Quant.Grav.*, 31:015022, 2014, `arXiv:1308.2319`.

[7] T. Biswas, E. Gerwick, T. Koivisto, and A. Mazumdar. Towards singularity and ghost free theories of gravity. *Phys.Rev.Lett.*, 108:031101, 2012, `arXiv:1110.5249`.

[8] T. Biswas, T. Koivisto, and A. Mazumdar. Towards a resolution of the cosmological singularity in non-local higher derivative theories of gravity. *JCAP*, 1011:008, 2010, `arXiv:1005.0590`.

[9] T. Biswas, A. S. Koshelev, A. Mazumdar, and S. Yu. Vernov. Stable bounce and inflation in non-local higher derivative cosmology. *JCAP*, 2012.

[10] T. Biswas, A. Mazumdar, and W. Siegel. Bouncing universes in string-inspired gravity. *JCAP*, 0603:009, 2006, `arXiv:hep-th/0508194`.

[11] F. Briscese, A. Marcian, L. Modesto, and E. N. Saridakis. Inflation in (Super-) renormalizable Gravity. *Phys.Rev.*, D87(8):083507, 2013, `arXiv:1212.3611`.

[12] B. Dragović. 100 godina Ajnštajnove teorije gravitacije. *Nastava fizike*, 3:77–86, 2016.

[13] B. Dragović. Evolucija vasione. *Nastava fizike*, 4:27–37, 2017.

[14] M. Pantić. *Uvod u Ajnštajnovu teoriju gravitacije.* Novi Sad, 2005.

[15] G. Calcagni, L. Modesto, and P. Nicolini. Super-accelerating bouncing cosmology in asymptotically-free non-local gravity. *Eur.Phys.J.*, C74(8):2999, 2014, `arXiv:1306.5332`.

[16] G. Calcagni and G. Nardelli. Non-local gravity and the diffusion equation. *Phys.Rev.*, D82:123518, 2010, `arXiv:1004.5144`.

[17] S. Carroll. *Spacetime and geometry (An Introduction to General Relativity).* San Francisco, 2004.

[18] S. M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity.* Santa Barbara, 1997.

[19] T. Clifton, P.G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis. Modified gravity and cosmology. *Phys.Rep.*, 513:1–189, 2012.

[20] A. De Felice and S. Tsujikawa. f(R) theories. *Living Rev. Rel.*, 13:3, 2010, `arXiv:1002.4928`.

[21] C. Deffayet and R.P. Woodard. Reconstructing the Distortion Function for Nonlocal Cosmology. *JCAP*, 0908:023, 2009, `arXiv:0904.0961`.

[22] S. Deser and R.P. Woodard. Nonlocal Cosmology. *Phys.Rev.Lett.*, 99:111301, 2007, `arXiv:0706.2151`.

[23] I. Dimitrijevic. Some ansäze in nonlocal modified gravity. In *7th mathematical physics meeting: summer school and conference on modern mathematical physics*, pages 131–140, 2013.

[24] I. Dimitrijevic. Cosmological solutions in modified gravity with monomial nonlocality. *Applied Mathematics and Computation*, 285:195 – 203, 2016.

[25] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, A. S. Koshelev, and Z. Rakic. Cosmology of modified gravity with a non-local f(R). 2015, `arXiv:1509.04254`.

[26] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, and Z. Rakic. New Cosmological Solutions in Nonlocal Modified Gravity. *Rom. J. Phys.*, 58(5-6):550–559, 2013, `arXiv:1302.2794`.

[27] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, and Z. Rakic. A new model of nonlocal modified gravity. *Publications de l institut mathematique-Beograd*, 94(108):187–196, 2013.

[28] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, and Z. Rakic. On Modified Gravity. *Springer Proc.Math.Stat.*, 36:251–259, 2013, `arXiv:1202.2352`.

[29] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, and Z. Rakic. Constant Curvature Cosmological Solutions in Nonlocal Gravity. In Bunoiu, OM and Avram, N and Popescu, A, editor, *TIM 2013 physics conference*, volume 1634 of *AIP Conference Proceedings*, pages 18–23. W Univ Timisoara, Fac Phys, 2014. TIM 2013 Physics Conference, Timisoara, ROMANIA, NOV 21-24, 2013.

