

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милан Р. Стојановић

**ИСПИТИВАЊЕ ЕЛЕМЕНАТА
ГАЛАКТОЦЕНТРИЧНИХ ОРБИТА
ЗВЕЗДА ТАНКОГ ДИСКА ИЗ СУНЧЕВЕ
ОКОЛИНЕ ВАРИЈАЦИЈОМ ОБЛИКА
ПОТЕНЦИЈАЛА ГАЛАКСИЈЕ**

докторска дисертација

Београд, 2017.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Milan R. Stojanović

**EXAMINATION OF ELEMENTS OF
GALACTOCENTRIC ORBITS OF THE THIN
DISK STARS FROM THE SOLAR
NEIGHBOURHOOD BY VARYING
POTENTIAL OF THE GALAXY**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2017.

Ментор:

др Слободан НИНКОВИЋ, научни саветник
Астрономска опсерваторија, Београд

Чланови комисије:

др Надежда ПЕЈОВИЋ, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Rafael CUBARSI, ванредни професор
Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya,
Барселона, Шпанија

др Бојан НОВАКОВИЋ, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: _____

Највеће заслуге за коначан облик ове тезе припадају њеном идејном творцу и ментору, др Слободану Нинковићу. Такође, огромну подршку пружио је и др Рафаел Кубарси којем се од срца захваљујем.

Веома корисне савете који су побољшали укупан квалитет тезе дали су остали чланови комисије за преглед и одбрану тезе: др Надежда Пејовић и др Бојан Новаковић.

Током целих докторских студија колега др Милан Пирковић пружио је изузетну подршку у виду корисних коментара и смерница у писању радова као и фантастичну моралну подршку.

Захваљујем се и Браниславу Вукотићу на корисним саветима и сугестијама. Посебну захвалност за огромну подршку током докторских студија дугујем мојој сестри, мајци и оцу.

Током израде ове тезе био сам ангажован на пројекту Министарства просвете, науке и технолошког развоја број ОИ176011 под називом „Динамика и кинематика небеских тела и система”.

Prof Rafael Cubarsi offered a substantial support for which I am cordially grateful.

Наслов дисертације: Испитивање елемената галактоцентричних орбита звезда танког диска из Сунчеве околине варијацијом облика потенцијала Галаксије

Сажетак: Циљ ове дисертације је да се одреде вредности динамичких константи. Овај циљ се остварује проучавањем узорака састављених од одабраних звезда које се налазе близу Сунца. Одабир се врши најпре кинематички при чему се користе ексцентричност орбите и амплитуда осцилација нормално на раван Млечног пута. Предложено је решење за проблем одређивања ексцентричности. У наредном кораку се образује узорак великог обима тако што се дефинишу горње границе за ексцентричност орбите и амплитуду осцилација нормално на раван Млечног пута. Овај узорак се даље разбија на подузорке са два низа подузорака: у првом низу се смањује горња граница ексцентричности, а у другом горња граница амплитуде. Анализом овог материјала добијају се вредности динамичких констаната.

Кључне речи: галаксије: кинематика и динамика - галаксије: статистика - Галаксија: Сунчева околина

Научна област: Астрономија

Ужа научна област: Галактичка астрономија

УДК број: 524.63(043.3)

Dissertation title: Examination of elements of galactocentric orbits of the thin disk stars from the Solar neighbourhood by varying potential of the Galaxy

Abstract: The goal of this dissertation is to determine values of local dynamical constants. This goal is achieved through examination of multiple samples of selected stars near the Sun. The selection is done by using planar and vertical eccentricities as sampling criteria. The solution for calculating eccentricities is given. In the next step a large sample of stars is selected by defining upper limits for eccentricities and vertical amplitude. Then nested subsamples are formed in two ways: in the first one upper eccentricity limit is subjected to decreasing, in the other one this is the case with upper amplitude of oscillations perpendicular to the plane. The values of the local dynamical constants are deduced by analysing this material.

Keywords: galaxies: kinematics and dynamics – galaxies: statistics – Galaxy: solar neighbourhood

Research area: Astronomy

Research sub-area: Galactic Astronomy

UDC number: 524.63(043.3)

Садржај

Слике	ix
Табеле	xiii
1 Увод	1
2 Теоријска основа	9
2.1 Млечни пут	9
2.2 Кретање произвољне звезде у пољу Млечног пута	13
2.2.1 Приближна сепарабилност потенцијала	20
2.2.2 Линеарни хармонијски осцилатор	21
2.2.3 Епициклична апроксимација	23
2.2.4 Приближна семисепарабилност потенцијала	25
3 Подсистеми Галаксије у близини Сунца	27
3.1 Сунчева околина	27
3.2 Динамичке константе	35
4 Апроксимације за околину Сунца	43
4.1 Рачун ексцентричности	47
4.2 Модел Млечног пута	50
4.3 Рачунарски програм	52
4.3.1 Учитавање каталога	52
4.3.2 Трансформација координата	53
	vii

4.3.3	Одређивање ексцентричности	53
4.3.4	Остале функције	54
5	Анализа танког диска и резултати	55
5.1	Одабир звезда из каталога	56
5.2	Анализа каталога <i>SPOCS</i> и резултати	64
5.3	Анализа каталога <i>GCS III</i> и резултати	76
6	Резиме и закључци	97
6.1	Перспективе за будући рад	99
	Библиографија	101
	Додатак	105

Слике

1.1	Приказ орбите у равни RZ типичне звезде танког диска из околине Сунца, у галактоцентричном правоуглом координатном систему.	3
1.2	Приказ орбите у три димензије за исту звезду као на слици 1.1.	4
2.1	Крива ротације преузета из рада (Iocco et al., 2015). На горњем панелу приказана су мерења криве ротације у функцији галактоцентричног растојања, укључујући податке о кинематици гаса (плаве тачке), звезданој кинематици (зелени квадрати) и кинематици масера(црни кругови). Границе грешака одговарају 1σ неодређеностима. На доњем панелу приказани су доприноси ротационој криви од стране централног овала (плаво), диска (зелено) и гаса (црно) према разним моделима.	14
2.2	Приказ орбите у равни XU за исту звезду као на слици 1.1.	18
4.1	Крива ротације Млечног пута добијена на основу аналитичког модела (Ninković, 1992a). Графици показују криву ротације по компонентама наше галаксије и то за централни овај, диск и тамни хало Галаксије редом одозго на доле, док је последњи график на дну укупна кружна брзина за Млечни пут.	51

- 5.1 Гаусове расподеле дисперзија за компоненте брзине халоа су 150 km s^{-1} , 110 km s^{-1} и 85 km s^{-1} , у правцу: ка галактичком средишту (испрекидана линија), галактичке ротације (линија-тачка-линија) и ка северном галактичком полу (тачкаста линија). Преузето из Рада 2. 57
- 5.2 Удео звезда у деловима потпростора брзина у зависности од дисперзије брзина за хало: 150 km s^{-1} , 110 km s^{-1} , 85 km s^{-1} (лево); 140 km s^{-1} , 105 km s^{-1} , 80 km s^{-1} (средина); 170 km s^{-1} , 130 km s^{-1} , 70 km s^{-1} (десно). Галактоцентрична брзина LSR и ротација халоа су увек исте, 220 km s^{-1} и 0 km s^{-1} , редом. Бројеви на слици представљају границе у потпростору брзина. 59
- 5.3 Гаусове расподеле дисперзија за компоненте брзина танког диска: испрекидана линија у правцу ка галактичком средишту, (центрирана на 0 km s^{-1} , дисперзија 34 km s^{-1}); пуна линија у правцу галактичке ротације (центрирана на 210 km s^{-1} , дисперзија 22 km s^{-1}); тачкаста линија у правцу северног галактичког пола (центрирана на 0 km s^{-1} , дисперзија 17 km s^{-1}). Преузето из Рада 3. 61
- 5.4 Гаусове расподеле дисперзија за компоненте брзина дебелог диска: испрекидана линија у правцу ка галактичком средишту, (центрирана на 0 km s^{-1} , дисперзија 70 km s^{-1}); пуна линија у правцу галактичке ротације (центрирана на 160 km s^{-1} , дисперзија 45 km s^{-1}); тачкаста линија у правцу северног галактичког пола (центрирана на 0 km s^{-1} , дисперзија 35 km s^{-1}). Преузето из Рада 3. 62
- 5.5 Тумреов дијаграм за узорак звезда каталога *SPOCS*. Линије означавају константну брзину v_{hel} за 50 km s^{-1} , 80 km s^{-1} и 120 km s^{-1} 67
- 5.6 Орбита звезде са ознаком *SPOCS125* представљена у меридијанској равни, типична звезда танког диска. Преузето из Рада 1. 69
- 5.7 Орбита звезде са ознаком *SPOCS460* представљена у меридијанској равни, типична звезда танког диска. Преузето из Рада 1. 69
- 5.8 Орбита звезде са ознаком *SPOCS125* представљена у xu равни. . . . 70

5.9	Орбита звезде са ознаком <i>SPOCS460</i> представљена у xu равни.	70
5.10	Орбита звезде са ознаком <i>SPOCS766</i> представљена у меридијанској равни, типична звезда халоа. Преузето из Рада 1.	71
5.11	Орбита звезде са ознаком <i>SPOCS766</i> представљена у xu равни.	71
5.12	Орбита звезде са ознаком <i>SPOCS125</i> представљена у 3 димензије.	72
5.13	Орбита звезде са ознаком <i>SPOCS460</i> представљена у 3 димензије.	72
5.14	Орбита звезде са ознаком <i>SPOCS766</i> представљена у 3 димензије.	72
5.15	Расподела ексцентричности за подзорак од 905 звезда. Плава боја означава резултате добијене из поједностављене процедуре, док је провидна жута боја за резултате добијене из тродимензионих орбита. Сива боја показује регионе где се резултати преклапају.	73
5.16	Кумулативна функција расподеле за ексцентричности израчунате помоћу формула (плава боја) и симулација (жута боја).	74
5.17	Серија графика и расподела у UV равни за <i>GCS</i> подзорке звезда одабране за $ Z_{\max} < 0,5$ и ексцентричности до 0,01, 0,02, 0,03, 0,05, 0,1, 0,15, 0,2 и 0,3, редом. Координатни почетак одговара Сунчевој брзини по компонентама. (Захваљујемо се аутору Рафаелу Кубарсију на уступљеној слици.)	80
5.18	Тумреов дијаграм за узорак звезда каталога <i>GCS III</i> . Линије означавају константну брзину v_{hel} за 50 km s^{-1} , 80 km s^{-1} и 120 km s^{-1}	81
5.19	Дијагонални момент $\overline{v_R^2}$ [$\text{km}^2 \text{ s}^{-2}$] у функцији средње вредности квадрата ексцентричности $\overline{e^2}$ за узорке одабране према ексцентричности.	87
5.20	Дијагонални момент $\overline{v_\theta^2}$ [$\text{km}^2 \text{ s}^{-2}$] у функцији средње вредности квадрата ексцентричности $\overline{e^2}$ за узорке одабране према ексцентричности; сива линија одговара подзорцима за $e_0 \leq 0,05$, а црвена је за све подзорке.	88

5.21	Збир дијагоналног момента $\overline{v_\theta^2}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$] и квадрата кинематичке разлике δu^2 [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$] у функцији средње вредности квадрата ексцентричности $\overline{e^2}$ за узорке одабране према ексцентричности; сива линија одговара подузорцима за $e_0 \leq 0,05$, а црвена је за све подузорке.	89
5.22	Дијагонални момент $\overline{v_Z^2}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$] у функцији средње вредности квадрата максималног растојања од галактичке равни $\overline{Z_{\text{max}}^2}$ [kpc^2] за узорке одабране према том растојању.	91
5.23	Дијагонални момент $\overline{v_R^2}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$] у функцији компоненте хелиоцентричне брзине центроида V_0 [km s^{-1}].	92
5.24	Средње вредности квадрата ексцентричности $\overline{e^2}$ и максималног растојања од галактичке равни $\overline{Z_{\text{max}}^2}$ [kpc^2] у функцији горње границе ексцентричности.	94
5.25	Средње вредности квадрата ексцентричности $\overline{e^2}$ и максималног растојања од галактичке равни $\overline{Z_{\text{max}}^2}$ [kpc^2] у функцији горње границе растојања од галактичке равни Z_0 [kpc].	95

Табеле

5.1	Удео звезда за танки и дебели диск у зависности од галактоцентричне брзине LSR . Преузето из Рада 3.	63
5.2	Статистички тест Колмогорова и Смирнова	75
5.3	Колоне сиве боје садрже параметре селекције подзорака, затим је дат број звезда у подзорку (N), гранична ексцентричност (e_0), гранична удаљеност (Z_0) [крс], неколико средњих вредности (\bar{e} , \bar{e}^2 , $\overline{Z_{\max}}$, $\overline{Z_{\max}^2}$), компоненте хелиоцентричне брзине центроида (U_0, V_0, W_0) [km s^{-1}], централни моменти другог реда [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$] као и њихове варијансе. За узорке одабране према ексцентричности дате су кружна епициклична учестаност (κ_p) [$\text{km s}^{-1} \text{крс}^{-1}$] и однос γ_c^2 . За узорке одабране према максималној удаљености од галактичке равни дате су епициклична учестаност дуж Z осе (κ_Z) [$\text{km s}^{-1} \text{крс}^{-1}$] и однос ове две учестаности.	85

Поглавље 1

Увод

Познато је да је изучавање Сунчеве околине од изузетног значаја за разумевање структуре и кинематике наше галаксије, Млечног пута¹. Разлог за то је врло једноставан: сви потребни подаци познати су за звезде које су близу Сунца. Квалитет ових података значајно је порастао, поготово након завршетка мисије „Хипаркос“². Ново, велико побољшање података очекујемо након објављивања података из мисије „Гаја“³. Кинематика Млечног пута у околини Сунца, или краће локална кинематика, била је позната чак и пре „Хипаркоса“ по многим интересантним карактеристикама као што су асиметрично померање (енг. *asymmetric drift*), вертексна девијација и звездани ројеви. Локална кинематика је доста изучавана након мисије „Хипаркос“ (Dehnen & Binney, 1998; Nordström et al., 2004; Alcobé & Cubarsi, 2005; Cubarsi et al., 2010). Постало је јасно да локалне звезде кинематички припадају некој од ове три групе: танки диск, дебели диск и хало (Bensby et al., 2003). Локална кинематика је такође повезана са физичким карактеристикама звезда (Aumer & Binney, 2009). Комплетно објашњење свих карактеристика је, наравно, немогуће без звездане

¹У даљем тексту биће у употреби назив Млечни пут.

²Име ове мисије звучи као име великог астронома Хипаркуса из античке Грчке, наравно у његову част, али је заправо акроним *HIPPARCOS* за *HIgh Precision PARallax COLlecting Satellite*.

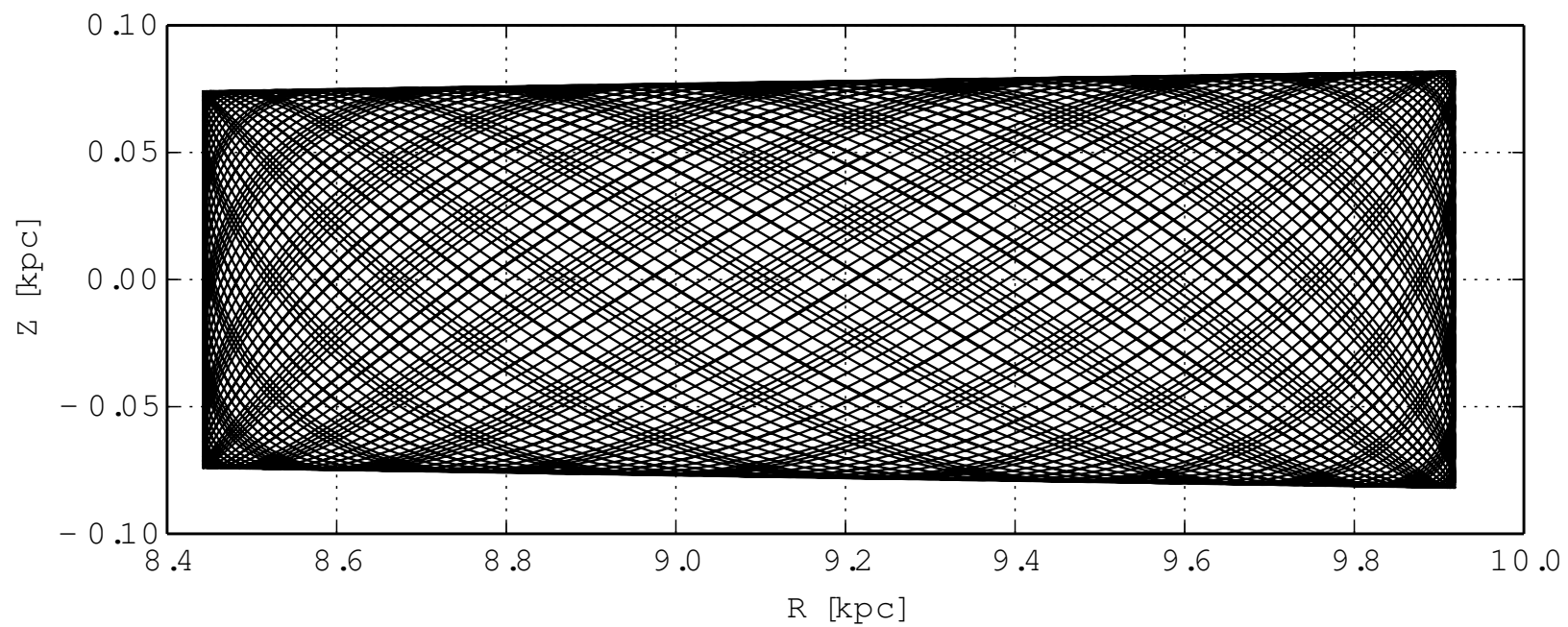
³Овај назив мисије је остао у употреби иако је првобитна замисао о интерферометру напуштена, одакле и потиче акроним *GAIA* за *Global Astrometric Interferometer for Astrophysics*.

динамике. У звезданој динамици постоје два различита прилаза која се базирају на једначинама кретања и на Болцмановој једначини; међу њима постоји еквиваленција (Cubarsi, 2010a). Болцманова једначина се односи на расподелу звезда у фазном простору која се може представити и преко елемената њихових галактоцентричних орбита (Nordström et al., 2004).

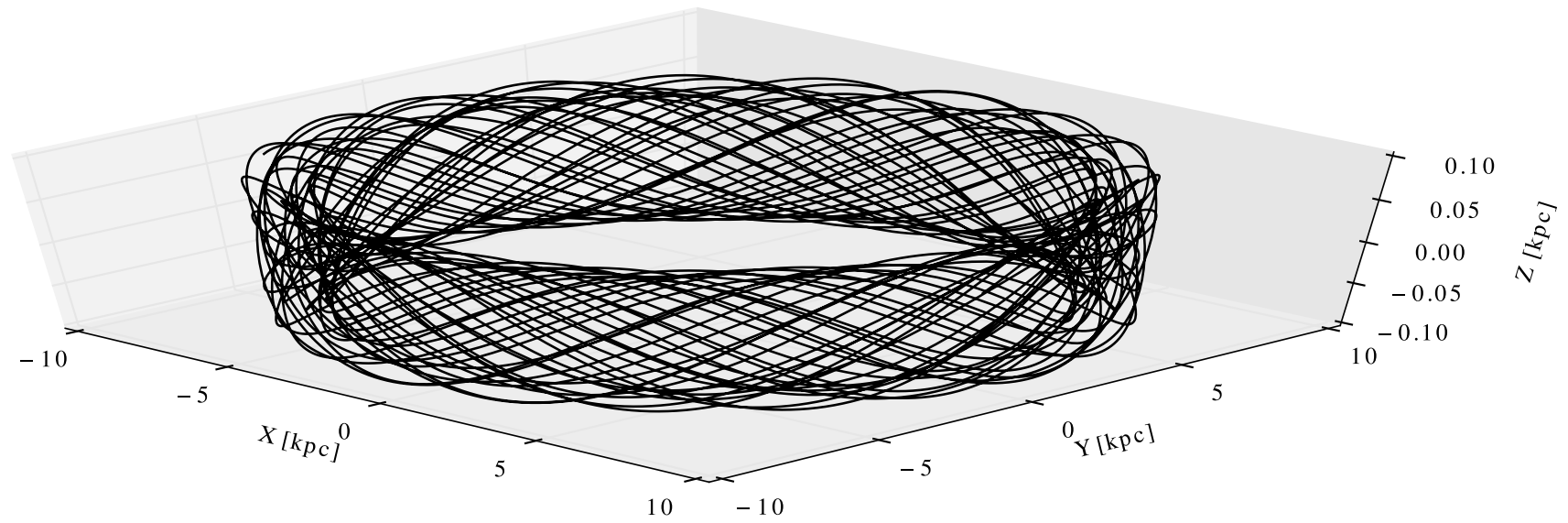
Овде се ради о тродимензионим орбитама. Као последица тога, дефиниција њихових елемената није увек јасна и из тог разлога се у литератури често даје пројекција на тангенцијалну раван (слика 1.1) уместо добро дефинисаних орбиталних елемената (Cubarsi et al., 2010). Са друге стране, појам ексцентричности за тродимензиону орбиту није добро дефинисан (Ninković, 2009). На слици 1.2 приказана је орбита једне типичне звезде танког диска у близини Сунца. Више о моделу и начину рачунања орбите дато је у раду Стојановића (Stojanović, 2015) и у поглављу 4.

Поред тога, да бисмо одредили расподелу у фазном простору морамо бити у могућности да израчунамо добро дефинисане орбиталне елементе за велики број звезда. У секцији 2.2 биће представљено решење за овај проблем тако што ће се увести и јасно дефинисати два орбитална елемента, средња удаљеност и ексцентриčnost. Они могу бити одређени за произвољно велики број звезда на два начина, али за оба је неопходно да буде испуњен услов да се ради о звездама танког диска.

Различите кинематичке анализе сугеришу да танки диск Млечног пута има вертексну девијацију (секцији 3.1) која није занемарљива, да се радијално средње кретање дебелог диска разликује од оног за танки диск и да је елипсоид брзина за хало највероватније нагнут (Pasetto et al., 2012a,b; Moni Bidin et al., 2012; Casetti-Dinescu et al., 2011; Carollo et al., 2010; Fuchs et al., 2009; Smith et al., 2009a,b; Siebert et al., 2008). Који тип потенцијала дозвољава да се опишу све ове кинематичке карактеристике у Сунчевој околини?



Слика 1.1: Приказ орбите у равни RZ типичне звезде танког диска из околине Сунца, у галактоцентричном правоуглом координатном систему.



Слика 1.2: Приказ орбите у три димензије за исту звезду као на слици 1.1.

Чандрасекарова теорија о динамици звезданих система коришћена је за изучавање интеграбилних временски зависних модела ротирајућих звезданих система. Велики напредак на том пољу учинио је Сала (Sala, 1990) који је изучавао фамилију потенцијала за тродимензионе моделе. Они укључују Едингтонов (Eddington, 1915) и Линден-Белов (Lynden-Bell, 1962) стационарни потенцијал. Међутим само неколико могућих потенцијала остаје уколико се узме мешавина звезданих популација, где при том сваку популацију повезујемо са елипсоидом расподеле брзина. Постоје два прилаза како би се одредило који потенцијали су конзистентни са условима интеграбилности који су наметнути мешавином популација.

У првом прилазу (Cubarsi, 2014a) проучавани су потенцијали са обртном симетријом који задовољавају временски зависну Болцманову једначину без сударног типа за независне звездане популације. При том, сматра се да су независне популације оне које могу имати различите средње брзине и произвољну оријентацију елипсоида брзине.

У галактоцентричном цилиндричном координатном систему (r, θ, z) , који ће детаљно бити уведен у поглављу 2, потенцијал мора имати облик

$$\mathcal{U} = M (r^2 + z^2) + \frac{1}{r^2} F(z^2/r^2) \quad (1.1)$$

где је F произвољна функција аргумента $s = z^2/r^2$. Ово је обртно симетрични потенцијал чији је облик сепарабилан (или Штекелов) у цилиндричним или сферним координатама. Ако је потенцијал стационаран онда је M константно. У супротном, то је једини део потенцијала који може зависити од времена, тј. тада стање није стационарно, али то овде неће бити предмет излагања.

Други прилаз је потенцијал који задовољава и обртну симетрију и, у специфичном случају, сферну симетрију према истраживањима Пасета и сарадника (Pasetto et al., 2012b) и Штајнмеца (Steinmetz, 2012). Међутим такав потенцијал не дозвољава ни вертексну девијацију за елипсоид брзина неке звездане

популације у галактичкој равни, ни нагнутост елипсоида брзина за звезде ван равни. У том случају, из чисто математичког угла гледања, вертексна девијација за узорке звезда диска могла би да се добије из комбинације неколико популација са различитим средњим радијалним и кружним брзинама. Са друге стране, Смит и сарадници (Smith et al., 2009a) претпоставили су да нагнутост елипсоида брзине за дебели диск и хало може бити резултат недовољно измењаних узорака. Због тога не би смо добили довољно добар елипсоид брзина. Други разлог би могао да буде да су узорци који се испитују контаминирани звездама диска. Такође, Еванс и сарадници (Evans et al., 2016) показали су да сферни потенцијал јесте сагласан са расподелом брзина за узорак звезда халоа, али да оне не показују комплексност узорка звезда диска.

Због тога, облик или симетрију потенцијала треба оправдати другим разлозима, ако је могуће, из узорака звезда диска. Главни циљ овог рада је да тестира одрживост потенцијала који је дат формулом 1.1 са локалним расподелама брзине, тј. са дисперзијама брзине и асиметричним померањем за одабрани узорак. Фокус ће бити на главним карактеристикама звезда диска које укључују локалне кинематичке константе, пре свега епицикличне учестаности у равни Млечног пута и нормалну на њу и локалну угаону брзину, тј угаону брзину за Сунчев положај.

Код епицикличног модела првог реда, за дати узорак звезда, епицикличне учестаности повезане су са централним моментима брзине другог реда v_R^2 и v_Z^2 преко средњег квадрата ексцентричности звезда у равни Млечног пута и нормално на њу. Овакав модел, ипак, није у могућности да пружи реалистичну вредност за локалну угаону брзину из сличне релације између момента v_θ^2 и средњег квадрата ексцентричности звезда у равни наше галаксије. Ово ће бити узето у обзир када се напусти епициклични модел и узме у разматрање асиметрично померање одабраног узорка.

Како би добио узорке звезда по брзинама, који кинематички добро описују диск Млечног пута, Кубарси је у свом раду из 2010. године (Cubarsi, 2010b)

показао да се ексцентричности понашају као одличан параметар селекције који дозвољава да се уоче веома специфични детаљи расподеле брзине. У пракси је то урађено коришћењем Женева-Копенхаген прегледа неба, друго издање, (Nordström et al., 2004) који садржи ексцентричности у равни, максималне удаљености од равни и добијен је репрезентативан узорак танког диска. У овом раду биће коришћене две фамилије хијерархијских подузорака које су одабране у смеру смањивања ексцентричности за кретање у равни и ексцентричности по нормали на њу ради добијања релације између средњих квадрата ексцентричности и дисперзија брзине у подузорцима. За тај поступак коришћено је треће издање Женева-Копенхаген прегледа неба (Holmberg et al., 2009) које ћемо надаље обележавати са *GCSIII* (скраћено од енглеског назива *Geneva-Copenhagen Survey III*).

Први корак састоји се у томе да се опише како су локалне константе повезане са потенцијалом галаксије. За први прилаз користи се епициклична апроксимација за звезде диска како би се представила расподела ексцентричности. Иако је ово класична тема описана у књизи Бинија и Тримерна (Binney & Tremaine, 2008) овде је приказан детаљан опис како би се увеле све неопходне нотације и дефиниције. Још један, веома битан разлог, је тај што се у овој књизи не узима у обзир расподела ексцентричности када се изучава епициклична апроксимација, док ће то овде бити показано. Локалне кинематичке особине уведене су кроз референтни систем везан за упоришну тачку C , који није инерцијалан.

Други корак огледа се у изучавању начина на који су повезане расподеле брзина и ексцентричности. Затим је дата анализа како ова релација ограничава однос полуоса елипсоида брзине. Даље је неопходно да се усвоји општији приступ од епицикличног модела како би било разматрано и асиметрично померање звезданих узорака. Овај прилаз проучаван је у циљу проналажења општег случаја где се три компоненте средње брзине једне звездане популације могу разликовати од кружне орбите (секција 5.3).

У трећем кораку одређене су локалне константе Млечног пута из фамилија

хијерархијских подузорака одабраних према ексцентричности у равни галаксије. Епицикличне учестаности у равни добијају се из подузорака одабраних према ексцентричности у равни, док се епицикличне учестаности у равни нормалној на Млечни пут добијају из подузорака одабраних на основу максималне удаљености од равни галаксије. Након што се уведе и асиметрично померање могуће је добро проценити и локалну угаону брзину.

На крају се дискутују и импликације које локалне константе имају на облик потенцијала. Разматра се горе наведена фамилија потенцијала, који дозвољавају мешавину независних расподела елипсоида брзина и показује се да потенцијал не може бити сепарабилан у цилиндричном координатном систему и да не може бити сферно симетричан.

Поглавље 2

Теоријска основа

2.1 Млечни пут

Галаксије се најчешће сматрају главним градивним елементима универзума. Разлог за то делимично лежи и у историјској чињеници да све до почетка двадесетог века није било јасно да постоје било какви објекти изван наше галаксије и самим тим нису биле проучаване веће структуре од ње. Прекретница је била чувена „Велика дебата” између Кертиса и Шеплија 1920. године о природи наше галаксије, затим о тада познатим спиралним маглинама и о димензијама универзума. Данас је добро позната чињеница да су галаксије гравитационо повезани системи звезда, звезданих остатака, међузвезданог гаса, прашине и тамне материје. Оне могу садржати од неколико десетина хиљада (10^4) звезда (од скоро позната галаксија *UCD Segue 2* (Kirby et al., 2013)) до неколико хиљада милијарди ($10^{12} - 10^{13}$) звезда, које се крећу и орбитирају око центра масе галаксије. Последње процене и истраживања (Conselice et al., 2016) указују на то да се у видљивом делу универзума налази између 2×10^{11} и 2×10^{12} галаксија. Већина галаксија је организована у групама, јатима и суперјатима. На највећим космолошким скалама ове групе су повезане у филаменте окружене празнинама. Према последњима сазнањима (Tully et al., 2014) наша „нова” адреса у овом универзуму је: Земља - Сунчев систем, Млечни пут, Локална

група галаксија, суперјато Девица, суперјато Ланиакеа!

Наша Галаксија или Млечни пут је џиновска спирална галаксија (апсолутна величина: $M_v = -20.6$ mag, по Хабловој класификацији SBb-c). Раван симетрије или главна раван Млечног пута која садржи његово средиште, ће у даљем тексту носити назив галактичка раван. Раван галактичког екватора (по дефиницији садржи Сунце) паралелна је галактичкој равни и Сунце је од ње удаљено неких 15 pc (van Tulder, 1942; Conti & Vacca, 1990; Chen et al., 2001; Buckner & Froebrich, 2014; Bobylev & Bajkova, 2016; Joshi et al., 2016; Yao et al., 2017). Према Међународној астрономској унији, сазиву из 1985 (Swings, 1986), дефинисано је растојање Сунчеве пројекције на галактичку раван од средишта Млечног пута на вредност $R_\odot = 8.5$ крс. На основу најновијих истраживања, данас се сматра да је удаљеност од средишта ближа вредности од 8 крс. Френсис и Андерсон (Francis & Anderson, 2014) су у свом раду из 2014. године изложили претрагу и преглед литературе 1918. - 2014. и пронашли преко 150 радова који се баве истраживањем на тему процене удаљености до Галактичког средишта. Од тог броја изложили су чак 137 радова и упоредили их.¹ До 1980. резултати показују велико растурање што је узроковано малом прецизности мерења. Од 1980. године до 2000. године опсег у којем се резултати налазе је доста смањен и износио је од 6.8 крс до 10.1 крс. Од 2000. године до 2014. године тај опсег је додатно смањен и износи од 7.2 крс до 8.8 крс.

Кинематика Млечног пута може се поделити на локалну и глобалну. Због расположиве количине података локална кинематика могућа је само у близини Сунца. Због тога, када се каже локална кинематика, мисли се на Сунчеву околину иако израз локална кинематика означава кинематику унутар било које *елементарне макроскопске запремине*, што је термин који ћемо у даљем тексту користити. Овај појам, код статистичких звезданих система, заснива се на два својства која значе следеће: *елементарност* да је таква запремина занемарљиво мала у поређењу са укупном запремином звезданог система; *макро-*

¹Цео рад са додатком тј. табелом која даје свих 137 вредности за R_\odot , грешке и референце може се наћи на страници <https://arxiv.org/pdf/1309.2629.pdf>.

скопичност да је укупан број звезда у таквој запремини довољно велик да се и унутар ње може примењивати статистика, тј. законитости великих бројева. Очигледно, код статистичких звезданих система, који су близу доње границе за укупан број звезда, појам елементарна макроскопска запремина нема смисла. Овакви системи су само глобално статистички (у односу на укупан број звезда). Зато, цео један такав систем може да се разматра као елементарна макроскопска запремина. Звездани системи са веома великим укупним бројем звезда су месно или локално статистички јер се код њих може увести горепоменути појам. Сваки такав систем је и глобално статистички, али обрнуто не важи.

Координатни систем који ће бити у употреби је галактички координатни систем. То је сферни координатни систем и он је хелиоцентричан. Поред двеју координата за правац, галактичке лонгитуде l и галактичке латитуде b , постоји још и хелиоцентрично растојање s . За основну раван се узима раван галактичког екватора и смер је директни. Потребно је још дефинисати и правац ка средишту Млечног пута (у сазвежђу Стрелца, $\alpha = 17^{\text{h}} 46^{\text{m}}$, $\delta = -28^{\circ} 56'$, епоха 2000,0) и то је $l = 0^{\circ}$, $b = 0^{\circ}$, док је правац ка северном галактичком полу по дефиницији $b = 90^{\circ}$. Према резултатима статистике Млечног пута, познато је да његови објекти образују компоненте, што је случај са свим спиралним галаксијама. Са становишта звездане статистике главни подсистеми су: централни овал, диск, хало и пречага. Диск садржи спиралне гране у којима су концентрисане међузвездана материја и младе звезде. Међутим као и код других спиралних галаксија највећи део масе диска потиче од старијих звезда и за диск као целину важи обртна симетрија. Сунце припада диску. Насупрот диску, који је веома спљоштен, хало је скоро лоптаст. Централни овал је подсистем сразмерно мале ефективне запремине и спљоштеност му је слаба, као и код халоа.

Нека је \vec{V} брзина неке звезде у односу на средиште Млечног пута. Тада

важи

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} , \quad (2.1)$$

где је \vec{u} средња или очекивана брзина (брзина центроида) за дати тренутак и тренутни положај звезде, а \vec{v} својствена брзина звезде. У складу са релацијом (2.1) средњи квадрат брзине у односу на средиште Млечног пута (галактоцентричне брзине) биће

$$\overline{V^2} = u^2 + \overline{v^2} . \quad (2.2)$$

Обе средње вредности у релацији (2.2), као и брзина центроида су тренутне и месне, тј. односе се на дати тренутак и положај. За Млечни пут се усваја:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0 , \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \theta} = 0 . \quad (2.4)$$

Овде је q било која величина (скаларна или векторска) која описује Млечни пут, t је време, а θ је генерализована координата у цилиндричном галактоцентричном координатном систему. Остале координате су R (растојање до осе Z која је нормална на галактичку раван и пролази кроз средиште галаксије) и Z . Значење израза (2.3) је стационарно стање, а израза (2.4) обртна симетрија. У условима стационарног стања и обртне симетрије путање центроида су кружнице у равнима паралелним равни $Z = 0$, а чија средишта се налазе на оси Z ; другим речима на делу је обртање подсистема Млечног пута. Када постоји обртање, с обзиром на релацију (2.2), укупна кинетичка енергија било ког подсистема садржи члан који потиче од обртања и члан коме доприносе својствене брзине. У случају централног овала и халоа у укупној кинетичкој енергији преовлађује члан који потиче од својствених брзина али, за разлику од халоа,

код централног овала члан који потиче од обртања није занемарљив. Због тога је спљоштеност ова два подсистема слаба и, у првој апроксимацији, за њих се може усвојити сферна симетрија. Сферна симетрија је посебан случај обртне симетрије када произвољна величина q зависи само од променљиве \mathcal{R} (галактоцентрично растојање, $\mathcal{R} = \sqrt{R^2 + Z^2}$).

У случају диска у укупној кинетичкој енергији преовлађује члан који потиче од обртања. Овим се објашњава изражена спљоштеност диска. Брзина обртања диска зависи од обе променљиве, R и $|Z|$. У галактичкој равни она зависи само од R . График функције $u_d(R)$ за $Z = 0$ назива се крива ротације (обртања). Једна таква крива за Млечни пут, преузета из рада Иока и сарадника (Иоссо et al., 2015) приказана је на слици (2.1); овде је усвојено $R_\odot = 8.0$ крс, а одговарајућа брзина је 230 km s^{-1} .

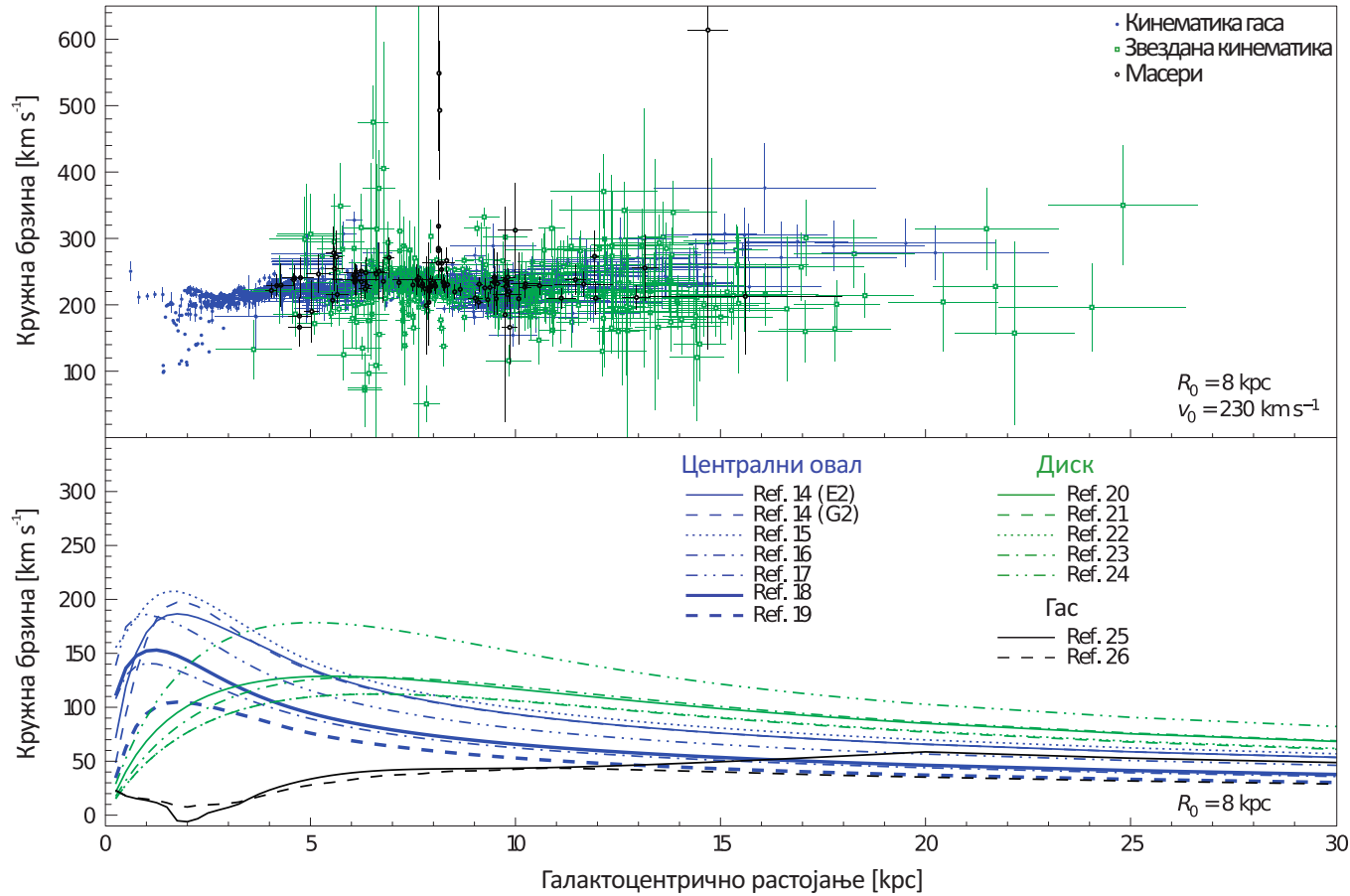
2.2 Кретање произвољне звезде у пољу Млечног пута

Дата је било која звезда која припада Млечном путу. Нека је у произвољном тренутку, када се звезда налази на датом положају $\vec{\mathcal{R}}$ у односу на средиште Млечног пута, њена брзина у односу на то средиште једнака \vec{V} . Тада ће, ако звезду схватимо као пробну материјалну тачку, да важи

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_{sp} , \quad (2.5)$$

где је \vec{F}_{sp} специфична сила. Нека је даље специфична сила једнака јачини поља гравитације \vec{g} , која зависи од вектора положаја звезде $\vec{\mathcal{R}}$ и која задовољава услов

$$\vec{g} = \nabla\Pi , \quad (2.6)$$



Слика 2.1: Крива ротације преузета из рада (Iocco et al., 2015). На горњем панелу приказана су мерења криве ротације у функцији галактоцентричног растојања, укључујући податке о кинематици гаса (плаве тачке), звезданој кинематици (зелени квадрати) и кинематици масера (црни кругови). Границе грешака одговарају 1σ неодређеностима. На доњем панелу приказани су доприноси ротационој криви од стране централног овала (плаво), диска (зелено) и гаса (црно) према разним моделима.

