Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Bojan M. Vučković

Nove kombinatorne konstrukcije u vezi sa problemima iz hromatske teorije grafova, ekstremalne teorije skupova i teorije Bulovih matrica

doktorska disertacija

Beograd, 2017.

University of Belgrade
Faculty of Mathematics

Bojan M. Vučković

New Combinatorial Constructions related to Problems from the Chromatic Graph Theory, Extremal Set Theory and Boolean Matrix Theory

PhD Dissertation

Belgrade, 2017.

Mentor:

dr Miodrag Živković, redovni profesor,
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Predrag Janičić, redovni profesor,
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Filip Marić, vanredni profesor,
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Slobodan Simić, Naučni savetnik u MI SANU,
redovni profesor, Državni Univerzitet u Novom Pazaru

Datum odbrane: ____________________

Naslov disertacije: Nove kombinatorne konstrukcije u vezi sa problemima iz hromatske teorije grafova, ekstremalne teorije skupova i teorije Bulovih matrica

Rezime: Disertacija prikazuje originalne rezultate iz narednih podoblasti diskretne matematike: hromatske teorije grafova, ekstremalne teorije skupova i teorije Bulovih matrica.

Iz hromatske teorije grafova razmatraju se bojenja grafova koja uključuju bojenje grana ili totalno bojenje, sa uslovom da susedni čvorovi grafa poseduju različite parametre indukovane datim bojenjem (multi-skup, skup ili suma).

Multi-skup sused-razlikujuće bojenje grana grafa je dodela boja granama grafa tako da se za svaku granu uv grafa razlikuju multi-skup boja grana incidentnih sa čvorom u i multi-skup boja grana incidentnih sa čvorom v. Do sada najbolji rezultat po pitanju ovakvog bojenja je da je za svaki graf bez izolovanih grana moguće dodeliti granama boje iz skupa od četiri elementa, tako da prethodno navedeno svojstvo bude zadovoljeno. Doprinos autora je dokaz da je ovo moguće postići sa svega tri boje, što je u opštem slučaju i optimalan broj boja.

Konstruisan je graf, za koji je zatim dokazano da je potreban različit broj boja da bi se izvršilo multi-skup sused-razlikujuće i sused-razlikujuće bojenje po sumi. Koliko je nama poznato, ovo je prvi graf sa datim svojstvom.

Izloženo je više rezultata po pitanju proširenog sused-razlikujućeg bojenja po sumama. Doprinos autora je dokaz da je za proizvoljan graf moguće izvesti totalno bojenje elementima skupa $\{1, 2, 3\}$, tako da za svaka dva susedna čvora, vrednost sume boja susednih čvorova i incidentnih grana bude različita. Takođe, za određene klase grafova je pokazano da postoji ovakvo bojenje korišćenjem vrednosti iz skupa $\{1, 2\}$.

Sused-razlikujuće bojenje grana grafa zahteva da susednim granama grafa budu dodeljene različite boje, pri čemu se razlikuju skupovi boja grana incidentnih sa čvorovima u i v, za svaku granu uv grafa. Prikazan je postupak dodele boja granama proizvoljnom grafu bez izolovanih grana, pri čemu se koristi manji broj boja nego u do sada poznatim rezultatima.

Kod susednog čvor-razlikujućeg totalnog bojenja grafa G neophodno je da svaka dva susedna i incidentna elementa iz skupa $V(G) \cup E(G)$ imaju različitu boju, kao i da za svaku granu uv grafa G, skup boja dodeljenih granama incidentnim sa u zajedno sa bojom čvora u, bude različit od takvog skupa boja za čvor v. Doprinos autora je popravljena gornja granica minimalnog broja boja za proizvoljni graf G, u odnosu na maksimalan stepen grafa G.

Iz ekstremalne teorije skupova razmatrana je Franklova hipoteza koja tvrdi da za svaku familiju skupova zatvorenu za uniju, postoji element koji je sadržan u barem polovini skupova te familije.

Dokazano je da je Franklova hipoteza zadovoljena za svaku familiju sastavljenu od 12 elemenata, dok je od ranije poznato da ovo važi za familije sastavljene od 11 ili manje elemenata. Sam dokaz je zasnovan na efikasnom algoritmu iscrpljivanja mogućnosti, pri čemu se koriste rezultati o potfamilijama skupova koje su dobijene u više koraka, a koje eventualni protiv-primer familije ne sme da sadrži.

Familija skupova $\mathcal{G}$ je FC-familija ukoliko za svaku familiju $\mathcal{F}$ koja je sadrži postoji element iz $\bigcup \mathcal{G}$ koji se pojavljuje u barem polovini skupova familije $\mathcal{F}$. *Non*FC-familija je svaka familija koja nije FC. Doprinos autora je potpuna podela svih familija sastavljenih od 6 ili manje elemenata, na FC i *Non*FC-familije.

Iz teorije Bulovih matrica dati su rezultati po pitanju kardinalnosti prostora vrsta Bulovih matrica. Bulove matrice su matrice kod kojih su sve komponente iz skupa $\{0, 1\}$, dok je prostor vrsta matrice skup svih vektora koji se mogu dobiti disjunkcijom vrsta te matrice.

Dobijen je skup svih vrednosti a iz intervala $[2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^{n-2}]$ za koje postoji matrica dimenzije $n \times n$ sa kardinalnošću prostora vrsta jednakom a.

Neka je a_n najmanja pozitivna celobrojna vrednost takva da ne postoji matrica dimenzije $n \times n$ sa kardinalnošću prostora vrsta jednakom a_n. Dobijena je veća donja granica za vrednost a_n, u odnosu na do sada poznate rezultate.

Dokazi glavnih rezultata u disertaciji su konstruktivni, pri čemu neki od njih zahtevaju pomoć računara u ispitivanju svih mogućnosti. Za ostale dokaze ovo nije neophodno, iako je moguće implementirati algoritme za dobijanje bojenja grafova, odnosno za dobijanje matrica, sa traženim svojstvima.

Ključne reči: bojenje grafova, Franklova hipoteza, kardinalnost prostora vrsta Bulovih matrica
Naučna oblast: Računarstvo
Uža naučna oblast: Diskretna matematika

Dissertation title: New combinatorial constructions related to problems from the chromatic graph theory, extremal set theory and Boolean matrix theory

Abstract: We present original results from the following fields of discrete mathematics: chromatic graph theory, extremal set theory and Boolean matrix theory.

From the chromatic graph theory we investigate edge and total colorings satisfying the condition that neighboring vertices of a graph possess different values of multi-set, set or sum, induced by the giving coloring.

Multi-set neighbor-distinguishing edge coloring of a graph is an assignment of colors to edges such that, for every edge uv of a graph, multi-set of the edges incident with the vertex u differs from the multi-set of the edges incident with the vertex v. The previous best result concerning the minimum number of colors required for such a coloring of an arbitrary graph states that four colors are sufficient. The author's contribution is a proof that such a coloring is always possible with only three colors, which is in general case the optimal number of colors.

We construct a graph for which we subsequently prove that a different number of colors is required to obtain a multi-set neighbor-distinguishing coloring and neighbor-distinguishing coloring by sum. As far as we know, this is the first example of such a graph.

A few results concerning the neighbor expended sum distinguishing coloring are given. The main contribution is a proof that for an arbitrary graph there exists a total coloring from the set $\{1, 2, 3\}$, such that every two adjacent vertices have different sums of its adjacent vertices and incident edges. Also, for certain classes of graphs is proved that there exists such a coloring using only the colors from the set $\{1, 2\}$.

Neighbor-distinguishing edge coloring of a graph G requires that every two adjacent edges receive different colors, while the sets of the edges incident with the vertices u and v differ for every edge uv of G. The author presents a procedure of edge coloring for an arbitrary graph without isolated edges, where we a smaller number of colors is used compared to all known results.

For the adjacent vertex distinguishing total coloring of a graph G the condition is that every two adjacent and incident elements of $V(G) \cup E(G)$ receive different colors, while for every edge uv of G the set composed from the colors assigned to the edges incident with u together with the color of u, differs from such a set for v. The author improves the upper bound of the minimum number of colors needed for such a coloring, relative to the

maximal degree of a graph.

Frankl's conjecture from the extremal set theory states that for every family closed under union there exists an element contained in at least half of the sets of the family.

We give a proof that Frankl's conjecture holds for every family contained from 12 elements, while it is known that this is true for families contained from 11 or less elements. Our proof is based on the efficient algorithm that exhausts all the possibilities, while using the results for subfamilies that eventual counter-example cannot contain, which we obtained in a number of consecutive steps.

Family of sets $\mathcal{G}$ is an FC-family if for every family $\mathcal{F}$ containing $\mathcal{G}$ there exists an element from $\bigcup \mathcal{G}$ that appears in at least half of the sets of $\mathcal{F}$. *Non*FC-family is every family that is not FC. The author's contribution is the complete classification of all families consisting of 6 or less elements into FC and *Non*FC-families.

From the Boolean matrices theory we present our results concerning the row space cardinality. Boolean matrices are the matrices whose all components are from the set $\{0, 1\}$, while the row space of a Boolean matrix is the set of vectors that can be obtained by disjunction from the rows of a matrix.

We present the set consisted of all values a from the interval $[2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^{n-2}]$ such that there exists a matrix of dimension $n \times n$ having the row space cardinality equal to a.

For the least positive integer a_n for which there exists no matrix of dimension $n \times n$ having the row space cardinality equal to a_n, the author gives a lower bound that is an improvement over the previously known results.

All proofs for the main results in the dissertation are constructive. Proofs of some of them require the use of computers where there is a calculation of a great number of possibilities. For other proofs this was not necessity, though algorithms following the steps of the proofs can be implemented to obtain a graph coloring or a matrix with the desired properties.

Key words: graph colorings, Frankl's conjecture, row space cardinality of Boolean matrices
Scientific field: Computer science
Scientific sub-field: Discrete mathematics

Zahvalnica

Želeo bih ovom prilikom da se zahvalim mentoru profesoru dr Miodragu Živkoviću na pomoći i usmeravanju u mom istraživačkom radu tokom celog toka izrade ove disertacije. Zahvalan sam članovima komisije, profesoru dr Predragu Janičiću, profesoru dr Filipu Mariću i profesoru dr Slobodanu Simiću na korisnim sugestijama koje su doprinele unapređenju ovog rukopisa.

Veliku zahvalnost dugujem roditeljima, majci Vesni i pokojnom ocu Miomiru, koji su me uvek podsticali kada je u pitanju sticanje novih znanja. Posebnu zahvalnost dugujem supruzi Ljiljani na velikom razumevanju i podršci, čime mi je umnogome olakšala rad na ovoj tezi.

Sadržaj

Pregled tabela

Glava 0

Uvod

Disertacija je sastavljena od tri dela u kojima su obrađeni problemi iz hromatske teorije grafova, ekstremalne teorije skupova i teorije Bulovih matrica. Problemi iz istih oblasti su grupisani po glavama, gde su prikazani u zasebnim poglavljima.

Glava 1, pored Poglavlja 1.1 u kome je dat prikaz osnovnih pojmova iz teorije grafova kao i definicije bojenja čvorova i bojenja grana, sadrži i pet poglavlja u kojima se razmatraju razne vrste bojenja grafova. U Poglavlju 1.2 data je osnovna definicija multi-skup razlikujućeg bojenja grana, sa do sada poznatim rezultatima, nakon čega je iznet prikaz rezultata autora po pitanju ove vrste bojenja. U Poglavlju 1.3 prikazan je graf sa različitim vrednostima multi-skup sused-razlikujućeg indeksa i sused-razlikujućeg indeksa po sumama. U Poglavlju 1.4 izložen je pojam proširenog sused-razlikujućeg indeksa po sumama, i zatim su data autorova unapređenja rezultata po pitanju ove vrste bojenja. U Poglavlju 1.5 se bavimo sused-razlikujućem hromatskim indeksom grafa. Nakog uvodnog dela, dat je dokaz za popravljenu gornju granicu ovog indeksa u odnosu na maksimalni stepen grafa. U Poglavlju 1.6 obrađeno je susedno čvor-razlikujuće bojenje grafa, gde su date dve popravljene gornje granice po pitanju minimalnog broja boja potrebnog da bi se izvelo ovakvo bojenje za proizvoljan graf.

Glava 2 se bavi Franklovom hipotezom iz ekstremalne teorije skupova. Nakon Poglavlja 2.1 u kome su izneti osnovni pojmovi i poznati rezultati, u Poglavlju 2.2 dat je dokaz da je Franklova hipoteza zadovoljena za svaku familiju skupova zatvorenu za uniju sastavljenu od 12 ili manje elemenata. U Poglavlju 2.3 data je potpuna klasifikacija na FC i *Non*FC-familije, familija sastavljenih od 6 ili manje elemenata.

U Glavi 3 je dat prikaz rezultata po pitanju kardinalnosti prostora vrsta Bulovih matrica. U Poglavlju 3.1 je dat opis osnovnih pojmova iz teorije Bulovih matrica. Nakon toga, u Poglavlju 3.2 je prikazan podskup intervala $[2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^n]$ za koji je dokazano da pokriva sve vrednosti kardinalnosti prostora vrsta matrica dimenzija $n \times n$. U Poglavlju 3.3 je data popravljena donja granica za minimalnu celobrojnu vrednost a_n u odnosu na n, za koju ne postoji Bulova matrica dimenzije $n \times n$ sa datom kardinalnošću prostora vrsta.

Dokazi svih glavnih rezultata iz hromatske teorije grafova, kao i donje granice za a_n kod kardinalnosti prostora vrsta Bulovih matrica, su konstruktivni i zasnivaju se na algoritmima pomoću kojih se efektivno dobija bojenje grafa, odnosno matrica, sa traženim svojstvima. U dokazu Teoreme 1.2.2 opisan je postupak bojenja grana pomoću tri boje, koji za proizvoljan graf bez izolovanih grana garantuje da se za svaka dva susedna čvora razlikuju multiskupovi sastavljeni od boja njima incidentnih grana. Dokaz Teoreme 1.3.3 je izveden analizom mogućih bojenja grana datog grafa, a isto se može dobiti i implementacijom jednostavnog algoritma za ispitivanje svih mogućih bojenja. Dokaz Teoreme 1.4.2 je u suštini opis algoritma koji granama i čvorovima proizvoljnog grafa dodeljuje vrednosti iz skupa $\{1, 2, 3\}$, garantujući zadovoljenje tvrđenja teoreme. Dokazi Teorema 1.5.2 i 1.5.4 se oslanjaju na nemogućnost konstrukcije grafa G, minimalnog protiv-primera po broju grana, koji zadovoljava tvrđenja ovih teorema. Drugim rečima, može se formulisati rekurzivni algoritam koji iz nekog od podgrafova grafa G izvodi bojenje grafa G sa traženim svojstvima. U dokazima Teorema 1.6.8 i 1.6.10 opisan je algoritam koji, koristeći valjano bojenje čvorova i grana, a za Teoremu 1.6.10 i bojenje opisano u Teoremi 1.5.2, izvodi bojenje sa traženim svojstvima. U dokazu Teoreme 3.3.9 je prikazan postupak kojim se iz matrice dimenzije $n \times n$ dobija matrica dimenzije $(n+5) \times (n+5)$ sa željenom kardinalnošću prostora vrsta.

Rezultati po pitanju Franklove hipoteze i kardinalnosti prostora vrsta iznad $2^{n-2} + 2^{n-3}$ dobijeni su uz pomoć računara, primenom algoritama čija je korektnost dokazana u disertaciji. Kod algoritama za proveru Franklove hipoteze za familije sastavljene od 12 elemenata, metodom iscrpljivanja mogućnosti pokazano je da se ne može konstruisati protiv-primer familije skupova sa traženim svojstvima.

Rezultati izloženi u Poglavljima 2.2 i 3.2 su, u saradnji sa mentorom, objavljeni redom u radovima:

1. B. Vučković, M. Živković, *The 12-Element Case of Frankl's Conjecture*, The IPSI BgD Transactions on Internet Research, January 2017, Volume 13, pp 65–71,

2. B. Vučković, M. Živković, *Row Space Cardinalities Above* $2^{n-2} + 2^{n-3}$, The IPSI BgD Transactions on Internet Research, January 2017, Volume 13, pp 72–84.

Rezultati prikazani u Poglavlju 1.5 i Poglavlju 1.6, objavljeni su, odnosno prihvaćeni za štampu, u radovima:

1. B. Vučković, *Edge-partitions of graphs and their neighbor-distinguishing index*, Discrete Math. **340** (2017) pp. 3092–3096,

2. B. Vučković, *An Improved Upper Bound on the Adjacent Vertex Distinguishing Total Chromatic Number of Graphs*, Discrete Math. (rad prihvaćen za štampu).

Rezultati prikazani u Poglavljima 1.2 i 1.4 uobličeni su redom u radove:

1. B. Vučković, *Multi-Set Neighbor Distinguishing 3-Edge Coloring*,

2. B. Vučković, *An Improved Upper Bound on Neighbor Expanded Sum Distinguishing Index*,

i nalaze se na recenziji.

Rezultati prikazani u disertaciji, osim delova za koje su eksplicitno navedeni izvori, predstavljaju originalan doprinos autora disertacije. Rezultati dati u Poglavlju 2.2 prezentovani su u master radu *Računarska analiza Franklove hipoteze*, takođe rađenom pod mentorstvom profesora Živkovića. U disertaciji je prikaz ovih rezultata dat u znatno izmenjenoj formi, pri čemu je akcenat stavljen na analizu efikasnog algoritma pomoću koga su ovi rezultati dobijeni, kao i na dokaz korektnosti samog algoritma.

Glava 1

Rezultati iz hromatske teorije grafova

Vrste bojenja obrađivane u disertaciji podpadaju pod indukovana (eng. *induced*) bojenja grafova. To znači da se kod bojenja grana grafa i totalnog bojenja grafa, koja su u nekim varijantama valjana a u nekim nisu, traži da susedni čvorovi imaju različite vrednosti izvedene iz boja incidentnih grana, odnosno incidentnih grana i susednih čvorova, prema nekom od sledećih parametara: multi-skupa, skupa ili sume.

U Poglavlju 1.1 date su definicije osnovnih pojmova i poznatih teorema potrebnih za izvođenje originalnih rezultata iz hromatske teorije grafova, koji su dati u Poglavljima 1.2 do 1.6, i to:

- U Poglavlju 1.2 dat je dokaz da je za multi-skup sused-razlikujuće bojenje proizvoljnog grafa bez izolovanih grana dovoljno 3 boje. To je poboljšanje u odnosu na od ranije poznat rezultat da je za ovo bojenje dovoljna jedna boja više, dok je za mnoge grafove 3 i optimalan broj boja da bi se ovo bojenje izvelo.

- U Poglavlju 1.3 dajemo prvi primer grafa koji poseduje različite vrednosti multi-skup razlikujućeg indeksa i sused-razlikujućeg hromatskog indeksa po sumama.

- U Poglavlju 1.4 dokazujemo da je za prošireno sused-razlikujuće bojenje proizvoljnog grafa dovoljno 3 boje, što značajno popravlja do sada najbolju gornju granicu za ovu vrednost. Takođe, dokazujemo da je za određene klase grafova dovoljno 2 boje da bi se ovo bojenje izvelo.

- U Poglavlju 1.5 iznosimo dve popravljene gornje granice za sused-razlikujući hromatski indeks grafa bez izolovanih grana - jedna granica važi za sve takve grafove, dok nešto bolja granica važi za grafove sa maksimalnim stepenom jednakim 2^k, za celobrojno $k > 1$.

- U Poglavlju 1.6 takođe su izneta dva poboljšanja gornje granice, u ovom slučaju za čvor-razlikujući totalni hromatski broj grafa - jedna linearna, a jedna za konstantu i koja je bolja za manje vrednosti maksimalnog stepena grafa.

1.1 Pojmovi iz hromatske teorije grafova

1.1.1 Grafovi - osnovni pojmovi

U ovom odeljku dajemo definicije osnovnih pojmova iz teorije grafova. Notacija i pojmovi korišćeni u disertaciji za oblast teorije grafova najvećim delom su standardni. Za pojedine pojmove kod kojih u literaturi postoje razmimoilaženja u obeležavanju, koristimo konvencije iz knjige Čartanda i Žangove [1].

Graf G je konačan neprazan skup V objekata koje nazivamo čvorovi (eng. vertices), zajedno sa skupom E sastavljenim od 2-elementnih podskupova skupa V koje nazivamo grane (eng. *edges*). Skup čvorova grafa G označavamo sa $V(G)$, dok skup grana grafa G označavamo sa $E(G)$. Za elemente $\{u, v\}$ skupa $E(G)$ koristimo skraćenu notaciju uv. Kod svih grafova razmatranih u disertaciji nebitan je redosled čvorova u granama, odnosno uv je isto što i vu, za svako $uv \in E(G)$.

Dve ili više grana koje spajaju isti par različitih čvorova nazivamo paralelnim granama. Granu koja spaja čvor sa njim samim nazivamo petlja (eng. *loop*). Za graf G koji nema paralelnih grana ni petlji kažemo da je prost (eng. *simple*). Svi grafovi razmatani u disertaciji su prosti. Dva čvora u i v su susedna u G ukoliko postoji grana $uv \in E(G)$. Dve grane su susedne ukoliko imaju zajednički čvor. Čvor u je incidentan sa granom e ukoliko je $e = uv$ za neki čvor v iz G. Za čvor koji ima k susednih čvorova kažemo da ima stepen (eng. *degree*) k. Skup čvorova susednih sa čvorom v u grafu G označavamo sa $N_G(v)$. Stepen čvora v u grafu G označavamo sa $\deg_G(v)$, odnosno važi $\deg_G(v) = |N_G(v)|$. Kada je jasno o kojem se grafu radi, radi jednostavnosti ćemo koristi oznake $N(v)$ i $\deg(v)$. Najveći stepen među svim čvorovima grafa G nazivamo maksimalni stepen, i označavamo ga sa $\Delta(G)$, dok najmanji stepen grafa G označavamo sa $\delta(G)$.

Za graf G kažemo da je potpun (eng. *complete*) ukoliko su svaka dva različita čvora susedna u G. Ukoliko svi čvorovi grafa G imaju isti stepen, tada za G kažemo da je regularan (eng. *regular*) graf. Ukoliko svaki čvor grafa G ima stepen r, tada za G kažemo da je r-regularan graf.

Za skup S kažemo da je dominirajući skup (eng. *dominating set*) grafa G ukoliko je svaki čvor iz $V(G)$ ili element skupa S ili je u grafu G susedan nekom čvoru iz skupa S. Za skup čvorova kažemo da je nezavisan (eng. *independent*) skup za graf G ukoliko ne sadrži dva čvora koji su susedni u G. Za graf H kažemo da je podgraf (eng. *subgraph*) grafa G ukoliko $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$. Ukoliko je H podgraf grafa G i $V(H)$ je pravi podskup skupa $V(G)$ ili je $E(H)$ pravi podskup skupa $E(G)$, kažemo da je H pravi podgraf grafa G. Za podskup S skupa $V(G)$, podgraf $G[S]$ grafa G indukovan (eng. *induced*) skupom S ima S kao skup čvorova, i dva čvora iz S su susedni u $G[S]$ ako i samo ako su susedni u G.

Za dva čvora u i v grafa G, u, v-put (eng. *walk*) W u G je niz čvorova iz G koji počinje u u i završava u v takav da su uzastopni čvorovi iz W susedni u G. Put u grafu G kod koga se nijedan čvor ne ponavlja nazivamo prosti put (eng. *path*). Put kod koga su početni i krajnji čvor različiti nazivamo otvorenim (eng. *open*) putem; inače ga nazivamo zatvorenim (eng. *closed*) putem. Zatvoreni put u G sa tri ili više grana kod koga se nijedna grana ne ponavlja nazivamo kolo (eng. *circuit*). Kolo kod koga su svi čvorovi različiti nazivamo ciklus (eng. *cycle*). Ciklus dužine k, gde je $k \geq 3$, nazivamo k-ciklusom. Ciklus parne dužine nazivamo parnim ciklusom, dok ciklus neparne dužine nazivamo neparnim ciklusom.

Dva čvora u i v grafa G su povezana (eng. connected) ukoliko postoji u, v-put u grafu G. Za graf G kažemo da je povezan ukoliko su povezana svaka dva čvora u G. Za graf G koji nije povezan kažemo da je nepovezan (eng. *disconnected*) graf. Za povezani podgraf H grafa G kažemo da je komponenta (eng. *component*) od G ukoliko H nije pravi podgraf povezanog podgrafa grafa G. Povezani graf bez ciklusa nazivamo drvo (eng. *tree*). Drvo kod koga svaki čvor ima najviše dva suseda nazivamo putanja (eng. *path*). Za graf G kažemo da je normalan ukoliko nema izolovanih grana.

1.1.2 Osnovna bojenja grafova

Bojenje čvorova

Bojenje čvorova grafa G je dodela boja čvorovima grafa G, tako da svaki čvor dobija jednu boju. Valjano bojenje čvorova grafa G je bojenje čvorova grafa G, kod kojeg svaki čvor ima boju koja se razlikuje od boja svih njemu susednih čvorova. Za graf G kažemo da je k-obojiv ukoliko postoji valjano bojenje čvorova grafa G iz skupa od k boja. Najmanji prirodan broj k za koji je graf G k-obojiv nazivamo hromatski broj grafa G, i označavamo ga sa $\chi(G)$. Pri bojenju grafova, za označavanje boja uobičajeno je da se koriste pozitivne celobrojne vrednosti. Tako, za k-bojenje čvorova grafa G čvorovima dodeljujemo boje, odnosno brojeve, iz skupa $\{1, \ldots, k\}$. Neka je c valjano bojenje čvorova grafa G pomoću boja iz skupa $\{1, \ldots, k\}$. Ukoliko je V_i $(1 \leq i \leq k)$ skup čvorova iz G obojenih i, pri čemu neki od ovih skupova mogu biti prazni, tada svaki neprazan skup V_i nazivamo klasom obojivosti (eng. *color class*) dok neprazni elementi skupa $\{V_1, \ldots, V_k\}$ čine podelu čvorova (eng. *partition*) skupa $V(G)$. Za graf G kažemo da je bipartitivan (eng. *bipartite*) ukoliko je u gore definisanoj podeli $k = 2$. Drugim rečima, graf G je bipartitivan ukoliko se skup $V(G)$ može podeliti na dva skupa U i W, tako dva svaka grana iz $E(G)$ spaja čvor iz U sa čvorom iz W.

Gornja granica hromatskog broja grafa G je $\chi(G) \leq 1+\Delta(G)$, što se može dokazati jednostavnim pohlepnim algoritmom. Za većinu grafova, naredna Bruksova teorema [11] daje nešto bolju gornju granicu za $\chi(G)$.

Teorema 1.1.1. *(Bruksova teorema) Ukoliko je G graf različit od neparnog ciklusa i kompletnog grafa, tada*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Bojenje grana

Bojenje grana grafa G je dodela boja granama grafa G, tako da svaka grana dobije jednu boju. Valjano bojenje grana grafa G je bojenje grana grafa, kod kojeg svake dve susedne grane imaju različitu boju. Valjano bojenje grana koje koristi boje iz skupa od k boja nazivamo valjano k-bojenje grana (eng. *k-edge coloring*). Najmanji prirodan broj k za koji postoji valjano k-bojenje grana grafa G nazivamo hromatski indeks, i označavamo ga sa $\chi'(G)$. Kao i kod bojenja čvorova, za označavanje boja grana koristimo pozitivne celobrojne vrednosti.

Pošto kod valjanog bojenja grana svake dve susedne grane imaju različitu boju, trivijalna donja granica vrednosti hromatskog indeksa data je sa

$$\Delta(G) \leq \chi'(G).$$

Naredna važna teorema Vizinga [10] daje gornju granicu za $\chi'(G)$.

Teorema 1.1.2. *(Vizingova teorema) Za svaki neprazan graf G je*

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

1.2 Multi-skup sused-razlikujuće 3-bojenje grana

Neka je G normalan graf, i neka je $c : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ bojenje grana, gde susedne grane mogu biti obojene istom bojom. Ukoliko c koristi k boja, za c kažemo da je k-bojenje grana. *Kôd boja* čvora v je uređena k-torka, u oznaci $\mathrm{code}(v) = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, gde a_i, za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$, predstavlja broj grana incidentnih sa v obojenih i. Dakle, važi $\sum_{i=1}^{k} a_i = \deg(v)$. Ukoliko svaka dva susedna čvora grafa G imaju različite kodove boja, takvo bojenje nazivamo multi-skup (eng. *multi-set*) sused-razlikujuće, ili skraćeno msde-bojenje. Najmanji broj k za koji postoji k-msde bojenje grafa G nazivamo multi-skup sused-razlikujući indeks, ili msde-indeks, i označavamo ga sa $\chi^e_m(G)$.

Neka je za neko bojenje grana ϕ definisano bojenje čvorova ϕ' tako što se svakome čvoru $v \in V(G)$ dodeljuje vrednost

$$\phi'(v) = \sum_{u \in N(v)} \phi(uv).$$

Ukoliko za svaki par susednih čvorova v i u važi $\phi'(v) \neq \phi'(u)$ tada bojenje ϕ nazivamo sused-razlikujuće k-bojenje grana po sumi, ili skraćeno k-sde-bojenje. Najmanji broj k za koji graf G ima k-sde-bojenje, nazivamo sused-razlikujući hromatski indeks po sumi, ili sde-indeks, i označavamo ga sa $\chi^e_\Sigma(G)$. Jasno je da ukoliko graf sadrži izolovanu granu, ne postoji ni msde-bojenje ni sde-bojenje ovakvog grafa. Zbog toga, u vezi sa msde-bojenem i sde-bojenjem razmatramo samo normalne grafove.

Neka je dato bojenje $\phi : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$, i neka je $\mathrm{code}(v) = (a_1, \ldots, a_k)$ dato u odnosu na bojenje ϕ. Tada je

$$\phi'(v) = \sum_{u \in N(v)} \phi(vu) = \sum_{j=1}^{k} j a_j$$

Odavde sledi da ukoliko za dva čvora u i v važi $\text{code}(u) = \text{code}(v)$ tada je i $\phi'(v) = \phi'(u)$, odnosno imamo sledeću posledicu.

Posledica 1.2.1. *Za svaki normalan graf G važi $\chi_m^e(G) \leq \chi_\Sigma^e(G)$.*

Karonski, Lučak, i Tomason [15] su dokazali da za normalan graf G za koji je $\chi(G) \leq 3$ važi $\chi_\Sigma^e(G) \leq 3$; odatle imamo da za takav graf G važi i $\chi_m^e(G) \leq 3$. Što se tiče gornje granice vrednosti $\chi_m^e(G)$ za proizvoljan normalan graf G, Adario-Beri i ostali [2] dokazali su da važi $\chi_m^e(G) \leq 4$. Rezultat autora, dat u sledećoj teoremi, je popravljena gornja granica za $\chi_m^e(G)$.

Teorema 1.2.2. *Za svaki normalan graf G važi $\chi_m^e(G) \leq 3$.*

Primetimo da je, u opštem slučaju, tri boje neophodno. Postoje mnogi grafovi koji ne dozvoljavaju msde-bojenje sa manje od 3 boje. Primeri takvih grafova su K_n za $n \geq 3$, i C_n za $n \geq 3$ i $n \not\equiv 0 \mod 4$.

Ukoliko je prilikom bojenja grana grafa G nekoj od grana incidentnih sa čvorom v iz $V(G)$ boja ostala nedodeljena, k-torku koja uključuje broj do tada obojenih grana incidentnih sa v nazivamo parcijalni kôd boja, i označavamo je sa $\text{code}_p(v)$.

Da bismo dokazali Teoremu 1.2.2, potrebno nam je tvrđenje naredne leme.

Lema 1.2.3. *Neka je G neki indukovan podgraf grafa H, pri čemu je G povezani bipartitni graf sa podelom čvorova $\{V_1, V_2\}$. Dalje, neka je ϕ bojenje grana iz $E(H) \setminus E(G)$ proizvoljnim bojama. Tada, za proizvoljno $v \in V_1$ postoji proširenje bojenja ϕ koje svakoj od grana iz $E(G)$ dodeljuje boju iz skupa $\{a, b\}$ tako da svi čvorovi iz $V_1 \backslash \{v\}$ imaju u H paran (neparan) broj incidentnih grana obojenih a, dok svi čvorovi iz V_2 imaju u H neparan (paran) broj incidentnih grana obojenih a.*

Dokaz. Prvo, svim granama grafa G dodeljujemo boju a. Dok god postoji dva ili više čvora u $V_1 \backslash \{v\}$ koji imaju neparan broj incidentnih grana obojenih a, primenjujemo sledeći postupak. Neka su w_1 i w_2 dva takva čvora. Razmenjujemo boje a i b svakoj od grana na putu između w_1 i w_2 u grafu G. Na ovaj način se menja parnost broja grana incidentnih sa w_1 i w_2 obojenih a, dok parnost broja grana obojenih a incidentnih sa bilo kojim čvorom iz G različitim od w_1 i w_2 ostaje ista. Na kraju ovog postupka, postoji najviše jedan čvor u $V_1 \backslash \{v\}$ koji ima neparan broj incidentnih grana obojenih a. Dalje, dok god postoji dva ili više čvora u V_2 koji imaju paran broj incidentnih grana obojenih a, primenjujemo sledeći postupak sličan prethodnom. Neka su u_1 i u_2 dva takva čvora. Razmenjujemo boje a i b svake od grana na putu između u_1 i u_2 u grafu G. Na kraju ovog postupka, postoji najviše jedan čvor u V_2 koji ima paran broj incidentnih grana obojenih a. Ukoliko postoje čvorovi $w \in V_1 \setminus \{v\}$ sa neparnim brojem incidentnih grana obojenih a, i $u \in V_2$ sa parnim brojem incidentnih grana obojenih a, tada razmenjujemo boje a i b svakoj od grana na putu između w i u u G. Dakle, sada postoji najviše jedan čvor y iz $(V_1 \setminus \{v\}) \cup V_2$ sa neželjenom parnošću broja incidentnih grana obojenih a. Ukoliko takav čvor postoji, razmenjujemo boje a i b svakoj od grana na putanji između y i v u G, čime dobijamo željeno bojenje grana.

Dokaz je analogan za slučaj kada želimo da svi čvorovi iz $V_1 \setminus \{v\}$ imaju neparan, a čvorovi iz V_2 imaju paran broj incidentnih grana obojenih a. $\square$

1.2.1 Dokaz glavne teoreme

Dokaz Teoreme 1.2.2. Ukoliko je tvrđenje teoreme zadovoljeno za sve povezane grafove sa barem dve grane, tada je očigledno da je zadovoljeno i za svaki normalni graf. Zbog toga, možemo pretpostaviti da je G povezani graf sa dve ili više grana.

Neka je $V = V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_k$, gde je V_1 nezavisni dominirajući skup grafa G, zatim neka je V_i nezavisni dominirajući skup grafa

$$G[V \setminus (\bigcup_{j<i} V_j)]$$

za svako $1 < i < k$, dok je V_k nezavisan skup. Dakle, za svako v iz skupa V_i sa $1 < i \leq k$, čvor v ima barem po jednog suseda u svakom od skupova V_j sa $1 \leq j < i$, a nijednog u V_i.

Neka je v čvor iz V_i sa $\mathrm{code}(v) = (b_1, b_2, b_3)$. Ideja dokaza je da se grane grafa G oboje tako da su, osim u nekoliko posebnih slučajeva, zadovoljena sledeća svojstva.

1. Ukoliko je $i = 2l + 3$ sa $l \geq 1$, tada $b_1 \geq 1$, $b_2 = l$ i b_3 je neparan broj veći od 1.

2. Ukoliko je $i = 2l + 2$ sa $l \geq 1$, tada $b_1 = l$, $b_2 \geq 1$ i b_3 je paran broj veći od 0.

3. Ukoliko je $i = 3$, tada $b_1 = 0$, $b_2 \geq 1$ i $b_3 \geq 1$.

4. Ukoliko je $i = 2$ i v ima suseda u V_j sa $j > 2$, tada $b_1 + b_2 \geq 2$ i $b_3 = 0$.

5. Ukoliko je $i = 1$ i v ima suseda u V_j sa $j > 2$ tada $b_1 \geq 0$, $b_2 = 0$ i $b_3 \geq 1$.

6. Ukoliko je $v \in V_1 \cup V_2$, i v nema suseda van $V_1 \cup V_2$, tada samo gledamo da v ima drugačiji kôd boja od svih svojih suseda.

Prvo dodeljujemo boju 3 svim granama koje spajaju čvorove iz V_1 i V_i, za svako celobrojno i različito od 2. Sledeće, za svaki čvor iz V_k bojimo njemu incidentne grane, zatim za svaki čvor iz V_{k-1} bojimo njemu incidentne grane, i tako postepeno nastavljamo sve do skupa V_2.

Pretpostavimo da smo obojili sve grane incidentne sa čvorovima iz V_l, za svako l sa $i < l \leq k$, gde je $1 \leq i \leq k$. Sada dodeljujemo boje granama koje spajaju čvorove iz V_i i V_j, za svako j koje je manje od i. Za proizvoljan redosled čvorova iz V_i, za svako $v \in V_i$ primenjujemo sledeći postupak. Neka je $\text{code}_p(v) = (a_1, a_2, a_3)$. U zavisnosti od vrednosti i grane incidentne sa v bojimo na sledeći način.

1. **Za** $i > 5$:
   U zavisnosti od parnosti broja i, imamo dva slučaja.

   (a) $i = 2l + 3$, za neko $l \geq 2$. Pošto v ima barem jednog suseda u V_1, imamo da je $a_3 \geq 1$. Za $i = k$ imamo $a_1 = a_2 = 0$, a za $i < k$ imamo $a_1 \geq 0$ i $a_2 = 0$. Granama između v i čvorova iz V_1 i V_j sa $j > i$ su već dodeljene boje. Sada bojimo grane koje spajaju v sa čvorovima iz V_j, za svako j za koje je $4 < j < i$:

      i. za neparno j, sve takve grane bojimo 1,

      ii. za parno j, granu između v i jednog od čvorova iz V_j bojimo 2, a sve ostale grane između v i čvorova iz V_j bojimo 3.

   Dalje, granama koje spajaju v sa čvorovima iz V_4 dodeljujemo boju 3. Neka je $u \in V_2 \cap N(v)$ i $w \in V_3 \cap N(v)$. Svim granama koje spajaju v sa čvorovima iz $V_2 \setminus \{u\}$ dodeljujemo boju 1, a svim granama koje spajaju v sa čvorovima iz $V_3 \setminus \{w\}$ dodeljujemo boju 3. Dakle, $\text{code}_p(v) = (b_1, l-1, b_3)$, gde $b_1 \geq 1$ i $b_3 \geq 2$, dok su vu i vw jedine grane incidentne sa v koje još nisu obojene.

      i. Ukoliko je b_3 parno, granu vu bojimo 2, a vw bojimo 3.

      ii. Ukoliko je b_3 neparno, granu vu bojimo 1, a vw bojimo 2.

Konačno, imamo code$(v) = (c_1, l, 2c_3 + 1)$, gde je $c_1 \geq 1$ i $c_3 \geq 1$. Dakle, čvor v ima kôd boja drugačiji od svakog u sa code$(u) = (x_1, x_2, x_3)$, gde je $x_2 \neq l$ ili x_3 parno.

(b) $i = 2l + 2$, za neko $l \geq 2$. Pošto v ima barem jednog suseda u V_1, imamo da je $a_3 \geq 1$. Za $i = k$ imamo $a_1 = a_2 = 0$, a za svako $i < k$ imamo $a_1 = 0$ i $a_2 \geq 0$. Granama između v i čvorova iz V_1 i V_j sa $j > i$ su već dodeljene boje. Sada bojimo grane koje spajaju v sa čvorovima iz V_j, za svako j za koje je $3 < j < i$:

   i. za parno j, sve takve grane bojimo 2.

   ii. za neparno j, granu između v i jednog od čvorova iz V_j bojimo 1, a sve ostale grane između v i čvorova iz V_j bojimo 3.

   Neka je $u \in V_2 \cap N(v)$ i $w \in V_3 \cap N(v)$. Grani vu dodeljujemo boju 1, granama koje spajaju v sa čvorovima iz $V_2 \backslash \{u\}$ dodeljujemo boju 2, a svim granama koje spajaju v sa čvorovima iz $V_3 \backslash \{w\}$ dodeljujemo boju 3. Dakle, imamo code$_p(v) = (l, b_2, b_3)$, gde je $b_2 \geq 1$, $b_3 \geq 1$, i preostalo nam je da obojimo granu vw. Ukoliko je b_3 neparno, granu vw bojimo 3, a ukoliko je b_3 parno, granu vw bojimo 2. Konačno, imamo code$(v) = (l, c_2, 2c_3)$, gde je $c_2 \geq 1$ i $c_3 \geq 1$.

Dakle, čvor v ima drugačiji kôd boja od svih svojih suseda iz V_j, za svako $j > i$.

2. **Za** $i = 5$:
Imamo da je $a_1 \geq 0$, $a_2 = 0$ i $a_3 \geq 1$. Neka je $u \in V_2 \cap N(v)$, $w \in V_3 \cap N(v)$ i $y \in V_4 \cap N(v)$. Za svako $x \in (V_4 \backslash \{y\}) \cap N(v)$, radimo sledeće. Ukoliko x ima incidentnu granu koja je već obojena 1, granu vx bojimo 3; inače vx bojimo 1. Dalje, sve grane između v i čvorova iz $V_2 \backslash \{u\}$ bojimo 1; sve grane između v i čvorova iz $V_3 \backslash \{w\}$ bojimo 3. Dakle, imamo code$_p(v) = (b_1, 0, b_3)$, gde je $b_1 \geq 0$ i $b_3 \geq 1$, i preostalo nam je da obojimo grane vu, vw i vy. Razmatramo dva slučaja.

(a) Nijedna grana incidentna sa y nije obojena 1. Grani vy dodeljujemo boju 1. Dalje, razmatramo tri slučaja.

   i. b_3 je parno. Granama vu i vw dodeljujemo boje 2 i 3, redom.

   ii. $b_3 = 1$. Obema granama vu i vw dodeljujemo boju 2.

iii. b_3 je neparno, pri čemu je $b_3 \geq 3$. Granama vu i vw dodeljujemo boje 1 i 2, redom.

Dakle, imamo da je ili $\mathrm{code}(v) = (c_1, 1, 2c_3 + 1)$, gde je $c_1 \geq 1$ i $c_3 \geq 1$, ili $\mathrm{code}(v) = (c_1, 2, 1)$ gde je $c_1 \geq 1$. Za svako $u \in V_l$ gde je $l > 5$, sa $\mathrm{code}(u) = (x_1, x_2, x_3)$, imamo da je $x_3 \geq 2$ i ili je $x_2 \geq 2$ ili je x_3 paran. Zbog toga, imamo $\mathrm{code}(v) \neq \mathrm{code}(u)$.

(b) Čvor y je incidentan sa granom obojenom 1. U zavisnosti od vrednosti brojeva b_1 i b_3, razmatramo tri slučaja.

Slučaj 1. b_3 je paran. Granama vu, vw i vy dodeljujemo boje 1, 2 i 3, redom.

Slučaj 2. b_3 je neparan, i $b_1 = 0$. Primetimo da ovo znači da v nema susednih čvorova u V_j, za neparan broj j veći od 5, pošto bi u tom slučaju postojala grana incidentna sa v obojena 1. Granama vu, vw i vy dodeljujemo boje 1, 2 i 2, redom.

Slučaj 3. b_3 je neparno, i $b_1 \geq 1$. Granama vu, vw i vy dodeljujemo boje 2, 3 i 3, redom.

Primetimo da u Slučaju 2 imamo da je $\mathrm{code}(v) = (1, 2, 2c_3+1)$, gde je $c_3 \geq 0$, i v nema suseda ni u jednom od V_j, za $j = 2l+3$ i $l \geq 2$. U svim ostalim slučajevima imamo $\mathrm{code}(v) = (c_1, 1, 2c_3 + 1)$, gde je $c_1, c_3 \geq 1$.

Otuda, čvor v ima različit kôd boja od svakog čvora iz $(N(v) \cap V_j)$, za $j > 5$.

3. **Za** $i = 4$:

Imamo da je $a_1 \leq 1$, $a_2 \geq 0$ i $a_3 \geq 1$. Neka je $u \in V_2 \cap N(v)$ i $w \in V_3 \cap N(v)$. Granama između v i čvorova iz $V_2 \backslash \{u\}$ dodeljujemo boju 2, dok granama između v i čvorova iz $V_3 \backslash \{w\}$ dodeljujemo boju 3. Neka je $\mathrm{code}_p(v) = (b_1, b_2, b_3)$. Imamo da je $b_1 \leq 1$, $b_2 \geq 0$, $b_3 \geq 1$. U zavisnosti od vrednosti brojeva b_1 i b_2, razmatramo tri slučaja.

(a) $b_1 = b_2 = 0$. Zbog načina kako su bojene grane između V_4 i V_5, zaključujemo da čvor v nema suseda iz V_5. Granama vu i vw dodeljujemo boje 1 i 2, redom. Sada, sve grane incidentne sa v su obojene i $\mathrm{code}(v) = (1, 1, b_3)$. Znamo da svaki čvor iz skupa V_j, gde je $j \geq 6$, ima barem dve incidentne grane obojene 1 (za parno j), ili barem dve incidentne grane obojene 2 (za neparno j).

Pošto v nema suseda u V_5, sledi da je $\text{code}(v) \neq \text{code}(u)$ za svako $u \in V_j \cap N(v)$, gde je $j > 4$.

(b) $b_1 = 0$, $b_2 \geq 1$. Ukoliko je b_3 parno, grane vu i vw bojimo 1 i 2, redom. Ukoliko je b_3 neparno, grane vu i vw bojimo 1 i 3, redom. U oba slučaja imamo $\text{code}(v) = (1, c_2, 2c_3)$, gde je $c_2 \geq 1$ i $c_3 \geq 1$. Pošto je svaki čvor iz V_{2l+2} sa $l \geq 2$ incidentan sa barem dve grane obojene 1, dok je svaki čvor iz V_{2l+1} sa $l \geq 2$ incidentan sa neparnim brojem grana obojenih 3, čvor v ima drugačiji kôd boja od svih njih.

(c) $b_1 = 1$. Granu vu bojimo 2. Dalje, ukoliko je b_3 parno, granu vw bojimo 2, a ukoliko je b_3 neparno, granu vw bojimo 3. Sada su obojene sve grane incidentne sa v, i imamo $\text{code}(v) = (1, c_2, 2c_3)$, gde je $c_2 \geq 1$ i $c_3 \geq 1$. Kao i u prethodnom slučaju, zaključujemo da v ima drugačiji kôd boja od svih svojih suseda iz V_j, gde je $j > i$.

4. **Za** $i = 3$:
Imamo da je $a_1 = 0$, $a_2 \geq 0$ i $a_3 \geq 1$. Granama između v i čvorova iz V_2 dodeljujemo boju 2. Sada, čvor v ima kôd boja $(0, b_2, b_3)$, gde su $b_2 \geq 1$ i $b_3 \geq 1$. Pošto su svi čvorovi iz V_l, sa $l > 3$, incidentni sa barem jednom granom obojenom 1, sledi da v ima različit kôd boja od svih njih.

5. **Za** $i = 2$:
Za razliku od prethodnih slučajeva kada smo bojili grane incidentne sa određenim čvorom iz V_i, sada istovremeno bojimo više grana koje spajaju čvorove iz V_1 sa čvorovima iz V_2.

Primetimo da za svako $u \in V_l$, gde je $l \geq 4$, samo u nekom od naredna dva slučaja čvor u ima tačno jednu incidentnu granu obojenu 3:

(a) $\text{code}(u) = (1, 1, 1)$ i $u \in V_4$,
(b) $\text{code}(u) = (c_1, 2, 1)$, gde je $c_1 \geq 1$ i $u \in V_5$.

Neka je W_1 podskup skupa V_1 čvorova koji imaju barem jednog suseda u nekom od V_l sa $l > 2$. Dalje, neka je U_1 podskup skupa V_2 čvorova koji imaju barem jednog suseda u nekom V_l sa $l > 2$. Neka je sada $W_2 = V_1 \backslash W_1$ i $U_2 = V_2 \backslash U_1$. Prvo, svakoj grani između čvorova iz W_1 i V_2 dodeljujemo boju 1. Kasnije ćemo menjati u 3 boju neke od ovih grana, posle čega čvorovi iz skupa W_1 i dalje neće imati incidentnih grana obojenih 2. Sada, dodeljujemo boje preostalim granama koje se nalaze između čvorova iz W_2 i V_2. Neka je $H = G[W_2 \cup V_2]$ i neka su H_j, $1 \leq j \leq n$, komponente grafa H. Grane grafa H_j bojimo za svako j tako da se kodovi susednih čvorova u H_j razlikuju, dok će za svako $u \in U_1$ koje ima $\text{code}(u) = (c_1, c_2, c_3)$ biti zadovoljeno jedno od sledećih svojstava:

(a) $c_3 = 0$,

(b) $c_1 \geq 2$, c_2 je neparan i $c_3 = 1$,

(c) $c_1 \geq 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, i u ima tačno jednog suseda w u W_1, dok w ima barem dve incidentne grane obojene 3,

(d) $c_1 \geq 1$, $c_2 = 0$, $c_3 \geq 1$, i u nema suseda u W_1.

Dakle, čvor $u \in U_1$ će imati različit kôd boja od svakog svog suseda iz W_1, kao i iz V_l sa $l > 2$.

Sada, proizvoljnim redosledom za svako j, $1 \leq j \leq n$, radimo sledeći postupak. Neka je $L = H_j$. U zavisnosti od toga da li $V(L)$ sadrži čvor iz U_2, razmatramo dva slučaja.

(a) $V(L)$ sadrži čvor $u \in U_2$. Razmatramo dva slučaja, u zavisnosti od toga da li u ima suseda u W_1.

   i. u ima suseda $w \in W_1$. Prema Lemi 1.2.3 bojimo grane grafa L bojama 1 i 2 tako da svi čvorovi iz $V(L) \cap (V_2 \backslash \{u\})$ imaju paran broj incidentnih grana obojenih 2, a čvorovi iz $V(L) \cap W_2$ imaju neparan broj incidentnih grana obojenih 2. Ukoliko i čvor u ima paran broj incidentnih grana obojenih 2, završili smo, pošto u tom slučaju svaki od čvorova grafa L ima različit kôd boja od svih svojih suseda. Ukoliko u ima neparan broj incidentnih grana obojenih 2, menjamo boju grane uw iz 1 u 3. Sada, za svaki čvor iz $N(u) \cap W_1$ nijedna od njemu incidentnih grana nije obojena 2, dok za svaki čvor iz $N(u) \cap W_2$ nijedna od njemu incidentnih grana nije obojena 3. Kako u ima barem po jednu incidentnu granu obojenu 2 i 3, čvor u ima različit kôd boja od svih svojih suseda. Odatle, zaključujemo da svaki od čvorova grafa L ima različit kôd boja od svih svojih suseda.

ii. u nema susednih čvorova u W_1. Prema Lemi 1.2.3 bojimo grane grafa L bojama 1 i 2 tako da svi čvorovi iz $V(L) \cap (V_2 \backslash \{u\})$ imaju neparan broj incidentnih grana obojenih 2, dok čvorovi iz $V(L) \cap W_2$ imaju paran broj incidentnih grana obojenih 2. Ukoliko čvor u ima neparan broj incidentnih grana obojenih 2, završili smo, pošto u ovom slučaju svaki od čvorova grafa L ima različit kôd boja od svih svojih suseda. Ukoliko u ima paran broj incindentnih grana obojenih 2, menjamo u 3 boju svake od grana incidentnih sa u. Ukoliko u ima samo jednog suseda w, tada, pošto je G povezan graf za barem dve grane, sledi da w osim u ima barem još jednog suseda. Zbog toga, w i u imaju različit kôd boja. Ukoliko u ima više od jednog suseda, i u ovom slučaju ima različit kôd boja od svih svojih suseda, pošto nijedan od njih nema više od jedne incidentne grane obojene 3. Za svako $w \in N(u)$, nijedan od suseda od w različit od u nema incidentnih grana obojenih 3. Dakle, čvor w, kao i bilo koji drugi čvor grafa L, ima različit kôd boja od svih svojih suseda.