[30] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, and Z. Rakic. Some power-law cosmological solutions in nonlocal modified gravity. In *Lie Theory and Its Applications in Physics*, volume 111 of *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, pages 241–250, 2014.

[31] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Grujic, and Z. Rakic. Some cosmological solutions of a nonlocal modified gravity. *Filomat*, 29(3):619–628, 2015.

[32] I. Dimitrijevic, B. Dragovich, J. Stankovic, A. S. Koshelev, and Z. Rakic. On Nonlocal Modified Gravity and its Cosmological Solutions. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 191:35–51, 2016, `arXiv:1701.02090`.

[33] Y. Dirian, S. Foffa, N. Khosravi, M. Kunz, and M. Maggiore. Cosmological perturbations and structure formation in nonlocal infrared modifications of general relativity. *JCAP*, 1406:033, 2014, `arXiv:1403.6068`.

[34] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry.* Boston, 1992.

[35] B. Dragovich. p-adic and adelic cosmology: p-adic origin of dark energy and dark matter. *AIP Conf.Proc.*, 826:25–42, 2006, `arXiv:hep-th/0602044`.

[36] B. Dragovich. Nonlocal Dynamics of p-Adic Strings. *Theor.Math.Phys.*, 164:1151–1155, 2010, `arXiv:1011.0912`.

[37] B. Dragovich. Towards p-Adic Matter in the Universe. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 36*, pages 13–24, 2013, `arXiv:1205.4409`.

[38] B. Dragovich. On nonlocal modified gravity and cosmology. In *Lie Theory and Its Applications in Physics*, volume 111 of *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, pages 251–262, 2014.

[39] E. Elizalde, E. O. Pozdeeva, and S. Yu. Vernov. Stability of de Sitter Solutions in Non-local Cosmological Models. *PoS*, QFTHEP2011:038, 2013, `arXiv:1202.0178`.

[40] E. Elizalde, E. O. Pozdeeva, S. Yu. Vernov, and Y. Zhang. Cosmological Solutions of a Nonlocal Model with a Perfect Fluid. *JCAP*, 1307:034, 2013, `arXiv:1302.4330`.

[41] A. L. Erickcek, T. L. Smith, and M. Kamionkowski. Solar System tests do rule out 1/R gravity. *Phys.Rev.*, D74:121501, 2006, `arXiv:astro-ph/0610483`.

[42] V. Faraoni. Nine Years of f(R) Gravity and Cosmology. *Astrophysics and Space Science Proceedings*, 38:19, 2014.

[43] J. Grujic. Equations of motion in nonlocal modified gravity. In *7th mathematical physics meeting: summer school and conference on modern mathematical physics*, pages 181–196, 2013.

[44] J. Grujic. *Geometrijska modifikacija Ajnštajnove teorije gravitacije*. PhD thesis, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, 2015.

[45] J. Grujic. On a new model of nonlocal modified gravity. *Kragujevac Journal of Mathematics*, 39(1):73–82, 2015.

[46] S. Jhingan, S. Nojiri, S.D. Odintsov, M. Sami, I Thongkool, et al. Phantom and non-phantom dark energy: The Cosmological relevance of non-locally corrected gravity. *Phys. Lett.*, B663:424–428, 2008, `arXiv:0803.2613`.

[47] T. Koivisto. Dynamics of Nonlocal Cosmology. *Phys.Rev.*, D77:123513, 2008, `arXiv:0803.3399`.

[48] T. S. Koivisto. Newtonian limit of nonlocal cosmology. *Phys.Rev.*, D78:123505, 2008, `arXiv:0807.3778`.

[49] A. S. Koshelev. Modified non-local gravity. *Rom.J.Phys.*, 57:894–900, 2012, `arXiv:1112.6410`.

[50] A. S. Koshelev. Stable analytic bounce in non-local Einstein-Gauss-Bonnet cosmology. *Class.Quant.Grav.*, 30:155001, 2013, `arXiv:1302.2140`.