где је Π потенцијал гравитације Млечног пута. С обзиром на напред усвојено стационарно стање и обртну симетрију, потенцијал ће задовољавати најпре

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0, \quad (2.7)$$

док ће градијент потенцијала имати само две компоненте које нису свугде једнаке нули, $\frac{\partial \Pi}{\partial R}$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial Z}$, за које важи:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial R} = \begin{cases} = 0, \text{ за } R = 0 \\ < 0, \text{ за } R > 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Z} = \begin{cases} > 0, \text{ за } Z < 0 \\ = 0, \text{ за } Z = 0 \\ < 0, \text{ за } Z > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial R \partial Z} = 0, \text{ за } Z = 0. \quad (2.10)$$

Осим тога, потенцијал Млечног пута треба да задовољава услов

$$\Pi \approx \frac{GM_{\text{MW}}}{\mathcal{R}} \Big|_{\mathcal{R} \rightarrow \infty}, \quad (2.11)$$

где је G константа гравитације, а M_{MW} укупна маса Млечног пута.

Једначина (2.5) се сада замењује са две скаларне једначине (Лагранжеве једначине):

$$\ddot{R} - \frac{J_z^2}{R^3} = \frac{\partial \Pi}{\partial R}, \quad (2.12)$$

$$\ddot{Z} = \frac{\partial \Pi}{\partial Z}. \quad (2.13)$$

У једначини (2.12) J_z је компонента специфичног момента количине кретања и она је константна као последица обртне симетрије. Због услова (2.7) број независних интеграла кретања у једначинама (2.12) и (2.13) биће за један мањи, тј. пет а не шест, а осим поменуте величине J_z временски непроменљива ће бити и величина E , тј. специфична енергија

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \Pi . \quad (2.14)$$

Будући да се ради о фундаменталним законима одржања, и енергија и момент количине кретања су једнозначни интеграли кретања. Они садрже генерализоване координате:

$$\begin{aligned} V^2 &= \dot{R}^2 + \Theta^2 + \dot{Z}^2 , \\ J_z &= R\Theta , \text{ где је } \Theta \equiv R\dot{\theta} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

У општем случају (једначине (2.12) и (2.13)) кретање пробне материјалне тачке догађа се у три димензије. Једина могућност кретања у једној равни је ако је то раван $Z = 0$.

Питање да ли, осим ова два, постоје и други једнозначни интеграли кретања, разматрано је у литератури и распрострањено је мишљење да у општем случају стационарног стања и обртне симетрије постоје три независна интеграла кретања (de Zeeuw, 1988; Binney & Tremaine, 2008; Binney & McMillan, 2011; Sanders, 2012; Vieira & Ramos-Caro, 2014; Kipper et al., 2016). Осим тога, познат је случај сепарабилности, када важи:

$$\Pi = \Pi_R + \Pi_Z . \quad (2.16)$$

Као што индекси у (2.16) сугеришу, сваки сабирак је функција само једне независно променљиве (R или $|Z|$). У случају (2.16) једначине (2.12) и (2.13)

независне су једна од друге и постоје два интеграла енергије:

$$E_R = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \Theta^2) - \Pi_R , \quad (2.17)$$

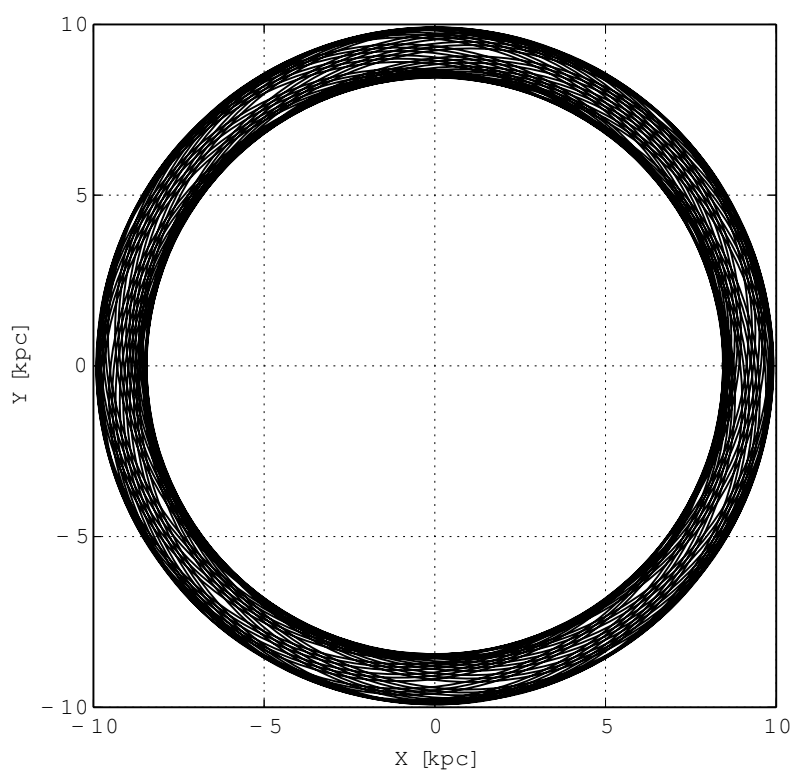
$$E_Z = \frac{1}{2}\dot{Z}^2 - \Pi_Z .$$

Интеграл енергије (2.17) постоје истовремено са интегралом (2.14), али само два од њих су довољна, док је трећи последица прва два. Два независна интеграла енергије заједно са J_z образују систем од три независна једнозначна интеграла кретања који одређују орбиту пробне материјалне тачке. Када је величина E_R тачан интеграл кретања, једначина (2.12) је у потпуности аналогна случају сферне симетрије, тј. E_R и J_Z одређују минимално R_p и максимално растојање R_a до осе Z . Ако је $J_Z = 0$, онда је и $R_p = 0$, а ако је $E_R < 0$, онда је R_a коначно. Такође, ако је звезда везана гравитацијом (укупна енергија мања од нуле) постојаће две равни паралелне равни $Z = 0$ и симетричне у односу на њу, тако да ће се звезда увек налазити у делу простора између два коаксијална ваљка (слика 2.2) $R = R_p$ и $R = R_a$ и две паралелне равни симетричне у односу на $Z = 0$, $Z = h$ и $Z = -h$. Уместо величина R_p и R_a често се користе друге две величине од којих само једна има димензију дужине. То су средње растојање и ексцентричност:

$$R_m = \frac{R_a + R_p}{2} , \quad (2.18)$$

$$e = \frac{R_a - R_p}{R_a + R_p} .$$

Ако се кретање догађа у равни $Z = 0$ и растојање R_a је коначно, онда ексцентричност задовољава услов $0 \leq e \leq 1$. Доња граница одговара кретању по кружности, а горња по правој линији ($R_p = 0$).



Слика 2.2: Приказ орбите у равни XY за исту звезду као на слици 1.1.

Од потенцијала Галаксије зависи да ли је израз (2.16) применљив за случај Млечног пута. Он се одређује из Поасонове једначине која гласи:

$$\Delta\Pi = -4\pi G\rho . \quad (2.19)$$

У овој парцијалној диференцијалној једначини све ознаке су познате, осим ρ које означава густину. Због обртне симетрије Лапласов оператор (лапласијан) у цилиндричним координатама има следећи облик:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} . \quad (2.20)$$

Пошто лапласијан има својство адитивности, густина на десној страни Поасонове једначине може се представити као збир у коме је сваки сабирак допринос одређеног подсистема. Искуство показује да је, од три поменута подсистема, допринос халоа занемарљив, тј. да је довољно узети у обзир централни овал и диск. Међутим, иако се за централни овал може прихватити и сферна симетрија, применљивост сепарабилности (2.16) зависиће од доприноса оба ова подсистема потенцијалу Млечног пута. Ови доприноси не уклапају се у сепарабилност, поготово код диска, али то ипак не значи да је растављање (2.16) у потпуности неприменљиво на потенцијал Млечног пута. Апроксимација сепарабилности је применљива на орбите блиске кружницама.

У случају кружног кретања пробне материјалне тачке (вид. (2.15)) важи:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= 0 , \\ |\Theta| &= u_c , \\ \dot{Z} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Брзина u_c назива се кружна брзина. Она се дефинише за одређено растојање

R у равни $Z = 0$ на следећи начин:

$$u_c = \sqrt{-R \frac{\partial \Pi}{\partial R}} \Big|_{Z=0} . \quad (2.22)$$

Овде је R растојање за које се дефинише кружна брзина, а Π , као и раније, потенцијал. Кружна брзина није векторска величина јер за њу није дефинисан смер, оба смера дуж тангенте на кружницу полупречника R су равноправна. С обзиром на формулу (2.22) за пробну материјалну тачку која се креће по кружници важи:

$$|J_z| = R \sqrt{-R \frac{\partial \Pi}{\partial R}} . \quad (2.23)$$

2.2.1 Приближна сепарабилност потенцијала

Услови за приближно кружно кретање су: $R \approx R_m$ ($e \approx 0$), $Z \approx 0$, $\dot{R} \approx 0$ и $\dot{Z} \approx 0$. С обзиром на прва два услова потенцијал се развија у степени ред у околини кружнице $R = R_m$, $Z = 0$, при чему се одбацују сви чланови степена вишег од два:

$$\Pi(R, |Z|) = \Pi(R_m, 0) + \frac{\partial \Pi}{\partial R}(R_m, 0) \delta R + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial R^2}(R_m, 0) (\delta R)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Z^2}(R_m, 0) Z^2 . \quad (2.24)$$

Применом приближне формуле (2.24) произвољан потенцијал постаје сепарабилан у датој области. У изразу (2.24) је $\delta R = R - R_m$. Линеарни члан по Z не постоји јер је први извод потенцијала по тој променљивој у равни $Z = 0$ једнак нули (обртна симетрија).

2.2.2 Линеарни хармонијски осцилатор

Потенцијал у облику (2.24) примењује се на једначине (2.12) и (2.13). Тако долазимо до:

$$\delta\ddot{R} - \frac{J_z^2}{R^3} = \frac{\partial\Pi}{\partial R}(R_m, 0) + \frac{\partial^2\Pi}{\partial R^2}(R_m, 0)\delta R, \quad (2.25)$$

$$\ddot{Z} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial Z^2}(R_m, 0)Z. \quad (2.26)$$

Даље, једначина (2.25) своди се на облик

$$\delta\ddot{R} = -[3 - \gamma(R_m)]\omega_c^2(R_m)\delta R, \quad (2.27)$$

где је

$$\omega_c^2(R_m) = -\frac{1}{R_m} \frac{\partial\Pi}{\partial R}(R_m, 0), \quad (2.28)$$

$$\gamma(R_m) = \frac{\frac{\partial^2\Pi}{\partial R^2}(R_m, 0)}{\omega_c^2(R_m)}. \quad (2.29)$$

С обзиром да је $\epsilon \approx 0$, усваја се:

$$|J_z| \approx R_m u_c(R_m), \quad (2.30)$$

$$R^{-3} \approx R_m^{-3} \left(1 - 3\frac{\delta R}{R_m}\right). \quad (2.31)$$

Величина ω_c је угаона брзина кружног кретања (количник кружне брзине и полупречника), док је γ бездимензиона величина. Ако је $\gamma < 3$ и с обзиром на то да у равни $Z = 0$ важи $(\partial^2\Pi)/(\partial Z^2) < 0$, једначине (2.25) и (2.26) добијају следећи облик:

$$\delta\ddot{R} = -\kappa_p^2(R_m)\delta R, \quad (2.32)$$

$$\ddot{Z} = -\kappa_Z^2(R_m)Z . \quad (2.33)$$

Проблем је сведен на линеарни хармонијски осцилатор. Дефиниције кружних учестаности хармонијских осцилација κ_p и κ_Z налазе се поређењем једначина (2.25) и (2.32), односно (2.26) и (2.33). Као што је добро познато, решења једначина (2.32) и (2.33) гласе:

$$\delta R = a \sin(\kappa_p t + \lambda_p) , \quad (2.34)$$

$$Z = c \sin(\kappa_Z t + \lambda_z) . \quad (2.35)$$

Овде су коришћене следеће ознаке: t је време, a и c су амплитуде, λ_p и λ_z су почетне фазе. С обзиром на то да важи $R_p = R_m - a$, $R_a = R_m + a$ и с обзиром на дефиницију ексцентричности e , следи да је $a = eR_m$. Према томе, кретање пробне материјалне тачке одређено је са три независне константе (R_m , e и c , тј. R_m , a и c). Оне су последице два квази-интеграла енергије и одржања компоненте момента количине кретања J_Z . Интеграл (2.17) су овде квази-интеграл јер је услов раздвајања променљивих (2.16) задовољен само приближно (развој (2.24)). С обзиром на чињеницу да је потенцијал одређен само до једне адитивне константе, квази-интеграл E_Z може се написати на следећи начин:

$$E_Z = \frac{1}{2}\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}\kappa_Z^2 Z^2 = \frac{1}{2}\kappa_Z^2 c^2 \quad (2.36)$$

Облик (2.36) је погодан јер је $|\dot{Z}|$ највеће за $Z = 0$, а најмање када је $Z = c$ (једнако нули).

2.2.3 Епициклична апроксимација

За решавање задатка кретања по скоро кружним орбитама постоји алтернативни прилаз. У овом случају уводи се упоришна тачка C која се креће по кружници $R = R_m$, $Z = 0$ одговарајућом брзином $u_c(R_m)$ у смеру кретања пробне материјалне тачке. Кретање ове последње разматра се у односу на тачку C . Уводи се правоугли десно оријентисани координатни систем $\xi\eta\zeta$ у коме се осе ξ и η налазе у равни $Z = 0$. O је средиште система, у овом случају Млечног пута. Оса ξ пролази кроз тачке O и C са оријентацијом од O ка C . Погодно је да смер осе ζ буде исти као осе Z ($b = 90^\circ$), тада се обилажење тачке C око тачке O догађа у ретроградном смеру, јер је то смер обртања Млечног пута.

У референтном систему везаном за тачку C гравитацијско дејство своди се на разлику јачине поља у тренутном положају пробне материјалне тачке и у тачки C (плимско дејство). Међутим, пошто се тачка C око тачке O креће убрзано, постојаће и еквивалентна гравитација. Угаона брзина ω_c ($\omega_c = u_c/R_m$) је константна. Зато у еквивалентној гравитацији нема члана који садржи $\dot{\omega}_c$, остају само центрифугални и Кориолисов члан где и један и други немају компоненте дуж осе ζ . У случају компоненте $g_Z(\partial\Pi/\partial Z)$ дејство у тачки C једнако је нули јер се она увек налази у равни $Z = 0$. Имајући у виду још и услов да је пробна материјална тачка увек веома близу тачке C , закључује се да нема никакве разлике у односу на горњи случај кретања дуж осе Z (осе Z и ζ се подударују). На тај начин поново се добија једначина (2.36).

Компонента $g_R(\partial\Pi/\partial R)$ развија се у ред:

$$g_R(R, 0) = g_R(R_m, 0) + \frac{\partial g_R}{\partial R}(R_m, 0)\delta R$$

где при том важи да је $\xi \approx \delta R = R - R_m$. У тачки C g_R лежи на осе ξ и једнака је $g_R(R_m, 0)$. Овим је одређен плимски члан дуж осе ξ . Пројекција $g_R(R_m, 0)$ на осу η биће једнака одговарајућем синусу, тј.

$$\frac{g_R(R_m, 0)\eta}{R_m + \xi} .$$

Када се још узме у обзир да је

$$\left(1 + \frac{\xi}{R_m}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{\xi}{R_m}$$

и занемари се производ $\xi\eta$, за пројекцију компоненте g_R на осу η на положају пробне материјалне тачке добија се да је једнака одговарајућем центрифугалном члану са супротним знаком. На овај начин се добијају диференцијалне једначине кретања пробне материјалне тачке око тачке C у равни $Z = 0$ које гласе:

$$\ddot{\xi} = \left[\omega_c^2(R_m) + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial R^2}(R_m, 0) \right] \xi + 2\omega_c(R_m)\dot{\eta} , \quad (2.37)$$

$$\ddot{\eta} = -2\omega_c(R_m)\dot{\xi} . \quad (2.38)$$

У једначини (2.37) са десне стране налазе се центрифугални и плимски члан где константе множе координату ξ . Затим следи Кориолисов члан где константа множи компоненту брзине $\dot{\eta}$. У једначини (2.38) са десне стране је само Кориолисов члан. Једначине (2.37) и (2.38) образују систем са следећим решењем:

$$\xi = a \cos(\kappa_p t + \lambda_p) , \quad (2.39)$$

$$\eta = -b \sin(\kappa_p t + \lambda_p) . \quad (2.40)$$

Кружна учестаност κ_p у решењу (2.39, 2.40) идентична је кружној учестаности из израза (2.34). Амплитуде a и b нису независне, повезане су изразом:

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{\sqrt{3 - \gamma(R_m)}} . \quad (2.41)$$

Величина $\gamma(R_m)$ дефинисана је у (2.29). Својство решења (2.39, 2.40) на које се највише скреће пажња је

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1 . \quad (2.42)$$

Добија се једначина елипсе чије је средиште у тачки C . Дакле, у референтном систему везаном за упоришну тачку C , који није инерцијалан, путања пробне материјалне тачке (звезде) је затворена крива линија. Зато се ова путања назива епицикл у знак сећања на средњовековне епицикле. Из истог разлога ова апроксимација се обично зове епициклична апроксимација, а кружна учестаност κ_p (премда се у ствари ради о аномалистичкој учестаности) - епициклична учестаност. Смер кретања звезде дуж епицикла супротан је смеру кретања упоришне тачке око средишта по кружници $R = R_m$.

2.2.4 Приближна семисепарабилност потенцијала

Осим о приближној сепарабилности може се говорити и о приближној семисепарабилности. Семисепарабилност значи да је утицај само једне од двеју координата на другу занемарљив. На пример, потенцијал се развија у ред, али не у односу на дату кружницу у равни $Z = 0$, већ у односу на саму раван, тј. добија се једначина аналогна једначини (2.24):

$$\Pi(R, |Z|) = \Pi(R, 0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial Z^2}(R, 0) Z^2 . \quad (2.43)$$

Извод $\partial \Pi / \partial R$ израчунат по формули (2.43) садржаће два члана. Други члан, који садржи извод величине $(\partial^2 \Pi) / (\partial Z^2)$ у равни $Z = 0$, се занемарује јер множи Z^2 , а овај квадрат за звезде диска сматра се малом величином, јер су оне увек близу равни $Z = 0$. Као последица, у једначини (2.12) неће бити никаквог утицаја координате Z , па ће величина E_R (2.17) бити квази-интеграл као и у случају кретања по путањама блиским кружници. Међутим, за разлику од те

апроксимације у једначини (2.13) код семисепарабилности утицај координате R се не занемарује, јер парцијални извод $(\partial^2\Pi)/(\partial Z^2)$ у равни $Z = 0$ зависи од R . Како ова координата зависи од времена, у једначини (2.13) потенцијал неће бити стационаран. Последица је да величина E_Z (2.17) неће моћи да се разматра ни као квази-интеграл кретања. Највеће растојање $|Z|_{\max}$ тада зависи од R . При том важи следећи израз (Binney & Tremaine, 2008)

$$\frac{|Z|_{\max}(R)}{|Z|_{\max}(R_p)} = \left[\frac{\rho(R, 0)}{\rho(R_p, 0)} \right]^{-\frac{1}{4}}. \quad (2.44)$$

Предуслов да се апроксимација семисепарабилности сведе на претходну је да ексцентричност e буде довољно мала. Тада се може занемарити варијација густине ρ у равни $Z = 0$ (2.44) унутар интервала $R \in [R_p, R_a]$.

Поглавље 3

Подсистеми Галаксије у близини Сунца

3.1 Сунчева околина

Сунчева околина је назив за малу област у Млечном путу. То је једна елементарна макроскопска запремина. У литератури није прецизно дефинисано колико мала та област треба да буде и постоје разни критеријуми. Полупречник сфере око Сунца, у којем се налазе звезде које се испитују мора бити много мањи од растојања Сунца од средишта Галаксије. Можемо узети да то буде педесет пута мање. Међутим у тој сфери морамо имати довољно звезда да би могли да користимо статистичке методе. За напретком посматрачке астрономије овај број расте. Такође неопходно је и да имамо што комплетнији узорак у којем је селекциони ефекат што мањи. Како се морамо ослонити на посматрачке податке, најбољи критеријум тренутно је да имамо тригонометријске паралаксе ако је могуће за све звезде из узорка. На тај начин може се увести домет одређивања удаљености тригонометријском методом као услов за удаљеност и сматрамо да је ово практично остварење услова, имајући у виду да су паралаксе коришћене у овом раду углавном из „Хипаркос” каталога.

Дефинише се правоугли галактоцентрични координатни систем. Први ко-

ПОГЛАВЉЕ 3. ПОДСИСТЕМИ ГАЛАКСИЈЕ У БЛИЗИНИ СУНЦА

рак на том путу је увођење одговарајућег хелиоцентричног система. Полази се од галактичког координатног система уведеног горе. Релације су:

$$\begin{aligned}x_{\text{hel}} &= s \cos l \cos b , \\y_{\text{hel}} &= s \sin l \cos b , \\z_{\text{hel}} &= s \sin b .\end{aligned}\tag{3.1}$$

Као и горе, l и b су галактичка лонгитуда и латитуда, респективно, а s хелиоцентрично растојање. Даље, врши се прелаз на „месни“ координатни систем чији је почетак у равни Млечног пута. Координате су:

$$\begin{aligned}x &= x_{\text{hel}} , \\y &= y_{\text{hel}} , \\z &= z_{\text{hel}} + z_{\odot} ,\end{aligned}\tag{3.2}$$

где је $|z_{\odot}|$ садашње растојање Сунца од равни Млечног пута. Одговарајуће галактоцентричне координате биће:

$$\begin{aligned}X &= x - R_{\odot} , \\Y &= y , \\Z &= z .\end{aligned}\tag{3.3}$$

О величини R_{\odot} , растојању Сунчеве пројекције на раван Млечног пута до средишта Млечног пута било је речи раније. Из већ познатих разлога често се користе цилиндричне координате:

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{X^2 + Y^2} , \\ \theta &= \text{arctg} \frac{Y}{X} , \\ Z &= Z .\end{aligned}\tag{3.4}$$

У овим координатама галактоцентрични положај Сунца је дат као:

$$R = R_{\odot}, \theta = \pi, Z = z_{\odot} .$$

По традицији компоненте хелиоцентричне брзине биће означене на следећи начин:

$$\begin{aligned} U &\equiv \dot{x}_{\text{hel}} , \\ V &\equiv \dot{y}_{\text{hel}} , \\ W &\equiv \dot{z}_{\text{hel}} . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Месном координатном систему, у случају компонената брзине, одговараће систем везан за тзв. наш стандард мировања (eng. *Local Standard of Rest*) и на даље ће бити у употреби скраћеница *LSR* уз ознаку брзине. Ради се о фиктивном објекту који се око средишта Млечног пута креће по кружности у равни Млечног пута полупречника R_{\odot} брзином чији је интензитет једнака кружној брзини, а смер је смер обртања Млечног пута. Према Међународној астрономској унији, заседање из 1985. године, (Swings, 1986) кружна брзина за растојање $R = R_{\odot}$ износи 220 km s^{-1} .

Да би се могле израчунати компоненте брзине у односу на наш стандард мировања за било коју звезду, треба да буде познато Сунчево кретање у односу на њега. Одређивање Сунчевог кретања је стари проблем (почиње још са В. Хершелом) и њему је посвећена обимна литература (Dehnen & Binney, 1998; Schönrich et al., 2010; Bobylev & Bajkova, 2014; Huang et al., 2015). Постоје велике разлике у расположивим подацима, а за потребе овог рада узете су следеће вредности: $(U, V, W)_{\text{LSR } \odot} = (10, 8, 7)$; јединица је km s^{-1} . Одговарајуће формуле гласе:

$$\begin{aligned} U_{\text{LSR}} &= U + U_{\text{LSR } \odot} , \\ V_{\text{LSR}} &= V + V_{\text{LSR } \odot} , \\ W_{\text{LSR}} &= W + W_{\text{LSR } \odot} . \end{aligned} \tag{3.6}$$

На крају, компоненте галактоцентричне брзине у систему $OXYZ$ (индекс MW) одређују се као:

$$\begin{aligned} U_{MW} &= U_{LSR} , \\ V_{MW} &= V_{LSR} + V_{MW0} , \\ W_{MW} &= W_{LSR} . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Због дефиниције нашег стандарда мировања једино је његова компонента галактоцентричне брзине (у индексу има 0) дуж осе Y различита од нуле.

Звездана кинематика за Сунчеву околину указује на постојање одређених звезданих компонената. Ове компоненте могу се идентификовати са подсистемима Млечног пута поменутих раније (секција 2.1). Искуство показује да је у околини Сунца присуство звезда централног овала занемарљиво, што није изненађујуће с обзиром на чињеницу да је полупречник централног овала знатно мањи од R_{\odot} и износи $2,5 - 3,5$ kpc (Rattenbury et al., 2007; Vanhollebeke et al., 2009). С друге стране, уводи се компонента позната као дебели диск. Међу астрономима не постоји сагласност да ли је дебели диск само део диска или посебан подсистем. Без обзира које од ова два схватања се прихвата, са кинематичке тачке гледишта може се говорити о три компоненте у околини Сунца: танки диск, дебели диск и хало. У овом случају танки диск би био неки остаток диска добијен одвајањем звезда дебелог диска. У овом делу дисертације не износе се детаљи о разврставању звезда неког конкретног узорка из околине Сунца на поменуте три компоненте. Разлика између њих се разматра само начелно. Гледано кинематички, за то може да послужи израз (2.2). Члан $(\overline{v^2})$ својствене брзине у случају диска мањи је од првог члана који потиче од обртног кретања, али је код танког диска он занемарљив, док код дебелог диска није. Хало је супротност танком диску, па је код њега занемарљив члан који потиче од ротације (u^2 у изразу (2.2)). С динамичке тачке гледишта, звезде оба диска крећу се по орбитама скоро у равни, тј. у сваком тренутку важи $Z \approx 0$. Осим тога, интеграл кретања J_Z (израз (2.15)) има за све звезде диска исти знак.

Међутим, док је за звезде танког диска, бар за део њих, апроксимација скоро кружног кретања (израз (2.24)) сасвим прихватљива, јер су ексцентричности знатно мање, код звезда дебелог диска то није случај. За звезде халоа, све варијанте путања око средишта Млечног пута су практично подједнако вероватне. Сунце припада танком диску, што се може видети из поређења апсолутних вредности компонената Сунчевог кретања са вредношћу за V_{MW0} .

Брзина центроида, дефинисана релацијом (2.1), у начелу се приписује звезданом систему или подсистему. У складу са овим за околину Сунца (прецизније, $R = R_{\odot}$, $Z = 0$, θ није битно због обртне симетрије) дефинишу се центроиди за танки диск, дебели диск и хало. Ово би били општи центроиди за њих. Међутим, не може се искључити, на пример, постојање корелације између начина кретања око средишта Млечног пута и физичких карактеристика звезда (ефективна температура, металичност, итд). У таквој ситуацији требало би звезде једног истог система (подсистема), које се налазе на истом положају у односу на средиште Млечног пута, разврстати према датој физичкој карактеристици. Центроид дефинисан за неку, на тај начин оформљену групу звезда, назвамо парцијалним центроидом.

Искуство показује да ће, у просеку, од 100 звезда из околине Сунца највише једна припадати халоу, њих неколико дебелом диску, а све остале (између 90% и 95%) танком диску (секција 5.1). Због овог, у случају околине Сунца једва да има смисла да се говори о парцијалним центроидима код дебелог диска и халоа. За танки диск је, на пример, добро познато да ће, ако се образује један узорак његових звезда које припадају главном низу Херцшпрунг-Раселовог дијаграма, па се онда од звезда различитих спектралних класа направе подузорци, парцијални центроиди тих подузорака да се крећу различитим брзинама што је праћено и другим разликама у кинематици.

Иако би, с обзиром на дефиницију, брзина општег или парцијалног центроида требало да се одреди у односу на средиште Млечног пута, у пракси се најчешће користи хелиоцентрична брзина центроида. Ово не ствара никакав

ПОГЛАВЉЕ 3. ПОДСИСТЕМИ ГАЛАКСИЈЕ У БЛИЗИНИ СУНЦА

проблем јер се хелиоцентрична брзина од галактоцентричне разликује за константну вредност (изрази 3.6 и 3.7), а истовремено је то практично решење, будући да је свака од четири константе ($U_{\text{LSR}\odot}$, $V_{\text{LSR}\odot}$, $W_{\text{LSR}\odot}$, $V_{\text{MW}0}$) позната са ограниченом тачношћу и несигурност њене вредности уноси додатну грешку.

Када је брзина центроида позната, може да се за сваку звезду узорка (подузорка) одреди својствена брзина (формула 2.1). У случају својствених брзина, пошто је у питању разлика брзина, потпуно је свеједно да ли се користе хелиоцентричне, галактоцентричне, или неке друге брзине. С обзиром на то да својствена брзина по дефиницији представља одступање од средње вредности, њена средња вредност мора бити једнака нули. Због тога је најнижи ред за моменате својствених брзина други. Може се дефинисати шест таквих момената по координатним осама система (3.1). Они образују један тензор чија матрица изгледа овако:

$$\begin{bmatrix} \overline{v_x^2} & \overline{v_x v_y} & \overline{v_x v_z} \\ \overline{v_y v_x} & \overline{v_y^2} & \overline{v_y v_z} \\ \overline{v_z v_x} & \overline{v_z v_y} & \overline{v_z^2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Елементи ове матрице су месне средње вредности, а пошто је $(\overline{v_x v_y}) \equiv (\overline{v_y v_x})$, $(\overline{v_x v_z}) \equiv (\overline{v_z v_x})$ и $(\overline{v_y v_z}) \equiv (\overline{v_z v_y})$ (закон комутације), матрица (3.8) је симетрична.

За мноштво узорака (подузорака) из танког диска који су досада обрађивани може се, укратко, рећи следеће. Елементи матрице (3.8) дуж главне дијагонале се разликују, опадање иде у смеру од $\overline{v_x^2}$ ка $\overline{v_z^2}$. Ово важи и за дебели диск и хало. Што се тиче елемената ван главне дијагонале, док се за $\overline{v_x v_z}$ и $\overline{v_y v_z}$ може усвојити да су у границама грешке једнаки нули, дотле се за велик број узорака (подузорака) из танког диска добија $\overline{v_x v_y} \neq 0$, тј. ова разлика је знатна и не може се приписати грешкама одређивања. То је вредност која дефинише вертексну девијацију. Ово значи да су компоненте брзине v_x и v_y у корелацији јер за многе звезде имају исти знак и зато на графику $v_y = f(v_x)$ нису сва

четири квадранта по апсолутној вредности и броју подједнако попуњена.

Компоненте брзине парцијалних центроида \bar{U} и \bar{W} показују често веома сличне вредности, што није случај са \bar{V} . Ово се тумачи обртањем подсистема. Заиста, с обзиром на оријентацију координатног система компонента U_{MW} практично је једнака \dot{R} , следи $\bar{R} = 0$, $\bar{Z} = 0$, $\bar{\theta} \neq 0$. Средње вредности \bar{U} и \bar{W} се онда приписују кретању Сунца, тј. $\bar{U} = -U_{\text{LSR}\odot}$, $\bar{W} = -W_{\text{LSR}\odot}$.

Да би се објаснило понашање компоненте V уводи се разлика $u_c - u_p$, где је u_c кружна брзина (израз 2.22), а u_p интензитет галактоцентричне брзине датог парцијалног центроида у условима обртног кретања. Величина u_p мења се од једног до другог парцијалног центроида, што утиче на промену разлике $u_c - u_p$. За танки диск, по дефиницији, очекује се мала вредност за ову разлику; означимо је са δu_p . Како је $V_{\text{MW0}} = u_c$, с обзиром на дефиницију биће:

$$V_{\text{MW0}} - \delta u_p - V_{\text{MW}\odot} = \bar{V} = -(V_{\text{LSR}\odot} + \delta u_p). \quad (3.9)$$

За танки диск $|\bar{V}|$ се обично креће у границама од $(10 - 20) \text{ km s}^{-1}$, тј. брзине парцијалних центроида се међусобно не разликују знатно. За дебели диск и хало $|\bar{V}|$ се одређује са знатно мањом прецизношћу, стога се само може рећи да се код дебелог диска креће у границама од неких $(60 - 80) \text{ km s}^{-1}$, а код халоа је преко 200 km s^{-1} . Промена $|\bar{V}|$ за парцијалне центроиде праћена је променом елемената главне дијагонале матрице (3.8) за њима одговарајуће узорке (подузорке), при чему се односи тих елемената битно не мењају; веома често је $\bar{v}_y^2/\bar{v}_x^2 \approx 0,4$ и $\bar{v}_z^2/\bar{v}_x^2 \approx 0,25$ (секција 5.3).

За општи центроид танког диска може се користити тзв. хидродинамичка једначина или други Њутнов закон за кретање центроида. У условима стационарног стања и обртне симетрије ова једначина има следећи облик (на пример (Binney & Tremaine, 2008)):

$$-\rho \frac{u^2}{R} = \rho \frac{\partial \Pi}{\partial R} - \frac{\partial(\rho \bar{v}_R^2)}{\partial R} - \frac{\rho(\bar{v}_R^2 - \bar{v}_\theta^2)}{R} - \frac{\partial(\rho \bar{v}_Z \bar{v}_R)}{\partial Z}. \quad (3.10)$$

У последњој једначини врше се поједностављења. Најпре се она узима у равни $Z = 0$ (занемарује се дебљина диска), а тада се први извод потенцијала изражава преко кружне брзине (2.22). Затим се брзина центроида u замењује разликом $u_c - \delta u$, при чему се δu^2 занемарује. Тако се долази до следеће релације:

$$\delta u = -\frac{1}{2u_c} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \overline{v_R^2})}{\partial R} + \frac{\overline{v_R^2} - \overline{v_\theta^2}}{R} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \overline{v_Z v_R})}{\partial Z} \right]. \quad (3.11)$$

Релација (3.11) се често користи као оријентација за везу између $\overline{v_R^2}$ и δu за положај Сунца. Величине u_c , ρ , $\rho \overline{v_R^2}$ и $\rho \overline{v_Z v_R}$ (при чему се последња често занемарује) су месне и њихове вредности за положај Сунца познате су са задовољавајућом тачношћу. Треба додати да је с обзиром на усвојени координатни систем:

$$\begin{aligned} \overline{v_R^2} &= \overline{v_x^2}, \\ \overline{v_\theta^2} &= \overline{v_y^2}, \\ \overline{v_Z v_R} &= \overline{v_z v_x}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

На крају се у релацији (3.11) замењује емпиријски добијено $\overline{v_y^2}/\overline{v_x^2} \approx 0,4$ и онда она служи као веза између $\overline{v_x^2}$ и δu .

Релацији (3.11) одговара емпиријска релација за парцијалне центроиде. На график се за низ узорака (подузорака) танког диска наносе вредности за $\overline{v_x^2}$ на апсцису и за \overline{V} на ординату. Један такав график приказан је на слици 5.23. Запажа се линеарна зависност, која се, с обзиром на (3.9), тумачи као последица:

$$\delta u_p \propto \overline{v_x^2}. \quad (3.13)$$

Последње тврђење је познато као Стрембергова релација.

3.2 Динамичке константе

Густина материје, извор поља гравитације и потенцијал повезани су Поасоновом једначином (2.19). Лапласијан који се налази на левој страни Поасонове једначине за случај обртне симетрије дат је изразом (2.20). Вредност лапласијана за $R = R_{\odot}$, $Z = 0$ изражава се преко тзв. динамичких констаната. То су:

- прва Ортова константа - A ,
- друга Ортова константа - B ,
- Кузминова константа - C .

Њихове дефиниције гласе:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}R_{\odot} \left(\frac{d\omega_c}{dR} \right)_{\odot} ; \\ B &= A - \omega_c(R_{\odot}) ; \\ C &= \sqrt{-\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Z^2} \right)_{\odot}} . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Треба нагласити да се све величине и њихови изводи узимају у равни $Z = 0$ на растојању $R = R_{\odot}$, на шта указује знак за Сунце у индексу. Све три константе имају димензију угаоне брзине и из практичних разлога изражавају се у $\text{km s}^{-1} \text{крс}^{-1}$, а не у јединицама SI система. Њихове вредности се одређују методима звездане кинематике. На основу вредности које препоручује Међународна астрономска унија (Swings, 1986) за растојање Сунца 8,5 крс и одговарајућу кружну брзину 220 km s^{-1} , за угаону брзину $\omega_c(R_{\odot})$ тј. разлику $A - B$ добија се вредност од $25,9 \text{ km s}^{-1} \text{крс}^{-1}$. Крива ротације за танки диск, под претпоставком да је брзина ротације једнака кружној брзини, сугерише да у околини Сунца важи приближно

$$u_c \propto R^0 ,$$

чему одговара (релације (3.14)) $A = |B|$. Нека је заиста тако, онда следи: $A = 12,95 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, $B = -12,95 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. За Кузминову константу обично се усваја $C = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Ако је $A = |B|$, онда је лапласијан потенцијала за $R = R_\odot$, $Z = 0$ једнак $-C^2$.

За звезде из околине Сунца које махом припадају танком диску, а то значи да су мале ексцентричности њихових орбита, може се очекивати да средња растојања R_m (2.18) буду близу R_\odot . У том случају величине дефинисане у секција 2.2 о путањама (релације 2.25, 2.26, 2.32, 2.33) доводе се у везу са динамичким константама. Угаона брзина (2.28) се већ налази у изразима за динамичке константе (3.14). Однос $\gamma(R_m)$, такође дефинисан у (2.29), се за $R = R_\odot$ представља преко односа апсолутних вредности Ортових констаната као:

$$\gamma(R_\odot) = \frac{3\alpha - 1}{\alpha + 1}, \quad \alpha = \frac{A}{|B|}. \quad (3.15)$$

На основу (3.15), с обзиром на (3.14), кружна учестаност $\kappa_p(R_\odot)$ се такође може представити преко Ортових констаната,

$$\kappa_p(R_\odot) = \frac{2(A - B)}{\sqrt{\alpha + 1}}. \quad (3.16)$$

Најзад, имајући у виду (2.26) и (2.33) следи:

$$\kappa_Z(R_\odot) = C. \quad (3.17)$$

Могу се дефинисати релације између динамичких констаната и средњих квадрата својствене брзине $\overline{v_R^2}$, $\overline{v_\theta^2}$ и $\overline{v_Z^2}$. У случају последњег квадрата, имајући у виду (2.35), може се написати:

$$\overline{v_Z^2} = \overline{c^2 \kappa_Z^2(R_m) \cos^2(\kappa_Z t + \lambda_Z)}. \quad (3.18)$$

Ова релација може да се замени приближном релацијом где се претпоставља да међу чиниоцима чији се производ квадрата усредњава нема никакве коре-

ПОГЛАВЉЕ 3. ПОДСИСТЕМИ ГАЛАКСИЈЕ У БЛИЗИНИ СУНЦА

лације, да је средња вредност квадрата кружне учестаности она која одговара растојању Сунца и да су све фазе подједнако вероватне (Binney & Tremaine, 2008), тј. да је средњи квадрат косинуса једнак једној половини. С обзиром на (3.17) добија се:

$$\overline{v_Z^2}(R_\odot, 0) \approx \frac{1}{2} C^2 \overline{c^2}. \quad (3.19)$$

Дакле, према релацији (3.19) средњи квадрат својствене брзине дуж осе Z зависи само од средњег квадрата амплитуде осциловања нормално на раван $Z = 0$ у датом узорку.

На исти начин (сада релација (2.34)) долази се до приближне формуле за средњи квадрат својствене брзине по R ,

$$\overline{v_R^2}(R_\odot, 0) \approx \frac{1}{2} R_\odot^2 \frac{4(A - B)^2}{\alpha + 1} \overline{e^2}. \quad (3.20)$$

Овде се примењују формуле (3.15) и (3.16), а амплитуда a (2.34) замењује се производом eR_m при чему се усваја $\overline{R_m^2} = R_\odot^2$, (Binney & Tremaine, 2008). Тако се долази до закључка да је средњи квадрат радијалне својствене брзине сразмеран средњем квадрату ексцентричности за дати узорак.