(b) $V(L)$ ne sadrži čvor iz skupa U_2. Označimo sa X podskup skupa U_1 čvorova čije su sve grane, kojima su povezani sa čvorovima iz V_l sa $l > 2$, obojene 1. Dalje, neka je X_0 poskup skupa X čvorova koji nemaju suseda u W_1, i neka je X_1 podskup čvorova iz X koji imaju tačno jednog suseda u W_1. Pored toga, neka je $X_2 = X \backslash (X_0 \cup X_1)$ i $Y = U_1 \backslash X$. U zavisnosti od toga da li $V(L)$ sadrži čvor iz skupa X_2, razmatramo dva slučaja.

i. $V(L)$ sadrži čvor $u \in X_2$. Dakle, imamo $\text{code}_p(u) = (b_1, 0, 0)$, gde je $b_1 \geq 3$. Prema Lemi 1.2.3 bojimo grane grafa L bojama 1 i 2 tako da svi čvorovi iz $V(L) \cap W_2$ imaju neparan broj incidentnih grana obojenih 2, a čvorovi is $V(L) \cap (V_2 \backslash \{u\})$ imaju paran broj incident grana obojenih 2. Ukoliko čvor u ima paran broj incidentnih grana obojenih 2, svi čvorovi iz $V(L)$ imaju različit kôd boja od svih svojih suseda, i završili smo. Ukoliko u ima neparan broj incidentnih grana obojenih 2, neka je w jedan od suseda čvora u iz skupa W_1. Menjamo boju grane uw iz 1 u 3. Sada, imamo $\text{code}(u) = (c_1, c_2, 1)$, $c_1 \geq 2$ i c_2 je neparan. Za svako $w \in N(u) \cap W_1$ ne postoji grana incidentna sa w obojena 2. Osim toga, za svako $w \in$

$N(u) \cap V_l$ sa $l \geq 3$ i $\text{code}(w) = (x_1, x_2, x_3)$, ukoliko je $x_3 = 1$, tada $x_1 < 2$ ili je x_2 paran. Dakle, čvor u, kao i bilo koji drugi čvor iz L, ima različit kôd boja od svih svojih suseda.

ii. $V(L) \cap X_2 = \emptyset$. Sada bojimo grane iz L. Neka je W' podskup skupa W_2 čvorova koji imaju suseda u X_0. Dalje, neka je X' podskup skupa X_1 čvorova koji imaju suseda u W'. Za svako $u \in X_0 \cap V(L)$ i svako $v \in W' \cap N(u)$ granu uv bojimo 3. Za svako $u \in W' \cap V(L)$ i svako $v \in (Y \cup X') \cap N(u)$ granu uv bojimo 2. Za svako $u \in X_1 \backslash X'$ radimo sledeće. Neka je $N(u) \cap W_1 = \{w\}$. Boju grane uw menjamo iz 1 u 3. Primetimo da sada čvor w ima barem dve incidentne grane obojene 3, dok u ima tačno jednu incidentnu granu obojenu 3. Konačno, preostalim granama iz L dodeljujemo boju 1. Nakon opisanog postupka bojenja, za $u \in V(L) \cap W_2$ i $\text{code}(u) = (b_1, b_2, b_3)$ imamo:

A. ukoliko $u \in W'$, tada $b_1 = 0$, $b_2 \geq 0$, $b_3 \geq 1$,

B. ukoliko $u \in W_2 \backslash W'$, tada $b_1 \geq 1$, $b_2 = 0$ i $b_3 = 0$.

Za $v \in V(L) \cap V_2$ i $\text{code}(v) = (c_1, c_2, c_3)$ imamo:

A. ukoliko $v \in Y$, tada $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 1$ i $c_3 = 0$,

B. ukoliko $v \in X'$, tada $c_1 \geq 1$, $c_2 \geq 1$ i $c_3 = 0$,

C. ukoliko $v \in X_1 \backslash X'$, tada $c_1 \geq 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, i v ima samo jednog suseda w u W_1, dok w ima barem dve incidentne grane obojene 3,

D. ukoliko $v \in X_0$, tada $c_1 \geq 1$, $c_2 = 0$ i $c_3 \geq 1$, i v nema nijednog suseda u W_1.

Zbog toga imamo da je $\text{code}(u) \neq \text{code}(v)$ za svako $uv \in E(L)$, čime je dokaz teoreme kompletiran.

$\square$

1.3 Graf sa različitim vrednostima msde- i sde-indeksa

U narednoj teoremi Kalkovskog, Karonskog i Pfendera [14] data je do sada najbolja poznata granica po pitanju vrednosti $\chi^e_\Sigma(G)$ za proizvoljan normalan graf G.

Teorema 1.3.1. *Za svaki normalan graf G važi $\chi^e_\Sigma(G) \leq 5$.*

Karonski, Lučak i Tomason [15] su predložili sledeću hipotezu.

Hipoteza 1.3.2. *(1-2-3 hipoteza) Za svaki normalan graf G važi $\chi^e_\Sigma(G) \leq 3$.*

Žang [16], kao i Paramguru i Sampatkumar [17], postavili su pitanje da li postoji normalan graf G za koji je $\chi^e_m(G) < \chi^e_\Sigma(G)$. Jasno je da je $\chi^e_m(G) = 1$ samo u slučaju kada svaka dva susedna čvora grafa G imaju različit stepen, a tada je i $\chi^e_\Sigma(G) = 1$. To znači da, ukoliko stoji 1-2-3 hipoteza, za graf G sa $\chi^e_m(G) < \chi^e_\Sigma(G)$ mora biti $\chi^e_m(G) = 2$ i $\chi^e_\Sigma(G) = 3$. U narednoj teoremi dajemo, koliko je nama poznato, prvi primer grafa sa ovim svojstvima.

Teorema 1.3.3. *Za graf G prikazan na Slici 1.1 je $\chi^e_m(G) = 2$ i $\chi^e_\Sigma(G) = 3$.*

Dokaz teoreme je dat na kraju ovog poglavlja. Pre toga, izvodimo zaključke o bojenjima nekoliko pomoćnih grafova, koja kasnije koristimo u dokazu da za graf G sa Slike 1.1 postoji 2-msde-bojenje, i ne postoji 2-sde bojenje.

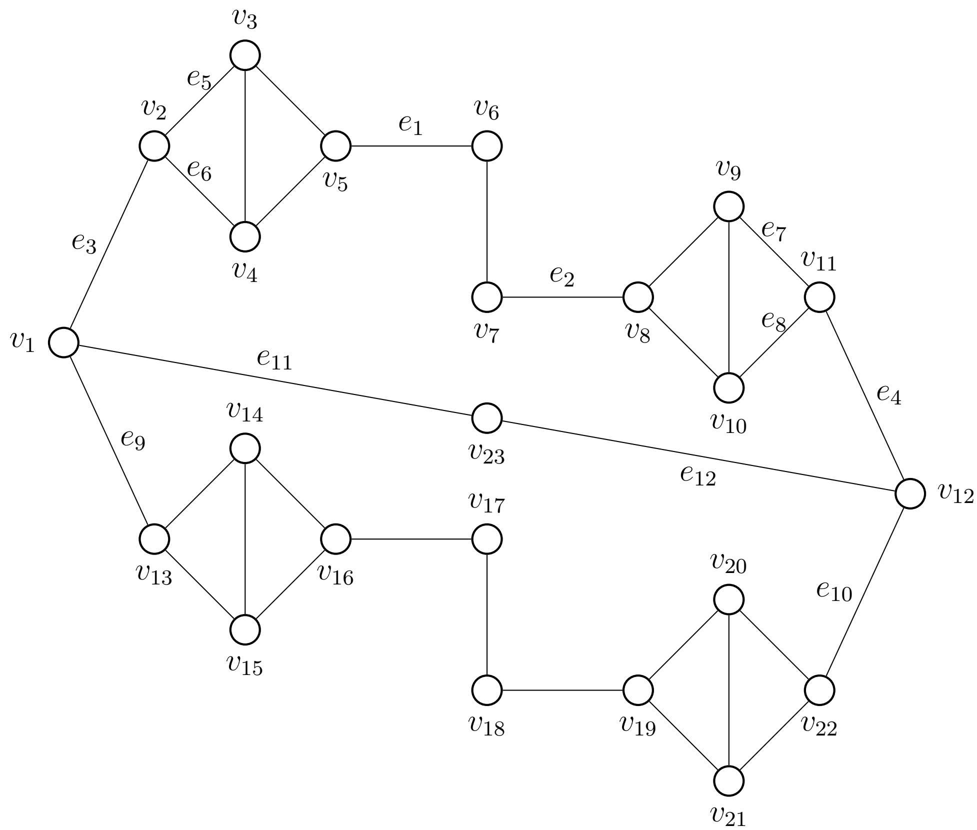
Neka je H neki indukovan podgraf grafa G. Za prikazivanje čvora v grafa H za koji je $N_G(v) = N_H(v)$ koristimo punu liniju, dok za prikazivanje čvorova koji mogu imati još susednih čvorova u G koji nisu u H koristimo isprekidanu liniju. To znači da čvor v_2 grafa H_1 prikazanog na Slici 1.2 koji je podgraf grafa G, od susednih čvorova ima samo v_1 i v_3, dok čvor v_1 može imati, pored čvora v_2, još susednih čvorova u G. Pre nego što pređemo na sledeću lemu uvodimo neke oznake koje nam olakšavaju zapisivanje iskaza. Za graf G i prirodan broj k definišemo skupove

$$\Phi_k(G) = \{\phi\colon \phi \text{ je } k\text{-msde-bojenje grafa G}\}$$

$$\Phi'_k(G) = \{\phi\colon \phi \text{ je } k\text{-sde-bojenje grafa G}\}$$

Pošto je za svako $\phi \in \Phi'_k(G)$ takođe i $\phi \in \Phi_k(G)$, imamo sledeću posledicu.

Slika 1.1: Graf G



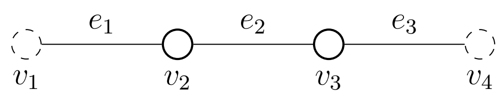
Posledica 1.3.4. *Za svaki graf G i svaki prirodan broj k važi*

$$\Phi'_k(G) \subseteq \Phi_k(G).$$

Lema 1.3.5. *Na Slici 1.2 je prikazan graf H_1 koji je indukovan podgraf proizvoljnog grafa G. Za svako $\phi \in \Phi_2(G)$ važi $\phi(e_1) \neq \phi(e_3)$.*

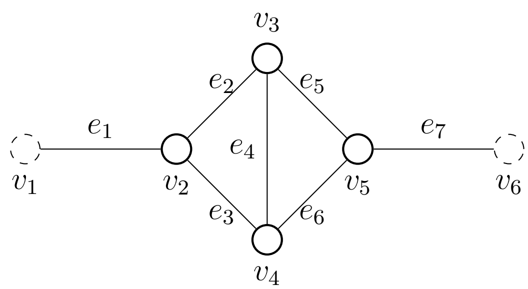
Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji $\phi \in \Phi_2(G)$, takvo da je $\phi(e_1) = \phi(e_3)$. Čvor v_2 je u grafu G, osim sa e_1, incidentan sa granom e_2, a čvor v_3 je u G, osim sa e_3, takođe incidentan sa e_2. Pošto je $\phi(e_1) = \phi(e_3)$, imamo code$(v_2) =$ code(v_3), a pošto su čvorovi v_2 i v_3 susedni u G, znači da $\phi \notin \Phi_2(G)$, što je kontradikcija. □

Slika 1.2: Graf H_1



Lema 1.3.6. *Na Slici 1.3 je prikazan graf H_2 koji je indukovan podgraf proizvoljnog grafa G. Za svako $\phi \in \Phi_2(G)$ važi $\phi(e_1) = \phi(e_7)$, $\phi(e_2) \neq \phi(e_3)$ i $\phi(e_5) \neq \phi(e_6)$.*

Slika 1.3: Graf H_2



Dokaz. Neka je $\phi \in \Phi_2(G)$. Pretpostavimo, bez gubitka opštosti, da je $\phi(e_1) = 1$. Razmatramo mogućnosti za boje grana e_2 i e_3.

- $\phi(e_2) = \phi(e_3) = 1$. Tada mora biti $\phi(e_5) \neq \phi(e_6)$, inače čvorovi v_3 i v_4 imaju isti kôd boja. Možemo uzeti da je $\phi(e_5) = 1$ i $\phi(e_6) = 2$. Ukoliko je $\phi(e_4) = 1$ tada $\text{code}(v_2) = \text{code}(v_3) = (3, 0)$, što ne sme biti slučaj, pošto su v_2 i v_3 susedni čvorovi. Dakle, mora biti $\phi(e_4) = 2$. Tada je $\text{code}(v_3) = (2, 1)$, $\text{code}(v_4) = (1, 2)$. Koju god boju od 1 ili 2 da odaberemo za $\phi(e_7)$, kôd čvora v_5 će biti jednak ili kodu čvora v_3 ili v_4, što pokazuje da ovakvo bojenje nije moguće.

- $\phi(e_2) = \phi(e_3) = 2$. Kao i u prethodnom slučaju, mora biti $\phi(e_5) \neq \phi(e_6)$. Možemo pretpostaviti da je $\phi(e_5) = 1$ i $\phi(e_6) = 2$. Ako odaberemo da je $\phi(e_4) = 1$ tada $\text{code}(v_4) = (1, 2) = \text{code}(v_2)$, a ako odaberemo da je $\phi(e_4) = 2$ tada $\text{code}(v_3) = (1,2) = \text{code}(v_2)$, što je ponovo kontradikcija.

- $\phi(e_2) \neq \phi(e_3)$. Možemo pretpostaviti da je $\phi(e_2) = 1$ i $\phi(e_3) = 2$. Imamo dve mogućnosti:

    1. $\phi(e_4) = 1$. Pošto je $\text{code}(v_2) = (2,1)$ mora biti $\phi(e_5) = 1$ i $\phi(e_6) = 2$. Ukoliko je sada $\phi(e_7) = 2$ tada je $\text{code}(v_5) = (1,2) = \text{code}(v_4)$, što znači da mora biti $\phi(e_7) = 1$. Ovako dobijeno bojenje je 2-msde-bojenje i za njega važe uslovi dati u tvrđenju teoreme.

    2. $\phi(e_4) = 2$. Da bi se razlikovali $\text{code}(v_2)$ i $\text{code}(v_3)$, mora biti $\phi(e_5) = 2$. Dalje, zbog $\text{code}(v_3) \neq \text{code}(v_4)$ mora biti $\phi(e_6) = 2$. Pošto je $\text{code}(v_3) = (2,1)$ a $\text{code}(v_4) = (3,0)$, dok je $\phi(e_5) = \phi(e_6) = 2$, koju god boju da dodelimo grani e_7, kôd čvora v_5 će biti jednak kodu čvora v_3 ili v_4, što je kontradikcija.

□

Lema 1.3.7. *Za svako $\phi \in \Phi_2(G)$, grafa G prikazanog na Slici 1.1, je* $\text{code}(v_1) \in \{(3,0),(0,3)\}$, $\text{code}(v_{12}) \in \{(3,0),(0,3)\}$, $\text{code}(v_1) \neq \text{code}(v_{12})$ *i* $\text{code}(v_{23}) = (1,1)$.

Dokaz. Na osnovu Leme 1.3.5 mora biti $\phi(e_1) \neq \phi(e_2)$. Iz Leme 1.3.6 zaključujemo da je $\phi(e_3) = \phi(e_1)$ i $\phi(e_4) = \phi(e_2)$, kao i da je $\phi(e_5) \neq \phi(e_6)$ i $\phi(e_7) \neq \phi(e_8)$. Iz toga sledi da je $\phi(e_3) \neq \phi(e_4)$, zatim da je $\text{code}(v_2) \in \{(2,1),(1,2)\}$, $\text{code}(v_{11}) \in \{(2,1),(1,2)\}$ i $\text{code}(v_2) \neq \text{code}(v_{11})$. Na isti način zaključujemo da $\phi(e_9) \neq \phi(e_{10})$, $\text{code}(v_{13}) \in \{(2,1),(1,2)\}$, $\text{code}(v_{22}) \in \{(2,1),(1,2)\}$ i $\text{code}(v_{13}) \neq \text{code}(v_{22})$. Dalje, imamo dve mogućnosti:

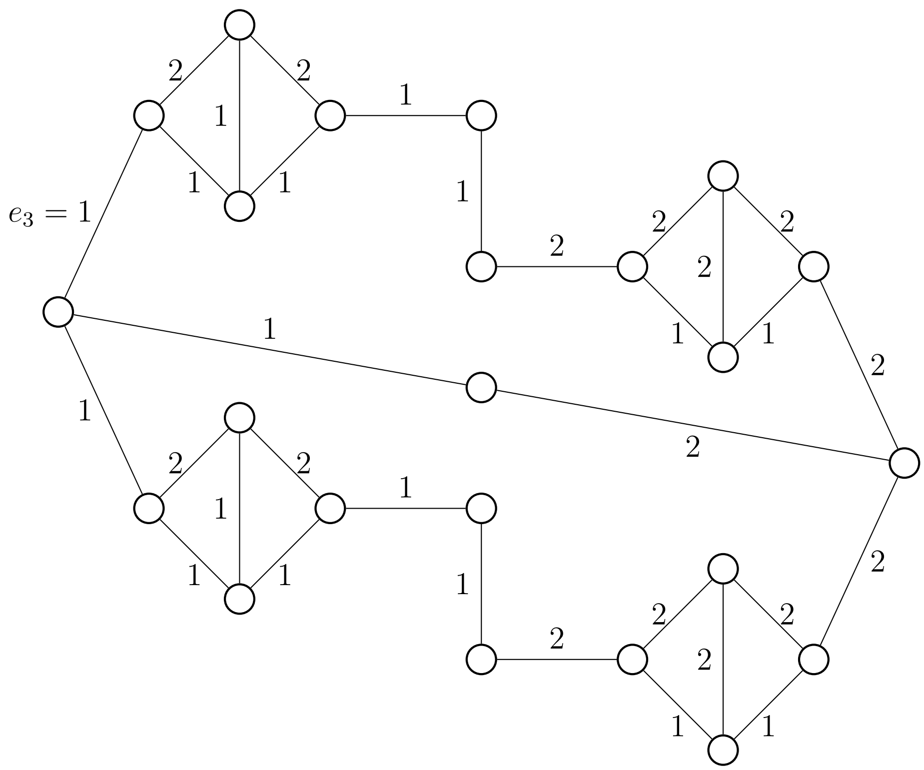
1. $\phi(e_3) \neq \phi(e_9)$. Možemo uzeti da je $\phi(e_3) = 1$ i $\phi(e_9) = 2$. Tada je $\text{code}(v_2) = (2,1)$ i $\text{code}(v_{13}) = (1,2)$. Za $\phi(e_{11}) = 1$ imamo $\text{code}(v_1) = \text{code}(v_2)$, dok za $\phi(e_{11}) = 2$ imamo $\text{code}(v_1) = \text{code}(v_{13})$, što je u suprotnosti sa tvrđenjem da je ϕ msde-bojenje.

2. $\phi(e_3) = \phi(e_9)$. Možemo uzeti da je $\phi(e_3) = 1$ i $\phi(e_9) = 1$. Kako je $\text{code}(v_2) = \text{code}(v_{13}) = (2,1)$, mora biti $\phi(e_{11}) = 1$. Dalje, mora biti $\phi(e_4) = 2$, $\phi(e_{10}) = 2$ i $\phi(e_{12}) = 2$. Zaključujemo da je $\text{code}(v_1) = (3,0)$, $\text{code}(v_{12}) = (0,3)$ i $\text{code}(v_{23}) = (1,1)$. U slučaju da smo birali da je $\phi(e_3) = 2$ i $\phi(e_9) = 2$ tada bismo dobili $\text{code}(v_1) = (0,3)$,

code$(v_{12}) = (3,0)$ i code$(v_{23}) = (1,1)$. To su jedine mogućnosti dozvoljenog bojenja iz skupa $\Phi_2(G)$ i obe su saglasne tvrđenju teoreme, čime je dokaz kompletiran.

$\square$

Slika 1.4: Graf G



Dokaz Teoreme 1.3.3. Jasno je da $\chi^e_m(G) \geq 2$, dok je na Slici 1.4 prikazano 2-msde-bojenje grafa G, što znači da je $\chi^e_m(G) = 2$. Iz Leme 1.3.7 imamo da za svako $\phi \in \Phi_2(G)$ važi code$(v_{23}) = (1,1)$, i jedan od čvorova v_1 i v_{23}, recimo v_1 ima kôd jednak $(3,0)$. Pošto je $\Phi'_k(G) \subseteq \Phi_k(G)$, za svako $\phi' \in \Phi'_2(G)$ važi $\phi'(v_1) = \phi'(v_{23}) = 3$, što je kontradikcija. Dakle, mora biti $\chi^e_\Sigma(G) \geq 3$. Jedno od mogućih bojenja $\phi' \in \Phi'_3(G)$ dobijamo kada u bojenju ϕ' grafa G svim granama sem e_3 dodelimo boje kao na Slici 1.4, i stavimo $\phi'(e_3) = 3$. Time je dokaz ove teoreme kompletiran. $\square$

1.4 Popravljena gornja granica za nesd-indeks

Totalno k-bojenje grafa G je mapiranje koje čvorovima i granama grafa G dodeljuje boje iz skupa $\{1,\dots,k\}$, pri čemu susednim i incidentnim elementima iz $V(G)\cup E(G)$ mogu biti dodeljene iste boje. Za dato totalno k-bojenje w grafa G definišemo funkciju σ preko $\sigma(v) = \sum_{u\in N(v)}(w(uv) + w(u))$, za svako $v \in V(G)$. Bojenje w nazivamo prošireno sused-razlikujuće bojenje po sumama, ili nesd-bojenje, ukoliko je $\sigma(v) \neq \sigma(u)$ za svaka dva susedna čvora v i u grafa G. Najmanji prirodan broj k za koji postoji nesd-bojenje grafa G nazivamo prošireni sused-razlikujući indeks po sumama, ili nesd-indeks, i označavamo ga sa $\mathrm{egndi}_{\sum}(G)$. Flandrin i ostali [18] su uveli i ispitivali nesd-bojenje, gde su i predložili sledeću hipotezu.

Hipoteza 1.4.1. *Za svaki graf G,* $\mathrm{egndi}_{\sum}(G) \leq 2$.

U istom radu proučavano je nesd-bojenje raznih klasa grafova, uključujući putanje, cikluse, kompletne grafove i drveće, dok je dokazana opšta gornja granica $\mathrm{egndi}_{\sum}(G) \leq \chi(G) + 1$. Naša naredna teorema daje poboljšanje ove granice.

Teorema 1.4.2. *Za svaki graf G,* $\mathrm{egndi}_{\sum}(G) \leq 3$.

Dokaz ove teoreme je izmešten u Poglavlje 1.4.1. Flandrin i ostali [18] su takođe dokazali sledeću teoremu.

Teorema 1.4.3. *Neka je G povezani bipartitni graf sa podelom $V(G) = \{X, Y\}$. Ukoliko bilo koji od skupova X i Y ima paran broj čvorova, ili postoji čvor neparnog stepena u G, tada* $\mathrm{egndi}_{\sum}(G) \leq 2$.

U narednoj teoremi proširujemo tvrđenje iz prethodne teoreme na sve bipartitne grafove.

Teorema 1.4.4. *Ukoliko je G bipartitni graf, tada* $\mathrm{egndi}_{\sum}(G) \leq 2$

Pored toga, pokazujemo da za svaki 3-regularan i svaki 4-regularan graf postoji nesd-bojenje pomoću boja 1 i 2.

Teorema 1.4.5. *Ukoliko je graf G 3-regularan ili 4-regularan, tada* $\mathrm{egndi}_{\sum}(G) \leq 2$.

U dokazima teorema koristimo narednu konvenciju. Za čvor v kažemo da ima parnu sumu ukoliko je $\sigma(v)$ paran broj, dok kažemo da ima neparnu sumu ukoliko je $\sigma(v)$ neparan broj.

1.4.1 Dokazi teorema

Dokaz Teoreme 1.4.2. U dokazu teoreme primenjujemo sličan pristup kao i Kalkovski i ostali [14] u dokazu Teoreme 1.3.1.

Ukoliko je tvrđenje teoreme zadovoljeno za svaki povezani graf, tada je zadovoljeno i za svaki graf sa više komponenti. Zbog toga, možemo pretpostaviti da je graf G povezan.

Dokazujemo nešto jače tvrđenje, odnosno, postoji totalno 3-bojenje w takvo da $\lfloor \frac{\sigma(u)}{2} \rfloor \neq \lfloor \frac{\sigma(v)}{2} \rfloor$ za svaka dva susedna čvora u i v u G. Neka je $V = V(G) = \{v_1, \ldots, v_k\}$ skup čvorova grafa G, poređanih u proizvoljnom redosledu. Neka je $E = E(G)$ skup grana grafa G i $w \colon E \cup V \to \{1, 2, 3\}$. Označimo sa $S_1(V, E, w, j)$ i $S_2(V, E, w, j)$ sledeća tvrđenja:

$$S_1(V,E,w,j)\colon \quad \text{Za svako } v_i, v_l \in V, \text{ gde je } v_i v_l \in E \text{ i } i < l \leq j, \\ \text{važi } \lfloor \tfrac{\sigma(v_i)}{2} \rfloor \neq \lfloor \tfrac{\sigma(v_l)}{2} \rfloor.$$

$$S_2(V,E,w,j)\colon \quad \text{Za svako } v_i \in V, \text{ gde je } j < i \leq k, \text{ važi } w(v_i) = 2, \\ \text{i } w(v_i u) = 2 \text{ za svako } v_i u \in E.$$

Počinjemo dodelom boje 2 svakom od čvorova iz V i svakoj grani iz E. Dakle, tvrđenja $S_1(V, E, w, 1)$ i $S_2(V, E, w, 1)$ su očigledno zadovoljena. Pretpostavimo da $S_1(V, E, w, j)$ i $S_2(V, E, w, j)$ važe za neko w i j, gde je $1 \leq j < k$. Neka je d oznaka za vrednost $\sigma(v_{j+1})$ u trenutnom bojenju w. Označimo sa $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ podskup skupa $\{v_1, \ldots, v_j\}$ čvorova susednih sa v_{j+1} u G. Dalje, označimo sa n_1 broj čvorova skupa U koji imaju neparnu sumu, a sa n_2 broj čvorova skupa U koji imaju parnu sumu, odakle $n_1 + n_2 = n$. Sada razmatramo moguća podešavanja boja čvora v_{j+1} i grana $u_l v_{j+1}$ za $u_l \in U$, pri kojima oba $S_1(V, E, w, j)$ i $S_2(V, E, w, j+1)$ ostaju zadovoljena.

1. Grane $u_l v_{j+1}$ imaju boju 2 za svako $l \in \{1, \ldots, n\}$. Dakle, možemo promeniti sa 2 na 3 boju bilo koje od n_2 grana koje spajaju v_{j+1} sa čvorovima iz U koji imaju parnu sumu, pri čemu $S_1(V, E, w, j)$ ostaje zadovoljeno. Takođe, možemo promeniti sa 2 na 1 boju bilo koje od n_1 grana koje spajaju v_{j+1} sa čvorovima iz U koji imaju neparnu sumu. Odavde zaključujemo da možemo podesiti boje ovih grana tako da dobijemo da $\sigma(v_{j+1})$ bude jednako bilo kojoj vrednosti iz skupa $\{d - n_1, \ldots, d + n_2\}$, pri čemu $S_1(V, E, w, j)$ ostaje zadovoljeno.

2. Promenom boje $w(v_{j+1})$ sa 2 na 1 i boje $w(u_l v_{j+1})$ sa 2 na 3, za svako $l \in \{1, \ldots, n\}$, vrednost $\sigma(v_{j+1})$ se povećava za n, dok $\sigma(u_l)$ ostaje isto

za svako $l \in \{1, \ldots, n\}$. Sada, možemo promeniti sa 3 na 2 boju bilo koje od n_1 grana koje spajaju v_{j+1} sa čvorovima iz U koji imaju neparnu sumu, tako da $S_1(V, E, w, j)$ ostane zadovoljeno. Dakle, možemo postići da $\sigma(v_{j+1})$ bude jednako bilo kojoj vrednosti iz skupa $\{d+n_2, \ldots, d+n\}$.

3. Promenom boje $w(v_{j+1})$ sa 2 na 3 i boje $w(u_l v_{j+1})$ sa 2 na 1, za svako $l \in \{1, \ldots, n\}$, vrednost $\sigma(v_{j+1})$ se smanjuje za n, dok $\sigma(u_l)$ ostaje isto za svako $l \in \{1, \ldots, n\}$. Slično prethodnom slučaju, možemo postići da $\sigma(v_{j+1})$ bude jednako bilo kojoj vrednosti iz skupa $\{d-n, \ldots, d+n_1\}$, pri čemu $S_1(V, E, w, j)$ ostaje zadovoljeno.

Sve ukupno, možemo podesiti da vrednost $\sigma(v_{j+1})$ bude jednaka bilo kojoj vrednosti iz $\{d-n, \ldots, d+n\}$, dok tvrđenje $S_1(V, E, w, j)$ ostaje zadovoljeno. Pošto v_{j+1} ima n suseda koja joj prethode u V, dok postoji $2n+1$ dostižnih vrednosti za $\sigma(v_{j+1})$, možemo podesiti boje čvora v_{j+1} i grana $u_l v_{j+1}$, $u_l \in U$, tako da važi $S_1(V, E, w, j+1)$. U gore opisanom postupku ne menjamo boje niti jednog čvora $v_l \in V$, niti boje grana incidentnih sa v_l, za $l > j+1$. Dakle, važi $S_2(V, E, w, j+1)$. Nastavljajući sa ovim postupkom do $j+1 = k$, dobijamo željeno bojenje. $\square$

U dokazu Teoreme 1.4.4 pratimo ideju koju su koristili Kalkovski i ostali [15], i kasnije Flandrin i ostali [18] u dokazu Teoreme 1.4.3.

Dokaz Teoreme 1.4.4. Kao i u dokazu Teoreme 1.4.2, dovoljno je da pokažemo da teorema važi za sve povezane grafove. Dakle, pretpostavimo da je G povezan graf. Ukoliko neki od skupova X i Y ima paran broj čvorova, ili ukoliko postoji čvor neparnog stepena u G, tvrđenje je zadovoljeno, po Teoremi 1.4.3. Zbog toga, možemo pretpostaviti da i X i Y imaju neparan broj čvorova, kao i da svi čvorovi iz G imaju paran stepen. Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_{2k+1}\}$. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da skup X sadrži čvor čiji je stepen jednak $\delta(G)$, i da je x_{2k+1} takav čvor. Prvo, dodeljujemo boju 2 svakoj grani grafa G i svakom čvoru iz X, dok svim čvorovima iz Y dodeljujemo boju 1. Pošto svaki čvor iz G ima paran stepen, vrednost $\sigma(v)$ je u početku parna za svako $v \in X \cup Y$. Sada menjamo boju nekih grana iz G tako da $\sigma(x_i)$ postane neparno, za svako $1 \leq i \leq 2k$ dok $\sigma(y)$ ostaje parno za svako $y \in Y$. Na kraju podešavanja, dokazujemo da važi $\sigma(x_{2k+1}) < \sigma(y)$ za svako $y \in N(x_{2k+1})$, odakle sledi tvrđenje teoreme. Neka je P_i oznaka za neki put između x_{2i-1} i x_{2i}, za $1 \leq i \leq k$. Proizvoljnim redosledom za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$ radimo sledeće. Svakoj grani na putanji P_i menjamo boju, odnosno, umesto boje 1 dodeljujemo joj boju 2, a umesto boje 2 dodeljujemo joj boju 1. Na ovaj način, posle izmena boja za P_i, parnost broja $\sigma(u)$ ostaje ista za svako u na putanji P_i, gde je $u \notin \{x_i, x_{i+1}\}$, dok se menja parnost brojeva $\sigma(x_i)$ i $\sigma(x_{i+1})$. Po završetku gore opisane procedure, imamo da je $\sigma(x_l)$ neparno za svako $1 \leq l \leq 2k$, dok je $\sigma(y)$ parno za svako $y \in Y$. Dalje, neka je $y \in Y$ proizvoljni sused čvora x_{2k+1}, i neka je $d = \deg(x_{2k+1})$. Pošto je $d = \delta(G)$, imamo $d \leq \deg(y)$. Svakom susednom čvoru od x_{2k+1} dodeljena je boja 1, odakle imamo $\sigma(x_{2k+1}) \leq 3(d-1) + w(x_{2k+1}y) + 1$. Sa druge strane, svakom susednom čvoru od y je dodeljena boja 2, odakle imamo $\sigma(y) \geq 3(d-1) + w(x_{2k+1}y) + 2 > \sigma(x_{2k+1})$. Najzad, pošto je čvor y proizvoljno odabran iz skupa $N(x_{2k+1})$, imamo $\sigma(x_{2k+1}) < \sigma(y)$ za svako $y \in N(x_{2k+1})$, čije dokaz kompletiran. □

Dokaz naredne teoreme je ogranizovan na sledeći način. Počinjemo sa nekim valjanim bojenjem čvorova c grafa G. Zatim, definišemo bojenje w pomoću boja 1 i 2, tako što svakom $v \in V(G)$ dodeljujemo boju u zavisnosti od $c(v)$, dok svakom $vu \in E(G)$ dodeljujemo boju u zavisnosti od $c(v)$ i $c(u)$. Konačno, podešavamo neke od ovih boja i dokazujemo da je dobijeno bojenje nesd-bojenje.

Dokaz Teoreme 1.4.5. Neka je G k-regularan graf, gde je $k \in \{3, 4\}$. Flandrin i ostali [18] su dokazali da važi $\text{egndi}_{\sum}(G) = 2$ za svaki kompletan graf G. Zbog toga, možemo pretpostaviti da, za obe vrednosti k, graf G nije kompletan. Dakle, prema Bruksovoj teoremi važi $\chi(G) \leq k$. Neka je c valjano bojenje čvorova grafa G pomoću boja iz skupa $\{1, \dots, k\}$. Dalje, neka su V_i, $1 \leq i \leq k$, klase obojivosti grafa G, prema bojenju c, odnosno $v \in V_i$ za svako $v \in V(G)$ za koje je $c(v) = i$. Možemo pretpostaviti da svaki čvor v iz V_j, za svako $j \in \{2, \dots, k\}$, ima barem jednog suseda u svakom V_i, gde je $i < j$. Inače, dok god postoji $v \in V_j$ takav da nema suseda u V_i, za neko $i \in \{1, \dots, j-1\}$, premeštamo v u V_i. Na ovaj način, skupovi V_i ostaju nezavisni za svako $i \in \{1, \dots, k\}$, dok bojenje c ostaje valjano bojenje pomoću k boja.

Neka je w neko totalno bojenje grafa G pomoću boja iz skupa $\{1, 2\}$. Sada, u odnosu na bojenje w, definišemo funkciju $s\colon V(G) \to \mathbb{N}$ preko izraza

$$s(v) = 3\deg_G(v) - \sigma(v),$$

gde je $\sigma(v) = \sum_{u \in N(v)} (w(uv) + w(u))$ i $v \in V(G)$. Za bilo koja dva susedna čvora v i u regularnog grafa G važi $s(v) = s(u)$ ako i samo ako $\sigma(v) = \sigma(u)$. Dakle, dovoljno je da dokažemo da važi $s(v) \neq s(u)$, za svako $vu \in E(G)$.

Prvo, dokazujemo slučaj kada je G 3-regularan graf. Kao što je ukazano ranije, možemo pretpostaviti da važi $\chi(G) \leq 3$. Neka je c valjano bojenje čvorova grafa G pomoću boja iz skupa $\{1, 2, 3\}$, i neka su V_1, V_2 i V_3 klase obojivosti prema bojenju c. Možemo pretpostaviti da svaki čvor iz V_j, gde je $1 < j \leq 3$, ima suseda u V_i, za svako $i \in \{1, \ldots, j-1\}$. Sada definišemo bojenje w na sledeći način. Za svako $v \in V_i$, gde $i \in \{1, 3\}$, dodeljujemo $w(v) = 1$, dok za svako $v \in V_2$, dodeljujemo $w(v) = 2$. Dalje, za svako $uv \in E(G)$, ukoliko je $c(u)$ ili $c(v)$ jednako 3, dodeljujemo $w(uv) = 2$; inače, dodeljujemo $w(uv) = 1$. Za svako $v \in V_i$, važi sledeće.

1. $s(v) = 0$ za $i = 1$.

2. $s(v) < 0$ za $i = 2$, pošto v ima barem jednog suseda u V_1.

3. $s(v) > 0$ za $i = 3$, pošto v ima barem jednog suseda u V_2.

Pošto je V_i nezavisan skup za svako $i \in \{1, 2, 3\}$, sledi $\sigma(v) \neq \sigma(u)$ za svaka dva susedna čvora v i u grafa G. Time je završen dokaz slučaja $k = 3$.

Sada dokazujemo tvrđenje teoreme za proizvoljan 4-regularan graf G. Kao i pre, možemo pretpostaviti da važi $\chi(G) \leq 4$. Neka je c valjano bojenje čvorova grafa G pomoću boja iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$, i neka su V_1, V_2, V_3 i V_4 klase obojivosti prema bojenju c. Ponovo možemo pretpostaviti da svaki čvor iz V_j, gde je $1 < j \leq 4$, ima barem jednog suseda u V_i, za svako $i \in \{1, \ldots, j-1\}$. Bojenje w definišemo da sledeći način. Svakom čvoru iz V_i dodeljujemo boju 1 za $i \in \{1, 3\}$, dok mu dodeljujemo boju 2 za $i \in \{2, 4\}$. Svakoj grani koja spaja čvor iz V_1 sa čvorom iz V_2, kao i svakoj grani koja je incidentna sa čvorom iz V_4, dodeljujemo boju 1; svim ostalim granama dodeljujemo boju 2. Za svako $v \in V_i$, imamo sledeće.

1. $s(v) = 0$ za $i = 1$.

2. $s(v) < 0$ za $i = 2$, pošto v ima barem jednog suseda u V_1.

3. $s(v) > 0$ za $i = 3$, pošto v ima barem jednog suseda u V_2.

4. $s(v) \in \{-2, -3\}$ za $i = 4$, pošto v ima barem jednog suseda u V_1, kao i u V_3.

Dakle, za susedne čvorove v i u može biti $s(v) = s(u)$ samo u slučaju kada $v \in V_4$ i $u \in V_2$. Sada, da bismo dobili da w bude nesd-bojenje, podešavamo boje nekih čvorova i njima incidentnih grana.

1. Dok god postoji $v \in V_4$ za koji je $s(v) = -2$, radimo sledeće. Vrednost $s(v)$ jednaka je -2 samo kada v ima tačno jednog suseda u V_1 i u V_3, a dva suseda u V_2. Označimo sa $\{v_1, v_2', v_2'', v_3\}$ susede čvora v, pri čemu $v_1 \in V_1$, $v_2', v_2'' \in V_2$ i $v_3 \in V_3$. U zavisnosti od vrednosti $s(v_3)$, razmatramo dva slučaja.

   (a) $s(v_3) = 2$. Težine menjamo na sledeći način: $w(v) = 1$, $w(v_1 v) = 2$. Posle primene ovih izmena, imamo $s(v_1) = 0$, $s(v_2') \leq -2$, $s(v_2'') \leq -2$, $s(v_3) = 1$, dok je $s(v) = -1$.

   (b) $s(v_3) = 1$. Primenjujemo sledeće izmene: $w(v) = 1$, $w(v_1 v) = 2$, $w(v_2' v) = 2$, $w(v_2'' v) = 2$, $w(v_3 v) = 2$. Posle ovih izmena, vrednosti $s(v_1)$, $s(v_2')$, $s(v_2'')$ i $s(v_3)$ ostaju iste kao i pre, dok je sada $s(v) = 2$. Dakle, $s(v)$ se sada razlikuje od $s(u)$ za svako $u \in N(v)$.

2. Dok god postoji $v \in V_4$ za koji je $s(v) = -3$, radimo sledeće. Iz $s(v) = -3$ sledi da v ima samo jednog suseda u iz V_2. Ukoliko $s(u) \neq -3$, tada je $s(v)$ različito od $s(x)$, za svako $x \in N(v)$ i nema potrebe za izmenom boja. Inače, iz $s(u) = -3$ sledi da u nema suseda u V_3, a takođe svaka grana incidentna sa u ima boju 1. Sada, menjamo boju čvora u u 1, dok boje grana incidentnih sa u menjamo u 2. Ovako, vrednost $s(y)$ ostaje ista za svako $y \in N(u)$, dok vrednost $s(u)$ postaje 1. Čvor u nema suseda u V_3 dok $s(y) \neq 1$, za svako $y \in V_4$. Dakle, vrednost $s(u)$ se razlikuje od $s(y)$, za svako $y \in N(u)$. Takođe, sada imamo $s(v) \neq s(x)$ za svako $x \in N(v)$.

Po završetku gore opisanog postupka, imamo $s(v) \neq s(u)$ za svako $uv \in E(G)$, čime je dokaz teoreme kompletiran. $\square$

1.5 Sused-razlikujući hromatski indeks grafa

Za graf G i bilo koje $S \subseteq E(G)$, *podgraf indukovan granama* G[S] je podgraf grafa G kod koga je skup grana jednak S dok se skup čvorova sastoji od krajnjih čvorova grana iz S. Podela grana (eng. edge-partition) grafa G na podgrafove $G_1, \ldots, G_n$ je dekompozicija grafa G koja zadovoljava $V(G) = \bigcup_{i=1}^{m} V(G_i)$, $E(G) = \bigcup_{i=1}^{m} E(G_i)$ i $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$ za svaki par $i \neq j$.

Neka je dato valjano bojenje grana $\phi : E(G) \to \{1, \ldots, k\}$ normalnog grafa G, i neka je $C_\phi(v)$ skup boja dodeljenih granama incidentnim sa čvorom v. Bojenje ϕ nazivamo *sused-razlikujuće bojenje grana* (ili kratko *nde-bojenje*) ukoliko je $C_\phi(v) \neq C_\phi(u)$ za bilo koji par susednih čvorova v i u. *Sused-razlikujući indeks grafa G*, u oznaci $\chi'_a(G)$, je najmanji broj k za koji G ima k-nde-bojenje. Jasno je da graf ima nde-bojenje samo ukoliko je normalan, tako da ćemo ispitivati samo nde-bojenje normalnih grafova.

Žang, Liu i Vang [3] su uveli i ispitivali sused-razlikujuće bojenje grana grafa. Od njih potiče i naredna hipoteza.

Hipoteza 1.5.1. *Za svaki normalan graf G različit od 5-ciklusa važi $\chi'_a(G) \leq \Delta(G) + 2$.*

Akbari, Bidhori i Nosrati [4] su dokazali da za svaki normalan graf G važi $\chi'_a(G) \leq 3\Delta(G)$. Žang, Vang i Lih [5] su popravili gornju granicu dokazavši da važi $\chi'_a(G) \leq \frac{5}{2}\Delta(G) + 5$. Vang, Vang i Huo [12] su dalje pomerili gornju granicu, i njihov rezultat $\chi'_a(G) \leq \frac{5}{2}\Delta(G)$ je do sada najbolji po pitanju ove vrednosti. Glavni doprinos autora po pitanju nde-bojenja je naredna popravljena gornja granica za $\chi'_a(G)$.

Teorema 1.5.2. *Za svaki normalan graf G važi $\chi'_a(G) \leq 2\chi'(G)$.*

Prema Vizingovoj teoremi je $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, odakle proizilazi sledeća posledica.

Posledica 1.5.3. *Za svaki normalan graf G važi $\chi'_a(G) \leq 2\Delta(G) + 2$.*

Osim toga, za normalan graf G kod koga je $\Delta(G) = 2^k$, gde je k prirodan broj veći od 1, vrednost $\chi'_a(G)$ ne prelazi $2\Delta(G)$, što dokazujemo u narednoj teoremi.

Teorema 1.5.4. *Za svaki normalan graf G sa $\Delta(G) \leq 2^k$, gde je k prirodan broj veći od 1, važi $\chi'_a(G) \leq 2^{k+1}$.*

Dokazi Teorema 1.5.2 i 1.5.4 su izmešteni u Poglavlje 1.5.2, a pre toga dajemo tvrđenja koja koristimo u dokazima ovih teorema.

1.5.1 Pomoćna tvrđenja

Balister i ostali [6] su dokazali prvi deo, dok su Vang i ostali [12] dokazali drugi i treći deo naredne teoreme.

Teorema 1.5.5. *Neka je G normalan graf.*

1. *Ukoliko $\Delta(G) \leq 3$, tada $\chi'_a(G) \leq 5$.*
2. *Ukoliko $\Delta(G) \leq 4$, tada $\chi'_a(G) \leq 8$.*
3. *Ukoliko $\Delta(G) \leq 5$, tada $\chi'_a(G) \leq 10$.*

Naredna lema i teorema, koju su dokazali Žang i ostali [5], glavno su oruđe korišćeno za dobijanje do sada najboljih gornjih granica za $\chi'_a(G)$.

Lema 1.5.6. *Ukoliko normalan graf G ima podelu grana na dva normalna grafa G_1 i G_2, tada $\chi'_a(G) \leq \chi'_a(G_1) + \chi'_a(G_2)$.*

Teorema 1.5.7. *Neka je G normalan graf sa $\Delta(G) \geq 6$. Tada postoji podela grana grafa G na normalne grafove H_1 i H_2, tako da važi:*

1. $\Delta(H_1) \leq 3$,
2. $\Delta(H_2) \leq \Delta(G) - 2$.

Vang i ostali [12] su dobili granicu $\chi'_a(G) \leq \frac{5}{2}\Delta(G)$ učestalom primenom prethodne teoreme, i oslanjanjem na vrednosti $\chi'_a(H)$ za grafove kod kojih je $\Delta(H) \leq 5$.

Mi predlažemo postupak koji je takođe zasnovan na podeli grana na normalne grafove, i zatim koristimo tvrđenje Leme 1.5.6. Razlika je u tome što mi izvodimo podelu grana grafa G sa $\chi'_a(G) = k$ na normalne grafove H_1 i H_2, za koje važi $\chi'_a(H_1) \leq 4$ i $\chi'(H_2) \leq k - 2$. Kao posledicu, korišćenjem granica iz Teoreme 1.5.5 dobijamo da $\chi'_a(G) \leq 2\chi'(G)$ važi za svaki normalan graf G.

Neka je $\mathrm{w}_G\colon E(G) \to \mathbb{N}$ funkcija definisana sa:

$$\mathrm{w}_G(uv) = \deg(u) + \deg(v),$$

za svako $uv \in E(G)$.

Tvrđenje naredne teoreme koristimo u dokazima Teorema 1.5.2 i 1.5.4, kako bismo dokazali da minimalni protiv-primer grafa na sadrži granu uv za koju je $\mathrm{w}_G(uv) \leq \Delta(G) + 2$.

Teorema 1.5.8. *Pretpostavimo da postoji povezan graf G sa $\Delta(G) \geq 4$, i $\chi'_a(G) > 2k$, gde je $\Delta(G) \leq k$. Ukoliko $\mathrm{w}_G(uv) \leq \Delta(G) + 2$ za neku granu $uv \in E(G)$, tada postoji normalan graf H za koji je $\Delta(H) \leq \Delta(G)$, $|E(H)| < |E(G)|$, i $\chi'_a(H) > 2k$.*

Dokaz. Pretpostavimo da tvrđenje nije tačno. Neka je uv grana grafa G za koju je $\mathrm{w}_G(uv) \leq \Delta(G) + 2$, i neka je $H = G - uv$. Jasno je da važi $\Delta(H) \leq \Delta(G)$ i $|E(H)| < |E(G)|$. Prema tome, ukoliko je H normalan graf, tada $\chi'_a(H) \leq 2k$. Neka je L skup boja $\{1, \ldots, 2k\}$.

Pretpostavimo prvo da H nije normalan graf. Pošto je G normalan graf, sledi da jedan od čvorova u i v, recimo v, ima samo jedan susedan čvor w u H, pri čemu je $\deg_H(w) = 1$. Neka je sada $H' = G - vw$. Tada $\deg_{H'}(v) = 1$ i $\deg_{H'}(w) = 0$. Pošto je G povezani graf sa $\Delta(G) \geq 4$, sledi $\deg_{H'}(u) > 1$. Dakle, graf H' je normalan, i stoga postoji nde-bojenje σ grafa H' pomoću boja iz skupa L. Dalje, neka je ϕ bojenje grana grafa G sa $\phi(e) = \sigma(e)$ za svako $e \in E(H')$. Grani vw dodeljujemo bilo koju boju iz L koja se razlikuje od $\phi(uv)$, i ukoliko $\deg_G(u) = \deg_G(v) = 2$, boju koja nije u $C_\phi(u)$. Pošto je $|L| > 2$, ovo uvek možemo izvesti. Dakle, ϕ je nde-bojenje sa $2k$ ili manje boja, što je kontradikcija.

Dakle, možemo pretpostaviti da je H normalan graf, zbog čega imamo $\chi'_a(H) \leq 2k$. U zavisnosti od toga da li u i v imaju zajedničkog suseda, razmatramo dva slučaja.

1. $N_G(u) \cap N_G(v) = \emptyset$.
   Neka je H' graf dobijen ukljanjanjem čvorova u i v i njima incidentnih grana iz G, i zatim dodavanjem čvora w i grana ww' za svako $w' \in (N_G(u) - v) \cup (N_G(v) - u)$. Pošto je $\deg_{H'}(w) = \deg_G(u) + \deg_G(v) - 2 \leq \Delta(G)$, sledi $\Delta(H') \leq \Delta(G)$. Dakle, imamo $|E(H')| < |E(G)|$ i zbog toga $\chi'_a(H') \leq 2k$. Neka je σ' nde-bojenje grafa H' bojama iz skupa L. Sada definišemo bojenje grana σ grafa H, na sledeći način:

   - za svako $x \in N_H(u) - v$ dodelimo $\sigma(ux) = \sigma'(wx)$,
   - za svako $y \in N_H(v) - u$ dodelimo $\sigma(vy) = \sigma'(wy)$,
   - svim ostalim granama iz H, dodeljujemo boju koju toj grani dodeljuje σ'.

   Bojenje grana σ je valjano, ali nije obavezno i nde-bojenje grafa H. Pošto su bojenjem σ' svim granama u H' incidentnim sa čvorom w dodeljene različite boje, imamo $C_\sigma(u) \cap C_\sigma(v) = \emptyset$. Sada definišemo nde-bojenje ϕ grafa G bojama iz L, što proizvodi kontradikciju. Svakoj grani iz $E(G) - uv$ dodeljujemo istu boju kao i σ. Ostalo nam je još da obojimo granu uv. Pretpostavimo prvo da je $\mathrm{w}_G(uv) < k+2$. Tada je $|C_\sigma(u) \cup C_\sigma(v)| \leq k-1$. Takođe, postoji najviše $k-1$ boja koje izbegavamo da bismo dobili da $C_\phi(u)$ bude različito od $C_\phi(u')$ za svako $u' \in N_G(u) - v$, kao i da $C_\phi(v)$ bude različito od $C_\phi(v')$ za svako $v' \in N_G(v) - u$. Stoga, bojimo uv bilo kojom od preostalih boja iz L. Pošto je $C_\phi(u) \neq C_\phi(v)$, ϕ je nde-bojenje grafa G pomoću $2k$ boja, što je kontradikcija. Dakle, možemo pretpostaviti da je $\mathrm{w}_G(uv) = k+2$. Neka je $d = \deg_H(u) = \deg_G(u) - 1$, $L_1 = \{1, \ldots, d\}$ i $L_2 = \{1, \ldots, k-d\}$. Neka su u_i, gde je $i \in L_1$, čvorovi iz $N_G(u) - v$, i neka su v_j, gde je $j \in L_2$, čvorovi iz $N_G(v) - u$. Možemo pretpostaviti da $\phi(uu_i) = i$ za svako $i \in L_1$, $\phi(vv_j) = d + j$ za svako $j \in L_2$, i $d \leq \frac{k}{2}$. Ukoliko postoji boja, recimo l, iz $K = \{k+1, \ldots, 2k\}$ takva da $C_\sigma(u) \cup \{l\} \neq C_\phi(u_i)$ za svako $i \in L_1$ i $C_\sigma(v) \cup \{l\} \neq C_\phi(v_j)$ za svako $j \in L_2$, grani uv dodeljujemo boju l. Dobijeno bojenje ϕ je nde-bojenje bojama iz L, što je kontradikcija. Dakle, možemo pretpostaviti da je $C_\phi(u_i) = \{1, \ldots, d\} \cup \{k+i\}$ za svako $i \in L_1$, kao i da je $C_\phi(v_j) = \{d+1, \ldots, k\} \cup \{k+d+j\}$ za svako $j \in L_2$. Dalje, menjamo boju grane uu_1, čuvajući bojenje valjanim, i $C_\phi(u_1) \neq C_\phi(x)$ za svako $x \in N_G(u_1) - u$. Znamo da $C_\sigma(u) \subset C_\phi(u_1)$ i $|C_\phi(u_1)| = d+1$. Takođe $|N_G(u_1) - u| = d$, dok je $d \leq \frac{k}{2}$. Prema tome, da bismo posle izmene boje grane uu_1 sačuvali bojenje grana valjanim, i $C_\phi(u_1) \neq C_\phi(x)$ za svako $x \in N_G(u_1) - u$, izbegavamo ne više od $2d+1 \leq k+1$ boja. Boju grane uu_1 menjamo u bilo koju od preostalih $k-1$ boja. Najzad, dodeljujemo boju 1 grani uv. Ovako definisano bojenje ϕ je nde-bojenje grafa G pomoću $2k$ boja, što je kontradikcija.