[51] A. S. Koshelev and S. Yu. Vernov. On bouncing solutions in non-local gravity. *Phys.Part.Nucl.*, 43:666–668, 2012, arXiv:1202.1289.

[52] A. S. Koshelev and S. Yu. Vernov. Cosmological Solutions in Nonlocal Models. *Phys. Part. Nucl. Lett.*, 11(7):960–963, 2014, arXiv:1406.5887.

[53] L. Modesto and S. Tsujikawa. Non-local massive gravity. *Phys. Lett.*, B727:48–56, 2013, arXiv:1307.6968.

[54] J.W. Moffat. Ultraviolet Complete Quantum Gravity. *Eur.Phys.J.Plus*, 126:43, 2011, arXiv:1008.2482.

[55] V. Mukhanov. *Physical foundations of cosmology.* Cambridge, 2005.

[56] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Modified non-local-F(R) gravity as the key for the inflation and dark energy. *Phys. Lett.*, B659:821–826, 2008, arXiv:0708.0924.

[57] S. Nojiri and S. D. Odintsov. Unified cosmic history in modified gravity: from F(R) theory to Lorentz non-invariant models. *Phys.Rept.*, 505:59–144, 2011, arXiv:1011.0544.

[58] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.* Academic press, 1983.

[59] T. P. Sotiriou and V. Faraoni. f(R) Theories of Gravity. *Rev.Mod.Phys.*, 82:451–497, 2010, arXiv:0805.1726.

[60] A. A. Starobinsky. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett. B*, 91:99–102, 1980.

[61] A. A. Starobinsky. Stochastic de Sitter (inflationary) stage in the early universe. *Lect. Notes in Phys.*, 246:1072, 1986.

[62] S. Talaganis, T. Biswas, and A. Mazumdar. Towards understanding the ultraviolet behavior of quantum loops in infinite-derivative theories of gravity. *Class. Quant. Grav.*, 32(21):215017, 2015, arXiv:1412.3467.

[63] T.V. Ruzmaikina, A.A. Ruzmaikin. Quadratic corrections to the lagrangian density of the gravitational field and the singularity . *JETP*, 30:372, 1970.

[64] R.P. Woodard. Nonlocal Models of Cosmic Acceleration. *Found.Phys.*, 44:213–233, 2014, arXiv:1401.0254.

[65] Y. Zhang and M. Sasaki. Screening of cosmological constant in non-local cosmology. *Int.J.Mod.Phys.*, D21:1250006, 2012, arXiv:1108.2112.

Биографија

Иван Димитријевић рођен је у Београду 22.06.1983. године где се школовао. Студије на Математичком факултету у Београду је уписао 2002 године на смеру Теоријска математика и примене. Дипломирао је 2007 године са просечном оценом 9.59. Добитник је Дипломе Eurobank EFG школарине која се додељује студентима завршне године државних факултета за остварене изванредне резултате током студија, 2006 године.

У октобру 2007 године Иван Димитријевић уписао је докторске студије на Математичком факултету у Београду. На докторским студијама положио је све испите са просечном оценом 10.

Од 2008 године је учесник пројекта "Геометрија, образовање и визуелизација са применама" (174012). У периоду 2008-2010 био је стипендиста докторант Министарства за науку и технолошки развој Републике Србије. Од октобра 2010 године ради на Математичком факултету у Београду. Држао је вежбе на курсевима Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Геометрија 1, Геометрија 3, Геометрија 5, Математика 1 и Биоматематика.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Димитријевић Иван

Број индекса 2004/2007

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Геометријска генерализација Ајнштајнове теорије гравитације

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 01,03,2017,

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора _Иван Димитријевић_______________________________

Број индекса _2004/2007____

Студијски програм _Математика________________________________

Наслов рада _Геометријска генерализација Ајнштајнове теорије гравитације____

Ментор _проф. др Зоран Ракић________________________________

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, 01,03,2017,

Димитријевић Иван

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Геометријска генерализација Ајнштајнове теорије гравитације

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)
2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)
3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)
5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)
6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци. Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, 01,03,2017,

1. **Ауторство**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.