За извођење израза за $\overline{v_\theta^2}(R_\odot, 0)$ треба поћи од тачних формула за величине J_Z и Θ (израз 2.15) узимајући у обзир да се дата звезда налази на растојању R_\odot и да је, пошто је ексцентричност мала, а с обзиром на смер обртања Млечног пута, $J_Z \approx -\omega_c(R_m)R_m^2$. Може се написати:

$$\Theta = -R_\odot \omega_c(R_m) + 2R_\odot \omega_c(R_m) e \sin(\kappa_p t + \lambda_p), \quad (3.21)$$

имајући у виду израз (2.34) и да је

$$\left(1 + \frac{\delta R}{R_m}\right)^{-2} \approx 1 - 2 \frac{\delta R}{R_m}.$$

С обзиром на дефиницију v_θ најпре треба одредити $\bar{\Theta}$. За то постоји више начина, а најчешће се усваја апроксимација $\bar{\Theta}(R_\odot) = -\omega_c(R_\odot)R_\odot$, (Binney & Tremaine, 2008). Величина $\omega_c(R_m)$ се може представити на следећи начин:

$$\omega_c(R_m) = \frac{u_c}{R_\odot} \quad (3.22)$$

и обзиром на дефиницију Ортове константе A (3.14), следи:

$$v_\theta(R_\odot) = -2A\delta R + 2[R_\odot\omega_c(R_\odot) + 2A\delta R]e \sin(\kappa_p t + \lambda_p) . \quad (3.23)$$

Израз (3.23) је збир три члана. Међутим, последњи члан садржи e^2 (јер се δR изражава преко e , формула (2.34)) и стога се може занемарити. Ортова константа A се може заменити изразом

$$A = \frac{\alpha\omega_c(R_\odot)}{(\alpha + 1)} ,$$

на основу релација (3.14) и (3.15). Сам израз се претвара у производ и тада се његов квадрат лако усредњава, а узима се да је средња вредност квадрата величине $(\alpha + 1)R_\odot - \alpha R_m$ једнака R_\odot^2 . Тако се долази до следећег израза:

$$\overline{v_\theta^2}(R_\odot, 0) \approx \frac{1}{2}R_\odot^2 \frac{4(A - B)^2}{(\alpha + 1)^2} e^2 . \quad (3.24)$$

Израз (3.24) се од израза (3.20) разликује присуством квадрата исте величине у имениоцу. После неопходних скраћивања добија се следећа формула:

$$\frac{\overline{v_\theta^2}(R_\odot, 0)}{\overline{v_R^2}(R_\odot, 0)} = \frac{1}{1 + \alpha} . \quad (3.25)$$

Увешћемо још и ознаку γ_c због каснијег коришћења:

$$\gamma_c^2 = \frac{\overline{v_R^2}(R_\odot, 0)}{\overline{v_\theta^2}(R_\odot, 0)} \quad (3.26)$$

ПОГЛАВЉЕ 3. ПОДСИСТЕМИ ГАЛАКСИЈЕ У БЛИЗИНИ СУНЦА

Формула (3.25), позната као „епициклична формула“, даје однос средњих квадрата својствених брзина у функцији само једне величине, односа апсолутних вредности Ортових констаната (вид. (3.15)). До ње се може доћи на више начина, порекло је најпре у тумачењу расподеле у фазном простору уз помоћ Цинсове теореме, али постоји заједничка црта у овим извођењима, а то је усвајање да је

$$\Theta(R_{\odot}, 0) \equiv u_{\theta}(R_{\odot}, 0) = -u_c(R_{\odot}) , \quad (3.27)$$

тј. занемаривање разлике δu (релација (3.11)). Да би смо то показали потребно је да уведемо дефиницију фазне концентрације Ψ . Између ње и концентрације звезда n важи следећа релација:

$$n = \int \Psi d^3V . \quad (3.28)$$

У овом случају се интеграција обавља по целом потпростору брзине, d^3V је елемент запремине тог потпростора. На основу искуства усваја се Гаусова расподела по компонентама својствене брзине:

$$\Psi = \Psi_0 \exp \left[- \left(f_1 v_R^2 + f_2 v_{\theta}^2 + f_3 v_Z^2 + f_4 \right) \right] , \quad (3.29)$$

где су $\Psi_0, f_1, f_2, f_3, f_4$ функције координата $(R, |Z|)$. Према Цинсовој теореме Ψ је функција тачних интеграла кретања. Нека су то:

$$E = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \Theta^2 + \dot{Z}^2) - \Pi \quad \text{и} \quad J_Z = R\Theta . \quad (3.30)$$

Да би се ускладило са једначином (3.29) усваја се:

$$\Psi = \Psi_0 \exp \left[- \left(aE + bJ_Z^2 + cJ_Z \right) \right] . \quad (3.31)$$

ПОГЛАВЉЕ 3. ПОДСИСТЕМИ ГАЛАКСИЈЕ У БЛИЗИНИ СУНЦА

Потребно је да напишемо ове једначине у развијеном облику и при том изједначавамо аргументе експоненцијалне функције:

$$f_1 v_R^2 + f_2 v_\theta^2 + f_3 v_Z^2 + f_4 = \frac{a}{2} \dot{R}^2 + \frac{a}{2} \Theta^2 + \frac{a}{2} \dot{Z}^2 - a\Pi + bR^2 \Theta^2 + cR\Theta . \quad (3.32)$$

Како важи да је $\Theta = u_\theta + v_\theta$, $\dot{R} = v_R$, $\dot{Z} = v_Z$ добијамо:

$$f_1 v_R^2 + f_2 (\Theta^2 - 2\Theta u_\theta + u_\theta^2) + f_3 v_Z^2 + f_4 = \frac{a}{2} \dot{R}^2 + \frac{a}{2} \Theta^2 + \frac{a}{2} \dot{Z}^2 - a\Pi + bR^2 \Theta^2 + cR\Theta . \quad (3.33)$$

Изједначавамо коефицијенте уз чланове истог степена по компонентама брзине:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{a}{2} ; \\ f_2 &= \frac{a}{2} + bR^2 ; \\ -2f_2 u_\theta &= cR ; \\ f_3 &= \frac{a}{2} ; \\ f_2 u_\theta^2 + f_4 &= -a\Pi . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= \frac{1}{2v_r^2} ; \\ \frac{a}{2} + bR^2 &= \frac{1}{2v_\theta^2} ; \\ \frac{a}{2} &= \frac{1}{2v_z^2} ; \\ u_\theta &= -\frac{cR}{2f_2} = -\frac{cR}{a + 2bR^2} . \end{aligned} \quad (3.35)$$

ПОГЛАВЉЕ 3. ПОДСИСТЕМИ ГАЛАКСИЈЕ У БЛИЗИНИ СУНЦА

Средњи квадрати компонената својствених брзина се јављају у релацијама (3.35) због Гаусове расподеле. Следи:

$$\frac{\overline{v_\theta^2}}{\overline{v_r^2}} = \frac{a}{a + 2bR^2}. \quad (3.36)$$

С обзиром на релацију (3.27) следи:

$$\begin{aligned} \omega_c &= -\frac{c}{a + 2bR^2}; \\ \frac{d\omega_c}{dR} &= \frac{4bcR}{(a + 2bR^2)^2}; \\ A &= -\frac{1}{2}R_\odot \left(\frac{d\omega_c}{dR} \right)_\odot = -\frac{2bcR_\odot^2}{(a + 2bR_\odot^2)^2}; \\ B &= A - \omega_c(R_\odot) = \frac{ac}{(a + 2bR_\odot^2)^2}; \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\alpha = \frac{A}{|B|} = \frac{2b}{a}R_\odot^2. \quad (3.38)$$

Поређењем релација (3.36) и (3.38) добија се:

$$\frac{\overline{v_\theta^2}(R_\odot, 0)}{\overline{v_R^2}(R_\odot, 0)} = \frac{1}{1 + \alpha}, \quad (3.39)$$

што се подудара са (3.25).

Из релација (3.35) следи да је $\overline{v_R^2} = \overline{v_Z^2}$. Ово се међутим не слаже са нашим искуством које за низ узорака најчешће даје $\overline{v_Z^2}(R_\odot) \approx 0,25 \overline{v_R^2}(R_\odot)$. Због овога је настала хипотеза о такозваном трећем интегралу кретања независном од E и J_Z за стационарно стање и обртну симетрију.

С обзиром на горепоменућу вредност од 0,4 за однос средњих квадрата ових компонената својствених брзина, сматрало се да је однос $\alpha = A/|B|$ једнак 1,5. Чак је и Међународна астрономска унија у периоду 1964-1985 препоручивала вредности за константе A и B које су се уклапале у овај однос. Међутим, када је крива ротације постала поуздана и на растојањима већим од R_\odot , добијени су

ПОГЛАВЉЕ 3. ПОДСИСТЕМИ ГАЛАКСИЈЕ У БЛИЗИНИ СУНЦА

аргументи за мању вредност односа $A/|B|$, око 1,0. Стога, у препоруци Међународне астрономске уније из 1985. године, што је уједно и последње заседање уније на којем је комисија 33 дала препоруку за Галактичке константе, (страница 254, Swings (1986)) не фигуришу конкретне вредности за Ортове константе¹.

¹Занимљивост у вези овога. У неким радовима појављује се грешка да је МАУ дала препоруку за константе $A = 14.4$ и $B = 12.0$. Извор ове грешке је, нажалост веома цитирана књига *Allen's Astrophysical Quantities*. Уредник поглавља о галактичким константама дала је ове бројеве уз натпис „*IAU 1985 Standard*”, док је референца на тај исти стандард заправо рад (Kerr & Lynden-Bell, 1986), а не извештај МАУ (Swings, 1986). У овом раду аутори су на страни 9 дали преглед свих до тада одређених вредности за Ортове константе почевши од Орта 1928. Они наглашавају у том раду да МАУ није дала предлог и због тога они овде износе само чисте средње вредности, без тежина, које износе $A = 14.4$ и $B = 12.0$.

Поглавље 4

Апроксимације за околину Сунца

Кретање звезде око средишта Галаксије описано је Лагранжевим једначинама (2.12) и (2.13) што је детаљно објашњено у секцији 2.2. Користи се галактоцентрични цилиндрични координатни систем (R, θ, Z) . У случају танког диска, звезде скоро увек остају довољно близу равни током кретања. Због тога се у једначини (2.13) може занемарити утицај кретања дуж нормале на раван Галаксије. У том случају важи одржање енергије и једначина (2.17) представља квази-интеграл. Вредности за R_m и e дате су формулама (2.18). Нека је $R_{p \min}$ најмање R_p , а $R_{a \max}$ највеће R_a у одабраном узорку звезда танког диска. Ако је ексцентричност довољно мала онда ће интервал $[R_{p \min}, R_{a \max}]$ бити довољно узак да је прихватљиво узети степени закон за зависност кружне брзине од растојања, дат формулом

$$u_c(R) \propto R^\delta . \quad (4.1)$$

Процедура за одређивање вредности дефинисаних у једначинама (2.18), уз претпоставку (4.1), иста је као када би сферна симетрија била валидна. У случају сферне симетрије вредности дефинисане у једначинама (2.18) су тачни интегрални кретања јер њихова константност следи из одржања енергије и момента количине кретања. Под условима сферне симетрије, може се користити

и зависност кумулативне масе \mathcal{M} од растојања која би такође одговарала степеном закону, аналогно са једначином (4.1) и важи

$$\mathcal{M}(R) \propto R^\beta . \quad (4.2)$$

Оваква примена објашњена је у раду (Ninković, 1986). Степени закон за кумулативну масу значи да слична зависност важи и за кружну брзину као функцију од удаљености. То је ближе код случаја звезда танког диска Млечног пута, јер су орбите звезда скоро кружне путање. Звезде из околине Сунца ретко одлазе веома далеко од њихове тренутне удаљености R_0 и може се претпоставити да се крећу у складу са прилично једноставном зависношћу кружне брзине у односу на удаљеност, као што је то дато у формули (4.1). Веза између параметара β и δ описана је формулом

$$\delta = \frac{\beta - 1}{2} . \quad (4.3)$$

Добијене су формуле за ексцентричност орбите у случају стационарног стања, сферне симетрије и степеног закона кумулативне масе. Оне се могу прилагодити за случај стационарног стања, обртне симетрије и степеног закона сада, еквивалентне масе, под условом да се кретање догађа у равни симетрије. Потенцијал је дат на следећи начин:

$$\Pi(R, 0) = u_c^2 \left(1 + \ln \frac{R_{\max}}{R} \right) , \text{ за } \beta = 1 ; \quad (4.4)$$

$$\Pi(R, 0) = \frac{\beta}{\beta - 1} \frac{GM}{R_{\max}} - \frac{GM}{R_{\max}^\beta} \frac{R^{\beta-1}}{\beta - 1} , \text{ за } \beta \neq 1 ; \quad (4.5)$$

где је \mathcal{M} „укупна еквивалентна маса система”, R_{\max} „полупречник система” ($\mathcal{M} = \text{const.}$ и $R_{\max} = \text{const.}$) и u_c – кружна брзина дата формулом

$$u_c^2 = \frac{GM(R)}{R} . \quad (4.6)$$

ПОГЛАВЉЕ 4. АПРОКСИМАЦИЈЕ ЗА ОКОЛИНУ СУНЦА

Овде је сада $\mathcal{M}(R)$ еквивалентна маса система. Тада, за $R_m = \frac{R_a + R_p}{2}$, енергија у равни је:

$$E_R = \frac{1}{2}v^2(R_m) - \Pi(R_m) . \quad (4.7)$$

Даље се квадрат брзине објекта на средњем растојању може представити преко квадрата кружне брзине за исто растојање:

$$v^2(R_m) = f_1(e) u_c^2(R_m) , \text{ за } \beta = 1 ; \quad (4.8)$$

$$v^2(R_m) = \frac{f_\beta(e)}{\beta - 1} u_c^2(R_m) , \text{ за } \beta \neq 1 ; \quad (4.9)$$

где су $f_1(e)$ и $f_\beta(e)$ функције ексцентричности. Заменом у једначину (4.7) и имајући у виду једначине (4.4) и (4.5) добијамо:

$$E_R = \frac{1}{2}f_1(e)u_c^2 - u_c^2 \left(1 + \ln \frac{R_{\max}}{R_m} \right) , \text{ за } \beta = 1 ; \quad (4.10)$$

$$E_R = \frac{1}{2} \frac{f_\beta(e)}{\beta - 1} u_c^2(R_m) - \frac{\beta}{\beta - 1} \frac{GM}{R_{\max}} + \frac{GM}{R_{\max}^\beta} \frac{R_m^{\beta-1}}{\beta - 1} , \text{ за } \beta \neq 1 . \quad (4.11)$$

За случај $\beta \neq 1$ формулу (4.6) можемо написати на следећи начин:

$$u_c^2(R_m) = \frac{GM}{R_{\max}^\beta} (R_m^{\beta-1}) . \quad (4.12)$$

Коначно за енергију добијамо:

$$E_R = u_c^2 \left[\frac{f_1(e)}{2} - (1 + \ln R_{\max}) + \ln R_m \right] , \text{ за } \beta = 1 , \quad (4.13)$$

$$E_R = \frac{GM}{(\beta - 1)R_{\max}} \left[\left(\frac{R_m}{R_{\max}} \right)^{\beta-1} \left(\frac{1}{2}f_\beta(e) + 1 \right) - \beta \right] , \text{ за } \beta \neq 1 . \quad (4.14)$$

Користећи интеграл енергије и околност да је на растојањима апоцентра и перицентра радијална компонента брзине једнака нули ($\dot{R} = 0$) за квадрат момента количине кретања, узимајући у обзир (4.13) и (4.14) тада је:

$$\text{За } \beta = 1 : \quad J_Z^2 = \begin{cases} 2R_m^2(1+e)^2 u_c^2 \left[\frac{1}{2} f_1(e) - \ln(1+e) \right] , \\ \text{или} \\ 2R_m^2(1-e)^2 u_c^2 \left[\frac{1}{2} f_1(e) - \ln(1-e) \right] , \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\text{За } \beta \neq 1 : \quad J_Z^2 = \begin{cases} 2R_m^2(1+e)^2 \frac{GM}{(\beta-1)R_{\max}} \left(\frac{R_m}{R_{\max}} \right)^{\beta-1} \left[\frac{1}{2} f_\beta(e) + 1 - (1+e)^{\beta-1} \right] , \\ \text{или} \\ 2R_m^2(1-e)^2 \frac{GM}{(\beta-1)R_{\max}} \left(\frac{R_m}{R_{\max}} \right)^{\beta-1} \left[\frac{1}{2} f_\beta(e) + 1 - (1-e)^{\beta-1} \right] . \end{cases} \quad (4.16)$$

У овим алтернативним изразима знак $+$ одговара одређивању момента количине кретања преко апоцентричног растојања R_a , а знак $-$ преко перицентричног растојања R_p . Пошто оба алтернативна израза морају бити међусобно једнака, њиховим изједначавањем долази се до аналитичког облика функција $f_1(e)$ и $f_\beta(e)$.

$$f_1(e) = \frac{(1+e)^2 \ln(1+e) - (1-e)^2 \ln(1-e)}{2e} , \quad (4.17)$$

$$f_\beta(e) = \frac{(1-e)^2 [1 - (1-e)^{\beta-1}] - (1+e)^2 [1 - (1+e)^{\beta-1}]}{2e} . \quad (4.18)$$

За неки узорак звезда које се налазе на истој позицији у неком датом тренутку t (рецимо $R = R_\odot$, $Z = 0$ и исто θ), могу се одредити параметри орбите R_m и e користећи процедуру која је детаљно описана у (Ninković, 2011). Како је за овај рад та процедура од великог значаја овде је ипак дата, али у скраћеном облику у секцији 4.1. Заснована је на две претпоставке које знатно унапређују брзину рачунања ових параметара. Те претпоставке су заправо апроксимације,

једна за квази интеграл кретања E_R - формула (2.17) и друга за степени закон који се тиче кружне брзине - формула (4.1). Горе поменута процедура до сада није коришћена и поузданост тако одређених резултата ће доста зависити од ових претпоставки тако да је неопходно урадити детаљну анализу и проверу добијених резултата. То је урађено користећи модел гравитационог потенцијала за Млечни пут у којем су израчунате тродимензионе галактоцентричне орбите користећи једначине (2.12) и (2.13) за сваку звезду. Таква процедура, која је свакако компликованија, доста је тачнија јер у себи не садржи ове апроксимације и описана је у секцији 4.2. Међутим, за рачунање орбиталних параметара на овај начин потребно је много више рачунарских ресурса и времена. То је могуће урадити за неки мањи каталог или узорак звезда одабраних из неког каталога. Са повећањем броја звезда повећава се и време потребно за рачунање параметара. За будућу анализу, која је планирана након објављивања података из мисије „Гаја” за коју се очекује да ће имати податке велике тачности за близу милијарду звезда, од великог значаја ће бити први од ова два поступка који је знатно бржи.

4.1 Рачун ексцентричности

За сваку звезду из околине Сунца, потребно је да имамо потпун скуп података: позицију, хелиоцентрично растојање, сопствено кретање и радијалну брзину. У том случају увек је могуће одредити хелиоцентричне компоненте брзине у правоугаоном координатном систему са осама оријентисаним у смеру галактичких координата l и b . Потребно је још и да знамо компоненте брзине Сунчевог кретања у односу на LSR (детаљније о ознаци и термину у секцији 3.1), тако да хелиоцентричне компоненте брзине можемо да поправимо за Сунчево кретање. На крају, користећи вредност за кружну брзину, добијамо брзину за тражену звезду у односу на средиште Млечног пута (формуле (3.1)-(3.7)). Како је од интереса само кретање звезде у односу на координату R ,

кретање нормално на раван Млечног пута може се занемарити. Због тога се користе две компоненте брзине, обе у равни Млечног пута, радијална (у правцу кретања према средишту) и трансверзална (нормално на радијалну). Даље, прелази се на две бездимензионе величине:

- φ која је однос апсолутне вредности галактоцентричне брзине у равни и кружне брзине у тачки где се звезда налази; и
- φ_t која је однос апсолутне вредности трансверзалне компоненте брзине и кружне брзине.

Заменом формула (4.4) и (4.5) за потенцијал и формула (4.13) и (4.14) за енергију из претходне секције, у једначину (4.7), уз напомену да важи $V_p^2 = \dot{R}^2 + \Theta^2$, добијамо формулу за брзину за средње растојање R_m , за $R = R_\odot$. Тада је:

$$V_p^2 = u_c^2 \left[f_1(e) + 2 \ln \frac{R_m}{R_\odot} \right], \quad \text{за } \beta = 1 \quad (4.19)$$

Како за $\beta = 1$ важи да је $u_c(R_m) = u_c(R_\odot)$ добијену једначину можемо поделити са u_c^2 . За случај $\beta \neq 1$ важи да је:

$$u_c(R_m) = \left(\frac{R_m}{R_\odot} \right)^{\frac{\beta-1}{2}} u_c(R_\odot). \quad (4.20)$$

Одатле следи да је:

$$V_p^2 = (f_\beta(e) + 2) \frac{x^{1-\beta}}{\beta-1} u_c^2(R_\odot) - \frac{2}{\beta-1} u_c^2(R_\odot), \quad \text{за } \beta \neq 1 \quad (4.21)$$

С обзиром на једначине (2.15, 4.15, 4.19) добијају се следећи изрази, где трећа бездимензиона величина x представља однос тренутне удаљености од осе симетрије Млечног пута до екстремне вредности удаљености (R_p или R_a).

$$\begin{aligned} \varphi_t^2 x^2 + 2(\beta-1)^{-1} [x^{1-\beta} - 1] - \varphi^2 &= 0, \quad \beta \neq 1; \\ \varphi_t^2 x^2 - 2 \ln x - \varphi^2 &= 0, \quad \beta = 1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Овде је коришћена вредност β тј. експонент у изразу (4.2) за кумулативну масу. Вредности за β леже у интервалу $0 \leq \beta \leq 3$. Ове границе одговарају границама $-\frac{1}{2} \leq \delta \leq 1$ за експонент δ у изразу (4.1). Међутим за изучавање кретања звезда у околини Сунца најбоље је користити однос Ортових константи

$$\alpha = \frac{A}{|B|} .$$

Веза између односа α и експонента β је дата једноставном једначином

$$\alpha = \frac{3 - \beta}{\beta + 1} , \quad (4.23)$$

из које се лако добија да $\alpha = 0$ и $\alpha = 3$ одговара границама $\beta = 3$ и $\beta = 0$ редом.

Једначина (4.22) увек има два реална решења. Тиме се појављује могућност да можемо једно решење интерпретирати као минимална, а друго као максимална удаљеност од осе симетрије, R_p и R_a редом. Коначно користећи једначину (2.18) добијају се средња удаљеност R_m и ексцентричност e .

На овај начин могу се одредити орбитални параметри звезде, која се налази у танком диску у околини Сунца, за веома кратак период рачунарског времена. На рачунару који је коришћен (опис у поглављу 6.1), време извршавања програма за хиљаду звезда је око четири секунде. Време извршавања не расте линеарно са повећањем броја звезда, јер је већи део овог времена потрошен на учитавање каталога и исписивање резултата у датотеке. За проверу квалитета овако одређених параметара коришћена је процедура описана у наредној секцији, која је много прецизнија, али која захтева и много више рачунарског времена.

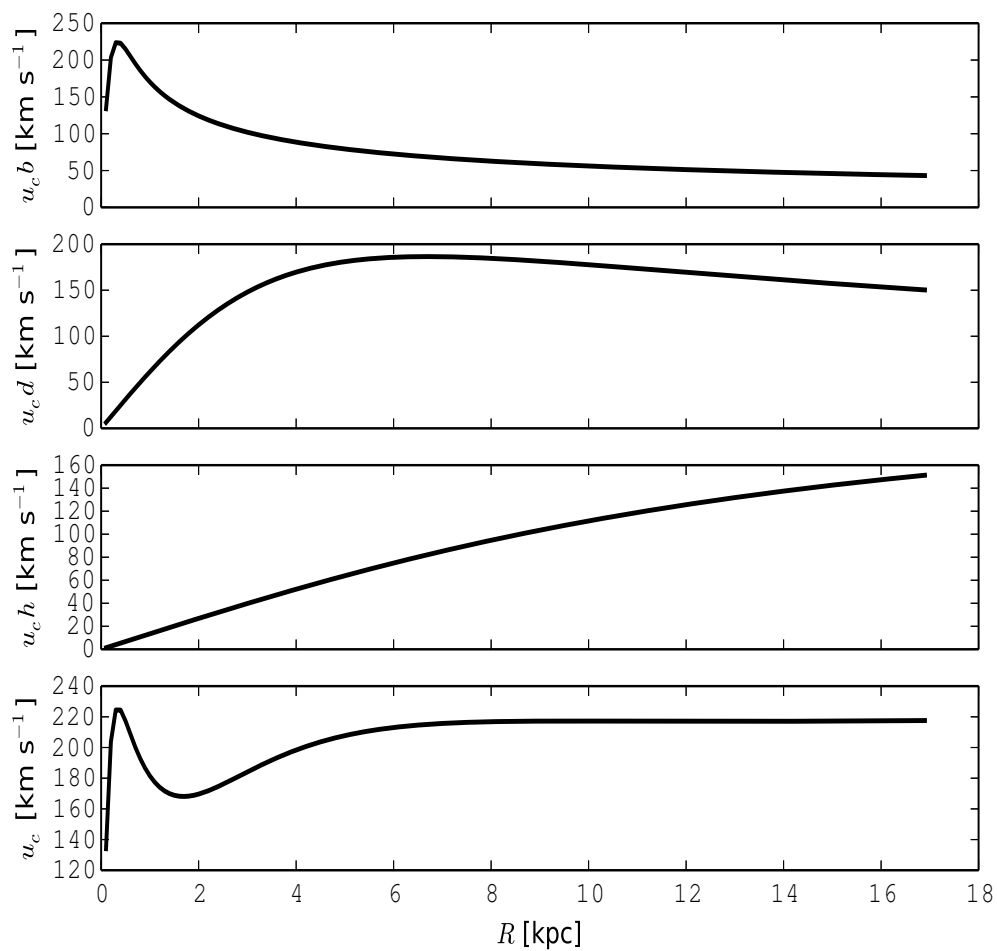
4.2 Модел Млечног пута

За сваку звезду из одабраног узорка може се израчунати ексцентричност рачунањем тродимензионе орбите око средишта Млечног пута, уколико се ради о звезди танког диска. Начин на који је то урађено је дат у секцији 5.2. Да би смо израчунали орбиту потребно је одабрати модел Млечног пута и о томе ће бити речи у овој секцији. Примењен је модел у којем је потенцијал гравитације дат аналитички. Модел, са свим параметрима, дат је у раду (Ninković, 1992a). На слици 4.1 претстављена је крива ротације за овај модел, за сваку компоненту Млечног пута посебно, а на последњем графику укупно. Крива ротације код оваг модела се добро слаже са актуелним кривама ротације (слика 2.1) за нашу галаксију добијених из посматрања (Iocco et al., 2015).

Модел Галаксије узима у обзир сва три подсистема поменута раније: диск, централни овал и тамни хало¹, где први од ова три највише доприноси густини. Централни овал је заслужан за локални максимум ротационе криве близу средишта Галаксије, док тамни хало највише доприноси галактичком потенцијалу поготово на већим удаљеностима. Диск је, у овом случају, унапређена верзија оног који је представљен Шмитовим моделом (поглавље V у Blaauw & Schmidt 1965), тако да варијације у густини што више одговарају ситуацији са експоненцијалним диском налик оном који је предложио Фриман (Freeman, 1987). У сврху што прецизнијег одређивања укупне галактичке потенцијалне енергије овај модел даје аналитичке изразе и за густину и за потенцијал Галаксије. Потенцијал централног овала и диска описан је истом формулом, у обе је коришћен Мијамото-Нагаи модел (Miyamoto & Nagai, 1975), али са различитим параметрима за сваку компоненту посебно. За тамни хало је коришћен сферни потенцијал.

Параметри овог модела од интереса су удаљеност Сунца од галактичке осе ротације и брзина LSR . Оба параметра су фиксирана у моделу и износе 8.5 крс

¹Аутор је ову компоненту назвао *dark corona* у свом раду, тако да се може користити и превод тамни хало који је данас доста заступљен у литератури



Слика 4.1: Крива ротације Млечног пута добијена на основу аналитичког модела (Ninković, 1992a). Графици показују криву ротације по компонентама наше галаксије и то за централни овај, диск и тамни хало Галаксије редом одозго на доле, док је последњи график на дну укупна кружна брзина за Млечни пут.

и 220 km s^{-1} , редом. Приликом рачунања орбита узето је у обзир да се Сунце не налази у равни Млечног пута. Претпостављено је да се налази на удаљености од 0,015 крс од равни према северу.

4.3 Рачунарски програм

За потребе овог рада развијен је алгоритам и рачунарски програм који израчунава све потребне податке на основу уноса, тј. података из каталога. Програм је написан користећи програмски језик `Python v3.4` и у целости је приложен у додатку (поглавље 6.1). Састоји се од 6 главних функција и неколико помоћних које су служиле за исцртавање графика и визуализацију резултата.

4.3.1 Учитавање каталога

Прва функција `citanje_kataloga()` има задатак да припреми податке за унос у програм и у низове ради касније лакше обраде података. Све датотеке које се отварају и у које се уписују подаци унутар ове функције носе префикс „F1_”. Цела улазна датотека која је у овом случају комплетан каталог се учитава линију по линију и подаци из сваке линије се смештају у одговарајуће низове. На крају је формирано онолико низова колико има колона у каталогу, почевши од низа који садржи ознаку звезде. У сваком низу податак са истим индексом одговара истој звезди. Ова функција такође броји и исписује на стандардни излаз колико звезда у каталогу нема паралаксу или радијалну брзину. Ово је уједно и једина функција која је адаптирана када је завршен рад на каталогу *SPOCS* и када се прешло на већи каталог *GCSIII*. Промена се састоји у томе да је учитавање података другачије јер каталог *GCSIII* садржи више података, самим тим више колона, од каталога *SPOCS*. Преласком на податке који буду доступни након завршетка мисије „Гаја”, биће потребно променити само ову функцију. О каталозима који су коришћени биће више речи у поглављу 5.

4.3.2 Трансформација координата

Наредне три функције су неопходне за рачунање галактичких компоненти брзине (U, V, W) ако су познате радијална брзина, сопствено кретање и паралакса звезде. Ово је проблем сферне тригонометрије који је добро описан у раду (Johnson & Soderblom, 1987) где су аутори дали поступак за рачунање који је овде искоришћен. Функција `matrica_T()` прави матрицу трансформације за коју су потребна три улазна параметра тј. угла. Два угла (α, δ) дају екваторијалну позицију северног галактичког пола и трећи угао (θ) је положајни угао галактичког средишта тј. галактичка лонгитуда северног небеског пола. Ова три угла су у програму унета за епоху 2000. Следећа функција `eq_gal_coord()` користи направљену матрицу трансформације и одређује l и b за сваку звезду. Ова функција може да се изостави уколико је у каталогу дато l и b за сваку звезду. Датотеке направљене у овој функцији носе префикс „F3_”, а у наредној функцији префикс „F4_”. Наредна функција `gal_space_vel()` коначно одређује (U, V, W). За ову функцију потребни су параметри компоненте Сунчевог кретања као и вредност за LSR . Ова функција има још једну битну улогу јер се у њој врши издвајање звезда из каталога и формирање подузорака, затим и њихово смештање у низове са којима се ради у наставку програма. Начин селекције подузорка описан је у секцији 5.1.

4.3.3 Одређивање ексцентричности

Одређивање ексцентричности и средњег растојања врши се у петој функцији по реду под називом `astrofizika()`. Излазне датотеке имају префикс „F5_”. Користећи процедуру описану у секцији 4.1, израчунате су вредности e и R_m за свако β у интервалу од 0 до 3 са кораком 0,1. Ова функција користи Њутн-Рафсонов ² (Press et al., 2007) метод за проналажење нула функције дате формулама (4.22). Овај метод је веома ефикасан али мора се пазити приликом одабира параметара, пре свега на интервал у којем се траже нуле, као и на корак

²eng: Newton–Raphson method

са којим ова функција ради. Одабир превише малог корака може довести до јако дугог времена израчунавања. Још један проблем који је обрађен у овој функцији је проблем када Њутн-Рафсонов метод дође до екстремума функције за који се траже нуле. Ови случајеви морају пажљиво бити обрађени додатним испитивањем како би се програм извршио до краја. Свакако, од највећег интереса су подаци добијени за β у околини јединице, али ова функција рачуна вредности за све параметре β из дозвољеног интервала вредности, ради каснијег поређења.

Исти параметри одређени су и помоћу нумеричког интегратора, који је шеста велика функција овог програма, а која се састоји од неколико подфункција: `Ettotal()`, `delta()`, `RK4()`, `integrator()`. Овде је коришћен Рунге-Кута метод 4. реда (Press et al., 2007) због велике стабилности и прецизности. Овај интегратор даје тродимензиону орбиту за сваку звезду из задатог скупа. Модел наше галаксије који је овде коришћен је описан у секцији 4.2. Време интеграције је 10 милијарди (10^{10}) година, што се узима као приближна вредност старости диска наше галаксије. Енергија (величина E у изразу (2.14)) је очувана до $\Delta E/E \sim 10^{-10}$. Код издвојених звезда танког диска лако је одредити орбиталне параметре R_p и R_a , а затим и e , на основу орбите звезде.

4.3.4 Остале функције

Поред овог главног програма, за потребе овог рада, написано је још неколико мањих функција које су коришћене за цртање графика, цртање орбита звезда, упоређивање резултата, метод најмањих квадрата и слично, које су добро познате и лако се могу пронаћи у литератури па овде нису дате. За цртање свих графика коришћена је библиотека `matplotlib` програмског језика `python`.

Поглавље 5

Анализа танког диска и резултати

Као што је речено у претходном поглављу процедура за одређивање орбиталних параметара применљива је на објекте који се крећу по орбитама које су близу равни Галаксије и које имају малу ексцентричност. Ови услови треба да буду задовољени када се врши одабир звезда. У првом кораку коришћен је каталог са мање звезда¹ како би се на том узорку звезда проверила хипотеза да је оправдано користити поједностављену методу за одређивање орбиталних параметара. Ова провера урађена је упоређивањем са орбиталним параметрима истих звезда добијених на основу симулације Галаксије за шта је коришћен рачунарски програм објашњен у секцији 4.3 . То је објављено у раду (Stojanović, 2015) и на даље ће бити означавањем са Рад 1. Начин на који су звезде одабране из каталога у потпуности се ослања на закључке које смо изнели у радовима (Ninković, Cvetković, & Stojanović, 2012) и (Ninković, Stojanović, & Cvetković, 2013) које ћемо даље означавати са Рад 2 и Рад 3. На крају је иста процедура спроведена на великом узорку² звезда из другог каталога. На основу добијених параметара одредили смо динамичке константе и резултате објавили у раду (Cubarsi, Stojanović, & Ninković, 2017) који ће носити ознаку Рад 4.

¹Каталог *SPOCS* садржи 1040 звезда.

²Каталог *GCSIII* садржи 16682 звезда.

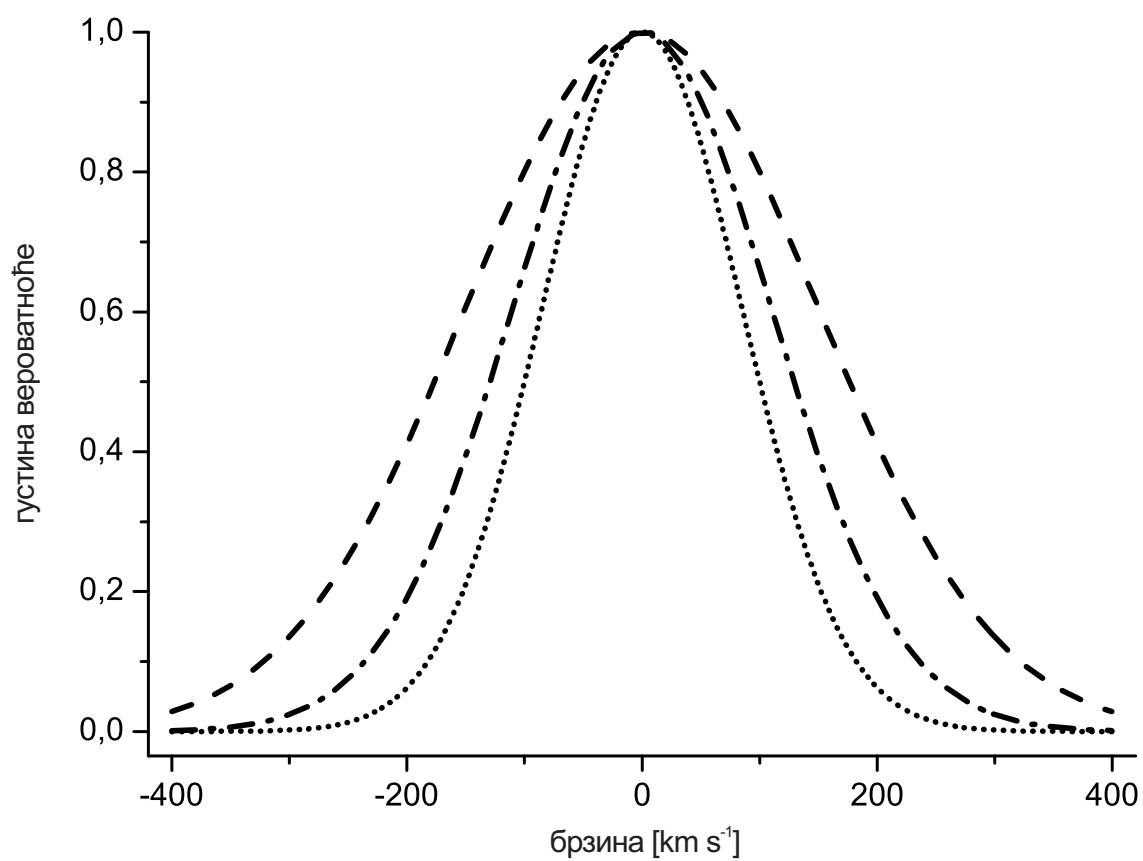
5.1 Одабир звезда из каталога

Проучавање кинематике звезда из Сунчеве околине, као и положај Сунца у Галаксији, указује на то да је у овој запремини присуство звезда централног овала занемарљиво. Према томе, звезде које се тренутно налазе близу Сунца, или другачије записано, чије су галактоцентричне координате $X \approx -R_{\odot}$, $Y \approx 0$, $Z \approx 0$ припадају или диску или халоу. Удео халоа је веома низак (Рад 2), док се код диска издвајају две битне компоненте – танки и дебели диск (Рад 3). Дебели диск, чији је удео далеко мањи (на једну његову звезду долази петнаестак звезда танког диска), одликује се знатно мањом брзином ротације и знатно већом дисперзијом. Прецизније, док се код танког диска, у зависности од конкретне врсте звезда, кинематичка разлика (описано у поглављу 3.1) креће од неких 5 km до 20 km, код дебелог диска она се процењује на око (60-80) km (Alcobé & Cubarsi, 2005). Средњи квадрати компонената својствене брзине дуж координатних оса x , y , z су код дебелог диска знатно већи.

За средиште потпростора брзина за Сунчеву околину дефинишемо LSR . У локалној кинематици се често не користе параметри реда вишег од два (користе се средња вредност брзине и средњи квадрат одступања по компонентама). Претпостављамо да важи стационарно стање и обртна симетрија тако да је кретање центроида ротација. За расподеле брзина узимамо Гаусове расподеле. На овај начин имамо 5 параметара: брзину LSR , брзину ротације халоа и три дисперзије брзине по свакој од координатних оса Галактичког координатног система. Узорак који проучавамо у радовима 2 и 3 је вештачки и састоји се од 2000 „звезда”. Сваки објекат одређен је са три насумично одабране вредности за компоненте брзине U, V, W . Када су параметри одређени онда можемо добити кретање сваке „звезде” у односу на LSR .

$$v = \sqrt{U^2 + (u + V - v_0)^2 + W^2} . \quad (5.1)$$

Овде је v брзина звезде у односу на LSR , u је брзина ротације и v_0 галакто-



Слика 5.1: Гаусове расподеле дисперзија за компоненте брзине халоа су 150 km s^{-1} , 110 km s^{-1} и 85 km s^{-1} , у правцу: ка галактичком средишту (испрекидана линија), галактичке ротације (линија-тачка-линија) и ка северном галактичком полу (тачкаста линија). Преузето из Рада 2.

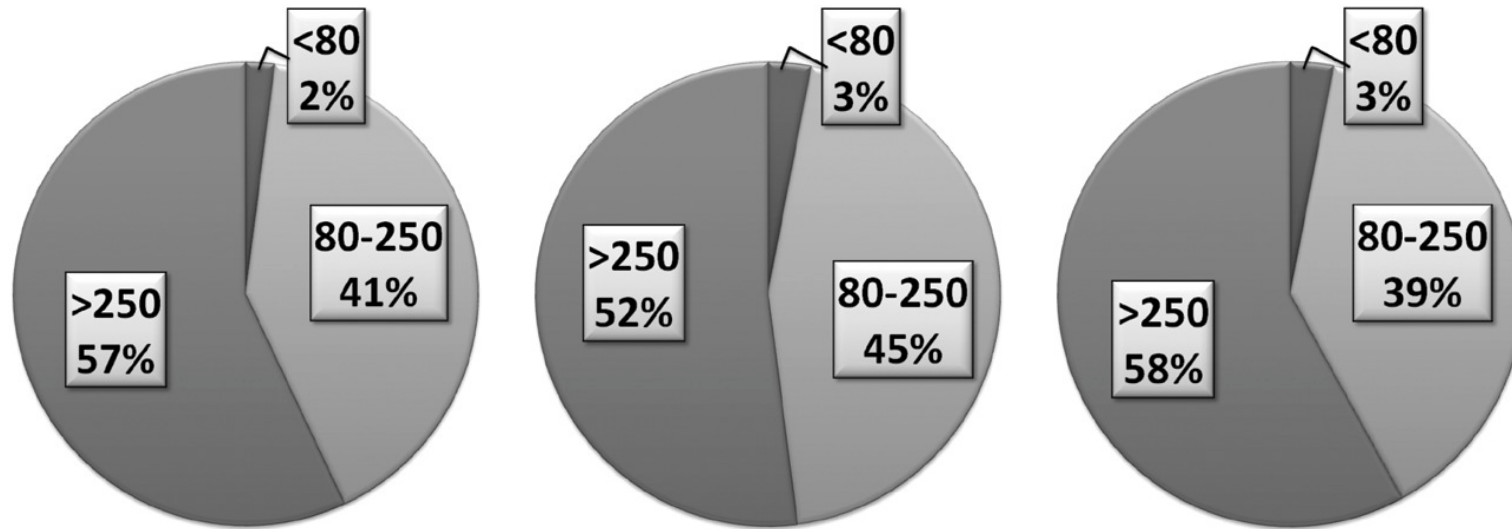
центрична брзина LSR .

За брзину LSR смо као и раније усвојили 220 km s^{-1} , а за брзину ротације халоа 0 km s^{-1} . Због недовољне прецизности у расположивим подацима за ове брзине смо тестирали и вредности промењене за $\pm 30 \text{ km s}^{-1}$ (деталније о томе у Раду 2). За хало се у литератури налазе разне вредности за дисперзије брзина (Binney & Merrifield, 1998; Bensby et al., 2003; Cubarsi et al., 2010).

На слици 5.1 приказане су дисперзије по компонентама брзине за хало: 150 km s^{-1} , 110 km s^{-1} и 85 km s^{-1} . Такође, тестирали смо и утицај промене ових брзина у распону од $15\text{--}25 \text{ km s}^{-1}$ (више о томе у Раду 2). Резултати су представљени на слици 5.2 и илуструју удео звезда у задатим концентричним сферама у потпростоу брзина центрирам на LSR .

Овде уводимо два радијуса: први за основну сферу, други за унутрашњу сферу који дефинише и спољшњу сферу од тог радијуса до бесконачности. За основну сферу узимамо вредност од 80 km s^{-1} , а за пречник унутрашње сфере узимамо 250 km s^{-1} према резултатима који су добили Видојевић и Нинковић (2009). На тај начин одређен је удео звезда халоа до 80 km s^{-1} , између 80 и 250 km s^{-1} и преко 250 km s^{-1} . Резултати које смо добили јасно показују да је удео звезда халоа до 5% унутар сфере од 80 km s^{-1} . Оно што је битно је да варијације у брзини не утичу на овај резултат.