2. $N_G(u) \cap N_G(v) \neq \emptyset$.

   Neka je w jedan od zajedničkih suseda čvorova u i v u H. Neka je σ nde-bojenje grafa H bojama iz L. Dalje, neka je ϕ bojenje grana grafa G koje dodeljuje iste boje kao σ svim granama iz $G - uv$. Pošto je $\mathrm{w}_G(uv) \leq k+2$ i $N_H(u) \cap N_H(v) \neq \emptyset$, imamo $|N_H(u) \cup N_H(v)| < k$. Dakle, postoji najviše $k-1$ čvorova u H koji su susedni barem sa jednim od čvorova iz $\{u, v\}$. Takođe, postoji najviše k grana susednih sa uv u G. Stoga, možemo odabrati za uv barem jednu boju iz L, nazovimo je l, tako da bojenje bude valjano, kao i da $C_\phi(u) \neq C_\phi(u')$ za svako $u' \in N_G(u) - v$, i $C_\phi(v) \neq C_\phi(v')$ za svako $v' \in N_G(v) - u$. Ukoliko $C_\sigma(u) \neq C_\sigma(v)$, dodelimo boju l grani uv, i dobijamo nde-bojenje ϕ. U opisanom bojenju je korišćeno $2k$ ili manje boja, što protivreči pretpostavci da je $\chi'_a(G) > 2k$. Prema tome, možemo pretpostaviti da $C_\sigma(u) = C_\sigma(v)$, odakle sledi $\deg_H(u) = \deg_H(v) = s$ i $k \geq 2s$. Sada menjamo u ϕ boje grana uw i vw, dok zadržavamo bojenje valjanim i pazimo da $C_\phi(w)$ ostane različito od $C_\phi(x)$ za svako $x \in N_G(w) \setminus \{u, v\}$. Neka je $n = |N_G(w) \setminus \{u, v\}|$. Pošto $\Delta(G) \leq k$, imamo $n \leq k - 2$. Neka je $L_1 = \{\sigma(uw)\} \cup L \setminus (C_\sigma(u) \cup C_\sigma(w))$ i $L_2 = \{\sigma(vw)\} \cup L \setminus (C_\sigma(v) \cup C_\sigma(w))$. Imamo da je

$$|L_1| \geq 2k - (k - 2 + s) + 1 = k - s + 3 \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 3$$

i $|L_2| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 3$. Dalje, biramo za uw boju iz L_1 i za vw boju iz L_2, tako da $\phi(uw) \neq \phi(vw)$ i $C_\phi(w) \neq C_\phi(x)$ za svako $x \in N_G(w) \setminus \{u, v\}$. Označimo sa $\mathcal{A}$ skup $\{\{l_1, l_2\} \colon l_1 \in L_1,\ l_2 \in L_2,\ l_1 \neq l_2\}$, odnosno, $\mathcal{A}$ je familija svih mogućih skupova $\{\phi(uw), \phi(vw)\}$ gde važi $\phi(uw) \neq \phi(vw)$, dok je $\phi(uw) \in L_1$ i $\phi(vw) \in L_2$. Neka je $m = |\mathcal{A}|$. Imamo

$$m \geq \binom{\lceil \frac{k}{2} \rceil + 3}{2},$$

i stoga $8m \geq k^2 + 10k + 24$. Pošto je $8n \leq 8k - 16$, imamo $8(m - n) \geq k^2 + 2k + 40$, i odatle $m - n > 5$. Dakle, postoje $l_1 \in L_1$ i $l_2 \in L_2$ takvi da

(a) $l_1 \neq l_2$,

(b) $\sigma(uw) \neq l_1$ ili $\sigma(vw) \neq l_2$,

(c) $l_1 \notin (C_\phi(u) \cup C_\sigma(w)) - \sigma(uw)$,

(d) $l_2 \notin (C_\phi(v) \cup C_\sigma(w)) - \sigma(vw)$,

(e) $C_\sigma(x) \neq (C_\sigma(w) \setminus \{\sigma(uw), \sigma(vw)\}) \cup \{l_1, l_2\}$, za svako $x \in N_G(w) \setminus \{u, v\}$.

Sada, dodeljujemo boju l_1 grani uw, a boju l_2 grani vw. Pošto su skupovi $C_\sigma(u)$ i $C_\sigma(v)$ u početku bili jednaki, posle promene boja uw i vw oni se razlikuju. Konačno, kao što je ranije pokazano, postoji barem jedna boja koja može biti korišćena za uv tako da se dobije ndebojenje pomoću $2k$ boja. Ovo je kontradikcija, čime je dokaz teoreme kompletiran.

$\square$

Tvrđenje naredne teoreme nam je potrebno u osnovnom koraku indukcije dokaza Teoreme 1.5.2.

Lema 1.5.9. *Za svaki normalan graf G sa $2 \leq \chi'(G) \leq 5$ važi $\chi'_a(G) \leq 2\chi'(G)$.*

Dokaz. Za $\chi'(G) = 2$ svaka od komponenti grafa G je ili parni ciklus ili putanja dužine 2 ili više. Žang i ostali [3] su dokazali da $\chi'_a(C_k) \leq 4$ za svako $k \neq 5$, kao i da je $\chi'_a(P_n) \leq 3$ za svako $n \geq 2$. Dakle, teorema je zadovoljena za $\chi'(G) = 2$. Iz Teoreme 1.5.5 imamo da je $\chi'_a(G) \leq 2\Delta(G)$ kada je $3 \leq \Delta(G) \leq 5$. Pošto za svaki graf važi $\Delta(G) \leq \chi'(G)$, imamo $\chi'_a(G) \leq 2\chi'(G)$ za $3 \leq \chi'(G) \leq 5$. $\square$

U dokazu Teoreme 1.5.2 nam je neophodno i tvrđenje naredne teoreme.

Teorema 1.5.10. *Neka su G i F normalni grafovi takvi da $G \subseteq F$ i $\chi'(G) = 2$. Dalje, neka je $H = F[E(F) \setminus E(G)]$, i neka su H_j, $j \in \{1, \dots, l\}$, komponente grafa H. Ukoliko je $H_j = (x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3})$ putanja dužine 2 za svako $j \in \{1, \dots, l\}$, sa $\deg_G(x_{j_1}) = 2$ i $\deg_G(x_{j_2}) = \deg_G(x_{j_3}) = 0$, tada $\chi'_a(F) \leq 4$.*

Dokaz. Pošto važi $\Delta(G) \leq \chi'(G)$, imamo da je $\Delta(G) = 2$, dok je $\chi'_a(G) \leq 4$, prema Lemi 1.5.9. Neka je σ nde-bojenje grafa G bojama iz skupa $L = \{1, 2, 3, 4\}$. Sada definišemo nde-bojenje ϕ grafa F bojama iz L, kao proširenje bojenja σ. Neka je $\phi(e) = \sigma(e)$ za svako $e \in E(G)$. Dalje, neka je U skup čvorova iz F koji imaju tačno tri incidente grane u F. Prema tome, $\deg_G(u) = 2$ i $\deg_H(u) = 1$ za svako $u \in U$. Neka je J podgraf grafa G indukovan skupom U, i neka su $J_1, \dots, J_m$ komponente grafa J. Pošto je $\Delta(G) = 2$, svaka od J_i, za $i \in \{1, \dots, m\}$, je ili putanja ili ciklus. Sada, za svako $i \in \{1, \dots, m\}$ dodeljujemo boje granama koje su u H incidentne sa čvorovima iz J_i. Neka je $I = J_i$. U zavisnosti od toga da li je I putanja ili ciklus, razmatramo dva slučaja.

1. I je putanja $(v_1, \dots, v_n)$, $n \geq 1$.

   Neka je $v_i v'_i$, za $1 \leq i \leq n$, oznaka za granu grafa H koja je incidentna sa v_i. Prema definiciji je $\deg_G(v_i) = 2$ za svako $i \in \{1, \dots, n\}$. Stoga, dodeljujemo grani $v_1 v'_1$ bilo koju od dve boje koje nisu korišćene bojenjem ϕ za grane incidentne sa v_1. Pretpostavimo sada da je $v_{j-1} v'_{j-1}$, sa $j \leq n$, poslednja grana kojoj smo dodelili boju. Dalje, dodeljujemo grani $v_j v_j'$ boju iz L različitu od boja dve grane incidentne sa v_j u G, tako da važi $C_\phi(v_j) \neq C_\phi(v_{j-1})$. Pošto na raspolaganju imamo četiri boje, dok izbegavamo najviše tri, ovakvo bojenje uvek postoji. Nastavljamo sa ovom procedurom sve do $j = n$, i na taj način bojimo sve grane $v_i v_i'$, za $1 \leq i \leq n$.

2. I je ciklus $(v_1, \ldots, v_n, v_1)$.

   Neka je $v_i v_i'$, za $1 \leq i \leq n$, oznaka za granu grafa H koja je incidentna sa v_i. Pošto je σ nde-bojenje grafa G, imamo da je $C_\sigma(v_1) \neq C_\sigma(v_n)$. Neka je $S = C_\sigma(v_1) \cup C_\sigma(v_n)$. Pošto $\sigma(v_1 v_n) \in C_\sigma(v_1) \cap C_\sigma(v_2)$ i $C_\sigma(v_1) \neq C_\sigma(v_n)$, imamo $|S| = 3$. Dalje, dodeljujemo grani $v_1 v_1'$ preostalu boju iz $L \setminus S$. Pretpostavimo sada da je $v_{j-1} v_{j-1}'$, za $j \leq n$, poslednja grana kojoj smo dodelili boju. Sledeća grana kojoj dodeljujemo boju je $v_j v_j'$. Kao i pre, da bismo dobili $C_\phi(v_j) \neq C_\phi(v_{j-1})$ izbegavamo najviše tri boje, dok raspolažemo sa četiri. Nastavljamo sa ovom procedurom sve do $j = n$, i na taj način bojimo se grane $v_i v_i'$, za $1 \leq i \leq n$. U slučaju kada je $j = n$, imamo da je $C_\phi(v_n) \neq C_\phi(v_1)$, pošto smo odabrali boju za $v_1 v_1'$ tako da $C_\phi(v_1)$ sadrži dve boje koje se ne nalaze u $C_\sigma(v_n)$.

Gore opisanom procedurom su obojene grane $x_{j_1} x_{j_2}$ iz $E(H_j)$, sa $\deg_G(x_{j_1}) = 2$ i $\deg_G(x_{j_2}) = 0$, za svako $j \in \{1, \ldots, l\}$. Preostaje nam da obojimo grane $x_{j_2} x_{j_3}$ iz $E(H_j)$, sa $\deg_G(x_{j_2}) = \deg_G(x_{j_3}) = 0$, za svako $j \in \{1, \ldots, l\}$. Grani $x_{j_2} x_{j_3}$ dodelimo bilo koju boju iz L različitu od boje grane $x_{j_1} x_{j_2}$. Pošto je grana $x_{j_2} x_{j_3}$ susedna u F samo sa $x_{j_1} x_{j_2}$, dok je $\deg_F(x_{j_1}) = 3$, $\deg_F(x_{j_2}) = 2$ i $\deg_F(x_{j_3}) = 1$, imamo da je $C_\phi(x_{j_1}) \neq C_\phi(x_{j_2})$ i $C_\phi(x_{j_2}) \neq C_\phi(x_{j_3})$. Pošto obojimo ove grane za svako H_j, $1 \leq j \leq l$, dobijamo nde-bojenje ϕ grafa F bojama iz skupa L, čime je dokaz teoreme završen. □

Narednu Petersenovu lemu [7], koristimo u dokazu teoreme 1.5.4.

Lema 1.5.11. *Svaki $2k$-regularan graf G, za koji je $k \geq 1$, je 2-raščlanujući (eng. factorable) graf, odnosno postoji podela grana grafa G na podgrafove G_i, $1 \leq i \leq k$, takva da je za svako $i \in \{1, \ldots, k\}$ graf G_i 2-regularan.*

1.5.2 Dokazi glavnih teorema

Dokaz Teoreme 1.5.2. Dokaz izvodimo indukcijom po $\chi'(G) = k$. Pošto je G normalan graf, sledi da je $k \geq 2$. Za $\Delta(G) \leq 5$ ili $k \leq 5$, tvrđenje je zadovoljeno prema Teoremi 1.5.5 i Lemi 1.5.9. Dakle, osnovni korak indukcije je zadovoljen. Pretpostavimo da je tvrđenje teoreme netačno. Među svim normalnim grafovima kod kojih je $\chi'(G) = k$ i $\chi'_a(G) > 2k$, neka je G graf sa najmanjim brojem grana. Jasno je da je graf G povezan, i $\Delta(G) \geq 6$, kao i $k \geq 6$. Dakle, možemo pretpostaviti da važi $\chi'_a(H) \leq 2\chi'(H)$ za svaki graf H sa $\chi'(H) = k - 2$. Ukoliko je $|E(G)| \leq 2\chi'(G)$, tada je jasno da važi $\chi'_a(G) \leq 2\chi'(G)$. Dakle, mora biti $|E(G)| > 2\chi'(G)$. Neka je ϕ valjano bojenje grana grafa G pomoću boja iz skupa $K = \{1, \dots, k\}$, i neka je $K_1 = \{1, 2\}$ i $K_2 = \{3, \dots, k\}$. Možemo pretpostaviti da svaka od grana obojena j, $1 < j \leq k$, ima barem jednu susednu granu obojenu i, za svako $1 \leq i < j$. Inače, dok god postoji grana $e \in E(G)$ obojena j koja nema susednih grana obojenih i, za neko $1 \leq i < j$, menjamo boju grane e iz j u i. Pretpostavimo prvo da postoji $uv \in E(G)$ takva da $\mathrm{w}_G(uv) \leq \Delta(G) + 2$. Tada, prema Teoremi 1.5.8, postoji normalan graf H sa $\Delta(H) \leq \Delta(G)$, $|E(H)| < |E(G)|$ i $\chi'_a(H) > 2k$, što je suprotno pretpostavci da je G minimalan protiv-primer takvog grafa. Stoga, možemo pretpostaviti da $\mathrm{w}_G(uv) > \Delta(G) + 2 \geq 8$, za svako $uv \in E(G)$. Otuda, imamo da je barem jedan od ova dva čvora, recimo u, incidentan sa 5 ili više grana. Pošto u ima najviše dve incidentne grane obojene iz K_1, to znači da ima barem tri incidentne grane obojene iz K_2.

Granu obojenu 1 koja nema susednih grana obojenih 2 nazovimo visećom granom. Dok god postoji viseća grana $uv \in E(G)$, radimo sledeće.

- Ukoliko uv nema susednih grana obojenih k, menjamo boju grane uv u k.
- Ukoliko uv ima susednu granu, recimo uw, obojenu k, razmatramo dva slučaja.
  - Ukoliko w ima incidentnu granu obojenu 1, menjamo boju grane uw u $k + 1$, a boju grane uv u $k + 2$.
  - Ukoliko nijedna od grana incidentnih sa w nije obojena 1, menjamo boju grane uw u 1, a boju grane uv u 2.

Primetimo da, pošto je svaka grana e iz $E(G)$ koja je u početku bojena k bila susedna sa granom bojenom i za svako $1 \leq i < k$, grana e je susedna sa barem jednom granom obojemo 2. Dakle, e ima najviše jednu susednu viseću granu. Zbog toga, nakon gore opisanog postupka, svaka grana obojena $k+1$ ima tačno jednu susednu granu obojenu $k+2$. Takođe, opisano bojenje je valjano bojenje grana pomoću $k+2$ boje. Uz to, sledeća tvrđenja su zadovoljena.

- Svaka grana obojena iz skupa K_1 ima barem jednu susednu granu obojenu iz skupa K_1.
- Svaka grana obojena iz skupa K_2 ima barem jednu susednu granu obojenu iz skupa K_2.
- Svaka grana obojena $k+1$ ima tačno jednu susednu granu obojenu $k+2$, dok svaka grana obojena $k+2$ ima barem jednu susednu granu obojenu $k+1$.
- Za svaku granu uw iz $E(G)$ obojenu $k+1$, jedan od njenih krajnjih čvorova, recimo w, je incidentan sa granama obojenim 1 i 2, dok u nije incidentan ni sa jednom granom obojenom 1 ili 2. Nijedna od grana obojenih $k+2$ nema susednih grana obojenih iz K_1.

Neka je $E = E(G)$ i neka:

- E_1 označava podskup skupa E grana koje su obojene iz K_1.
- E_2 označava podskup skupa E grana koje su obojene iz K_2.
- S označava podskup skupa E grana koje su obojene iz $\{k+1, k+2\}$.

Neka je $G_1 = G[E_1]$, $G_2 = G[E_2]$, $H = G[S]$ i $F = G[E_1 \cup S]$. Primetimo da su G_1, G_2, i F normalni grafovi, pri čemu je $\chi'(G_1) = 2$ i $\chi'(G_2) \leq k-2$. Dakle, prema induktivnoj hipotezi je $\chi'_a(G_2) \leq 2k-4$. Graf H se sastoji od komponenti H_j, $j \in \{1, \ldots, l\}$, gde je svaka od $H_j = (x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_3})$ putanja dužine 3, a takođe je $\deg_{G_1}(x_{j_1}) = 2$ i $\deg_{G_1}(x_{j_2}) = \deg_{G_1}(x_{j_3}) = 0$. Prema Teoremi 1.5.10, $\chi'_a(F) \leq 4$. Grafovi F i G_2 čine podelu grana grafa G. Otuda, prema Teoremi 1.5.6, $\chi'_a(G) \leq \chi'_a(F) + \chi'_a(G_2)$, odakle $\chi'_a(G) \leq 4 + 2k - 4 = 2\chi'(G)$, što je kontradikcija. $\square$

Dokaz Teoreme 1.5.4. Dokaz izvodimo indukcijom po k. Iz druge nejednakosti Teoreme 1.5.5 sledi da je tvrđenje zadovoljeno za $k = 2$. Dakle, osnovni korak indukcije je zadovoljen. Pretpostavimo da je $\chi'_a(H) \leq 2^{s+1}$ za svaki graf H sa $\Delta(H) \leq 2^s$, $2 \leq s < k$. Neka je $m = |E(G)|$. Tvrđenje je očigledno zadovoljeno za $m \leq 2^{k+1}$. Dakle, možemo pretpostaviti da je $m > 2^{k+1}$. Pretpostavimo da tvrđenje teoreme nije tačno. Neka je tada G

protiv-primer grafa sa najmanjim brojem čvorova za koji je $\Delta(G) = 2^k$ i $\chi'_a(G) > 2^{k+1}$. Graf G je očigledno povezan. Pretpostavimo prvo da postoji $uv \in E(G)$ takav da važi $\mathrm{w}_G(uv) \leq 2^k + 2$. Tada, iz Teoreme 1.5.8 sledi da postoji normalan graf H sa $\Delta(H) \leq 2^k$, $|E(H)| < m$ i $\chi'_a(H) > 2^{k+1}$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je G minimalan protiv-primer grafa sa ovim svojstvima. Zbog toga, možemo pretpostaviti da je $\mathrm{w}_G(uv) > 2^k + 2$ za svako $uv \in E(G)$, odakle sledi da važi $\deg_G(u) \geq 2^{k-1} + 2$ ili $\deg_G(v) \geq 2^{k-1} + 2$. Dobro je poznato da za bilo koji graf G, postoji $\Delta(G)$-regularan graf F takav da $G \subseteq F$. Neka je F takav graf. Prema Lemi 1.5.11, F je 2-raščlanujući graf. Neka je $\{F_1, \ldots, F_{2^{k-1}}\}$ 2-raščlanjivanje grafa F, i neka je $H_1 = \bigcup_{i=1}^{2^{k-2}} F_i$, i $H_2 = \bigcup_{i=2^{k-2}+1}^{2^{k-1}} F_i$. Dakle, H_1 i H_2 su 2^{k-1}-regularni grafovi bez zajedničkih grana, i $E(F) = E(H_1) \cup E(H_2)$. Neka je $G_1 = H_1 \cap G$, i $G_2 = H_2 \cap G$. Pošto $\Delta(H_i) = 2^{k-1}$, za $1 \leq i \leq 2$, imamo da je $\Delta(G_i) \leq 2^{k-1}$, za $1 \leq i \leq 2$. Dalje, pošto za svaku granu grafa G barem jedan od njenih kranjih čvorova ima stepen barem $2^{k-1} + 2$, stepen takvog čvora u G_i, za $1 \leq i \leq 2$, je barem 2. Zbog toga, svaka grana iz G_i ima barem jednu susednu granu u G_i, za svako $i \in \{1, 2\}$. Dakle, oba grafa G_1 i G_2 su normalni, zatim $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$, $E(G_1) \cup E(G_2) = E(G)$, i $\Delta(G_i) \leq 2^{k-1}$, za $1 \leq i \leq 2$. Takođe, $\chi'_a(H) \leq 2^k$ za svaki graf H sa $\Delta(H) \leq 2^{k-1}$. Odatle, prema Lemi 1.5.6, dobijamo $\chi'_a(G) \leq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$, što je kontradikcija. $\square$

1.6 Susedni čvor-razlikujući totalni hromatski broj grafa

Valjano totalno k-bojenje grafa G je mapiranje $\phi\colon V(G) \cup E(G) \to \{1,\dots,k\}$ takvo da važi $\phi(x) \neq \phi(y)$ za svaki par susednih ili incidentnih elemenata $x, y \in V(G) \cup E(G)$. Za čvor $v \in V(G)$ i valjano totalno bojenje ϕ, definišemo skup $C_\phi(v)$ kao $\{\phi(uv)\colon uv \in E(G)\} \cup \{\phi(v)\}$. Bojenje ϕ je *susedno čvor-razlikujuće totalno bojenje* ili *avd-totalno bojenje* ukoliko $C_\phi(v) \neq C_\phi(u)$ za svaki par susednih čvorova v i u. *Susedni čvor-razlikujući totalni hromatski broj* (ili avd-broj) grafa G, u oznaci $\chi''_a(G)$, je najmanja celobrojna vrednost k takva da G ima k-avd totalno bojenje.

Za graf G koji ima dva susedna čvora v i u stepena $\Delta(G)$, oba $C_\phi(v)$ i $C_\phi(u)$ imaju $\Delta(G)+1$ elemenata. Pošto je $C_\phi(v) \setminus C_\phi(u) \neq \emptyset$ neophodan uslov da ovi skupovi budu različiti, takav graf G ima vrednost $\chi''_a(G)$ veći ili jednak $\Delta(G)+2$. Šta više, postoji mnogo grafova kod kojih je $\chi''_a(G) > \Delta(G)+2$, na primer, svaki kompletan graf ima to svojstvo. Žang i ostali [8] su uveli avd-totalno bojenje, gde su i predložili narednu hipotezu.

Hipoteza 1.6.1. *Za svaki graf G važi $\chi''_a(G) \leq \Delta(G)+3$.*

Pre nego što prikažemo glavne rezultate za $\chi''_a(G)$, dokazujemo gornju granicu za $\chi''_a(G)$ koja je u vezi sa hromatskim brojem $\chi(G)$ i maksimalnim stepenom $\Delta(G)$.

Lema 1.6.2. *Za svaki graf G važi $\chi''_a(G) \leq \chi(G) + \Delta(G)$.*

Dokaz. Neka je $k = \chi(G)$, $l = \Delta(G)$, $K = \{1,\dots,k-1\}$ i $L = \{k,\dots,k+l\}$. Prema Vizingovoj teoremi je $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$ za svaki graf G. Dakle, postoji valjano bojenje grana grafa G pomoću boja iz skupa L. Dalje, neka je $V = V(G)$, i neka su $V_1,\dots,V_k$ klase obojivosti grafa G. Pošto valjano bojenje dodeljuje različitu boju svakom paru susednih čvorova, svaka neprazna klasa obojivosti V_i, $1 \leq i \leq k$, je nezavisan skup čvorova u G. Za svako $j \in K$, bojimo svaki čvor iz V_j bojom j. Pošto $K \cap L = \emptyset$, imamo $\phi(v) \neq \phi(vu)$ za svako $v \in (V \setminus V_k)$ i $u \in N(v)$. Sa druge strane, $i \in (C_\phi(v) \setminus C_\phi(u))$ za svako $v \in V_i$, $u \in V_j$, $1 \leq i < j \leq k-1$, i stoga $C_\phi(v) \neq C_\phi(u)$. Sada bojimo preostale čvorove, odnosno, čvorove iz V_k. Za svaki čvor v iz V_k biramo boju na sledeći način. Pošto $\Delta(G) = l$, čvor v ima l ili manje incidentnih grana, i postoji barem jedna boja iz L, recimo l_1, koja nije korišćena za bojenje grana incidentnih sa v. Čvoru v dodeljujemo boju l_1. Nijedan od čvorova susednih sa v nije obojen bojom iz L. Dakle, ovako definisano totalno bojenje je valjano. Znamo da $j \in C_\phi(u)$ za svako $1 \leq j \leq k-1$ i svako $u \in V_j$, a pošto $C_\phi(v) \cap K = \emptyset$, imamo $C_\phi(v) \neq C_\phi(u)$. Zbog toga, opisano bojenje ϕ je avd-totalno bojenje pomoću $k + l = \chi(G) + \Delta(G)$ boja, čime je dokaz završen. $\square$

Žang i ostali [8] su dokazali narednu lemu za kompletne grafove.

Lema 1.6.3.

$$\chi''_a(K_n) = \begin{cases} n+1, & \textit{ukoliko je } n \textit{ paran,} \\ n+2, & \textit{ukoliko je } n \textit{ neparan.} \end{cases}$$

Što se tiče gornje granice hromatskog broja grafa, poznato nam je da $\chi(C_l) = 3$ za svaki neparan l, dok je $\chi(K_n) = n + 1$ za svako n, gde su $l, n \geq 3$. Kao neposredu posledicu Leme 1.6.2, Leme 1.6.3 i Bruksove teoreme, dobijamo jednostavniji dokaz naredne granice za $\chi''_a(G)$, koju su dali Huang, Vang i Jan [9].

Posledica 1.6.4. *Za svaki graf G sa $\Delta(G) \geq 3$ važi $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G)$.*

1.6.1 Popravljena granica za avd-broj

Naredna definicija i lema date su u nešto drugačijoj formi u radu Huanga i ostalih [9].

Definicija 1.6.5. *Neka je G graf za koji je $\chi(G) = k$, i neka su $V_1, \ldots, V_k$ klase obojivosti grafa G. Kažemo da su $V_1, \ldots, V_k$ dominirajuće klase obojivosti ukoliko $N(v) \cap V_j \neq \emptyset$ za svako $v \in V_i$, $1 < i \leq k$, i svako j, $1 \leq j < i$. Za takvu podelu $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ skupa $V(G)$ kažemo da je dominirajuća podela.*

Neka su $V_1, \ldots, V_k$ klase obojivosti grafa G. Dominirajuću podelu možemo uvek dobiti primenom sledećeg jednostavnog algoritma.

Algoritam 1.6.6 (Dobijanje dominirajuće podele).
Ulaz: *klase obojivosti $U_1, \ldots, U_k$*
Izlaz: dominirajuć*a podela $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_k\}$*
Početak
  za svako $1 \leq i \leq k$ *podesi* $V_i \leftarrow \{\}$
  $i \leftarrow 1$

dok god $i \leq k$
  za svako $u \in U_i$
    Neka je j, $j \leq i$, *najmanja celobrojna vrednost za koju* $N(u) \cap V_j = \emptyset$
    Uključi u *u skup* V_j
  $i \leftarrow i + 1$
vrati $\{V_1, \ldots, V_k\}$
Kraj

Lema 1.6.7. *Za svaki graf* G *sa* $\chi(G) = k$, *postoji dominirajuća podela* $\mathcal{P} = \{V_1, \ldots, V_k\}$ *skupa* $V(G)$.

Dokaz. Prethodni algoritam obezbeđuje da svaki čvor iz V_i, $1 < i \leq k$, ima barem jednog suseda u svakom V_j, $1 \leq j < i$. Ukoliko čvor u iz U_i ima susedan čvor u svakom V_j, $1 \leq j < i$, tada je uključen u V_i. Pošto je U_i nezavisan skup, nijedan čvor uključen u V_i nije susedan sa u. Dakle, svi skupovi iz $\mathcal{P}$ su nezavisni, dok je $|\mathcal{P}| = k$, čime je dokaz kompletiran. □

Naredna teorema poboljšava gornju granicu u odnosu na Posledicu 1.6.4, za svaki graf G sa $\Delta(G) \geq 5$.

Teorema 1.6.8. *Za svaki graf* G *sa* $\Delta(G) \geq 5$,

$$\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - 1$$

Dokaz ove teoreme izmešten je u Poglavlje 1.6.2. Lu i ostali [13] su dokazali da za svaki graf G sa $\Delta(G) \leq 4$ važi $\chi''_a(G) \leq 7$. Iz ovog rezultata, zajedno sa Teoremom 1.6.8, zaključujemo:

Posledica 1.6.9. *Za svaki graf* G *sa* $\Delta(G) \geq 4$ *važi* $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

Naredna teorema nam koristi za dobijanje gornje granice za $\chi''_a(G)$, pomoću rezultata dobijenih u Poglavlju 1.5.

Teorema 1.6.10. *Neka je* $\chi'_a(H) \leq m$ *zadovoljeno za svaki normalan graf* H *za koji* $\Delta(H) \leq l$, *gde su* m *i* l *prirodni brojevi veći od* 1. *Tada je* $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - l + 2$ *za svaki graf* G *sa* $\Delta(G) \geq m + l$.

Dokaz Teoreme 1.6.10 dajemo u Poglavlju 1.6.3. Narednu lemu izvodimo iz Posledice 1.5.3 i tvrđenja Teorema 1.5.5 i 1.6.10.

Lema 1.6.11. *Za svaki graf* G,

1. *ukoliko* $\Delta(G) \geq 12$, *tada* $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - 2$,

2. *ukoliko* $\Delta(G) \geq 15$, *tada* $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - 3$,

3. $\chi''_a(G) \leq \lceil \frac{5\Delta(G)+8}{3} \rceil$.

Dokaz. 1. Za $l = 4$, $m = 8$ i $\Delta(G) \geq m + l = 8 + 4 = 12$, imamo $l - 2 = 2$, odakle $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - 2$.

2. Za $l = 5$, $m = 10$ i $\Delta(G) \geq m + l = 10 + 5 = 15$, imamo $l - 2 = 3$, odakle $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - 3$.

3. Neka je $m = 2l + 2$, odakle $\chi'_a(H) \leq m$ za svaki normalan graf H za koji je $\Delta(H) \leq l$. Neka je G graf sa $\Delta(G) \geq m + l = 3l + 2$. Ova nejednačina je zadovoljena za

$$l = \lfloor \frac{\Delta(G) - 2}{3} \rfloor$$

Pošto je $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - l + 2$, imamo $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - \lfloor \frac{\Delta(G)-2}{3} \rfloor + 2$, odnosno,

$$\chi''_a(G) \leq \lceil \frac{5\Delta(G) + 8}{3} \rceil$$

Ova nejednakost je za $\Delta(G) < 20$ zadovoljena i prema Teoremi 1.6.8, i prva dva dela ove teoreme, dok nam daje bolju gornju granicu za $\chi''_a(G)$ kada je $\Delta(G) \geq 20$.

□

1.6.2 Dokaz gonje granice $2\Delta(G) - 1$

Dokaz Teoreme 1.6.8. Ukoliko je $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, pošto važi $\Delta(G) \geq 5$, graf G je kompletan prema Bruksovoj teoremi. Dakle, nejednakost $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ sledi iz Leme 1.6.3. Ukoliko je $\chi(G) < \Delta(G)$, nejednakost sledi iz Leme 1.6.2. Zbog toga, možemo pretpostaviti da je $\chi(G) = \Delta(G)$. Neka je $l = \Delta(G)$, odakle imamo $l = \chi(G)$. Dalje, neka je $K = \{1, \ldots, l - 2\}$ i $L = \{l-1, \ldots, 2l-1\}$. Otuda je $|K| = l-2$, $|L| = l+1$, i pošto $l \geq 5$, imamo $|K| \geq 3$. Prema Vizingovoj teoremi postoji valjano bojenje grana σ grafa G pomoću boja iz L. Neka su $V_1, \ldots, V_l$ klase obojivosti grafa G. Možemo pretpostaviti da je $\{V_1, \ldots, V_l\}$ dominirajuća podela skupa $V(G)$. Sada definišemo totalno bojenje ϕ koje zadovoljava tvrđenje teoreme. Granama grafa G dodeljujemo boje dodeljene bojenjem σ. Dalje, čvorovima iz V_j dodeljujemo boju j, za svako $j \in K$. Neka je U_1 podskup čvorova iz V_{l-1} koji nemaju suseda u V_l, i neka je $U_2 = V_{l-1} \setminus U_1$. Za svaki od čvorova v iz U_1 biramo boju na sledeći način. Pošto v ima najviše l incidentnih grana, postoji barem jedna boja l_1 iz skupa L koja nije korišćena za bojenje tih grana. Čvoru v dodeljujemo boju l_1. Svaki sused čvora v je iz $\bigcup_{i \in K} V_i$, a svaki čvor $u \in V_i$ obojen je bojom i, gde je $i \in K$. Pošto $K \cap L = \emptyset$, imamo $\phi(v) \neq \phi(u)$. Otuda, bojenje ϕ je valjano. Neka $C_\phi^K(v)$ označava presek skupova $C_\phi(v)$ i K, odnosno, $C_\phi^K(v) = C_\phi(v) \cap K$. Znamo da $C_\phi^K(u) \neq \emptyset$, i $C_\phi^K(v) = \emptyset$, odakle sledi $C_\phi(v) \neq C_\phi(u)$ za svako $u \in N(v)$.

Preostalo nam je da obojimo čvorove iz skupova U_2 i V_l. Dok bojimo ove čvorove, menjaćemo boje nekih grana koje spajaju čvorove iz U_2 sa čvorovima iz V_l, kao i boje nekih grana koje spajaju čvorove iz V_1 sa čvorovima iz U_2 i V_l. Neka je $S(v) = C_\phi^K(v)$. Na kraju ovog bojenja, imaćemo:

1. za $v \in V_1$: $S(v) \in \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$.
2. za $v \in V_i$, $i \in \{2, \ldots, l-2\}$: $S(v) = \{i\}$,
3. za $v \in U_1$: $S(v) = \emptyset$,
4. za $v \in (U_2 \cup V_l)$: $S(v) \in \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Na ovaj način znamo da važi $C_\phi^K(v) \neq C_\phi^K(u)$ za svako $v \in \bigcup_{i=2}^{l-2} V_i \cup U_1$ i $u \in N(v)$; dakle $C_\phi(v) \neq C_\phi(u)$. Tokom sledećeg postupka pazimo da bude $C_\phi(v) \neq C_\phi(u)$ za svako $v, u \in (V_1 \cup U_2 \cup V_l)$, gde je $u \in N(v)$. Pošto je $\{V_1, \ldots, V_l\}$ dominirajuća podela, svaki čvor $v \in V_i$, $1 < i \leq k$, ima barem jedan susedan čvor u svakom od skupova V_j, $1 \leq j < i$. Takođe, imamo da je $l = \Delta(G)$, odakle sledi da svaki čvor iz $V_l \cup V_{l-1}$ ima barem $\Delta(G) - 2$ susednih čvorova u $\bigcup_{i=1}^{l-2} V_i = V(G) \setminus (V_{l-1} \cup V_l)$. Stoga, svaki čvor iz V_{l-1} ima najviše dva suseda u V_l, i svaki čvor iz V_l ima najviše dva suseda u V_{l-1}. Sada, neka je H podgraf grafa G indukovan skupom $U_2 \cup V_l$. Iz prethodnog iskaza možemo zaključiti da $\Delta(H) \leq 2$. Neka je n broj komponenti grafa H, i neka su H_i, $1 \leq i \leq n$, komponente grafa H. Dakle $\Delta(H_i) \leq 2$ za svako $1 \leq i \leq n$. Pošto svaki od čvorova iz U_2 ima barem jednog suseda u V_l i svaki čvor iz V_l ima barem jednog suseda u U_2, imamo da $\delta(H_i) \geq 1$. Zbog toga, svaki od H_i, $1 \leq i \leq n$, je ili paran ciklus C_{2m}, $m \geq 2$, ili putanja P_s, $s \geq 2$. Za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$, proizvoljnim redosledom za i, primenjujemo sledeći postupak. Neka je $J = H_i$. U zavisnosti od toga da li je J paran ciklus ili putanja, razmatramo dva slučaja.

1. $J{=}C_{2m}$, $m \geq 2$. Neka su v_j, $1 \leq j \leq 2m$, čvorovi iz G koji pripadaju J. Ovi čvorovi sačinjavaju ciklus $C_{2m} = (v_1, v_2, \ldots, v_{2m}, v_1)$ u G, i svake dve susedne grane iz C_{2m} su obojene različitom bojom iz L. Sada, svakom od čvorova v_i, $1 \leq i < 2m$ dodeljujemo boju njemu incidentne grane v_iv_{i+1}, a čvoru v_{2m} dodeljujemo boju grane $v_{2m}v_1$. Dalje, granama iz J dodeljujemo boje na sledeći način:

   - za svako neparno i, $1 \leq i < 2m$, grani v_iv_{i+1} dodeljujemo boju 2,
   - za svako parno i, $1 < i < 2m$, grani v_iv_{i+1} dodeljujemo boju 3,
   - grani $v_{2m}v_1$ dodeljujemo boju 3.

   Imamo da je $\phi(v_i) \neq \phi(u)$ i $\phi(v_i) \neq \phi(v_iu)$ za svako v_i, $1 \leq i \leq 2m$ i svako $u \in N(v_i)$. Dalje, za svako i, $1 \leq i < 2m$, skup $C_\phi(v_{i+1})$ ne sadrži boju čvora v_i. Takođe, skup $C_\phi(v_1)$ ne sadrži boju čvora v_{2m}. Iz toga zaključujemo da $C_\phi(v_{2m}) \neq C_\phi(v_1)$ i $C_\phi(v_i) \neq C_\phi(v_{i+1})$, za svako $1 \leq i < 2m$. Pošto $C^K_\phi(v_i) = \{2, 3\}$ za svako $1 \leq i \leq 2m$, dok $C^K_\phi(u) \neq \{2, 3\}$ za svako $u \in V_1$, svaki od čvorova iz J ima različit skup boja od svih svojih suseda.

2. $J{=}P_s$, $s \geq 2$. Neka je $P_s = (v_1, v_2, \ldots, v_s)$ prosti put u G koja odgovara grafu J, i neka je $t = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$. Prvo, menjamo u 1 boju svake od grana $v_{2j-1}v_{2j}$, za $1 \leq j \leq t$. Svaki čvor v_j, $1 < j < s$, ima dva suseda u $U_2 \cup V_l$, odnosno ima tačno jednog suseda u V_1, dok čvorovi v_1 i v_s imaju jednog ili dva suseda u V_1. Za neparno s, odnosno za $s = 2t+1$, bojimo čvor v_s bojom iz L koja nije korišćena ni za jednu od grana incidentnih sa v_s. Ovo je uvek moguće pošto v_s ima najviše l incidentnih grana, dok je $|L| = l + 1$. Sada menjamo boju nekih od grana koje povezuju čvorove iz J sa čvorovima iz V_1. Naredni postupak primenjujemo za svako $v_j \in J$, $j \in \{1, \ldots, 2t\}$, u proizvoljnom redosledu.

   Neka je $W = N(v_j) \cap V_1$. U zavisnosti od broja čvorova u W, razmatramo dva slučaja.

   (A) $W = \{u_1, u_2\}$. Ovaj slučaj je moguć samo kada je $j \in \{1, s\}$. Čvorovi iz W imaju jedno od narednih svojstava.

(A1) Nijedan od čvorova u_1 i u_2 nema incidentih grana obojenih 2 ili 3. Boju grane u_1v_j menjamo u 2, a boju grane u_2v_j menjamo u 3.

(A2) Tačno jedan od čvorova u_1 i u_2 ima incidentu granu obojenu iz skupa $\{2,3\}$. Možemo pretpostaviti da čvor u_2 ima takvu granu. Boju grane u_1v_j menjamo u boju iz skupa $\{2,3\}$ koja se ne nalazi u $C_\phi(u_2)$.

(A3) Oba u_1 i u_2 imaju incidentu granu obojenu iz skupa $\{2,3\}$. U ovom slučaju ne menjamo boju nijedne od grana incidentnih sa v_j.

(B) $W = \{u\}$. Razmatramo dva slučaja.

(B1) u nema incidentnu granu obojenu iz skupa $\{2,3\}$. Tada boju grane uv_j menjamo u 2.

(B2) u ima incidentnu granu obojenu 2 ili 3. Tada ne menjamo trenutnu boju grane uv_j.

Primetimo da je u prethodno opisanom postupku, za svaki čvor $u \in V_1$, menjana boja najviše jedne grane incidentne sa u, čak i u slučaju kada u ima više od jednog suseda u $V(H)$. Dakle $|C_\phi(u) \cap \{2,3\}| \leq 1$ za svako $u \in V_1$. Ostalo nam je da obojimo čvorove v_j, za $j \in \{1,\ldots,2t\}$. Prvo bojimo čvor v_{2t}. Ukoliko je s neparan broj, odnosno, $s = 2t+1$, tada je v_s jedini sused čvora v_{2t} obojen iz skupa L. Sada, u zavisnosti od toga da li v_{2t} ima incidentnih grana obojenih iz skupa $\{2,3\}$, razmatramo tri slučaja.

(a) v_{2t} nema incidentnih grana obojenih 2 ili 3. Čvor v_{2t} ima jednu incidentnu granu, $v_{2t-1}v_{2t}$, obojenu 1, i najviše $l-1$ incidentnih grana obojenih iz skupa L. To znači da postoje barem dve boje, l_1 i l_2 iz L, koje nisu korišćene za bojenje grana incidentnih sa v_{2t}. Čvoru v_{2t} dodeljujemo boju l_1 ili l_2, a u slučaju kada je $s = 2t+1$ biramo boju koja se razlikuje od boje čvora v_s. Prema (A3) i (B2), svaki čvor $u \in (N(v_{2t}) \cap V_1)$ ima jednu incidentnu granu obojenu 2 ili 3, i stoga $C_\phi(v_{2t}) \neq C_\phi(u)$.

(b) v_{2t} ima jednu incidentnu granu obojenu 2 ili 3. Možemo pretpostaviti da je ova grana obojena 2. Dakle, čvor v_{2t} ima jednu incidentnu granu, $v_{2t-1}v_{2t}$, obojenu 1, jednu incidentnu granu obojenu 2, i najviše $l-2$ incidentne grane obojene iz skupa L. To znači da imamo barem tri boje iz skupa L, nazovimo ih l_1, l_2 i l_3, koje nisu korišćene za bojenje grana incidentnih sa v_{2t}. Takođe, nijedan čvor susedan sa v_{2t} nije obojen iz skupa L, osim kada je $s = 2t+1$, u kom slučaju je neka od ove tri boje, recimo l_3, možda iskorišćena za bojenje v_s. Prema (A2) i (B1), najviše jedan čvor u iz skupa $(N(v_{2t}) \cap V_1)$ ima incidentnu granu obojenu 2. Za v_{2t} biramo jednu od boja l_1 i l_2 tako da važi $C_\phi(v_{2t}) \neq C_\phi(u)$.

(c) v_{2t} ima incidentnu granu obojenu 2, kao i incidentnu granu obojenu 3, odnosno, ove grane su bojene prema (A1). Pošto v_{2t} ima dva suseda u V_1, sledi da je $s = 2t$. Dakle, v_{2t} nema susednih čvorova bojenih iz skupa L. Takođe, v_{2t} ima jednu incidentnu granu bojenu 1, što znači da ima najviše $l - 3$ incidentnih grana obojenih iz L. Čvoru v_{2t} dodeljujemo bilo koju od preostale četiri boje iz L. Pošto $|C_\phi(u) \cap \{2, 3\}| \leq 1$ za svaki čvor $u \in V_1 \cap N(v_{2t})$, imamo $C_\phi(v_{2t}) \neq C_\phi(u)$.

Pretpostavimo da je čvor v_{j+1}, gde je $1 \leq j \leq 2t - 1$, poslednji čvor iz J kome smo dodelili boju u G. Sledeći čvor koji bojimo je v_j. U zavisnosti od toga koliko ima suseda v_j iz skupa V_1, razmatramo dva slučaja.

(a) v_j ima jednog suseda u iz skupa V_1. U zavisnosti od boje grane $v_j u$, imamo dva slučaja.

  i. $v_j u$ je obojena iz skupa L. Ovo znači da je, prema (B2), $C_\phi(u) \cap \{2, 3\} \neq \emptyset$. Pošto v_j ima jednu incidentnu granu obojenu 1, a najviše l incidentnih grana, postoje barem dve boje, l_1 i l_2 iz L, koje nisu korišćene za bojenje grana incidentnih sa v_j. Ponovo razmatramo dve mogućnosti.

   - Ukoliko v_{j+1} ima incidentnu granu obojenu 2 ili 3, tada je barem jedna od boja l_1 i l_2 različita of boje čvora v_{j+1}, i dodeljujemo je čvoru v_j. Pošto $C_\phi(v_j) \cap \{2, 3\} = \emptyset$, imamo $C_\phi(v_j) \neq C_\phi(v_{j+1})$.
   - Ukoliko v_{j+1} nema incidentnih grana obojenih 2 ili 3, tada ukoliko neka od boja l_1 i l_2, recimo l_1, nije u $C_\phi(v_{j+1})$, čvor v_j bojimo l_1. Ukoliko su i l_1 i l_2 elementi skupa $C_\phi(v_{j+1})$, za bojenje v_j koristimo neku od boja l_1 i l_2, koja se razlikuje of boje čvora v_{j+1}. U oba slučaja $C_\phi(v_j) \neq C_\phi(v_{j+1})$.

ii. $v_j u$ je obojena 2 ili 3. Dakle, postoje barem tri boje l_1, l_2 i l_3 iz L, koje nisu korišćene za bojenje grana incidentnih sa v_j. Barem dve od ove tri boje, recimo l_1 i l_2, možemo koristiti tako da bude $C_\phi(v_j) \neq C_\phi(u)$. Ponovo razmatramo dve mogućnosti.

- Boja čvora v_{j+1} nije ni l_1 ni l_2. Za v_j biramo jednu od ove dve boje tako da bude $C_\phi(v_j) \neq C_\phi(v_{j+1})$.
- Boja čvora v_{j+1} je l_1 ili l_2, recimo l_1. Čvoru v_j dodeljujemo boju l_2. Odatle, $l_1 \notin C_\phi(v_j)$ i $l_1 \in C_\phi(v_{j+1})$, i zbog toga $C_\phi(v_j) \neq C_\phi(v_{j+1})$.

(b) v_j ima dva suseda u_1 i u_2 iz skupa V_1. Ovo znači da v_j ima samo jednog suseda u $U_2 \cup V_l$, dakle $j = 1$. Sada, u zavisnosti od broja grana incidentnih sa v_1 bojenih iz skupa $\{2, 3\}$, razmatramo tri slučaja.

i. v_1 ima incidentnu granu obojenu 2, kao i incidentnu granu obojenu 3. Odavde sledi da v_1 ima najviše $l - 3$ incidentnih grana obojenih iz L. Dakle, postoje barem četiri boje iz L koje nisu korišćene za bojenje grana incidentnih sa v_1. Takođe, znamo da $|C_\phi(u_i) \cap \{2, 3\}| \leq 1$, za oba $i \in \{1, 2\}$. Čvor v_2 može imati incidentnu granu obojenu 2 i 3 samo u slučaju kada je $J = P_2$. Sada, biramo za v_1 jednu od preostalih boja iz L koja se razlikuje od boje čvora v_2, dok gledamo da bude $C_\phi(v_1) \neq C_\phi(v_2)$. Pošto imamo barem četiri boje na raspolaganju, ovo je uvek moguće. Takođe, znamo da $|C_\phi(v_1) \cap \{2, 3\}| = 2$, dakle $C_\phi(v_1) \neq C_\phi(u_1)$ i $C_\phi(v_1) \neq C_\phi(u_2)$.

ii. v_1 ima jednu incidentnu granu obojenu 2 ili 3. Možemo pretpostaviti da je to boja 2. Iz (A2) zaključujemo da samo jedan od čvorova u_1 i u_2 ima incidentnu granu obojenu 2. Možemo pretpostaviti da $2 \in C_\phi(u_1)$, odakle i $2 \notin C_\phi(u_2)$. Pošto v_1 ima najviše $l - 2$ incidentnih grana obojenih iz L, postoje barem tri boje l_1, l_2, i l_3 iz L, koje nisu korišćene za bojenje grana incidentnih sa v_1. Barem dve od ove tri boje, recimo l_1 i l_2, možemo odabrati za bojenje čvora v_1 tako da bude $C_\phi(v_1) \neq C_\phi(u_1)$. Dalje, imamo dva slučaja.

- Ukoliko se boja čvora v_2 razlikuje od l_1 i od l_2, tada za v_1 biramo jednu od ove dve boje za koju $C_\phi(v_1) \neq C_\phi(v_2)$.

- Ukoliko je v_2 obojeno nekom od ove dve boje, recimo l_1, tada čvoru v_1 dodeljujemo boju l_2. Dakle, imamo $l_1 \notin C_\phi(v_1)$ i $l_1 \in C_\phi(v_2)$, odakle sledi $C_\phi(v_1) \neq C_\phi(v_2)$.

Takođe, pošto $2 \in C_\phi(v_1)$, dok $2 \notin C_\phi(u_2)$, imamo $C_\phi(v_1) \neq C_\phi(u_2)$.

iii. v_1 nema incidentnih grana obojenih 2 ili 3. Pošto v_1 ima najviše $l-1$ incidentnih grana obojenih iz L, postoje barem dve boje, l_1 i l_2 iz L, koje nisu korišćene za bojenje grana incidentnih sa v_1. Ponovo imamo dva slučaja.

- Ukoliko se boja čvora v_2 razlikuje od obe boje l_1 i l_2, za čvor v_1 koristimo jednu od ove dve boje, tako da bude $C_\phi(v_1) \neq C_\phi(v_2)$.
- Ukoliko je boja čvora v_2 jednaka jednoj od ove dve boje, recimo l_1, za v_1 koristimo boju l_2. Tada imamo $C_\phi(v_1) \neq C_\phi(v_2)$.

Iz (A3), zaključujemo $C_\phi(u_1) \cap \{2,3\} \neq \emptyset$ i $C_\phi(u_2) \cap \{2,3\} \neq \emptyset$. Dakle, imamo $C_\phi(v_1) \neq C_\phi(u_1)$ i $C_\phi(v_1) \neq C_\phi(u_2)$.