Резултати Рада 3 дају приказ за моделовање кинематике звезда из Сунчеве околине за танки и дебели диск. Разматрано је истих пет параметара као у Раду 2. Овде је за танки диск узета расподела дисперзија 34 km s^{-1} , 22 km s^{-1} , 17 km s^{-1} према (Vidojević & Ninković, 2009). За брзину ротације узето је да је 10 km s^{-1} спорија од галактоцентричне брзине LSR (Bensby et al., 2003). За дебели диск, према раду (Alcobé & Cubarsi, 2005), узете су дисперзије 70 km s^{-1} , 45 km s^{-1} , 35 km s^{-1} , уз брзину ротације за 60 km s^{-1} спорију од галактоцентричне брзине LSR . Дисперзије су представљене на графицима 5.3 и 5.4 преузето из Рада 3.



Слика 5.2: Удео звезда у деловима потпростора брзина у зависности од дисперзије брзина за хало: 150 km s⁻¹, 110 km s⁻¹, 85 km s⁻¹ (лево); 140 km s⁻¹, 105 km s⁻¹, 80 km s⁻¹ (средина); 170 km s⁻¹, 130 km s⁻¹, 70 km s⁻¹ (десно). Галактоцентрична брзина *LSR* и ротација халоа су увек исте, 220 km s⁻¹ и 0 km s⁻¹, редом. Бројеви на слици представљају границе у потпростору брзина.

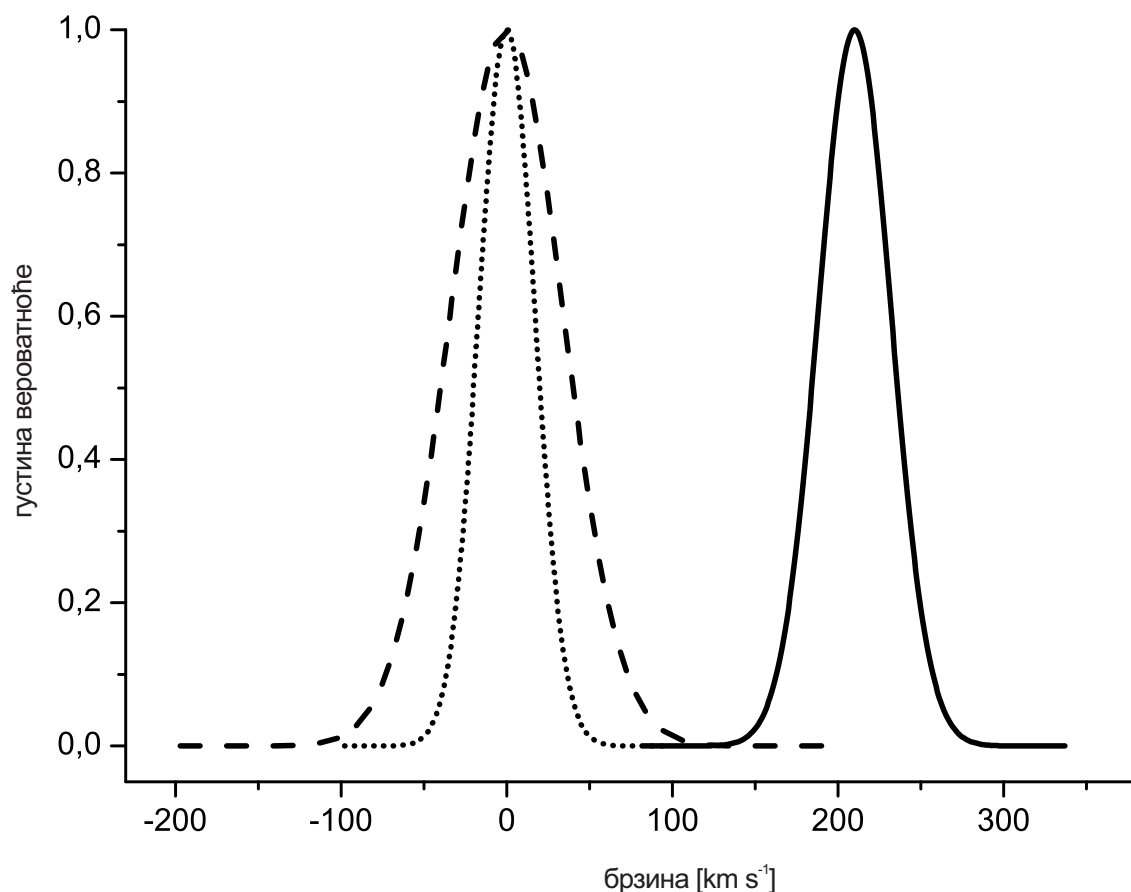
Брзина LSR је мењана у интервалу од 190 до 250 km s^{-1} . За сваку звезду рачунамо брзину по формули (5.1) и одређујемо удео звезда у основној сфери, затим унутрашњој и изван ње. Границе су такође мењане како бисмо покрили што више различитих случајева. Резултати су дати у табели 5.1.

Пречник унутрашње сфере је такође мењан како би се одредио најповољнији случај. Варијације су 80 km s^{-1} , 100 km s^{-1} и 120 km s^{-1} , док је спољашња сфера увек на 250 km s^{-1} . Из табеле 5.1 се јасно види да су за танки диск скоро све звезде у унутрашњој сфери пречника 120 km s^{-1} и да је резултат практично независан од утицаја промене претпостављене вредности за галактоцентричну брзину LSR . У случају сфере до 80 km s^{-1} резултати већ зависе од одабране вредности за LSR . Слични закључци се изводе и за случај танког диска. Процес насумичног одабира брзина и одабир програма за извршење истог³ није значајно утицао на вредности добијене за удео звезда. Уколико се вредност за LSR фиксира на 220 km s^{-1} закључујемо да је оправдано користити сферу од 80 km s^{-1} као добар услов за одабир звезда танког диска. У секцији 5.3 биће разматран још један кинематички приступ за одабир звезда танког диска који је коришћен у већем каталогу где је као критеријум коришћена ексцентричност.

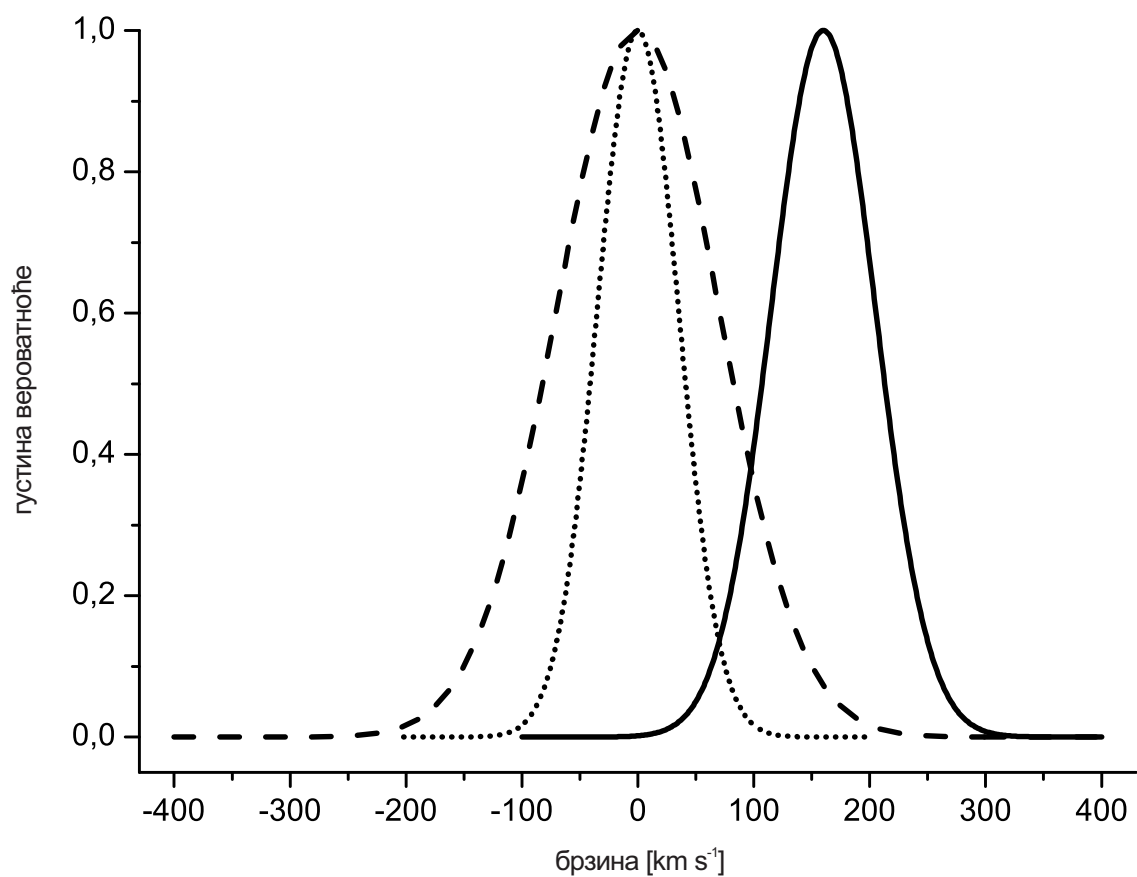
Одавде није тешко да се закључи да се за једну типичну звезду танког диска очекује да има мале апсолутне вредности компонената хелиоцентричне брзине. За типичну звезду дебелог диска очекујемо да ове компоненте могу да буду знатно веће, а у случају халоа веома велике. Нека је \vec{v}_{hel} хелиоцентрична брзина неке звезде, онда је њен интензитет дат изразом (5.1).

Закључујемо да ће вероватноћа припадности танком диску за неку звезду чија v_{hel} прелази одређену вредност бити изузетно мала и у овом раду одабрана је вредност 80 km s^{-1} . Исто се може рећи и за дебели диск, само што ће за њега та одређена вредност v_{hel} бити знатно већа него код танког диска. У литератури је позната терминологија „звезде великих брзина” (енгл. *high velocity stars*) и звезде изузетно великих брзина (енгл. *extremely high velocity stars*) према

³У рачунарском програму коришћено је неколико различитих генератора случајних бројева.



Слика 5.3: Гаусове расподеле дисперзија за компоненте брзина танког диска: испрекидана линија у правцу ка галактичком средишту, (центрирана на 0 km s^{-1} , дисперзија 34 km s^{-1}); пуна линија у правцу галактичке ротације (центрирана на 210 km s^{-1} , дисперзија 22 km s^{-1}); тачкаста линија у правцу северног галактичког пола (центрирана на 0 km s^{-1} , дисперзија 17 km s^{-1}). Преузето из Рада 3.



Слика 5.4: Гаусове расподеле дисперзија за компоненте брзина дебелог диска: испрекидана линија у правцу ка галактичком средишту, (центрирана на 0 km s^{-1} , дисперзија 70 km s^{-1}); пуна линија у правцу галактичке ротације (центрирана на 160 km s^{-1} , дисперзија 45 km s^{-1}); тачкаста линија у правцу северног галактичког пола (центрирана на 0 km s^{-1} , дисперзија 35 km s^{-1}). Преузето из Рада 3.

Табела 5.1: Удео звезда за танки и дебели диск у зависности од галактоцентричне брзине LSR . Преузето из Рада 3.

Подсистем	LSR [km s ⁻¹]	Брзина [km s ⁻¹]	Удео %	Брзина [km s ⁻¹]	Удео %	Брзина [km s ⁻¹]	Удео %
Танки диск	220	[0,80]	76.6	(80,250)	23.4	[250,∞)	0
		[0,100]	92.2	(100,250)	7.8	[250,∞)	0
		[0,120]	98.8	(120,250)	1.2	[250,∞)	0
	190	[0,80]	61.6	(80,250)	38.4	[250,∞)	0
		[0,100]	81.6	(100,250)	18.4	[250,∞)	0
		[0,120]	96.0	(120,250)	4.0	[250,∞)	0
Дебели диск	220	[0,80]	37.2	(80,250)	62.8	[250,∞)	0
		[0,100]	55.2	(100,250)	44.8	[250,∞)	0
		[0,120]	73.6	(120,250)	26.4	[250,∞)	0
	250	[0,80]	24.4	(80,250)	75.4	[250,∞)	0.2
		[0,100]	41.2	(100,250)	58.8	[250,∞)	0
		[0,120]	59.2	(120,250)	40.6	[250,∞)	0.2

вредности v_{hel} . У складу са досада реченим, међу звездама изузетно великих брзина очекујемо претежно звезде халоа, међу звездама великих брзина (али не изузетно великих брзина) претежу звезде дебелог диска и најзад код звезда које немају велике вредности v_{hel} преовлађују звезде танког диска. Међутим, Гаусова расподела не искључује мале вредности у случају дебелог диска и халоа. Другим речима, једна звезда халоа може да се креће око средишта Млечног пута слично Сунцу које је типична звезда танког диска. У вези с тим може, на вештачким узорцима (Радови 2 и 3) који представљају звезде из Сунчеве околине, да се спроведе рачун чији коначан резултат даје колико се звезда може очекивати унутар дате сфере $v_{\text{hel}} = \text{const.}$ што је дато у табели 5.1.

Према томе, звезде и дебелог диска и халоа могу у потпростору брзине фазног простора да се нађу сасвим близу Сунца ($|U| \approx 0$, $|V| \approx 0$, $|W| \approx 0$). Анализа са вештачким узорцима показује да ће само мали удео (у односу на њихов укупан број) задовољити овај услов. Дода ли се томе чињеница да је у једном типичном стварном узорку укупан број звезда и дебелог диска и халоа (нарочито халоа) знатно мањи него укупан број звезда танког диска, закључује се да је међу звездама које не спадају у звезде великих брзина занемарљиво мало оних које нису из танког диска.

5.2 Анализа каталога *SPOCS* и резултати

Изведени закључци се проверавају на једном стварном узорку. Звезде које су у првом кораку проучене су из каталога *SPOCS* (*Spectroscopic Properties of Cool Stars*) (Valenti & Fischer, 2005). Овај каталог је објављен и доступан преко *VizieR* сервиса. Садржи спектроскопске податке за укупно 1040 оближњих звезда типа F, G и K које су посматране у оквиру програма потрага за планетама ван Сунчевог система. Подаци су добијени са телескопа *Keck*, *Lick* и *AAT* и састоје се од високо квалитетних спектара који су комбиновани са фотометријом у *V* филтеру и паралаксама из „Хипаркос” каталога. На тај начин

добијен је веома прецизан каталог који јако добро покрива звезде из околине Сунца. За овај каталог се може рећи да је селекциони ефекат јако мали, тј. да су обрађене скоро све звезде у веома малој просторној запремини око Сунца. За потребе овог рада 1026 звезда из овог каталога има све потребне податке тј. позицију звезде, сопствено кретање, радијалну брзину и удаљеност. Овај узорак звезда је већ испитиван у циљу изучавања њихових галактоцентричних путања (Vidojević & Ninković, 2009). Према овим ауторима, на основу независног истраживања и коришћењем другачијих метода добијен је резултат да велика већина ових звезда припада танком диску. Очекивано је да те звезде имају орбите скоро у равни Галаксије и да је њихова ексцентричност мала.

Како у овом каталогу нису дате позиције звезда у хелиоцентричном координатном систему, прва ствар која је урађена је трансформација координата користећи функцију описану у секцији 4.3.2. Даље су ове хелиоцентричне компоненте брзине поправљене за кретање Сунца у односу на *LSR*. Уведене су ознаке (U, V, W) и коришћене су вредности за компоненте брзине Сунчевог кретања у складу са секцијом 3.1.

Следећи корак је селекција звезда из каталога. Овде је то урађено користећи кинематички приступ, тј. користећи брзине звезда у односу на *LSR*. Критеријум који је коришћен је:

$$v_{\text{hel}} \leq 80 \text{ km s}^{-1} . \quad (5.2)$$

Од укупно 1026 звезда овај услов задовољава 905 звезда. Сва растојања коришћена у овом каталогу су велике прецизности, тј. паралаксе су добијене тригонометријском методом, а ниједно од њих не прелази 230 pc.

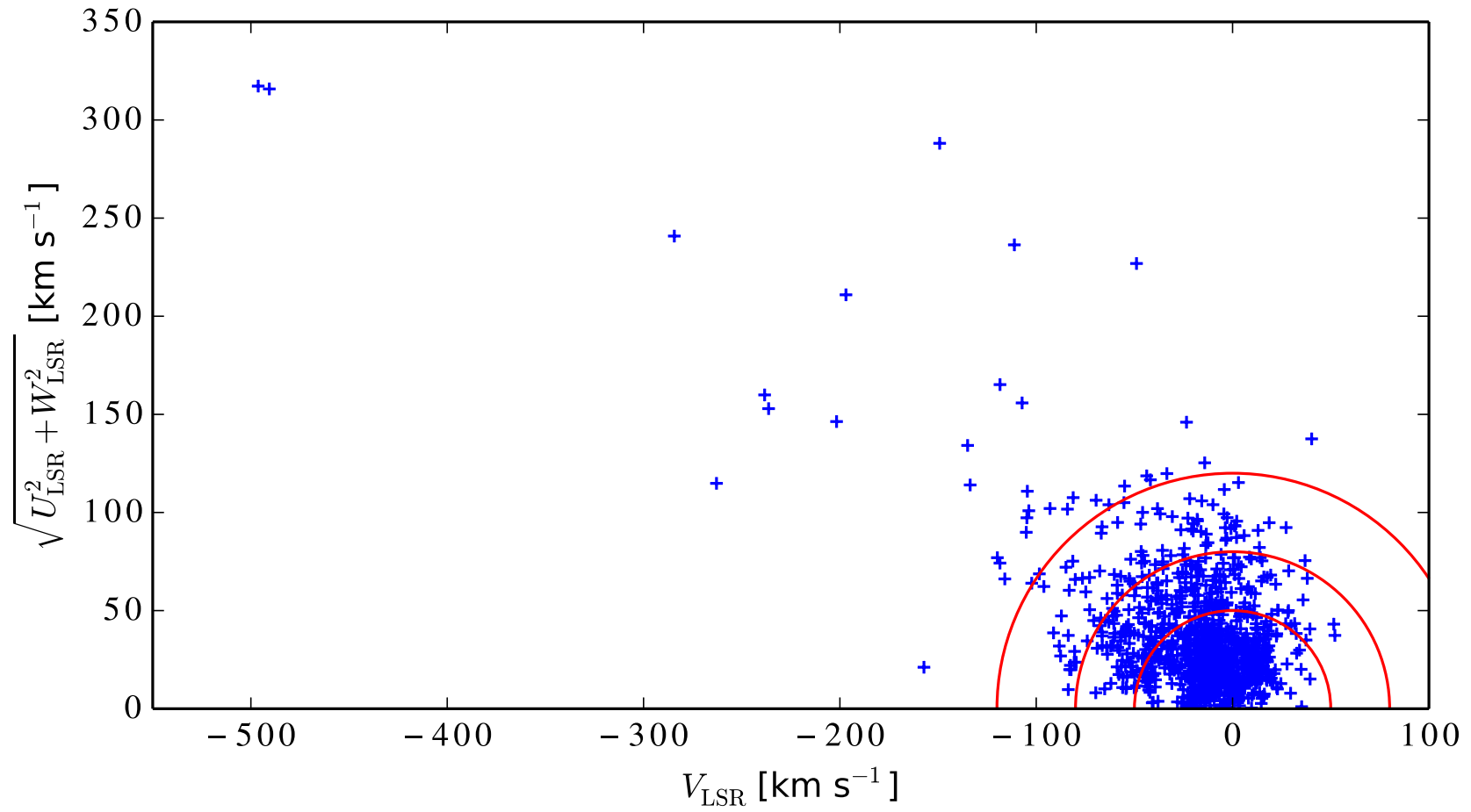
Овај поступак селекције звезда је даље потврђен кроз Тумреов дијаграм (енг. *Toomre diagram*) за свих 1026 звезда (слика 5.5 преузета из Рада 1). Значајне вредности које се појављују дуж ординате проузроковане су великим вредностима које се јављају за $|W_{\text{LSR}}|$. У том случају поједностављена проце-

дура о којој је било речи не би могла да се примени због тога што максимална удаљеност од галактичке равни може да има значајне вредности.

Следећи корак је учињен у циљу провере критеријума за селекцију звезда (Рад 1). Коришћен је рачунарски програм описан у секцији 4.3 и аналитички модел за Млечни пут описан у секцији 4.2 на основу којег су израчунате и галактоцентричне орбите за звезде из узорка.

Моделом су усвојене и вредности величина $R_0 = 8,5$ крс (растојање Сунца) и $V_{MW0} = 220 \text{ km s}^{-1}$. Узето је да се Сунце налази $0,015$ крс северно од галактичке равни. За компоненте брзине Сунца у односу на месни стандард усвојили смо исте вредности као што су дате у раду раније, тј. $(10, 8, 7)$ где је јединица km s^{-1} . Самим моделом фиксирана је још једна величина, однос апсолутних вредности Ортових констаната α . Она није експлицитно дата у раду, али се може израчунати и вредност која се добија је $\alpha = 0,97$. Да би поређење резултата добијених на ова два начина било могуће, овај параметар мора бити у сагласности са параметрима β и δ . Параметар β се рачуна у односу на задату вредност α према формули (4.23) и износи $\beta = 1,015$, а из једначине (4.3) можемо да израчунамо и параметар $\delta = 0,0076$. Предност процедуре описане у секцији 4.1 је што се параметар α може мењати лако, док је код аналитичких модела Галаксије та вредност фиксирана.

Добијене галактоцентричне орбите карактеришу се чињеницом да је кретање по R непромењено код звезда танког диска. У том случају екстремне вредности R_p и R_a су добро дефинисане и не зависе од $|Z|$ тј. удаљености од галактичке равни (слике 5.6 и 5.7 преузете из Рада 1). Због тога, ове две вредности могу се третирати као орбитални параметри. Овде је дат пример две звезде *SPOCS125* и *SPOCS460* које су у процесу селекције одабране као звезде танког диска. Осим орбита ових звезда у меридијанској равни дат је приказ у xy равни (5.8 и 5.9) где се лако уочава да су звезде током свог кретања остале унутар два цилиндрична ваљка који су ограничени са R_p и R_a и са две паралелне равни $Z = Z_{\max}$ и $Z = Z_{\min}$. На крају дат је и приказ у 3 димензије (слике 5.12



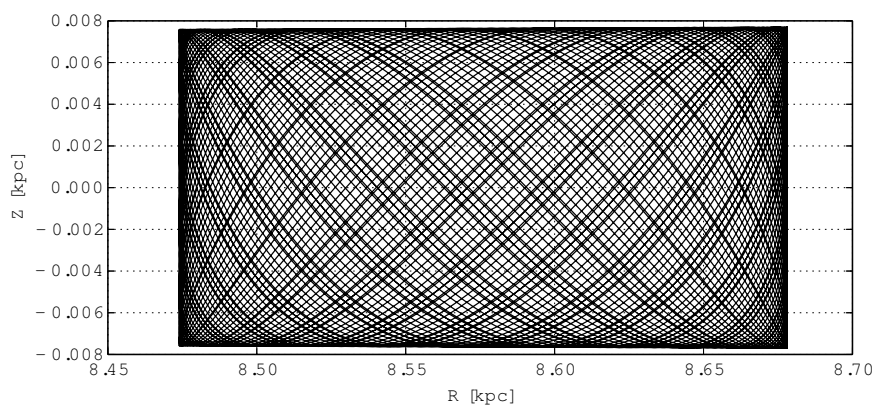
Слика 5.5: Тумреов дијаграм за узорак звезда каталога *SPOCS*. Линеје означавају константну брзину v_{hel} за 50 km s⁻¹, 80 km s⁻¹ и 120 km s⁻¹.

и 5.13). Ради поређења дата је и једна типична звезда халоа *SPOCS766* (слике 5.10, 5.11 и 5.14) које је одбачена из узорка по критеријуму (5.2), а такође је одабрана као звезда халоа у раду (Vidojević & Ninković, 2009).

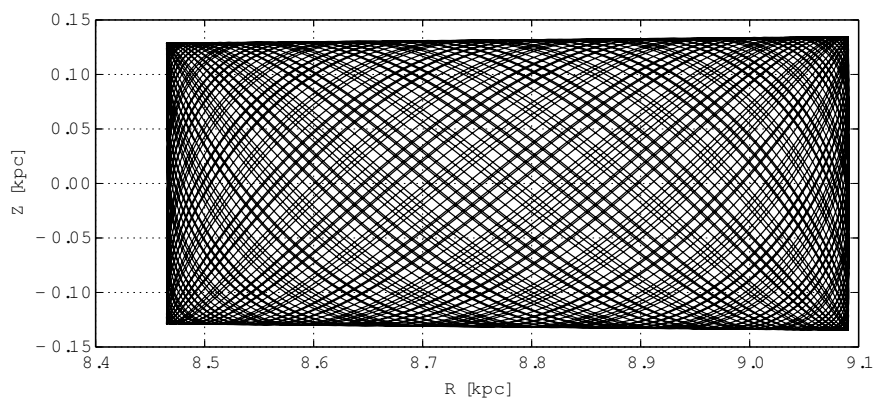
Свака звезда из узорка је проверена на овај начин и утврђено је да међу одабраним звездама које су добијене на основу критеријума (5.2) нема звезда халоа и дебелог диска. Све ово је урађено у циљу образовања подузорака који садрже конкретне звезде из узорка, претходно разврстане у танки диск и дебели диск или хало. Добро слагање иде у прилог исправне обраде узорка.

За потребе овог рада кретање нормално на галактичку раван није од значаја. Вредности R_p и R_a заменићемо са R_m и e користећи формуле (2.18). За ексцентричност очекујемо мале вредности. Као последица тога ни R_p ни R_a не могу значајно да се разликују од тренутне вредности R . То значи да се очекује да интервал $[R_{p\min}, R_{a\max}]$ буде веома узак; $R_{p\min} \equiv \min\{R_p\}$ and $R_{a\max} \equiv \max\{R_a\}$ су најмања и највећа вредност, редом, у скуповима R_p and R_a целог подузорка. У поједностављеној процедури, вредности за R_\odot и галактоцентрична брзина LSR немају утицаја на резултате. Друга је потребна за рачунање галактоцентричних брзина, је касније коришћена као јединица тако да само бездимензионе величине добијене након дељења са њом су коришћене у рачуну. Зато се ова процедура може лако прилагодити за коришћење уз процедуру рачунања тродимензионих орбита, где су у претпостављеном моделу који се користи увек фиксирани вредности за R_\odot и LSR . Оно што је битно да буде усаглашено јесу вредности за компоненте брзина Сунца у односу на LSR .

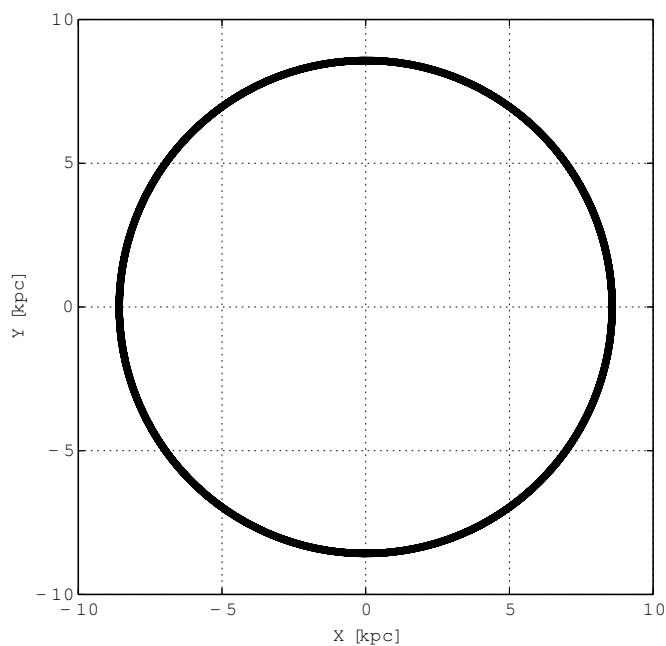
Финалну проверу радимо поређењем расподела ексцентричности за подузорок звезда који смо направили и то је приказано на слици 5.15. Као што се види са слике, ексцентричности су веома мале, што се очекује за звезде танког диска. То значи да ће средње растојање увек бити близу тренутног растојања. Из овог разлога расподела ексцентричности је од већег интереса него расподела средњег растојања. Ексцентричност је за сваку звезду одређена два пута: једном на основу поједностављене процедуре описане у секцији 4.1 и други пут из



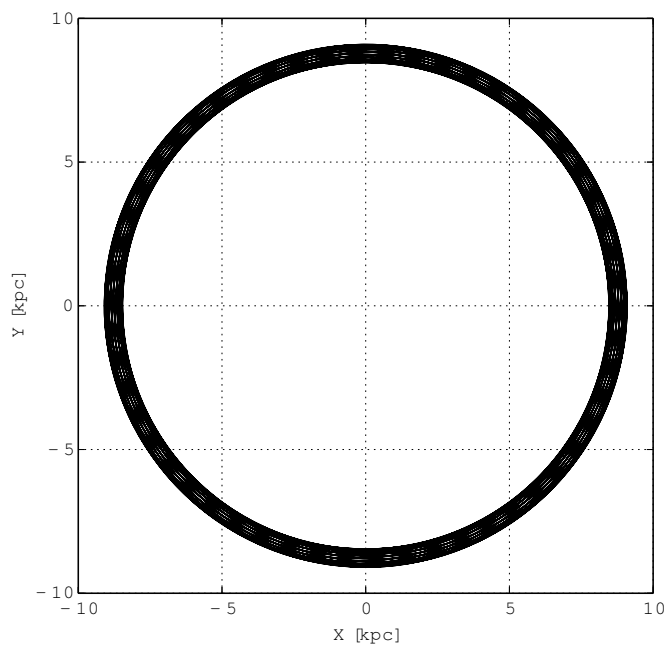
Слика 5.6: Орбита звезде са ознаком *SPOCS125* представљена у меридијанској равни, типична звезда танког диска. Преузето из Рада 1.



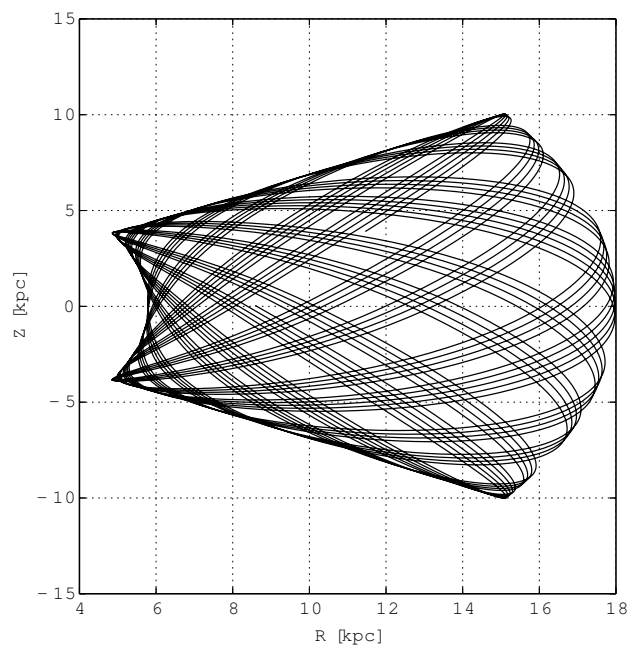
Слика 5.7: Орбита звезде са ознаком *SPOCS460* представљена у меридијанској равни, типична звезда танког диска. Преузето из Рада 1.



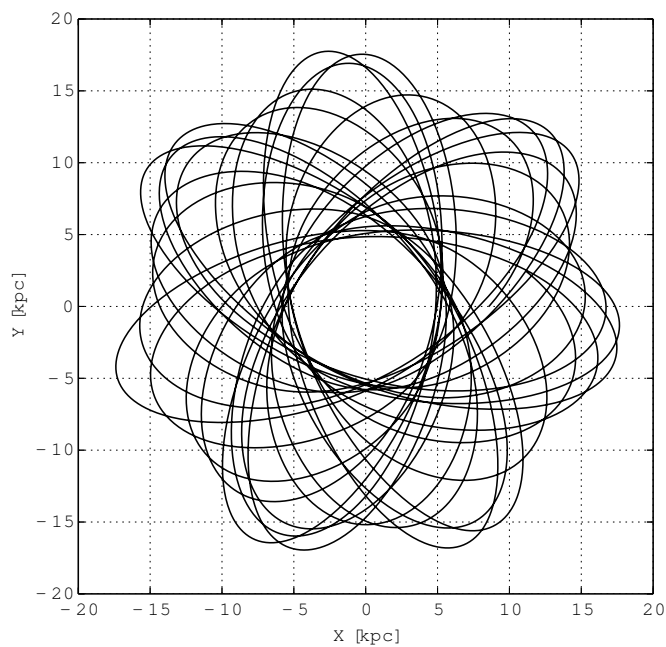
Слика 5.8: Орбита звезде са ознаком *SPOCS125* представљена у xy равни.



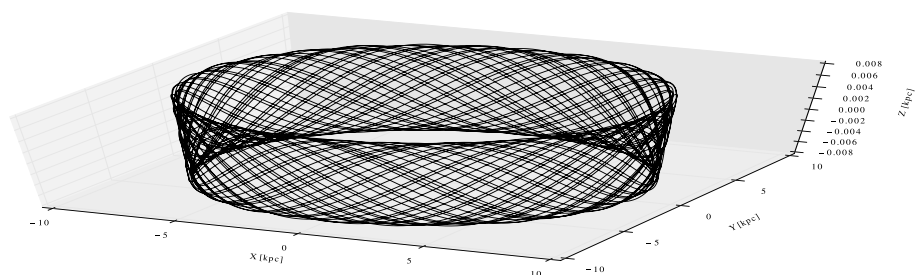
Слика 5.9: Орбита звезде са ознаком *SPOCS460* представљена у xy равни.



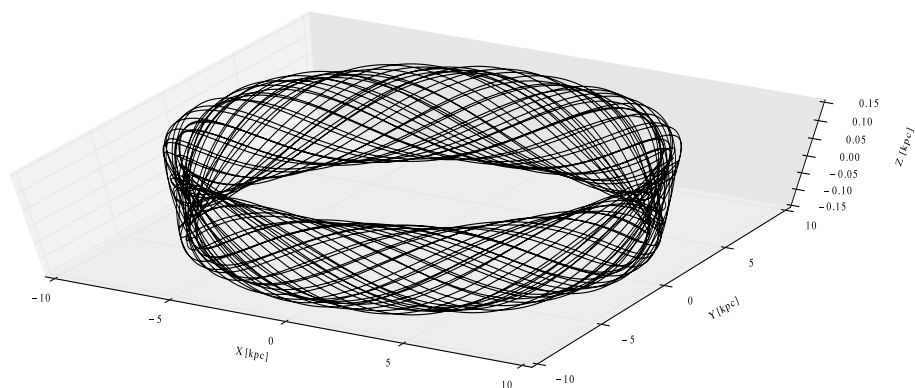
Слика 5.10: Орбита звезде са ознаком *SPOCS766* представљена у меридијанској равни, типична звезда халоа. Преузето из Рада 1.



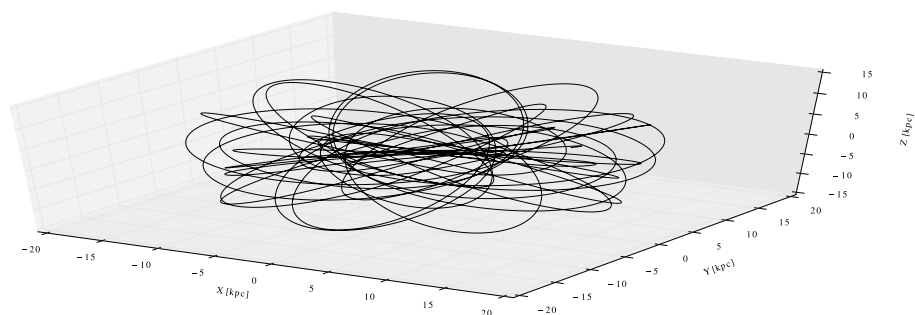
Слика 5.11: Орбита звезде са ознаком *SPOCS766* представљена у xy равни.



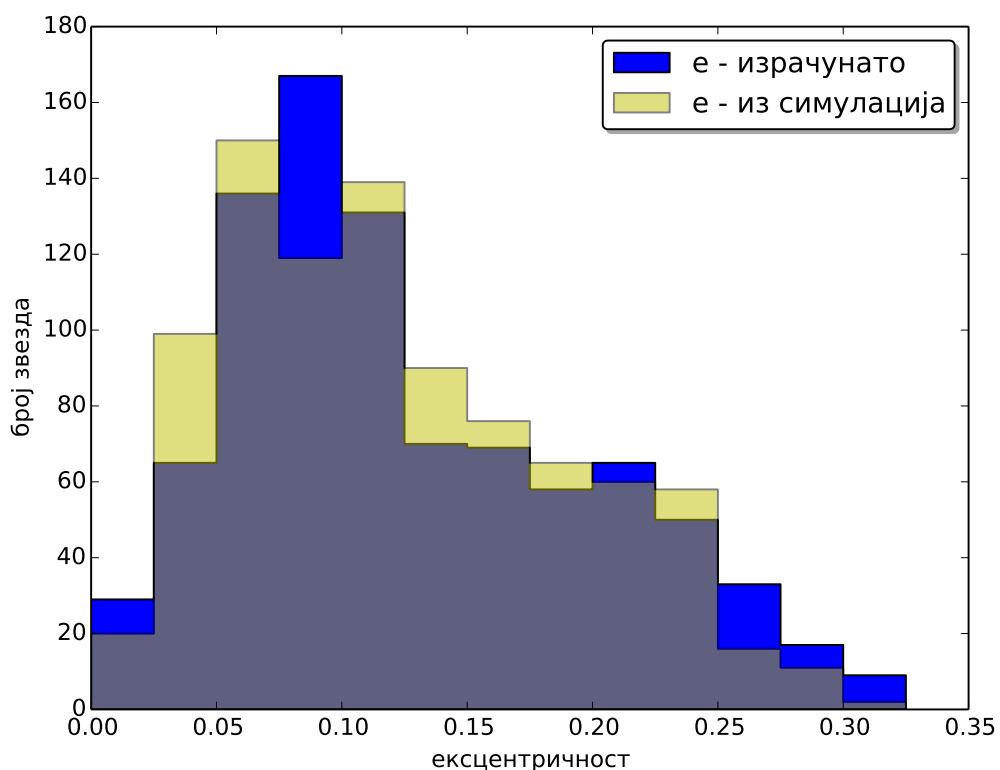
Слика 5.12: Орбита звезде са ознаком *SPOCS125* представљена у 3 димензије.



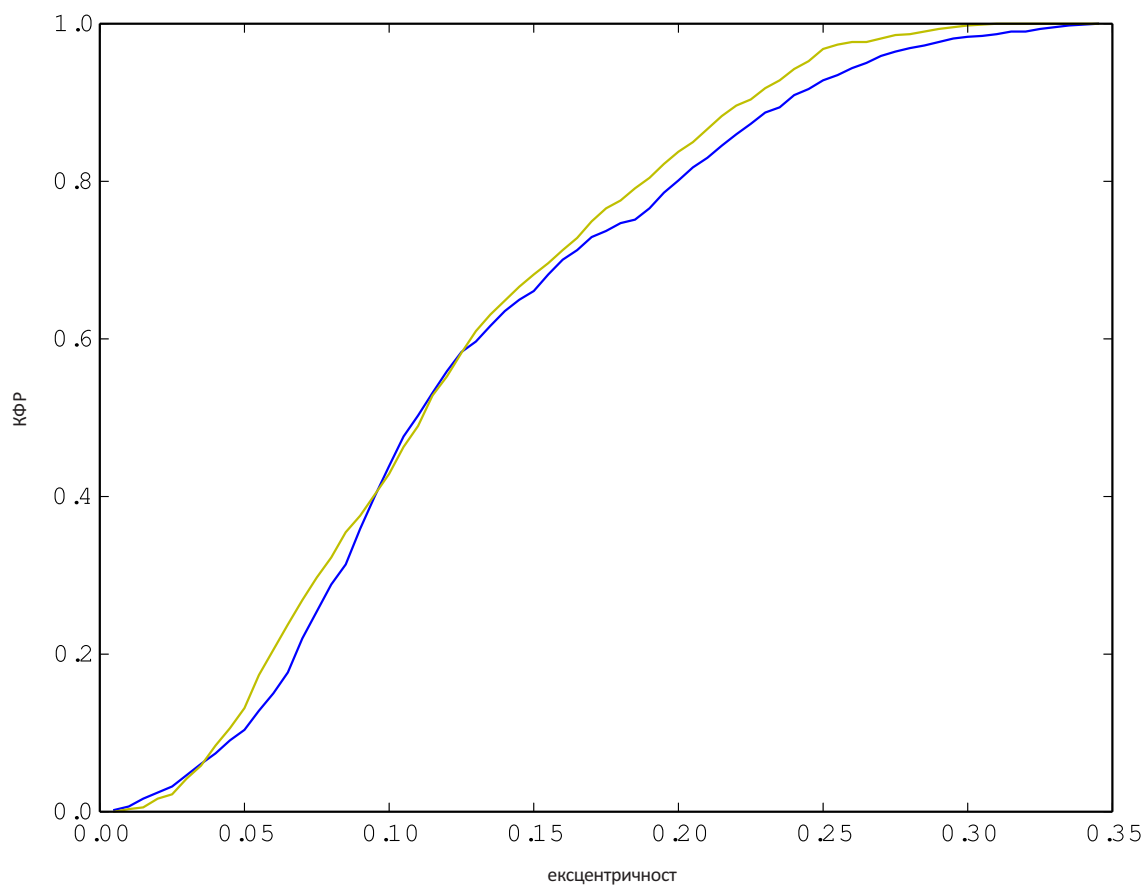
Слика 5.13: Орбита звезде са ознаком *SPOCS460* представљена у 3 димензије.



Слика 5.14: Орбита звезде са ознаком *SPOCS766* представљена у 3 димензије.



Слика 5.15: Расподела ексцентричности за подузорок од 905 звезда. Плава боја означава резултате добијене из поједностављене процедуре, док је провидна жута боја за резултате добијене из тродимензионих орбита. Сива боја показује регионе где се резултати преклапају.



Слика 5.16: Кумулативна функција расподеле за ексцентричности израчунате помоћу формула (плава боја) и симулација (жута боја).

Табела 5.2: Статистички тест Колмогорова и Смирнова

ширина одсечка	D	p
0,025	0,077	0,99
0,015	0,130	0,98
0,005	0,101	0,85

тродимензионих галактоцентричних обрита добијених на основу аналитичког модела Галаксије описаног у секцији 5.2.