Gore opisano bojenje je valjano totalno $(2\Delta(G)-1)$-bojenje, i $C_\phi(v) \neq C_\phi(u)$ za svako $v \in U_2 \cup V_l$, i svako $u \in N(v)$, čime je dokaz kompletiran. $\square$

1.6.3 Dokaz druge glavne teoreme

Dokaz Teoreme 1.6.10. Neka je G graf za koji je $\Delta(G) = k$, $k \geq m+l$, i neka je $\chi'_a(H) \leq m$ za svaki normalan graf H sa $\Delta(H) \leq l$, gde su m i l celobrojne vrednosti veće od 1. Prema Lemi 1.6.3, nejednakost $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - l + 2$ je zadovoljena za kompletne grafove. Dakle, možemo pretpostaviti da G nije kompletan graf, odnosno, imamo $\chi(G) \leq \Delta(G)$, po Bruksovoj teoremi. Ukoliko $\chi(G) \leq k - l + 2$, nejednakost $\chi''_a(G) \leq 2\Delta(G) - l + 2$ sledi iz Leme 1.6.2. Zbog toga, možemo pretpostaviti da važi $k - l + 3 \leq \chi(G) \leq k$.

Neka je $s = \chi(G)$, $V = V(G)$, i neka je $\{V_1, \ldots, V_k\}$ dominirajuća podela skupa V, gde je V_i prazan skup za svako i, $s < i \leq k$. Neka je:

1. $V' = \bigcup_{i=k-l+3}^{k} V_i$,
2. U_1 podskup skupa V_{k-l+2} čvorova koji nemaju suseda u V',
3. $U_2 = V_{k-l+2} \setminus U_1$,

4. $W' = V' \cup U_2$,
5. W_1 podskup skupa V_{k-l+1} čvorova koji nemaju suseda u W',
6. $W_2 = V_{k-l+1} \setminus W_1$,
7. $W = V' \cup U_2 \cup W_2 = W' \cup W_2$.

Pošto je $\{V_1, \ldots, V_k\}$ dominirajuća podela skupa V, svaki čvor iz W ima barem $k-l$ suseda u $V \setminus W$. Pošto je $\Delta(G) = k$, čvorovi iz W imaju najviše l suseda u W. Znamo da čvorovi iz $W_1 \cup U_1$ nemaju susede u W'. Dakle, čvorovi iz V', kao ni čvorovi U_2, nemaju susede u $W_1 \cup U_1$. Takođe, čvorovi iz U_2 imaju barem jednog suseda u V', dok čvorovi iz V' imaju barem jednog suseda u U_2. Osim toga, čvorovi iz $V' \cup U_2$ imaju barem jednog suseda u W_2. Zbog toga, čvorovi iz W' imaju barem dva suseda u W. Neka je H podgraf grafa G indukovan skupom W. Pošto H nema dva susedna čvora stepena jedan (takvi čvorovi su samo u W_2, koji je nezavisan skup), H je normalan graf; osim toga $\Delta(H) \leq l$. Dalje, neka je H' podgraf grafa G za koji je $V(H') = V(G)$ i $E(H') = E(G) \setminus E(H)$. Pošto je $E(H') \subseteq E(G)$, imamo $\Delta(H') \leq \Delta(G) = k$. Neka su $K = \{1, \ldots, k-l+1\}$ i $L = \{k-l+2, \ldots, 2k-l+2\}$. Dakle $|K| = k-l+1$, $|L| = k+1$ i $K \cap L = \emptyset$. Neka je ϕ' valjano bojenje grana grafa H' bojama iz skupa L (prema Vizingovoj teoremi, takvo bojenje postoji). Granama iz skupa $E(H')$ dodeljujemo u G iste boje kao i ϕ'. Neka je ϕ'' m-nde-bojenje grafa H bojama iz skupa $K_1 = \{1, \ldots, m\}$, gde je $m \leq k-l$, odnosno $K_1 \subset K$. Dalje, granama iz skupa $E(H)$ dodeljujemo u G iste boje kao i ϕ''. Pošto je $E(G) = E(H') \cup E(H)$ i oba bojenja ϕ' i ϕ'' su valjana, dok je $L \cap K_1 = \emptyset$, takvo bojenje grana grafa G je valjano.

Sada bojimo čvorove grafa G tako da se boja svakog od čvorova iz V razlikuje od boja dodeljenim njemu susednim čvorovima i incidentnim granama.

1. Svakom $v \in V_i$, $1 \leq i \leq k-l+1$ dodeljujemo boju i.
2. Za $v \in U_1$, postoji najviše k grana incidentnih sa v i one su obojene iz skupa L. Pošto je $|L| = k+1$, postoji boja l_1 iz L koja nije korišćena ni za jednu od ovih grana. Dakle, čvoru v dodeljujemo boju l_1. Svaki od suseda čvora v je iz nekog od skupova V_i, $1 \leq i \leq k-l+1$ i obojen je iz skupa K. Pošto je $l_1 \in L$ i $L \cap K = \emptyset$, ovakvo bojenje je valjano.
3. Za $v \in W'$, imamo da je za svako $u \in N(v) \cap W$ grana vu obojena iz K, dok je za svako $u \in N(v) \cap (V \setminus W)$ čvor u obojen iz K. Odavde sledi da

postoji barem jedna boja $l_1 \in L$ koja nije korišćena za grane incidentne sa v, niti za čvorove susedne sa v. Dakle, čvoru v dodeljujemo boju l_1.

Neka ϕ predstavlja prethodno opisano totalno bojenje. Dokazali smo da je ϕ valjano $(2k - l + 2)$-totalno bojenje, i preostaje nam da dokažemo da važi $C_\phi(v) \neq C_\phi(u)$ za svako $vu \in E(G)$. Imamo da je $V = (\bigcup_{i=1}^{k-l+2} V_i) \cup U_1 \cup W'$. Takođe, važi:

1. $C_\phi^K(v) = \{i\}$ za svako $v \in V_i$, $1 \leq i \leq k - l$,
2. $(k - l + 1) \in C_\phi^K(v)$ za svako $v \in V_{k-l+1}$,
3. $C_\phi^K(v) = \emptyset$ za svako $v \in U_1$,
4. $|C_\phi^K(v)| \geq 2$ i $(k - l + 1) \notin C_\phi^K(v)$ za svako $v \in W'$.

Jasno je da za svako $v \in V \setminus W'$ i $u \in N(v)$ važi $C_\phi(v) \neq C_\phi(u)$. Treba još da dokažemo da isto važi i za svako $v \in W'$ i $u \in W' \cap N(v)$. Boje grana između čvorova skupa W čine nde-bojenje na $G[W]$, bojama iz K. Čvorovi iz W' su obojeni iz L, a takođe su i grane koje spajaju čvorove iz W' sa čvorovima iz $V \setminus W$ obojene iz L. Dakle $C_\phi^K(v) \neq C_\phi^K(u)$ za svaka dva susedna čvora v i u iz W'; zboga toga imamo $C_\phi(v) \neq C_\phi(u)$, što kompletira dokaz. $\square$

Glava 2

Rezultati iz ektremalne teorije skupova

U ovoj glavi dat je prikaz rezultata u vezi sa Franklovom hipotezom iz ekstremalne teorije skupova. Nakon Poglavlja 2.1, u kome su izneti osnovni pojmovi i od ranije poznati rezultati, ostala dva poglavlja izlažu naše rezultate, i to: u Poglavlju 2.2 je dat dokaz da je Franklova hipoteza zadovoljena za svaku familiju skupova zatvorenu za uniju sastavljenu od 12 ili manje elemenata, dok je u Poglavlju 2.3 data potpuna klasifikacija na FC i *Non*FC-familije, familija sastavljenih od 6 ili manje elemenata.

Rezultati dati u Poglavlju 2.2 prezentovani su u master radu *Računarska analiza Franklove hipoteze*, takođe rađenom pod mentorstvom profesora Živkovića, pri čemu je ovde prikaz rezultata dat u znatno izmenjenoj formi, sa akcentom na analizu efikasnog algoritma i dokaz njegove korektnosti.

2.1 Franklova hipoteza - osnovni pojmovi

Označimo sa 2^A familiju svih podskupova skupa A, i sa $[n]$ skup $\{1, \ldots, n\}$ Za familiju $\mathcal{F}$ kažemo da je uniformna ukoliko svi skupovi unutar $\mathcal{F}$ imaju jednak broj elemenata. Označimo sa $\binom{A}{k}$ uniformnu familiju svih podskupova skupa A sa k elemenata. Neprazna kolekcija skupova $\mathcal{F}$ je zatvorena za uniju ukoliko za svaka dva skupa $A, B \in \mathcal{F}$ važi $A \cup B \in \mathcal{F}$. Za proizvoljnu familiju $\mathcal{A} \subseteq 2^{[n]}$ izraz $\overline{\mathcal{A}}$ označava zatvorenje familije $\mathcal{A}$, odnosno, minimalnu familiju zatvorenu za uniju koja sadrži sve skupove iz $\mathcal{A}$. Neka je $\mathcal{F}$ proizvoljna familija i neka je α element iz skupa $\bigcup \mathcal{F}$. Tada, sa $\mathcal{F}_\alpha$ označavamo familiju

$\{S \in \mathcal{F} \colon \alpha \in S\}$. Neka su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ proizvoljne familije skupova. Tada sa $\mathcal{F} \uplus \mathcal{G}$ označavamo familiju $\{S \cup T \colon S \in \mathcal{F},\ T \in \mathcal{G}\}$.

Franklova hipoteza iz 1979. godine tvrdi da za svaku familiju $\mathcal{F}$ zatvorenu za uniju postoji element iz skupa $\bigcup \mathcal{F}$ koji je sadržan barem u polovini skupova familije $\mathcal{F}$. Prema terminologiji koju je uveo Marković [19], za familiju $\mathcal{F}$ zatvorenu za uniju kažemo da je Franklova, ukoliko je za nju zadovoljeno tvrđenje Franklove hipoteze. Neka je $n = |\bigcup \mathcal{F}|$. Gao i Ju [29], Moris [22], Marković [19], i zatim Bošnjak and Marković [20], dokazali su da je hipoteza zadovoljena za n manje ili jednako 8, 9, 10 i 11, redom. Više podataka o rezultatima vezanim za Franklovu hipotezu se mogu naći u preglednom radu Bruna i Šauta [21]. U svim ispitivanjima da li je familija Franklova podrazumevaćemo da je prazan skup član familije. Razlog za to je očigledan - ovaj skup povećava broju skupova u familiji, dok ne utiče na broj pojavljivanja bilo kog od elemenata.

Glavno sredstvo u našem pristupu su naredna definicija i lema date u radovima Markovića [19] i Bošnjaka i Markovića [20].

Definicija 2.1.1. *Neka je $X = \bigcup \mathcal{F}$. Funkcija w koja dodeljuje realne nenegativne vrednosti elementima iz X, tako da postoji element $x \in X$ za koji je $w(x) > 0$, nazivamo težinskom funkcijom. Težinu skupa $S \subseteq X$ definišemo kao $w(S) = \sum_{a \in S} w(a)$. Vrednost $t(w) = \frac{1}{2} w(X)$ nazivamo ciljanom težinom.*

Lema 2.1.2. *Familija $\mathcal{F}$ je Franklova ako i samo ako postoji težinska funkcija $w : X \to \mathbb{R}$, definisana na skupu $X = \bigcup \mathcal{F}$, takva da važi*

$$\sum_{S \in \mathcal{F}} w(S) \geq t(w)|\mathcal{F}|.$$

U postupku koji u daljem izlaganju prikazujemo, vrednosti dodeljene funkcijom w su uvek racionalni, a često i celi brojevi. Kako bismo pojednostavili primenu prethodne leme, sledećom definicijom uvodimo pojam učešća skupa, odnosno familije.

Definicija 2.1.3. *Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova zatvorena za uniju, i neka je w težinska funkcija definisana na X, gde je $X = \bigcup \mathcal{F}$. Učešće $s(L)$ skupa $L \subseteq X$ definišemo kao $s(L) = w(L) - t(w)$. Učešće familije $\mathcal{A}$, gde je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, definišemo kao $s(\mathcal{A}) = \sum_{A \in \mathcal{A}} s(A)$.*

Sada možemo prikazati Lemu 2.1.2 u nešto drugačijem obliku.

Posledica 2.1.4. *Familija $\mathcal{F}$ je Franklova, ako i samo ako postoji težinska funkcija w takva da važi $s(\mathcal{F}) \geq 0$.*

Dokaz. Tvrđenje sledi direktno iz sledeće jednakosti.

$$\begin{aligned} s(\mathcal{F}) &= \sum_{S\in\mathcal{F}} s(S) = \sum_{S\in\mathcal{F}} (w(S) - t(w)) \\ &= \sum_{S\in\mathcal{F}} w(S) - t(w)|\mathcal{F}| \end{aligned}$$

□

Označimo sa S_n skup svih permutacija elemenata skupa $[n]$, a za permutaciju ϕ iz S_n skup $\phi(A)$ kao $\{\phi(x) \colon x \in A\}$. Za familije $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, gde su $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq 2^{[n]}$, kažemo da su ekvivalentne, u oznaci $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, ukoliko postoji $\phi \in S_n$ takav da $\mathcal{B} = \{\phi(A) \colon A \in \mathcal{A}\}$.

Primer 2.1.5.

$$\mathcal{A} = \{\{4,5,6\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5,6\}\},$$

$$\mathcal{B} = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3,5\}\}$$

Za permutaciju $\phi : \{2,3,4,5,6\} \to [5]$ datu sa

$$\phi : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

imamo da je $\mathcal{B}$ jednako sa $\{\phi(A) \colon A \in \mathcal{A}\}$, i stoga $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.

Neka je $K \cap S = \emptyset$. Bošnjak i Marković [20] su uveli oznaku $\mathcal{C}_{K,S}$ za hiperkocku sa baznim skupom K i gornjim skupom S, odnosno $\mathcal{C} = K \uplus 2^S$. Iz Posledice 2.1.4 direktno dobijamo naredno tvrđenje za hiperkocke.

Posledica 2.1.6. *Neka je $\mathcal{F}$ familija zatvorena za uniju, i neka za skupove S i K važi $S \subseteq \bigcup \mathcal{F}$, odnosno $K = \bigcup \mathcal{F} \setminus S$. Ukoliko postoji težinska funkcija w, takva da važi $\sum_{L\subseteq K} s(\mathcal{C}_{L,S} \cap \mathcal{F}) \geq 0$, tada je $\mathcal{F}$ Franklova familija.*

Vagan [24] je uvela pojam Frankl-kompletnih, ili FC-familija.

Definicija 2.1.7. *Za familiju $\mathcal{G}$ kažemo da je FC-familija ukoliko za bilo koju familiju $\mathcal{F}$ zatvorenu za uniju koja sadrži kao potfamiliju $\mathcal{G}'$, gde je $\mathcal{G}' \sim \mathcal{G}$, postoji element $x \in \bigcup \mathcal{G}'$ koji se pojavljuje u barem polovini skupova familije $\mathcal{F}$.*

Prva dva tvrđenja naredne teoreme dokazana su u radu Sarvata i Renaua [27], treći i četvrti u radu Morisa [22], dok je poslednji deo dokazan u radu Marića, Živkovića i Vučkovića [25].

Teorema 2.1.8. *Naredne familije čine FC-familije:*

1. $\{1\}$,

2. $\{1, 2\}$,

3. *bilo koja tri skupa iz* $\binom{[5]}{3}$,

4. *bilo koja četiri skupa iz* $\binom{[6]}{3}$,

5. *bilo koja četiri skupa iz* $\binom{[7]}{3}$.

Definicija 2.1.9. *Za familiju $\mathcal{G}$ kažemo da je NonFC-familija ukoliko postoji familija $\mathcal{F}$ zatvorena za uniju, za koju je $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, u kojoj se svaki element iz $\bigcup \mathcal{G}$ pojavljuje u manje od polovine skupova.*

Iz definicija FC i *Non*FC-familija slede naredna dva tvrđenja.

1. Svaka familija koja sadrži kao potfamiliju neku FC-familiju je takođe FC-familija.

2. Svaka familija koja je sadržana kao potfamilija u nekoj *Non*FC-familiji je takođe *Non*FC-familija.

2.2 Rezultati za $|X| = 12$

Definicija 2.2.1. *Neka je $\mathcal{G}$ familija takva da je svaka familija $\mathcal{F}$ zatvorena za uniju, za koju je $|\bigcup \mathcal{F}| \leq k$, a koja sadrži kao potfamiliju neko $\mathcal{G}'$, gde je $\mathcal{G}' \sim \mathcal{G}$, Franklova. Za familiju $\mathcal{G}$, koja zadovoljava prethodni uslov, kažemo da je k-FC-familija.*

Označimo sa $Q(\mathcal{F})$ i $R(\mathcal{F}, i)$ naredna tvrđenja.

$Q(\mathcal{F})$: $\mathcal{F}$ ne sadrži kao potfamiliju familiju ekvivalentnu sa nekom FC-familijom iz Teoreme 2.1.8,

$R(\mathcal{F}, i)$: $\mathcal{F}$ ne sadrži kao potfamiliju familiju ekvivalentnu sa nekom familijom $\mathcal{F}_j$, iz Tabele 2.1, gde je $1 \leq i \leq 33$, $j < i$.

Tabela 2.1: 12-FC-familije i njima odgovarajuće težinske funkcije, korišćene u dokazu Leme 2.2.10. Svaka od familija implicitno sadrži i prazan skup.

i	$\mathcal{F}_i$	1	2	3	4	5	6	7	$8-12$	$t(w)$
1	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,3,5\}$	24	24	18	18	12	2	2	2	55
2	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5,6\}$, $\{2,4,5,6\}$,$\{3,4,5,6\}$	24	24	24	10	10	10	2	2	57
3	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$,$\{4,5,6\}$	6	6	6	9	9	6	1	1	24
4	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5\}$	11	7	7	7	7	1	1	1	23
5	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5,6\}$,$\{2,4,5,6\}$	6	6	4	4	4	4	1	1	17
6	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,3,6\}$,$\{1,2,3,7\}$	8	8	8	8	8	8	8	2	33
7	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,6\}$,$\{1,2,4,6\}$,$\{1,2,5,6\}$	5	5	4	4	4	4	1	1	16
8	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,3,6\}$,$\{1,2,3,7\}$	8	8	8	6	6	6	6	2	29
9	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,3,6\}$	10	10	10	8	8	8	2	2	33
10	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,5\}$,$\{4,6,7\}$	3	3	3	3	3	3	3	1	13
11	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{4,5,6\}$	8	8	8	14	6	6	2	2	31
12	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,3,6\}$	10	10	10	8	8	8	2	2	33
13	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4,5\}$,$\{1,3,4,5\}$	12	12	12	8	8	2	2	2	33
14	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5,6,7\}$, $\{2,4,5,6,7\}$,$\{3,4,5,6,7\}$	3	3	3	3	3	3	3	1	13
15	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5,6\}$,$\{1,2,4,5,6\}$	7	7	4	4	4	4	1	1	18
16	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,4,5\}$	9	9	8	8	8	2	2	2	28
17	$\{1,2,3\}$,$\{4,5,6\}$	3	3	3	3	3	3	1	1	12
18	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$	4	4	4	4	1	1	1	1	12
19	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4,5,6\}$,$\{1,3,4,5,6\}$	8	8	8	6	6	6	2	2	27
20	$\{1,2,3\}$,$\{1,4,5,6\}$	6	6	6	4	4	4	2	2	21
21	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$	3	3	3	3	3	1	1	1	11
22	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4,5\}$	10	10	8	6	6	2	2	2	27
23	$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4,5,6\}$	4	4	4	2	2	2	1	1	12
24	$\{1,2,3\}$,$\{4,5,6,7\}$	3	3	3	2	2	2	2	1	11
25	$\{1,2,3\}$	3	3	3	1	1	1	1	1	9
26	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$,$\{1,2,3,4,6\}$	6	6	6	6	6	4	2	2	23
27	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,4,6\}$	2	2	2	2	2	2	1	1	9
28	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,5\}$	3	3	3	2	2	1	1	1	10
29	$\{1,2,3,4,5\}$,$\{1,2,3,4,6\}$	3	3	3	3	3	3	1	1	12
30	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,3,4,5\}$	3	3	3	3	3	1	1	1	11
31	$\{1,2,3,4\}$,$\{1,2,5,6\}$	3	3	3	3	3	3	1	1	12
32	$\{1,2,3,4\}$	5	5	5	5	2	2	2	2	18
33	$\{1,2,3,4,5\}$	4	4	4	4	4	2	2	2	17

Definicija 2.2.2. *Neka su za* $i \in \{1, \dots, 33\}$ *familije* $\mathcal{F}_i$ *date u Tabeli 2.1. Za familiju* $\mathcal{F}$ *kažemo da je* $\mathcal{F}_i$*-korektna familija, ukoliko zadovoljava sledeće uslove:*

1. $\mathcal{F}$ *je zatvorena za uniju,*
2. $\bigcup \mathcal{F} = [12]$,
3. $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}$,
4. $Q(\mathcal{F})$,
5. $R(\mathcal{F}, i)$.

Neka je $S_i = \bigcup \mathcal{F}_i$, i neka je $r_i = |S_i|$, za $i \in \{1, \dots, 33\}$. Možemo pretpostaviti da je $S_i = [r_i]$. Skup hiperkocki $\mathcal{C}_{K,S_i} = K \uplus 2^{S_i}$, za $K \subseteq [12] \setminus S_i$, deli familiju $2^{[12]}$. Neka je $\mathcal{C}_{K,S_i}$ proizvoljna hiperkocka, koja odgovara bazi $K \subseteq [12] \setminus S_i$. Za familiju $\mathcal{G}$ kažemo da je $(\mathcal{F}_i, k)$-korektna ukoliko $\mathcal{G} = \mathcal{C}_{K,S_i} \cap \mathcal{F}$, gde je $k = |K|$ i familija $\mathcal{F}$ je $\mathcal{F}_i$-korektna. Očigledno je da za $(\mathcal{F}_i, k)$-korektnu familiju $\mathcal{G}$ važe sledeća tvrđenja:

1. $\mathcal{G}$ je zatvorena za uniju,
2. $\mathcal{G} \uplus \mathcal{F}_i = \mathcal{G}$,
3. $Q(\mathcal{G})$,
4. $R(\mathcal{G}, i)$.

Za familiju $\mathcal{G}$ kažemo da je $(\mathcal{F}_i, k)$-zatvorena ukoliko zadovoljava prva dva od ova četiri uslova.

Označimo sa $\mathbf{1}_A(x)$ karakterističnu funkciju skupa A, odnosno važi $\mathbf{1}_A(x) = 1$ za $x \in A$, a $\mathbf{1}_A(x) = 0$ za $x \notin A$. Dalje, za $i \in \{1, \dots, 33\}$, $k \in \{1, \dots, r_i\}$, $l \in \{0, 1\}$, uvodimo oznaku $d_{i,k}^{\,l}$ na sledeći način:

$$d_{i,k}^{\,l} = \min\{s(\mathcal{G}) \colon \quad \begin{aligned}[t] &\mathcal{G} \text{ je } (\mathcal{F}_i, k)\text{-korektna familija,} \\ &|K| = k,\ \mathbf{1}_{\mathcal{G}}(K) = l\} \end{aligned}$$

Primetimo da za svako $i \in \{1, \dots, 33\}$ težine svih elemenata iz $\bigcup \mathcal{F} \setminus S_i$ datih u redu i Tabele 2.1, imaju istu vrednost. Dakle, $d_{i,k}^{\,l}$ ima istu vrednost za sve baze K koje zadovoljavaju $|K| = k$. Umesto da razmatramo svih

2^{12-r_i} hiperkocki, dovoljno je razmotriti samo $2(13-r_i)$ slučajeva, za koje važi $0 \leq |K| \leq 12 - r_i$, i $l \in \{0, 1\}$.

Dalje, prikazujemo pseudo-kôd koji se može koristiti za dobijanje najmanje vrednosti za $d_{i,k}^{\,l}$ za svako $i \in \{1, \ldots, 33\}$, $k \in \{0, \ldots, 12-r_i\}$ i $l \in \{0, 1\}$, gde su težine elemenata skupa $\bigcup \mathcal{F}$ dodeljene prema funkciji w datoj u i-tom redu Tabele 2.1. Kasnije dokazujemo korektnost algoritma, iz kojeg kao posledicu dobijamo glavni rezultat, odnosno tvrđenje Teoreme 2.2.11.

Naredni jednostavni algoritam grube sile bi u teoriji trebalo da obavi željena izračunavanja za $d_{i,k}^{\,l}$.

Algoritam 2.2.3.
Ulaz: *Familije* $\mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq 33$.
Izlaz: *Vrednosti* $d_{i,k}^0$ *i* $d_{i,k}^1$.
Početak
  za svako $i \in \{1, \ldots, 33\}$
    za svako $k \in \{0, \ldots, 12 - r_i\}$
      podesi $d_{i,k}^{\,0} \leftarrow \infty$, $d_{i,k}^{\,1} \leftarrow \infty$
      podesi $K \leftarrow \{r_i + 1, \ldots, r_i + k\}$
      za svaku *familiju* $\mathcal{G} \in \{K\} \uplus 2^{[r_i]}$
        ukoliko *je* $\mathcal{G}$ $(\mathcal{F}_i, k)$*-korektna*
          $d_{i,k}^{\mathbf{1}_{\mathcal{G}}(K)} \leftarrow \min \left\{ s(\mathcal{G}), d_{i,k}^{\mathbf{1}_{\mathcal{G}}(K)} \right\}$
  vrati $d_{i,k}^0$ ***i*** $d_{i,k}^1$
Kraj

Problem sa gornjim algoritmom je što najdublja petlja ispituje $2^{2^{r_i}}$ familija. Čak i za male vrednosti r_i, na primer za $r_i = 6$, broj familija koje treba proveriti je 2^{64}, što je previše i za jake računare. Ipak, moguće je znatno smanjiti broj slučajeva razmatranjem samo $(\mathcal{F}_i, k)$-korektnih familija dobijenih iz familija koje sadrže samo skupove sa negativnom vrednošću učešća. Obeležimo sa $\mathcal{N}_{i,k}$ narednu familiju

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{i,k} &= \{A \in \mathcal{C}_{K,S_i} \colon |K| = k,\ s(A) < 0\} \\ &= \{N_1, \ldots, N_p\}, \end{aligned}$$

gde $s(N_1) \leq s(N_2) \leq \cdots \leq s(N_p)$. Pošto $K \subseteq N$ za svako $N \in \mathcal{N}_{i,k}$, imamo da je $N_1 = K$, kada je $p \geq 1$. Takođe, pošto su težine svih elemenata prikazanih u Tabeli 2.1 veće od 0, imamo da za svako $A \subset B$ važi $s(A) < s(B)$. Pored toga, ni za jedno $i \geq 1$ ne postoji j, $i < j \leq p$ za koji je $N_j \subset N_i$.

U slučaju kada je $\mathcal{N}_{i,k}$ prazan skup (jedini takav slučaj je za $i = 25$ i $k = 9$), donja granica je veća ili jednaka 0, i može se lako dobiti preko:

$$\begin{aligned} d_{i,|K|}^{\,1} &= s(\{K\} \uplus \mathcal{F}_i) \\ d_{i,|K|}^{\,0} &= s(K \cup S_i) \end{aligned}$$

Neka je $p = |\mathcal{N}|$. Potfamilije od $\mathcal{N}$ se mogu indeksirati vektorima

$$a = (a_1, \ldots, a_p) \in \{0, 1\}^p, \tag{2.1}$$

gde za $j \in \{1, \ldots, p\}$ skup N_j pripada familiji $\mathcal{N}$ ako i samo ako je $a_j = 1$. Uvedimo oznaku

$$\mathcal{N}_{a,i,k} = \{N_j \colon N_j \in \mathcal{N}_{i,k},\ 1 \leq j \leq p,\ a_j = 1\}.$$

i neka je $\mathcal{G}_a$ minimalna $(\mathcal{F}_i, k)$-zatvorena familija koja sadrži $\mathcal{N}_{a,i,k}$, odnosno,

$$\mathcal{G}_a = \overline{\mathcal{N}}_{a,i,k} \uplus \overline{\mathcal{F}_i}. \tag{2.2}$$

Dakle, efikasniji algoritam bi ispitivao samo $(\mathcal{F}_i, k)$-zatvorene familije $\mathcal{G}_a$.

Algoritam 2.2.4.
Ulaz: *Familije* $\mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq 33$.
Izlaz: *Vrednosti* $d_{i,k}^0$ *i* $d_{i,k}^1$,
Početak
  za svako $i \in \{1, \ldots, 33\}$ ***uradi***
    za svako $k \in \{0, \ldots, 12 - r_i\}$ ***uradi***
      podesi $d_{i,k}^{\,0} \leftarrow \infty$, $d_{i,k}^{\,1} \leftarrow \infty$
      podesi $K \leftarrow \{r_i + 1, \ldots, r_i + k\}$
      za svako $a \in \{0, 1\}^p$ ***uradi***
        podesi $\mathcal{G}_a \leftarrow \overline{\mathcal{N}}_{a,i,k} \uplus \overline{\mathcal{F}_i}$
        ukoliko $Q(\mathcal{G}_a)$ ***i*** $R(\mathcal{G}_a, i)$ ***tada***
          $d_{i,k}^{\mathbf{1}_{\mathcal{G}_a}(K)} \leftarrow \min\left\{s(\mathcal{G}_a),\ d_{i,k}^{\mathbf{1}_{\mathcal{G}_a}(K)}\right\}$
    vrati $d_{i,k}^0$ ***i*** $d_{i,k}^1$
Kraj

Ovaj algoritam je, iako efikasniji od prethodnog, takođe previše zahtevan. Broj izračunavanja moguće je dalje smanjiti primenom rekurzivnog algoritma. Sada uvodimo notaciju koja nam koristi u opisu koraka algoritma.

Neka je a vektor dat preko (2.1) i neka je

$$b = (a_1, \ldots, a_t),\ 1 \leq t \leq p \tag{2.3}$$

Označimo sa $v(b)$ vrednost

$$v(b) = s(\mathcal{G}_b) + \sum_{\substack{t<i\leq p \\ N_i \notin \mathcal{G}_b}} s(N_i). \tag{2.4}$$

Neka su a i b vektori dati sa (2.1) i (2.3), redom. Sada prikazujemo rekurzivni algoritam koji odbacuje veliku količinu familija koje nisu od značaja, odnosno familije koje imaju učešće veće od $d^l_{i,k}$.

Algoritam 2.2.5 (**rekurzivnaPretraga()**).
Ulaz: *Familije* $\mathcal{F}_i$ *i* $\mathcal{N}_{i,k}$, *ceo broj* k, *vektor* $b = (a_1, \ldots, a_t)$
Početak
  podesi $\mathcal{G}_b \leftarrow \overline{\mathcal{N}_b} \uplus \overline{\mathcal{F}_i}$
  ukoliko $Q(\mathcal{G}_b)$ ***i*** $R(\mathcal{G}_b, i)$ ***tada***
    ukoliko $v(b) < d^{\mathbf{1}_{\mathcal{G}_b}(K)}_{i,k}$ ***tada***
      podesi $d^{\mathbf{1}_{\mathcal{G}_b}(K)}_{i,k} \leftarrow \min\left\{s(\mathcal{G}_b), d^{\mathbf{1}_{\mathcal{G}_b}(K)}_{i,k}\right\}$
      ukoliko $t < |\mathcal{N}_{i,k}|$ ***tada***
        rekurzivnaPretraga($\mathcal{F}_i$, $\mathcal{N}_{i,k}$, k, $(a_1, \ldots, a_t, 1)$)
        ukoliko $N_{t+1} \notin \mathcal{G}_b$ ***tada***
          rekurzivnaPretraga($\mathcal{F}_i$, $\mathcal{N}_{i,k}$, k, $(a_1, \ldots, a_t, 0)$)
Kraj

Naredni algoritam se može koristiti za pozivanje Algoritma 2.2.5 za svako $i \in \{1, \ldots, 33\}$, za izračunavanje vrednosti $d^l_{i,k}$.

Algoritam 2.2.6.
Ulaz: *Familije* $\mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq 33$.
Izlaz: *Vrednosti* $d^0_{i,k}$ *i* $d^1_{i,k}$, *za svako*
  $i \in \{1, 2, \ldots, 33\}$ *i* $k \in \{0, 1, \ldots, 12 - r_i\}$.
Početak
  za svako $i \in \{1, \ldots, 33\}$ ***uradi***
    za svako $k \in \{0, \ldots, 12 - r_i\}$ ***uradi***
      podesi $d^0_{i,k} \leftarrow \infty$, $d^1_{i,k} \leftarrow \infty$
      podesi $K \leftarrow \{r_i + 1, \ldots, r_i + k\}$
      izračunaj $\mathcal{N}_{i,k}$

rekurzivnaPretraga($\mathcal{F}_i$, $\mathcal{N}_{i,k}$, k, $b = (1)$)
ukoliko $k > 0$ ***tada***
rekurzivnaPretraga($\mathcal{F}_i$, $\mathcal{N}_{i,k}$, k, $b = (0)$)
vrati $d^0_{i,k}$ ***i*** $d^1_{i,k}$
Kraj

Lema 2.2.7. *Pomoću Algoritma 2.2.6 dobijamo vrednosti $d^0_{i,k}$ i $d^1_{i,k}$, za svako $i \in \{1, 2, \ldots 33\}$ i $k \in \{0, 1, \ldots 12 - r_i\}$.*

Dokaz. Neka su a i b vektori dati sa (2.1) i (2.3), redom. Dalje, neka su $\mathcal{G}_a$ i $\mathcal{G}_b$ familije date sa (2.2), dobijene od vektora a i b, redom. Iz gore navedenog izvlačimo sledeća jednostavna zapažanja.

1. $\mathcal{G}_b \subseteq \mathcal{G}_a$,
2. ukoliko $Q(\mathcal{G}_a)$ tada $Q(\mathcal{G}_b)$,
3. ukoliko $R(\mathcal{G}_a, i)$ tada $R(\mathcal{G}_b, i)$,
4. $v(b) \leq s(\mathcal{G}_a)$, dakle za $v(b) \geq d_{i,k}^{\,l}$ važi $s(\mathcal{G}_a) \geq d_{i,k}^{\,l}$.

Zbog toga, kada $\mathcal{G}_b$ sadrži kao potfamiliju neku FC-familiju ili $\mathcal{F}_j$, za neko $j < i$, ili kada $v(b) \geq d_{i,k}^{\,l}$, tada se mogu preskočiti izračunavanja za svaki vektor a sa prefiksom b. Neka je $i \in \{1, \ldots, 33\}$ i neka $\mathcal{F}$ sadrži $\mathcal{F}_i$ kao potfamiliju. Neka je $\mathcal{G}$ $(\mathcal{F}_i, k)$-korektna familija takva da $s(\mathcal{G}) = d_{i,k}^{\mathbf{1}_{\mathcal{G}}(K)}$, gde je $k \in \{0, \ldots, r_i\}$. Dalje, neka je $a \in \{0, 1\}^p$ vektor koji odgovara skupovima iz $\mathcal{N}_{i,k}$ koji se nalaze u $\mathcal{G}$, i neka je $l = |\mathcal{N}_{a,i,k}|$. Sada dokazujemo da se vrednost $d_{i,k}^{\mathbf{1}_{\mathcal{G}}(K)}$ dobija primenom Algoritma 2.2.5.

Dokaz izvodimo indukcijom po l. Za $l = 0$ se vrše odsecanja samo za familije koje sadrže neku FC-familiju ili 12-FC-familiju, čime je zadovoljen osnovni korak indukcije. Dalje, pretpostavimo da je $l \geq 1$ i da se za familije koje imaju učešće jednako $d_{i,k}^{\mathbf{1}_{\mathcal{G}}(K)}$, i sadrže neki od skupova N_k, sa $k \geq l$, ni za jedno $j \in \{0, \ldots, l-1\}$ ne vrše odsecanja, primenom Algoritma 2.2.5. Neka je $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{N}_{i,k}$, i neka je m najveći ceo broj za koji je $N_m \in \mathcal{H}$, $1 \leq m \leq l$ i $\overline{\mathcal{G} - N_m} \neq \mathcal{G}$. Pored toga, neka je n najveći ceo broj za koji je $1 \leq n < m$, $N_n \in \mathcal{G}$, a u slučaju kada N_n ne postoji neka je $n = 0$. Po indukcijskoj hipotezi se dostiže familija $\mathcal{G}_b = \overline{\mathcal{N}}_{b,i,k} \uplus \overline{\mathcal{F}_i}$, sa $b = (a_1, \ldots, a_n)$. Pošto je vrednost $v(b)$, data sa (2.4), manja od ili jednaka $d_{i,k}^{\mathbf{1}_{\mathcal{G}}(K)}$, Algoritam 2.2.5 nastavlja sa rekurzivnim pozivima sve do $a = (a_1, \ldots, a_m)$, odakle se dobijaju vrednosti $d^l_{i,k}$ za $0 \leq l \leq 1$. □

Primer 2.2.8. *Neka je* $i = 32$. *Tada imamo* $\mathcal{F}_{32} = \{\{1,2,3,4\}\}$, $S_i = \bigcup \mathcal{F}_{32} = [4]$, $r_i = |S_i| = 4$. *Težinska funkcija* w *definisana je sa* $w(1) = w(2) = w(3) = w(4) = 5$, *i* $w(x) = 2$ *za svako* $x > 4$. *Odavde imamo da je* $t(w) = 18$. *U slučaju* $k = 0$ *baza hiperkocke je* $K = \emptyset$, *a u slučaju* $k = 1$ *baza hiprekocke je* $K = \{5\}$. *U oba slučaja, skupovi sa negativnim učešćem su:*

$$\begin{aligned}\mathcal{N} \; = \; & \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \\ & \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}\,.\end{aligned}$$

Vrednosti $d^1_{32,0} = -16$ *i* $d^0_{32,1} = 4$ *se dobijaju posle niza rekurzivnih poziva izlistanih u Tabelama 2.3 i 2.4, redom.*

Tabela 2.3: Niz rekurzivnih poziva, za $k = 0$ u Primeru 2.2.8.

a	$\mathcal{N}_a$	Da li važe $Q(\mathcal{G}_a)$ i $R(\mathcal{G}_a, 32)$?
$K \in \mathcal{G}_a$		
1	$\{\emptyset\}$	da
11	$\{\emptyset, \{1\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{1\}\}$
101	$\{\emptyset, \{2\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{2\}\}$
1001	$\{\emptyset, \{3\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{3\}\}$
10001	$\{\emptyset, \{4\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{4\}\}$
100001	$\{\emptyset, \{1,3\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{1,3\}\}$
1000001	$\{\emptyset, \{2,3\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{2,3\}\}$
10000001	$\{\emptyset, \{1,2\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{1,2\}\}$
100000001	$\{\emptyset, \{1,4\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{1,4\}\}$
1000000001	$\{\emptyset, \{2,4\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{2,4\}\}$
10000000001	$\{\emptyset, \{3,4\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{3,4\}\}$
100000000001	$\{\emptyset, \{1,2,4\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži $\{\{1,2,4\}\}$ ekvivalentnu sa $\mathcal{F}_{25}$
1000000000001	$\{\emptyset, \{1,2,3\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži $\{\{1,2,3\}\}$ ekvivalentnu sa $\mathcal{F}_{25}$
10000000000001	$\{\emptyset, \{1,3,4\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži $\{\{1,3,4\}\}$ ekvivalentnu sa $\mathcal{F}_{25}$
100000000000001	$\{\emptyset, \{2,3,4\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži $\{\{2,3,4\}\}$ ekvivalentnu sa $\mathcal{F}_{25}$
100000000000000	$\{\emptyset\}$	da, $t = \lvert\mathcal{N}\rvert$, $d^1_{33,0} = s(\mathcal{G}_a) = -16$

Vrednosti $d^{\,l}_{i,k}$, date u Tabeli 2.5, dobijene su programom napisanim u programskom jeziku Java, primenom Algoritama 2.2.6. Potrebno je oko pet minuta da se obave izračunavanja svih ovih vrednosti, na 64-bitnom Acer laptopu sa Intelovim i7 procesorom, na 2.4 GHz, sa 16 GB RAM-a. Najveći broj rekurzivnih poziva u nekom od slučajeva je 34437982 za $(i,k) = (14,2)$. Vrednosti (i,k,l) nisu uključene u Tabelu 2.5 u sledećim slučajevima.

Tabela 2.4: Niz rekurzivnih poziva, za $k = 1$ u Primeru 2.2.8.

a	$\mathcal{N}_{a,i,k}$	Da li važe $Q(\mathcal{G}_a)$ i $R(\mathcal{G}_a, 32)$?
$K \in \mathcal{G}_a$		
1	$\{\{5\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{5\}\}$
$K \notin \mathcal{G}_a$		
01	$\{\{1,5\}\}$	ne, $\mathcal{G}_a$ sadrži FC-familiju $\{\{1,5\}\}$

- $1 \leq i \leq 33$, $k = 0$, $l = 0$.
  Kao što je ranije ukazano, prazan skup je implicitno uključen u svaku od razmatranih familija.
- $1 \leq i \leq 33$, $k \in \{1,2\}$, $l = 1$.
  Prema Teoremi 2.1.8, svaka familija koja sadrži jednočlan ili dvočlan skup je Franklova.
- $i \geq 18$, $k = 3$, $l = 1$.
  $\mathcal{G}_a$ sadrži familiju ekvivalentnu sa $\mathcal{F}_{17} = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$, gde je K jedan 3-elementni skup, dok je drugi 3-elementni skup iz $\mathcal{F}_j$, $18 \leq j \leq 24$.
- $i \geq 25$, $k = 3$, $l = 1$.
  $\mathcal{G}_a \supseteq K \sim \mathcal{F}_{25} = \{\{1,2,3\}\}$.
- $i = 25$, $k = 4$, $l = 1$.
  $\mathcal{G}_a \supseteq \mathcal{F}_{25} \cup \{K\} = \{\{1,2,3\},\{4,5,6,7\}\} \sim \mathcal{F}_{24}$.
- $i = 33$, $k = 4$, $l = 1$.
  $\mathcal{G}_a \supseteq K = \{\{1,2,3,4\}\} \sim \mathcal{F}_{32}$.

Lema 2.2.9. *Neka su A, B i C tri različita 3-elementna skupa. Tada je zadovoljeno barem jedno od sledeća tri tvrđenja.*

1. *Unija neka dva od skupova A, B i C je 5-elementni skup.*
2. *Postoje dva para skupova bez zajedničkih elemenata.*
3. *$\{A,B,C\}$ je FC-familija.*

Tabela 2.5: Donje granice $d_{i,k}^{\,l}$ za učešća hiperkocke u Lemi 2.2.10, $1 \leq i \leq 33$, $0 \leq k \leq 12 - |\bigcup \mathcal{F}_i|$, $l \in \{0, 1\}$.

$\lvert K \rvert$	**0**	**1**	**2**	**3**		**4**		**5**		**6**		**7**		**8**		**9**		
$i \setminus l$	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	r_i
1	60	38	15	−36	13	0	43	30	51	58	53	86	55					5
2	30	47	45	−40	11	8	53	56	55	96	57							6
3	6	19	12	−15	6	0	20	15	23	30	24							6
4	−3	12	3	−6	1	0	19	6	21	12	22	18	23					5
5	2	12	9	−2	4	5	15	20	16	29	17							6
6	60	25	1	−18	9	52	31	140	33									7
7	22	11	8	7	4	26	14	53	15	80	16							6
8	58	18	7	15	6	77	27	155	29									7
9	30	14	3	−23	1	8	28	56	31	96	33							6
10	−9	6	0	−4	1	9	12	24	13									7
11	−17	8	16	−5	9	8	27	26	29	38	31							6
12	27	14	12	−7	1	3	28	49	31	87	33							6
13	3	19	18	−1	20	1	26	23	29	45	31	64	33					5
14	6	3	6	−9	1	9	12	32	13									7
15	3	8	11	−5	7	0	13	14	17	24	18							6
16	−2	10	4	−10	12	0	20	24	24	48	26	64	28					5
17	−12	2	6	0	0	0	8	8	11	12	12							6
18	−8	4	4		1	0	8	6	9	14	10	19	11	24	12			4
19	−1	16	13		14	0	19	19	25	41	27							6
20	−18	2	1		0	3	16	17	19	27	21							6
21	−7	5	3		0	0	7	9	9	20	10	27	11					5
22	−8	15	12		2	1	17	14	23	31	25	43	27					5
23	−4	3	4		2	2	10	10	11	18	12							6
24	−10	4	3		0	3	10	10	11									7
25	−9	1	2		3		1	0	4	3	6	5	7	7	8	9	9	3
26	0	8	5		2	8	19	43	21	65	23							6
27	−7	0	0		0	1	6	16	8	24	9							6
28	−5	1	0		1	4	3	8	7	15	9	22	10					5
29	0	5	3		6	6	0	7	10	18	12							6
30	−6	3	3		0	1	3	3	6	9	8	14	10					5
31	−6	7	2		6	6	10	5	11	12	12							6
32	−16	4	6		1	0	5	0	8	7	13	12	16	16	18			4
33	−14	5	5		6		5	1	8	9	14	14	17					5

Dokaz. Pošto je veličina preseka dva različita 3-elementna skupa 0, 1 ili 2, razmatramo sledeće slučajeve.

1. Presek neka dva od ova 3 skupova je 1-elementni skup. Tada unija ta dva skupa ima veličinu 5, i zadovoljeno je prvo tvrđenje.

2. Niti jedan od preseka dva skupa od skupova A, B i C nije 1-elementni skup. Sada razmatramo dva slučaja.

   (a) Neka dva od ovih skupova, recimo A i B, nemaju zajedničkih elemenata. Tada $|C \cap A| = 0$ ili $|C \cap B| = 0$, jer bi u suprotnom bilo $|C \cap A| = |C \cap B| = 2$, odakle je $|C| \geq 4$. Dakle, drugo tvrđenje je zadovoljeno.

   (b) Presek svaka dva od skupova A, B i C je neprazan skup. Dakle $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 2$. Neka je $|A \cap B \cap C| = q$. Slučaj kada je $q = 0$ nije moguć. Za $q = 1$ imamo $|A \cup B \cup C| = 4$, dok za $q = 2$ imamo $|A \cup B \cup C| = 5$. U oba slučaja, $\{A, B, C\}$ je FC-familija, prema Teoremi 2.1.8, dakle, zadovoljeno je treće tvrđenje.

□

Lema 2.2.10. *Familije $\mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq 33$, prikazane u Tabeli 2.1, su 12-FC-familije.*

Dokaz. Neka su vrednosti $d_{i,k}^{l}$, $0 \leq k \leq 12 - r_i$, $l \in \{0, 1\}$, date u Tabeli 2.5, najmanje vrednosti učešća svih familija koje kao potfamiliju sadrže familiju ekvivalentnu sa $\mathcal{F}_i$, a ne sadrže neku familiju ekvivalentnu sa FC-familijom iz Teoreme 2.1.8, niti $\mathcal{F}_j$ za bilo koje $j \in \{1, \ldots, i-1\}$. Dalje, neka je $\mathcal{K}_k = \{K \colon K \subseteq \bigcup \mathcal{F} \setminus S_i,\ |K| = k\}$, odakle imamo $|\mathcal{K}_k| = \binom{12-r_i}{k}$. Za $|K| = 0$ i $|K| = 12 - r_i$ imamo da je $\mathcal{C}_{K,S_i} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, pošto $S_i \in \mathcal{F}$, $\bigcup \mathcal{F} = [12]$ i $\bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{F}$. Takođe, u oba ova slučaja važi $|\mathcal{K}_k| = 1$. Neka je W_i oznaka za najmanju od dve vrednosti učešća gornje hiperkocke (kada $\mathcal{F}$ sadrži, i kada ne sadrži skup K), odnosno $W_i = \min\{d_{i,12-r_i}^{0}, d_{i,12-r_i}^{1}\}$. Sada, analiziramo slučajeve za vrednost i.

Slučaj $i \in \{7, 8\} \cup \{17, \ldots, 33\}$**.**

Iz Tabele 2.1 se vidi da je $d_{i,k}^{l} < 0$, odnosno $s(\mathcal{C}_{K,S_i} \cap \mathcal{F}) < 0$, moguće samo za $k = 0$. Tada, za svako od i, negativno učešće najniže hiperkocke je kompenzovano učešćem najviše hiperkocke, odakle imamo $s(\mathcal{F}) \geq d_{i,0}^{1} + W_i \geq 0$.

Slučaj $i \in \{1, \ldots 6\} \cup \{9, \ldots 16\}$**.**

Vrednost $d_{i,k}^{\,l}$ je manja od nule samo kada je $k \in \{0, 3\}$. Imamo da je $12 - r_i \in \{5, 6, 7\}$. Neka je

$$m_i = \begin{cases} 3, & \text{za } 12 - r_i = 5 \\ 4, & \text{za } 12 - r_i \in \{6, 7\}. \end{cases}$$

Ukoliko je $|\mathcal{K}_3| \geq m_i$, tada je $\mathcal{K}_3$ FC-familija, prema Teoremi 2.1.8. Inače, ukoliko je $|\mathcal{K}_3| \leq m_i - 2$, tada $s(\mathcal{F}) \geq d_{i,0} + W_i + (m_i - 2)d_{i,3}^1 \geq 0$ (videti Table 2.6). U preostalom slučaju, odnosno kada je $|\mathcal{K}_3| = m_i - 1$, nejednakost $s(\mathcal{F}) \geq 0$ je takođe zadovoljena, pošto iz Leme 2.2.9 i Tabele 2.6 sledi:

- Za $12 - r_i = 7$: $s(\mathcal{F}) \geq d_{i,0}^{\,1} + (m_i - 1)d_{i,3}^{\,1} + \min\{d_{i,5}^{\,1}, 2d_{i,6}^{\,1}\} + W_i \geq 0$
- Za $12 - r_i = 6$: $s(\mathcal{F}) \geq d_{i,0}^{\,1} + (m_i - 1)d_{i,3}^{\,1} + d_{i,5}^{\,1} + d_{i,6}^{\,1} \geq 0$
- Za $12 - r_i = 5$: $s(\mathcal{F}) \geq d_{i,0}^{\,1} + (m_i - 1)d_{i,3}^{\,1} + d_{i,5}^{\,1} \geq 0$

$\square$

Teorema 2.2.11. *Neka je $\mathcal{F}$ familija zatvorena za uniju, za koju je $|\bigcup \mathcal{F}| = 12$. Tada je $\mathcal{F}$ Franklova familija.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da $\mathcal{F}$ nije Franklova familija. Tada $\mathcal{F}$ ne sadrži 1-elementni skup niti 2-elementni skup. Iz Leme 2.2.10 sledi da $\mathcal{F}$ ne sadrži

- potfamiliju ekvivalentnu sa $\mathcal{F}_{25} = [3]$,
- potfamiliju ekvivalentnu sa $\mathcal{F}_{32} = [4]$,
- potfamiliju ekvivalentnu sa $\mathcal{F}_{33} = [5]$.

Dakle, svi skupovi iz $\mathcal{F}$ (osim praznog skupa) imaju 6 ili više elemenata. Neka je w težinska funkcija takva da $w(x) = 1$ za svako $x \in X$, gde je $X = \bigcup \mathcal{F}$. Tada je $t(w) = 6$, zatim $s(\emptyset) + s(X) = 0$, dok za bilo koji neprazan skup $A \in \mathcal{F}$ imamo $s(A) \geq 0$. Zbog toga, imamo $s(\mathcal{F}) \geq 0$, odakle sledi da je familija $\mathcal{F}$ Franklova, što je kontradikcija, čime je dokaz teoreme kompletiran. $\square$

Tabela 2.6: Izračunavanja uz dokaz Leme 2.2.10. $l \in \{0, 1\}$, i je broj reda u Tabeli 2.5 sa $d^1_{i,3} < 0$, $m_i \in \{3, 4\}$, $r_i = |\bigcup \mathcal{F}_i|$.

$\|K\|$	**0**	**3**	**5**	**6**	**7**				
$i \setminus l$	1	1	1	1	1	0	m_i	r_i	$s(\mathcal{F}) \geq$
1	60	-36	30	58	86	55	4	5	37
2	30	-40	56	96			4	6	62
3	6	-15	15	30			4	6	6
4	-3	-6	6	12	18	23	4	5	3
5	2	-2	20	29			4	6	45
6	60	-18	140				3	7	164
9	30	-23	56	96			4	6	113
10	-9	-4	24				3	7	7
11	-17	-5	26	38			4	6	32
12	27	-7	49	87			4	6	142
13	3	-1	23	45	64	33	4	5	56
14	6	-9	32				3	7	20
15	3	-5	14	24			4	6	26
16	-2	-10	24	48	64	28	4	5	20

Ukoliko postoji protiv-primer Franklovoj hipotezi familije $\mathcal{F}$, za koju je $\bigcup \mathcal{F} < 12$, tada je, kao što su pokazali Bošnjak i Marković [20], moguće konstruisati protiv-primer $\mathcal{F}'$, za $\bigcup \mathcal{F}' = 12$. Iz toga sledi da ne postoji protiv-primer Franklovoj hipotezi familije čiji su skupovi sastavljeni od 12 ili manje elemenata.

Lo Faro [26] i kasnije Roberts i Simpson [28] dokazali su da ukoliko minimalan protiv-primer u pogledu broja elemenata sadrži m elemenata, tada protiv-primer familije, ukoliko postoji, ima barem $4m - 1$ skupova. Odatle imamo sledeću posledicu.

Posledica 2.2.12. *Franklova hipoteza je zadovoljena za svaku familiju zatvorenu za uniju sa* 50 *ili manje skupova.*

Primena gore prikazane tehnike na familije sastavljene od 13 i više elemenata, je teško izvodljiva. Glavni problem je u tome što kada se broj $\bigcup \mathcal{F}$ poveća samo za jedan, eksponencijalno raste broj familija koje razmatra algoritam. Tada, i veoma efikasan algoritam zahteva previše izračunavanja.

2.3 Klasifikacija familija sastavljenih od 6 ili manje elemenata na FC i *Non*FC-familije

Moris [22] je dao pun popis svih FC-familija sastavljenih od 5 ili manje elemenata. Doprinos autora je potpuna karakterizacija svih familija sastavljenih od 6 ili manje elemenata, pri čemu su sve takve familije implicitno svrstane među FC ili *Non*FC-familije.

Neka je $\mathcal{F}^j$ oznaka za familiju sastavljenu od svih skupova familije $\mathcal{F}$ koji sadrže element j. Punen [23] je u narednoj teoremi dokazao koje uslove mora da zadovoljava FC-familija.

Teorema 2.3.1. *Neka je $\mathcal{G}$ familija zatvorena za uniju za koju je $|\bigcup \mathcal{G}| = k$. Familija $\mathcal{G}$ je FC-familija ako i samo ako postoje nenegativne celobrojne vrednosti $c_1, \ldots, c_k$, tako da za svaku familiju $\mathcal{F}$ zatvorenu za uniju, za koju je $\mathcal{F} \uplus \mathcal{G} = \mathcal{F}$, važi*

$$\sum_{j=1}^{k} c_j |\mathcal{F}^j| \geq \frac{c|\mathcal{F}|}{2},$$

gde je $c = \sum_{j=1}^{k} c_j$.

Za dokaz da je neka familija *Non*FC koristimo narednu teoremu.

Teorema 2.3.2. *Neka je $\mathcal{F}$ familija zatvorena za uniju i neka je $S = \bigcup \mathcal{F}$, $|S| = k$. Obeležimo sa $x_1, \ldots, x_k$ elemente skupa S. Ukoliko postoje familije $\mathcal{G}_j$ zatvorene za uniju, za koje $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}_j$, i celobrojne vrednosti c_j, za $j \in \{1, \ldots, n\}$, takve da za svako $x_i \in S$ važi*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(2|\mathcal{G}_j^{x_i}| - |\mathcal{G}_j|) < 0,$$

tada je $\mathcal{F}$ NonFC-Familija.

Dokaz. Dokaz izvodimo konstrukcijom familije $\mathcal{G}$ zatvorene za uniju za koju je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, i za koju važi $2|\mathcal{G}^x| < |\mathcal{G}|$ za svako $x \in S$. Neka je $p = \max\{2|\mathcal{F}^x| - |\mathcal{F}| + 1 \colon x \in S\}$, odakle sledi da je $p \geq 1$. Dalje, neka je $l = \sum_{j=1}^{n} pc_j$, i neka je Y bilo koji skup za koji je $|Y| = l$, pri čemu $Y \cap S = \emptyset$. Obeležimo sa $\{y_1, \ldots, y_l\}$ elemente skupa Y, a sa l_i vrednosti $\sum_{j=1}^{i-1} pc_j$, za $i \in \{1, \ldots, n\}$, pri čemu je $l_0 = 0$. Dalje, obeležimo sa Y_j^i skup $Y - y_{l_j+i}$. Neka je $\mathcal{C}_{Y_j^i, \mathcal{G}_j} = Y_j^i \uplus \mathcal{G}_i$. Sada, neka je

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \mathcal{C}_{Y, 2^{[S]}} \cup \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{i=1}^{pc_j} \mathcal{C}_{Y_j^i, \mathcal{G}_j}.$$

Dokažimo prvo da je familija $\mathcal{G}$ zatvorena za uniju. Familija $\mathcal{F}$, hiperkocka $\mathcal{C}_{Y,2^{[S]}}$, kao i hiperkocke $\mathcal{C}_{Y_j^i, \mathcal{G}_j}$, za svako $j \in \{1, \ldots, k\}$ i svako $i \in \{1, \ldots, pc_j\}$, su zatvorene za uniju. Za bilo koja dva skupa A i B, za koje $A \in \mathcal{C}_{Y,2^{[S]}}$, $B \in \mathcal{C}_{Y_j^i, \mathcal{G}_j}$, za neko $j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \in \{1, \ldots, pc_j\}$ skup $A \cup B$ pripada hiperkocki $\mathcal{C}_{Y,2^{[S]}}$, dakle nalazi se u $\mathcal{G}$. Takođe, za bilo koja dva skupa A i B, za koje $A \in \mathcal{C}_{Y_l^m, \mathcal{G}_l}$, $B \in \mathcal{C}_{Y_j^i, \mathcal{G}_j}$, za neko $j, l \in \{1, \ldots, k\}$, $i \in \{1, \ldots, pc_j\}$, $m \in \{1, \ldots, pc_l\}$, $j \neq l$ skup $A \cup B$ se nalazi u hiperkocki $\mathcal{C}_{Y,2^{[S]}}$, a samim tim i u $\mathcal{G}$. Dalje, imamo za svako A i B, za koje $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{C}_{Y,2^{[S]}}$, važi $A \cup B \in \mathcal{C}_{Y,2^{[S]}}$. Pošto je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}_j$ za svako $j \in \{1, \ldots, n\}$, imamo da za svako A i B, za koje $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{C}_{Y_j^i, \mathcal{G}_j}$, važi $A \cup B = B$. Time smo dokazali da je $\mathcal{G}$ zatvorena za uniju. Svaki od elemenata iz S se u hiperkocki $\mathcal{C}_{Y,2^{[S]}}$ pojavljuje u tačno s^{k-1} skupova, što je tačno polovina od 2^k skupova ove hiperkocke. Iz tvrđenja teoreme sledi da za svako $x_i \in S$ važi $2|\mathcal{G}^{x_i}| - |\mathcal{G}| < p - p\sum_{j=1}^{n} c_j(|\mathcal{G}_j| - 2|\mathcal{G}_j^{x_i}|) = p(1 + \sum_{j=1}^{n} c_j(2|\mathcal{G}_j^{x_i}| - |\mathcal{G}_j|))$. Kako je $\sum_{j=1}^{n} c_j(2|\mathcal{G}_j^{x_i}| - |\mathcal{G}_j|)$ celobrojna vrednost manja od 0, dok je p veće od 0, dobijamo da važi $2|\mathcal{G}^x| - |\mathcal{G}| < 0$. Dakle, svaki od elemenata is S se pojavljuje u manje od polovine skupova familije $\mathcal{G}$. $\square$

U Tabeli 2.7 dat je popis svih 197 minimalnih FC-familija sastavljenih od 6 ili manje elemenata. Elementi skupova su označeni brojevima od 1 do 6, dok su skupovi razdvojeni zarezom. Radi sažetijeg prikaza, izostavljen je prikaz skupova koji se dobijaju unijom dva ili više skupova iz $\mathcal{F}$.

U Prilogu A, Tabeli A.1 date su težine dodeljene elementima ovih familija, koje zajedno sa Teoremom 2.3.1 čine dokaz da su navedene familije FC.

Za ispitivanje svih familija sastavljenih od 6 ili manje elemenata koje sadrže familiju F_i datu u Tabeli A.1, za neko $i \in \{1, \ldots, 197\}$, koristimo algoritam sličan Algoritmu 2.2.5. Pošto takva familija sadrži samo skupove sa 6 ili manje elemenata, dok su familije koje sadrže 1- ili 2-elementne skupove FC-familije, ovde postoji mnogo manje izračunavanja nego u Poglavlju 2.2.

Tabela 2.7: Popis svih minimalnih FC-familija sastavljenih od 6 ili manje elemenata.

i	$\mathcal{F}_i$
1	{1}
2	{12}
3	{123, 124, 134}
4	{123, 124, 125}
5	{123, 124, 135}
6	{123, 124, 345}
7	{123, 124, 156}
8	{123, 145, 246}
9	{1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1345}
10	{1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 3456}
11	{1234, 1235, 1236, 1245, 1345, 1456}
12	{1234, 1235, 1236, 1245, 1346, 2356}
13	{12345, 1236, 1246, 1256, 1346, 1356, 1456}
14	{12345, 1235, 1236, 1246, 1256, 1346, 1456}
15	{1234, 1235, 1245, 1345, 2345}
16	{12345, 12346, 12356, 1245, 1456, 2456, 3456}
17	{1234, 1235, 1245, 1345, 2346}
18	{12345, 1236, 1246, 1256, 1346, 2356}
19	{12345, 1236, 1246, 1346, 2356, 2456}

20	{12345, 1236, 1246, 1256, 1346, 3456}
21	{12345, 1235, 1236, 1246, 1346, 2356}
22	{12345, 1235, 1236, 1246, 1346, 2456}
23	{12345, 1235, 1236, 1246, 1456, 2456}
24	{12345, 1235, 1236, 1246, 1456, 3456}
25	{12345, 1235, 1236, 1246, 1356, 2456}
26	{12345, 1235, 1236, 1456, 2456, 3456}
27	{12345, 1235, 1246, 1346, 2456, 3456}
28	{12345, 1236, 1246, 1356, 2456, 3456}
29	{12345, 1235, 12356, 1246, 1346, 1456, 2346}
30	{12345, 12346, 1235, 1246, 1356, 2356, 3456}
31	{12345, 12346, 1235, 1256, 1356, 2356}
32	{1234, 124, 135, 356}
33	{12345, 12346, 124, 125, 356}
34	{12345, 124, 1246, 125, 346}
35	{12345, 1236, 126, 145, 345}
36	{12345, 1236, 126, 345, 456}
37	{12345, 124, 136, 356}
38	{1234, 1235, 1236, 1245, 125, 1256, 1346}
39	{12345, 12346, 12356, 12456, 13456, 2345, 2346, 235}
40	{12345, 12346, 1256, 1356, 456}
41	{12345, 12346, 12356, 124, 1456, 3456}
42	{1234, 1235, 1456, 245}
43	{1234, 1256, 135, 3456}
44	{1234, 1235, 1245, 345}
45	{1234, 1235, 1456, 246}
46	{12345, 12346, 12356, 1245, 1346, 1456, 146, 2356}
47	{12345, 12346, 12356, 1245, 1246, 1356, 3456, 356}
48	{12345, 12346, 12356, 1245, 1346, 1456, 245}
49	{12345, 12346, 12356, 1245, 1346, 2456, 346}
50	{12345, 12346, 12356, 1236, 1456, 245, 2456}
51	{12345, 12346, 12356, 12456, 1345, 135, 1356, 3456}
52	{12345, 12346, 12356, 12456, 1345, 1346, 3456, 346}
53	{12345, 12346, 12356, 1236, 12456, 1345, 1456, 345}
54	{12345, 12346, 12356, 1236, 12456, 1345, 2456, 345}
55	{12345, 12346, 12356, 1236, 12456, 145, 3456}

56	{12345, 12346, 1235, 1456, 256}
57	{12345, 12346, 1256, 135, 3456}
58	{12345, 12346, 1256, 1356, 235}
59	{12345, 1236, 1246, 1346, 236}
60	{12345, 1235, 1246, 1346, 156}
61	{12345, 1236, 1246, 134, 2356}
62	{12345, 1235, 1236, 1246, 346}
63	{12345, 1236, 1246, 1256, 346}
64	{12345, 1236, 1246, 125, 3456}
65	{12345, 1235, 1246, 1346, 456}
66	{12345, 1236, 1246, 1346, 156}
67	{12345, 1236, 1246, 3456, 346}
68	{12345, 1236, 1246, 1356, 236}
69	{12345, 1236, 1246, 136, 3456}
70	{12345, 1236, 1246, 125, 1356}
71	{12345, 1236, 1246, 1346, 256}
72	{12345, 12346, 1235, 1256, 1356, 1456, 146}
73	{12345, 12346, 1235, 1246, 1256, 1356, 146}
74	{12345, 12346, 124, 1245, 1356, 2356, 3456}
75	{12345, 1235, 12356, 1246, 1346, 146, 2346}
76	{12345, 1235, 12356, 1246, 1346, 146, 2456}
77	{12345, 12346, 12356, 12456, 125, 13456, 2346, 3456}
78	{12345, 12346, 1256, 126, 1356, 3456}
79	{12345, 12346, 124, 1256, 1356, 3456}
80	{12345, 12346, 124, 1256, 1356, 2356}
81	{12345, 12346, 1235, 1256, 1356, 246}
82	{12345, 12346, 1235, 1256, 1456, 346}
83	{12345, 1235, 1236, 1246, 1456, 156}
84	{12345, 1236, 1246, 126, 1346, 3456}
85	{12345, 1236, 1246, 1256, 134, 1346}
86	{12345, 1235, 1236, 1246, 1356, 246}
87	{12345, 1235, 1246, 125, 1346, 2346}
88	{12345, 1235, 1236, 1256, 3456, 346}
89	{12345, 1235, 1236, 1246, 1346, 235}
90	{12345, 1236, 1246, 1346, 235, 2356}
91	{12345, 1235, 1236, 1246, 135, 2456}

92	{12345, 1236, 1246, 1356, 245, 2456}
93	{12345, 1235, 1236, 1246, 1456, 456}
94	{12345, 1235, 1246, 125, 1346, 3456}
95	{12345, 1235, 1236, 1246, 3456, 456}
96	{1234, 1235, 1236, 1245, 134}
97	{1234, 1235, 1245, 1346, 135}
98	{1234, 1235, 1246, 1256, 136}
99	{1234, 1235, 1245, 126, 1345}
100	{1234, 1235, 1236, 1245, 146}
101	{1234, 1235, 1245, 1346, 235}
102	{1234, 1235, 1246, 3456, 346}
103	{1234, 1235, 1245, 1345, 236}
104	{1234, 1235, 1236, 1245, 346}
105	{1234, 1235, 1245, 125, 1356, 1456}
106	{1234, 1235, 1236, 1245, 125, 1456}
107	{1234, 1235, 1236, 1245, 1345, 145}
108	{1234, 1235, 1246, 1356, 1456, 146}
109	{1234, 1235, 1236, 1245, 125, 3456}
110	{1234, 1235, 1245, 125, 1346, 2346}
111	{1234, 1235, 1245, 125, 1346, 3456}
112	{1234, 1235, 1236, 1456, 2456, 456}
113	{12345, 1235, 1236, 1246, 1256, 1346, 146}
114	{12345, 1235, 1236, 1246, 135, 1356, 1456}
115	{12345, 1235, 1246, 1346, 1456, 146, 2346}
116	{12345, 12346, 12356, 12456, 1345, 1346, 1356, 136, 2456}
117	{12345, 12346, 124, 1245, 126, 3456}
118	{1234, 125, 135}
119	{1234, 1235, 124, 125, 3456}
120	{12345, 1236, 1246, 135, 136}
121	{1234, 1235, 145, 146}
122	{12345, 1236, 124, 145, 1456}
123	{12345, 1235, 1246, 135, 136}
124	{12345, 1235, 1246, 136, 146}
125	{1234, 1235, 145, 456}
126	{1234, 1256, 345, 356}
127	{1234, 1256, 345, 346}

128	{12345, 1236, 146, 156}
129	{1234, 1235, 1245, 125, 156}
130	{1234, 1235, 1246, 134, 135}
131	{1234, 124, 1256, 126, 3456}
132	{12345, 12346, 12356, 1245, 126, 136}
133	{12345, 1236, 146, 456}
134	{12345, 1235, 146, 246}
135	{12345, 12346, 1235, 146, 156}
136	{12345, 12346, 124, 12456, 125, 1356}
137	{12345, 1235, 1236, 126, 146}
138	{12345, 12346, 156, 256}
139	{12345, 12346, 12356, 124, 125, 3456}
140	{12345, 1236, 124, 126, 3456}
141	{12345, 1235, 12356, 1246, 125, 1346, 1456, 146}
142	{1234, 1235, 1246, 125, 146}
143	{1234, 124, 1356, 235}
144	{1234, 1235, 1245, 125, 136}
145	{1234, 1235, 1245, 125, 134, 1345}
146	{1234, 1235, 124, 3456, 346}
147	{1234, 124, 1256, 156, 3456}
148	{1234, 1235, 124, 3456, 456}
149	{12345, 1236, 124, 3456, 456}
150	{12345, 1235, 1246, 146, 356}
151	{1234, 1235, 1236, 124, 135}
152	{1234, 124, 1256, 135}
153	{12345, 1236, 124, 1246, 456}
154	{12345, 1235, 1246, 125, 356}
155	{1234, 1235, 124, 1246, 346}
156	{12345, 1235, 1236, 125, 456}
157	{12345, 1235, 1236, 126, 456}
158	{1234, 1235, 1245, 125, 356}
159	{12345, 1236, 145, 246}
160	{12345, 12346, 1235, 126, 456}
161	{1234, 125, 345}
162	{12345, 12346, 12356, 12456, 134, 356}
163	{12345, 12346, 1256, 126, 356}

164	{12345, 12346, 1256, 135, 256}
165	{12345, 1236, 1246, 126, 134, 1346}
166	{12345, 1236, 1246, 126, 346}
167	{12345, 12346, 12356, 1245, 145, 346}
168	{12345, 12346, 12356, 124, 3456, 456}
169	{12345, 12346, 12356, 12456, 1345, 1346, 135, 146}
170	{12345, 1236, 1246, 136, 246}
171	{12345, 12346, 1235, 125, 1256, 1456, 146}
172	{12345, 1236, 124, 156}
173	{12345, 1236, 146, 256}
174	{12345, 1236, 1246, 126, 3456, 356}
175	{1234, 1235, 1246, 135, 1356, 246}
176	{12345, 12346, 1235, 1246, 1356, 146, 235}
177	{12345, 1236, 124, 1246, 3456, 356}
178	{12345, 12346, 124, 1256, 3456, 356}
179	{12345, 12346, 12356, 12456, 125, 13456, 23456, 346}
180	{12345, 12346, 12356, 12456, 125, 1346, 3456, 346}
181	{12345, 12346, 12356, 124, 1456, 356}
182	{12345, 12346, 1256, 126, 1356, 345}
183	{12345, 12346, 124, 1256, 1356, 356}
184	{12345, 1236, 1246, 126, 1356, 345}
185	{12345, 1236, 1246, 125, 346}
186	{12345, 1236, 1246, 134, 256}
187	{1234, 1235, 1246, 125, 346}
188	{1234, 1235, 1245, 134, 256}
189	{1234, 1235, 126, 345, 3456}
190	{1234, 1256, 135, 246}
191	{12345, 12346, 12356, 1236, 12456, 126, 13456, 2345, 345}
192	{12345, 1236, 1246, 135, 1356, 246}
193	{1234, 1235, 1245, 125, 3456, 346}
194	{12345, 12346, 1235, 1246, 135, 246, 3456}
195	{1234, 1235, 124, 1246, 3456, 356}
196	{12345, 12346, 124, 1245, 1246, 1356, 2356, 356}
197	{12345, 12346, 1235, 1246, 135, 1356, 2456, 246}

U Tabeli 2.8 dat je popis svih 115 maksimalnih *Non*FC-familija sastavljenih od 6 ili manje elemenata. Svakoj od ovih familija implicitno pripada i prazan skup. Kao i kod FC-familija, radi sažetijeg prikaza, izostavljeni su skupovi koji se dobijaju unijom dva ili više skupova unutar familije. U Prilogu A, Tabeli A.2 date su familije $\mathcal{G}_j$, kao i koeficijenti c_j, koji uz Teoremu 2.3.2 čine dokaz da su ove familije *Non*FC.

Tabela 2.8: Popis svih maksimalnih *Non*FC-familija sastavljenih od 6 ili manje elemenata.

j	$\mathcal{F}'_j$
1	{1234, 1235, 1236, 1245, 1246, 1356}
2	{1234, 1235, 1236, 1245, 1346, 1456}
3	{1234, 1235, 1245, 1346, 1356, 1456}
4	{1234, 12345, 12356, 1236, 12456, 13456, 2346, 2456}
5	{1234, 12345, 12346, 12356, 12456, 13456, 2356, 2456, 3456}
6	{1234, 1235, 12456, 13456, 2346, 2356}
7	{1234, 12345, 12356, 12456, 1346, 2356, 3456}
8	{1234, 12345, 12346, 12356, 12456, 1356, 2456, 3456}
9	{1234, 12345, 12356, 1236, 12456, 13456, 2456, 3456}
10	{1234, 1235, 1245, 1346, 2346}
11	{1234, 1235, 1245, 1346, 3456}
12	{1234, 1235, 1246, 1356, 2456}
13	{1234, 1235, 1246, 1256, 3456}
14	{1234, 12345, 1236, 1246, 1356, 2456}
15	{1234, 12345, 1256, 1356, 1456, 2356}
16	{1234, 1235, 1236, 1245, 13456, 23456}
17	{1234, 1235, 1245, 1345, 23456}
18	{123, 1234, 125, 346}
19	{123, 1234, 156, 456}
20	{123, 1234, 125, 456}
21	{123, 12345, 12346, 124, 356}
22	{123, 1234, 12345, 12346, 12456, 1256, 13456, 23456}
23	{123, 1234, 12356, 1245, 12456, 13456, 23456}
24	{123, 1245, 12456, 1345, 13456, 23456}
25	{123, 12345, 12456, 13456, 2346, 2456}
26	{123, 1234, 1235, 1236, 12456, 13456, 1456, 23456}
27	{123, 1234, 12345, 1236, 12456, 1246, 13456, 3456}

28	{123, 1234, 12345, 12356, 1236, 12456, 1346, 2456}
29	{123, 1234, 12345, 12356, 1236, 12456, 1456, 3456}
30	{123, 1234, 12345, 1236, 12456, 13456, 2356}
31	{123, 1234, 1235, 12456, 1246, 13456, 23456}
32	{123, 1234, 1235, 1245, 12456, 13456, 23456}
33	{123, 1234, 12345, 1236, 12456, 13456, 2346}
34	{123, 1234, 12345, 12456, 13456, 1456, 2356}
35	{123, 1234, 12456, 1256, 13456, 23456, 3456}
36	{123, 1234, 12345, 12456, 13456, 1456, 2346}
37	{123, 1234, 1245, 12456, 13456, 23456, 3456}
38	{123, 1234, 12345, 12356, 12456, 1246, 13456, 3456}
39	{123, 1234, 12345, 12346, 12456, 1256, 13456, 3456}
40	{123, 1234, 12345, 12356, 12456, 13456, 2456, 3456}
41	{123, 1245, 13456, 2346}
42	{123, 1245, 12456, 1345, 3456}
43	{123, 1245, 12456, 1345, 1346}
44	{123, 12345, 1246, 1456, 3456}
45	{123, 1234, 12345, 1236, 12456, 1356, 2456}
46	{123, 1234, 1235, 12456, 1246, 13456, 3456}
47	{123, 1234, 1235, 12456, 13456, 2456, 3456}
48	{123, 1234, 12345, 12346, 1256, 1356, 1456}
49	{123, 12345, 12456, 1246, 13456, 23456, 3456}
50	{123, 1234, 1245, 13456, 1456, 23456}
51	{123, 1234, 12456, 13456, 2356, 2456}
52	{123, 12345, 12456, 1346, 1356, 1456}
53	{123, 1234, 1235, 12456, 1346, 3456}
54	{123, 1234, 1245, 1246, 13456, 1456}
55	{123, 1234, 1245, 1256, 13456, 1456}
56	{123, 1234, 12356, 1245, 1346, 1456}
57	{123, 1234, 12345, 1246, 1356, 1456}
58	{123, 1234, 1245, 1256, 1356}
59	{123, 1234, 1245, 1256, 1346}
60	{123, 1234, 1245, 1246, 1356}
61	{123, 1234, 1256, 1456, 2456}
62	{123, 1234, 1245, 1456, 3456}
63	{123, 1234, 1245, 1246, 3456}

64	{123, 1234, 1245, 1256, 3456}
65	{123, 1234, 1256, 1456, 3456}
66	{123, 1234, 1235, 1246, 1256, 1456}
67	{123, 1234, 1235, 1245, 1346, 1456}
68	{123, 1234, 1235, 1236, 1456, 2456}
69	{123, 1234, 1235, 1236, 1245, 13456, 1456}
70	{123, 1234, 12345, 1236, 1246, 1256, 1456}
71	{123, 1234, 1235, 1236, 1245, 12456, 3456}
72	{123, 1234, 1235, 1236, 1245, 12456, 1345, 13456}
73	{123, 1234, 1235, 1236, 1245, 12456, 13456, 1346}
74	{123, 1234, 1235, 1245, 1246, 1256, 126}
75	{123, 12345, 12346, 12356, 124, 3456}
76	{123, 1234, 12356, 125, 3456}
77	{123, 1234, 12356, 1245, 136}
78	{123, 1234, 125, 1456}
79	{123, 12345, 12346, 125, 1456}
80	{123, 12345, 124, 13456, 1356}
81	{123, 1234, 1235, 12456, 1346, 1356, 136}
82	{123, 1234, 12345, 126, 3456}
83	{123, 1234, 1235, 1236, 1245, 145, 1456}
84	{123, 1234, 1245, 146}
85	{123, 1234, 1456, 256}
86	{123, 1234, 1245, 12456, 346}
87	{123, 1234, 1256, 345}
88	{123, 12345, 1246, 356}
89	{123, 12345, 12456, 13456, 246}
90	{123, 1234, 12345, 12346, 12456, 1256, 13456, 1356, 156}
91	{123, 1234, 12345, 12346, 12456, 356}
92	{123, 1234, 1235, 12456, 346}
93	{123, 1234, 1235, 1236, 12456, 13456, 145}
94	{123, 1234, 12345, 12356, 12456, 1346, 146}
95	{123, 1234, 12345, 12456, 3456, 346}
96	{123, 1234, 12345, 12456, 3456, 356}
97	{123, 1234, 12345, 12346, 12456, 1356, 1456, 156}
98	{123, 1234, 1245, 1456, 156}
99	{123, 1234, 12345, 1256, 1456, 456}

100	{123, 1234, 1235, 1245, 1456, 456}
101	{123, 1234, 12345, 12346, 1456, 2456, 3456, 456}
102	{123, 1234, 12345, 12346, 12356, 1456, 2456, 456}
103	{123, 1234, 12345, 12356, 12456, 1456, 3456, 456}
104	{123, 1234, 12345, 12456, 1356, 456}
105	{123, 1234, 12345, 12356, 12456, 13456, 23456, 456}
106	{123, 1234, 1235, 1245, 13456, 456}
107	{123, 1234, 1235, 1236, 1245, 456}
108	{123, 1234, 1245, 1246, 456}
109	{123, 1234, 1235, 1236, 12456, 3456, 456}
110	{123, 1234, 12345, 1246, 3456, 456}
111	{123, 1234, 12345, 12456, 1346, 1456, 456}
112	{123, 1234, 12345, 1256, 3456, 456}
113	{123, 1234, 12345, 1236, 1456, 2456, 456}
114	{123, 12345, 126, 456}
115	{123, 12345, 12456, 126, 3456}

Da bismo utrvdili da je u Tabelama 2.7 i 2.8 dat potpun popis svih minimalnih FC, odnosno svih maksimalnih *Non*FC-familija, koristimo sledeći algoritam.

Algoritam 2.3.3.
Ulaz: *FC-familije* $\mathcal{F}_i$, $1 \leq i \leq 197$ *iz Tabele 2.7*
NonFC-familije $\mathcal{F}'_j$, $1 \leq j \leq 115$ *iz Tabele 2.8*
Niz $\mathcal{N}$ *od svih* 64 *podskupova skupa* $\{1, \dots, 6\}$.
Izlaz: *Familije sastavljene od* 6 *ili manje elemenata*
koje ne sadrže nijednu FC-familiju iz Tabele 2.7,
niti su sadržane u nekoj NonFC-familiji iz Tabele 2.8.
Početak
podesi $H \leftarrow \{\}$
podesi $c \leftarrow 0$
vrati *FC-6-Rekurzija (*$\mathcal{H}$*,* $c+1$*,* $\mathcal{N}$*)*
Kraj

Gornji algoritam poziva rekurzivnu funkciju datu narednim pseudo-kodom, koja kao rezultat vraća prazan skup familija, odakle sledi da je dati popis FC i *Non*FC-familija potpun.

Algoritam 2.3.4 (**FC-6-Rekurzija()**).

Ulaz: *Familija* H, *brojač* c.

    Niz $\mathcal{N}$ *od svih* 64 *podskupova skupa* $\{1,\ldots,6\}$.

Izlaz: *Spisak familija sastavljenih od* 6 *ili manje elemenata*

  koje ne sadrže nijednu FC-familiju,

  niti su sadržane u nekoj NonFC-familiji.

Početak

  ukoliko $c \geq 64$

    vrati $\{\}$

  podesi $spisakFamilija \leftarrow \{\}$

  ukoliko $\mathcal{H}$ *ne sadrži* $\mathcal{N}[c]$

    Dodaj FC-6-Rekurzija ($\mathcal{H}$*,* $c+1$*,* $\mathcal{N}$*) u spisakFamilija*

  podesi $\mathcal{H}' \leftarrow \overline{\mathcal{N}[c] \uplus \mathcal{H}}$

    ukoliko $\mathcal{H}'$ *sadrži* $\mathcal{G}$ *za koju je* $\mathcal{G} \sim \mathcal{F}_i$ *za neko* $i \in \{1,\ldots,197\}$

      vrati *spisakFamilija*

    ukoliko $\mathcal{H}'$ *nije sadržan u* $\mathcal{G}$*, za koju je* $\mathcal{G} \sim \mathcal{F}'_j$ *ni za jedno* $j \in \{1,\ldots,115\}$

      Dodaj $\mathcal{H}'$ *u spisakFamilija*

    Dodaj FC-6-Rekurzija ($\mathcal{H}'$*,* $c+1$*,* $\mathcal{N}$*) u spisakFamilija*

  vrati *spisakFamilija*

Kraj

Glava 3

Kardinalnost prostora vrsta Bulovih matrica

U ovoj glavi dat je prikaz rezultata po pitanju kardinalnosti prostora vrsta Bulovih matrica. U Poglavlju 3.1 dat je opis osnovnih pojmova iz teorije Bulovih matrica, dok su u ostala dva poglavlja izloženi naši rezultati. U Poglavlju 3.2 prikazan je podskup intervala $[2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^n]$, nakon čega je dokazano da taj skup pokriva sve vrednosti kardinalnosti prostora vrsta matrica dimenzija $n \times n$. U Poglavlju 3.3 data je popravljena donja granica za minimalnu celobrojnu vrednost a_n u odnosu na n, za koju ne postoji Bulova matrica dimenzije $n \times n$ sa datom kardinalnošću prostora vrsta.

3.1 Osnovni pojmovi i poznati rezultati

Neka su a, b vrednosti iz domena $\{0, 1\}$. Operatorom $\vee$ definišemo binarnu operaciju nad elementima a i b, kod koje je $a \vee b = 1$ ako $a = 1$ ili $b = 1$, dok je u suprotnom $a \vee b = 0$. Neka su $\alpha = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ i $\beta = (b_1 \ \cdots \ b_n)$ vektori dužine n kod kojih su vrednosti a_i i b_i iz domena $\{0, 1\}$, za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$. Binarna operacija $\alpha \vee \beta$ nad vektorima α i β daje kao rezultat vektor $\gamma = (c_1 \ \cdots \ c_n)$, kod koga je $c_i = a_i \vee b_i$, za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Bulova matrica je matrica čiji su svi elementi iz domena $\{0, 1\}$. Skup svih Bulovih matrica dimenzija $n \times m$ označavamo sa $\mathcal{B}_{n,m}$. Za matrice kod kojih je $n = m$ koristimo skraćenu notaciju $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_{n,n}$. Označimo sa $A(i, j)$ element koji se nalazi u i-toj vrsti i j-toj koloni matrice A. Neka je $A \in \mathcal{B}_{n,m}$, i neka je $a_{ij} = A(i, j)$, za $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. i-ta vrsta matrice A, u oznaci $A(i,*)$, je $(a_{i1} \ \cdots \ a_{im})$, a j-ta kolona matrice A, u oznaci $A(*,j)$, je $(a_{1j} \ \cdots \ a_{nj})^T$.

Definicija 3.1.1. *Neka je A matrica iz skupa $\mathcal{B}_{n,m}$, i neka je $0_{1,m}$ vektor dužine m čije su sve komponente nule. Prostor vrsta matrice A, u oznaci $\mathrm{R}(A)$, predstavlja skup vektora definisan sa*

$$\mathrm{R}(A) = \{\gamma \colon \gamma = \bigvee_{i \in S} A(i,*), \ S \subseteq \{1,\ldots,n\}\},$$

pri čemu je $\bigvee_{i\in\emptyset} A(i,*) = 0_{1,m}$. Prostor kolona matrice A, u oznaci $\mathrm{C}(A)$, definišemo sa $\mathrm{C}(A) = \mathrm{R}(A^T)$.

Definicija 3.1.2. *Neka je A matrica iz skupa $\mathcal{B}_{n,m}$. Kardinalnost prostora vrsta matrice A, u oznaci $\mathrm{r}(A)$, definišemo kao broj elemenata skupa $\mathrm{R}(A)$, odnosno $\mathrm{r}(A) = |\,\mathrm{R}(A)|$. Slično tome, kardinalnost prostora kolona matrice A, u oznaci $\mathrm{c}(A)$, definišemo kao broj elemenata skupa $\mathrm{C}(A)$, odnosno $\mathrm{c}(A) = |\,\mathrm{C}(A)|$.*

Kim [30] je dao dokaz sledeće značajne teoreme.

Teorema 3.1.3. *Za svaku matricu $A \in \mathcal{B}_{n,m}$ i svaka dva prirodna broja n i m važi $\mathrm{r}(A) = \mathrm{c}(A)$.*

Primer 3.1.4. *Za datu matricu*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*imamo da je $A \in \mathcal{B}_{3,4}$, $\mathrm{R}(A) = \{(0\ 0\ 0\ 0), (1\ 1\ 0\ 0), (0\ 1\ 1\ 0),$
$(0\ 0\ 1\ 1), (1\ 1\ 1\ 0), (0\ 1\ 1\ 1), (1\ 1\ 1\ 1)\}$,
$\mathrm{C}(A) = \{(0\ 0\ 0), (0\ 0\ 1), (0\ 1\ 1), (1\ 1\ 0), (1\ 0\ 0), (1\ 0\ 1), (1\ 1\ 1)\}$,
$\mathrm{r}(A) = \mathrm{c}(A) = 7$.*

Sada uvodimo dodatnu notaciju. Za kvadratnu matricu $A \in \mathcal{B}_n$ gustina ρ matrice A je vrednost $\rho(A) = \mathrm{r}(A)/2^n$. Označimo sa I_n jediničnu matricu, a sa 0_n nula matricu dimenzija $n \times n$, $n \geq 1$. Tada je $\rho(I_n) = 1$ i $\rho(0_n) = 2^{-n}$. Pošto $1 \leq \mathrm{r}(A) \leq 2^n$ važi za svako $A \in \mathcal{B}_n$, imamo da je $2^{-n} \leq \rho(A) \leq 1$. Označimo sa $\mathbf{0}_{n,m}$ i $\mathbf{1}_{n,m}$ matrice iz $\mathcal{B}_{n,m}$ čiji su svi elementi jednaki 0, odnosno 1.

Za matricu P kažemo da je permutacijska matrica ukoliko u svakoj vrsti i koloni ima tačno jedan element jednak 1, dok su svi ostali elementi matrice P jednaki 0. Neka su A i B matrice iz skupa $\mathcal{B}_{n,m}$. Za matrice A i B kažemo da su ekvivalentne, u oznaci $A \equiv B$, ukoliko postoje permutacijske matrice P i Q takve da važi $A = PBQ$. Za matricu A kažemo da je leksikografski manja ili jednaka matrici B, u oznaci $A \leq B$, ukoliko je niska dobijena nadovezivanjem svih vrsta matrice A leksikografski manja ili jednaka niski dobijenoj nadovezivanjem svih vrsta matrice B. Kanonski oblik matrice $A \in \mathcal{B}_{n,m}$, oznaci $\operatorname{can}(A)$, je leksikografski najmanja matrica među svim matricama ekvivalentnim sa A.

Neka je $A \in \mathcal{B}_{n,m}$ i neka su p i q prirodni brojevi. Tada sa A^{-p*} označavamo matricu iz $\mathcal{B}_{n-1,m}$ dobijenu uklanjanjem p-te vrste iz matrice A. Slično tome, sa A^{-*q} označavamo matricu iz $B_{n,m-1}$ dobijenu uklanjanjem q-te kolone iz matrice A. Sa $A^{-p*,-q*}$ označavamo matricu iz $B_{n-2,m}$ dobijenu uklanjanjem p-te i q-te vrste iz A, dok sa $A^{-*p,-*q}$ označavamo matricu iz $\mathcal{B}_{n,m-2}$, dobijenu dobijenu uklanjanjem p-te i q-te kolone iz A. Neka je $A \in \mathcal{B}_{n,m}$ i neka je p pozitivan ceo broj. Označimo

$$\mathrm{R}^{-p}(A) = \mathrm{R}(A^{-p*}),$$

$$\mathrm{R}^{+p}(A) = \{\alpha \vee A(p,*)\colon \alpha \in \mathrm{R}^{-p}(A)\},$$
$$\text{i } \mathrm{r}^{-p}(A) = |\,\mathrm{R}^{-p}(A)|,\ \mathrm{r}^{+p}(A) = |\,\mathrm{R}^{+p}(A)|.$$

Za matricu $A \in \mathcal{B}_{p,q}$ kažemo da je podmatrica matrice B, gde je $B \in \mathcal{B}_{m,n}$, $p \leq m$, $q \leq n$, i pišemo $A \subseteq B$, ukoliko postoji matrica $B' \equiv B$ takva da važi $A(i,j) = B'(i,j)$ za svako $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$. Ukoliko je $p < m$ ili $q < n$, tada kažemo da je A prava podmatrica matrice B, u oznaci $A \subset B$.

Za matricu α iz skupa $\mathcal{B}_{1,n}$ ili $\mathcal{B}_{n,1}$ definišemo težinu matrice, u oznaci $\mathrm{w}(\alpha)$, kao broj elemenata u α jednakih 1.

Definicija 3.1.5. *Neka je $A \in \mathcal{B}_{n,m}$ i neka je $(i_1, \ldots, i_n)$ permutacija niza $(1, \ldots, n)$, a $(j_1, \ldots, j_m)$ permutacija niza $(1, \ldots, m)$, tako da važi*

$$\mathrm{w}(A(i_1,*)) \geq \mathrm{w}(A(i_2,*)) \geq \cdots \geq \mathrm{w}(A(i_n,*)),$$

$$\mathrm{w}(A(*,j_1)) \geq \mathrm{w}(A(*,j_2)) \geq \cdots \geq \mathrm{w}(A(*,j_m)).$$

Označimo tada sa

$$\mathrm{rws}(A,k) = \mathrm{w}(A(i_k,*)), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

spektar težina vrsta, *i sa*

$$\mathrm{cws}(A, k) = \mathrm{w}(A(*, j_k)), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

spektar težina kolona *matrice* A.

Dokazi narednih tvrđenja se mogu naći u raznim radovima, na primer u radu Honga [35].

Tvrđenje 3.1.6. *Neka je* $A \in \mathcal{B}_{n,m}$, *i neka su* $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ *i* $p \neq q$. *Tada*

1. *Ukoliko je* $A \equiv B$ *tada* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$.
2. $\mathrm{r}(A) \leq \min\{2^n, 2^m\}$.
3. *Ukoliko je* $\mathrm{w}(A(p, *)) = k$ *tada* $\mathrm{r}^{+p}(A) \leq 2^{n-k}$.
4. $\mathrm{R}(A) = \mathrm{R}^{+p}(A) \cup \mathrm{R}^{-p}(A)$.
5. $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}^{+p}(A) + \mathrm{r}^{-p}(A)$.
6. $\mathrm{R}^{-p}(A) = \mathrm{R}^{-p+q}(A) \cup \mathrm{R}^{-p-q}(A)$.
7. $\mathrm{R}(A) = \mathrm{R}^{+p}(A) \cup \mathrm{R}^{-p+q}(A) \cup \mathrm{R}^{-p-q}(A)$.
8. $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}^{+p}(A) + \mathrm{r}^{-p+q}(A) + \mathrm{r}^{-p-q}(A)$.

Neka je $\mathcal{R}_n = \{r \colon r = \mathrm{r}(A), A \in \mathcal{B}_n\}$, i neka je $a_n = \min\{q \colon q \geq 1, q \notin \mathcal{R}_n\}$. Gore definisanu vrednost a_n u daljem radu nazivamo najmanjim prekidom niza kardinalnosti prostora vrsta matrice.

3.2 Kardinalnost prostora vrsta iznad $2^{n-2} + 2^{n-3}$

3.2.1 Poznati rezultati i tvrđenje glavne teoreme

Za skup $\mathcal{R}_n$ očigledno važi $\mathcal{R}_n \subseteq [1, 2^n]$. Konječni [31] je dokazao da važi $\mathcal{R}_n \cap (2^{n-1}, 2^n] = \{2^{n-1} + 2^k \colon 0 \leq k \leq n-1\}$, i pretpostavio da je $[1, 2^{n-1}] \subset \mathcal{R}_n$. Li i Žang [32] su opovrgli ovu pretpostavku, dokazavši da $2^{n-1} - 1 \notin \mathcal{R}_n$

za $n > 6$. Hong [33] je dokazao da $\mathcal{R}_n \cap (2^{n-1} - 4, 2^{n-1}) = \emptyset$ za $n \geq 8$, dok je Ju [34] pokazao da

$$\mathcal{R}_n \cap [2^{n-1} - n + 6, 2^{n-1} - 1] = \emptyset, \quad \text{za } n \geq 7$$

Dalje, Hong [35] je dokazao da

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n \cap (&(2^{n-1} - 2^{n-5}, 2^{n-1} - 2^{n-6}) \\ &\cup (2^{n-1} - 2^{n-6}, 2^{n-1})) = \emptyset, \quad \text{za } n \geq 7 \end{aligned}$$

odnosno skup $\mathcal{R}_n^0 = \mathcal{R}_n \cap [1, 2^{n-1}]$ ima barem dva prekida u kontinuitetu. Hong je takođe dokazao da su $2^{n-1} - 2^{n-5}$ i $2^{n-1} - 2^{n-6}$ elementi skupa $\mathcal{R}_n$. Žang, Hong i Kan [36] su ispitivali matrice $A \in \mathcal{B}_{n-1,n}$ i pokazali su za njih da ukoliko je $\mathrm{r}(A) \in (2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^{n-1}]$, tada $\mathrm{r}(A) = 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^s$, $0 \leq s \leq n-3$. Brin [37] je potvrdio da važi $\mathcal{R}_7^0 = [1, 64] \setminus \{61, 63\}$ i dobio

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_8^0 = [1, 128] \setminus \{&109, 111, 117, 119, \\ &121, 122, 123, 125, 126, 127\}. \end{aligned}$$

Živković [38] je, koristeći pomoć kompjutera, dobio

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_9^0 \;\; = \;\; & [1, 190] \cup [192, 204] \cup \{206\} \cup [208, 212] \\ & \cup \{214, 216, 220\} \cup [224, 228] \\ & \cup \{230, 232, 236, 240, 248, 256\}. \end{aligned}$$

Neka je

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_{n,3} \cup \mathcal{A}_{n,4} \cup \mathcal{A}'_{n,5} \cup \mathcal{A}''_{n,5}, \tag{3.1}$$

gde su

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,3} =& \{2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^i \colon 0 \leq i \leq n-4,\ n \geq 4\}, \\ \mathcal{A}_{n,4} =& \{2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^i + 2^j \colon \\ & 0 \leq j < i \leq n-4,\ n \geq 5\}, \\ \mathcal{A}'_{n,5} =& \{2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^i + 2^{k+1} + 2^k \colon \\ & 0 \leq k,\ k+2 \leq i \leq n-4,\ n \geq 6\}, \\ \mathcal{A}''_{n,5} =& \{2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^i + 2^j + 2^k \colon \\ & 1 \leq k,\ k+2 \leq j < i,\ i+j \leq n+k-5,\ n \geq 11\}. \end{aligned}$$

Živković [38] je tvrđenje naredne teoreme izneo kao hipotezu, dok je naš doprinos njen dokaz, dat u poglavlju 3.2.5.

Teorema 3.2.1. *Neka je skup $\mathcal{A}_n$ definisan u* (3.1). *Tada*

$$\mathcal{R}_n \cap (2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^{n-1}) = \mathcal{A}_n.$$

3.2.2 Guste i valjane matrice

Za matricu $A \in \mathcal{B}_n$ kažemo da je:

1. gusta, ukoliko važi $\rho(A) > \frac{3}{8}$,
2. valjana, ukoliko postoji par (i, j), gde su $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, takav da je $\rho(A^{-i*,-*j}) \geq \rho(A)$.

U narednom delu rada, pošto ustanovimo neke korisne činjenice, dokazujemo Teoremu 3.2.19, koja tvrdi da je svaka gusta matrica valjana.

Lema 3.2.2. *Neka su k, l, m prirodni brojevi veći od* 0, *i*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A' & A \end{bmatrix},$$

gde je $A \in \mathcal{B}_{m,k}$, $A' \in \mathcal{B}_{m,l}$ i $B \in \mathcal{B}_{m+1,k+l+1}$. Tada $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}\begin{bmatrix} A' & A \end{bmatrix} + \mathrm{r}(A)$.

Dokaz. Svi elementi skupa $\mathrm{R}^{+1}(B)$ počinju sa 1_{l+1}, tako da $\mathrm{r}^{+1}(B) = \mathrm{r}(A)$. Dalje, svi elementi iz $\mathrm{R}^{-1}(B)$ počinju sa 0. Dakle, imamo da je $\mathrm{R}^{-1}(B) \cap \mathrm{R}^{+1}(B) = \emptyset$, i prema Tvrđenju 3.1.6.6 imamo

$$\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}^{-1}(B) + \mathrm{r}^{+1}(B) = \mathrm{r}\begin{bmatrix} A' & A \end{bmatrix} + \mathrm{r}(A).$$

□

Označimo sa λ_n, ω_n i θ_n, $n \geq 1$, matrice definisane sa

$$\lambda_n(i,j) = \begin{cases} 1, & j = i, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ & j = i+1, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\omega_n(i,j) = \begin{cases} 1, & j = i, \quad 1 \leq i \leq n \\ & j = i+1, \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\theta_n(i,j) = \begin{cases} 1, & j = i, \quad 1 \le i \le n \\ & j = i+1, \quad 1 \le i \le n-1 \\ & j = 1, \quad i = n \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

U narednoj tabeli prikazane se vrednosti $\mathrm{r}(\lambda_n)$, $\mathrm{r}(\omega_n)$ i $\mathrm{r}(\theta_n)$ za $n \le 12$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathrm{r}(\lambda_n)$	1	2	4	7	12	21	37	65	114	200	351	616
$\mathrm{r}(\omega_n)$	2	3	5	9	16	28	49	86	151	265	465	816
$\mathrm{r}(\theta_n)$	2	2	5	10	17	29	51	90	158	277	486	853

Ovi nizovi se u Onlajn enciklopediji celobrojnih nizova [39] nalaze kao nizovi sa oznakama A005251, A005314 i A259967, redom.

Neka E označava *šift* operator, $Ef(n) = f(n+1)$. Na primer, za $f(n) = \mathrm{r}(\omega_n)$ je $(E^2 - E + 1)\,\mathrm{r}(\omega_n) = \mathrm{r}(\omega_{n+2}) - \mathrm{r}(\omega_{n+1}) + \mathrm{r}(\omega_n)$.

Lema 3.2.3. *Neka je*

$$g(E) = E^3 - 2E^2 + E - 1.$$

Tada

$$g(E)\,\mathrm{r}(\lambda_n) = g(E)\,\mathrm{r}(\omega_n) = g(E)\,\mathrm{r}(\theta_n) = 0, \ \textit{za } n > 0 \tag{3.2}$$

$$\mathrm{r}(\theta_n) < \mathrm{r}(\lambda_n) + \mathrm{r}(\lambda_{n-1}) < 4\,\mathrm{r}(\omega_{n-2}), \ \textit{za } n > 2 \tag{3.3}$$

Dokaz. Iz Leme 3.2.2 dobijamo $\mathrm{r}(\lambda_n) = \mathrm{r}(\lambda_{n-1}) + \mathrm{r}(\omega_{n-2})$, za $n \ge 3$, i

$$\mathrm{r}(\omega_n) = \mathrm{r}(\omega_{n-1}) + \mathrm{r}(\lambda_{n-1}), \ \text{za } n \ge 3 \tag{3.4}$$

(ovo je očigledno tačno i za $n = 2$), odnosno

$$\mathrm{r}(\omega_n) = (E^2 - E)\,\mathrm{r}(\lambda_n), \ \text{za } n \ge 1, \tag{3.5}$$

$$\mathrm{r}(\lambda_n) = (E - 1)\,\mathrm{r}(\omega_n), \ \text{za } n \ge 1. \tag{3.6}$$

Zamenom $\mathrm{r}(\omega_n)$ (3.5) u (3.6), dobijamo

$$\mathrm{r}(\lambda_n) = (E-1)(E^2 - E)\,\mathrm{r}(\lambda_n), \ \text{za } n \ge 1,$$

odnosno,

$$g(E)\,\mathrm{r}(\lambda_n) = 0, \text{ za } n \geq 1. \tag{3.7}$$

Iz (3.5) sledi

$$g(E)\,\mathrm{r}(\omega_n) = (E^2 - E)g(E)\,\mathrm{r}(\lambda_n) = 0, \text{ za } n \geq 1, \tag{3.8}$$

Pomoću Tvrđenja 3.1.6.7 dobijamo sledeći izraz:

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(\theta_n) = \Big(&\mathrm{R}^{+n*}(\theta_n) \cup \mathrm{R}^{-n*,+(n-1)*,+1*}(\theta_n)\Big)\\ &\cup \mathrm{R}^{-n*,-(n-1)*,+1*}(\theta_n) \cup \mathrm{R}^{-n*,-(n-1)*,-1*}(\theta_n)\\ &\cup \mathrm{R}^{-n*,+(n-1)*,-1*}(\theta_n), \; n \geq 4.\end{aligned}$$

Parovi na pozicijama 1 i n, elemenata ova četiri skupa, imaju vrednosti $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$, redom. Dakle, ovi skupovi su disjunktni. Dalje, imamo $\mathrm{R}^{-n*,+(n-1)*,+1*}(\theta_n) \subseteq \mathrm{R}^{+n*}(\theta_n)$, za $n \geq 4$. Zbog toga,

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\theta_n) &= |\,\mathrm{R}^{+n*}(\theta_n)| + |\,\mathrm{R}^{-n*,-(n-1)*,+1*}(\theta_n)|\\ &+ |\,\mathrm{R}^{-n*,-(n-1)*,-1*}(\theta_n)| + |\,\mathrm{R}^{-n*,+(n-1)*,-1*}(\theta_n)|\\ &= \mathrm{r}(\lambda_{n-1}) + \mathrm{r}(\omega_{n-3}) + \mathrm{r}(\lambda_{n-2}) + \mathrm{r}(\omega_{n-3})\end{aligned}$$

Zamenom $\mathrm{r}(\omega_n) = \mathrm{r}(\lambda_{n+2}) - \mathrm{r}(\lambda_{n+1})$ (3.5) u $\mathrm{r}(\theta_{n+3}) = \mathrm{r}(\lambda_{n+2}) + \mathrm{r}(\omega_n) + \mathrm{r}(\lambda_{n+1}) + \mathrm{r}(\omega_n)$, dobijamo

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\theta_{n+3}) &= \mathrm{r}(\lambda_{n+3}) + \mathrm{r}(\lambda_{n+2}) - \mathrm{r}(\lambda_n)\\ &= (E^3 + E^2 - 1)\,\mathrm{r}(\lambda_n), \text{ za } n \geq 1.\end{aligned}$$

Množenjem sa $g(E)$ dobijamo $g(E)\,\mathrm{r}(\theta_n) = 0$, za $n \geq 4$. Lako je proveriti da ovo takođe važi i za svako $n \in \{1, 2, 3\}$, odakle

$$g(E)\,\mathrm{r}(\theta_n) = 0, \text{ za } n \geq 1,$$

što zajedno sa (3.7) i (3.8), povlači (3.2). Pošto važi

$$(E^2 + 2E + 2)g(E) = (E^5 - E^3 - 3E^2 - 2)$$

sledi

$$(E^5 - E^3 - 3E^2 - 2)\,\mathrm{r}(\omega_n) = (E^2 + 2E + 2)g(E)\,\mathrm{r}(\omega_n) = 0, \text{ za } n \geq 1.$$

Takođe

$$\begin{aligned}(E^5 - E^3)\,\mathrm{r}(\omega_n) &= (E^4 + E^3)(E-1)\,\mathrm{r}(\omega_n)\\ &= (E^4 + E^3)\,\mathrm{r}(\lambda_n),\end{aligned}$$

odakle imamo

$$\mathrm{r}(\lambda_{n+4}) + \mathrm{r}(\lambda_{n+3}) = 3\,\mathrm{r}(\omega_{n+2}) + 2\,\mathrm{r}(\omega_n),\ \text{za } n \geq 1, \tag{3.9}$$

Iz (3.4) sledi $\mathrm{r}(\omega_n - 1) > \mathrm{r}(\omega_{n-2})$ i pošto $\mathrm{r}(\omega_n) = \mathrm{r}(\omega_{n-1}) + \mathrm{r}(\omega_{n-2}) + \mathrm{r}(\omega_{n-4})$ imamo $\mathrm{r}(\omega_n) > 2\,\mathrm{r}(\omega_{n-2})$. Kombinujući poslednji izraz i (3.9) dobijamo $\mathrm{r}(\lambda_{n+4}) + \mathrm{r}(\lambda_{n+3}) < 4\,\mathrm{r}(\omega_{n+2})$, što predstavlja drugu nejednakost iz (3.3).