Поређење ових расподела испитано је статистичким тестом Колмогорова и Смирнова за два узорка, који користи двострану асимптотску расподелу. Тест даје две вредности:

D - КС статистику и p - процентну вредност (интервал $[0, 1]$).

Резултати су представљени у табели 5.2. Интервал на којем је испитивано слагање узорака је $[0, 0,35]$ док је ширина одсечка мењана. На слици 5.16 приказана је кумулативна функција расподеле за ова два узорка јер КС тест ради само са таквим расподелама. Што је ширина одсечка мања тиме опада вредност која показује колико је поклапање ове две расподеле. Процент поклапања, за одсечак 0,025 који је коришћен на сликама 5.15 и 5.16, износи 99% док је за знатно мањи одсечак 0,005 та вредност 85%.

Добијено је задовољавајуће слагање резултата ова два метода, што нам даје могућност да овај метод за одређивање ексцентричности користимо и код већих каталога код којих би рачунање тродимензионих орбита захтевало јако пуно рачунарског времена. Ово ће бити од великог значаја када подаци из мисије „Гаја” буду доступни. Такође, ова поједностављена процедура нам омогућава и фино подешавање параметра α како би смо добили најбоље слагање резултата са посматрачким подацима.

5.3 Анализа каталога *GCS III* и резултати

Кинематика дате компоненте Млечног пута у близини Сунца (танки диск, дебели диск и хало) је последица кретања звезда у односу на средиште Млечног пута, тј. њихових орбита. У претходној секцији биле су приказане неке од типичних орбита за ове три компоненте. У случају танког диска, чије звезде преовлађују у групама звезда малих и умерених брзина v_{hel} , галактоцентричне орбите не заузимају велики део простора. Осим тога мали је и распон $R_a - R_p$ (разлика највећег и најмањег растојања до осе ротације, тј. симетрије, Z), као и највећа удаљеност од равни симетрије ($Z = 0$), $|Z|_{max}$. Због тога, у случају узорка састављеног од звезда танког диска (и уопште звезда умерених и малих брзина, као што је дефинисано у претходном поглављу) све звезде из узорка ће се увек налазити у сразмерно малој области коју ограничавају спољашњи и унутрашњи ваљак и две међусобно симетричне равни паралелне равни $Z = 0$. Ова околност даје нам за право да применимо једноставне изразе за потенцијал Млечног пута, чије је важење ограничено на мале области. Развој у ред који се примењује за епицикличне орбите је најпознатији пример, али постоје и другачији прилази. Један од њих развијен је у Барселони (Cubarsi, 2014a,b) и даје за малу област $R \approx R_{\odot}$, $Z \approx 0$ следећу апроксимацију:

$$\Pi(R, Z) = -\frac{1}{2}(R^2 + Z^2)M + F\left(\frac{Z^2}{R^2}\right)\frac{N}{R^2} + \text{const.} \quad (5.3)$$

Овде је Π потенцијал, M и N су позитивне константе, док је F функција бездимензионог аргумента. Постоји могућност разматрања општијег случаја када су M и N функције времена, тј. када стање није стационарно, али то овде неће бити предмет излагања. Као посебне случајеве треба поменути $F = \text{const.}$ и $N = 0$. У првом случају потенцијал је сепарабилан, тј. променљиве су раздвојене, а у другом се обртна симетрија своди на сферну јер је $\sqrt{R^2 + Z^2}$ растојање до средишта Млечног пута.

Сепарабилност потенцијала (5.3) своди се на:

$$\Pi(R, Z) = -\frac{1}{2}(R^2 + Z^2)M + \frac{K}{R^2} + \text{const.}, \quad K = FN. \quad (5.4)$$

Као што је познато из теорије епицикличног кретања, кружне учестаности κ_p и κ_Z су дате изразима:

$$\kappa_p^2 = -\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial R^2} + \frac{3}{R} \frac{\partial \Pi}{\partial R}\right)\Bigg|_{Z=0}; \quad (5.5)$$

$$\kappa_Z^2 = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Z^2}\Bigg|_{Z=0}.$$

Примена последњих израза на потенцијал (5.4) даје $\kappa_p = 2\kappa_Z$. Овај закључак је у супротности са оним што знамо о галактичким константама A , B и C , према чему однос κ_p/κ_Z треба приближно да има управо реципрочну вредност (2^{-1}). Стога, за потенцијал дат изразом (5.3) посебни случај $F = \text{const.}$ није прихватљив.

Исто важи и за други посебни случај, $N = 0$, јер тада, због сферне симетрије, имамо да је:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Z^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial \Pi}{\partial R}\Bigg|_{Z=0}, \quad (5.6)$$

што такође није у сагласности са вредностима за три константе (A , B и C). Тако закључујемо да потенцијал (5.3) има смисла само за општи случај, $N \neq 0$, $F \neq \text{const.}$

Примена релација (5.5) на потенцијал (5.3) са условом $Z = 0$ даје изразе за величине κ_p и κ_Z . При том парцијални изводи величине F зависе од парцијалних извода аргумента Z^2/R^2 , а ови последњи по R у равни $Z = 0$ су једнаки нули. Следи да је $\kappa_p = 2\sqrt{M} = \text{const.}$

За другу кружну учестаност κ_Z , добија се:

$$\kappa_Z^2 = \frac{\kappa_p^2}{4} - \frac{2N}{R^4} \frac{dF}{d\chi}(0), \quad \chi = \frac{Z^2}{R^2}. \quad (5.7)$$

Овде треба додати израз за угаону брзину кружног кретања (дата у 2.28):

$$\omega_c^2 = \frac{\kappa_p^2}{4} + \frac{2NF(0)}{R^4}. \quad (5.8)$$

Користећи овај теоријски оквир, с обзиром на познате релације, треба одредити вредности основних констаната (A , B и C). Посматрачки материјал који се користи за ову сврху је већ поменути каталог *GCS III*. Овај каталог садржи 16682 звезде, али за 13520 имамо све податке који су неопходни за овај рад.

Обрада материјала се састоји у образовању подузорака које чине звезде танког диска, тј. умерених и малих брзина у Сунчевој околини. Од укупно 13520 звезда 12351 задовољава услов да је $v_{\text{hel}} \leq 80 \text{ km s}^{-1}$ и да се налазе на растојању недалеко од Сунца, тј. да је $d < 200 \text{ pc}$. На слици 5.18 приказан је Тумреов дијаграм са истим ознакама као за каталог из претходног поглавља. Како се овде ради о више од десет пута већем узорку тестирали смо овај критеријум поређењем са још једним критеријумом који урађен на истом каталогу. Према критеријуму Кубарсија (Cubarsi, 2010b) звезде танког диска издвојене су користећи следеће услове: $e < 0,3$ и $|Z|_{\text{max}} \leq 0,5 \text{ kpc}$ и таквих звезда је укупно 11514. Овакав начин селекције детаљно је описан у његовом раду из 2010. године. У овом раду он је користио *GCS II* тј. другу верзију каталога, који је тада био доступан и који садржи мање звезда са свим параметрима потребним за такву анализу. Процедура је поновљена у овом раду на *GCS III* каталогу и добили смо да критеријум задовољава 12056 звезда. Поклапање између ова два критеријума је одлично, разликују се за само 295 звезда што је 2,2% од укупног броја звезда. Критеријум Кубарсија је за толико строжији, пре свега због услова да звезде не смеју бити више од 0,5 крс удаљене од галактичке равни. На слици 7 истог рада показано је зашто образовање узорака према

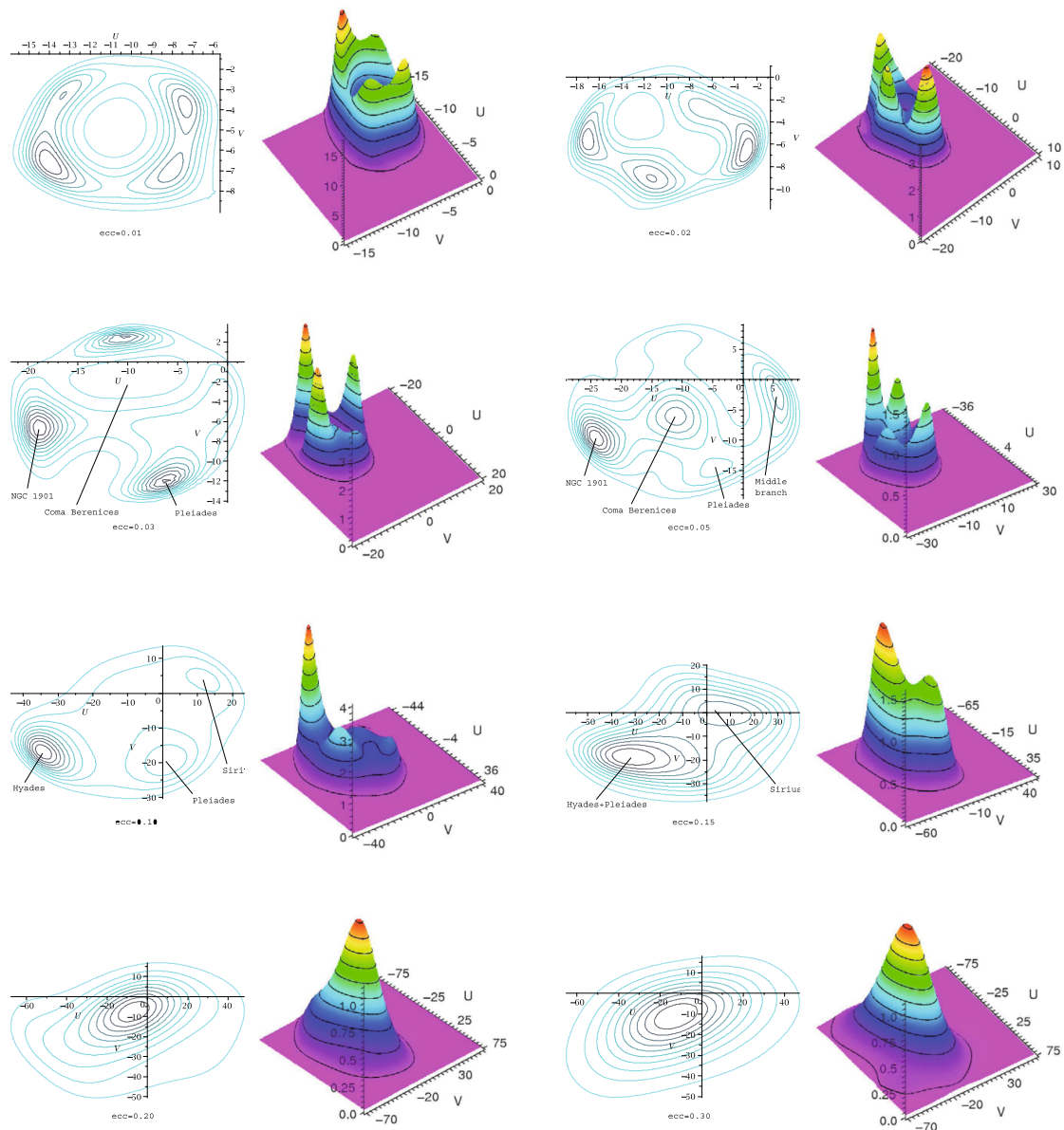
критеријумима као што је металичност или Стромгренова b - u фотометрија не описују добро структуре на малим скалама у расподели брзина.

Слика 8 из његовог рада пренесена је овде у целости и без измена као слика 5.17. На овој слици приказани су подузорци направљени према ексцентричностима са додатним условом да је $|Z_{\max}| < 0,5$ крс како би се избегла контаминација звездама које не припадају танком диску. Приступ максималне ентропије даје серију графика који су приказани на слици 5.17. Иако је ексцентричност и просторна брзина звезде одличан критеријум за издвајање звезда танког диска, ипак део звезда дебелог диска може бити присутан јер може имати сличне ексцентричности. Овакав приступ и критеријум комбиновања ексцентричности и $|Z_{\max}|$ даје репрезентативан узорак.

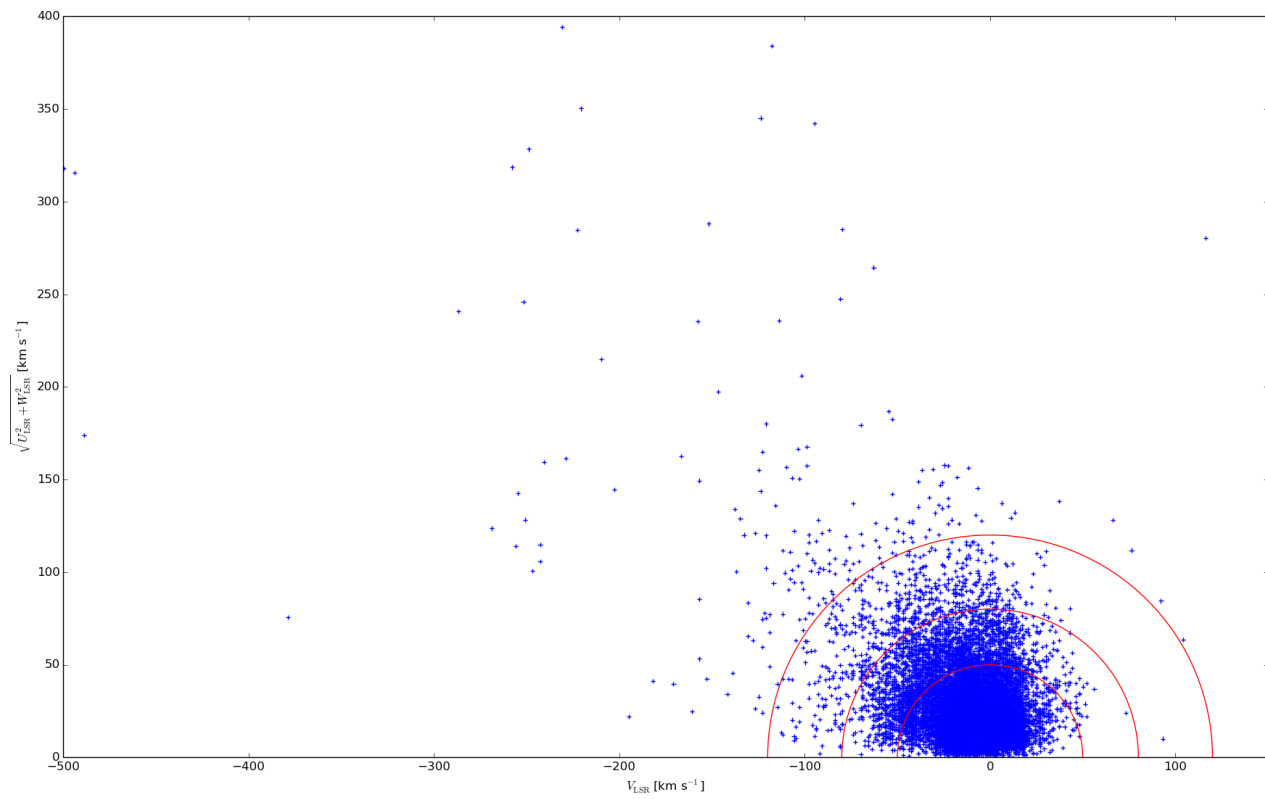
Кључне параметре за селекцију звезда e и $|Z|_{\max}$ налазимо у коришћеном материјалу и одговарају одређеном моделу Млечног пута. Ова околност не може битно да утиче на резултате анализе из два разлога. Први је да код звезда малих брзина на ексцентричност одлучујући утицај има однос апсолутних вредности Ортових констаната, $A/|B|$ (в. поглавље 4), а ово се даље потврђује и анализама других узорака где се за рачун путања око средишта користи другачији модел Млечног пута од прихваћеног у материјалу, али са приближно истим односом апсолутних вредности Ортових констаната (Vidojević & Ninković, 2009). Други разлог потиче од прилаза коришћеног у овом одељку, где се испитује гранични случај када оба путањска елемента теже нули, а тада и утицај односа $A/|B|$ није више од значаја, тј. постаје независан параметар који такође треба одредити.

Подузорци који се овде испитују се образују на два начина – према максималној вредности ексцентричности и максималној вредности растојања $|Z|_{\max}$ од галактичке равни. У оба случаја полазни узорак је исти, састављен је од 12056 звезда које задовољавају горепоменути услов: $e < 0,3$ и $|Z|_{\max} \leq 0,5$ крс. Сваки наредни подузорок, код кога је максимум једне од ове две величине мањи од опште вредности, подкуп је већег узорака. За сваки такав подузорок

ПОГЛАВЉЕ 5. АНАЛИЗА ТАНКОГ ДИСКА И РЕЗУЛТАТИ



Слика 5.17: Серија графика и расподела у UV равни за GCS подузорке звезда одабране за $|Z_{\max}| < 0,5$ и ексцентричности до 0,01, 0,02, 0,03, 0,05, 0,1, 0,15, 0,2 и 0,3, редом. Координатни почетак одговара Сунчевој брзини по компонентама. (Захваљујемо се аутору Рафаелу Кубарсију на уступљеној слици.)



Слика 5.18: Тумреов дијаграм за узорак звезда каталога *GCS III*. Линеје означавају константну брзину v_{hel} за 50 $km s^{-1}$, 80 $km s^{-1}$ и 120 $km s^{-1}$.

одређује се средња вредност хелиоцентричне брзине (центроид подузорка), као и матрица својствених брзина (3.8).

Због малих растојања између звезда узорка (све су ближе Сунцу од 230 pc), а знајући колико је Сунце далеко од средишта Млечног пута, све звезде су, практично, на истом положају у односу на средиште Млечног пута. Усваја се тачка у равни $Z = 0$ на растојању R_{\odot} од средишта на оси X . Следи $R = \dot{X}$, с обзиром на то да је пројекција брзине центроида на осу X једнака нули. Елиптична апроксимација (в. секцију 2.2.3) нам даје формулу за \dot{R} , тј. v_R . За елемент матрице (3.8) имамо:

$$\overline{v_R^2} = \overline{a^2 \kappa_p^2 \cos^2 \kappa_p t} . \quad (5.9)$$

Расподелу фаза (косинусни члан) можемо сматрати независном од расподеле амплитуда, а то има за последицу да је средњи квадрат косинуса једнак $1/2$. Без обзира што у начелу κ_p зависи од средњег растојања R_m (формула 2.32), за потенцијал (5.3) она је константна величина. Према томе, имамо:

$$\overline{v_R^2} = \frac{1}{2} \kappa_p^2 \overline{a^2} . \quad (5.10)$$

Пошто располажемо ексцентричностима e , можемо заменити амплитуду производом ексцентричности и средњег растојања. С обзиром на то да се не може очекивати корелација између два елемента орбите, средња вредност производа квадрата биће једнака производима средњих вредности, тј. $\overline{e^2} \overline{R_m^2}$. Тако познате величине $\overline{v_R^2}$ и $\overline{e^2}$ за један подузорок омогућују да се одреди производ $\kappa_p^2 \overline{R_m^2}$, при чему се усваја $\overline{R_m^2} = R_{\odot}^2$.

Везу између елемената $\overline{v_{\theta}^2}$ и $\overline{v_R^2}$ даје формула (3.12). Међутим, ова формула се може побољшати тиме што се не занемарује разлика између кружне брзине и брзине центроида, $\delta u = u_c - u$ (на пример види Ninković 1992b). Као последица,

изрази за $\overline{v_\theta^2}$ и релацију између $\overline{v_R^2}$ и $\overline{v_\theta^2}$ постају:

$$\overline{v_\theta^2} + \delta u^2 = \frac{1}{2} \frac{\kappa_p^2}{\alpha + 1} e^2 \overline{R_m^2} \quad (5.11)$$

$$\frac{\overline{v_R^2}}{\overline{v_\theta^2} + \delta u^2} = \alpha + 1 ,$$

где је $\alpha = A/|B|$. Уведемо ли још и ознаку γ_c дефинисану формулом (3.26) добија се:

$$\delta u^2 = \gamma_c^{-2} \overline{v_R^2} - \overline{v_\theta^2} \quad (5.12)$$

У случају релације за трећи елемент на главној дијагонали, најпре, имамо у виду формулу за квадрат брзине (3.18), а онда се попут случаја за први елемент усваја: $1/2$ за средњи квадрат косинуса, некорелисаност између κ_Z^2 и $|Z|_{\max}^2$, као и $\overline{\kappa_Z^2} = \kappa_Z^2(R_\odot)$, па следи:

$$\overline{v_Z^2} = \frac{1}{2} \kappa_Z^2(R_\odot) \overline{|Z|_{\max}^2} . \quad (5.13)$$

Анализа различитих подузорака омогућује да се одреде компоненте Сунчевог кретања: $U_{\text{LSR}\odot}$, $V_{\text{LSR}\odot}$ и $W_{\text{LSR}\odot}$, а онда из релације, (3.9) коју овде поново наводимо:

$$V_0 = -V_{\text{LSR}\odot} - \delta u , \quad (5.14)$$

одређујемо разлику δu .

У Табели 5.3 дат је преглед свих подузорака. Колоне сиве боје садрже параметре селекције подузорака, затим је дат број звезда у подузорку, гранична ексцентричност e_0 , гранична удаљеност Z_0 , неколико средњих вредности за e и Z , средње компоненте брзине Сунчевог кретања (km s^{-1}), централни моменти

другог реда ($\text{km}^2 \text{s}^{-2}$) као и њихове варијансе. За узорке одабране према ексцентричности дате су кружна епициклична учестаност ($\text{km s}^{-1} \text{крс}^{-1}$) и однос γ_c^2 . За узорке одабране према максималној удаљености од галактичке равни дате су одговарајућа вертикална епициклична учестаност и однос ове две учестаности.

Подузорци се могу сврстати у два низа са по шест подузорака у сваком. У првом низу (низ бр. 1) се смањује горња граница ексцентричности, а у другом (низ бр. 2) амплитуда $|Z|_{\text{max}}$. Ово има за последицу да се у низу бр. 1 стално смањују средњи квадрати својствене брзине $\overline{v_R^2}$ и $\overline{v_\theta^2}$ (од $653,02 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$, тј. $247,82 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$, до $5,88 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$, тј. $3,92 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$, респективно), а у низу бр. 2 средњи квадрат $\overline{v_Z^2}$ (од $65,76 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ до $3,8 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$).

Наравно, код било каквог узорка мала дисперзија брзине се и очекује ако звезде тог узорка имају сличне вредности компонената хелиоцентричне брзине. Међутим, брзине центроида узорака који садрже звезде врло сличних хелиоцентричних брзина могу веома да се разликују. Најбољи пример су кинематичке групе или ројеви (енг. *streams*). Са овдашњим подузорцима то није случај, компоненте хелиоцентричне брзине њихових центроида U_0 и W_0 имају практично исте вредности за све подузорке, укључујући и оне са најмањим горњим границама ексцентричности и амплитуде $|Z|_{\text{max}}$, а чији обими достижу свега неколико процената обима целог узорка, око -10 km s^{-1} и -7 km s^{-1} , респективно. Све ово наводи на закључак да подузорци са најмањим горњим границама ексцентричности и амплитуде заиста садрже звезде које се око средишта Млечног пута крећу приближно као и месни стандард мировања. На основу тога могу се усвојити вредности: $U_{\text{LSR}\odot} = 10 \text{ km s}^{-1}$, $V_{\text{LSR}\odot} = 5,25 \text{ km s}^{-1}$, $W_{\text{LSR}\odot} = 7 \text{ km s}^{-1}$ оно што су добили Денен и Бини (Dehnen & Binney, 1998). Са познатом вредношћу за компоненту $V_{\text{LSR}\odot}$ може да се одреди δu (формула 5.14).

У низу бр. 1 може да се разматра веза између односа средњих квадрата својствене брзине и δu (израз 5.11). Код прва два подузорка однос $\overline{v_\theta^2}/\overline{v_R^2}$ је приближно једнак вредности за цео узорак 0,39, да би са смањивањем вредности самих квадрата брзине почео да расте; рецимо за подузорке за које горње

Табела 5.3: Колоне сиве боје садрже параметре селекције подузорака, затим је дат број звезда у подузорку (N), гранична ексцентричност (e_0), гранична удаљеност (Z_0) [кpc], неколико средњих вредности (\bar{e} , $\overline{e^2}$, $\overline{Z_{\max}}$, $\overline{Z_{\max}^2}$), компоненте хелиоцентричне брзине центроида (U_0, V_0, W_0) [km s^{-1}], централни моменти другог реда [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$] као и њихове варијансе. За узорке одабране према ексцентричности дате су кружна епициклична учестаност (κ_p) [$\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$] и однос γ_c^2 . За узорке одабране према максималној удаљености од галактичке равни дате су епициклична учестаност дуж Z осе (κ_Z) [$\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$] и однос ове две учестаности.

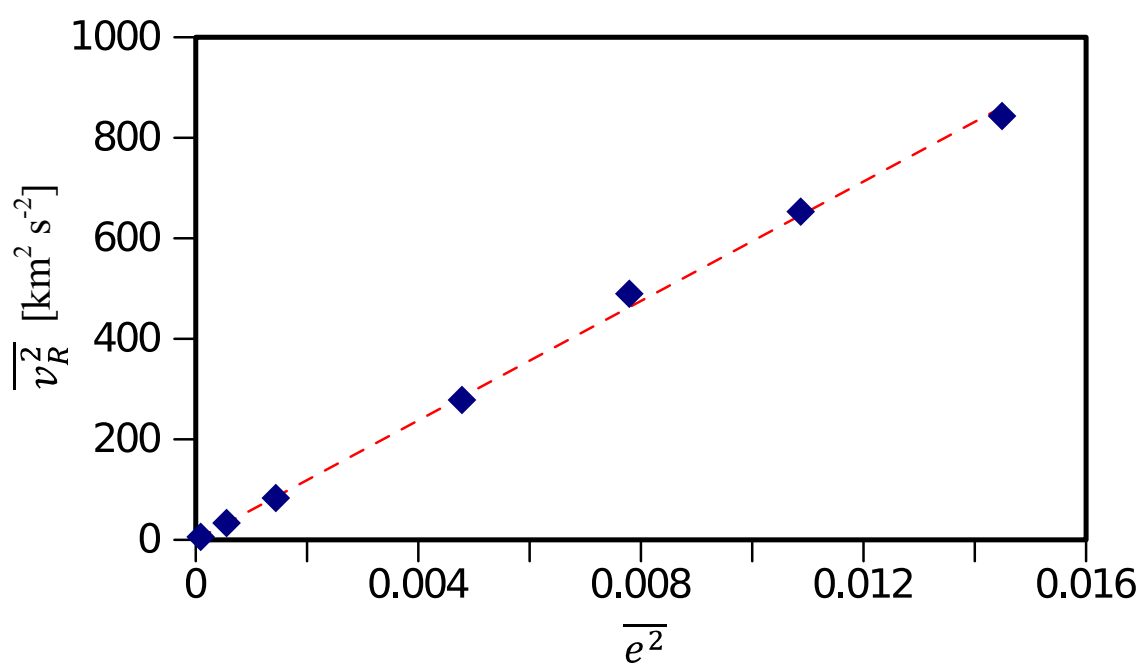
Узорци одабрани према ексцентричности:																	
N	e_0	\bar{e}	$\overline{e^2}$	Z_0 [кpc]	$\overline{Z_{\max}}$ [кpc]	$\overline{Z_{\max}^2}$ [кpc ²]	U_0 [km s^{-1}]	V_0 [km s^{-1}]	W_0 [km s^{-1}]	$\overline{v_R^2}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	$\overline{v_R v_\theta}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	$\overline{v_\theta^2}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	$\overline{v_R v_Z}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	$\overline{v_\theta v_Z}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	$\overline{v_Z^2}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	κ_p [$\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$]	γ_c^2
12056	0.29	0.105	0.014	0.50	0.162	0.038	-9.5 ± 0.26	-15.74 ± 0.16	-6.93 ± 0.11	843.28 ± 11.12	89.83 ± 4.85	325.5 ± 4.56	-1.67 ± 3.23	6.95 ± 2.12	135.33 ± 1.57	40.14	2.59
11119	0.20	0.0932	0.0109	0.50	0.159	0.037	-9.23 ± 0.24	-13.68 ± 0.15	-6.89 ± 0.11	653.02 ± 7.72	69.32 ± 3.57	247.82 ± 3.36	-0.69 ± 2.84	6.08 ± 1.86	130.94 ± 1.6	40.78	2.64
9719	0.15	0.0809	0.0078	0.50	0.156	0.036	-9.89 ± 0.22	-11.58 ± 0.14	-6.8 ± 0.11	489.66 ± 5.63	59.05 ± 2.61	178.77 ± 2.32	-2.06 ± 2.54	0.46 ± 1.65	126.93 ± 1.68	41.71	2.74
7170	0.10	0.0646	0.0048	0.50	0.152	0.034	-9.94 ± 0.2	-9.52 ± 0.13	-6.63 ± 0.13	278.28 ± 3.4	47.85 ± 1.84	130.57 ± 1.7	-2.77 ± 2.16	-4.2 ± 1.53	122.13 ± 1.92	40.13	2.13
2409	0.05	0.0355	0.0014	0.50	0.155	0.035	-9.62 ± 0.19	-5.97 ± 0.14	-6.96 ± 0.23	83.18 ± 1.73	6.38 ± 1.05	46.35 ± 1.01	1.83 ± 2.13	0.49 ± 1.62	128.6 ± 3.44	40.00	1.79
1052	0.03	0.0221	0.0006	0.50	0.146	0.031	-9.83 ± 0.18	-5.9 ± 0.13	-7.61 ± 0.33	33.48 ± 1.02	0.47 ± 0.6	17.17 ± 0.6	1.17 ± 1.9	-0.32 ± 1.48	116.93 ± 4.77	40.93	1.95
213	0.01	0.0089	0.0001	0.50	0.136	0.028	-10.32 ± 0.17	-5.55 ± 0.14	-7.04 ± 0.71	5.88 ± 0.43	0.03 ± 0.28	3.92 ± 0.28	-0.73 ± 1.6	-1.76 ± 1.59	107.09 ± 10.69	42.83	1.50
Узорци одабрани према максималној удаљености од равни:																	
N	e_0	\bar{e}	$\overline{e^2}$	Z_0 [кpc]	$\overline{Z_{\max}}$ [кpc]	$\overline{Z_{\max}^2}$ [кpc ²]	U_0 [km s^{-1}]	V_0 [km s^{-1}]	W_0 [km s^{-1}]	$\overline{v_R^2}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	$\overline{v_R v_\theta}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	$\overline{v_\theta^2}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	$\overline{v_R v_Z}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	$\overline{v_\theta v_Z}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	$\overline{v_Z^2}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$]	κ_Z [$\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$]	κ_Z / κ_p
12056	0.29	0.105	0.014	0.50	0.162	0.038	-9.5 ± 0.26	-15.74 ± 0.16	-6.93 ± 0.11	843.28 ± 11.12	89.83 ± 4.85	325.5 ± 4.56	-1.67 ± 3.23	6.95 ± 2.12	135.33 ± 1.57	84.12	2.10
9793	0.29	0.102	0.014	0.25	0.119	0.018	-9.62 ± 0.29	-15.72 ± 0.17	-7.25 ± 0.08	801.81 ± 11.73	92.3 ± 5.08	298.18 ± 4.65	-6.28 ± 2.38	4.32 ± 1.46	65.76 ± 0.69	84.79	2.11
8574	0.29	0.100	0.013	0.20	0.104	0.013	-9.83 ± 0.3	-15.67 ± 0.18	-7.31 ± 0.07	771.88 ± 12.09	93.26 ± 5.24	291.91 ± 4.87	-4.94 ± 2.06	4.67 ± 1.29	46.89 ± 0.51	83.56	2.09
6832	0.29	0.099	0.013	0.15	0.085	0.009	-10.39 ± 0.33	-15.57 ± 0.2	-7.24 ± 0.06	746.55 ± 13.08	94.29 ± 5.72	283.01 ± 5.44	-2.24 ± 1.75	3.9 ± 1.09	28.76 ± 0.34	81.48	2.04
4540	0.29	0.098	0.013	0.10	0.062	0.005	-10.74 ± 0.4	-15.59 ± 0.25	-7.18 ± 0.06	732.88 ± 15.83	101.82 ± 6.91	280.02 ± 6.63	-3.9 ± 1.46	-1.03 ± 0.92	14.04 ± 0.2	78.24	1.96
2824	0.29	0.097	0.013	0.07	0.046	0.002	-10.73 ± 0.51	-15.42 ± 0.31	-7.11 ± 0.05	726.48 ± 20.76	102.36 ± 8.61	273.3 ± 8.37	-1.79 ± 1.27	-1.1 ± 0.79	6.86 ± 0.13	75.38	1.88
1823	0.29	0.097	0.013	0.05	0.035	0.001	-10.96 ± 0.63	-15.29 ± 0.39	-7.15 ± 0.05	733.1 ± 26.68	110.26 ± 10.9	274.52 ± 10.38	-2.23 ± 1.15	-0.77 ± 0.74	3.8 ± 0.09	73.31	1.83

границе ексцентричности износе 0,05 и 0,03 једнак је око 0,5. Према релацији (5.11) однос $A/|B|$ приближно је једнак 1, јер је за поменута два подузорка δu^2 занемарљиво. Код подузорака, где δu^2 није занемарљиво, за однос $A/|B|$ се применом (5.11) такође добија око 1. Изузетак је подузорок са најмањом горњом границом ексцентричности (0,01) где је однос $\overline{v_\theta^2}/\overline{v_R^2}$ једнак око 0,66.

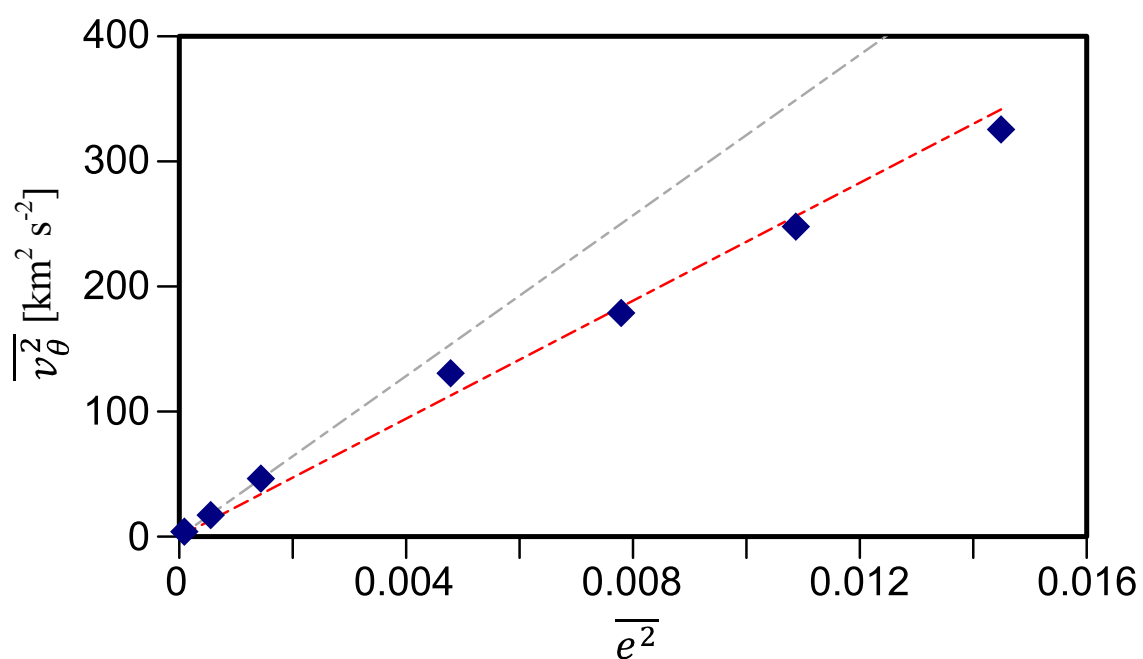
Вредности за κ_p за сваки подузорок низа бр. 1 у Табели 5.3 су добијене применом релације (5.5) при чему је усвојено $R_\odot = 8,5$ крс. Средње κ_p за све подузорке низа бр. 1 заједно се добија са графика $\overline{v_R^2} = f(\overline{e^2})$ (слика 5.19) где се примењује метод најмањих квадрата; резултат је $\kappa_p = (41,1 \pm 0,2) \text{ km s}^{-1} \text{ крс}^{-1}$.

Одговарајуће вредности за угаону брзину $\omega_c(R_\odot)$ добијене су применом релације (2.28) при чему се вредности за однос $A/|B|$ налазе из односа $\overline{v_\theta^2}/\overline{v_R^2}$. График $\overline{v_\theta^2} = f(\overline{e^2})$, такође за подузорке низа бр. 1, (слика 5.20) не одговара правој линији попут претходног. Разлог свакако треба тражити у већ поменути разликама међу подузорцима низа бр. 1 у погледу односа $\overline{v_\theta^2}/\overline{v_R^2}$. Примена релације (5.14), с обзиром на вредност усвојену за $V_{\text{LSR}\odot}$, показује да је за три подузорка низа бр. 1 са најмањом горњом границом ексцентричности разлика δu занемарљива што, међутим, није случај код подузорака истог низа са већим горњим границама ексцентричности. Када се на њих примени поправка (5.12), добијене вредности односа $A/|B|$ ће бити мање (приближавају се 1,0), тј. добиће се слагање са осталим подузорцима, са изузетком подузорка ограниченог до $e_0 = 0,01$ (слика 5.21). Тако се у просеку за пет подузорака низа бр. 1 (без оног ограниченог са $e_0 = 0,01$) добија за однос $A/|B|$ вредност од око 1,02. Са овом вредношћу и $\kappa_p = (41,1 \pm 0,2) \text{ km s}^{-1} \text{ крс}^{-1}$ следи $\omega_c = (29,2 \pm 0,4) \text{ km s}^{-1} \text{ крс}^{-1}$. Помножена вредношћу усвојеном за R_\odot (8,5 крс) ова вредност даје за кружну брзину $u_c(R_\odot) = 248,2 \text{ km s}^{-1}$ што је прихватљива вредност.

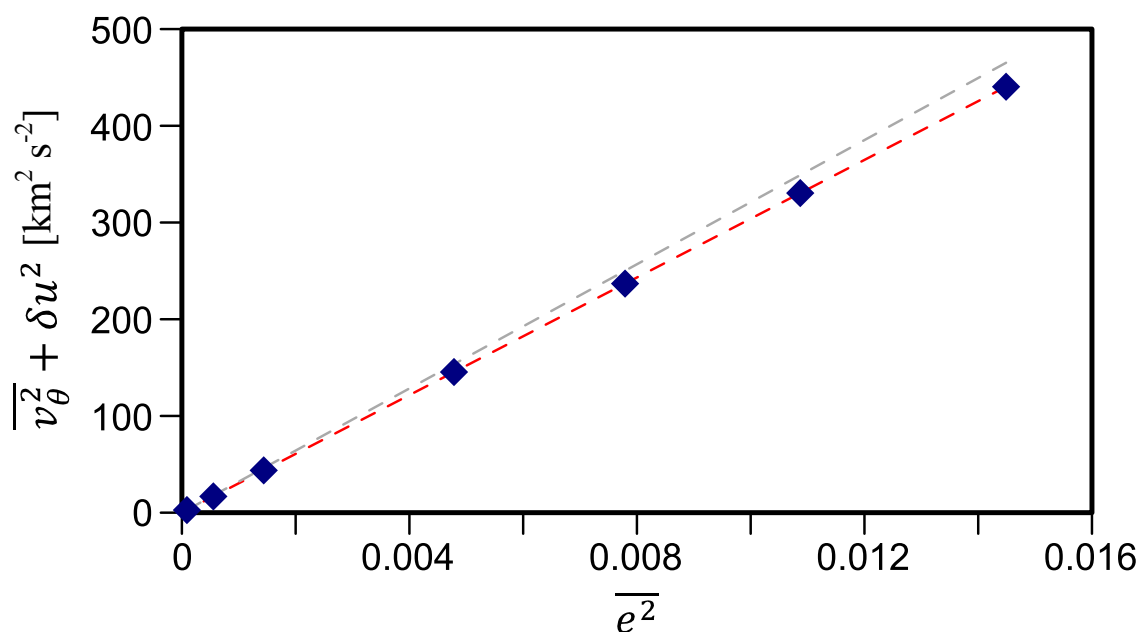
Вредности за κ_Z за сваки подузорок низа бр. 2 у Табели 5.3 су добијене применом релације (5.5), при чему је одговарајуће $\overline{|Z|_{\text{max}}^2}$ дато у табели. Вредности за κ_p за исте подузорке добијене су на исти начин као и код низа бр. 1. У Табели 5.3 ове вредности су представљене преко количника κ_Z/κ_p датог у



Слика 5.19: Дијагонални момент $\overline{v_R^2}$ [km² s⁻²] у функцији средње вредности квадрата ексцентричности $\overline{e^2}$ за узорке одабране према ексцентричности.



Слика 5.20: Дијагонални момент $\overline{v_\theta^2}$ [km² s⁻²] у функцији средње вредности квадрата ексцентричности $\overline{e^2}$ за узорке одабране према ексцентричности; сива линија одговара подузорцима за $e_0 \leq 0,05$, а црвена је за све подузорке.

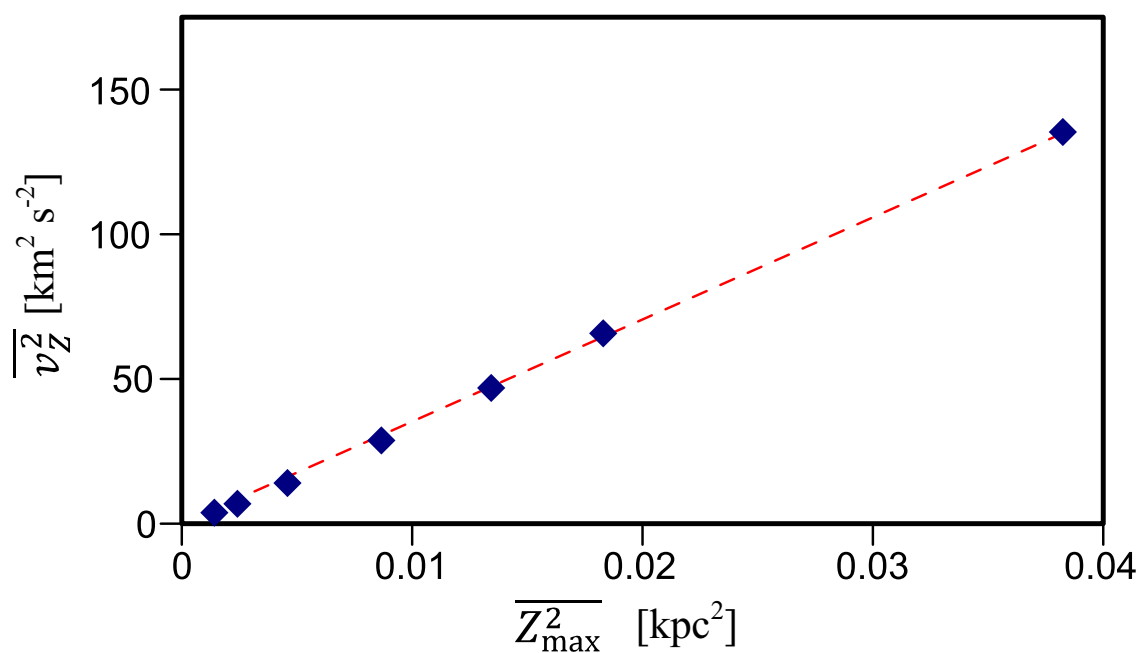


Слика 5.21: Збир дијагоналног момента $\overline{v_\theta^2}$ [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$] и квадрата кинематичке разлике δu^2 [$\text{km}^2 \text{s}^{-2}$] у функцији средње вредности квадрата ексцентричности $\overline{e^2}$ за узорке одабране према ексцентричности; сива линија одговара подузорцима за $e_0 \leq 0,05$, а црвена је за све подузорке.

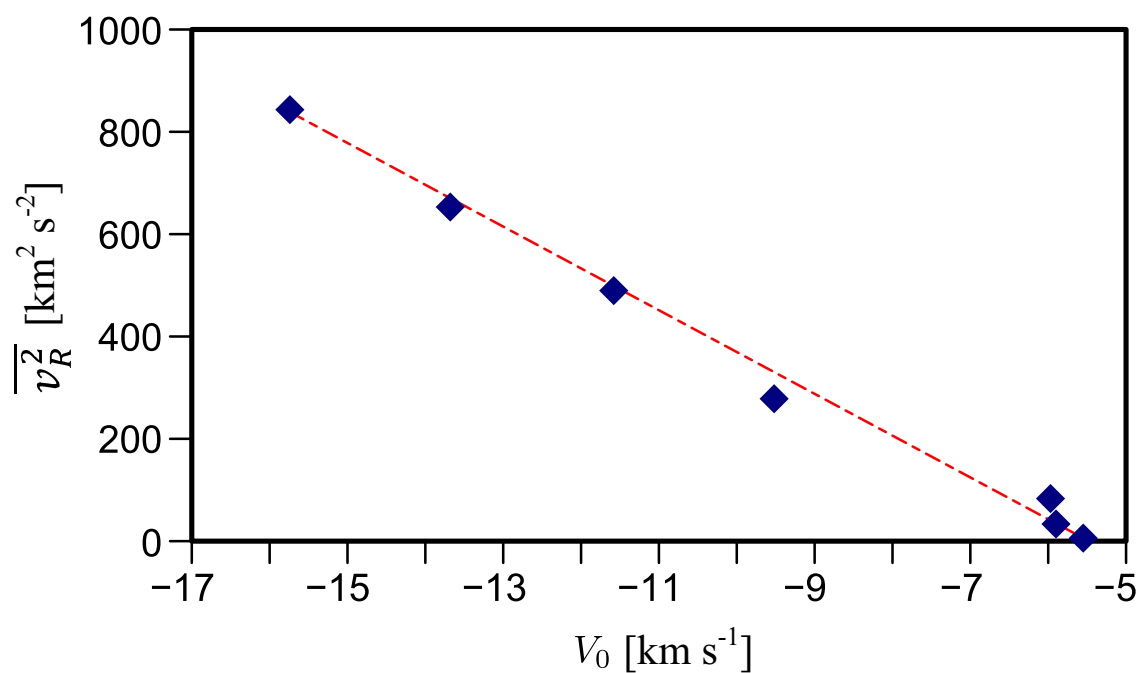
колони крајње десно. У низу бр. 2 за све подузорке су однос $\overline{v_\theta^2}/\overline{v_R^2}$ и δu приближно исти – око 0,38 и 10,3 km s⁻¹, респективно, дакле скоро исте вредности као за цео узорак. Ово се одлично уклапа (с обзиром на поправку у (5.12)) у вредности за ω_c и однос $A/|B|$ изведене из подузорака низа бр.1 и целог узорака.

Зависност $\overline{v_Z^2}$ од $\overline{|Z|_{\max}^2}$ за подузорке низа бр. 2, укључујући и цео узорак, (слика 5.22) је приближно праволинијска, њен коефицијент правца одређен применом метода најмањих квадрата и даје $\kappa_Z = (84,0 \pm 0,4)$ km s⁻¹ крс⁻¹. Упркос овом резултату приметно је да су вредности за κ_Z код подузорака низа бр. 2 за које је горња граница за $|Z|_{\max}$ врло мала (0,1 крс и мање) систематски мање (испод 80 km s⁻¹ крс⁻¹). Ово би се могло објаснити околношћу да се све звезде из узорака тренутно налазе близу равни $Z = 0$, а то значи да су код оних са већим вредностима $|Z|_{\max}$ садашње фазе $|Z|/|Z|_{\max}$ блиске нули, тј. нису све вредности фазе од 0 до 1 подједнако вероватне. У том случају 1/2 је превелика вредност за просек односа $|Z|^2/|Z|_{\max}^2$. Како се овај однос понаша као средњи квадрат косинуса, следи да чинилац у изразу (3.18) треба, код подузорака са већим горњим границама за $|Z|_{\max}$, да буде већи од 1/2.

За величину v_Z^2 код подузорака низа бр.1 (Табела 5.3) примећује се слабо опадање са смањивањем горње границе ексцентричности e_0 , као што се може очекивати. То што је овај ефект количински слаб, несумњиво је последица вредности $|Z|_0$ која је иста за све подузорке (0,5 крс), а види се из следећег примера. Када би се на подузорок са ограничењем $e_0 = 0,05$ применила горња граница од $|Z_0| = 0,3$ крс, $\overline{v_Z^2}$ би било 81,15 km² s⁻². Овде се поставља питање да ли су величине eR_m (амплитуде осциловања у равни $Z = 0$) и $|Z|_{\max}$ у потпуности међусобно независне. Како бисмо то проверили напрвљени су графици зависности $\overline{e^2}$ и $\overline{|Z|_{\max}^2}$ од исте независно променљиве (на истом графику), од e_0 за низ бр. 1, тј. Z_0 за низ бр. 2. У први график је укључен и цео узорак, а у случају другог (зависност од Z_0) све звезде из базе (укупно 13.520), тако да нема ограничења што се тиче Z_0 (и веће вредности од 0,5 крс). Функција $\overline{|Z|_{\max}^2} = f(e_0)$ је за $e_0 \geq 0,03$ монотono растућа као и функција $\overline{e^2} = f(e_0)$. Да-



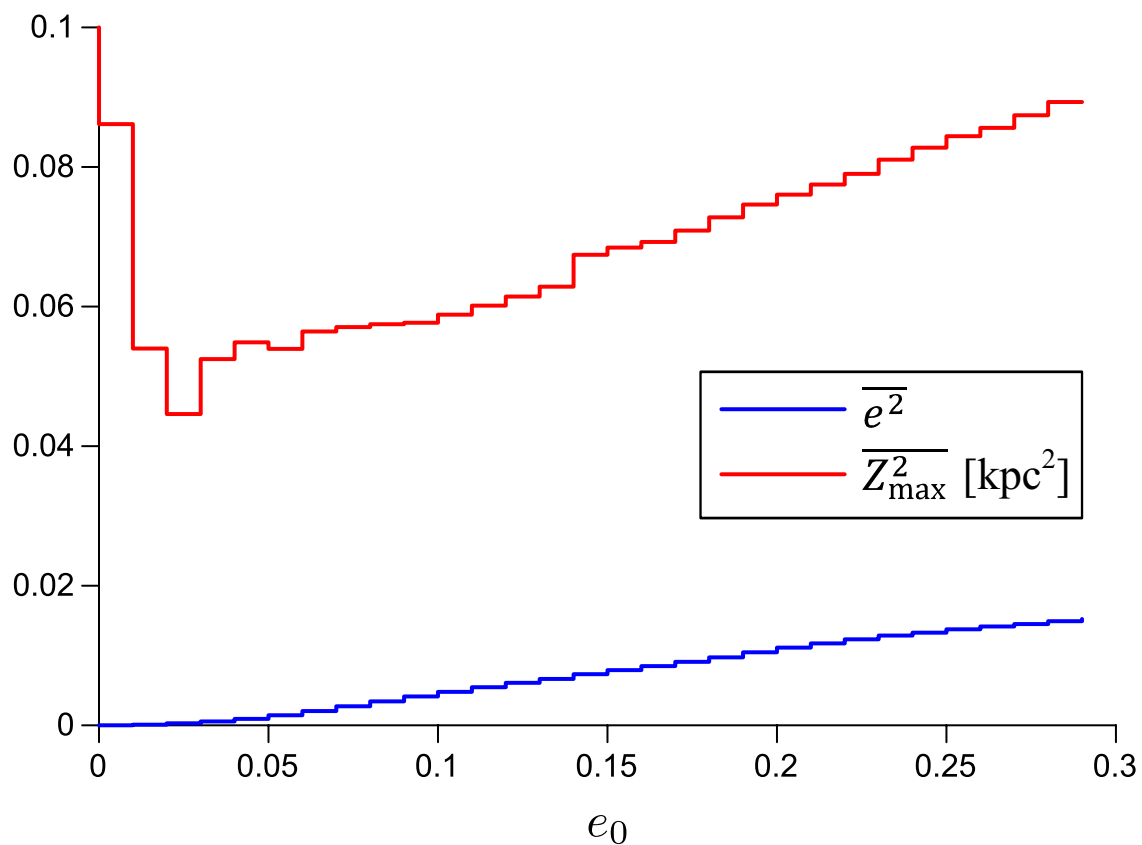
Слика 5.22: Дијагонални момент $\overline{v_Z^2}$ [km² s⁻²] у функцији средње вредности квадрата максималног растојања од галактичке равни $\overline{Z_{\max}^2}$ [kpc²] за узорке одабране према том растојању.



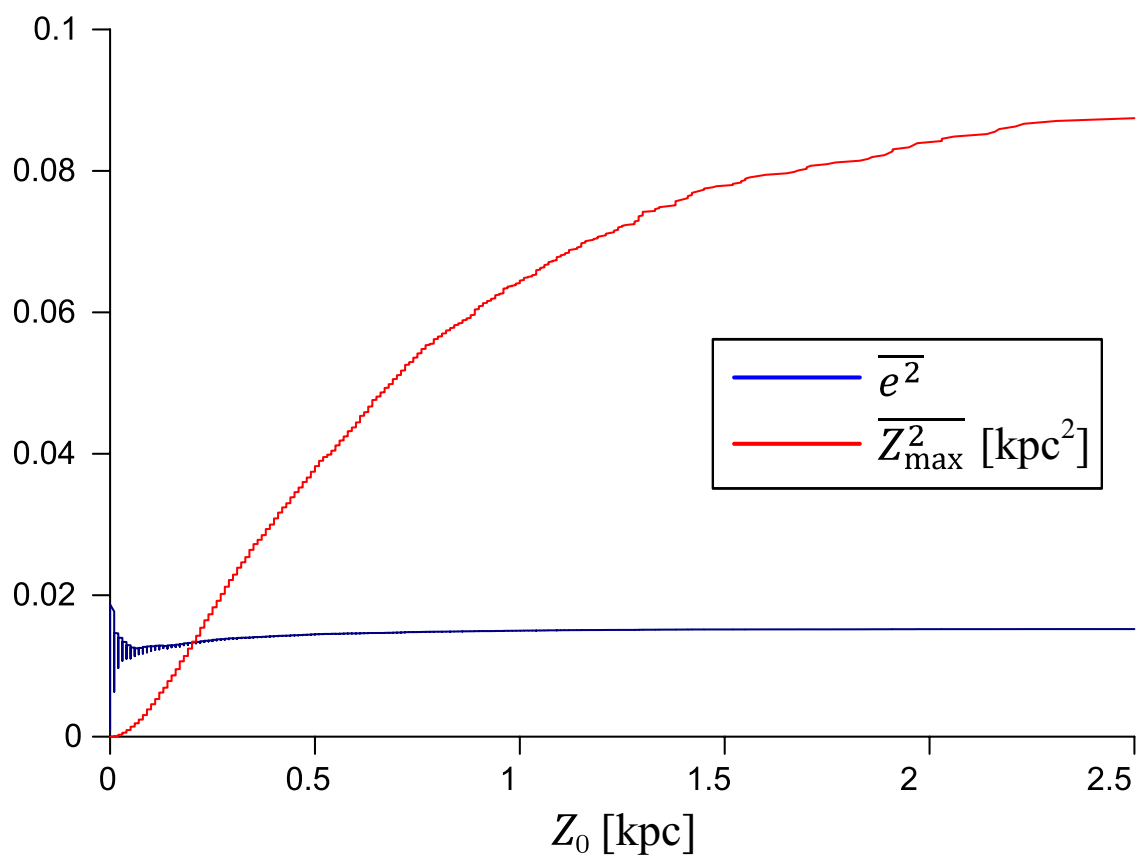
Слика 5.23: Дијагонални момент $\overline{v_R^2}$ [km² s⁻²] у функцији компоненте хелиоцентричне брзине центроида V_0 [km s⁻¹].

кле са повећањем горње границе ексцентричности подузорка у просеку су веће и амплитуде осцилација нормално на раван $Z = 0$ за тај подузорак. Разуме се, код звезда диска (нарочито танког) не можемо очекивати велике вредности за $|Z|_{\max}$. Зато приликом образовања узорка треба усвојити горњу границу амплитуде по Z . Све звезде чија таква амплитуда прелази ту горњу границу се не укључују у узорак.

Поступак за добијање горње границе Z_0 је следећи; са слике 5.24 $\overline{|Z|_{\max}^2} = f(e_0)$ се за дато e_0 одређује одговарајуће $\overline{|Z|_{\max}^2}$, а онда се са слике 5.25 $\overline{|Z|_{\max}^2} = f(Z_0)$ за то исто $\overline{|Z|_{\max}^2}$ налази одговарајуће Z_0 . На пример, за подузорак ограничен са $e_0 = 0,1$ слика 5.24 даје $(\overline{|Z|_{\max}^2}) \approx 0,06$ крс², а према слици 5.24 ово одговара подузорку ограниченом са $Z_0 \approx 1$ крс. Следи да не треба да укључујемо звезде за које је $|Z|_{\max} > 1$ крс. У случају $e_0 = 0,03$, најмање вредности за коју се запажа раст функције $\overline{|Z|_{\max}^2} = f(e_0)$, исти поступак даје за $|Z|_{\max}$ вредност од (0,5–0,6) крс, дакле у узорак не треба укључивати звезде за које $|Z|_{\max}$ прелази (0,5–0,6) крс. Ово потврђује горњу границу за Z_0 дату у табели. Друга зависност са слике 5.25, $\overline{e^2} = f(Z_0)$, не може да послужи у дату сврху јер се добија приближно константна вредност (на графику права паралелна апсцисној оси).



Слика 5.24: Средње вредности квадрата ексцентричности $\overline{e^2}$ и максималног растојања од галактичке равни $\overline{Z_{\max}^2}$ [kpc²] у функцији горње границе ексцентричности.



Слика 5.25: Средње вредности квадрата ексцентричности $\overline{e^2}$ и максималног растојања од галактичке равни $\overline{Z_{\max}^2}$ [kpc²] у функцији горње границе растојања од галактичке равни Z_0 [kpc].

Ако је $\omega_c(R_\odot) = 29,2 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ и $A/|B| = 1,02$, онда следи да је $A = 14,7 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ и $B = -14,5 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Што се тиче Кузминове константе, C она је једнака κ_Z тј. $84 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Ако узмемо да је однос $A/|B|$ вредност приближно једнака 1, може да се напише приближна релација из које се одређује густина ρ на кружности $R = R_\odot, Z = 0$:

$$\rho(R_\odot, 0) \approx C^2/4\pi G$$

где је G константа гравитације. Одавде следи $\rho \approx 0,125 M_\odot \text{ pc}^{-3}$.

Највећи допринос густини материје на $R = R_\odot, Z = 0$ даје танки диск. Звездана статистика за густину танког диска на овој кружности најчешће даје вредност од $0,08 M_\odot \text{ pc}^{-3}$. Вредност добијена овде је незнатно већа с обзиром на границу грешке која за Кузминову константу износи $\pm 10 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

Поглавље 6

Резиме и закључци

Један од главних циљева ове тезе је да се одреде вредности динамичких константи Млечног пута. Овај циљ остварен је проучавањем различитих узорака звезда, тј. коришћењем каталога са што прецизнијим подацима за звезде из околине Сунца и формирањем неселективног узорка звезда. Први корак у том правцу је селекција звезда танког диска за шта је коришћен искључиво кинематички приступ, али имплементиран на два различита начина. Показало се да су оба задовољавајућег квалитета и да се у будућности могу користити за оваква истраживања. Наредни корак је предлог различитих решења за одређивање ексцентричности. Примењена су два начина за рачунање орбиталних параметара, пре свега ексцентричности. Први приступ је брз (у смислу утрошеног рачунарског времена) и ефикасан поступак за рачунање ексцентричности за све звезде из узорка, али користећи одређене апроксимације. Други поступак је коришћење модела за нашу галаксију и одређивање тродимензионих орбита из којих се добија податак о ексцентричности са много већом прецизношћу. Резултати ова два приступа су упоређена и добијено је одлично слагање. Последњи корак је анализа узорка звезда танког диска и рачунање кретања Сунца у односу на Месни стандард мировања (енгл. *LSR*), угаона брзина и три динамичке константе (Ортове *A* и *B*, Кузминова *C*), а онда и густина Млечног пута за положај Сунца. При томе је израчуната и поправка за кинематичку

разлику.

У првом, уводном поглављу дат је преглед релевантних тема и радова обрађених у наредним поглављима и дат је опис садржаја тезе. Представљен је и осврт на каталоге који су коришћени у досадашњој литератури, али и у овој тези. У другом поглављу дата је теоријска основа свих термина и појмова који су даље коришћени у тези. Детаљно је описано кретање звезда у гравитационом пољу Млечног пута и дискутована је сепарабилност и семисепарабилност потенцијала и примена. За решавање проблема кретања звезда по скоро кружним орбитама постоји неколико прилаза. Неки од њих су линеарно хармонијско осциловање и епициклична апроксимација који су овде објашњени.

У трећем поглављу пажња је усмерена на подсистеме наше галаксије, као и на начине на које је могуће одредити динамичке константе и дати су предлози решења за проблеме њиховог одређивања. У четвртом поглављу детаљно је описана процедура за рачун ексцентричности која до сада није била коришћена у литератури. Показано је да се елементи орбита звезда танког диска Млечног пута успешно могу израчунати применом скраћеног поступка који садржи апроксимацију степеног закона за кружну брзину. Затим је представљен и један модел Млечног пута, који је детаљно описан у 4.2. Обе процедуре су имплементиране кроз рачунарски програм који је објашњен у наредној секцији и приложен у додатку.

У петом поглављу прво је описан начин на који је урађена селекција звезда танког диска. Урађено је истраживање на ту тему са вештачким узорцима. За формирање таквих узорака користе се познате расподеле дисперзија за компоненте брзина халоа, танког и дебелог диска. Показани су резултати селекције звезда кинематичким приступом, тј. које су очекиване вредности удела сваког од подсистема, посебно када се ради о звездама из околине Сунца. На основу ових података приступљено је даљој анализи. У наредној секцији описан је први каталог који је коришћен, дати су параметри каталога, затим је урађен рачун ексцентричности и у истом поглављу дата је и анализа и добијени резул-

тати. Показано је да рачунање ексцентричности уз напоменуте апроксимације одлично одговара ексцентричностима добијеним из тродимензионих орбита. У следећој секцији коришћен је доста већи каталог на којем је урађена такође кинематичка селекција звезда, а затим и подела узорка на подзорке како би се одредиле динамичке константе. Неки од битнијих резултата су: одређивање епицикличне учестаности у равни Галаксије, као и епицикличне учестаности дуж нормале на галактичку раван, компонента хелиоцентричне брзине V_0 и однос апсолутних вредности Ортових константи и Кузминова константа. Када су сви ови параметри познати, даље се могу одредити и угаона брзина, кружна брзина за положај Сунца и густина Млечног пута у близини Сунца. Приликом анализе резултата овог каталога уочена је и израчуната кинематичка разлика брзина.

6.1 Перспективе за будући рад

Једна од главних ствари која би могла да унапреди процедуру рачунања орбиталних параметара састоји се у детаљнијем испитивању сразмерно једноставних формула применљивих на потенцијал Млечног пута у Сунчевој околини. Унапређење видимо у побољшању апроксимације степеног закона помоћу формуле која садржи више од једног члана са различитим вредностима експонента. Сматрамо да би на тај начин било могуће поставити одређене ограничавајуће услове. Овако поједностављена процедура даје нам могућност да рачунамо орбиталне параметре без фиксирања односа Ортових константи, што рецимо није могуће одабиром одређеног модела за Млечни пут. На тај начин можемо одабрати најбољи сет параметара који би одговарао посматрачким подацима.

Од интереса би могле бити и расподеле фаза ексцентричности. Конкретно, претпоставку о униформној расподели фаза у узорку треба ослабити, обзиром да посматрачки селекциони ефекти фаворизују звезда са малим фазама. Ова необјективност доводи и до другачијег усредњавања по ансамблу у односу на

усредњавање по времену („неергодичност”).

Осим унапређења формула за рачунање орбиталних параметара могућа је и примена и разрада савременијих модела расподеле масе у Млечном путу са освртом на тамну материју, а такође и даље усавршавање технике примене Џинсове теореме која, даје везу између елемената орбите и кинематичких момената. Биће потребно и да се укључе физичке карактеристике звезда при њиховом раздвајању према припадности компонентама, на пример металичност на којој се заснива традиционална подела на звездану популацију I (диск) и популацију II (хало).

И на крају, нешто што је планирано за веома блиску будућност јесте примена свега овде показаног на нови посматрачки материјал из мисије „Гаја” чија се доступност очекује ускоро са објављивањем другог пакета података.

Библиографија

- Alcobé, S., & Cubarsi, R. 2005, *A&A*, 442, 929
- Aumer, M., & Binney, J. J. 2009, *MNRAS*, 397, 1286
- Bensby, T., Feltzing, S., & Lundström, I. 2003, *A&A*, 410, 527
- Binney, J., & McMillan, P. 2011, *MNRAS*, 413, 1889
- Binney, J., & Merrifield, M. 1998, *Galactic Astronomy* (Princeton, NJ : Princeton University Press)
- Binney, J., & Tremaine, S. 2008, *Galactic Dynamics: Second Edition* (Princeton University Press)
- Blaauw, A., & Schmidt, M. 1965, *Galactic structure* (the University of Chicago Press)
- Bobylev, V. V., & Bajkova, A. T. 2014, *MNRAS*, 441, 142
- . 2016, *Astronomy Letters*, 42, 182
- Buckner, A. S. M., & Froebrich, D. 2014, *MNRAS*, 444, 290
- Carollo, D., Beers, T. C., Chiba, M., et al. 2010, *ApJ*, 712, 692
- Casetti-Dinescu, D. I., Girard, T. M., Korchagin, V. I., & van Altena, W. F. 2011, *ApJ*, 728, 7
- Chen, B., Stoughton, C., Smith, J. A., et al. 2001, *ApJ*, 553, 184

- Conselice, C. J., Wilkinson, A., Duncan, K., & Mortlock, A. 2016, *ApJ*, 830, 83
- Conti, P. S., & Vacca, W. D. 1990, *AJ*, 100, 431
- Cubarsi, R. 2010a, *A&A*, 522, A30
- . 2010b, *A&A*, 510, A103
- . 2014a, *A&A*, 561, A141
- . 2014b, *A&A*, 567, A46
- Cubarsi, R., Alcobé, S., Vidojević, S., & Ninković, S. 2010, *A&A*, 510, A102
- Cubarsi, R., Stojanović, M., & Ninković, S. 2017, *Serbian Astronomical Journal*, 194, 33
- de Zeeuw, T. 1988, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 536, 15
- Dehnen, W., & Binney, J. J. 1998, *MNRAS*, 298, 387
- Eddington, A. S. 1915, *MNRAS*, 76, 37
- Evans, N. W., Sanders, J. L., Williams, A. A., et al. 2016, *MNRAS*, 456, 4506
- Francis, C., & Anderson, E. 2014, *MNRAS*, 441, 1105
- Freeman, K. C. 1987, *ARA&A*, 25, 603
- Fuchs, B., Dettbarn, C., Rix, H.-W., et al. 2009, *AJ*, 137, 4149
- Holmberg, J., Nordström, B., & Andersen, J. 2009, *A&A*, 501, 941
- Huang, Y., Liu, X.-W., Yuan, H.-B., et al. 2015, *MNRAS*, 449, 162
- Iocco, F., Pato, M., & Bertone, G. 2015, *Nature Physics*, 11, 245
- Johnson, D. R. H., & Soderblom, D. R. 1987, *AJ*, 93, 864
- Joshi, Y. C., Dambis, A. K., Pandey, A. K., & Joshi, S. 2016, *A&A*, 593, A116

- Kerr, F. J., & Lynden-Bell, D. 1986, MNRAS, 221, 1023
- Kipper, R., Tenjes, P., Tihhonova, O., Tamm, A., & Tempel, E. 2016, MNRAS, 460, 2720
- Kirby, E. N., Boylan-Kolchin, M., Cohen, J. G., et al. 2013, ApJ, 770, 16
- Lynden-Bell, D. 1962, MNRAS, 124, 95
- Miyamoto, M., & Nagai, R. 1975, PASJ, 27, 533
- Moni Bidin, C., Carraro, G., & Méndez, R. A. 2012, ApJ, 747, 101
- Ninković, S. 1986, *Astrofizika*, 24, 411
- . 1992a, *Astronomische Nachrichten*, 313, 83
- . 1992b, *Ap&SS*, 187, 159
- . 2009, *Serbian Astronomical Journal*, 179, 49
- . 2011, *Astrophysics*, 54, 439
- Ninković, S., Cvetković, Z., & Stojanović, M. 2012, *Publications de l'Observatoire Astronomique de Beograd*, 91, 163
- Ninković, S., Stojanović, M., & Cvetković, Z. 2013, *Publ. Astron. Soc. „Rudjer Boskovic”*, 12, 297
- Nordström, B., Mayor, M., Andersen, J., et al. 2004, *A&A*, 418, 989
- Pasetto, S., Grebel, E. K., Zwitter, T., et al. 2012a, *A&A*, 547, A71
- . 2012b, *A&A*, 547, A70
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. 2007, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, third edition (Cambridge University Press, Cambridge)

- Rattenbury, N. J., Mao, S., Sumi, T., & Smith, M. C. 2007, MNRAS, 378, 1064
- Sala, F. 1990, A&A, 235, 85
- Sanders, J. 2012, MNRAS, 426, 128
- Schönrich, R., Binney, J., & Dehnen, W. 2010, MNRAS, 403, 1829
- Siebert, A., Bienaymé, O., Binney, J., et al. 2008, MNRAS, 391, 793
- Smith, M. C., Wyn Evans, N., & An, J. H. 2009a, ApJ, 698, 1110
- Smith, M. C., Evans, N. W., Belokurov, V., et al. 2009b, MNRAS, 399, 1223
- Steinmetz, M. 2012, Astronomische Nachrichten, 333, 523
- Stojanović, M. 2015, Serbian Astronomical Journal, 191, 75
- Swings, J.-P. 1986, Transactions of the International Astronomical Union, 19, 1
- Tully, R. B., Courtois, H., Hoffman, Y., & Pomarède, D. 2014, Nature, 513, 71
- Valenti, J. A., & Fischer, D. A. 2005, ApJS, 159, 141
- van Tulder, J. J. M. 1942, BAN, 9, 315
- Vanhollebeke, E., Groenewegen, M. A. T., & Girardi, L. 2009, A&A, 498, 95
- Vidojević, S., & Ninković, S. 2009, Astronomische Nachrichten, 330, 46
- Vieira, R. S. S., & Ramos-Caro, J. 2014, ApJ, 786, 27
- Yao, J. M., Manchester, R. N., & Wang, N. 2017, ArXiv e-prints, arXiv:1704.01272

Додатак

За потребе ове дисертације написан је рачунарски програм у програмском језику Python3. Овај програм рачуна орбиталне параметре на два начина, где је први знатно бржи у смислу утрошеног рачунарског времена и ресурса, док други захтева много више процесорске снаге и радне меморије. Из тог разлога као и због упоређивања утрошеног времена можда будуће репродукције програма, наводим неке основне карактеристике рачунара који је коришћен:

- Процесор: Intel Core i5-3470
- Кеш меморија процесора: 6MB
- Брзина процесора: 3.60 GHz
- РАМ меморија: 16GB

У наставку следи горе поменути рачунарски програм.

```
1 def citanje_kataloga():
2     """ F1 – cita ulazni fajl SPOCS i pravi i popunjava liste
3     ime, al_dec, de_dec, l_dec, b_dec, mi_al_cos_de, mi_de, par, v_r
4     koordinate pretvara u decimalni zapis i smesta ih u nizove
5     sve ostalo pretvara u brojeve (float), tamo gde je ~ ostaje ~.
6     pravi i brojace za ~ u par, tj prebrojava koliko zvezda nema par u kat
7     pravi fajlove sa listama najmanjih i najvećih paralaksi u kat
8     pravi fajl sa spiskom zvezda koje nemaju paralaksu
9     paznja! – koristi liste kao globalne i ova funkcija menja sadrzaj tih
        listi """
10    ##—unos imena fajla sa podacima i otvaranje tog fajla
```

```

11     katalog = open('ulaz_kat', 'r')
12 #     katalog = open('kat_iz_rada', 'r')
13 ##—imena fajlova za rezultat
14     rez = open('F1_citanje_kat', 'w')
15     bez_par = open('F1_bez_par', 'w')
16     minpar = open('F1_min_par', 'w')
17     maxpar = open('F1_max_par', 'w')
18 ##—citanje celog fajla i smestanje svake linije kao poseban element u
    listu
19     global br_r
20     br_r = 0
21     redovi = katalog.read().split("\n")
22     br_r = len(redovi)      # BRojac Redova u fajlu
23     pom = redovi[0].split() # pom se uvodi samo da bi prebrojali kolone
24     br_k = len(pom)        # BRojac Kolona u fajlu
25
26 ##—sledeci for ne moze da funkcioniše ako se pre toga ne definisu sve
    liste
27     reci = [[0 for i in range(br_k)] for j in range(br_r)]
28     global ime
29     global al_dec
30     global de_dec
31     global l_dec
32     global b_dec
33     global mi_al_cos_de
34     global mi_de
35     global par
36     global v_r
37     ime = [[None] for i in range(br_r)]
38     al_dec = [0 for i in range(br_r)]
39     de_dec = [0 for i in range(br_r)]
40     l_dec = [0 for i in range(br_r)]
41     b_dec = [0 for i in range(br_r)]
42     mi_al_cos_de = [0 for i in range(br_r)]
43     mi_de = [0 for i in range(br_r)]

```

```
44     par = [0 for i in range(br_r)]
45     v_r = [0 for i in range(br_r)]
46     br_par=0
47     br_v_r=0
48
49 ### prolazak kroz sve redove fajla tj kroz sve elemente liste redovi
50     for i in range(0,br_r): # brojac pocinje od nultog reda jer nema
        zaglavlja
51         reci[i] = redovi[i].split() # smestanje svake reci iz linije u
        listu
52         ime[i] = reci[i][0] # nulta kolona je ime npr SPOC123
53         al_h = reci[i][1] # prva kolona je broj sati za alpha
54         al_h = int(al_h) # pretvaram u broj
55         al_m = reci[i][2] # druga kolona je alpha minuti
56         al_m = int(al_m)
57         al_s = reci[i][3] # alpha sec
58         al_s = float(al_s)
59 # od al_h, al_m, al_s pravimo al_dec tj alpha u decimalnom zapisu
60         al_dec[i] = ((al_s / 60 + al_m) / 60 + al_h) * 15
61         de_d = reci[i][4] # uzima znak +/- zajedno sa stepenima delta
        degrees
62         # to radi za sve slucajeve osim za +00 i -00
63         de_d = int(de_d)
64         de_m = reci[i][5] # delta minuti
65         de_m = int(de_m)
66         de_s = reci[i][6] # delta sec
67         de_s = float(de_s)
68 # od de_d, de_m, de_s pravimo de_dec tj deklinaciju u decimalnom zapisu
69         if (de_d > 0): #strogo vece od nule
70             de_dec[i] = (de_s / 60 + de_m) / 60 + de_d
71         elif (de_d < 0): #strogo manje
72             de_dec[i] = de_d - ((de_s / 60 + de_m) / 60)
73         elif ((de_d == 0) and (reci[i][4][0] == '-')): #jednako -00
74             de_dec[i] = de_d - ((de_s / 60 + de_m) / 60)
75         else: # ostali slucajevi tj +00 ili samo 00
```



```
76         de_dec[i] = (de_s / 60 + de_m) / 60 + de_d
77
78         l_dec_t = reci[i][7] # longituda u decimalnom zapisu u temp
79         l_dec[i] = float(l_dec_t)# float od tog temp za popunjavanje
niza
80         b_dec_t = reci[i][8] # latituda u decimalnom zapisu u temp
81         b_dec[i] = float(b_dec_t)
82
83         mi_al_t = reci[i][9] # mi alpha cos delta
84         mi_al_cos_de[i] = float(mi_al_t)
85         mi_de_t = reci[i][10] # mi delta
86         mi_de[i] = float(mi_de_t)
87
88         par_t = reci[i][11] # paralaksa
89         if (par_t != '~'):
90             par[i] = float(par_t)
91             if (par[i]<10):
92                 print (ime[i], par[i], file=minpar)
93             if (par[i]>199):
94                 print (ime[i], par[i], file=maxpar)
95         else:
96             par[i] = par_t
97             br_par = br_par + 1 # za prebrojavanje koliko njih nema
paralaksu
98             print ("Zvezda %s nema paralaksu" % (ime[i]), file=bez_par)
99
100         v_r_t = reci[i][12] # radijalna brzina
101         if (v_r_t != '~'):
102             v_r[i] = float(v_r_t)
103         else:
104             v_r[i] = v_r_t
105             br_v_r = br_v_r + 1 # za prebrojavanje koliko njih nema
rad. brz.
106
107         print (ime[i], al_dec[i], de_dec[i], l_dec[i], b_dec[i],
```

```

108         mi_al_cos_de[i], mi_de[i], par[i], v_r[i], file=rez)
109
110     print ("Broj zvezda u katalogu koje nemaju paralaksu = ", br_par)
111     print ("———— kraj F1 —————")
112
113     ###—zatvaranje fajlova
114     katalog.close()
115     rez.close()
116     bez_par.close()
117     minpar.close()
118     maxpar.close()
119     ###—— kraj funkcije CITANJE KATALOGA —————
120
121
122     ###- ista svrha kao prva funkcija samo za katalog GCS III -
123     def citanje_kataloga_GCSIII():
124         """ F1 – cita ulazni fajl GCSIII i pravi i popunjava liste
125 ime, l_dec, b_dec, fb, fc, par, U, V, W, rp, ra, ecc, zmax
126 sve pretvara u brojeve (float), tamo gde je prazno upisuje se ~.
127 pravi fajlove sa listama najmanjih i najvećih paralaksi u kat
128 racuna x,y,z i upisuje u liste
129 paznja! – koristi liste kao globalne i ova funkcija menja sadržaj tih
        listi """
130     ###—unos imena fajla sa podacima i otvaranje tog fajla
131     katalog = open('GCSIII_full.dat', 'r')
132     ###—imena fajlova za rezultat
133     rez = open('F1_ucitan_kat', 'w')
134     ###—citanje celog fajla i smestanje svake linije kao poseban element u
        listu
135     redovi = katalog.read().split("\n")
136     br_r = len(redovi)      # BRojac Redova u fajlu
137     br_k = len(redovi[0])  # broj karaktera u jednom redu
138     ###    print(br_k)    # broj karaktera za GCSIII je 202
139     # proverava da li svaki red u katalogu ima tacno 202 karaktera tj
        uporedjujem

```

```
140 # sa prvim redom koji je procitan iz kataloga
141     for i in range(0,br_r):
142         if len(redovi[i])!=br_k:
143             print ('ovaj red nema isti broj karaktera kao prvi! red
144                 broj:',i+1)
145 # globalne (promenljive i liste) koje cu koristiti u programu kasnije u
146     F5
147     global l_dec, b_dec, ime, U, V, W, xl, yl, zl, rp, ra, ecc, zmax
148     global fb, fc, par, err_par, log_te, met, dist, Vmag, err_Vmag
149     global age, clage, chage, by
150 # definisanje listi
151     l_dec = list()
152     b_dec = list()
153     ime = list()
154     fb = list()
155     fc = list()
156     par = list()
157     err_par = list()
158     log_te = list()
159     met = list() # metalicnost [Fe/H] ([Sun])
160     dist = list()
161     Vmag = list()
162     err_Vmag = list()
163     age = list()
164     clage = list()
165     chage = list()
166     U = list()
167     V = list()
168     W = list()
169     rp = list()
170     ra = list()
171     ecc = list()
172     zmax = list()
```

```

173     by = list ()      # stroemgren b-y color index
174
175     x1 = list ()
176     y1 = list ()
177     z1 = list ()
178
179     br_fb=0 # broja koliko zvezda se nalazi u binarnom sistemu
180     br_fc=0 # brojac koliko zvezda se nalazi u jatima
181     br_par=0 # brojac koliko zvezda NEMA paralaksu u katalogu
182     br_log_te=0
183     br_met=0
184     br_dist=0 # --||--          NEMA rastojanje
185     br_age=0
186     br_Vmag=0
187     br_U=0 # --||--          U
188 ##     br_V=0 # --||--          V ovo je sve nepotrebno jer
189 ##     br_W=0 # --||--          W one koje imaju U imaju i sve
190 ##     br_rp=0 # --||--          rp ove ostale parametre
191 ##     br_ra=0 # --||--          ra
192 ##     br_ecc=0 # --||--          ecc
193 ##     br_zmax=0 # --||--          zmax
194     br_by=0
195
196
197 ##—prolazak kroz sve redove fajla tj kroz sve elemente liste redovi
198     for i in range(0,br_r): # brojac pocinje od nultog reda jer nema
199                             zaglavlja
200
201 ## longituda l F8.4 i latituda b F8.4
202     l_dec.append(float(redovi[i][0:8]))
203     b_dec.append(float(redovi[i][9:17]))
204 # float() uspesno radi sa prazninama ako ih ima pre broja ,
205 # dok int() puca ako ima makar jedan blanko pre broja ,
206 # oba pucaju ako je sve popunjeno samo blanko karakterima
207 # —object name bez blanko , svaka zvezda ima object name all
208     temp_str=redovi[i][25:41].replace(' ', '')

```

```
207     temp_str=temp_str.replace('/', '')
208     temp_str=temp_str.replace('+', '')
209     ime.append(temp_str)
210 # --flag for binaries 1 or 0 A1 -----
211     tempfb=int(redovi[i][42:43])
212     if tempfb!=0:
213         br_fb=br_fb+1
214     fb.append(tempfb)
215 # --flag for clusters 1 or 0 A1 -----
216     tempfc=int(redovi[i][44:45])
217     if tempfc!=0:
218         br_fc=br_fc+1
219     fc.append(tempfc)
220 # --paralaksa F5.1 -----
221     for j in range(67,72):
222         if (redovi[i][j]!=' '):
223             par.append(float(redovi[i][j:72]))
224             break
225     else:
226         par.append(99999)
227     br_par=br_par+1
228 # --greska za paralaksu F5.1-----
229     for j in range(73,77):
230         if (redovi[i][j]!=' '):
231             err_par.append(float(redovi[i][j:77]))
232             break
233     else:
234         err_par.append(99999)
235 # --logTe[K] F6.3 -----
236     for j in range(78,84):
237         if (redovi[i][j]!=' '):
238             log_te.append(float(redovi[i][j:84]))
239             break
240     else:
241         log_te.append(99999)
```

```
242         br_log_te=br_log_te+1
243 # ---Metalicnost F5.2-----
244     for j in range (85,90):
245         if (redovi[i][j]!=' '):
246             met.append(float(redovi[i][j:90]))
247             onoff_met=1 # 1 znaci ima vrednost za metalicnost
248             break
249     else:
250         br_met=br_met+1
251         met.append(99999)
252         onoff_met=0 # 0 znaci nema vrednost za metalicnost
253 # ---distance I4 (br_dist < br_par)-----
254     for j in range (91,95):
255         if (redovi[i][j]!=' '):
256             dist.append(int(redovi[i][j:95]))
257             # dist je u pc pa se mora pretvoriti u kpc zato
258             deljenje
259             xl.append(((dist[i]/1000)*
260                       (mat.cos(mat.radians(b_dec[i])))*
261                       (mat.cos(mat.radians(l_dec[i]))))
262             yl.append(((dist[i]/1000)*
263                       (mat.cos(mat.radians(b_dec[i])))*
264                       (mat.sin(mat.radians(l_dec[i]))))
265             zl.append(((dist[i]/1000)*
266                       (mat.sin(mat.radians(b_dec[i]))))
267             break
268     else:
269         br_dist=br_dist+1
270         dist.append(99999)
271         xl.append(99999)
272         yl.append(99999)
273         zl.append(99999)
274 # ---VMag (mag) (F5.2) Absolute magnitude -----
275     for j in range (96,101):
276         if (redovi[i][j]!=' '):
```

```
276         Vmag.append(float(redovi[i][j:101]))
277         break
278     else:
279         Vmag.append(99999)
280         br_Vmag=br_Vmag+1
281 # --error VMag (mag) (F5.2) Absolute magnitude -----
282     for j in range(102,107):
283         if (redovi[i][j]!=' '):
284             err_Vmag.append(float(redovi[i][j:107]))
285             break
286     else:
287         err_Vmag.append(99999)
288 # --AGE F41-----
289     for j in range(108,112):
290         if (redovi[i][j]!=' '):
291             age.append(float(redovi[i][j:112]))
292             break
293     else:
294         br_age=br_age+1
295         age.append(99999)
296 ### --lower confidence limit AGE F41-----
297     for j in range(113,117):
298         if (redovi[i][j]!=' '):
299             clage.append(float(redovi[i][j:117]))
300             break
301     else:
302         clage.append(99999)
303 ### --uper confidence limit AGE F41-----
304     for j in range(118,122):
305         if (redovi[i][j]!=' '):
306             chage.append(float(redovi[i][j:122]))
307             break
308     else:
309         chage.append(99999)
310 # --Heliocentric space velocity component U (km/s) I5-
```

```
311     for j in range (123,128):
312         if (redovi[i][j]!=' '):
313             U.append(int(redovi[i][j:128]))
314             onoff_U=1 # 1 znaci ima vrednost za U
315             break
316     else:
317         br_U=br_U+1
318         U.append(99999)
319         onoff_U=0 # 0 znaci nema vrednost za U
320 # —Heliocentric space velocity component V (km/s) I5—
321     for j in range (129,134):
322         if (redovi[i][j]!=' '):
323             V.append(int(redovi[i][j:134]))
324             break
325     else:
326         V.append(99999)
327 # —Heliocentric space velocity component W (km/s) I5—
328     for j in range (135,140):
329         if (redovi[i][j]!=' '):
330             W.append(int(redovi[i][j:140]))
331             break
332     else:
333         W.append(99999)
334
335 # Rmin (kpc) (F6.2) Perigalactic distance —
336     for j in range (141,147):
337         if (redovi[i][j]!=' '):
338             rp.append(float(redovi[i][j:147]))
339             break
340     else:
341         rp.append(99999)
342 # Rmax (kpc) (F6.2) Apogalactic distance—
343     for j in range (148,154):
344         if (redovi[i][j]!=' '):
345             ra.append(float(redovi[i][j:154]))
```



```

346         break
347     else:
348         ra.append(99999)
349 # ecc (F5.2) Eccentricity of galactic orbit –
350     for j in range (155,160):
351         if (redovi[i][j]!=' '):
352             ecc.append(float(redovi[i][j:160]))
353             break
354     else:
355         ecc.append(99999)
356 # zmax (kpc) (F6.2) Maximum distance from galactic plane
357     for j in range (161,167):
358         if (redovi[i][j]!=' '):
359             zmax.append(float(redovi[i][j:167]))
360             break
361     else:
362         zmax.append(99999)
363 # —boja b-y F6.3—————
364     for j in range (175,181):
365         if (redovi[i][j]!=' '):
366             by.append(float(redovi[i][j:181]))
367             break
368     else:
369         br_by=br_by+1
370         by.append(99999)
371 #—————
372 #završeno učitavanje, sada sledi ispis u fajl svega sto je učitano
373 #—————
374     print (ime[i], xl[i], yl[i], zl[i], U[i], V[i], W[i],
375           rp[i], ra[i], ecc[i], zmax[i],
376           met[i], by[i], age[i], fb[i], fc[i],
377           par[i], err_par[i], dist[i], log_te[i],
378           Vmag[i], err_Vmag[i], age[i], clage[i], chage[i], file=
379     rez)
#—————