Prvu nejednakost iz (3.3) dobijamo iz

$$\mathrm{r}(\theta_n) = \mathrm{r}(\lambda_n) + \mathrm{r}(\lambda_{n-1}) - \mathrm{r}(\lambda_{n-3}) < \mathrm{r}(\lambda_n) + \mathrm{r}(\lambda_{n-1}),$$

čime je dokaz leme kompletiran. □

Definicija 3.2.4. *Neka je $B \in \mathcal{B}_n$, $A \subseteq B$ i $A \in \mathcal{B}_{k,l}$. Za matricu A kažemo da je blok u B ukoliko za neko $B' \equiv B$, imamo*

$$B' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

pri čemu je ili $A = I_1$ ili

1. *za svaku vrstu i, $1 \leq i \leq k$ postoje j i p, za koje je $1 \leq j \leq k$, $i \neq j$, $1 \leq p \leq l$, tako da važi $A(i,p) = A(j,p) = 1$;*

2. *za svaku kolonu i, $1 \leq i \leq l$, postoje j i q za koje je $1 \leq j \leq l$, $i \neq j$, $1 \leq q \leq k$, tako da važi $A(q,i) = A(q,j) = 1$.*

Definicija 3.2.5. *Neka je $A \in \mathcal{B}_{n,m}$ matrica bez nula vrsta i nula kolona. Za matricu A kažemo da je u blok dijagonalnoj formi ukoliko*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathcal{A}_{p-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A_p \end{bmatrix}$$

gde su $A_i \in \mathcal{B}_{k_i,l_i}$ blokovi, $\sum k_i = n$, $\sum l_i = m$, gde je $k_i, l_i \geq 1$, za svako $1 \leq i \leq p$. Ukoliko je $p = 1$ tada kažemo da je A blok matrica. Ukoliko postoji k takvo da je $A_k = I_1$, kažemo da A sadrži 1-blok.

Lema 3.2.6. *Neka je B proizvoljna matrica bez nula vrsta i nula kolona. Tada postoji matrica $A \equiv B$ takva da je A u blok dijagonalnoj formi.*

Dokaz. Neka je $B \in \mathcal{B}_{n,m}$, $n, m \geq 1$. Dokaz izvodimo indukcijom po n i m. Za $n = 1$ i $m = 1$ je $B = I_1$, i tvrđenje je očigledno zadovoljeno, što je osnovni korak indukcije. Pretpostavimo da je tvrđenje zadovoljeno za svaku matricu iz $\mathcal{B}_{k_1,k_2}$, gde je $k_1 < n$, $k_2 \leq m$, gde je $n \geq 2$, $m \geq 1$. Sada dokazujemo da tvrđenje važi za svako $B \in B_{n,m}$. Pretpostavimo prvo da matrica B sadrži 1-blok i da je $B(q,r) = 1$, $\mathrm{w}(B(q,*)) = 1$ i $\mathrm{w}(B(*,r)) = 1$. Neka je matrica $C \equiv B^{-q*,-*r}$ u blok dijagonalnoj formi. Tada je matrica $D = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ takođe u blok dijagonalnoj formi, pri čemu je $D \equiv B$, i završili smo. Sada pretpostavimo da B ne sadrži 1-blok. Možemo pretpostaviti da je $\mathrm{rws}(B,n) \leq \mathrm{cws}(B,m)$, dok je dokaz analogan u slučaju kada je $\mathrm{rws}(B,n) > \mathrm{cws}(B,m)$. Neka je $i \in \{1,\ldots,n\}$ vrsta za koju je $\mathrm{w}(B(i,*)) = \mathrm{rws}(B,n)$. Pošto B ne sadrži 1-blok, $\mathrm{w}(B(i,*)) > 2$ i $\mathrm{w}(B(*,j)) > 1$ za svako $j \in \{1,\ldots,m\}$, matrica $C = B^{-i*}$ je bez 0-vrsta i 0-kolona. Prema induktivnoj hipotezi, postoji matrica D, za koju je $D \equiv C$, i koja je u blok dijagonalnoj formi, sa blokovima $D_1, \ldots, D_s$. Neka je sada $B' \equiv B$ gde je $B' = \begin{bmatrix} D \\ \alpha \end{bmatrix}$. Neka je $\{D_{l_1}, \ldots, D_{l_t}\}$ podskup od blokova $\{D_1, \ldots, \mathcal{D}_s\}$, gde za D_{l_i}, za svako $i \in \{1,\ldots,t\}$, postoji $j \in \{1,\ldots,m\}$ takvo da $B'(n,j) = 1$ i u koloni j matrice B' se nalazi neka od kolona bloka D_{l_i}. Neka je sada B'_1 matrica koja se dobija kada iz matrice B uklonimo n-tu vrstu, kao i sve vrste i kolone u kojima se nalaze blokovi D_{l_i}, za $i \in \{1,\ldots,t\}$. Neka je B'_2 matrica koja se dobija kada iz B uklonimo vrste i kolone koje su uključene u B'_1. Neka je sada $B'' = \begin{bmatrix} B'_1 & 0 \\ 0 & B'_2 \end{bmatrix}$. Za matricu B'' imamo da je $B'' \equiv B'$, odnosno $B'' \equiv B$. Pošto se matrica B'_2 nalazi u blok dijagonalnoj formi, dok je B'_1 blok, sledi da je matrica B'' u blok dijagonalnoj formi, čime je dokaz teoreme završen. $\square$

Lema 3.2.7. *Ukoliko su A_i, $1 \leq i \leq m$, blokovi matrice B, tada*

$$\mathrm{r}(B) = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{r}(A_i).$$

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po m. Za $m = 1$ tvrđenje je trivijalno zadovoljeno. Pretpostavimo zato da je $m > 1$ i da je tvrđenje leme zadovoljeno za $k = m-1$. Neka je C matrica dobijena kada iz B isključimo vrste i kolone u kojima se nalazi blok A_m. Dalje, neka je $P = \mathrm{R}(C)$ i $Q = \mathrm{R}(A)$. Tada za svako $a \in P$ i $b \in Q$ važi $(a,b) \in \mathrm{R}(B)$. Takođe $\mathrm{R}(B)$ sadrži samo vrste c za koje je $c = (a,b)$, gde je $a \in P$ i $b \in Q$. Dakle, imamo da je $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(C)\,\mathrm{r}(A_m)$. Po induktivnoj hipotezi je $\mathrm{r}(C) = \prod_{i=1}^{m-1} \mathrm{r}(A_i)$, iz čega sledi tvrđenje leme. $\square$

Lema 3.2.8. *Neka je $A \in \mathcal{B}_k$ jedan od blokova matrice $B \in \mathcal{B}_n$. Ukoliko je A valjana matrica, tada je i B valjana.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je A prvi od blokova matrice B. Za $A = I_1$ je $2\,\mathrm{r}(B^{-1*,-*1}) = \mathrm{r}(B)$, dakle B je valjana. Pretpostavimo zato da je $A \neq I_1$. Pošto je A valjana matrica, možemo pretpostaviti da za $C = A^{-1*,-*1}$ važi $\mathrm{r}(A) \leq 2\,\mathrm{r}(C)$. Iz Leme 3.2.7 dobijamo da je $\mathrm{r}(B) = a\ \mathrm{r}(A)$, gde je a proizvod kardinalnosti prostora vrsta svih blokova iz B sem A. Neka je $D = B^{-1*,-*1}$. Tada imamo $\mathrm{r}(D) = a\ \mathrm{r}(C)$ i $\mathrm{r}(B) = a\ \mathrm{r}(A) \leq 2a\ \mathrm{r}(C) = 2\,\mathrm{r}(D)$, dakle B je valjana matrica. $\square$

Lema 3.2.9. *Matrica θ_n je valjana za svako $n \geq 2$.*

Dokaz. Neka je $B = \theta_n^{-2*,-*1} \in \mathcal{B}_{n-1}$. Ukoliko je $n = 2$ tada $\rho(B) = 1 > \rho(\theta_2) = 1/2$. Za $n > 2$ imamo $\mathrm{r}(B) = 2\,\mathrm{r}(\omega_{n-2})$, pošto se B sastoji od dva bloka, I_1 i ω_{n-2}. Iz Leme 3.2.3 sledi $\mathrm{r}(\theta_n) < 4\,\mathrm{r}(\omega_{n-2}) = 2\,\mathrm{r}(B)$, odnosno $\rho(B) > \rho(\theta_n)$. $\square$

Lema 3.2.10. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$, gde je $n \geq 2$, matrica za koju su težine svih vrsta kao i težine svih kolona jednake* 2, *odnosno* $\mathrm{rws}(A,1) = \mathrm{rws}(A,n) = \mathrm{cws}(A,1) = \mathrm{cws}(A,n) = 2$. *Tada je A valjana matrica.*

Dokaz. Prema Lemi 3.2.6, postoji matrica A', takva da je $A' \equiv A$ i A' je u blok dijagonalnoj formi. Pošto sve vrste i kolone matrice A' imaju težine 2, svi blokovi matrice A' su ekvivalentni sa nekom od θ_{m_i} za $m_i > 1$. Prema Lemi 3.2.9 ovi blokovi čine valjane matrice, pa iz Leme 3.2.8 sledi da je A valjana matrica. $\square$

Lema 3.2.11. *Neka je $A = (\lambda_n^{-n*})^T \in \mathcal{B}_{n,n-1}$. Dalje, neka je $\alpha \in \mathcal{B}_{n,1}$, $\mathrm{w}(\alpha) = 3$, $\alpha(1) = 1$, $\alpha(n) = 1$, i $\alpha(j) = 1$ za neko $1 < j < n$. Tada je matrica $\begin{bmatrix}\alpha & A\end{bmatrix}$ valjana.*

Dokaz. Neka je $B = \begin{bmatrix}\alpha & A\end{bmatrix}$ i $C = A^{-(n-1)*} = B^{-(n-1)*,-*1}$. Dovoljno je da dokažemo da važi $\rho(C) \geq \rho(B)$. Neka je

$$D = \left[\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\theta_n} \\ \hline 1 & 0_{1,n-1} \end{array}\right] \in \mathcal{B}_{n+1,n}.$$

Iz $D^{-j*,-(n+1)*} = B^{-j*}$ sledi $\mathrm{R}^{-j*,-(n+1)*}(D) = \mathrm{R}^{-j*}(B)$. Takođe, imamo $\mathrm{R}^{+j*,+(n+1)*}(D) = \mathrm{R}^{+j*}(B)$. Zbog toga $\mathrm{R}^{-j*}(B) \cup \mathrm{R}^{+j*}(B) = \mathrm{R}(B) \subseteq \mathrm{R}(D)$ i $\mathrm{r}(B) \leq \mathrm{r}(D)$. Primenom Leme 3.2.2 na transponovanu matricu D dobijamo $\mathrm{r}(D) = \mathrm{r}(\lambda_n) + \mathrm{r}(\lambda_{n-1})$, odakle sledi $\mathrm{r}(B) \leq \mathrm{r}(\lambda_n) + \mathrm{r}(\lambda_{n-1})$.

Matrica C ima dva dijagonalna bloka, tako da važi $\mathrm{r}(C) = 2\,\mathrm{r}(\omega_{n-2})$. Iz Leme 3.2.3 sledi

$$2\,\mathrm{r}(C) = 4\,\mathrm{r}(\omega_{n-2}) > \mathrm{r}(\lambda_n) + \mathrm{r}(\lambda_{n-1}) > \mathrm{r}(B),$$

što dokazuje da važi $\rho(C) > \rho(B)$. $\square$

Lema 3.2.12. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$, $p + q = n$, i neka*

$$A(i,j) = \begin{cases} 1, & j = i,\ i = 1,2,\ldots,n \\ & j = i+1,\ i = 1,2,\ldots,n-1 \\ & i = p,\ j = 1 \\ & i = n,\ j = p+1 \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

odnosno,

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} \theta_p & \begin{matrix} 0 \\ I_1 \end{matrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{matrix} \\ \hline \boldsymbol{0} & \multicolumn{2}{c}{\theta_q} \end{array}\right]$$

Tada je A valjana matrica.

Dokaz. Neka je $C = A^{-(n-1)*,-*(p+1)}$. Dokazujemo da važi $\rho(C) \geq \rho(A)$. Neka je

$$D = \left[\begin{array}{c|c} \theta_p & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \theta_q \\ \hline \mathbf{0} & I_1 \quad \mathbf{0} \end{array}\right],$$

$D \in \mathcal{B}_{n+1,n}$. Tada iz $D^{-p*,-(n+1)*} = A^{-p*}$ sledi $\mathrm{R}^{-p*,-(n+1)*}(D) = \mathrm{R}^{-p*}(A)$. Dalje, imamo $\mathrm{R}^{+p*,+(n+1)*}(D) = \mathrm{R}^{+p*}(A)$, i kao posledicu $\mathrm{R}^{-p*}(A) \cup \mathrm{R}^{+p*}(A) = \mathrm{R}(A) \subseteq \mathrm{R}(D)$ i stoga $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(D)$. Prema Lemi 3.2.2 imamo

$$\mathrm{r}(D) = \mathrm{r}(\theta_p)(\mathrm{r}(\lambda_q) + \mathrm{r}(\lambda_{q-1})),$$

odakle je

$$\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(\theta_p)(\mathrm{r}(\lambda_q) + \mathrm{r}(\lambda_{q-1})).$$

Takođe je $\mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(\theta_p) \cdot 2\,\mathrm{r}(\omega_{q-2})$, odakle, pomoću Leme 3.2.3, dobijamo

$$2\,\mathrm{r}(C) = 4\,\mathrm{r}(\theta_p)\,\mathrm{r}(\omega_{q-2}) > \mathrm{r}(A)$$

odnosno $\rho(C) > \rho(A)$. □

Lema 3.2.13. *Neka je $a \in \{0,1\}$, $\alpha \in \mathcal{B}_{1,n-1}$, $\beta \in \mathcal{B}_{n-1,1}$, $A' \in \mathcal{B}_{n-1}$, i neka je*

$$A = \begin{bmatrix} a & \alpha \\ \beta & A' \end{bmatrix}$$

Ukoliko važi $\mathrm{w}(\beta) \geq 3$ i $\mathrm{w}(\alpha) + a \geq 3$, ili $\mathrm{w}(\beta) \geq 2$ i $\mathrm{w}(\alpha) + a \geq 4$, tada je:

a) $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(A') + 2^{n-3} + 2^{n-4}$.

b) *Ukoliko je A gusta matrica, tada je i A' gusta matrica, a A je valjana.*

Dokaz. **a)** Neka je $k = \mathrm{w}(\beta)$, $l = \mathrm{w}(\alpha) + a$. Pošto je $A' \in \mathcal{B}_{n-1}$, iz Tvrđenja 3.1.6.3 sledi

$$\mathrm{r}\begin{bmatrix} \beta & A' \end{bmatrix} \leq \mathrm{r}(A') + 2^{n-1-k}$$

i

$$\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(A') + 2^{n-1-k} + 2^{n-l}.$$

Pošto je $k \geq 3$ i $l \geq 3$, ili je $k \geq 2$ i $l \geq 4$, u oba slučaja imamo $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(A') + 2^{n-3} + 2^{n-4}$.

b) Ukoliko je $\rho(A) > \frac{3}{8}$, odnosno $\mathrm{r}(A) > 2^{n-2} + 2^{n-3}$, tada $\mathrm{r}(A') \geq \mathrm{r}(A) - 2^{n-3} - 2^{n-4} > 2^{n-3} + 2^{n-4}$. Zbog toga je $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(A') + 2^{n-3} + 2^{n-4} < 2\,\mathrm{r}(A')$, odnosno $\rho(A') > \rho(A) > \frac{3}{8}$.

□

Lema 3.2.14. *Neka je $A \in \mathcal{B}_{n,m}$. Dalje, neka je $\alpha = A(n,*)$ i $\mathrm{w}(\alpha) = k$. Pretpostavimo da postoji $\beta \in \mathrm{R}^{-n*}(A)$, takvo da $\mathrm{w}(\beta) \geq k$ i $\alpha \vee \beta = \beta$, odnosno, za svako $1 \leq i \leq m$ za koji je $\alpha(i) = 1$ važi $\beta(i) = 1$. Neka je $\mathrm{w}(\beta) = l$, dakle $l \geq k$. Tada imamo $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}^{-n*}(A) + 2^{n-k} - 2^{n-l}$. Analogna nejednakost važi i za kardinalnost prostora kolona.*

Dokaz. Ukoliko je $l = k$, tada $\alpha \in \mathrm{R}^{-n*}(A)$ i $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}^{-n*}(A)$ iz čega sledi tvrđenje leme. Zato, možemo pretpostaviti da je $l > k$. Neka je $\gamma \in \mathrm{R}^{+n*}(A) \setminus \mathrm{R}^{-n*}(A)$. Tada imamo $\alpha \vee \gamma = \gamma$, odnosno, za svako $i \in \{1, \ldots, m\}$ za koje je $\alpha(i) = 1$, važi $\gamma(i) = 1$, Dalje, imamo da γ ne može sadržati sve jedinice sadržane u β a koje nisu sadržane u α, pošto je u tom slučaju $\gamma \in \mathrm{R}^{-n*}(A)$. Broj različitih vektora γ koji zadovoljavaju ova dva uslova je $2^{n-l}(2^{l-k} - 1) = 2^{n-k} - 2^{n-l}$. Iz Tvrđenja 3.1.6.5 sledi $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}^{-n*}(A) + 2^{n-k} - 2^{n-l}$. $\square$

Primetimo da je ovo nešto bolja gornja granica za $\mathrm{r}(A)$, nego jednostavna granica $\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}^{-n*}(A) + 2^{n-k}$, koja sledi iz Tvrđenja 3.1.6.3.

Lema 3.2.15. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$ gusta matrica, pri čemu je $n > 3$, i*

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 0_{1,n-4} & 0 & 1 \\ \hline 1 & & & & 0 \\ 0_{n-4,1} & & A' & & 0_{n-4,1} \\ 0 & & & & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0_{1,n-4} & 1 & 1 \end{array}\right]$$

gde je $\mathrm{w}(A(i,*)) = 2$, za $1 < i < n$, i $\mathrm{w}(A(*,j)) = 2$, za $1 < j < n$. Tada je A valjana matrica.

Dokaz. Neka je $B = A^{-n*,-*n}$, $D = A^{-*n}$ i $\alpha = D(n,*)$. Imamo da je $\mathrm{w}(\alpha) = 2$ i $\alpha(1) = \alpha(n-1) = 1$. Pošto je $\mathrm{w}(A(*,n-1)) = 2$, imamo $\mathrm{w}(B(*,n-1)) = 1$, odakle sledi da je $B(j,n-1) = 1$ za neko $j \in \{2, \ldots, n-1\}$. Neka je $\gamma = B(1,*) \vee B(j,*)$. U zavisnosti od vrednosti j, razmatramo dva slučaja.

1. $j \in \{2, n-1\}$. Tada je $\mathrm{w}(\gamma) = 3$.

2. $j \in \{3, \ldots, n-2\}$. Tada je $\mathrm{w}(B(j,*)) = 2$, i $B(j,i) = 1$ za neko $i \in \{2, \ldots, n-1\}$, i $\mathrm{w}(\gamma) \leq \mathrm{w}(D(1,*)) + \mathrm{w}(D(j,*)) = 4$.

Iz Leme 3.2.14 sledi

$$\mathrm{r}(D) \leq \mathrm{r}(B) + 2^{(n-1)-2} - 2^{(n-1)-4} = \mathrm{r}(B) + 2^{n-4} + 2^{n-5}.$$

Pošto je $\mathrm{w}(A(n-1,*)) = 2$, imamo $\mathrm{w}(D(n-1,*)) = 1$. Odavde sledi $D(n-1,j) = 1$ za neko $j \in \{2,\dots,n-1\}$. Dalje, neka je $\gamma = D(*,1) \vee D(*,j)$, $\gamma \in \mathrm{C}(D)$. U zavisnosti od vrednosti j, razmatramo dva slučaja.

1. $j \in \{2, n-1\}$. Tada je $\mathrm{w}(\gamma) = 4$.
2. $j \in \{3,\dots,n-2\}$. Tada je $\mathrm{w}(D(*,j)) = 2$, i $D(i,j) = 1$ za neko $i \in \{2,\dots,n-1\}$, i $\mathrm{w}(\gamma) \leq \mathrm{w}(D(*,1)) + \mathrm{w}(D(*,j)) = 5$.

Iz Leme 3.2.14 sledi

$$\mathrm{c}(A) \leq \mathrm{c}(D) + 2^{n-3} - 2^{n-5} = \mathrm{c}(D) + 2^{n-4} + 2^{n-5}.$$

Kombinujući ovu nejednakost sa gornjom granicom za $\mathrm{r}(D)$, dobijamo

$$\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(B) + 2^{n-4} + 2^{n-5} + 2^{n-4} + 2^{n-5} = \mathrm{r}(B) + 2^{n-3} + 2^{n-4}.$$

Pošto je matrica A gusta, odnosno $\mathrm{r}(A) > 2^{n-2} + 2^{n-3}$, imamo da je

$$2^{n-2} + 2^{n-3} < \mathrm{r}(B) + 2^{n-3} + 2^{n-4}.$$

Dakle, $\mathrm{r}(B) > 2^{n-3} + 2^{n-4}$ i stoga

$$\mathrm{r}(A) \leq \mathrm{r}(B) + 2^{n-3} + 2^{n-4} < 2\,\mathrm{r}(B),$$

odakle sledi da je A valjana matrica. $\square$

Lema 3.2.16. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$. Ukoliko je*

$$A = \begin{bmatrix} B & 0_{n-1,1} \\ \alpha & a \end{bmatrix},$$

tada važi $\rho(B) \geq \rho(A)$,

Dokaz. Iz $\mathrm{r}\begin{bmatrix} B & 0_{n-1,1} \end{bmatrix} = \mathrm{r}(B)$ sledi $\mathrm{r}(A) \leq 2\,\mathrm{r}(B)$ $\square$

Definicija 3.2.17. *Za matricu A kažemo da je zasićena ukoliko postoji vrsta (kolona) j takva da važi $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^{-j*})$ (odnosno $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^{-*j})$).*

Lema 3.2.18. *Svaka zasićena matrica je valjana.*

Dokaz. Neka je A zasićena matrica, $A \in \mathcal{B}_n$, za koju je $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^{-i*})$, $i \in \{1,\dots,n\}$, i neka je j proizvoljni broj iz skupa $\{1,\dots,n\}$. Tada je $\mathrm{r}(A) \leq 2\,\mathrm{r}(A^{-i*,-*j})$, odnosno $\rho(A) \leq \rho(A^{-i*,-*j})$. $\square$

Teorema 3.2.19. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$, $n \geq 2$. Ukoliko je matrica A gusta, tada je ona i valjana.*

Dokaz. Neka je
$$m = \min\{\text{rws}(A, n), \text{cws}(A, n)\},$$
i
$$M = \max\{\text{rws}(A, 1), \text{cws}(A, 1)\}.$$
U zavisnosti od vrednosti m i M razmatramo četiri slučaja.

Slučaj $m \leq 1$. Matrica A sadrži vrstu ili kolonu težine 0 ili 1, i tvrđenje sledi iz Leme 3.2.16.

Slučaj $m = M = 2$. Matrica A je valjana prema Lemi 3.2.10.

Slučaj $m \geq 2$ i $M \geq 4$. Dakle, postoji k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, takvo da važi $\text{w}(A(k, *)) \geq 4$ (ili $\text{w}(A(*, k)) \geq 4$). Pošto je suma težina vrsta matrice jednaka sumi težina kolona matrice, postoji l takav da $\text{w}(A(*, l)) \geq 3$ (odnosno $\text{w}(A(l, *)) \geq 3$). Iz Leme 3.2.13 sledi da je A valjana matrica.

Slučaj $m \in \{2, 3\}$ i $M = 3$. Možemo pretpostaviti da je $\text{w}(A(1, *)) = 3$. Pošto je suma težina vrsta matrice jednaka sumi težina kolona matrice, dok je $\text{rws}(A, n) \geq 2$, postoji k, takav da je $\text{w}(A(*, k)) = 3$, Ukoliko je u matrici A element 0 na preseku bilo koje vrste težine 3 sa kolonom težine 3, tada iz Leme 3.2.13 sledi $\rho(B) \geq \rho(A)$, gde B predstavlja matricu dobijenu uklanjanjem odgovarajuće vrste i kolone težine 3 iz A. Zbog toga možemo pretpostaviti da je 1 u preseku svake kolone težine 3 i vrste težine 3, unutar matrice A. Neka je t broj vrsta matrice A čija je težina jednaka 3, pri čemu znamo da je $t \geq 1$. Dalje, u zavisnosti od toga da li je t veće od ili jednako 1, razmatramo dva slučaja.

Slučaj $t = 1$. Samo prva vrsta i k-ta kolona matrice A imaju težinu jednaku 3, i na osnovu prethodne pretpostavke imamo da je $A(1, k) = 1$. Ukoliko A sadrži kao podmatricu blok jednak θ_l, tada, prema Lemi 3.2.9, postoji $C \in \mathcal{B}_{l-1}$, takav da je $\rho(C) \geq \rho(\theta_l)$, dakle tvrđenje je istinito. U suprotnom, A je blok matrica, i stoga mora biti jednaka nekoj od matrica iz Leme 3.2.11 ili Leme 3.2.12, dakle A je valjana matrica.

Slučaj $t \geq 2$**.** Možemo pretpostaviti da A ne sadrži dve identične vrste ili kolone, pošto bi u suprotnom A bila zasićena matrica, a samim tim i valjana. Ukoliko je $t = 2$, pošto imamo $M = 3$, postoje tačno dve vrste i dve kolone težine 3. Četiri elementa na njihovim presecima imaju 1, jer u suprotnom bi tvrđenje sledilo iz Leme 3.2.13. Stoga, iz Leme 3.2.15 sledi da je tvrđenje tačno. Ukoliko je $t > 2$, tada matrica A sadrži dve identične vrste ili kolone, ili sadrži vrstu i i kolonu j, sa težinama 3, tako da je $A(i, j) = 0$. U bilo kom slučaju, sledi da je matrica A valjana.

□

Posledica 3.2.20. *Neka je $A_n \in \mathcal{B}_n$, gde je $n \geq 2$, i A_n je gusta matrica. Tada postoji niz $A_1, \ldots, A_{n-1}$ takav da $A_i \in \mathcal{B}_i$, $A_{i-1} \subset A_i$ i $\rho(A_{i-1}) \geq \rho(A_i)$ za svako $i \in \{2, \ldots, n\}$.*

Lema 3.2.21. *Neka je A matrica iz $\mathcal{B}_n$ koja ima dve vrste (kolone) sa težinom 4 ili više, odnosno $\mathrm{rws}(A, 2) \geq 4$ ili $\mathrm{cws}(A, 2) \geq 4$. Tada je $\rho(A) \leq \frac{3}{8}$.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je $\mathrm{w}(A(1, *)) \geq 4$ i $\mathrm{w}(A(2, *)) \geq 4$. Tada je $\mathrm{r}^{+1}(A) \leq 2^{n-4}$, $\mathrm{r}^{-1,+2}(A) \leq 2^{n-4}$ (prema Tvrđenju 3.1.6.3), i imamo $\mathrm{r}^{-1,-2}(A) \leq 2^{n-2}$. Tada, iz Tvrđenja 3.1.6.8 sledi

$$\mathrm{r}(A) \leq 2^{n-4} + 2^{n-4} + 2^{n-2} = 2^{n-2} + 2^{n-3},$$

odakle dobijamo $\rho(A) \leq \frac{3}{8}$. Dokaz je analogan u slučaju kada dve kolone imaju težine barem 4. □

Definicija 3.2.22. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$. Operator* $\mathrm{type}(A)$ *definišemo na sledeći način.*

$$\mathrm{type}(A) = \begin{cases} 0 & \textit{ukoliko je } \mathrm{rws}(A,1) \leq 4,\ \mathrm{rws}(A,2) \leq 3, \\ & \quad \mathrm{cws}(A,1) \leq 3, \\ & \textit{ili } \mathrm{cws}(A,1) \leq 4,\ \mathrm{cws}(A,2) \leq 3, \\ & \quad \mathrm{rws}(A,1) \leq 3, \\ 1 & \textit{ukoliko je } \mathrm{cws}(A,1) > 4,\ \mathrm{cws}(A,2) \leq 3, \\ & \quad \mathrm{rws}(A,1) \leq 3, \\ & \textit{ili } \mathrm{rws}(A,1) > 4,\ \mathrm{rws}(A,2) \leq 3, \\ & \quad \mathrm{cws}(A,1) \leq 3, \\ 2 & \textit{ukoliko je } \mathrm{rws}(A,1) > 3,\ \mathrm{cws}(A,1) > 3, \\ & \quad \mathrm{rws}(A,2) \leq 3,\ \textit{i}\ \mathrm{cws}(A,2) \leq 3, \\ 3 & \textit{inače} \end{cases}$$

Lema 3.2.23. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$. Ukoliko je matrica A gusta, tada je* $\mathrm{type}(A) \in \{0, 1, 2\}$.

Dokaz. Pošto je matrica A gusta, iz Leme 3.2.21 sledi $\mathrm{rws}(A, 2) \leq 3$ i $\mathrm{cws}(A, 2) \leq 3$, odakle dobijamo $\mathrm{type}(A) \in \{0, 1, 2\}$. $\square$

Neka $\mathcal{D}$ označava klasu gustih matrica, odnosno $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{B}_n \colon n \geq 1,\ A \text{ je gusta matrica}\}$. Dalje, označimo

$$\mathcal{D}_i = \{A \in \mathcal{D} \colon \mathrm{type}(A) = i\}, \text{ za } i \in \{0, 1, 2\}.$$

Prema prethodnoj lemi je

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2,$$

dok $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$ za svako $i \neq j$, $0 \leq i \leq 2$, $0 \leq j \leq 2$.

Definicija 3.2.24. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$, i neka važi $i, j, k, l \in \{0, \ldots, n\}$, pri čemu je $i \neq k$, $j \neq l$. Dalje, neka su $x, y \in \{0, 1\}$. Za matricu A kažemo da ima krst $\mathcal{K}_{x,y}(A, i, j, k, l)$ ukoliko važi:*

1. $A(k, j) = x$,
2. $A(i, l) = y$,
3. $A(k, l) = 1$,
4. $\mathrm{w}(A(k, *)) = x + 1$,
5. $\mathrm{w}(A(*, l)) = y + 1$.

Za $x = 0$, u izrazu $\mathcal{K}_{x,y}(A, i, j, k, l)$ stavljamo $*$ umesto j, odnosno pišemo $\mathcal{K}_{0,y}(A, i, *, k, l)$, pošto važi $A(k, p) = 0$ za svako $p \neq l$. Slično za $y = 0$, stavljamo $*$ umesto i, odnosno pišemo $\mathcal{K}_{x,0}(A, *, j, k, l)$. Element $A(k, l) = 1$ je 1-blok ako i samo ako A ima krst $\mathcal{K}_{0,0}(A, *, *, k, l)$.

Definicija 3.2.25. *Neka je $B \in \mathcal{B}_n \cap \mathcal{D}$. Za matricu A kažemo da je bazna matrica matrice B, u oznaci $A = \mathrm{Base}(B)$, ukoliko se A dobija iz B primenom narednog algoritma.*

Algoritam 3.2.26. *Izračunavanje matrice* $\mathrm{Base}(B)$ *za dato $B \in \mathcal{D}$.*

Ulaz: *Matrica* B
Izlaz: *Matrica* $\mathrm{Base}(B)$
Početak
  sve dok B *ima* 1-*blok* $\mathcal{K}_{0,0}(*,*,k,l)$ ***i*** $B \in \mathcal{B}_m$*,* $m > 1$
    ukloni iz B *vrstu* k *i kolonu* l
  ukoliko $\mathrm{type}(B) = 1$ ***tada***
    Neka je C *matrica za koju* $C \equiv B$*,* $\mathrm{w}(C(*,1)) > 4$
    $B \leftarrow C$
    sve dok $\mathrm{w}(B(*,1)) > 5$ ***i*** B *ima krst* $\mathcal{K}_{1,0}(B,*,1,k,l)$
      ukloni iz B *vrstu* k *i kolonu* l*.*
  inače ukoliko $\mathrm{type}(B) = 2$ ***tada***
    Neka je C *matrica za koju* $C \equiv B$*,* $\mathrm{w}(C(1,*)) > 3$*,* $\mathrm{w}(C(*,1)) > 3$
    $B \leftarrow C$
    sve dok $\mathrm{w}(B(*,1)) > 4$ ***i*** B *ima krst* $\mathcal{K}_{1,0}(B,*,1,k,l)$
      ukloni iz B *vrstu* k *i kolonu* l*.*
    sve dok $\mathrm{w}(B(1,*)) > 4$ ***i*** B *ima krst* $\mathcal{K}_{0,1}(B,1,*,k,l)$
      ukloni iz B *vrstu* k *i kolonu* l
    sve dok $\mathrm{w}(B(*,1)) > 4$ ***i*** $\mathrm{w}(B(1,*)) > 4$
      i B *ima krst* $\mathcal{K}_{1,1}(B,1,1,k_1,l_1)$ ***i*** $\mathcal{K}_{1,1}(B,1,1,k_2,l_2)$*,* $k_1 \neq k_2$ *i* $l_1 \neq l_2$
        ukloni iz B *vrstu* k_2 *i kolonu* l_2
  vrati *matricu* B
Kraj

Primetimo da se primenom gornjeg algoritma ne menja tip matrice, odnosno važi $\mathrm{type}(B) = \mathrm{type}(\mathrm{Base}(B))$.

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \alpha & A' \end{bmatrix}$$

matrica iz skupa $\mathcal{B}_k$, za neko $k \geq 1$, pri čemu je $A' \in \mathcal{B}_{k-1}$. Neka je $x, y \in \{0,1\}$, i neka je $\mathcal{X}_{x,y}(A)$ oznaka za matricu

$$\mathcal{X}_{x,y}(A) = \begin{bmatrix} a & \beta & y \\ \alpha & A' & 0 \\ x & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za $\mathcal{X}_{x_1,y_1}(\mathcal{X}_{x_2,y_2}(A))$ ćemo koristiti kraći zapis $\mathcal{X}_{x_1,y_1}\mathcal{X}_{x_2,y_2}(A)$, dok je $\mathcal{X}^k_{x_1,y_1}(A)$ kraća oznaka za $\mathcal{X}_{x_1,y_1}\mathcal{X}^{k-1}_{x_1,y_1}(A)$. Očigledno je da važi

$$\mathcal{X}_{x_1,y_1}\mathcal{X}_{x_2,y_2}(A) \equiv \mathcal{X}_{x_2,y_2}\mathcal{X}_{x_1,y_1}(A).$$

Dokaz naredne leme nalazi se u radu Živkovića [38].

Lema 3.2.27. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$, gde je $n \geq 1$, matrica bez nula vrsta i nula kolona. Tada važi*

$$\mathrm{r}\left[\begin{array}{c|cc} A & 0 & 1 \\ \hline 0 & C & D \\ 1 & E & F \end{array}\right] = (\mathrm{r}(A) - 2)\,\mathrm{r}(C) + \mathrm{r}\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & C & D \\ 1 & E & F \end{array}\right]$$

Lema 3.2.28. *Neka je*

$$A = \mathcal{X}^2_{1,1}\begin{bmatrix} a & \beta \\ \alpha & A' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \beta & 1 & 1 \\ \alpha & A' & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ 1 & \boldsymbol{0} & 1 & 0 \\ 1 & \boldsymbol{0} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gde je $A \in \mathcal{B}_n$, $A' \in \mathcal{B}_{n-3}$, $\alpha \in \mathcal{B}_{n-3,1}$, $\beta \in \mathcal{B}_{1,n-3}$, $a \in \{0,1\}$. Neka je $B = A^{-n*,-*n}$. Tada važi $\rho(B) \geq \rho(A)$, odnosno, matrica A je valjana.

Dokaz. Prema Lemi 3.2.27 imamo

$$\mathrm{r}(A) = (\mathrm{r}(I_2) - 2)\ \mathrm{r}(A') + \mathrm{r}(B) = 2\ \mathrm{r}(A') + \mathrm{r}(B)$$

Neka je $C = \begin{bmatrix} A' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$; tada $\mathrm{r}(C) = 2\,\mathrm{r}(A')$. Pošto je $C \subset B$ imamo $2\,\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(C) \leq \mathrm{r}(B)$, odakle sledi $\mathrm{r}(A) = 2\,\mathrm{r}(A') + \mathrm{r}(B) \leq 2\,\mathrm{r}(B)$, čime je dokaz kompletiran. □

Lema 3.2.29. *Za svako $B \in \mathcal{D}_i$, i svako $i \in \{0,1,2\}$, važi* $\mathrm{Base}(B) \in \mathcal{D}_i$*, gde su $\mathcal{D}_i$ definisane sa* (3.2.2).

Dokaz. Neka je $A = \mathrm{Base}(B)$. Pošto je matrica A dobijena iz B primenom Algoritma 3.2.26, imamo da je $\mathrm{type}(B) = \mathrm{type}(A)$. U zavisnosti od vrednosti i, razmatramo tri slučaja.

Slučaj $i = 0$. Tada je $\rho(A) = \rho(B) > \frac{3}{8}$.

Slučaj $i = 1$. Iz Leme 3.2.16 sledi $\rho(A) \geq \rho(B) > \frac{3}{8}$.

Slučaj $i = 2$. Iz Lema 3.2.16 i 3.2.28 sledi $\rho(A) \geq \rho(B) > \frac{3}{8}$.

□

Definicija 3.2.30. *Za svako $i \in \{0, 1, 2\}$ definišemo familiju skupova $\mathcal{E}_i$ kao*

$$\mathcal{E}_i = \{\mathrm{can}(\mathrm{Base}(B)) \colon B \in \mathcal{D}_i\}. \tag{3.10}$$

Definicija 3.2.31.

$$\mathcal{C}_0 = \{\mathcal{X}_{0,0}^p(A) \colon p \geq 0,\ A \in \mathcal{B}_n \cap \mathcal{E}_0,\ n \geq 1\}.$$

Definicija 3.2.32. *Neka je $A = \begin{bmatrix} \alpha & A' \end{bmatrix}$, $A \in \mathcal{B}_n \cap \mathcal{E}_1$, pri čemu je $\mathrm{w}(\alpha) > 4$. Tada*

$$\mathcal{C}_1(A) = \{\mathcal{X}_{1,0}^q \mathcal{X}_{0,0}^p(A) \colon p, q \geq 0\}. \tag{3.11}$$

Definicija 3.2.33. *Neka je $A = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \alpha & A' \end{bmatrix}$ matrica iz skupa $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{E}_2$, pri čemu je $A' \in \mathcal{B}_{n-1,n-1}$, i važi $\mathrm{w}(\alpha) + a > 3$, kao i $\mathrm{w}(\beta) + a > 3$. Tada*

$$\mathcal{C}_2(A) = \{\mathcal{X}_{1,1}^s \mathcal{X}_{0,1}^r \mathcal{X}_{1,0}^q \mathcal{X}_{0,0}^p(A) \colon p, q, r, s \geq 0\}. \tag{3.12}$$

Tvrđenje 3.2.34. *Za svako $i \in \{0, 1, 2\}$, i svako $D \in \mathcal{D}_i$, gde su $\mathcal{D}_i$ definisane sa* (3.2.2), *važi $D \in \mathcal{C}_i(\mathrm{Base}(D))$.*

Dokaz. Tvrđenje sledi iz postupka Algoritma 3.2.26 i definicija klasa $\mathcal{D}_i$. $\square$

Neka je $A = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \alpha & A' \end{bmatrix}$. Sada pokazujemo kako se izračunava $\mathrm{r}(B)$ za bilo koje $B \in \mathcal{C}_i(A)$, $i \in \{0, 1, 2\}$. Prvo, za $\mathcal{X}_{0,0}^p(A)$ imamo da je

$$\mathrm{r}\left(\mathcal{X}_{0,0}^p(A)\right) = \mathrm{r}\begin{bmatrix} a & \beta & 0 \\ \alpha & A' & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} = 2^p\, \mathrm{r}(A),\ \text{za svako } p \geq 0.$$

Korišćenjem Leme 3.2.27 i Leme 3.2.2, za $\mathcal{X}_{1,0}^q(A)$ dobijamo

$$\begin{aligned} \mathrm{r}\left(\mathcal{X}_{1,0}^q(A)\right) &= (2^q - 2)\,\mathrm{r}\begin{bmatrix} \beta \\ A' \end{bmatrix} + \mathrm{r}\begin{bmatrix} a & \beta & 0 \\ \alpha & A' & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (2^q - 1)\,\mathrm{r}\begin{bmatrix} \beta \\ A' \end{bmatrix} + \mathrm{r}\begin{bmatrix} a & \beta \\ \alpha & A' \end{bmatrix},\ \text{za svako } q \geq 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Primetimo da je ova jednakost trivijalno zadovoljena za $q = 0$. Analogno, za $\mathcal{X}_{0,1}^r(A)$ dobijamo

$$\begin{aligned} \mathrm{r}\left(\mathcal{X}_{0,1}^r(A)\right) &= (2^r - 2)\,\mathrm{r}\begin{bmatrix}\alpha & A'\end{bmatrix} + \mathrm{r}\begin{bmatrix}a & \beta & 1\\ \alpha & A' & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \\ &= (2^r - 1)\,\mathrm{r}\begin{bmatrix}\alpha & A'\end{bmatrix} + \mathrm{r}\begin{bmatrix}a & \beta\\ \alpha & A'\end{bmatrix}, \text{ za svako } r \geq 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Teorema 3.2.35. *Neka je $A = [\alpha\ A']$, gde su $A' \in \mathcal{B}_{k,k-1}$, $\alpha \in \mathcal{B}_{k,1}$, i neka je*

$$B = \mathcal{X}_{0,0}^p \mathcal{X}_{1,0}^q(A) = \begin{bmatrix}\alpha & A' & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & I_q & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & I_p\end{bmatrix},$$

gde je $B \in \mathcal{B}_n$, $n = k + p + q$. Tada je

$$\mathrm{r}(B) = 2^{n-k}\,\mathrm{r}(A') + 2^p\left(\mathrm{r}[\alpha\ A'] - \mathrm{r}(A')\right). \tag{3.15}$$

Dokaz. Neka je

$$B' = \begin{bmatrix}\alpha & A' & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & I_q\end{bmatrix}$$

Pomoću jednakosti (3.13), dobijamo $\mathrm{r}(B') = 2^q\,\mathrm{r}(A') + \mathrm{r}[\alpha\ A'] - \mathrm{r}(A')$. Otuda $\mathrm{r}(B) = 2^{p+q}\,\mathrm{r}(A') + 2^p(\mathrm{r}[\alpha\ A'] - \mathrm{r}(A'))$ i pošto je $n = k+p+q$, sledi (3.15). $\square$

Teorema 3.2.36. *Neka je $A = \begin{bmatrix}a & \beta\\ \alpha & A'\end{bmatrix}$ matrica iz skupa $\mathcal{B}_k$, pri čemu je $A' \in \mathcal{B}_{k-1,k-1}$. Neka su $p, q, r, s \geq 0$, $B \in \mathcal{B}_n$, i neka je*

$$B = \mathcal{X}_{0,0}^p \mathcal{X}_{1,0}^q \mathcal{X}_{0,1}^r \mathcal{X}_{1,1}^s(A) = \begin{bmatrix}a & \beta & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \alpha & A' & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & I_s & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & I_r & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & I_q & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & I_p\end{bmatrix}$$

pri čemu je $n = k + p + q + r + s$. Uvedimo sledeće oznake

$$A_2 = \begin{bmatrix}\alpha & A'\end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix}\beta\\ A'\end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix}a & \beta & 1\\ \alpha & A' & \boldsymbol{0}\\ 1 & \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}.$$

Tada važi

$$\mathrm{r}(B) = 2^{n-k}\,\mathrm{r}(A') + 2^{p+q}c_3 + 2^{p+r}c_2 + 2^p c_1, \tag{3.16}$$

gde je

$$c_2 = \mathrm{r}(A_2) - \mathrm{r}(A'),\ c_3 = \mathrm{r}(A_3) - \mathrm{r}(A'),$$

i

$$c_1 = \begin{cases} \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(A') - \mathrm{r}(A_2) - \mathrm{r}(A_3), & s = 0 \\ \mathrm{r}(A_4) - \mathrm{r}(A_2) - \mathrm{r}(A_3), & s > 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Dokaz. Neka je

$$B' = \begin{bmatrix} a & \beta & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \alpha & A' & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & I_s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_q \end{bmatrix}$$

i pretpostavimo, za početak, da je $s = 0$. Korišćenjem jednakosti (3.13) dobijamo

$$\mathrm{r}(B') = (2^q - 1)\,\mathrm{r}\begin{bmatrix} \beta & \mathbf{1} \\ A' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{bmatrix} + \mathrm{r}\begin{bmatrix} a & \beta & \mathbf{1} \\ \alpha & A' & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & I_r \end{bmatrix}.$$

Primenom jednakosti (3.14) dobijamo

$$\mathrm{r}\begin{bmatrix} \beta & \mathbf{1} \\ A' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_r \end{bmatrix} = (2^r - 1)\,\mathrm{r}(A') + \mathrm{r}(A_3)$$

i

$$\mathrm{r}\begin{bmatrix} a & \beta & \mathbf{0} \\ \alpha & A' & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & I_r \end{bmatrix} = (2^r - 1)\,\mathrm{r}(A_2) + \mathrm{r}(A).$$

Otuda imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(B') = (2^q - 1)((2^r - 1)\,\mathrm{r}(A') + \mathrm{r}(A_3)) \\ + (2^r - 1)\,\mathrm{r}(A_2) + \mathrm{r}(A), \end{aligned}$$

odnosno

$$\mathrm{r}(B') = 2^{q+r}\,\mathrm{r}(A') + 2^r c_2 + 2^q c_3 + c_1. \tag{3.18}$$

Množenjem ove jednakosti sa 2^p i zamenom $p+q+r$ sa $n-k$ dobijamo jednakost (3.16) za slučaj $s=0$. Za izračunavanje vrednosti $\mathrm{r}(B')$ za $s>0$ i $p=0$, koristimo jednakost (3.18) menjajući

$$A',\ \begin{bmatrix}\alpha & A'\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\beta \\ A'\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}a & \beta \\ \alpha & A'\end{bmatrix}$$

redom sa

$$\begin{bmatrix}A' & 0 \\ 0 & I_s\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\alpha & A' & 0 \\ 1 & 0 & I_s\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\beta & 1 \\ A' & 0 \\ 0 & I_s\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}a & \beta & 1 \\ \alpha & A' & 0 \\ 1 & 0 & I_s\end{bmatrix}.$$

Zamenom

$$\begin{aligned}
\mathrm{r}(A') \text{ sa } \mathrm{r}\begin{bmatrix}A' & 0 \\ 0 & I_s\end{bmatrix} &= 2^s\,\mathrm{r}(A'),\\
\mathrm{r}\begin{bmatrix}\alpha & A'\end{bmatrix} \text{ sa } \mathrm{r}\begin{bmatrix}\alpha & A' & 0 \\ 1 & 0 & I_s\end{bmatrix} &= (2^s-1)\,\mathrm{r}(A') + \mathrm{r}(A_2),\\
\mathrm{r}\begin{bmatrix}\beta \\ A'\end{bmatrix} \text{ sa } \mathrm{r}\begin{bmatrix}\beta & 1 \\ A' & 0 \\ 0 & I_s\end{bmatrix} &= (2^s-1)\,\mathrm{r}(A') + \mathrm{r}(A_3),\\
\mathrm{r}\begin{bmatrix}a & \beta \\ \alpha & A'\end{bmatrix} \text{ sa } \mathrm{r}\begin{bmatrix}a & \beta & 1 \\ \alpha & A' & 0 \\ 1 & 0 & I_s\end{bmatrix} &= (2^s-2)\,\mathrm{r}(A') + \mathrm{r}(A_4),
\end{aligned}$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{r}(B') &= 2^{q+r+s}\,\mathrm{r}(A') + 2^{q+s}\,(\mathrm{r}(A_3) - \mathrm{r}(A')) + \\
&\quad + 2^{r+s}\,(\mathrm{r}(A_2) - \mathrm{r}(A')) + (\mathrm{r}(A_4) - \mathrm{r}(A_2) - \mathrm{r}(A_3)) \\
&= 2^{q+r+s}\,\mathrm{r}(A') + 2^{q+s}c_3 + 2^{r+s}c_2 + c_1.
\end{aligned}$$

Množenjem ove jednakosti sa 2^p i zamenom $p+q+r+s$ sa $n-k$, dobijamo jednakost (3.16) za slučaj kada je $s>0$. □

3.2.3 Karakterizacija gustih matrica

Primetimo da klase $\mathcal{C}_i(A)$ imaju beskonačno mnogo elemenata. Međutim, broj matrica u skupovima $\mathcal{E}_i$, datim sa (3.10) je konačan za svako $i \in \{0,1,2\}$. U Teoremi 3.2.41 dokazujemo da za klase $\mathcal{F}_i$, $i \in \{0,1,2\}$, dobijene narednim algoritmom, važi $\mathcal{E}_i = \mathcal{F}_i$.

Algoritam 3.2.37 (Određivanje_klasa_$\mathcal{F}_\mathrm{i}$()).

Izlaz: *Klase* $\mathcal{F}_i$*, za* $0 \leq i \leq 2$
Početak
  $n \leftarrow 1$
  $\mathcal{G}_1 \leftarrow \{I_1\}$
  sve dok $|\mathcal{G}_n| > 0$
    $\mathcal{G}_{n+1} \leftarrow \emptyset$
    za svako $A \in \mathcal{G}_n$
      ukoliko $\mathrm{type}(A) \in \{1,2\}$ ***tada***
        dodaj $\mathrm{can}(\mathrm{Base}(A))$ *u* $\mathcal{F}_i$
      inače
        ukoliko $\mathrm{type}(A) = 0$ ***i*** A *sadrži* 4 *ili više* 1*-blokova* ***tada***
            dodaj $\mathrm{can}(\mathrm{Base}(A))$ *u* $\mathcal{F}_0$
        inače
          za svako $B \in \mathcal{B}_{n+1}$ *za koje je*
            $B(i,j) = A(i,j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$
            ukoliko $\rho(B) > \frac{3}{8}$ ***tada***
              dodaj $\mathrm{can}(B)$ *u* $\mathcal{G}_{n+1}$
    zameni n *sa* $n+1$
Kraj

Maksimalna dimenzija matrice koja se dostiže izvršavanjem gornjeg algoritma je 12, odnosno $\mathcal{G}_{13} = \emptyset$.

Definicija 3.2.38. *Za matricu* A *kažemo da je proširiva ukoliko je gusta, ima* 3 *ili manje* 1*-bloka, i važi* $\mathrm{type}(A) = 0$.

Teorema 3.2.39. *Neka je* $A \in \mathcal{B}_n$ *proširiva matrica, za neko* $n > 1$*. Tada postoji matrica* $C \in \mathcal{B}_{n-1}$*,* $C \subset A$*, takva da je* C *proširiva matrica.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je $n = 2$. Iz $\rho(A) > \frac{3}{8}$ sledi da je $\mathrm{r}(A) > 1$. Dakle, postoje k i m, takvi da $A(k,m) = 1$, $k \geq 1$ i $m \leq 2$. Možemo pretpostaviti da je $A(1,1) = 1$. Tada za $C = A^{-2*,-*2}$ važi $\rho(C) = 1$, i C je proširiva matrica, čime je dokaz završen. Pretpostavimo zato da je $n > 2$. Ukoliko A sadrži 1-blok, neka je C matrica koja se dobija uklanjanjem jednog 1-bloka is matrice A. Tada je $\rho(C) = \rho(A) > \frac{3}{8}$, $\mathrm{type}(C) = 0$ i C sadrži 2 ili manje 1-bloka. Dakle, C je proširiva matrica, i završili smo. Pretpostavimo sada da A ne sadrži 1-blok. Razmatramo naredne slučajeve.

Slučaj $\mathrm{rws}(A, n) = 0$**.** Pošto je $\mathrm{type}(A) = 0$, matrica A sadrži najviše jednu kolonu težine 4, odnosno A sadrži kolonu težine manje od 4. Možemo pretpostaviti da je $\mathrm{w}(A(1, *)) = 0$ i $\mathrm{w}(A(*, 1)) \leq 3$. Neka je $C = A^{-1*,-*1}$. Tada matrica C sadrži 3 ili manje 1-bloka. Takođe, $\rho(C) \geq \rho(A)$ i $\mathrm{type}(C) = 0$; dakle C je proširiva matrica.

Slučaj $\mathrm{cws}(A, n) = 0$**.** Dokaz je analogan dokazu za prethodni slučaj.

Slučaj $\mathrm{rws}(A, n) = 1$**.** Možemo pretpostaviti da važi $A(1, 1) = 1$, kao i $\mathrm{w}(A(1, *)) = 1$. Neka je $D = A^{-*1}$, i neka je $C = A^{-1*,-*1}$. Imamo da je $\mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(D) \geq \frac{\mathrm{r}(A)}{2}$ odakle sledi $\rho(C) > \frac{3}{8}$. Neka je $E = A^{-1*}$, stoga je $C = E^{-*1}$. Pošto C sadrži 3 ili manje 1-bloka, dok je $\mathrm{w}(E(1, *)) \leq 3$, sledi da E ne sadrži 1-blok. Prema tome, C je proširiva matrica.

Slučaj $\mathrm{cws}(A, n) = 1$**.** Dokaz je analogan dokazu za prethodni slučaj.

Slučaj $\mathrm{rws}(A, n), \mathrm{cws}(A, n) \geq 2$**.** Iz Teoreme 3.2.19 sledi da postoji $C \in \mathcal{B}_{n-1}$ takav da $C \subset A$ i $\rho(C) \geq \rho(A)$. Možemo pretpostaviti da je $C = A^{-1*,-*1}$. Iz $\mathrm{type}(A) = 0$ sledi da je $\mathrm{type}(C) = 0$, odnosno matrica C ne sadrži vrstu i kolonu takve da i jedna i druga imaju težinu veću od 3. Pošto matrica A ne sadrži vrstu ili kolonu težine manje od 2, jedini 1-blok u C može biti za k i l takve da $A(1, k) = 1$ i $A(m, 1) = 1$. Pošto važi $\mathrm{w}(A(1, *)) < 4$ ili $\mathrm{w}(A(*, 1)) < 4$, ili oba, matrica C ne može imati više od 3 1-bloka. Time je dokaz teoreme kompletiran.

□

Lema 3.2.40. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$, gde je $n \geq 1$, proizvoljna proširiva matrica. Tada se matrica $B = \mathrm{can}(\mathrm{Base}(A))$ dobija primenom Algoritma 3.2.37.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{F}_i$, sa $0 \leq i \leq 2$, klase matrica dobijene primenom Algoritma 3.2.37. Ukoliko je $n = 1$, tada $A = B = I_1$, i stoga $B \in \mathcal{F}_0$. Dakle, možemo pretpostaviti da je $n \geq 2$. Iz prethodne teoreme sledi da postoji matrica $C_{n-1} \subset A$, takva da je $C_{n-1} \in \mathcal{B}_{n-1}$ i C_{n-1} je proširiva matrica. Takođe, postoje $C_1, \ldots, C_{n-1}$ takve da $I_1 = C_1 \subset \cdots C_{n-1} \subset A$ i sve C_i su proširive matrice. Odavde zaključujemo da se matrica A može dobiti primenom Algoritma 3.2.37. □

Primetimo da je ovo tvrđenje slično onom u Teoremi 3.2.19. Postoji beskonačno mnogo gustih matrica, ali klasa $\mathcal{F}_i$ je konačna za svako $i \in \{0, 1, 2\}$. Ovo tvrđenje nam obezbeđuje efikasno pronalaženje svih gustih matrica.

Teorema 3.2.41. *Neka su $\mathcal{F}_i$, za $i \in \{0,1,2\}$, klase matrica dobijene primenom Algoritma 3.2.37. Tada*

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{F}_i, \text{ za svako } i \in \{0,1,2\}$$

i

$$\mathcal{D} \subseteq \bigcup_{i=0}^{2} \bigcup_{A \in \mathcal{F}_i} \mathcal{C}_i(A). \tag{3.19}$$

gde su klase $\mathcal{E}_i$, za $i \in \{0,1,2\}$, date sa (3.10)*, zatim klase $\mathcal{C}_i$, za $i \in \{0,1,2\}$, date sa* (3.2.31)*,* (3.11) *i* (3.12)*, dok je $\mathcal{D}$ klasa svih gustih matrica.*

Dokaz. Iz činjenice da su klase $\mathcal{F}_i$ dobijene primenom Algoritma 3.2.37, sledi da je $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{E}_i$ za svako $i \in \{0,1,2\}$. Ostaje nam da dokažemo da važi i $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{F}_i$, za svako $i \in \{0,1,2\}$, odnosno da se primenom Algoritma 3.2.37 dobijaju sve guste matrice. Prema Lemi 3.2.40, dovoljno je da dokažemo je svaka matrica A, za koju važi $A \in \mathcal{B}_n$, $A \in \mathcal{E}_i$ i $0 \leq i \leq 2$, proširiva ili postoji matrica $C \in \mathcal{B}_{n-1}$, $C \subset A$, takva de je C proširiva matrica. Time dobijamo da se svaka od matrica iz $\mathcal{E}_i$, $0 \leq i \leq 2$, dobija primenom Algoritma 3.2.37. U zavisnosti od vrednosti i, razmatramo tri slučaja.

Slučaj $i = 0$**.** Pošto je matrica A gusta, $\mathrm{type}(A) = 0$ i A ne sadrži 1-blok, sledi da je A proširiva matrica. Iz Leme 3.2.40 sledi da je $A \in \mathcal{F}_0$.

Slučaj $i = 1$**.** Možemo pretpostaviti da je $\mathrm{cws}(A,1) > 4$ i $\mathrm{rws}(A,1) \leq 3$. U suprotnom, za $\mathrm{rws}(A,1) > 4$ i $\mathrm{cws}(A,1) \leq 3$, razmatramo matricu A^T umesto A. Dalje, možemo pretpostaviti da je $\mathrm{w}(A(*,1)) \geq 5$.

Slučaj $\mathrm{cws}(A,n) = 0$**.** Možemo pretpostaviti da je $\mathrm{w}(A(*,2)) = 0$. Neka je $C = A^{-*1}$, i neka je $D = A^{-*1-*2}$. Pošto $\mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(D)$ i $D \in \mathcal{B}_{n,n-2}$, imamo da je $\mathrm{r}(C) \leq 2^{n-2}$ i $\mathrm{r}(A) \leq 2^{n-2} + 2^{n-5}$. Dakle, matrica A nije gusta, i $A \notin \mathcal{E}_1$, što protivreči našoj pretpostavci.

Slučaj $\mathrm{cws}(A,n) = 1$**.** Možemo pretpostaviti da je $\mathrm{w}(A(*,2)) = 1$ i $A(1,2) = 1$. Pošto je A bazna matrica, ona ne sadrži 1-blok, odakle sledi da je $\mathrm{w}(A(1,*)) > 1$. Sada razmatramo dva slučaja.

1. $\mathrm{w}(A(1,*)) = 2$. Ponovo imamo dva slučaja.
   (a) $A(1,1) = 1$. Tada A sadrži krst $\mathcal{K}_{1,0}(A,*,1,1,2)$, a pošto je A bazna matrica, sledi da je $A(*,1) = 5$. Neka je $D = A^{-1*}$, i neka je $C = A^{-1*,-*2}$. Pošto je $\mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(D)$,

imamo da je $2\,\mathrm{r}(C) \geq \mathrm{r}(A)$, dakle matrica C je gusta. Pošto $\mathrm{rws}(C,1) < 4$ i $\mathrm{cws}(C,1) < 4$, a matrica C ne sadrži 1-blok, znači da je C proširiva matrica.

(b) $A(1,1) = 0$. Neka je $D = A^{-*1}$ i $C = A^{-1*,-*1}$. Iz Leme 3.2.13 sledi da je $\rho(C) \geq \rho(A)$. Ukoliko matrica C sadrži 3 ili manje 1-bloka, tada je C proširiva matrica, i završili smo. U suprotnom, matrica D sadrži barem 2 1-bloka, odnosno, matrica A sadrži krst $\mathcal{K}_{1,0}(A,*,1,i,j)$, za neko $i \in \{2,\ldots,n\}$ i $j \in \{3,\ldots,n\}$. Pošto je A bazna matrica, mora biti $\mathrm{w}(A(*,1)) = 5$. Dalje, neka je $E = A^{-i*,-*j}$. Prema Lemi 3.2.16 matrica E je gusta, a pošto je $A(i,1) = 1$, sledi da je $\mathrm{cws}(E,1) = 4$. Takođe, imamo da je $\mathrm{rws}(E,1) \leq 3$, i pošto E ne sadrži 1-blok, E je proširiva matrica, i završili smo.

2. $\mathrm{w}(A(1,*)) = 3$. Neka je $C = A^{-1*,-*1}$. Prema Lemi 3.2.13 imamo $\rho(C) \geq \rho(A)$, odnosno C je gusta matrica. Dalje, imamo da je $\mathrm{cws}(C) < 4$ i $\mathrm{rws}(C) < 4$. Ukoliko C sadrži 3 ili manje 1-bloka, C je proširiva matrica. U suprotnom, A mora sadržati krst $\mathcal{K}_{1,0}(A,*,1,i,j)$. Međutim, tada je prema Lemi 3.2.16 za $E = A^{-i*,-*j}$, matrica E gusta, a pošto je $A(i,1) = 1$, imamo da je $\mathrm{cws}(E,1) = 4$. Takođe, imamo da je $\mathrm{rws}(E,1) \leq 3$, i pošto E ne sadrži 1-blok, matrica E je proširiva, i završili smo.

Slučaj $\mathrm{cws}(A,n) \geq 2$**.** Suma težina vrsta jednaka je sumi težina kolona, za koju znamo da je veća od $2n$, odakle sledi da matrica A sadrži vrstu koja ima težinu veću od 2. Pošto je $\mathrm{rws}(A,1) \leq 3$, sledi da je $\mathrm{rws}(A,1) = 3$. Možemo pretpostaviti da je $\mathrm{w}(A(1,*)) = 3$. Neka je $C = A^{-1*,-*1}$. Iz Leme 3.2.13 sledi da je matrica C gusta. Pošto A ne sadrži 1-blok, i pošto je $\mathrm{w}(A(*,i)) \geq 2$ za svako $i \in \{1,\ldots,n\}$, matrica C ima 3 ili manje 1-bloka. Dakle, matrica C je a proširiva.

Slučaj $i = 2$**.** Razmatramo sledeće slučajeve.

Slučaj $\mathrm{rws}(A,1) \geq 5$**, i** $\mathrm{cws}(A,1) \geq 5$**.** Možemo pretpostaviti da važi $\mathrm{w}(A(1,*)) > 4$ i $\mathrm{w}(A(*,1)) > 4$. Neka je $C = A^{-1*,-*1}$. Pošto je A bazna matrica, ne može sadržati krst $\mathcal{K}_{1,0}(A,1,1,k,l)$ niti $\mathcal{K}_{0,1}(A,1,1,k,l)$. Takođe, ne može sadržati krstove $\mathcal{K}_{1,1}(A,1,1,k_1,l_1)$

i $\mathcal{K}_{1,1}(A,1,1,k_2,l_2)$, takve da važi $k_1,l_1,k_2,l_2 > 1$, $k_1 \neq l_1, k_2 \neq l_2$. Sledi da matrica C sadrži najviše jedan 1-blok. Osim toga, $\mathrm{type}(C) = 0$, pošto je $\mathrm{rws}(C,1) \leq 3$ i $\mathrm{cws}(C,1) \leq 3$, i matrica C je gusta, prema Lemi 3.2.13. Dakle, matrica C je proširiva.

Slučaj $\mathrm{cws}(A,1) \geq 5$ **i** $\mathrm{rws}(A,1) = 4$**.** Možemo pretpostaviti da važi $\mathrm{w}(A(1,*)) = 4$ i $\mathrm{w}(A(*,1)) > 4$. Pošto je matrica A bazna, ona ne sadrži krst $\mathcal{K}_{1,0}(A,1,1,k,l)$. Neka je $C = A^{-1*,-*1}$. Prema Lemi 3.2.13, matrica C gusta. Sada razmatramo dve mogućnosti.

1. C sadrži 3 ili manje 1-bloka. Pošto je $\mathrm{rws}(C,1) \leq 3$ i $\mathrm{cws}(C,1) \leq 3$, sledi da je $\mathrm{type}(C) = 0$, iz čega sledi da je C proširiva matrica.
2. C sadrži 4 1-bloka. Ponovo razmatramo dva slučaja.
   - (a) $\mathrm{rws}(C,1) = 1$. Ukoliko je $\mathrm{rws}(C,n-1) = 0$, možemo pretpostaviti da je $\mathrm{w}(C(1,*)) = 0$, stoga $\mathrm{r}(A^{-*1}) = \mathrm{r}(A^{-2*,-*1})$, i matrica $A^{-2*,-*1}$ je proširiva. Zato možemo pretpostaviti da je $\mathrm{rws}(C,n-1) > 0$, odnosno $\mathrm{rws}(C,n-1) = 1$. Pošto matrica C sadrži 4 1-bloka, dok je $\mathrm{w}(A(1,*)) = 4$, za svako i za koje je $A(1,i) = 1$ važi $\mathrm{w}(A(*,i)) = 2$. Ukoliko je $\mathrm{cws}(C,n-1) = 0$, tada $\mathrm{cws}(A,n) = 0$, i možemo pretpostaviti da je $\mathrm{w}(A(*,2)) = 0$. Stoga $\mathrm{r}(A) \leq 2^{n-2} + 2^{n-5}$ i matrica A nije gusta, što je kontradikcija. Ukoliko je $\mathrm{rws}(C,n-1) > 0$, pošto imamo da je $\mathrm{w}(C(i,*)) = 1$ za svako $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, tada sledi da je $C = I_{n-1}$. Ovo povlači da matrica A nije bazna, što je u suprotnosti sa pretpostavkom.
   - (b) $\mathrm{rws}(C,1) \geq 2$. Možemo pretpostaviti da je $\mathrm{w}(C(1,*)) \geq 2$. Neka je sada $D = A^{-2*,-*1}$. Pošto je $\mathrm{type}(D) = 0$, matrica D je gusta, prema Lemi 3.2.13. Matrica D sadrži 3 ili manje 1-bloka, dakle D je proširiva matrica.

Slučaj $\mathrm{rws}(A,1) \geq 5$**,** $\mathrm{cws}(A,1) = 4$**.** Dokaz ovog slučaja je analogan dokazu prethodnog slučaja.

Slučaj $\mathrm{rws}(A,1) = 4$ **i** $\mathrm{cws}(A,1) = 4$**.** Možemo pretpostaviti da važi $\mathrm{w}(A(1,*)) = 4$ i $\mathrm{w}(A(*,1)) = 4$. Neka je $C = A^{-1*,-*1}$. Pošto je $\mathrm{type}(C) = 0$, matrica C je gusta, prema Lemi 3.2.13. Ukoliko C sadrži 3 ili manje 1-bloka, matrica C je proširiva, i dokaz je završen. Dakle, možemo pretpostaviti da C ima 4 1-bloka. Matrica

C sadrži 1-blokove samo u sledećim slučajevima.

1. A sadrži krst $\mathcal{K}_{1,0}(A,1,1,k,l)$. Neka je $D = A^{-k*,-*l}$. Matrica D je gusta, $\mathrm{type}(D) = 0$ i D ne sadrži 1-blok, što znači da je D proširiva matrica.
2. A sadrži krst $\mathcal{K}_{0,1}(A,1,1,k,l)$. Analogno prethodnom slučaju, za $D = A^{-k*,-*l}$, matrica D je proširiva.
3. A sadrži dva krsta $\mathcal{K}_{1,1}(A,1,1,k_1,l_1)$, $\mathcal{K}_{1,1}(A,1,1,k_2,l_2)$ takva da je $k_1, l_1, k_2, l_2 > 1$, $k_1 \neq l_1$, $k_2 \neq l_2$. Neka je $D = A^{-k_1*,-*l_1}$. Iz Leme 3.2.28 sledi da je $\rho(D) \geq \rho(A)$. Osim toga, $\mathrm{type}(D) = 0$, i pošto je $A(1,l_1) = 1$ i $A(k_1,1) = 1$, dok D ne sadrži 1-blokove; dakle D je proširiva matrica.

Tvrđenje (3.19) sledi iz $\mathcal{E}_i = \mathcal{F}_i$, Leme 3.2.29, i Algoritma 3.2.26. □

3.2.4 Rezultati dobijeni primenom Algoritma 3.2.37 (Određivanje_klasa_$\mathcal{F}_i$())

Primenom Algoritma 3.2.37, dobijamo klase $\mathcal{E}_i$, $i \in \{0,1,2\}$. Bitni parametri matrica iz ovih klasa dati su u Tabelama 3.1, 3.2 i 3.3. Radi konciznijeg zapisa, dobijene matrice $A \in \mathcal{E}_i$, $1 \leq i \leq 2$, su dalje kraćene na sledeći način: dok god matrica $A \in \mathcal{B}_k$, za koju je $k > 1$, ima krst $\mathcal{K}_{x,y}(A,1,1,k,l)$, gde je $x + y > 0$, iz matrice A ukljanjamo k-tu vrstu i l-tu kolonu.

Neka je $\mathrm{w}(m)$ oznaka za broj jedinica u binarnom obliku celoga broja m, i neka je A matrica iz $\mathcal{E}_i$, $i \in \{0,1,2\}$. U Tabelama 3.1, 3.2 i 3.3, su prikazane naredne vrednosti.

Tabela 3.1. $\dim(A)$, $\mathrm{r}(A)$ i $\mathrm{w} = \mathrm{w}(\mathrm{r}(A))$.

Tabela 3.2. Za $A = \begin{bmatrix} \alpha & A' \end{bmatrix}$ su date $\dim(A)$, $c_2 = \mathrm{r}(A) - \mathrm{r}(A')$, koje se koriste za izračunavanja u jednačini (3.15), kao i $\mathrm{w} = \mathrm{w}(\mathrm{r}(A))$.

Tabela 3.3. Za $A = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \alpha & A' \end{bmatrix}$ su date vrednosti $\dim(A)$, $\mathrm{r}(A')$, c_2, c_3, c_1, koje se koriste za izračunavanja u jednačini (3.16), kao i $\mathrm{w} = \mathrm{w}(\mathrm{r}(A))$. Svaki red Tabele 3.3 sadrži primer matrice, napisane kao niz celobrojnih vrednosti, čije binarne reprezentacije su vrste matrice.

Korišćenjem ovih rezultata dokazujemo da važi $\mathcal{R}_n \cap (2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^{n-1}) = \mathcal{A}_n$.

Tabela 3.1: Skup trojki $(\dim(A), \mathrm{r}(A), \mathrm{w})$ za svaku matricu A iz skupa skraćenih matrica klase $\mathcal{E}_0$.

	$\dim(A)$	$\mathrm{r}(A)$	w		$\dim(A)$	$\mathrm{r}(A)$	w
1	1	1	1	26	7	50	3
2	1	2	1	27	7	51	4
3	2	2	1	28	7	52	3
4	2	3	2	29	7	53	4
5	3	4	1	30	7	54	4
6	3	5	2	31	7	56	3
7	4	7	3	32	7	57	4
8	4	8	1	33	7	58	4
9	4	9	2	34	7	64	1
10	4	10	2	35	7	65	2
11	5	13	3	36	8	97	3
12	5	14	3	37	8	98	3
13	5	15	4	38	8	99	4
14	5	16	1	39	8	100	3
15	5	17	2	40	8	101	4
16	6	25	3	41	8	102	4
17	6	26	3	42	8	104	3
18	6	27	4	43	8	105	4
19	6	28	3	44	8	106	4
20	6	29	4	45	8	108	4
21	6	30	4	46	8	112	3
22	6	31	5	47	8	128	1
23	6	32	1	48	9	195	4
24	6	33	2	49	9	200	3
25	7	49	3	50	9	208	3

Tabela 3.2: Skup četvorki $(\dim(A), \mathrm{r}(A'), c_2, \mathrm{w})$ za svaku matricu A iz skupa skraćenih matrica klase $\mathcal{E}_1$.

	$\dim(A)$	$\mathrm{r}(A')$	c_2	w
1	1	1	1	2
2	1	1	0	1
3	2	2	1	2
4	2	2	0	1
5	3	3	3	4
6	3	4	1	2
7	3	3	2	3
8	3	4	0	1
9	3	3	1	3
10	4	7	3	5
11	4	8	1	2
12	4	7	2	4
13	4	6	3	4
14	4	8	0	1
15	4	7	1	4
16	4	6	2	3
17	4	7	0	3
18	4	6	1	3
19	5	13	4	4
20	5	12	5	4
21	5	13	3	5
22	5	12	4	3
23	5	13	2	4
24	5	12	3	4
25	5	13	1	4
26	5	12	2	3
27	5	13	0	3
28	5	12	1	3
29	6	24	8	3
30	6	24	6	4
31	6	24	4	3
32	6	24	3	4
33	6	24	2	3
34	6	23	3	6
35	6	24	1	3

Tabela 3.3: Skup šestorki $(\dim(A), \mathrm{r}(A'), c_2, c_3, c_1, \mathrm{w})$ za svaku matricu A iz skupa skraćenih matrica klase $\mathcal{E}_3$.

	matrica A	$\dim(A)$	$\mathrm{r}(A')$	c_2	c_3	c_1		w	
						$s>0$	$s=0$	$s>0$	$s=0$
1	$[1]^T$	1	1	0	0	0	1	1	2
2	$[0]^T$	1	1	0	0	1	0	2	1
3	$[4\ 1\ 3]^T$	3	3	0	0	0	3	2	4
4	$[1\ 3\ 6]^T$	3	3	1	1	2	0	5	4
5	$[5\ 6\ 3]^T$	3	3	1	1	0	0	4	4
6	$[2\ 1\ 7]^T$	3	3	0	1	2	1	4	3
7	$[4\ 5\ 3]^T$	3	3	0	1	0	1	3	4
8	$[4\ 1\ 7]^T$	3	3	0	0	0	2	2	3
9	$[0\ 5\ 3]^T$	3	3	0	1	2	0	4	3
10	$[1\ 6\ 7]^T$	3	3	0	1	1	0	4	3
11	$[6\ 1\ 7]^T$	3	3	0	1	0	0	3	3
12	$[1\ 5\ 7]^T$	3	3	0	0	1	1	3	3
13	$[4\ 5\ 7]^T$	3	3	0	0	0	1	2	3
14	$[0\ 1\ 3]^T$	3	3	0	0	3	0	4	2
15	$[0\ 1\ 7]^T$	3	3	0	0	2	0	3	2
16	$[0\ 6\ 7]^T$	3	3	0	0	1	0	3	2
17	$[10\ 9\ 5\ 6]^T$	4	5	2	2	0	1	4	5
18	$[12\ 9\ 10\ 7]^T$	4	5	1	3	0	0	5	5

3.2.5 Dokaz jednakosti $\mathcal{R}_n \cap (2^{n-2}+2^{n-3}, 2^{n-1}) = \mathcal{A}_n$

Dokaz. Prvo dokazujemo da za svako $a \in \mathcal{A}_n$ postoji matrica $A \in \mathcal{B}_n$ takva da važi $a = \mathrm{r}(A)$. Neka je $A = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \alpha & A' \end{bmatrix}$. Razmatramo četiri slučaja, u zavisnosti od toga kom skupu sa desne strane jednakosti pripada vrednost a.

Slučaj $a \in \mathcal{A}_{n,3}$. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrica iz $\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{B}_3$ čiji su parametri dati u 13. redu Tabele 3.3. Imamo da je $\mathrm{r}(A') = 3$, $c_2 = c_3 = 0$, $c_1 = 1$, što odgovara slučaju datom u (3.17) Teoreme 3.2.36 za $s = 0$. Otuda, postoji i, gde je $i \in \{0, \ldots, n-4\}$, tako da

$$\mathrm{r}\left(\mathcal{X}_{0,1}^{n-3-i}\mathcal{X}_{0,0}^{i}(A)\right) = 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{i} = a,$$

odakle sledi $\mathcal{R}(\mathcal{C}_2(A) \cap \mathcal{B}_n) \supseteq \mathcal{A}_{n,3}$.

Slučaj $a \in \mathcal{A}_{n,4}$. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrica iz $\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{B}_3$ čiji su parametri dati u 7. redu Tabele 3.3. Imamo da je $\mathrm{r}(A') = 3$, $c_2 = 0$, $c_3 = c_1 = 1$, što odgovara slučaju datom u (3.17) Teoreme 3.2.36, za $s = 0$. Otuda, postoje i i j takvi da $i, j \in \{0, \ldots, n-3\}$, i

$$\begin{aligned}\mathrm{r}\left(\mathcal{X}_{1,0}^{n-3-i}\mathcal{X}_{0,1}^{i-j}\mathcal{X}_{0,0}^{j}(A)\right) &= 2^{n-2} + 2^{n-3} \\ &\quad + 2^{i} + 2^{j} = a,\end{aligned}$$

odakle sledi $\mathcal{R}(\mathcal{C}_2(A) \cap \mathcal{B}_n) \supseteq \mathcal{A}_{n,4}$.

Slučaj $a \in \mathcal{A}'_{n,5}$. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrica iz $\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{B}_3$ čiji su parametri dati u 4. redu Tabele 3.3. Imamo da je $\mathrm{r}(A') = 3$, $c_2 = c_3 = 1$, $c_1 = 2$, što odgovara slučaju datom u (3.17) Teoreme 3.2.36, za $s > 0$. Otuda, postoje i, j, i k takvi da $0 \leq k$, $k + 1 < i \leq n - 4$, i

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\mathcal{X}_{1,1}\mathcal{X}_{1,0}^{i-k}\mathcal{X}_{0,0}^{k}(A)) &= 2^{n-2} + 2^{n-3} \\ &\quad + 2^{i} + 2^{k+1} + 2^{k} = a\end{aligned}$$

odakle sledi $\mathcal{R}(\mathcal{C}_2(A) \cap \mathcal{B}_n) \supseteq \mathcal{A}'_{n,5}$.

Slučaj $a \in \mathcal{A}''_{n,5}$. Za matricu A datu u prethodnom slučaju biramo vrednosti za i, j, k, tako da važi $1 \leq k$, zatim $k+2 \leq j < i$, kao i $i+j \leq n+k-5$, i dobijamo

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\mathcal{X}_{1,1}^{s}\mathcal{X}_{1,0}^{j+1}\mathcal{X}_{0,1}^{i+1}\mathcal{X}_{0,0}^{k-1}(A)) &= 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{k+i} \\ &\quad + 2^{k+j} + 2^{k} = a,\end{aligned}$$

odakle sledi $\mathcal{R}(\mathcal{C}_2(A) \cap \mathcal{B}_n) \supseteq \mathcal{A}''_{n,5}$.

Neka je $\mathcal{R}'_n$ oznaka za skup $\mathcal{R}_n \cap (2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^{n-1})$. Dakle, dokazali smo da važi $\mathcal{R}'_n \supseteq \mathcal{A}_n$. Sada dokazujemo

$$\begin{aligned}\mathcal{R}'_n = \{\mathrm{r}(B)\colon B \in \bigcup_{i=1,2,3}\bigcup_{A \in \mathcal{E}_i} \mathcal{C}_i(A) \cap \mathcal{B}_n\} \\ \cap (2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^{n-1}) \subseteq \mathcal{A}_n.\end{aligned}$$

Primetimo da

$$\mathcal{A}_{n,i} = \{a \in (2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^{n-1})\colon \ \mathrm{w}(a) = i\}, \qquad \text{za } i \in \{3, 4\}$$

Takođe, primetimo da skup

$$\begin{aligned}\mathcal{A}'_{n,5} = \{a \in (2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^{n-1})\colon \ &\mathrm{w}(a) = 5, \quad (3.20)\\ &a = 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{i} + 2^{k+1} + 2^{k}, \quad (3.21)\\ &0 \leq k,\ \ k + 2 \leq i \leq n - 4\}\end{aligned}$$

sadrži sve celobrojne vrednosti iz intervala $(2^{n-2} + 2^{n-3}, 2^{n-1})$, čiji binarni zapis ima 5 jedinica i dve najniže jedinice su u binarnom zapisu jedna pored druge. Zbog toga, dovoljno je da proverimo samo matrice čiji su parametri dati u Tabelama 3.1, 3.2, i 3.3, pri čemu je $\mathrm{w}(\mathrm{r}(A)) \geq 5$, zatim $\mathrm{w}(\mathrm{r}(A)) = 5$, i dve najniže jedinice binarnog zapisa $\mathrm{r}(A)$ nisu jedna pored druge.

Tabela 3.1. Vrednost $\mathrm{w} = \mathrm{w}(\mathrm{r}(A))$ je veća ili jednaka 5 samo u 22. redu. Tada je $B = \mathcal{X}_{0,0}^{n-6}(A)$ i $\mathrm{r}(B) = 31$, odnosno $\mathrm{r}(A) = 31 \cdot 2^{n-6}$, odakle sledi $\mathrm{r}(A) \in \mathcal{A}'_{n,5}$.

Tabela 3.2. Neka je $d = \dim(A)$ i neka je $A' \in \mathcal{B}_{d,d-1}$ i $\alpha \in \mathcal{B}_{d,1}$, i parametri matrice $A = [\alpha\ A']$, $A \in \mathcal{B}_d$ odgovaraju nekom redu Tabele 3.2. Dalje, neka je

$$B = \mathcal{X}_{0,0}^{p}\mathcal{X}_{1,0}^{q}(A) \in \mathcal{B}_n \cap \mathcal{C}_1(A), \quad p + q + k = n.$$

Tada, primenom jednakosti (3.18) dobijamo $\mathrm{r}(B) = 2^{n-k}\,\mathrm{r}(A') + 2^p c_2$. U Tabeli 3.2 postoje dva reda, 10 i 21, kod kojih je $\mathrm{w} = 5$, dok je red 34 jedini kod koga je $\mathrm{w} = 6$.

U redovima 10 i 21 je $c_2 = 3$, odakle sledi da za $\mathrm{w}(\mathrm{r}(B)) = 5$ dve najniže jedinice u binarnom zapisu broja $\mathrm{r}(B)$ su jedna pored druge, i važi $\mathrm{r}(B) \in \mathcal{A}'_{n,5}$.

Neka je sada B matrica dobijena iz matrice čiji su parametri dati u redu 34 Tabele 3.2. Ukoliko je B gusta matrica, tada $\mathrm{r}(B) = 23 \cdot 2^{n-6} + 3 \cdot 2^p > 2^n \cdot 3/8$, odakle sledi da je $p \geq n-7$. Dalje, iz $p+q = n-6$ dobijamo da je $p \leq n-6$, odnosno $p \in \{n-7, n-6\}$. Iz toga dobijamo $\mathrm{r}(B) \in \{49 \cdot 2^{n-7}, 13 \cdot 2^{n-5}\}$, odnosno $\mathrm{w}(\mathrm{r}(B)) = 3$, a odakle $\mathrm{r}(B) \in \mathcal{A}_{n,3}$ za obe vrednosti $\mathrm{r}(B)$.

Tabela 3.3. Neka je $d = \dim(A)$, $A' \in \mathcal{B}_{d-1,d-1}$, i neka je $A = \begin{bmatrix} a & \beta \\ \alpha & A' \end{bmatrix}$ matrica čiji parametri odgovaraju nekom redu Tabele 3.3. Dalje, neka je

$$B = \mathcal{X}_{0,0}^{p}\mathcal{X}_{1,0}^{q}\mathcal{X}_{0,1}^{r}\mathcal{X}_{1,1}^{s}(A), \quad p + q + r + s + k = n.$$

Tada iz Teoreme 3.2.36 sledi

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(B) &= 2^{n-k}\,\mathrm{r}(A') + 2^{p+q}c_2 + 2^{p+r}c_3 + 2^p c_1, \\ &\quad p + q + r + s = n. \end{aligned}$$

Sada razmatramo redove kod kojih je $\mathrm{w} \geq 5$.

4. **red, za** $s > 0$**.** U prvom delu dokaza smo već razmatrali 4. red, i dokazali da pokriva $A'_{n,5}$ i $A''_{n,5}$. Za odgovarajuću matricu A važi

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(B) &= 3 \cdot 2^{n-3} + 2^{p+q} + 2^{p+r} + 2^{p+1}, \\ &\quad p + q + r < n - 3. \end{aligned}$$

Očigledno je $\mathrm{r}(B) > 3/8 \cdot 2^n$, odnosno B je gusta matrica. Za $q = r$ imamo $\mathrm{r}(B) = 3 \cdot 2^{n-3} + 2^{p+q+1} + 2^{p+1}$, odakle sledi $\mathrm{w}(\mathrm{r}(B)) \leq 4$ i $\mathrm{r}(B) \in \mathcal{A}_n$. Zato, možemo da pretpostavimo da je $r > q$. Za $q = 0$ imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(B) &= 3 \cdot 2^{n-3} + 2^{p+r} + 2^{p+1} + 2^p, \\ p + r &< n - 3, \end{aligned}$$

odnosno $\mathrm{r}(B) \in \mathcal{A}'_{n,5}$. Za $q = 1$ važi $\mathrm{w}(\mathrm{r}(B)) \leq 4$. Za $q = 2$ i $\mathrm{w}(\mathrm{r}(B)) = 5$ imamo $\mathrm{r}(B) \in \mathcal{A}'_{n,5}$. Za $q \geq 2$ imamo da je $p + q + r < n - 3$ ekvivalentno sa $(p+r)+(p+q) \leq n-5+(p+1)$, odakle sledi $\mathrm{r}(B) \in \mathcal{A}''_{n,5}$.

17. **red, za** $s = 0$**.** Za matricu B važi

$$\begin{aligned} \mathrm{r}(B) &= 5 \cdot 2^{n-4} + 2^{p+q+1} + 2^{p+r+1} + 2^p, \\ p + q + r &= n - 4. \end{aligned}$$

Ukoliko je $q = r$, tada $\mathrm{w}(\mathrm{r}(B)) \leq 4$. Dakle, možemo pretpostaviti da je $q > r$. Uslov $\mathrm{r}(B) > 3/8 \cdot 2^n$ je ekvivalentan sa $2^{p+q+1} + 2^{p+r+1} + 2^p > 2^{n-4}$, odakle imamo $p + q \geq n - 5$. Takođe, imamo $p + q = n - 4 - r \leq n - 4$, odnosno $p + q \in \{n - 5, n - 4\}$. Za $p + q = n - 5$ dobijamo $r = 1$, $\mathrm{r}(B) = 3 \cdot 2^{n-3} + 2^{p+2} + 2^p$, i $\mathrm{w}(\mathrm{r}(B)) \leq 4$. Za $p + q = n - 4$ dobijamo $r = 0$ i $\mathrm{r}(B) = 3 \cdot 2^{n-3} + 2^{n-4} + 2^{p+1} + 2^p$, odakle sledi $\mathrm{r}(B) \in \mathcal{A}'_{n,5}$.

18. **red, za** $s \geq 0$**.** Za matricu B važi

$$\mathrm{r}(B) = 5 \cdot 2^{n-4} + 3 \cdot 2^{p+q} + 2^{p+r},$$

gde je $p + q + r \leq n - 4$.

Slučaj $r = q$**.** Tada je $\mathrm{r}(B) = 5 \cdot 2^{n-4} + 2^{p+q+2}$, odakle imamo $\mathrm{w}(\mathrm{r}(B)) \leq 3$.

Slučaj $r = q - 1$**.** Tada je $\mathrm{r}(B) = 5 \cdot 2^{n-4} + 2^{p+q+1} + 2^{p+q-1}$, odakle imamo $\mathrm{w}(\mathrm{r}(B)) \leq 4$.

Slučaj $r < q - 1$**.** Tada je $\mathrm{r}(B) > 3/8 \cdot 2^n$ ekvivalentno sa $p+q \geq n-5$. Iz $p+q+r \leq n-4$ sledi $p+q \leq n-4$, odnosno $p+q \in \{n-4, n-5\}$. Za $p + q = n - 4$ imamo da je $\mathrm{r}(B) = 2^{n-1} + 2^p > 2^{n-1}$. Za $p + q = n - 5$ imamo da je $\mathrm{r}(B) = 13 \cdot 2^{n-5} + 2^{p+r}$, odakle je $\mathrm{w}(\mathrm{r}(B)) \leq 4$.

Slučaj $r > q + 1$**.** Tada je $\mathrm{r}(B) > 3/8 \cdot 2^n$ ekvivalentno sa $p+r \geq n-4$. Iz $p + q + r \leq n - 4$ sledi $p + r = n - 4$ i $q = 0$. Dakle $\mathrm{r}(B) = 3 \cdot 2^{n-3} + 3 \cdot 2^p$ odnosno $\mathrm{w}(\mathrm{r}(B)) \leq 4$.

$\square$

3.3 Donja granica vrednosti a_n

Neka je a_n najmanji prekid niza kardinalnosti prostora vrsta Bulovih matrica dimenzije $n \times n$. Živković [38] je dokazao da je $a_n \geq 5\,\sqrt[11]{336}^{\,n}$, odnosno $a_n \geq 5 \cdot\ 1.697^n$ za svako $n \geq 31$, što je do sada najbolja donja granica po pitanju vrednosti a_n. Doprinos autora je popravljena donja granica za ovu vrednost, iskazana u Teoremi 3.3.11. Iz ove teoreme dobijamo da je $a_n > 2^{\frac{4}{5}n}$, odnosno $a_n > 1.741^n$ za svako $n \geq 1$.

Lema 3.3.1. *Neka je $A \in \mathcal{B}_k$, $B \in \mathcal{B}_{k+2}$, $\alpha \in \mathcal{B}_{k,1}$, $\beta \in \mathcal{B}_{1,k}$, i neka je*

$$A' = \begin{bmatrix} \alpha & A \end{bmatrix}, \quad A'' = \begin{bmatrix} \beta \\ A \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 1 \\ \alpha & A & \boldsymbol{0} \\ 1 & \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada važi $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A') + \mathrm{r}(A'')$.

Dokaz. Svaki vektor iz $\mathrm{R}(B)$ kod koga je poslednji element 0 dobija se iz $B^{-1*,-(k+2)*}$. Svaki vektor iz $\mathrm{R}(B)$ koji se završava sa 1 takođe i počinje sa 1, dok se elementi na pozicijama od 2 do $k+1$ dobijaju iz $B^{-*1,-*(k+2)}$. Dakle, imamo $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(B^{-1*,-(k+2)*}) + \mathrm{r}(B^{-*1,-*(k+2)}) = \mathrm{r}(A') + \mathrm{r}(A'')$ □

Teorema 3.3.2. *Neka je $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \alpha & A \end{bmatrix}$ matrica iz skupa $\mathcal{B}_{k+1}$, pri čemu je $A \in \mathcal{B}_k$. Neka su $q \geq 0$, $r \geq 0$, $s > 0$, i neka je*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \beta & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \\ \alpha & A & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & I_r & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & I_q & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & I_s \end{bmatrix}$$

pri čemu je $q + r + s = 4$, odnosno $B \in \mathcal{B}_{k+5}$. Neka je $a = \mathrm{r}\begin{bmatrix} \alpha & A \end{bmatrix} - \mathrm{r}(A)$, $b = \mathrm{r}\begin{bmatrix} \beta \\ A \end{bmatrix} - \mathrm{r}(A)$. Tada važi

$$\mathrm{r}(B) = 2^4\,\mathrm{r}(A) + 2^r a + 2^{q+r} b.$$

Dokaz. Neka je

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 1 \\ \alpha & A & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz Teoreme 3.2.36 imamo $\mathrm{r}(B) = 2^4\,\mathrm{r}(A) + 2^r a + 2^{q+r} b + c$, gde je $c = \mathrm{r}(C) - \mathrm{r}(A') - \mathrm{r}(A'')$. Iz prethodne teoreme imamo $\mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(A') + \mathrm{r}(A'')$, odakle sledi tvrđenje teoreme. $\square$

Neka je $\mathcal{V}_n$ oznaka za skup svih vektora dužine n sa vrednostima iz $\{0,1\}$, odnosno $\mathcal{V}_n = \{x \colon x \in \{0,1\}^n\}$.

Definicija 3.3.3. *Neka su $x' = (a'_1 \ \cdots \ a'_n)$ i $x'' = (a''_1 \ \cdots \ a''_n)$ vektori iz $\mathcal{V}_n$. Za x' kažemo da je unutar x'', u oznaci $x' \preceq x''$, ukoliko za svako $i \in \{1,\dots,n\}$ za koje je $a'_i = 1$ važi $a''_i = 1$. Ukoliko je $x' \preceq x''$ i postoji j iz skupa $\{1,\dots,n\}$ za koji je $a'_j = 0$ i $a''_j = 1$ tada koristimo oznaku $x' \prec x''$.*

Drugim rečima, za x' i x'' za koje je $x' \preceq x''$, važi $x' \vee x'' = x''$.

Lema 3.3.4. *Neka je $C = \begin{bmatrix} \beta \\ A \end{bmatrix}$, $\mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(A) + a$, $A_1 = \begin{bmatrix} A & D \\ \boldsymbol{0} & B \end{bmatrix}$ i neka je $C_1 = \begin{bmatrix} \beta & \boldsymbol{1} \\ A & D \\ \boldsymbol{0} & B \end{bmatrix}$, pri čemu matrica $B \in \mathcal{B}_{n,k}$ ne sadrži* 0 *kolone. Tada važi $\mathrm{r}(C_1) = \mathrm{r}(A_1) + a$.*

Dokaz. Neka je $R' = \mathrm{R}(C) \setminus \mathrm{R}(A)$, i neka je $R'' = \mathrm{R}(C_1) \setminus \mathrm{R}(A_1)$. Potrebno je da dokažemo da važi $|R'| = |R''|$. Neka je γ' proizvoljan vektor iz R'. Tada $\gamma' \notin \mathrm{R}(A)$ i postoji vektor $\delta' \in \mathrm{R}(A)$ takav da važi $\beta \vee \delta' = \gamma'$. Pošto $\gamma' \notin \mathrm{R}(A)$, imamo da $(\gamma' \ 1_k) \notin \mathrm{R}(A_1)$. Dalje, imamo da $(\delta' \ x) \in \mathrm{R}(A_1)$ za neko $x \in \{0,1\}^k$, i stoga $(\gamma' \ 1_k) \in \mathrm{R}(A_1)$. Pošto je γ' proizvoljan vektor iz R', sledi da je $|R'| \le |R''|$. Sada dokazujemo da važi i $|R'| \ge |R''|$. Neka je γ'' proizvoljan vektor iz R''. Tada $\gamma'' \notin \mathrm{R}(A_1)$ i postoji vektor $\delta'' \in \mathrm{R}(A_1)$ takav da važi $(\beta \ 1_k) \vee \delta'' = \gamma''$. Dakle, važi $\gamma'' = (\gamma' \ 1_k)$ za neko γ'. Pretpostavimo sada da $(\gamma' \ \epsilon) \in \mathrm{R}(A_1)$, $\epsilon \ne 1_k$. Pošto je matrica B bez 0 kolona, to znači da $(\gamma' \ 1_k) \in \mathrm{R}(A_1)$, što je kontradikcija. Dakle, $(\gamma' \ \epsilon) \notin \mathrm{R}(A_1)$ za bilo koje $\epsilon \in \mathcal{V}_k$, za koje je $\epsilon \ne 1_k$, i stoga $\gamma' \notin \mathrm{R}(A)$. Odatle sledi $\gamma' \in R'$ i $|R'| \ge |R''|$, odnosno $|R'| = |R''|$, čime je dokaz kompletiran. $\square$

Definicija 3.3.5. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$, $\gamma \in \mathcal{V}_n$, pri čemu $\gamma \notin \mathrm{R}(A)$. Ukoliko za $\beta \in \mathcal{V}_n$, za koje je $\gamma \preceq \beta$, važi $\mathrm{r}\begin{bmatrix} A \\ \beta \end{bmatrix} = \mathrm{r}(A) + 1$, tada za β kažemo da je* 1*-doprinos u odnosu na matricu A i vektor γ, u oznaci $\beta \in A^1_\gamma$.*

Lema 3.3.6. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$, $\gamma \in \mathcal{V}_n$, pri čemu $\gamma \notin \mathrm{R}(A)$. Tada postoji vektor $\beta \in \mathcal{V}_n$ za koji je $\beta \in A^1_\gamma$.*

Dokaz. Neka je $R' = \mathrm{R}\begin{bmatrix} A \\ \gamma \end{bmatrix} \setminus \mathrm{R}(A)$. Pretpostavimo suprotno tvrđenju leme da za svako $\beta \in R'$ važi $\mathrm{r}\begin{bmatrix} A \\ \beta \end{bmatrix} = \mathrm{r}(A) + j$, gde je $j > 1$. Neka je β vektor iz R' za koji je vrednost j u prethodnom izrazu najmanja moguća. Dalje, neka je $R'' = \mathrm{R}\begin{bmatrix} A \\ \beta \end{bmatrix} \setminus \mathrm{R}(A)$. Pošto je doprinos vektora β prostoru vrsta matrice A veća od 1, postoji vektor β' takav da $\beta' \in R''$ i $\beta \prec \beta'$. Dakle, imamo da je $\mathrm{r}\begin{bmatrix} A \\ \beta' \end{bmatrix} = \mathrm{r}(A) + i$, pri čemu je $j > i > 0$. Pošto $\beta' \in R'$, ovo je kontradikcija, čime je dokaz završen. $\square$

Definicija 3.3.7. *Za matricu $A \in \mathcal{B}_n$ kažemo da ima $2,3$-konfiguraciju ukoliko postoje $\beta' \in \mathcal{B}_{1,n}$, $\beta'' \in \mathcal{B}_{1,n}$ i $\alpha \in \mathcal{B}_{n,1}$ takvi da važi* $\mathrm{r}\begin{bmatrix} \beta' \\ A \end{bmatrix} = \mathrm{r}(A) + 3$, $\mathrm{r}\begin{bmatrix} \beta'' \\ A \end{bmatrix} = \mathrm{r}(A) + 2$ *i* $\mathrm{r}\begin{bmatrix} \alpha & A \end{bmatrix} = \mathrm{r}(A) + 3$.

Teorema 3.3.8. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$, $\beta \in \mathcal{B}_{1,n}$, $\alpha \in \mathcal{B}_{n,1}$, gde $\beta \notin \mathrm{R}(A)$, $\beta' \in A^1_\beta$ i $\alpha^T \notin \mathrm{R}(A^T)$, $(\alpha')^T \in (A^T)^1_\alpha$. Dalje, neka je*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & \beta' & 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & \beta & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \beta & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha' & \alpha & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu su x, a_1, b_1, c_1, a_2 i b_2 vrednosti iz skupa $\{0,1\}$.

Tada, za vrednosti a_1, b_1 i c_1 date u istom redu gde i k_1 u Tabeli 3.4 važi $\mathrm{r}(D) = \mathrm{r}(C) + k_1$, dok za vrednosti a_2 i b_2 date u istom redu gde i k_2 u Tabeli 3.5 važi $\mathrm{r}(E) = \mathrm{r}(C) + k_2$.

Tabela 3.4: Popis vrednosti k_1, a_1, b_1 i c_1.

k_1	a_1	b_1	c_1
0	1	1	1
1	1	1	0
2	0	1	0
3	1	0	0

Tabela 3.5: Popis vrednosti k_2, a_2 i b_2.

k_2	a_2	b_2
0	1	1
1	1	0
3	0	0

Dokaz. Prvo, razmotrimo vrednost $\mathrm{r}(D)$ u odnosu na $\mathrm{r}(C)$, a_1, b_1 i c_1. Jasno je da važi $\mathrm{R}(C) \subseteq \mathrm{R}(D)$. Neka je R'=$\mathrm{R}(D) \setminus \mathrm{R}(C)$. Pošto $\beta \notin \mathrm{R}(A)$ i $\beta' \in A^1_\beta$ imamo da $(1\ \beta'\ 0\ 0\ 1\ 1) \in \mathrm{R}(C)$, odnosno $(1\ \beta'\ 0\ 0\ 1\ 1) \notin R'$. Takođe, imamo $(1\ \gamma\ \delta) \in \mathrm{R}(C)$ za svako $\gamma \in \mathcal{V}_n$ za koje je $\beta' \prec \gamma$, i za svako $\delta \in \mathcal{V}_4$. Dakle, svi vektori u R' su oblika $(1\ \beta'\ 1\ \epsilon)$, gde je $\epsilon \in \mathcal{V}_3$, $\epsilon \neq (y\ 1\ 1)$, $y \in \{0, 1\}$. Zbog toga:

- za $k_1 = 0$ imamo $R' = \emptyset$,
- za $k_1 = 1$ imamo $R' = \{(1\ \beta'\ 1\ 1\ 1\ 0)\}$,
- za $k_1 = 2$ imamo $R' = \{(1\ \beta'\ 1\ 0\ 1\ 0), (1\ \beta'\ 1\ 1\ 1\ 0)\}$,
- za $k_1 = 3$ imamo $R' = \{(1\ \beta'\ 1\ 1\ 0\ 0), (1\ \beta'\ 1\ 1\ 1\ 0), (1\ \beta'\ 1\ 1\ 0\ 1)\}$.

Odavde sledi tvrđenje teoreme za matricu D.

Razmotrimo sada vrednost $\mathrm{r}(E)$ u odnosu na $\mathrm{r}(C)$, a_2, b_2 i x. Pošto je $\mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(C^T)$ i $\mathrm{r}(E) = \mathrm{r}(E^T)$ imamo da je $\mathrm{r}(E) - \mathrm{r}(C) = \mathrm{r}(E^T) - \mathrm{r}(C^T)$. Neka je $R'' = \mathrm{R}(E^T) \setminus \mathrm{R}(C^T)$. Pošto $\alpha^T \notin \mathrm{R}(A^T)$ i $(\alpha')^T \in (A^T)^1_\alpha$, analogno slučaju za $\mathrm{R}(D)$ dobijamo:

- za $k_2 = 0$ imamo $R'' = \emptyset$,
- za $k_2 = 1$ imamo $R'' = \{(1\ (\alpha')^T\ 1\ 1\ 1\ 0)\}$,

- za $k_2 = 3$ imamo $R'' = \{(1\,(\alpha')^T\,1\,1\,0\,0), (1\,(\alpha')^T\,1\,1\,1\,0), (1\,(\alpha')^T\,1\,1\,0\,1)\}$.