```

```

380 ##### na kraju za svaku vrednost 'i' pitam da li ima neki onoff da se
      razlikuje
381 ##           if (onoff_U==onoff_V==onoff_W==onoff_rp==onoff_ra==\
382 ##             onoff_ecc==onoff_zmax):
383 ##             # ovo je slucaj u kojem je sve ok, bez obzira da li su
      sve 1 ili 0
384 ##             # ako je sve u redu onda ispisujem to u jedan fajl
385 ##           else:
386 ##             # ako nije stampam upozerenje da nesto fali u tom redu
387 ##             print ("Nedostaje neki podataka u redu",i+1)
388     print('broj zvezda koje nemaju U,V,W,rp,ra,ecc ili zmax',br_U)
389     print('broj zvezda koje nemaju metalicnost',br_met)
390     print('broj zvezda koje su u dvojnem sistemu (svi tipovi)',br_fb)
391     print('broj zvezda koje su u jatima',br_fc)
392     print('broj zvezda koje nemaju paralaksu',br_par)
393     print('broj zvezda koje nemaju rastojanje (dist)',br_dist)
394     print('broj zvezda koje nemaju logTe',br_log_te)
395     print('broj zvezda koje nemaju age',br_age)
396     print('broj zvezda koje nemaju absolutnu magnitudu',br_Vmag)
397     print('broj zvezda koje nemaju b-y color',br_by)
398
399     print ("————— kraj F1 —————")
400
401 ##—zatvaranje fajlova
402     katalog.close()
403     rez.close()
404 ##————— kraj funkcije CITANJE KATALOGA ———
405
406
407 ##————— pocetak funkcije MATRICA_T ———
408 def matrica_T():
409     """F2 – Pravi matricu T na osnovu tri ugla alpha, delta, theta za
      NGP za J2000"""
410 #   ova grupa je za nove vrednosti j200
411     al_ngp = 192.85951 # u stepenima

```

```

412     de_ngp = 27.12834
413     theta = 122.932
414
415 #   ova grupa je za stare vrednosti j1950 da bih proverio tacnost
416 #   kod racunanja matrice T i A i recimo nekoliko vrednosti za zvezde
      koje
417 #   su date u radu "johnson and soderblom (1987)"
418 ###     al_ngp = 192.25  # u stepenima
419 ###     de_ngp = 27.4
420 ###     theta = 123
421
422 ###—Matrica T se dobija mnozenjem matrica X*Y*Z
423 ###—Matrica X
424     x00=mat.cos(mat.radians(theta))
425     x01=mat.sin(mat.radians(theta))
426     x02=0
427     x10=mat.sin(mat.radians(theta))
428     x11=(-1)*mat.cos(mat.radians(theta))
429     x12=0
430     x20=0
431     x21=0
432     x22=1
433 ###—Matrica Y
434     y00=(-1)*mat.sin(mat.radians(de_ngp))
435     y01=0
436     y02=mat.cos(mat.radians(de_ngp))
437     y10=0
438     y11=-1
439     y12=0
440     y20=mat.cos(mat.radians(de_ngp))
441     y21=0
442     y22=mat.sin(mat.radians(de_ngp))
443 ###—Matrica Z
444     z00=mat.cos(mat.radians(al_ngp))
445     z01=mat.sin(mat.radians(al_ngp))

```

```

446     z02=0
447     z10=mat.sin(mat.radians(al_ngp))
448     z11=(-1)*mat.cos(mat.radians(al_ngp))
449     z12=0
450     z20=0
451     z21=0
452     z22=1
453
454     X = np.array([(x00, x01, x02), (x10, x11, x12), (x20, x21, x22)])
455     Y = np.array([(y00, y01, y02), (y10, y11, y12), (y20, y21, y22)])
456     Z = np.array([(z00, z01, z02), (z10, z11, z12), (z20, z21, z22)])
457     T = np.empty( (3,3) ) # pravi praznu matricu, default type je
float64
458
459     T = np.dot(X,Y) # mnozenje matrica X i Y
460     T = np.dot(T,Z) # mnozenje sa
461
462     print ("———— kraj F2 ————")
463
464     return T
465 ##———— kraj funkcije MATRICA_T ——
466
467
468 ##———— pocetak funkcije EQ_TO_GAL ——
469 def eq_gal_coord(T):
470     """F3 – Pretvara iz ekvatorijalnih u galakticke koordinate
471 koristeći globalne promenljive al_dec i de_dec iz prve funkcije i
472 pravi promenljive b_izr i l_izr i
473 ispusuje kod koliko zvezda se razlikuje b_izr od b_kat, za l isto."""
474     razlike = open('F3_raz_gal_ko', 'w')
475     xyz = open('F3_xyz', 'w')
476     br_b = 0
477     br_l = 0
478     razlika = 0
479     prag = 0.0005 # razlika od 0.0005 je oko 0.00165 u lucnim sekundama

```

```

480     br_Ikv = 0 # brojaci koji broje koliko zvezda ima u kom kvadrantu
        po l
481     br_IIkv = 0 # nisu uopste neophodni za rad programa
482     br_IIIkv = 0 # ali posto vec imam uslove koji izdvajaju zvezde po
        kvadrantima
483     br_IVkv = 0 # onda sam uveo i brojace...
484     b_izr = [0 for i in range(br_r)]
485     l_izr = [0 for i in range(br_r)]
486     global xl, yl, zl
487     xl = [0 for i in range(br_r)]
488     yl = [0 for i in range(br_r)]
489     zl = [0 for i in range(br_r)]
490     global dist
491     dist = [0 for i in range(br_r)]
492
493     for i in range(br_r):
494         me00=mat.cos(mat.radians(de_dec[i]))*mat.cos(mat.radians(al_dec
        [i]))
495         me01=mat.cos(mat.radians(de_dec[i]))*mat.sin(mat.radians(al_dec
        [i]))
496         me02=mat.sin(mat.radians(de_dec[i]))
497         ME = np.array([(me00, me01, me02)]) # matrica sa elementima
        ekvatorijalnih koo
498         ME = np.transpose(ME)
499         P = np.dot(T,ME)
500         b_izr[i] = mat.degrees(mat.asin(P[2])) # sin b = P[2] => pa
        racunamo arcsin od toga
501         # sad treba odrediti i podeliti sta u koj kvadrant pripada
502         l_c = mat.degrees(mat.acos((P[0])/(mat.cos(mat.radians(b_izr[i]
        ))))))
503         l_s = mat.degrees(mat.asin((P[1])/(mat.cos(mat.radians(b_izr[i]
        ))))))
504         l_c1=360-mat.degrees(mat.acos((P[0])/(mat.cos(mat.radians(b_izr
        [i]))))))

```

```
505     l_s1=180-mat.degrees(mat.asin((P[1])/(mat.cos(mat.radians(b_izr
    [i])))))
506     l_c_m1=0-mat.degrees(mat.acos((P[0])/(mat.cos(mat.radians(b_izr
    [i])))))
507
508     # kod ovih uslova ne moze da se stavi npr l_c=l_s zbog sin i
    cos
509     # koji ne daju istu vrednost na tamo nekoj decimali...
510     # zato je u uslovima %.9f sto znaci da se uporedjuje prvi 9
    decimala
511     # a kad se formira l_izr onda se pravi razlika l_dec-l_izr
512     if ((("%.9f" % l_c) ==("%.9f" % l_s)): # to je prvi kvadrant
513         br_Ikv = br_Ikv + 1 # broj zvezda u prvom kvadrantu
514         l_izr[i] = l_c
515     elif ((("%.9f" % l_c) ==("%.9f" % l_s1)): # to je drugi
    kvadrant
516         br_IIkv = br_IIkv + 1
517         l_izr[i] = l_c
518     elif ((("%.9f" % l_c1) ==("%.9f" % l_s1)): # III kvadrant
519         br_IIIkv = br_IIIkv + 1
520         l_izr[i] = l_c1
521     elif ((("%.9f" % l_s) ==("%.9f" % l_c_m1)): # IV kvadrant
522         br_IVkv = br_IVkv + 1
523         l_izr[i] = 360 + l_s # mora da se pretvori jer treba da je
    iz intervala [0,360]
524     else:
525         print ("ERROR! - ne ispunjava nijedan od uslova")
526
527     # uporedjujem i pravim razlike izmedju izracunatog b i
    kataloskog b
528     razlika = mat.fabs(b_dec[i] - b_izr[i])
529     if (razlika > prag):
530         br_b = br_b + 1 # broji koliko imam zvezda koje se
    razlikuju
531
    # za izracunato b i ono iz kataloga
```

```
532         print ("***", ime[i], "\t b_dec=", b_dec[i],
533               "\t b_izr=", b_izr[i], "\t raz=", razlika, file=
razlike)
534     # uporedjujem i pravim razlike izmedju izracunatog l i
katalogskog l
535     razlika = mat.fabs(l_dec[i] - l_izr[i])
536     if (razlika > prag):
537         br_l = br_l + 1 # broji koliko imam zvezda koje se
razlikuju
538                 # za izracunato l i ono iz kataloga
539         print ("—", ime[i], "\t l_dec=", l_dec[i],
540               "\t l_izr=", l_izr[i], "\t raz=", razlika, file=
razlike)
541
542     if (par[i] != '~'):
543         dist[i] = 1/par[i]
544         xl[i]=(dist[i]*
545               (mat.cos(mat.radians(b_izr[i])))*
546               (mat.cos(mat.radians(l_izr[i]))))
547         yl[i]=(dist[i]*
548               (mat.cos(mat.radians(b_izr[i])))*
549               (mat.sin(mat.radians(l_izr[i]))))
550         zl[i]=(dist[i]*
551               (mat.sin(mat.radians(b_izr[i]))))
552     else:
553         dist[i]='~'
554         xl[i]='~'
555         yl[i]='~'
556         zl[i]='~'
557
558     print(ime[i], xl[i], yl[i], zl[i], file=xyz)
559
560     print ("Kod %i zvezda se izracunato b razlikuje od katalogskog b, \n
\
561 kod %i zvezda se izracunato l razlikuje od katalogskog l, \n \
```

```

562 ako je tolerancija u razlici veca od %f " % (br_b, br_l, prag))
563     print ("———— kraj F3 ————")
564 #     print ("Broj zvezda (po l) u: \n I kvadrant = %i \n II kvadrant =
      %i \n \
565 #III kvadrant = %i \n IV kvadrant = %i \n" % (br_Ikv, br_IIkv, br_IIIkv,
      br_IVkv))
566     razlike.close()
567     xyz.close()
568 ###———— kraj funkcije EQ_TO_GAL ———
569
570
571 ###———— pocetak funkcije gal_space_vel ———
572 def gal_space_vel():
573     """Koristi U,V,W iz prethodne funkcije kao globalne promenljive,
      zatim
574 pravi U_mw, V_mw, W_mw i upisuje u fajlove
575 pravi fajl sa zvezdama koje upadaju u opseg koji je zadat."""
576     rez2 = open('F4_selected_stars_mod_mw', 'w')
577     rez3 = open('F4_rejected', 'w')
578
579     # au i sy potrebni za racun konstante k
580     au=149597870.691 # astronomical unit in km
581     sy=365.256363004*24*3600 # sidereal year in sec
582     k=au/sy
583
584     global opseg
585     global Xs, Ys, Zs, Y0 # treba da budu globalne jer se koriste i u
      F5
586     global Rsun, Zsun
587
588     print ("Xs= %.1f, Ys= %.1f, Zs= %.1f, Y0= %i" % (Xs,Ys,Zs,Y0))
589     print ("Rsun= %.1f, Zsun= %.4f" % (Rsun,Zsun))
590 #     k dato u radu
591 ###     k=4.74057
592     print ("k= %f" % (k))

```



```

593
594 # U,V,W su koordinate u odnosu na Sunce i one nemaju dodatnu oznaku
595 # U_mw... ovo su galaktocentricne koordinate i koriste se u F5
596
597     global ime_mw, U_mw, V_mw, W_mw, xl_mw, yl_mw, zl_mw, Theta, Phi,
        Rsph_dot
598     global rp_mw, ra_mw, ecc_mw, zmax_mw
599     global fb_mw, fc_mw, par_mw, err_par_mw, log_te_mw, met_mw, dist_mw
600     global Vmag_mw, err_Vmag_mw, age_mw, clage_mw, chage_mw, by_mw
601
602 # ove liste ne znam koliko ce velike biti pa ih moram ovako praviti
603 # one ce imati manje zvezda tj samo one koje upadaju u opseg
604 # PROBLEM: indeks tih listi nece se poklapati sa indeksom liste sa
        imenima
605 # jer ce ovde biti manje zvezda nego originalna lista u kojoj se nalazi
        ime[i]
606 # zato su uvesti novu globalnu listu ime_mw koja ce imati samo imena
        zvezda
607 # koje se nalaze u ovim listama i na taj nacin ce se poklapati indeksi.
608 # sve liste koje imaju mw oznaku nisu u stvari modifikovane za nesto
        sto bi
609 # dalo vrednost u odnosu na mw (osim U,V,W) nego su ustvari nove
        napravljene
610 # liste koje ce da budu sa izdvojenim elementima u odnosu na neki
        kriterijum
611 # a pre kriterijuma sto je jos bitnije u odnosu na to da li uopste
        podaci
612 # postoje ili ne za to sto izdvajamo
613 # dakle u zavisnosti u odnosu na sta izdvajamo zvezde to treba pitati
614 # da li je jednako ~
615 # _____
616     ime_mw = list ()
617     U_mw = list ()
618     V_mw = list ()
619     W_mw = list ()

```

```

620 xl_mw = list ()
621 yl_mw = list ()
622 zl_mw = list ()
623 Theta=list ()
624 Phi=list ()
625 Rsph_dot=list ()
626
627 brojac1=0
628 brojac3=0
629 brojac4=0
630 brojac5=0
631
632 # stampanje zaglavlja u oba fajla i selected i reejected
633 print( '{0:<11s} \
634 {1:>11s} {2:>11s} {3:>11s} \
635 {4:>12s} {5:>8s} {6:>8s} \
636 {7:>11s} {8:>8s} {9:>8s} {10:>8s} \
637 {11:>9s} {12:>11s} {13:>9s} {14:>7s} \
638 {15:>7s} {16:>7s} {17:>7s} {18:>7s} \
639 {19:>9s} {20:>8s} {21:>8s} \
640 {22:>10s} {23:>10s}'
641         .format( 'selected ',
642                 'x_mw', 'y_mw', 'z_mw',
643                 'U_mw', 'V_mw', 'W_mw',
644                 'rp', 'ra', 'ecc', 'zmax',
645                 'dist', 'met', 'b-y', 'age',
646                 'fB', 'fC', 'par', 'e_par',
647                 'log_T', 'Vmag', 'e_Vmag',
648                 'l', 'b'), file=rez2)
649
650 print( '{0:<11s} \
651 {1:>11s} {2:>11s} {3:>11s} \
652 {4:>12s} {5:>8s} {6:>8s} \
653 {7:>11s} {8:>8s} {9:>8s} {10:>8s} \
654 {11:>9s} {12:>11s} {13:>9s} {14:>7s} \

```

```

655 {15:>7s} {16:>7s} {17:>7s} {18:>7s} \
656 {19:>9s} {20:>8s} {21:>8s} \
657 {22:>10s} {23:>10s}'
658         .format('selected ',
659                 'x_mw', 'y_mw', 'z_mw',
660                 'U_mw', 'V_mw', 'W_mw',
661                 'rp', 'ra', 'ecc', 'zmax',
662                 'dist', 'met', 'b-y', 'age',
663                 'FB', 'FC', 'par', 'e_par',
664                 'log_T', 'Vmag', 'e_Vmag',
665                 'l', 'b'), file=rez3)
666
667 brojac1=0
668
669 for i in range(len(ime)):
670 ##     if (U[i]<99000):
671 ##     if (met[i]<99000):
672     if (U[i]<99000 and met[i]<99000):
673 ##     if (fc[i]!=0):
674         brojac1=brojac1+1
675         # U_mw, V_mw, W_mw su galaktocentricne koordinate
676         # Sa U,V,W tj sa heliocentricnih koordinata se prelazi
677         # na lokalni a onda na galaktocentricni sistem
678 ##         U_mw_pom=float(U[i])     # ove vrednosti je trazio Cubarsi
679 ##         V_mw_pom=float(V[i])     # da mu posaljemo
680 ##         W_mw_pom=float(W[i])
681         U_mw_pom=float(U[i]+Xs)
682         V_mw_pom=float(V[i]+Ys+Y0)
683         W_mw_pom=float(W[i]+Zs)
684         xl_mw_pom=float(xl[i]-Rsun)
685         yl_mw_pom=float(yl[i])
686         zl_mw_pom=float(zl[i]+Zsun)
687         ime_pom=str(ime[i])
688

```

```

689 ##### VRLO BITNO: V_mw-Y0 jer je to neophodno za racunanje prostorne
        brzine
690         pom3=mat.sqrt(((U_mw_pom**2)+((V_mw_pom-Y0)**2)+(W_mw_pom
        **2))
691         Rcil_pom=mat.sqrt((xl_mw_pom**2)+(yl_mw_pom**2))
692         theta_pom=mat.degrees(mat.atan(yl_mw_pom/xl_mw_pom))
693         Rsph_pom=mat.sqrt((Rcil_pom**2)+(zl_mw_pom**2))
694         phi_pom=mat.degrees(mat.asin(zl_mw_pom/Rsph_pom))
695         Rcil_dot_pom=(xl_mw_pom*U_mw_pom+yl_mw_pom*V_mw_pom)/((
        Rcil_pom)
696         theta_dot_pom=(xl_mw_pom*V_mw_pom-yl_mw_pom*U_mw_pom)/((
        Rcil_pom**2)
697         Rsph_dot_pom=(Rcil_pom*Rcil_dot_pom+zl_mw_pom*W_mw_pom)/((
        Rsph_pom)
698         phi_dot_pom=(Rsph_pom*W_mw_pom-Rsph_dot_pom*zl_mw_pom)/((
        Rcil_pom*Rsph_pom)
699         Theta_pom=Rcil_pom*theta_dot_pom
700         Phi_pom=Rsph_pom*phi_dot_pom
701
702         v_pec=mat.sqrt(((Phi_pom**2)+((Theta_pom-Y0)**2)+(
        Rsph_dot_pom**2))
703         # v_pec i pom3 treba da daju iste vrednosti sto se vidi sa
        grafika
704         # toomre diagram za sve zvezde
705
706 #####—ako treba sve zvezde staviti u nizove bez ikakve selekcije
707 #####—onda ukljuciti samo ove redove a iskljuciti blokove if prvi i
        drugi nacin
708 ##         U_mw.append(U_mw_pom)
709 ##         V_mw.append(V_mw_pom)
710 ##         W_mw.append(W_mw_pom)
711 ##         xl_mw.append(xl_mw_pom)
712 ##         yl_mw.append(yl_mw_pom)
713 ##         zl_mw.append(zl_mw_pom)
714 ##         ime_mw.append(ime_pom)

```

```

715 ##          Theta.append(Theta_pom)
716 ##          Phi.append(Phi_pom)
717 ##          Rsph_dot.append(Rsph_dot_pom)
718 ##
719 ##          brojac3 = brojac3 + 1
720 ##
721 ##          print('{0:<11s} \
722 ##{1:>11.4f} {2:>11.4f} {3:>11.4f} \
723 ##{4:>12.1f} {5:>8.1f} {6:>8.1f} \
724 ##{7:>11.2f} {8:>8.2f} {9:>8.2f} {10:>8.2f} \
725 ##{11:>9d} {12:>11.2f} {13:>9.3f} {14:>7.1f} \
726 ##{15:>7d} {16:>7d} {17:>7.1f} {18:>7.1f} \
727 ##{19:>9.3f} {20:>8.2f} {21:>8.2f} \
728 ##{22:>10.4f} {23:>10.4f} '
729 ##          .format(ime_pom,
730 ##                  xl_mw_pom,yl_mw_pom,zl_mw_pom,
731 ##                  U_mw_pom,V_mw_pom,W_mw_pom,
732 ##                  rp[i],ra[i],ecc[i],zmax[i],
733 ##                  dist[i],met[i],by[i],age[i],
734 ##                  fb[i],fc[i],par[i],err_par[i],
735 ##                  log_te[i],Vmag[i],err_Vmag[i],
736 ##                  l_dec[i],b_dec[i]),file=rez2)
737 ##
738 ##### -----  izdvajanje zvezda iz uzorka
739 #####
740 ##### sve zvezde koje upadaju u opseg se izdvajaju u poseban fajl.
741 ##### kriterijum je da je prostorna brzina (pom3) manja od 80 km/s tj
742 ##### opseg
743 ##### i da je rastojanje manje od 200 pc
744 ##          if (pom3 <= 80):
745 ##          if (pom3 <= 80 and dist[i]<200):
746 ##          if (pom3 > 80 and pom3<= 250):
747 ##          if (pom3 > 120 and pom3<= 250):
748 ##          if (pom3 > 250):
749 ##          if (pom3 > 250 and dist[i]<200):

```

```
748 ##           if (dist[i]<200):
749 ##           if (ecc[i]<0.3):
750 #####           if (pom3 <= opseg and dist[i]<200 and met[i]>-0.5):
751 #####           if (pom3 <= opseg and dist[i]<200 and met[i]>-0.8 and
                    met[i]<-0.5):
752 #####           if (met[i]>-0.5):
753                 U_mw.append(U_mw_pom)
754                 V_mw.append(V_mw_pom)
755                 W_mw.append(W_mw_pom)
756                 xl_mw.append(xl_mw_pom)
757                 yl_mw.append(yl_mw_pom)
758                 yl_mw.append(yl_mw_pom)
759                 zl_mw.append(zl_mw_pom)
760                 ime_mw.append(ime_pom)
761
762                 brojac3 = brojac3 + 1
763
764                 print( '{0:<11s} \
765 {1:>11.4f} {2:>11.4f} {3:>11.4f} \
766 {4:>12.1f} {5:>8.1f} {6:>8.1f} \
767 {7:>11.2f} {8:>8.2f} {9:>8.2f} {10:>8.2f} \
768 {15:>7d} {16:>7d} {17:>7.1f} {18:>7.1f} \
769 {19:>9.3f} {20:>8.2f} {21:>8.2f} \
770 {22:>10.4f} {23:>10.4f} '
771                 .format(ime_pom,
772                        xl_mw_pom,yl_mw_pom,zl_mw_pom,
773                        U_mw_pom,V_mw_pom,W_mw_pom,
774                        rp[i],ra[i],ecc[i],zmax[i],
775                        dist[i],met[i],by[i],age[i],
776                        fb[i],fc[i],par[i],err_par[i],
777                        log_te[i],Vmag[i],err_Vmag[i],
778                        l_dec[i],b_dec[i]), file=rez2)
779
780             else:
781                 brojac4 = brojac4 + 1
```

```

782
783         print( '{0:<11s} \
784 {1:>11.4f} {2:>11.4f} {3:>11.4f} \
785 {4:>12.1f} {5:>8.1f} {6:>8.1f} \
786 {7:>11.2f} {8:>8.2f} {9:>8.2f} {10:>8.2f} \
787 {11:>9d} {12:>11.2f} {13:>9.3f} {14:>7.1f} \
788 {15:>7d} {16:>7d} {17:>7.1f} {18:>7.1f} \
789 {19:>9.3f} {20:>8.2f} {21:>8.2f} \
790 {22:>10.4f} {23:>10.4f} '
791         .format(ime_pom,
792                 xl_mw_pom,yl_mw_pom,zl_mw_pom,
793                 U_mw_pom,V_mw_pom,W_mw_pom,
794                 rp[i],ra[i],ecc[i],zmax[i],
795                 dist[i],met[i],by[i],age[i],
796                 fb[i],fc[i],par[i],err_par[i],
797                 log_te[i],Vmag[i],err_Vmag[i],
798                 l_dec[i],b_dec[i]),file=rez3)
799
800     print( 'poduzorak sada ima:',brojac1)
801     print( 'od toga selektovano je:',brojac3)
802     print( 'odbaceno je:',brojac4)
803
804     ### odavde na dalje je racunanje srednjih kvadrata brzine, svi elementi
805     ### i to za one elemente koji su gore odabrani
806     U_tot=0
807     V_tot=0
808     W_tot=0
809
810     vx_kv_tot=0
811     vy_kv_tot=0
812     vz_kv_tot=0
813
814     vx_vy_tot=0
815     vx_vz_tot=0

```

```
816     vy_vz_tot=0
817
818     for i in range(len(U_mw)):
819         U_tot=U_tot+U_mw[i]
820         V_tot=V_tot+V_mw[i]-Y0
821         W_tot=W_tot+W_mw[i]
822
823     U_sr=U_tot/ brojac3
824     V_sr=V_tot/ brojac3
825     W_sr=W_tot/ brojac3
826
827     for i in range(len(U_mw)):
828         vx_kv=pow((U_mw[i]-U_sr),2)
829         vy_kv=pow((V_mw[i]-Y0-V_sr),2)
830         vz_kv=pow((W_mw[i]-W_sr),2)
831
832         vx_vy=(U_mw[i]-U_sr)*(V_mw[i]-Y0-V_sr)
833         vx_vz=(U_mw[i]-U_sr)*(W_mw[i]-W_sr)
834         vy_vz=(V_mw[i]-Y0-V_sr)*(W_mw[i]-W_sr)
835
836         vx_kv_tot=vx_kv_tot+vx_kv
837         vy_kv_tot=vy_kv_tot+vy_kv
838         vz_kv_tot=vz_kv_tot+vz_kv
839
840         vx_vy_tot=vx_vy_tot+vx_vy
841         vx_vz_tot=vx_vz_tot+vx_vz
842         vy_vz_tot=vy_vz_tot+vy_vz
843
844     vx_kv_sr=vx_kv_tot/ brojac3
845     vy_kv_sr=vy_kv_tot/ brojac3
846     vz_kv_sr=vz_kv_tot/ brojac3
847
848     vx_vy_sr=vx_vy_tot/ brojac3
849     vx_vz_sr=vx_vz_tot/ brojac3
850     vy_vz_sr=vy_vz_tot/ brojac3
```



```

851
852     print (vx_kv_sr, vx_vy_sr, vx_vz_sr)
853     print (vx_vy_sr, vy_kv_sr, vy_vz_sr)
854     print (vx_vz_sr, vy_vz_sr, vz_kv_sr)
855
856     print (U_sr, V_sr, W_sr)
857
858     print ("———— kraj F4 ————")
859     rez2.close()
860
861 ###———— kraj funkcije gal_space_vel F4 —
862
863
864 ###———— pocetak funkcije astrofizika —
865 def astrofizika():
866     """F5 – racuna phi i phi_t za svaku zvezdu za formule iz rada iz
Astrofizika
2011 – Determination of orbital eccentricity – SN;
zatim racuna za svaki parametar beta nule funkcije iz tog rada
zatim se odredjuju r_p i r_a, pa onda ekscentricnost i faza.
Ono sto je ucitano iz kataloga je smesteno u nizove rp,ra,ecc,zmax
a ovo sto se dobije ovde iz ovih formula se smesta u nizove r_pl,r_al,
el,fazal"""
872     phi=list()
873     phi_t=list()
874     betal=list()
875     el=list()
876     r_pl=list()
877     r_al=list()
878     fazal=list()
879     fazal_for=list()
880     el_for=list()
881     r_pl2=list()
882     r_al2=list()
883     r_ml_for=list()

```

```

884     sirina_for=list()
885     odbacene_rm=list()
886
887     rarp = open('F5_interval_Ra-Rp', 'w')
888
889 # u ovom foru samo racunam phi i phi_t
890     for i in range(len(ime_mw)):
891         phi_pom=mat.sqrt(mat.pow(U_mw[i],2) + mat.pow(V_mw[i],2)) / Y0
892         phi_t_pom=mat.fabs(V_mw[i]) / Y0
893 # lista phi sadrzi samo brojeve, pretpostavljam da je razlog za to jer
894 # prolazi
895 # kroz funkcije sqrt i pow
896 # lista phi_t se sastoji od listi. Iz nekog razloga svaki element je
897 # lista ili
898 # array, sa tim se dalje moze raditi ali ipak pravi probleme pogotovo
899 # oko ispisa
900 # reseno seledcom narednbom jer onda svaki element shvata kao broj
901     phi_t_pom=float(phi_t_pom)
902     phi.append(phi_pom)
903     phi_t.append(phi_t_pom)
904
905     s="F5_selected_stars_mod_astrof_beta_" #pravljenje stringa za
906     imena fajlova u koji se upisuju rezultati
907     nule=list() #smestaju se nule funkcije u ovaj niz
908     beta=0
909 #sledeci for prolazi kroz sve vrednosti parametra beta od nula do 3.1
910 # (poslednji koji uzima je 3.0)
911 # !!!!! korak bi trebalo da bude 0.1 !!!!!!!
912 #a if odmah ispod preskace beta=1 jer je za njega posebna funkcija u
913 # else grani
914     for beta in sp.arange(0.0, 3.1, 0.1):
915     ##     for beta in sp.arange(0, 3.1, 1.0): # samo za test
916         if (beta != 1):
917             print(beta)
918     ###-----pocetak grane (beta != 1)

```

```

914 #####konvertujem beta u string da bih mogao da dodam na string za ime
      fajla
915         beta_str=str(beta)
916         ime_fajla=s+beta_str
917         rez = open(ime_fajla, 'w')
918         print('{0:<11s} {1:>4s} \
919 {2:>12s} {3:>8s} {4:>8s} \
920 {5:>12s} {6:>8s} {7:>8s} \
921 {8:>12s} {9:>12s} \
922 {10:>8s} {11:>8s}'.format('ime_mw', 'beta ',
923                             'Rp_for', 'Ra_for', 'Rm_for',
924                             'Rp_for_s', 'Ra_for_s', 'Rm_for_s',
925                             'ecc_for', 'ecc_for_s',
926                             'faza_for', 'faza_for_s'), file=rez)
927         print('beta', 'min_rp_for', 'ime_mw[idx_min_rp_for]',
928               'max_ra_for', 'ime_mw[idx_max_ra_for]', file=rarp)
929         for i in range(len(ime_mw)):
930             A=mat.pow(phi_t[i],2) #pomocne prom A i B za laksi
931             B=mat.pow(phi[i],2)   #i kraci zapis fukncije
932             nulaf=0 # ovo ce biti izlaz fuknkcije newton_raps
933 # pomocna koja ce da služi da li je nova nula funkcije razlicita od one
934 # prethodne pa ako jeste onda se stavlja u niz
935             nulatemp=0
936             f = lambda x: A*(mat.pow(x,2)) + \
937                 (2/(beta-1))*((mat.pow(x,(1-beta))))-1) - B
938             fprim = lambda x: 2*A*x - 2*(mat.pow(x,((-1)*beta)))
939             fsec = lambda x: 2*A + 2*beta*(mat.pow(x,((-1)*beta-1)))
          )
940 # x0 ne moze da bude nula jer funkcija newton to ne prihvata za arg
941 # moze se krenuti i od negativne vrednosti ali x0=0 mora da se preskoci
942 # za trazenje nula smatram da je dovoljno opseg od 0.1 do 3 da bi se
943 # pohvatale sve pozitivne vrednosti
944         for x0 in sp.arange(0.1, 10.3, 0.3):
945 #try i except služe da uhvate gresku koja nastaje kada
946 #pokusam da resim funkciju sa približnom vrednoscu x0 koja

```

```

947 #je bas u maksimumu ili minimumu
948         try:
949             nulaf = newton(f, x0, fprime=fprim, tol=1.48e
          -8, \
950                             maxiter=100, fprime2=fsec)
951 #u niz idu samo razlicite nule
952 #moralo je sa razlikom a ne nulaf!=nulatemp
953 #jer se u racunu nekad dobije nula koja je razlicita
954 #tek na desetoj decimali
955         if (mat.fabs(nulaf-nulatemp)>0.0001):
956             nulatemp=nulaf
957             nule.append(nulaf)
958         except RuntimeError:
959             # you shall not pass !!!
960             print('ysnp error')
961             pass
962 ##### if je specifican slucaj kada zvezda ima identicno U i V kao sto je
          popravka
963 ##### za prostornu brzinu Sunca pa se zbog toga dobija skoro tacno kruzna
          orbita
964 ##### u tom slucaju dobijamo samo jednu nulu koja je jako blizu jedinice
965 ##### jedno moguće resenje je da izjednacimo obe vrednosti Ra i Rp sa tom
          jednom
966 ##### a druga da se za popravku za Sunce uzme neka vrednost tipa 10.1
967 ##### ako sledeci if ostane ukljucen onda ce zbog continue koji je
          neophodan
968 ##### da bi se nastavio kod za sve ostale zvezde, doci do pomeranja
          indexa
969 ##### jer se nece desiti append r_p za te slucajeve i onda sve pomera i
          to ne radi!
970         if (len(nule)!=2):
971             print('ovaj unos nema dve nule',i,ime_mw[i],nule,
          '(U,V,W)_mw=',U_mw[i],V_mw[i],W_mw[i])
972             print('svi unosi MORAJU imati dve nule kako bi se
          program korektno izvrsio do kraja')
```

```

974         break # prekida for kod prvog ne regularnog unosa
          !!!!!
975 ##### dakle: nule[0]=r_p (minimalna vrednost), nule[1]=r_a (maximalna)
976 ##### sad racunam ekscentricnost iz ovih parametara
977         r_a=1/nule[0]
978         r_p=1/nule[1]
979         r_pl.append(r_p)
980         r_al.append(r_a)
981         r_m=(r_a+r_p)/2
982         faza = 1/r_m
983         fazal.append(faza)
984         e=((r_a/r_p)-1)/((r_a/r_p)+1) # ovo e je iz normiranih
          vrednosti
985         el.append(e)
986         betal.append(beta)
987 # ove dve liste daju vrednosti pomnozene sa R_sun, sve ostale vrednosti
988 # r_p,r_a,e,f su normirane na R
989         tp=abs(R_sun)*r_p
990         ta=abs(R_sun)*r_a
991         r_pl2.append(tp)
992         r_al2.append(ta)
993         sirina_for.append(ta-tp)
994         tm=(ta+tp)/2
995         r_ml_for.append(tm)
996         e2=((ta/tp)-1)/((ta/tp)+1) # ovo e je kada se primeni
          na vrednost za sunce
997         el_for.append(e2)
998         faza2 = 1/tm # isto kao za e
999         fazal_for.append(faza2)
1000         print( '{0:<11s} {1:4.1f} \
1001 {2:12.4f} {3:8.4f} {4:8.4f} \
1002 {5:12.4f} {6:8.4f} {7:8.4f} \
1003 {8:12.4f} {9:12.4f} \
1004 {10:8.4f} {11:8.4f} '.format(ime_mw[i], beta ,
1005                                r_p,r_a,r_m,

```

```

1006         tp , ta , tm ,
1007         e , e2 , faza , faza2 ) , file=rez )
1008     del nule [:]
1009
1010
1011     ### ovde odredjujem min rp i max ra za sve zvezde za svako beta posebno
1012     ### sto je potrebno da bi se odredila sirina prstena
1013     ### bitno: ovo se razlikuje od rp i ra koje odredjujem u F6 za svaku
1014     ### posebno , jer je ovo min_rp najmanje rp od svih rp-ova izracunanih
1015     ### zvezde i to preko formula koje su date u radu , zato oznaka
1016     # sada samo trazim min i max iz liste a to mora nakon sto su liste
1017     # i završene pa zato mora novi for-ovi
1018     val , idx = min((val , idx) for (idx , val) in enumerate(r_pl2
1019     ))
1019     min_rp_for=val
1020     idx_min_rp_for=idx
1021     val , idx = max((val , idx) for (idx , val) in enumerate(r_pl2
1022     ))
1022     max_rp_for=val
1023     idx_max_rp_for=idx
1024
1025     val , idx = min((val , idx) for (idx , val) in enumerate(r_al2
1026     ))
1026     min_ra_for=val
1027     idx_min_ra_for=idx
1028     val , idx = max((val , idx) for (idx , val) in enumerate(r_al2
1029     ))
1029     max_ra_for=val
1030     idx_max_ra_for=idx
1031
1032     print ( beta , min_rp_for , ime_mw[idx_min_rp_for] ,

```

```
1033         max_ra_for, ime_mw[idx_max_ra_for], file=rarp)
1034 ###         # stampanje na stdout
1035         print ("beta=", beta,
1036             "| min_rp=", min_rp_for, ime_mw[idx_min_rp_for],
1037             "| max_ra=", max_ra_for, ime_mw[idx_max_ra_for])
1038 #### liste moraju da se obrisu jer kad udje u sledecu vrednost for
1039 petlja
1040 #### za sledece beta opet se popunjavaju te liste sa istim imenima, i
1041 mora na 0
1042         i=0
1043         del r_al[:]
1044         del r_pl[:]
1045         del el[:]
1046         del fazal[:]
1047         del fazal_for[:]
1048         del betal[:]
1049         del r_pl2[:]
1050         del r_al2[:]
1051         del r_ml_for[:]
1052         del sirina_for[:]
1053         del el_for[:]
1054         rez.close()
1055 ##### —————kraj grane (beta != 1)
1056         # ovo je grana za beta=1 sve ce biti isto osim funkcija
1057         # ukoliko je potreban samo rezultat za beta=1 onda cela if
1058         grana moze
1059         # da se iskomentarise, naravno posle onog prvog printa
1060         else:
1061             print(beta)
1062             beta_str=str(beta)
1063             ime_fajla=s+beta_str
1064             rez = open(ime_fajla, 'w')
1065             print(' {0:<11s} {1:>4s} \
```

```

1065 {2:>12s} {3:>8s} {4:>8s} \
1066 {5:>12s} {6:>8s} {7:>8s} \
1067 {8:>12s} {9:>12s} \
1068 {10:>8s} {11:>8s}'.format('ime_mw', 'beta',
1069                             'Rp_for', 'Ra_for', 'Rm_for',
1070                             'Rp_for_s', 'Ra_for_s', 'Rm_for_s',
1071                             'ecc_for', 'ecc_for_s',
1072                             'faza_for', 'faza_for_s'), file=rez)
1073 print ('beta', 'min_rp_for', 'ime_mw[idx_min_rp_for]',
1074        'max_ra_for', 'ime_mw[idx_max_ra_for]', file=rarp)
1075 for i in range(len(ime_mw)):
1076     A=phi_t[i]**2
1077     B=phi[i]**2
1078     nulaf=0
1079     nulatemp=0
1080     f = lambda x: A*(x**2) - 2*(mat.log(x)) - B
1081     fprim = lambda x: 2*A*x - 2/x
1082     fsec = lambda x: 2*A + 2/(x**2)
1083     for x0 in sp.arange(0.1, 10.3, 0.3):
1084         try:
1085             nulaf = newton(f, x0, fprime=fprim, tol=1.48e
1086 -8, \
1087                                     maxiter=100, fprime2=fsec)
1088             if (abs(nulaf-nulatemp)>0.0001):
1089                 nulatemp=nulaf
1090                 nule.append(nulaf)
1091         except RuntimeError:
1092             # you shall not pass !!!
1093             print('ysnp error')
1094             pass
1095 ##### if je specifican slucaj kada zvezda ima identicno U i V kao sto je
1096         popravka
1097 ##### za prostornu brzinu Sunca pa se zbog toga dobija skoro tacno kruzna
1098         orbita
1099 ##### u tom slucaju dobijamo samo jednu nulu koja je jako blizu jedinice

```



```

1097 ##### jedno moguće rešenje je da izjednacimo obe vrednosti Ra i Rp sa tom
        jednom
1098 ##### a druga da se za popravku za Sunce uzme neka vrednost tipa 10.1
1099 ##### ako sledeći if ostane uključen onda će zbog continue koji je
        neophodan
1100 ##### da bi se nastavio kod za sve ostale zvezde, doći do pomeranja
        indexa
1101 ##### jer se neće desiti append r_p za te slučajeve i onda sve pomera i
        to ne radi!
1102         if (len(nule)!=2):
1103             print('ovaj unos nema dve nule',i,ime_mw[i],nule,
1104                   '(U,V,W)_mw=',U_mw[i],V_mw[i],W_mw[i])
1105             print('svi unosi MORAJU imati dve nule kako bi se
        program korektno izvršio do kraja')
1106             break # prekida for kod prvog ne regularnog unosa
        !!!!!
1107         r_a=1/nule[0]
1108         r_p=1/nule[1]
1109         r_pl.append(r_p)
1110         r_al.append(r_a)
1111         r_m=(r_a+r_p)/2
1112 # u list odbacene_rm treba upisati sve zvezde koje želim da odbacim
1113 # tj one koje želim da odstampam slike da bih video da li su ti
        ekstremni
1114 # slučajevi nešto drugaciji i da li su opravdani za odbacivanje iz
        uzorka
1115 # na kojem je već uradjena selekcija u kinematickom smislu
1116 # selekciju bih ovde napravio po principu najmanjih i najvećih
        vrednosti
1117 # za rm, ali treba te zvezde smestiti u nizove u kojima će biti
        zapamćeni svi
1118 # parametri počevši od imena pa onda x,y,z,vx,vy,vz a ne samo vrednosti
        ra,rp,rm
1119 # da li za to treba 7 posebnih listi ...
1120         faza = 1/r_m

```

```

1121         fazal.append(faza)
1122         e=((r_a/r_p)-1)/((r_a/r_p)+1)
1123         el.append(e)
1124         betal.append(beta)
1125 # ove dve liste daju vrednosti pomnozene sa Rsun, sve ostale vrednosti
1126 # r_p,r_a,e,f su normirane na R
1127         tp=abs(Rsun)*r_p
1128         ta=abs(Rsun)*r_a
1129         r_pl2.append(tp)
1130         r_al2.append(ta)
1131         sirina_for.append(ta-tp)
1132         tm=(ta+tp)/2
1133         r_ml_for.append(tm)
1134         e2=((ta/tp)-1)/((ta/tp)+1)
1135         el_for.append(e2)
1136         faza2 = 1/tm # isto kao za e
1137         fazal_for.append(faza2)
1138         print( '{0:<11s} {1:4.1f} \
1139 {2:12.4f} {3:8.4f} {4:8.4f} \
1140 {5:12.4f} {6:8.4f} {7:8.4f} \
1141 {8:12.4f} {9:12.4f} \
1142 {10:8.4f} {11:8.4f}'.format(ime_mw[i], beta ,
1143                               r_p,r_a,r_m,
1144                               tp, ta ,tm,
1145                               e ,e2 , faza , faza2) , file=rez)
1146         del nule[:]
1147
1148
1149 # sada samo trazim min i max iz liste a to mora nakon sto su liste
1150 # i završene pa zato mora novi for-ovi
1151         val, idx = min((val, idx) for (idx, val) in enumerate(r_pl2
1152 ))
1153         min_rp_for=val
1154         idx_min_rp_for=idx

```

```
1154         val, idx = max((val, idx) for (idx, val) in enumerate(r_pl2
1155     ))
1156     max_rp_for=val
1157     idx_max_rp_for=idx
1158
1159     val, idx = min((val, idx) for (idx, val) in enumerate(r_al2
1160 ))
1161     min_ra_for=val
1162     idx_min_ra_for=idx
1163     val, idx = max((val, idx) for (idx, val) in enumerate(r_al2
1164 ))
1165     max_ra_for=val
1166     idx_max_ra_for=idx
1167
1168     print (beta, min_rp_for, ime_mw[idx_min_rp_for],
1169           max_ra_for, ime_mw[idx_max_ra_for], file=rarp)
1170
1171     ##          # stampanje na stdout
1172     print ("beta=", beta,
1173           "| min_rp=", min_rp_for, ime_mw[idx_min_rp_for],
1174           "| max_ra=", max_ra_for, ime_mw[idx_max_ra_for])
1175
1176     ### liste moraju da se obrišu jer kad udje u sledecu vrednost for
1177     petlja
1178     ### za sledece beta opet se popunjavaju te liste sa istim imenima, i
1179     mora na 0
1180
1181     i=0
1182     del r_al[:]
1183     del r_pl[:]
1184     del el[:]
1185     del fazal[:]
1186     del fazal_for[:]
1187     del betal[:]
1188     del r_pl2[:]
1189     del r_al2[:]
1190     del r_ml_for[:]
1191     del sirina_for[:]
```

```

1184         del el_for [:]
1185         rez.close()
1186
1187     rarp.close()
1188     print ("———— kraj F5 ————")
1189     ###———— kraj funkcije astrofizika ———
1190
1191     ###———— F6 ——— pocetak funkcija za integraciju ———
1192     #### orbite: Runge-Kutta 4th order
1193     #### "Etotal" vraca ukupnu energij u orbite ,
1194     def Etotal(s):
1195         pi=3.14159265359
1196         x=s[0]
1197         y=s[1]
1198         z=s[2]
1199         r=mat.sqrt(x*x + y*y)
1200         R=mat.sqrt(x*x + y*y + z*z)
1201         v_sq=mat.pow(s[3],2) + mat.pow(s[4],2) + mat.pow(s[5],2)
1202
1203         t1=mat.sqrt(z*z + bd*bd)+ad
1204         t2=mat.pow((r*r + t1*t1),0.5)
1205         pd=G*md/t2      # potencijal za disk
1206
1207         t3=mat.sqrt(z*z + bb*bb)+ab
1208         t4=mat.pow((r*r + t3*t3),0.5)
1209         pb=G*mb/t4      # potencijal za bulge
1210
1211         C=A/(1+mat.pow((Rl/Rc),2))
1212         t5=mat.log((Rl*Rl+Rc*Rc)/(R*R+Rc*Rc))
1213         ph= 4*pi*G*(A*Rc*Rc*(1+(0.5*t5)-(mat.atan(R/Rc)/(R/Rc)))-
1214             0.5*C*(Rl*Rl-(1/3)*R*R))      # potencijal za halo
1215
1216         E=0.5*v_sq - (pd+pb+ph)
1217         return E
1218

```

ДОДАТАК

```
1219 # "delta" pravi niz pi sa izvodima datog niza s
1220 # input: s[]    output: p[]
1221 # od s pravim pd za potencijal diska
1222 # pa onda pb za potencijal centralnog ovala
1223 # pa onda ph za potencijal korone
1224 # na kraju p=pd+pb+ph
1225 #      [0 ,1 ,2 ,3 ,4 ,5 ]
1226 # s je s[x ,y ,z ,vx,vy,vz]
1227 # p je p[vx,vy,vz ,ax,ay,az]
1228 def delta(s):
1229     pi=3.14159265359
1230     x=s[0]
1231     y=s[1]
1232     z=s[2]
1233     r=mat.sqrt(x*x + y*y)
1234
1235     #racunam ubrzanje tj izvode potencijala za disk
1236     pd=[0,0,0,0,0,0]
1237     pd[0] = s[3]
1238     pd[1] = s[4]
1239     pd[2] = s[5]
1240     t1=(mat.sqrt(z*z + bd*bd))+ad
1241     t2=mat.pow((r*r + t1*t1),1.5)
1242     pd[3] = -(G*md*x)/t2
1243     pd[4] = -(G*md*y)/t2
1244     pd[5] = -(G*md*z*t1)/(t2*mat.sqrt(z*z + bd*bd))
1245
1246     pb=[0,0,0,0,0,0]
1247     pb[0] = s[3]
1248     pb[1] = s[4]
1249     pb[2] = s[5]
1250     t3=(mat.sqrt(z*z + bb*bb))+ab
1251     t4=mat.pow((r*r + t3*t3),1.5)
1252     pb[3] = -(G*mb*x)/t4
1253     pb[4] = -(G*mb*y)/t4
```

```

1254     pb[5] = -(G*mb*z*t3)/(t4*mat.sqrt(z*z + bb*bb))
1255
1256     ph=[0,0,0,0,0,0]
1257     R=mat.sqrt(x*x + y*y + z*z) # R koje se razlikuje od gornjeg r
1258     C=A/(1+(mat.pow((Rl/Rc),2)))
1259     ph[0] = s[3]
1260     ph[1] = s[4]
1261     ph[2] = s[5]
1262     t5=-(4*pi*G*A*Rc*Rc)/(R*R)
1263     t6=(4*pi*G*A*Rc*Rc*Rc*mat.atan(R/Rc))/(R*R*R)
1264     t7=(4*pi*G*C)/3
1265     ph[3] = x*(t5+t6+t7)
1266     ph[4] = y*(t5+t6+t7)
1267     ph[5] = z*(t5+t6+t7)
1268
1269     p=[0,0,0,0,0,0]
1270     p[0]=s[3]
1271     p[1]=s[4]
1272     p[2]=s[5]
1273     p[3]=pd[3]+pb[3]+ph[3]
1274     p[4]=pd[4]+pb[4]+ph[4]
1275     p[5]=pd[5]+pb[5]+ph[5]
1276     return p
1277
1278 ##### "RK4" The Runge-Kutta metod (4. reda)
1279 def RK4(s, h, maxStep):
1280     # pomocne potrebne za racunanje RK4
1281     k1= [0,0,0,0,0,0]
1282     k2= [0,0,0,0,0,0]
1283     k3= [0,0,0,0,0,0]
1284     k4= [0,0,0,0,0,0]
1285     b = [0,0,0,0,0,0] # temporary
1286     t = 0 # time
1287
1288     x=list()

```

```
1289     y=list ()
1290     z=list ()
1291     vx=list ()
1292     vy=list ()
1293     vz=list ()
1294     Et=list ()
1295     time=list ()
1296
1297     x.append(s [0])
1298     y.append(s [1])
1299     z.append(s [2])
1300     vx.append(s [3])
1301     vy.append(s [4])
1302     vz.append(s [5])
1303
1304     Et.append(Etotal(s))
1305     time.append(t)
1306
1307     for i in range (0,maxStep):
1308 #         print("%10.2f %10.2f %10.2f %10.2f" % (t, x[i], y[i], Et[i]))
1309
1310         # racuna k1
1311         k1=delta(s)
1312
1313         # b = s + h/2.0*k1
1314         b[0] = s [0] + h/2.0*k1 [0]
1315         b[1] = s [1] + h/2.0*k1 [1]
1316         b[2] = s [2] + h/2.0*k1 [2]
1317         b[3] = s [3] + h/2.0*k1 [3]
1318         b[4] = s [4] + h/2.0*k1 [4]
1319         b[5] = s [5] + h/2.0*k1 [5]
1320         # racuna k2
1321         k2=delta(b)
1322
1323         # b = s + h/2.0*k2
```

```
1324     b[0] = s[0] + h/2.0*k2[0]
1325     b[1] = s[1] + h/2.0*k2[1]
1326     b[2] = s[2] + h/2.0*k2[2]
1327     b[3] = s[3] + h/2.0*k2[3]
1328     b[4] = s[4] + h/2.0*k2[4]
1329     b[5] = s[5] + h/2.0*k2[5]
1330     # racuna k3
1331     k3=delta(b)
1332
1333     # b = s + h*k3
1334     b[0] = s[0] + h*k3[0]
1335     b[1] = s[1] + h*k3[1]
1336     b[2] = s[2] + h*k3[2]
1337     b[3] = s[3] + h*k3[3]
1338     b[4] = s[4] + h*k3[4]
1339     b[5] = s[5] + h*k3[5]
1340     # racuna k4
1341     k4=delta(b)
1342
1343     # nove vrednosti vektora s
1344     s[0] = s[0] + h/6.0*(k1[0]+2.0*k2[0]+2.0*k3[0]+k4[0])
1345     s[1] = s[1] + h/6.0*(k1[1]+2.0*k2[1]+2.0*k3[1]+k4[1])
1346     s[2] = s[2] + h/6.0*(k1[2]+2.0*k2[2]+2.0*k3[2]+k4[2])
1347     s[3] = s[3] + h/6.0*(k1[3]+2.0*k2[3]+2.0*k3[3]+k4[3])
1348     s[4] = s[4] + h/6.0*(k1[4]+2.0*k2[4]+2.0*k3[4]+k4[4])
1349     s[5] = s[5] + h/6.0*(k1[5]+2.0*k2[5]+2.0*k3[5]+k4[5])
1350
1351     x.append(s[0])
1352     y.append(s[1])
1353     z.append(s[2])
1354     vx.append(s[3])
1355     vy.append(s[4])
1356     vz.append(s[5])
1357     Et.append(Etotal(s))
1358     t = t + h
```



```
1359     time.append(t)
1360
1361     return x,y,z,vx,vy,vz,time,Et
1362
1363 # integrator poziva prethodne tri funkcije
1364 def integrator():
1365     """F6 – sve sto je potrebno za integrator je vec izracunato u F4
1366     tako da
1367     se F5 moze iskljuciti iz liste pozvanih funkcija u glavnom programu"""
1368     rez = open('F6_rp_ra_sim', 'w')
1369     global G
1370     ##kpc -> km
1371     kpc = 3.085677581e16
1372     ## Gyear -> s
1373     gigayear = 3.1556926e16
1374     ##ovim km/s -> kpc/Gy
1375     convert = gigayear / kpc
1376     ##print(convert)
1377     ##(kpc / Msun) * (km/s)^2 -> kpc^3/Msun / Gy^2
1378     G = (4300.71)*(convert**2)
1379     ##    print(G)
1380     #####mogu i da se unesu vec izracunate vrednosti za konstante za
1381     konverziju
1382     ##convert=1.02269
1383     ##G=4502
1384
1385 # integrator parametri
1386 maxStep = 10000      # broj koraka
1387 t       = 10         # Gyr
1388 h       = t/maxStep  # stepsize
1389
1390 # ovo su liste koje se popunjavaju sa podacima za svaku zvezdu
1391 posebno
1392 xIR=list()
1393 yIR=list()
```

```

1391     zlR=list ()
1392     vxlR=list ()
1393     vylR=list ()
1394     vzlR=list ()
1395     EtlR=list ()
1396     timelR=list ()
1397     rl=list ()
1398     # globalne jer zelim da ih plotujem uporedno sa onim iz F5 u main
1399     global rpl_sim, ral_sim, sirina_sim, rml_sim, el_sim
1400     rpl_sim=list ()
1401     ral_sim=list ()
1402     rml_sim=list ()
1403     el_sim=list ()
1404     idx_rpl_sim=list ()
1405     idx_ral_sim=list ()
1406     sirina_sim=list ()
1407
1408     # ovo je iz funkcije F4 i sve ovo su globalne liste
1409     # stampane u fajl 'F4_XYZ_UVW_mw'
1410     # pa se mogu koristiti i ovde:
1411     # ime_mw, xl_mw, yl_mw, zl_mw, U_mw, V_mw, W_mw
1412     # ovo su takodje liste vec izdvojenih zvezda
1413
1414     # vrednosti koje se dobiju za sve zvezde kad ovaj for prodje kroz ceo
1415     # spisak
1416     # odabranih zvezda treba uporediti sa vrednostima dobijenim za beta=1
1417
1418     for i in range (0, len(ime_mw)) :
1419         x = xl_mw[i]    # kpc
1420         y = yl_mw[i]
1421         z = zl_mw[i]
1422         vx = U_mw[i]    # km/s
1423         vy = V_mw[i]
1424         vz = W_mw[i]

```

```

1425     ##konverzija
1426     vx=vx*convert
1427     vy=vy*convert
1428     vz=vz*convert
1429
1430     s=[x,y,z,vx,vy,vz]
1431     xlR,ylR,zlR,vxlR,vylR,vzlR,timelR,EtlR = RK4(s,h,maxStep)
1432
1433     for j in range(0,len(xlR)):
1434         rl.append(mat.sqrt((xlR[j]*xlR[j])+(ylR[j]*ylR[j])))
1435     ##         rl.append(mat.sqrt((xlR[j]*xlR[j])+(ylR[j]*ylR[j])+(zlR[j]
1436         [*zlR[j])))
1437     ##### crtanje orbita za svaku zvezdu posebno
1438     ##         fig, ax = plt.subplots()
1439     ##         ax.plot(rl,zlR,c='k',ls='-',lw='1',label='RK4')
1440     ##         ax.set_xlabel('R [kpc]')
1441     ##         ax.set_ylabel('Z [kpc]')
1442     ##         ax.set_title('ORBIT %s'%(ime_mw[i]))
1443     ##         ax.grid(True)
1444     #####         ax.set_xlim(0,20)
1445     #####         ax.set_ylim(-2.5,2.5)
1446     ##         plt.show()
1447     #####         plt.savefig('ORBIT %s'%(ime_mw[i]))
1448     #####         plt.savefig('fig.eps',format='eps',dpi=600)
1449     ##         plt.savefig('fig.jpg',format='jpg',dpi=600)
1450     #####         plt.savefig('ORBIT.eps%s'%(ime_mw[i]),format='eps',dpi
1451         =600)
1451     ##         plt.close()
1452
1453     # naci Rp (=najmanje R) i Ra (=najvece R) za pojedinačnu zvezdu
1454     # smestam ih u nizove da bih onda mogao da nadjem
1455     # najmanje od svih Rp i najvece od svih Ra jer je to sirina
1456     prstena
1456     val, idx = min((val, idx) for (idx, val) in enumerate(rl))

```

```

1457     rpl_sim.append(val)
1458     idx_rpl_sim.append(idx)
1459     val, idx = max((val, idx) for (idx, val) in enumerate(r1))
1460     ral_sim.append(val)
1461     idx_ral_sim.append(idx)
1462     sirina_sim.append(ral_sim[i]-rpl_sim[i])
1463     rml_sim.append((ral_sim[i]+rpl_sim[i])/2)
1464     el_sim.append(((ral_sim[i]/rpl_sim[i])-1)/((ral_sim[i]/rpl_sim[
i])+1))
1465     print(ime_mw[i], rpl_sim[i], ral_sim[i], el_sim[i], file=rez)
1466
1467     del xlR[:]
1468     del ylR[:]
1469     del zlR[:]
1470     del vxlR[:]
1471     del vylR[:]
1472     del vzlR[:]
1473     del timelR[:]
1474     del EtlR[:]
1475     del r1[:]
1476
1477 # s ovim se odredjuje sirina prstena
1478     val, idx = min((val, idx) for (idx, val) in enumerate(rpl_sim))
1479     min_rp_sim=val
1480     idx_min_rp_sim=idx
1481     val, idx = max((val, idx) for (idx, val) in enumerate(ral_sim))
1482     max_ra_sim=val
1483     idx_max_ra_sim=idx
1484 # stampanje sirine prstena u fajl (na kraju istog)
1485     print('_____', file=rez)
1486     print("min_rp=", min_rp_sim, ime_mw[idx_min_rp_sim],
1487           "| max_ra=", max_ra_sim, ime_mw[idx_max_ra_sim], file=rez)
1488 # isto samo print na stdout
1489     print("min_rp=", min_rp_sim, ime_mw[idx_min_rp_sim],
1490           "| max_ra=", max_ra_sim, ime_mw[idx_max_ra_sim])

```

```

1491
1492     rez.close()
1493     print ("———— kraj F6 ————")
1494     ##———— kraj funkcije integrator ———
1495
1496
1497     ##———— pocetak funkcije Meq F7————
1498     def Meq():
1499         MeqMW=list()
1500         MeqBl=list()
1501         MeqDl=list()
1502         MeqHl=list()
1503         UcMW=list()
1504         UcBl=list()
1505         UcDl=list()
1506         UcHl=list()
1507         R_l=list()
1508         for R in sp.arange(0.1,17,0.1):
1509             pi=3.14159265359
1510             G=4502
1511             C=A/(1+(mat.pow((Rl/Rc),2)))
1512
1513             t1=(R*R)+((ad+bd)**2)
1514             t2=mat.pow(t1,1.5)
1515             MeqD=(md*R*R*R)/t2
1516             UcD2=(G*md*R*R)/t2
1517             UcD=mat.sqrt((G*md*R*R)/t2)
1518
1519             t3=(R*R)+((ab+bb)**2)
1520             t4=mat.pow(t3,1.5)
1521             MeqB=(mb*R*R*R)/t4
1522             UcB2=(G*mb*R*R)/t4
1523             UcB=mat.sqrt((G*mb*R*R)/t4)
1524
1525             t5=4*pi*A*Rc*Rc*R

```

```

1526     t6=4*pi*A*Rc*Rc*Rc*mat.atan(R/Rc)
1527     t7=(4*pi*C*R*R*R)/3
1528     MeqH=t5-t6-t7
1529     UcH2=(G/R)*(t5-t6-t7)
1530     UcH=mat.sqrt((G/R)*(t5-t6-t7))
1531
1532     UcMW=mat.sqrt(UcB2+UcD2+UcH2)
1533
1534     MeqMWl.append(MeqD+MeqB+MeqH)
1535     MeqBl.append(MeqB)
1536     MeqDl.append(MeqD)
1537     MeqHl.append(MeqH)
1538     UcMWl.append(UcMW)
1539     UcBl.append(UcB)
1540     UcDl.append(UcD)
1541     UcHl.append(UcH)
1542     R_l.append(R)
1543
1544     fig1, ax1 = plt.subplots(4, sharex=True)
1545     ax1[0].plot(R_l, MeqBl, c='k', ls='-', lw='1', label='M_{eq}')
1546     ax1[0].set_ylabel(r'$M_{eq} \ B$')
1547     ax1[1].plot(R_l, MeqDl, c='k', ls='-', lw='1', label='M_{eq}')
1548     ax1[1].set_ylabel(r'$M_{eq} \ D$')
1549     ax1[2].plot(R_l, MeqHl, c='k', ls='-', lw='1', label='M_{eq}')
1550     ax1[2].set_ylabel(r'$M_{eq} \ H$')
1551     ax1[3].plot(R_l, MeqMWl, c='k', ls='-', lw='1', label='M_{eq}')
1552     ax1[3].set_ylabel(r'$M_{eq} \ MW$')
1553     ax1[3].set_xlabel(r'$R$ [kpc]')
1554
1555     fig, ax = plt.subplots(4, sharex=True)
1556     ax[0].set_title('Kriva rotacije')
1557     ax[0].plot(R_l, UcBl, c='k', ls='-', lw=2, label='U_{cB}')
1558     ax[0].set_ylabel(r'$u_{cb}$ [km s$^{-1}$]')
1559     ax[1].plot(R_l, UcDl, c='k', ls='-', lw=2, label='U_{cD}')
1560     ax[1].set_ylabel(r'$u_{cd}$ [km s$^{-1}$]')

```

```

1561 ax[2].plot(R_1,UcH1, c='k', ls='-', lw=2, label='U_ch')
1562 ax[2].set_ylabel(r'$u_{ch}$ [km s$^{-1}$]')
1563 ax[3].plot(R_1,UcMW1, c='k', ls='-', lw=2, label='U_cMW')
1564 ax[3].set_ylabel(r'$u_{c}$ [km s$^{-1}$]')
1565 ax[3].set_xlabel(r'$R$ [kpc]')
1566 plt.savefig('modell.eps', format='eps', dpi=600)
1567
1568 ## plt.show()
1569 print ("———— kraj F7 —————")
1570 ##———— kraj funkcije Meq —————
1571
1572 ##———— pocetak funkcije Toomre diagram F8 —
1573 ##———— potrebne su funkcije F1–F4
1574 def Toomre():
1575
1576     UplusW=list()
1577     Vs=list()
1578     PhiplusRsphdot=list()
1579     for i in range(len(U_mw)):
1580         UplusW.append(mat.sqrt((U_mw[i]**2)+(W_mw[i]**2)))
1581         PhiplusRsphdot.append(mat.sqrt((Phi[i]**2)+(Rsph_dot[i]**2)))
1582         Vs.append(V_mw[i]-Y0)
1583
1584 #crtam grafik za (U,V,W)_mw s tim sto krugove centriram u 220
1585 #to je kao sto sam brzine racunao za V_mw-Y0
1586 #zato prebrojavanje u F4 vrsim za Vs jer je to Vmw-Y0
1587     fig, ax = plt.subplots()
1588     ax.scatter(Vs,UplusW,marker='+',c='b')
1589     ax.set_xlabel(r'$V_{\mathrm{LSR}}$ [km s$^{-1}$]')
1590     ax.set_ylabel(r'$\sqrt{U_{\mathrm{LSR}}^2 + W_{\mathrm{LSR}}^2}$ [
1591 km s$^{-1}$]')
1591     ax.set_aspect('equal')
1592     ax.set_xlim(-500,150)
1593     ax.set_ylim(0,400)
1594     circle1=plt.Circle((0,0),50,color='r',fill=False)

```

```

1595     circle2=plt.Circle((0,0),80,color='r',fill=False)
1596     circle3=plt.Circle((0,0),120,color='r',fill=False)
1597     ##     circle4=plt.Circle((0,0),300,color='r',fill=False)
1598     ##     circle5=plt.Circle((220,0),80,color='y',alpha=0.3)
1599     fig.gca().add_artist(circle1)
1600     fig.gca().add_artist(circle2)
1601     fig.gca().add_artist(circle3)
1602     ##     fig.gca().add_artist(circle4)
1603     ##     fig.gca().add_artist(circle5)
1604     ##     plt.savefig('fig1_toomre3.eps',format='eps',dpi=600)
1605     ##     plt.savefig('fig1_toomre3.jpg',format='jpg',dpi=600)
1606     plt.show()
1607
1608
1609     ### crtam grafike za (Phi,Theta,W) s tim sto krugove centriram u 220
1610     ### to je kao sto sam brzine racuna za Theta - Theta_lsr=Y0
1611     ### zato gore kad racunam brojac za v_pec imam Theta-Y0
1612     fig,ax=plt.subplots()
1613     ax.scatter(Theta,PhiplusRsphdot,marker='+',c='b')
1614     ax.set_xlabel(r'$\Theta$ [km$ $s^{-1}]$')
1615     ax.set_ylabel(r'$v_{\perp}=\sqrt{\Phi^2+\dot{\mathcal{R}}^2}$ [km$ $s^{-1}]$')
1616     ax.set_aspect('equal')
1617     ax.set_xlim(-300,300)
1618     ax.set_ylim(0,350)
1619     circle1=plt.Circle((220,0),50,color='r',fill=False)
1620     circle2=plt.Circle((220,0),60,color='r',fill=False)
1621     circle3=plt.Circle((220,0),70,color='r',fill=False)
1622     circle4=plt.Circle((220,0),80,color='r',fill=False)
1623     ##     circle5=plt.Circle((220,0),61,color='y',alpha=0.3)
1624     fig.gca().add_artist(circle1)
1625     fig.gca().add_artist(circle2)
1626     fig.gca().add_artist(circle3)
1627     fig.gca().add_artist(circle4)
1628     ##     fig.gca().add_artist(circle5)

```



```
1629     plt.show()
1630
1631     print ("———— kraj F8 ————")
1632     ##———— kraj funkcije Toomre ————
1633
1634
1635 def read_and_plot():
1636     """ F1 – cita SVE ulazne fajlove koji je naporavljen u programu
1637 01_big_cat_read_choose_astrof_print.py
1638 taj prethodni program je ucitao ceo katalog pa onda iz njega izabrao
1639 zvezde
1640 koje imaju prostornu brzinu manju od 80 km/s i udaljenost manju od 200
1641 pc
1642 zatim je izracunao X,Y,Z(mw) kao i U,V,W(mw) i upisao u fajlove
1643 Sada treba procitati fajl
1644 F4_selected_stars_mod_mw
1645 i nastaviti rad sa tim podacima"""
1646
1647 # globalne (promenljive i liste) koje cu koristiti u programu kasnije
1648 global ime_mw, xl_mw, yl_mw, zl_mw, U_mw, V_mw, W_mw, \
1649         rp_cat, ra_cat, ecc_cat, zmax_cat, dist, \
1650         rp_for, ra_for, ecc_for, faza_for
1651
1652 ime_mw= list()
1653 xl_mw = list()
1654 yl_mw = list()
1655 zl_mw = list()
1656 U_mw = list()
1657 V_mw = list()
1658 W_mw = list()
1659
1660 rp_cat = list()
1661 ra_cat = list()
1662 ecc_cat = list()
1663 zmax_cat = list()
```

```
1662     dist = list ()
1663
1664     rp_for = list ()
1665     ra_for = list ()
1666     ecc_for = list ()
1667     faza_for = list ()
1668
1669     novi_brojac=list ()
1670     novi_fazal=list ()
1671     novi_err_ul=list ()
1672     novi_err_dl=list ()
1673
1674     indeksi_e_smbin=sp.arange(0.0, 1.0, 0.005)
1675     indeksi_e=sp.arange(0.0, 1.0, 0.01) # zbog F4 ulaza mora 0.01
1676     ##     beta_l=sp.arange(0.0, 3.1, 0.1)
1677     beta_l=sp.arange(0.0, 3.1, 1.0) # ovaj red je samo za testiranje
1678
1679
1680     ### citanje fajla F4 i smestanje elemenata fajla u liste
1681     F4ulaz = open('F4_selected_stars_mod_mw', 'r')
1682     redoviF4 = F4ulaz.read().split("\n")
1683     br_r_F4 = len(redoviF4)
1684     pom_F4 = redoviF4[0].split()
1685     br_k_F4 = len(pom_F4)
1686     reciF4 = [[0 for i in range(br_k_F4)] for j in range(br_r_F4)]
1687     for i in range(1,br_r_F4-1): # brojac pocinje od prvog reda jer
1688         # ima zaglavlje
1689         reciF4[i]=redoviF4[i].split() # smestanje svake reci iz linije
1690         # u listu
1691         ime_mw.append(str(reciF4[i][0]))
1692         xl_mw.append(float(reciF4[i][1]))
1693         yl_mw.append(float(reciF4[i][2]))
1694         zl_mw.append(float(reciF4[i][3]))
1695         U_mw.append(float(reciF4[i][4]))
1696         V_mw.append(float(reciF4[i][5]))
```

```
1695     W_nw.append(float(reciF4[i][6]))
1696     rp_cat.append(float(reciF4[i][7]))
1697     ra_cat.append(float(reciF4[i][8]))
1698     ecc_cat.append(float(reciF4[i][9]))
1699     zmax_cat.append(float(reciF4[i][10]))
1700     dist.append(float(reciF4[i][11]))
1701     F4ulaz.close()
1702
1703
1704 ##—unos imena fajla sa podacima i otvaranje tog fajla
1705     for j in range(len(beta_1)):
1706         beta=beta_1[j]
1707         F5_fajl='F5_selected_stars_mod_astrof_beta_'+str(beta)
1708         F5ulaz = open(F5_fajl, 'r')
1709         ##—citanje svih ostalih F5 ulaznih fajlova
1710         redoviF5 = F5ulaz.read().split("\n")
1711         br_r_F5 = len(redoviF5)
1712         pom_F5 = redoviF5[0].split()
1713         br_k_F5 = len(pom_F5)
1714         # definisanje listi
1715         reciF5 = [[0 for i in range(br_k_F5)] for j in range(br_r_F5)]
1716         ##—prolazak kroz sve redove tj kroz sve elemente liste redovi
1717         for i in range(1,br_r_F5-1): # brojac pocinje od prvog reda
1718             jer ima zaglavlje
1719                 reciF5[i]=redoviF5[i].split() # smestanje svake reci iz
1720                 linije u listu
1721                 rp_for.append(float(reciF5[i][5]))
1722                 ra_for.append(float(reciF5[i][6]))
1723                 ecc_for.append(float(reciF5[i][8]))
1724                 faza_for.append(float(reciF5[i][9]))
1725         F5ulaz.close()
1726
1727         print(beta)
1728 ### FIG 1
```

```

1728 #####_plotuje histograme za ekcentricnosti za sve beta
1729 #####
1730 ##### samo e za razne beta bez overplota sa sitnijim binovima
1731 ##### plt.hist(ecc_for, bins=indeksi_e_smbin, color='b')
1732
1733 ##### #_overplotuje histogram za ekcentricnosti za vrednosti iz
kataloga_____
1734 plt.hist(ecc_for, bins=indeksi_e, color='b')
1735 plt.hist(ecc_cat, bins=indeksi_e, color='y', alpha=0.5)
1736
1737 plt.title('Eccentricity histogram for GCSIII \n \
1738 beta=%.1f Xs=%.1f Ys=%.1f Zs=%.1f Y0=%i' % (beta, Xs, Ys, Zs, Y0))
1739 plt.axis([0,0.4,0,1700])
1740 plt.xlabel('e')
1741 plt.ylabel('count')
1742 #####plt.show()
1743 plt.savefig('FIG-%.1f-%.1f-%.1f-%.1f-%.i.png'%(beta, Xs, Ys, Zs, Y0
))
1744 plt.close()
1745
1746
1747 #####_FIG 5_____
1748 #####
1749 ##### plotovanje po trakama u zavisnosti od e
1750 sirina=0.02
1751 for g in sp.arange(0, 0.6, sirina):
1752     lim_e_d=g
1753     lim_e_u=g+sirina
1754     k=0
1755     for h in range(len(ecc_for)):
1756         err_ul = 1 + ecc_for[h] - faza_for[h]
1757         err_dl = faza_for[h] - 1 + ecc_for[h]
1758         if ecc_for[h]>=lim_e_d and ecc_for[h]<=lim_e_u:
1759             novi_brojac.append(k)
1760             novi_fazal.append(faza_for[h])

```

```

1761         novi_err_ul.append(err_ul)
1762         novi_err_dl.append(err_dl)
1763         k=k+1
1764         plt.errorbar(novi_brojac, novi_fazal,
1765                     yerr=[novi_err_dl, novi_err_ul], fmt='o')
1766         plt.title('Phase for e in range [%.2f,%.2f] \n \
1767 beta=%.1f Xs=%.1f Ys=%.1f Zs=%.1f Y0=%i' % (lim_e_d,lim_e_u,beta,Xs,Ys,
        Zs,Y0))
1768         plt.savefig('FIG5-beta-%.1f-lim-%.2f-%.2f.png' %
1769                     (beta,lim_e_d,lim_e_u))
1770         plt.close()
1771         del novi_err_dl[:]
1772         del novi_err_ul[:]
1773         del novi_fazal[:]
1774         del novi_brojac[:]
1775
1776         del rp_for [:]
1777         del ra_for [:]
1778         del ecc_for [:]
1779         del faza_for [:]
1780
1781 ##### PRIPREMA za KS test
1782         N = len(el_for)
1783         H1,X1 = np.histogram(el_for, bins = indeksi_e, normed = True )
1784         dx = X1[1] - X1[0]
1785         F1 = np.cumsum(H1)*dx
1786         H2,X2 = np.histogram(el_sim, bins = indeksi_e, normed = True )
1787         dx = X2[1] - X2[0]
1788         F2 = np.cumsum(H2)*dx
1789         plt.xlabel("ecc")
1790         plt.ylabel("CDF")
1791         plt.plot(X1[1:], F1, c='b')
1792         plt.plot(X2[1:], F2, c='y')
1793         plt.show()
1794

```

```

1795 ###—kolmogorov smirnov test za ecc_for vs ecc_cat
1796     test=stats.ks_2samp(F1, F2)
1797     print(test)
1798
1799     print ("————— kraj funkcije plot —————")
1800
1801 ###—————
1802 ###*****
1803 ###***** GLAVNI PROGRAM *****
1804 ###*****
1805 import sys
1806 import numpy as np
1807 import scipy as sp
1808 import matplotlib.pyplot as plt
1809 import matplotlib.mlab as mlab
1810 from scipy.stats import norm
1811 import math as mat
1812 from newt_raps_m import newton
1813
1814 ###*****
1815 # spisak globalnih promenljivih korisnih u programu
1816 # br_r, ime, al_dec, de_dec,l_dec,b_dec,mi_al_cos_de
1817 # mi_de, par, v_r, Xs, Ys, Zs, Y0, U_mw, V_mw, W_mw, ime_mw
1818 ###*****
1819
1820 # ovo su globalne i njima dodeljujem vrednost u glavnom programu
1821 ###Xs=10.0
1822 ###Ys=5.5
1823 ###Zs=7.5
1824 Xs=10.0
1825 Ys=8.0
1826 Zs=7.0
1827 ###Xs=9.9
1828 ###Ys=5.2
1829 ###Zs=7.2

```

```

1830 Y0=220
1831
1832 opseg=80
1833 ##opseg_pec=80
1834 ##Rsun=-8.0
1835 Rsun=-8.5
1836 Zsun=0.015
1837
1838 #print (citanje_kataloga.__doc__)
1839 citanje_kataloga_GCSIII()
1840 T = matrica_T()
1841 eq_gal_coord(T)
1842 gal_space_vel()
1843 ##astrofizika()
1844 ##integrator()
1845 ##Meq()
1846 ##Toomre()
1847 read_and_plot()
1848
1849 print ("———— kraj main-a | pocinju plotovi ————")
1850
1851 ##indeksi_rp=sp.arange(4.0, 8.5, 0.25)
1852 ##indeksi_ra=sp.arange(8.5, 15.0, 0.25)
1853 ##indeksi_rm=sp.arange(6.0, 12.0, 0.25)
1854 indeksi_e=sp.arange(0.0, 0.35, 0.025)
1855 #####
1856 ##indeksi_rp=20
1857 ##indeksi_ra=20
1858 ##indeksi_rm=20
1859 ##### !!!
1860 ##### r_pl2 i r_al2 i r_ml_for su liste koje se pojavljuju samo u beta
      = 1
1861 ##plt.hist(r_pl2, bins=indeksi_rp, histtype='stepfilled', color='b',
1862 ##         label='R_p calculated')
```

```
1863 ##plt.hist(rpl_sim, bins=indeksi_rp, histtype='stepfilled', color='y',  
      alpha=0.8,  
1864 ##          label='R_p from simulations')  
1865 ##plt.title("R_p Histogram")  
1866 ##plt.xlabel("Value [kpc]")  
1867 ##plt.xlim(4.0,8.5)  
1868 ##plt.ylabel("Frequency")  
1869 ##plt.legend(loc='upper left', fancybox=True, shadow=True)  
1870 ##plt.show()  
1871  
1872 ##plt.hist(r_al2, bins=indeksi_ra, histtype='stepfilled', color='b',  
1873 ##          label='R_a calculated')  
1874 ##plt.hist(ral_sim, bins=indeksi_ra, histtype='stepfilled', color='y',  
      alpha=0.8,  
1875 ##          label='R_a from simulations')  
1876 ##plt.title("R_a Histogram")  
1877 ##plt.xlabel("Value [kpc]")  
1878 ##plt.xlim(8.5,15.0)  
1879 ##plt.ylabel("Frequency")  
1880 ##plt.legend(loc='upper right', fancybox=True, shadow=True)  
1881 ##plt.show()  
1882  
1883 ##plt.hist(r_ml_for, bins=indeksi_rm, histtype='stepfilled', color='b',  
1884 ##          label='R_m calculated')  
1885 ##plt.hist(rml_sim, bins=indeksi_rm, histtype='stepfilled', color='y',  
1886 ##          alpha=0.5, label='R_m from simulations')  
1887 ##plt.title("R_m")  
1888 ##plt.xlabel("Value [kpc]")  
1889 ##plt.ylabel("Frequency")  
1890 ##plt.legend(loc='upper right', fancybox=True, shadow=True)  
1891 ##plt.show()  
1892  
1893 indeksi_sirina=sp.arange(6.0, 12.0, 0.25)  
1894 plt.hist(sirina_for, bins=indeksi_sirina, histtype='stepfilled', color=  
      'b',
```



```
1895         label='Ring width calculated')
1896 plt.hist(sirina_sim, bins=indeksi_sirina, histtype='stepfilled', color=
1897         'y',
1898         alpha=0.5, label='Ring width from simulations')
1899 plt.title("Ring width")
1900 plt.xlabel("Value [kpc]")
1901 plt.ylabel("Frequency")
1902 plt.legend(loc='upper right', fancybox=True, shadow=True)
1903
1904 plt.hist(el_for, bins=indeksi_e, histtype='stepfilled', color='b',
1905         label='e calculated')
1906 plt.hist(el_sim, bins=indeksi_e, histtype='stepfilled', color='y',
1907         alpha=0.5, label='e from simulations')
1908 plt.title("eccentricity")
1909 plt.xlabel("Value")
1910 plt.ylabel("Count")
1911 plt.legend(loc='upper right', fancybox=True, shadow=True)
1912 plt.show()
```

Биографија аутора

Милан Стојановић (*Ивањица, 15. март 1984.*) рођен је 1984. године у Ивањици. Гимназију је похађао у родном месту где је и матурирао 2002. године. Исте године уписао се на Математички факултет у Београду, смер професор математике и информатике. Одмах по завршетку редовних студија 2009. године почео је да ради као професор математике у основној школи „Илија Бирчанин” у Земун Пољу и уписао се на докторске студије на Катедри за астрономију Математичког факултета Универзитета у Београду као студент буџета Републике Србије. Запослен је на Астрономској опсерваторији у Београду, на пројекту 176011 где ради од фебруара 2011. године. До сада је објавио четири рада у часописима са *SCI* листе, од тога два рада у врхунском међународном часопису категорије М21 као и још 11 научних и стручних радова у осталим часописима. Учествовао је са саопштењима на три међународне и пет националних конференција. Учествовао је као ментор на Студентској Видојевачкој Астрономској Пракси (СВАП) од 2012-2016 године. Тему докторске дисертације „Испитивање елемената галактоцентричних орбита звезда танког диска из Сунчеве околине варијацијом облика потенцијала Галаксије”, Наставно-научно веће Математичког факултета је прихватило на седници од 23.01.2015. године. Веће научних области природно-математичких наука Универзитета у Београду је дало сагласност на предлог теме на седници која је одржана 09.02.2015. године.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Милан Стојановић

број индекса 2019/2009

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Испитивање елемената галактоцентричних орбита звезда танког диска из Сунчеве околине варијацијом облика потенцијала Галаксије

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 28.07.2017. године



Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Милан Стојановић

Број индекса 2019/2009

Студијски програм Астрономија и астрофизика

Испитивање елемената галактоцентричних орбита звезда танког

Наслов рада диска из Сунчеве околине варијацијом облика потенцијала Галаксије

Ментор Слободан Нинковић

Потписани/а Милан Стојановић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 28.07.2017. године



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Испитивање елемената галактоцентричних орбита звезда танког диска из Сунчеве околине варијацијом облика потенцијала Галаксије

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 28.07.2017. године