Odavde sledi tvrđenje za matricu E, čime je kompletiran dokaz teoreme. $\square$

Teorema 3.3.9. *Neka je $A \in \mathcal{B}_n$ matrica koja ima $2,3$-konfiguraciju. Tada za svako $k \in \{0, \dots, 15\}$ postoji matrica $B_k \in \mathcal{B}_{n+5}$, takva da B_k ima $2,3$-kofiguraciju, i $\mathrm{r}(B_k) = 16\,\mathrm{r}(A) + k$.*

Dokaz. Za svako $k \in \{0, \dots, 15\}$, vrednost k možemo predstaviti kao $k = c_1 + 4c_2$, gde su $c_1, c_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$. Neka je matrica $C \in \mathcal{B}_{n+5}$ data sa

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \alpha & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gde je $x \in \{0, 1\}$, $\alpha \in \mathcal{B}_{n,1}$, $\beta \in \mathcal{B}_{1,n}$, i neka je $a = \mathrm{r}\begin{bmatrix}\alpha & A\end{bmatrix} - \mathrm{r}(A)$, $b = \mathrm{r}\begin{bmatrix}\beta \\ A\end{bmatrix} - \mathrm{r}(A)$. Iz Teoreme 3.3.2 imamo da je $\mathrm{r}(C) = 16\,\mathrm{r}(A) + 2^x a + 4b$. Pošto matrica A ima $2,3$-konfiguraciju, postoji α takvo da vrednost a bude bilo koja vrednost iz skupa $\{1, 3\}$, i postoji β takvo da vrednost b bude bilo koja vrednost iz skupa $\{1, 2, 3\}$. Da bismo dobili $c_1 = 0$ za α biramo bilo koji vektor iz $\mathrm{C}(A)$ a za x biramo 1. Da bismo dobili $c_1 = 2$ stavljamo da je $x = 0$, dok za α biramo vektor za koji je $a = 1$. Za $c_1 \in \{1, 3\}$ stavljamo da je $x = 1$, a za α biramo vektor za koji je $a = c_1$. Da bismo dobili $c_2 = 0$ za β biramo bilo koji vektor iz $\mathrm{R}(A)$. Za ostale vrednosti c_2, odnosno za $c_2 \in \{1, 2, 3\}$ za β biramo vektor za koji je $b = c_2$. Na taj način dobijamo da je $\mathrm{r}(C) = 16\,\mathrm{r}(A) + k$.

Potrebno je još da dokažemo da, bez obzira na odabrane vektore α i β, postoje $\gamma \in \mathcal{B}_{n+5,1}$, i $\delta_j \in \mathcal{B}_{1,n+5}$, $j \in \{2, 3\}$, takvi da $\mathrm{r}\begin{bmatrix}\gamma & C\end{bmatrix} - \mathrm{r}(C) = 3$, $\mathrm{r}\begin{bmatrix}\delta_j \\ C\end{bmatrix} - \mathrm{r}(C) = j$.

Prvu vrstu matrice D date u Teoremi 3.3.8 biramo na sledeći način. U zavisnosti da li smo za β odabrali vrednost tako da je b veće od ili jednako nuli, imamo dva slučaja:

1. $b > 0$. Za $\beta' \in \mathcal{B}_{1,n}$ biramo vektor za koji je $\beta' \in A^1_\beta$ (prema Lemi 3.3.6 takav vektor uvek postoji), dok za a_1, b_1 i c_1 biramo vrednosti za koje je k_1 jednako j. Prema Teoremi 3.3.8 imamo da je $\mathrm{r}(D) = \mathrm{r}(A) + j$.

2. $b = 0$. Za $\beta' \in \mathcal{B}_{1,n}$ biramo vektor za koji je $\mathrm{r}\begin{bmatrix}\beta' \\ A\end{bmatrix} - \mathrm{r}(A) = j$, dok svakom od a_1, b_1 i c_1 dodeljujemo 1. Prema Lemi 3.3.4 imamo da je $\mathrm{r}(D) = \mathrm{r}(A) + j$, čime je dokaz ovog slučaja kompletiran.

Prvu kolonu matrice E date u Teoremi 3.3.8 biramo na sledeći način. U zavisnosti da li smo za α odabrali vrednost tako da je a veće od ili jednako nuli, imamo dva slučaja:

1. $a > 0$. Za $\alpha' \in \mathcal{B}_{n,1}$ biramo vektor za koji je $(\alpha')^T \in (A^T)^1_\beta$ (prema Lemi 3.3.6 takav vektor uvek postoji), dok stavljamo $a_2 = 0$ i $b_2 = 0$ tako da je $k_2 = 3$. Prema Teoremi 3.3.8 imamo da je $\mathrm{r}(E) = \mathrm{r}(A) + 3$.

2. $a = 0$. Za $\alpha' \in \mathcal{B}_{n,1}$ biramo vektor za koji je $\mathrm{r}\begin{bmatrix}\alpha' & A\end{bmatrix} - \mathrm{r}(A) = 3$, dok svakom od a_2 i b_2 dodeljujemo 1. Prema Lemi 3.3.4 imamo da je $\mathrm{r}(E^T) = \mathrm{r}(A^T) + 3$, odakle sledi da je $\mathrm{r}(E) = \mathrm{r}(A) + 3$.

Dakle, matrica B_k ima $2,3$-kofiguraciju, čime je dokaz teoreme kompletiran. $\square$

Teorema 3.3.10. *Pretpostavimo da postoji pozitivna celobrojna vrednost k i matrice A_i, $k \leq i < 16k$, gde za svako i važi:*

1. $\mathrm{r}(A_i) = i$,

2. $\dim(A_i) \leq \frac{5}{4}\log_2 i$,

3. *matrica A_i ima $2,3$-konfiguraciju.*

Tada za svako $n \geq k$ postoji matrica A_n za koju $\mathrm{r}(A_n) = n$, $\dim(A_n) \leq \frac{5}{4}\log_2 n$, i matrica A_n ima $2,3$-konfiguraciju.

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po n. Bazni slučaj kada je $n \in \{k, \ldots, 16k-1\}$ je zadovoljen, prema pretpostavci teoreme. Pretpostavimo sada da je $n \geq 16k$ i da je tvrđenje zadovoljeno za svaki prirodan broj m manji od n. Broj n se može predstaviti kao $n = 16m+s$ gde je $m \geq k$ i $0 \leq s \leq 15$. Tada, prema induktivnoj pretpostavci, postoji matrica A_m, takva da je $\mathrm{r}(A_m) = m$, $\dim(A_m) \leq \frac{5}{4}\log_2 m$, i matrica A_m ima $2,3$-konfiguraciju. Prema Teoremi 3.3.9 postoji matrica A_n takva da je $\mathrm{r}(A_n) = n$, $\dim(A_n) = \dim(A_m)+5$, i matrica A_n ima $2,3$-konfiguraciju. Sada, imamo

$$\begin{aligned}\dim(A_n) = \dim(A_m) + 5 \leq \frac{5}{4}\log_2 m + 5 = \\ \frac{5}{4}(\log_2 m + 4) = \frac{5}{4}(\log_2 m + \log_2 16) = \\ \frac{5}{4}(\log_2 16m) \leq \frac{5}{4}\log_2 n\end{aligned}$$

Time je kompletiran dokaz teoreme. $\square$

Teorema 3.3.11. *Neka je $\mathcal{A}_n$ skup celobrojnih vrednosti k za koje postoji matrica $A_k \in B_n$ takva da važi $\mathrm{r}(A_k) = k$. Neka je $l = \frac{4}{5}n$. Tada za svaku celobrojnu vrednost k iz intervala $[1, 2^l]$ postoji matrica $A_k \in \mathcal{B}_n$ za koju je $\mathrm{r}(A_k) = k$.*

Dokaz. U Prilogu B, Tabeli B.1 nalazi se spisak matrica A_i za $11 \leq i \leq 175$, za koje je data $2,3$-konfiguracija, i za koje važi $\mathrm{r}(A_i) = i$, $\dim(A_i) \leq \frac{5}{4}\log_2 i$. Dakle, prema prethodnoj teoremi, za svako $i \geq 11$ postoji matrica A_i za koju je $\mathrm{r}(A_i) = i$ i $\dim(A_i) \leq \frac{5}{4}\log_2 i$. Prema tome, za svaku dimenziju n i za svako m za koje je $n \leq \frac{5}{4}\log_2 m$, postoji matrica $\mathrm{r}(A_m)$, $\dim(A_m) \leq n$. Odavde imamo da je $2^n \leq 2^{\frac{5}{4}\log_2 m}$, odnosno $2^{\frac{4}{5}n} \leq m$. Dakle, za celobroju vrednost $a_n > 10$ za koju ne postoji matrica $A \in \mathcal{B}_n$ za koju je $\mathrm{r}(A) = n$ mora biti $a_n > 2^{\frac{4}{5}n}$. Lako je utvrditi da je ova nejednakost zadovoljena i kada je vrednost $a_n \leq 10$, i time je dokaz teoreme kompletiran. $\square$

Literatura

[1] G. Chartrand, P. Zhang, *Chromatic Graph Theory.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2009.

[2] L. Addario-Berry, R. E. L. Aldred, K. Dalal, and B. A. Reed, *Vertex coloring edge partitions.* Journal of Combinatorial Theory, Series B, 94: 237-244, 2005.

[3] Z. Zhang, L. Liu, J. Wang, *Adjacent strong edge coloring of graphs*, Appl. Math. Lett. **15** (2002) pp. 623–626.

[4] S. Akbari, H. Bidkhori, N. Nosrati, *r-strong edge colorings of graphs*, Discrete Math. **306** (2006) pp. 3005–3010.

[5] L. Zhang, W. Wang, K. W. Lih, *An improved upper bound on the adjacent vertex distinguishing chromatic index of a graph*, Discrete Appl. Math. **162** (2014) pp. 348–354.

[6] P. N. Balister, E. Gyori, J. Lehel, R. H. Schelp, *Adjacent vertex distinguishing edge-colorings*, SIAM J. Discrete Math. **21** (2007) pp. 237–250.

[7] J. Petersen, *Die Theorie der regularen Graphen*, Acta Math. **15** (1891) pp. 193–220.

[8] Z. Zhang, X. Chen, J. Li, B. Yao, X. Lu, J. Wang, *On the adjacent vertex distinguishing total coloring of graphs*, Sci. China Ser. A **48** (3) (2005) pp. 289–299.

[9] D. Huang, W. Wang, C. Yan, *A note on the adjacent vertex distinguishing total chromatic number of graphs*, Discrete Math. **312**(24)(2012) pp. 3544–3546.

[10] V. G. Vizing, *On an estimate of the chromatic class of a p-graph* (Russian), Diskret. Analiz. **3** (1964) pp. 25–30.

[11] R. L. Brooks, *On coloring the nodes of a network*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **37** (1941) pp. 194–197.

[12] Y. Wang, W. Wang, J. Huo, *Some bounds on the neighbor-distinguishing index of graphs*, Discrete Math. **338** (2015) pp. 2006–2013.

[13] Y. Lu, J. Li, R. Luo, Z. Miao, *Adjacent vertex distinguishing total coloring of graphs with maximum degree 4*, Discrete Math. **340** (2017) pp. 119–123.

[14] M. Kalkowski, M. Karoński, F. Pfender *Vertex-coloring edge-weightings: Towards the 1-2-3-conjecture*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **100** (2010) pp. 347–349.

[15] M. Karoński, T. Łuczak, A. Thomason, *Edge weights and vertex colours*, J. Combin. Theory Ser. B **91** (2004) pp. 151–157.

[16] P. Zhang, *Color-Induced Graph Colorings*, Springer, New York (2015).

[17] N. Paramaguru, R. Sampathkumar, *Graphs with vertex-coloring and detectable 2-edge-weighting*, AKCE J. Graphs Comb. **13** (2016) pp. 146–156.

[18] E. Flandrin, H. Li, A. Marczyk, J.-F. Sacle, M. Wozniak, *A note on neighbor expanded sum distinguishing index*, Discuss. Math. Graph Theory **37** (2017) 29–37.

[19] P. Marković, *An Attempt at Frankl's Conjecture*, Publ. Math. Inst. **81(95)** (2007), pp. 29–43.

[20] I. Bošnjak, P. Marković, *The 11-element case of Frankl's conjecture*, The Electronic J. Combin. **15** (2008) #R88.

[21] H. Bruhn, O. Schaudt, *The Journey of the Union-Closed Sets Conjecture*, Graphs and Combinatorics **31** (2015), pp. 2043–2074.

[22] R. Morris, *FC-families and improved bounds for Frankl's conjecture*, European J. Combin. **27**(2006), no. 2, pp. 269–282.

[23] B. Poonen, *Union-Closed Families*, J. Combin. Theory Ser. A **59** (1992), no. 2, pp. 253–268.

[24] T. P. Vaughan, *Families implying the Frankl conjecture*, Europ. J. Combin. **23** (2002), pp. 851–860.

[25] F. Marić, M. Živković, B. Vučković, *Formalizing Frankl's Conjecture: FC-Families*, Intelligent Computer Mathematics, Volume **7362** (2012), pp 248-263.

[26] G. Lo Faro, *Union-closed sets conjecture: Improved bounds*, J. Combin. Math. Combin. Comput. **16** (1994), pp. 97–102.

[27] D. G. Sarvate, J. C. Renaud, *On the union-closed sets conjecture*, Ars Combin. **27** (1989), pp. 149–154.

[28] I. Roberts, J. Simpson, *A note on the union-closed sets conjecture*, Australas. J. Combin. **47** (2010), pp. 265–267.

[29] W. Gao, H. Yu, *Note on the union-closed sets conjecture*, Ars Combin. **49** (1998), pp. 280–288.

[30] K. H. Kim, *Boolean matrix theory and its applications*, Academic Press, London, 1976.

[31] J. Konieczny, *On Cardinalities of Row Spaces of Boolean Matrices*, Semigroup Forum **44** (1992), pp. 393–402.

[32] W. Li, M. C. Zhang, *On Konieczny's Conjecture of Boolean matrices*, Semigroup Forum **50** (1995), pp. 37–58

[33] S. Hong, *Gaps in the Cardinalities of Row Spaces of Boolean Matrices*, Semigroup Forum **56**, (1998) pp. 158–186.

[34] H. Yu, *On Distributions of Cardinalities of Row Spaces of Boolean Matrices*, Semigroup Forum **57**, (1998) pp. 321–330.

[35] S. Hong, *Distribution of Cardinalities of Row Spaces of Boolean Matrices of Order n*, Southeast Asian Bull. Math. **24** (2000), pp. 51-64.

[36] M. Zhang, S. Hong, H. Kan, *On the Cardinalities of the Row Spaces of Non-full Rank Boolean Matrices* Semigroup Forum **59**, (1999) pp. 152–154.

[37] M. Breen, D. Hume, *On the cardinalities of row spaces of Boolean matrices*, Semigroup Forum **62** (2001), pp. 331–332.

[38] M. Živković, *Row Space Cardinalities*, Semigroup Forum, Vol. **73** (2006), pp. 404–426.

[39] N. J. A. Sloane, editor, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, published electronically at https://oeis.org

Prilog A

Tabele za FC i *Non*FC-familije

Tabela A.1: Težine dodeljene FC-familijama u dokazu teoreme.

i	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	1	1	1	0	0
4	3	3	2	2	2	0
5	6	5	5	3	3	0
6	2	2	2	2	1	0
7	25	21	15	15	10	10
8	28	28	12	30	19	19
9	45	38	35	35	32	24
10	1	1	1	1	1	1
11	25	20	20	20	20	16
12	3	3	3	2	2	2
13	10	9	7	7	7	7
14	92	78	70	67	66	66
15	1	1	1	1	1	0
16	112	112	104	96	96	88
17	11	11	11	11	9	4
18	123	115	115	105	70	85
19	115	100	105	100	100	70
20	113	106	76	100	100	86

21	111	111	112	112	67	82
22	1062	1070	1058	853	998	770
23	118	112	115	115	109	70
24	118	120	96	113	109	112
25	1178	963	1171	1171	1088	870
26	120	120	98	113	113	110
27	1104	972	1035	1035	1035	1035
28	1	1	1	1	1	1
29	115	115	117	110	110	85
30	118	104	117	109	110	100
31	1150	1055	1055	1055	1055	400
32	16	14	14	9	7	7
33	126	126	168	84	134	118
34	1334	1334	1779	889	1398	1272
35	147	147	166	145	112	92
36	147	147	164	150	100	100
37	207	190	195	135	97	97
38	1345	1145	830	1063	966	966
39	147	147	137	123	112	102
40	150	150	136	116	90	90
41	141540	134079	109721	111905	111905	102326
42	12	13	13	10	7	5
43	12	12	12	5	7	7
44	13	13	13	8	8	0
45	119	116	101	94	63	74
46	1410	1247	1400	1290	1180	1180
47	131	131	124	116	116	91
48	124	119	108	104	81	73
49	122	117	109	94	92	79
50	108	109	105	95	85	52
51	107	107	99	90	90	62
52	107	107	99	90	90	60
53	1120	1120	1084	974	752	679
54	94	94	92	76	75	63
55	115	115	110	91	91	71
56	126	119	120	93	60	73

57	127	120	120	93	65	65
58	135	125	125	100	85	40
59	138	131	129	104	88	30
60	122	105	98	77	77	77
61	100	97	84	72	66	45
62	102	97	95	63	63	31
63	100	93	91	65	65	42
64	1001	1001	1063	966	902	902
65	118	105	107	95	75	75
66	115	101	85	73	73	73
67	121	114	114	61	75	75
68	121	114	114	93	58	57
69	121	114	114	75	88	57
70	133	114	105	91	84	62
71	128	120	95	93	74	65
72	156	134	111	121	100	100
73	1542	1332	1146	1093	1082	985
74	125	125	125	113	93	86
75	123	125	120	110	110	48
76	123	123	122	109	86	85
77	120	120	114	98	98	98
78	1183	1122	914	1018	931	710
79	93	79	87	75	75	60
80	114	114	73	100	91	91
81	114	114	90	93	80	73
82	100	92	92	80	69	62
83	1298	1125	1038	845	888	670
84	1022	970	780	880	880	500
85	122	98	98	94	85	56
86	108	108	85	97	76	55
87	120	120	80	95	103	90
88	125	125	99	105	88	88
89	122	122	81	113	91	81
90	122	122	81	114	93	81
91	127	105	118	115	92	84
92	127	105	118	115	92	82

93	127	125	118	115	90	66
94	125	105	118	105	100	90
95	129	118	123	108	89	89
96	150	130	120	115	80	55
97	152	131	120	110	105	55
98	154	130	123	102	78	78
99	121	108	76	70	70	70
100	118	98	82	81	65	52
101	98	95	82	81	65	33
102	950	943	800	630	650	650
103	120	120	80	96	80	77
104	118	110	86	82	82	54
105	170	139	146	121	120	90
106	172	148	139	98	121	108
107	150	120	120	118	118	55
108	13011	10431	10431	9240	9240	9153
109	80	80	83	83	77	61
110	80	80	50	76	76	45
111	80	70	75	73	75	45
112	80	80	80	73	74	48
113	173	150	128	133	122	91
114	169	136	135	131	121	108
115	149	132	146	136	136	107
116	125	110	124	113	113	95
117	140	140	140	140	100	87
118	130	115	100	100	40	0
119	1453	1453	1454	1454	1343	607
120	1688	1488	1326	1050	1000	722
121	1688	1488	1300	1050	770	770
122	167	147	104	131	100	70
123	168	148	104	132	100	70
124	168	149	110	131	100	57
125	160	140	140	100	65	65
126	160	150	110	120	65	65
127	135	135	120	110	65	65
128	150	136	110	110	60	60

129	140	123	110	86	72	72
130	142	125	111	88	98	50
131	110	110	110	110	70	78
132	150	134	115	110	65	65
133	150	140	130	110	60	60
134	178	165	147	147	49	49
135	181	163	140	132	73	73
136	181	159	142	113	93	93
137	184	163	141	134	92	59
138	180	180	150	150	48	48
139	158	158	158	158	120	100
140	160	160	160	160	132	82
141	1630	1144	1144	1301	1301	1040
142	185	133	105	150	110	95
143	165	135	100	155	117	58
144	166	119	95	135	69	100
145	165	130	120	130	120	0
146	151	110	110	140	95	72
147	149	110	110	102	125	88
148	110	110	145	107	125	90
149	145	125	90	107	110	110
150	146	126	100	90	109	109
151	150	115	86	121	90	55
152	146	103	83	107	109	51
153	124	88	88	114	85	53
154	130	88	88	105	110	51
155	131	86	86	122	106	42
156	100	100	140	65	118	102
157	10210	10210	14207	6728	12001	10200
158	101	101	140	130	67	90
159	155	137	122	130	94	72
160	170	121	121	144	142	72
161	16	12	12	12	12	0
162	153	125	109	125	125	79
163	1814	1162	1162	1632	1510	510
164	175	135	115	155	127	53

165	185	140	129	148	148	40
166	10	6	6	9	9	2
167	193	155	136	108	156	137
168	192	160	160	128	128	128
169	196	154	140	154	140	100
170	202	165	140	165	140	40
171	2181	1713	1560	1713	1003	1560
172	215	154	123	161	149	96
173	213	155	124	162	144	92
174	64	43	43	58	48	48
175	18196	14552	10916	19504	18353	16844
176	187	166	184	187	152	132
177	150	150	174	195	183	149
178	145	145	131	134	115	115
179	1	1	1	1	1	1
180	130	130	130	140	140	114
181	137	119	109	152	152	137
182	1392	1212	1102	1610	1531	1250
183	150	150	139	147	118	88
184	143	124	114	168	157	143
185	174	162	162	124	124	82
186	162	135	135	146	126	82
187	126	126	84	172	174	148
188	148	118	98	168	144	104
189	138	110	106	134	130	130
190	137	111	111	141	115	115
191	131	121	104	136	128	128
192	143	115	86	153	145	117
193	1090	1090	1260	1402	1402	932
194	115	105	123	128	127	112
195	102	102	121	136	128	113
196	113	113	75	121	121	113
197	120	120	97	121	121	98

Tabela A.2: Popis familija $\mathcal{G}_i$ zajedno sa koeficijentima c_i koje se koriste u dokazu da je familija $\mathcal{F}_j$ *Non*FC-familija.

c_i	$\mathcal{G}_i$
	$\mathcal{F}_1$
1384	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 13456, 1356, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1013	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
721	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
466	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
466	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
495	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
	$\mathcal{F}_2$
352062	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 1346, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
189265	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
189265	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
184189	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}

123548	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
123548	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_3$	
2187	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1245, 12456, 13456, 1346, 1356, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1148	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1148	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
1148	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
796	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
796	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_4$	
1078	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2346, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
858	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
866	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2346, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

858	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
622	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
377	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_5$	
111	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 2356, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
105	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
105	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2356, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
105	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2356, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
111	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 2356, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
47	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_6$	
611	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2346, 2356, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
611	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2346, 2356, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
356	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}

356	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 2356, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
356	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
356	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_7$	
58415	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2356, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
47546	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
47546	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 2356, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
34980	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 12456, 13456, 1346, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
34980	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 2356, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
33285	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2356, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_8$	
75	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
75	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
75	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}

75	{$\emptyset$, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
56	{$\emptyset$, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
56	{$\emptyset$, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 12456, 13456, 1356, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_9$	
111	{$\emptyset$, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
111	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
111	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
111	{$\emptyset$, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
81	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
81	{$\emptyset$, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{10}$	
132	{$\emptyset$, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2346, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
132	{$\emptyset$, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1245, 12456, 13456, 1346, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

132	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
132	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2346, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
61	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
61	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{11}$	
7265	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1245, 12456, 13456, 1346, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
7182	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
7182	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
4976	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
5255	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
3357	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{12}$	
49	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

49	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 12456, 1246, 13456, 1356, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
34	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
34	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
35	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
35	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{13}$	
138	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
138	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
138	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
138	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
395	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 12456, 1246, 1256, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{14}$	
1108	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}

1197	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1197	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 12456, 1246, 13456, 1356, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
527	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
854	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
854	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{15}$	
2434	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 2356, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
2259	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 12456, 1256, 13456, 1356, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1594	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2356, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1594	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2356, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2265	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 2356, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
1040	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{16}$	

792	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
792	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
639	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
448	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
448	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
266	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{17}$	
372	{∅, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1245, 12456, 1345, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
292	{∅, 1, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
292	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
292	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 1345, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
292	{∅, 1, 12, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 1345, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

39	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 125, 13, 134, 1345, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{18}$	
1405	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2346, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 346, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1945	{$\emptyset$, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
567	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 346, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
1945	{$\emptyset$, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
791	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 125, 13, 134, 1346, 14, 2, 23, 234, 2346, 24, 3, 34, 346, 4}
155	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 134, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{19}$	
430	{$\emptyset$, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13456, 1356, 1456, 156, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
490	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 1456, 146, 156, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
490	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 1456, 15, 156, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}

187	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
202	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
202	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{20}$	
322	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
142	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
945	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
51	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
199	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 14, 145, 1456, 15, 2, 24, 245, 2456, 25, 4, 45, 456, 5}
$\mathcal{F}_{21}$	
252	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2356, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 356, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
672	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
102	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 2356, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 356, 4, 45, 5}

102	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 2356, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 356, 36, 4, 46, 6}
121	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{22}$	
230	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
230	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
186	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
57	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
97	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
97	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{23}$	
3460	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
3460	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

2772	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1496	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
1441	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
733	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{24}$	
298	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1345, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
242	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
242	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 1345, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
307	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 1236, 1245, 12456, 126, 13, 1345, 13456, 136, 16, 2, 23, 23456, 236, 26, 3, 36, 6}
29	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{25}$	
223	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2346, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

189	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2346, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
145	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
123	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
113	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
68	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{26}$	
176	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
151	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
151	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
71	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
71	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
71	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{27}$	

3493	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
3089	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1744	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
1677	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
3273	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
888	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{28}$	
2404	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1346, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2169	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1152	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
1152	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
2253	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

609	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{29}$	
1320	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1398	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
752	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
752	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
699	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
1086	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{30}$	
4100	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2356, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
4100	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2356, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
3388	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1717	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 2356, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}

1608	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 2356, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
895	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{31}$	
642	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
642	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
514	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
283	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
135	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
248	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{32}$	
2759	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2759	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

2224	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1155	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
1155	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
521	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{33}$	
1167	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2346, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1167	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2346, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
959	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
488	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
472	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
221	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{34}$	
55	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2356, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

55	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2356, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
54	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
32	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 2356, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
20	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
30	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 2356, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{35}$	
66	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
70	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
70	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
25	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
80	{∅, 1, 12, 123, 1234, 123456, 12356, 124, 12456, 1256, 13, 134, 13456, 14, 2, 23, 234, 23456, 24, 3, 34, 3456, 4}
$\mathcal{F}_{36}$	

545	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2346, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
545	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2346, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
524	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
333	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
281	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
167	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
	$\mathcal{F}_{37}$
1064	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1064	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
995	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
656	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}

574	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
327	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{38}$	
1346	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1196	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
697	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
1261	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
652	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
387	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{39}$	
134	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
119	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

126	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
44	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
67	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
67	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{40}$	
3297	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
3297	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2645	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2031	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
2021	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
1895	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{41}$	
21233	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2346, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

18040	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
18040	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2346, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
10580	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
6074	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
6074	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{42}$	
131	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1345, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
118	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 1345, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
96	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
162	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 1236, 1245, 12456, 126, 13, 1345, 13456, 136, 16, 2, 23, 23456, 236, 26, 3, 3456, 36, 6}
21	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{43}$	

531	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1345, 13456, 1346, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
380	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 1345, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
292	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
229	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
139	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
51	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{44}$	
382	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
269	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
298	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
288	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
260	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}

177	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
$\mathcal{F}_{45}$	
267	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1356, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
240	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
130	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
249	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
122	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
75	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{46}$	
2709	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2370	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1440	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
2521	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

745	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
1242	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{47}$	
446	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
446	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
359	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
275	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
275	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
237	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{48}$	
2294	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13456, 1356, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1307	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1307	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

980	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
980	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
249	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{49}$	
275	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
275	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
259	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
171	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
154	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
98	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{50}$	
771	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

653	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
504	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
421	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
368	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
207	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{51}$	
47	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2356, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
40	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2356, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
31	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
15	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
48	{∅, 1, 12, 123, 1234, 123456, 12356, 124, 12456, 13, 134, 13456, 14, 2, 23, 234, 23456, 2356, 24, 2456, 3, 34, 4}
$\mathcal{F}_{52}$	
4977	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1346, 1356, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

3614	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1990	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2158	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
1402	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
1402	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{53}$	
18450	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
16562	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1346, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
9206	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
4897	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
12258	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
8056	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{54}$	

310	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
224	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
145	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
123	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
79	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
79	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{55}$	
161	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1256, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
119	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
65	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
44	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
69	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}

40	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{56}$	
24179	{$\emptyset$, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 1346, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
14108	{$\emptyset$, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
14108	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
10328	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
6020	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
6020	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{57}$	
176	{$\emptyset$, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13456, 1356, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
102	{$\emptyset$, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
101	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
49	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}

72	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
45	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{58}$	
1839	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1256, 13456, 1356, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1331	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1017	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
772	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
184	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
463	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{59}$	
14571	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1256, 13456, 1346, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
10831	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

8236	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
3691	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
3425	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
3613	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
	$\mathcal{F}_{60}$
3025	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 13456, 1356, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2258	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1706	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
707	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
707	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
805	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
	$\mathcal{F}_{61}$
42	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

42	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
17	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
53	{∅, 1, 12, 123, 1234, 123456, 12356, 124, 12456, 1256, 13, 134, 13456, 14, 1456, 2, 23, 234, 23456, 24, 2456, 3, 34, 4}
48	{∅, 1, 12, 123, 1234, 123456, 12356, 124, 12456, 1256, 14, 1456, 156, 2, 24, 2456, 256, 4, 456, 56}
$\mathcal{F}_{62}$	
3531	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2544	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2321	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
2724	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2046	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
1246	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{63}$	
25	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

21	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
74	{$\emptyset$, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
11	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
11	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{64}$	
8061	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
23931	{$\emptyset$, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1256, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
3921	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
6210	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
3668	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{65}$	
215	{$\emptyset$, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
154	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

101	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
170	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
304	{∅, 1, 12, 123, 1234, 123456, 12356, 124, 12456, 1256, 13, 134, 13456, 14, 1456, 2, 23, 234, 23456, 24, 3, 34, 3456, 4}
$\mathcal{F}_{66}$	
78	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 1256, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
59	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
30	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
19	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
19	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
32	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{67}$	
903	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 1346, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
525	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

526	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
386	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
223	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
207	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{68}$	
40	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
40	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
19	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
19	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
19	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
31	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{69}$	
149	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

106	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
81	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
60	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
60	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
25	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{70}$	
1794	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 1256, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1375	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
734	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
425	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
394	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
743	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{71}$	

38	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
19	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
19	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
11	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
88	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{72}$	
307	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1345, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
219	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
219	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 1345, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
109	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 1345, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
109	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
1	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{73}$	

1381	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 1346, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1018	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1018	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
252	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
463	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
252	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{74}$	
455	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 1256, 126, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
65	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 134, 1345, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
65	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
19	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
19	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{75}$	

1128	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
291	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
305	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
84	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
84	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{76}$	
942	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
241	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
253	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
67	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
64	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{77}$	

1150	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 1346, 1356, 136, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
902	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
549	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
348	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
147	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
137	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{78}$	
1240	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
973	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
567	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
391	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
172	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}

151	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{79}$	
6109	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
4788	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2797	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
1922	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
840	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
787	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{80}$	
6228	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 13456, 1356, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
4740	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2999	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

1946	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
878	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
823	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{81}$	
526	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1346, 1356, 136, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
461	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
215	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
215	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
41	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
41	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{82}$	
1250	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 1256, 126, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
313	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}

338	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
96	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
86	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{83}$	
337	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1345, 13456, 145, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
151	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 1345, 13456, 135, 1356, 136, 145, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
151	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 136, 14, 145, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
177	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
154	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{84}$	
69366	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 13456, 1346, 1456, 146, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

36332	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
37435	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
22026	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 1456, 146, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
25335	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
6449	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{85}$	
1914	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2356, 2456, 256, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1297	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2784	{∅, 1, 12, 123, 1234, 123456, 12356, 124, 12456, 1256, 13, 134, 13456, 14, 1456, 2, 23, 234, 23456, 2356, 24, 2456, 256, 3, 34, 4}
379	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
1819	{∅, 1, 12, 123, 1234, 123456, 12356, 124, 12456, 1256, 14, 1456, 156, 2, 24, 2456, 256, 4, 456, 56}
$\mathcal{F}_{86}$	
2694	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2346, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 346, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

1543	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 346, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
1110	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 4, 45, 5}
7076	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1161	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{87}$	
3558	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 1345, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 2345, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 345, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1739	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
1524	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 125, 1256, 126, 13, 1345, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 2345, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 345, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
4565	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 1256, 126, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
4565	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1491	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{88}$	

4040	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2356, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 356, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2488	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 2356, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 356, 4, 45, 5}
1847	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 2356, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 356, 36, 4, 46, 6}
3154	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
3154	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
813	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{89}$	
241	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2346, 2456, 246, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
148	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
148	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
136	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
136	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 24, 245, 2456, 246, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}

31	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{90}$	
20851	{$\emptyset$, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13456, 1356, 1456, 156, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
9303	{$\emptyset$, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
9303	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
10251	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 1456, 146, 156, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
10251	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 1456, 15, 156, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
789	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{91}$	
180	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2356, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 356, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
97	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 2356, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 356, 4, 45, 5}
97	{$\emptyset$, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 2356, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 356, 36, 4, 46, 6}

114	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
114	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
23	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{92}$	
509	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2346, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 346, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
288	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 346, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
252	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 4, 45, 5}
329	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
329	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
45	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{93}$	
3794	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1345, 13456, 145, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1677	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 1345, 13456, 135, 1356, 136, 145, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}

1677	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 136, 14, 145, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
1882	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1882	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
145	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
$\mathcal{F}_{94}$	
5570	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13456, 1346, 1456, 146, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2699	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
2703	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2535	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2519	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 1456, 146, 15, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
181	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{95}$	
166	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2346, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 346, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

99	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 346, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
85	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 4, 45, 5}
102	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
102	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
15	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}
$\mathcal{F}_{96}$	
170	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 2356, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 356, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
99	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 2356, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 356, 36, 4, 46, 6}
21	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
92	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 2356, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 356, 4, 45, 5}
105	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
105	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{97}$	

169	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13456, 1356, 1456, 156, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
79	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
74	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
83	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 1456, 146, 156, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
83	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 1456, 15, 156, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}
10	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{98}$	
2880	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1256, 13456, 1356, 1456, 156, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1491	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1491	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 1456, 146, 156, 16, 2, 23, 234, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 346, 36, 4, 46, 6}
369	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
1010	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 1456, 15, 156, 2, 23, 234, 2345, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 35, 4, 45, 5}

1010	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
	$\mathcal{F}_{99}$
104	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
93	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
66	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
87	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
90	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
61	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
	$\mathcal{F}_{100}$
20992	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
20992	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}

26128	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
22861	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
3073	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
20278	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 14, 145, 1456, 15, 2, 24, 245, 2456, 25, 4, 45, 456, 5}
$\mathcal{F}_{101}$	
168	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
168	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
168	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
247	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
203	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
203	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
$\mathcal{F}_{102}$	

48	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
45	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
47	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
47	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
45	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
41	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{103}$	
468	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
438	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
486	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
484	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}

414	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
453	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
$\mathcal{F}_{104}$	
307	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
442	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 1356, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
526	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1356, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
409	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 1356, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
469	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1356, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
347	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{105}$	
776	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
832	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

832	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
832	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
775	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
723	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
$\mathcal{F}_{106}$	
16266	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
16266	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
21609	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
19355	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
14455	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
9636	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
$\mathcal{F}_{107}$	

98	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
98	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
57	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
155	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
155	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
102	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{108}$	
594	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
355	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
355	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
696	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}

696	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 1245, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
315	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{109}$	
99	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
99	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
99	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
136	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
140	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
140	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{110}$	
179	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}

122	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
146	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
175	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
175	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1246, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
101	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
$\mathcal{F}_{111}$	
1213	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
1213	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1346, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1018	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 1346, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
1018	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
719	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}

719	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{112}$	
1588	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
2219	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 12356, 1236, 124, 12456, 1246, 1256, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
1701	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2082	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 1235, 12356, 124, 1245, 12456, 125, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
2386	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
2386	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 1256, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{113}$	
23	{∅, 1, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13, 134, 1345, 13456, 1346, 135, 1356, 136, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 23456, 2456, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
22	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 125, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}

23	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 1456, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 2456, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 456, 5, 56, 6}
23	{∅, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 12456, 13456, 1456, 2, 23, 234, 2345, 23456, 2346, 235, 2356, 236, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3, 34, 345, 3456, 346, 35, 356, 36, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
20	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 1456, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 2456, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 456, 46, 6}
20	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
$\mathcal{F}_{114}$	
25	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 1456, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 2456, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 456, 5}
22	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 1236, 12456, 126, 13, 13456, 136, 1456, 16, 2, 23, 23456, 236, 2456, 26, 3, 3456, 36, 456, 6}
26	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 1236, 1245, 12456, 126, 145, 1456, 16, 2, 245, 2456, 26, 45, 456, 6}
143	{∅, 123, 12345, 123456, 1236, 12456, 126, 3, 345, 3456, 36, 45, 456, 6}
$\mathcal{F}_{115}$	
56	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13, 134, 1345, 13456, 135, 14, 145, 15, 2, 23, 234, 2345, 23456, 235, 24, 245, 25, 3, 34, 345, 3456, 35, 4, 45, 5}
56	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1235, 12356, 1236, 124, 1245, 12456, 1246, 125, 1256, 126, 13456, 14, 145, 1456, 146, 15, 156, 16, 2, 23456, 24, 245, 2456, 246, 25, 256, 26, 3456, 4, 45, 456, 46, 5, 56, 6}
17	{∅, 1, 12, 123, 1234, 12345, 123456, 12346, 1236, 124, 12456, 1246, 126, 13, 134, 13456, 1346, 136, 14, 146, 16, 2, 23, 234, 23456, 2346, 236, 24, 246, 26, 3, 34, 3456, 346, 36, 4, 46, 6}

17	{∅, 1, 12, 123, 12345, 123456, 1235, 12356, 1236, 12456, 125, 1256, 126, 13, 13456, 135, 1356, 136, 15, 156, 16, 2, 23, 23456, 235, 2356, 236, 25, 256, 26, 3, 3456, 35, 356, 36, 5, 56, 6}
431	{∅, 123, 12345, 123456, 1236, 12456, 126, 3, 345, 3456, 36, 45, 456, 6}

Prilog B

Tabela za kardinalnost prostora vrsta matrice

Tabela B.1: Popis matrica A datih zajedno sa vrednostima β_i i α_j. Vrste matrice A^T, kao i vektori β_i i α_j^T, prikazani su u decimalnom zapisu.

r	Dim	A^T	β_1	β_2	β_3	α_1^T	α_3^T
11	5	[3 7 13 26 28]	23	19	16	23	16
12	5	[3 5 10 22 29]	27	26	24	30	8
13	5	[3 5 9 19 30]	29	25	24	29	24
14	5	[1 6 10 21 26]	29	9	8	29	16
15	5	[1 2 5 14 24]	23	19	18	27	17
16	5	[1 3 6 12 24]	23	19	17	23	17
17	5	[1 6 10 13 18]	29	17	16	29	16
18	5	[1 2 5 12 24]	23	19	18	27	24
19	6	[1 6 15 25 42 50]	61	53	52	55	52
20	6	[1 2 13 23 52 56]	47	35	34	59	56
21	6	[1 2 13 22 44 56]	55	35	33	55	52
22	6	[1 2 12 21 25 52]	59	51	50	61	52
23	6	[1 6 10 20 44 59]	55	53	49	62	44
24	6	[1 6 10 20 44 58]	55	53	49	62	40
25	6	[3 5 9 17 35 62]	61	57	56	61	56
26	6	[1 6 10 18 38 60]	59	51	49	61	56
27	6	[1 6 10 18 36 45]	61	53	52	62	34

28	6	[1 2 12 20 41 52]	59	19	18	61	48
29	6	[1 6 10 19 36 48]	61	57	25	59	56
30	6	[1 6 10 18 36 41]	61	53	52	62	44
31	7	[1 6 25 26 44 106 112]	95	91	89	111	71
32	6	[1 2 5 12 24 48]	47	39	35	55	49
33	6	[1 6 10 18 29 34]	61	33	32	61	32
34	6	[1 2 12 20 25 36]	59	35	34	61	48
35	7	[1 6 11 48 82 99 104]	125	117	85	125	108
36	6	[1 2 4 9 24 48]	47	39	38	59	56
37	7	[1 6 24 42 55 74 97]	125	29	28	126	122
38	7	[1 6 10 23 49 82 98]	125	109	108	119	116
39	7	[1 2 12 49 52 82 100]	123	91	90	119	114
40	7	[1 6 11 28 50 56 96]	95	79	75	111	71
41	7	[1 2 12 21 50 84 100]	123	107	105	119	116
42	7	[1 6 26 42 53 82 98]	125	105	104	123	88
43	7	[1 6 24 42 53 76 104]	119	71	70	123	104
44	7	[1 2 12 21 52 56 96]	95	79	78	119	114
45	7	[1 2 12 20 40 88 119]	111	107	99	126	108
46	7	[1 2 12 20 40 88 117]	111	107	99	126	108
47	7	[1 6 10 18 34 69 90]	125	57	56	126	60
48	7	[1 2 12 20 40 88 116]	111	107	99	126	104
49	7	[3 5 9 17 33 67 126]	125	121	120	125	120
50	7	[1 6 10 18 34 70 124]	123	115	113	125	120
51	7	[1 6 10 18 34 68 93]	125	101	100	126	66
52	7	[1 2 12 20 36 76 120]	119	103	99	125	120
53	7	[1 2 12 20 39 72 96]	123	115	51	123	120
54	7	[1 2 12 20 36 72 89]	123	107	106	126	98
55	8	[3 12 21 42 82 116 192 233]	191	175	174	254	154
56	7	[1 2 4 24 40 81 104]	119	39	38	125	112
57	8	[1 6 11 48 85 90 152 196]	239	231	230	247	244
58	8	[1 6 26 43 88 100 172 176]	223	219	217	239	206
59	8	[1 6 24 42 74 162 221 225]	247	183	182	254	252
60	7	[1 2 12 20 36 72 81]	123	107	106	126	108
61	8	[1 6 26 42 74 146 169 241]	253	93	92	254	252
62	8	[1 2 12 49 52 88 212 224]	191	183	179	239	199
63	8	[1 6 10 48 82 100 209 226]	253	125	124	253	233

64	7	[1 2 4 9 24 48 96]	95	79	71	119	113
65	7	[1 6 10 18 34 61 66]	125	65	64	125	64
66	7	[1 2 12 20 36 57 68]	123	67	66	125	96
67	8	[1 6 10 48 82 93 148 193]	239	47	46	254	250
68	7	[1 2 4 24 40 49 72]	119	71	70	125	112
69	8	[1 6 10 48 82 101 107 146]	253	185	184	253	228
70	8	[1 2 12 21 96 164 197 208]	251	235	171	253	236
71	8	[1 6 10 48 82 125 146 193]	239	47	46	254	250
72	7	[1 2 4 8 17 48 96]	95	79	78	123	120
73	8	[1 6 10 48 82 100 107 146]	253	185	153	253	228
74	8	[1 6 10 18 47 97 162 194]	253	221	220	247	244
75	8	[1 2 12 20 97 164 170 196]	251	187	186	253	216
76	8	[1 2 12 20 56 96 111 176]	223	215	211	253	244
77	8	[1 6 10 48 82 162 196 209]	253	249	57	254	188
78	8	[1 2 4 24 97 104 162 200]	247	183	182	247	242
79	8	[1 2 12 48 84 91 148 200]	239	175	167	251	241
80	8	[1 2 12 21 56 100 112 192]	191	159	151	239	199
81	8	[1 6 10 50 82 125 162 194]	253	193	192	251	128
82	8	[1 2 12 52 84 121 164 196]	251	195	194	251	192
83	8	[1 6 10 48 82 162 192 245]	253	249	248	254	242
84	8	[1 2 12 52 84 105 164 196]	251	211	210	251	216
85	8	[1 2 12 31 48 84 104 192]	191	159	143	239	234
86	8	[1 2 12 48 84 105 152 208]	239	143	142	251	232
87	8	[1 6 10 18 34 66 141 178]	253	113	112	254	124
88	8	[1 2 4 24 41 104 112 192]	191	159	158	247	242
89	8	[1 2 4 24 40 80 176 239]	223	215	199	254	236
90	8	[1 2 4 24 40 80 176 235]	223	215	199	254	236
91	8	[1 2 12 20 37 70 160 192]	251	219	91	251	248
92	8	[1 2 4 24 40 80 176 233]	223	215	199	254	236
93	8	[1 2 12 20 36 72 119 136]	247	183	182	253	216
94	8	[1 2 12 20 36 68 137 180]	251	115	114	254	124
95	8	[1 2 12 20 36 72 147 192]	251	235	234	253	248
96	8	[1 2 4 24 40 80 176 232]	223	215	199	254	232
97	8	[3 5 9 17 33 65 131 254]	253	249	248	253	248
98	8	[1 6 10 18 34 66 134 252]	251	243	241	253	248
99	8	[1 6 10 18 34 66 132 189]	253	197	196	254	130

100	8	[1 2 12 20 36 68 140 248]	247	231	227	253	248
101	8	[1 2 12 20 36 68 136 187]	251	203	202	254	194
102	8	[1 2 12 20 36 68 136 185]	251	203	202	254	194
103	9	[3 5 25 41 83 176 212 328 385]	510	506	362	495	429
104	8	[1 2 4 24 40 72 152 240]	239	207	199	253	248
105	9	[1 6 24 42 100 196 211 330 392]	503	487	486	507	440
106	8	[1 2 4 24 40 75 144 192]	247	231	103	251	248
107	9	[1 6 26 42 87 176 208 328 386]	509	245	181	495	490
108	8	[1 2 4 24 40 72 144 177]	247	215	214	254	226
109	9	[1 6 24 98 109 162 208 304 340]	495	487	486	495	428
110	9	[1 6 24 42 84 164 232 384 466]	383	351	349	510	410
111	9	[1 6 24 42 77 196 224 330 392]	503	501	497	495	486
112	8	[1 2 4 8 48 80 161 208]	239	79	78	253	240
113	8	[1 2 4 8 31 48 80 160]	223	159	143	247	242
114	9	[1 2 12 21 96 169 180 304 392]	479	463	462	503	500
115	9	[1 2 12 48 84 152 225 338 404]	495	399	398	509	492
116	9	[1 2 12 52 85 176 200 344 352]	447	439	435	495	462
117	9	[1 2 12 20 96 164 201 418 452]	507	499	498	507	442
118	9	[1 2 12 48 84 148 324 441 449]	495	367	366	510	508
119	9	[1 2 12 20 96 168 300 331 388]	507	251	250	509	444
120	8	[1 2 4 24 40 72 144 161]	247	215	214	254	236
121	9	[1 2 4 24 97 168 182 200 448]	383	351	350	507	465
122	9	[1 2 12 52 84 148 292 337 481]	507	187	186	510	508
123	9	[1 6 10 48 84 109 164 200 384]	383	319	315	503	496
124	9	[1 2 4 24 97 104 176 424 448]	383	367	359	495	455
125	9	[1 2 12 20 36 195 324 389 392]	507	443	442	509	501
126	9	[1 2 12 20 96 164 200 417 452]	507	251	250	509	489
127	9	[1 6 10 48 80 146 189 276 385]	495	111	110	510	506
128	8	[1 2 4 8 18 48 96 192]	191	159	143	247	241
129	8	[1 6 10 18 34 66 125 130]	253	129	128	253	128
130	8	[1 2 12 20 36 68 121 132]	251	131	130	253	192
131	9	[1 2 4 8 48 127 207 336 400]	495	431	430	503	500
132	8	[1 2 4 24 40 72 113 136]	247	135	134	253	224
133	9	[1 6 10 48 80 146 173 221 274]	509	369	368	509	308
134	9	[1 2 12 20 96 164 185 296 385]	479	95	94	510	506
135	9	[1 6 10 48 80 146 165 221 274]	509	377	376	509	308

136	8	[1 2 4 8 48 80 97 144]	239	143	142	253	240
137	9	[1 2 12 20 96 164 207 292 387]	507	123	122	510	506
138	9	[1 2 12 20 96 164 201 213 292]	507	371	370	509	484
139	9	[1 6 10 18 96 162 253 290 385]	479	95	94	510	506
140	9	[1 2 4 24 41 192 328 393 416]	503	471	343	509	492
141	9	[1 6 10 18 96 162 196 219 290]	509	377	313	509	484
142	9	[1 2 12 20 96 164 249 292 385]	479	95	94	510	506
143	9	[1 2 12 20 96 164 169 292 450]	507	499	498	510	484
144	8	[1 2 4 8 16 33 96 192]	191	159	158	251	248
145	9	[1 6 10 18 34 127 193 322 386]	509	445	444	503	500
146	9	[1 6 10 18 34 95 193 322 386]	509	445	444	503	500
147	9	[1 2 12 20 36 193 324 346 388]	507	379	378	509	408
148	9	[1 2 12 20 56 96 160 239 304]	479	471	467	509	492
149	9	[1 6 10 18 34 192 322 388 477]	509	485	484	510	266
150	9	[1 2 4 24 40 193 328 338 392]	503	375	374	509	472
151	9	[1 6 10 18 96 160 320 387 396]	509	497	369	509	489
152	9	[1 2 4 24 40 112 192 223 352]	447	431	423	509	500
153	9	[1 2 12 20 96 164 199 292 448]	507	379	315	507	497
154	9	[1 2 12 20 96 164 324 392 417]	507	499	115	510	444
155	9	[1 2 4 24 96 168 183 296 400]	479	351	335	507	497
156	9	[1 2 4 8 48 193 208 322 400]	495	367	366	503	498
157	9	[1 2 12 20 96 163 200 208 384]	383	375	371	503	485
158	9	[1 2 4 24 96 168 179 296 400]	479	351	335	507	497
159	9	[1 6 10 18 34 66 130 269 370]	509	241	240	510	252
160	9	[1 2 4 24 41 112 200 224 384]	383	319	303	495	455
161	9	[1 6 10 18 98 162 253 322 386]	509	385	384	507	256
162	9	[1 2 12 20 100 164 249 324 388]	507	387	386	507	384
163	9	[1 6 10 18 96 162 322 384 493]	509	497	496	510	498
164	9	[1 2 4 24 104 168 241 328 392]	503	391	390	507	448
165	9	[1 2 12 20 96 164 324 384 491]	507	499	498	510	498
166	9	[1 2 12 20 96 164 324 384 489]	507	499	498	510	498
167	9	[1 6 10 18 34 66 130 270 369]	509	141	140	509	252
168	9	[1 2 4 24 104 168 209 328 392]	503	423	422	507	472
169	9	[1 2 4 24 63 96 168 208 384]	383	319	287	495	490
170	9	[1 2 4 24 59 96 168 208 384]	383	319	287	495	490
171	9	[1 2 4 24 40 80 160 320 423]	479	471	455	510	500

172	9	[1 2 4 24 96 168 209 304 416]	479	287	286	507	488
173	9	[1 2 12 20 36 68 136 264 443]	507	459	458	510	390
174	9	[1 2 12 20 36 68 132 281 356]	507	227	226	510	252
175	9	[1 2 12 20 36 68 136 307 384]	507	459	458	509	504

Biografija kandidata

Bojan Vučković rođen je 12. septembra 1980. godine u Beogradu. Osnovnu školu "Branko Ćopić" završio je kao vukovac i đak generacije. Potom je završio Matematičku gimnaziju u Beogradu. Matematički fakultet u Beogradu, smer Računarstvo i Informatika, upisao je 1999. godine. Diplomirao 2007. godine sa prosekom 8.07. Na istom fakultetu je 2009. godine odbranio master rad pod naslovom *Računarska analiza Franklove hipoteze*, pod mentorstvom profesora dr Miodraga Živkovića. Doktorske studije na Matematičkom fakultetu, smer Informatika, upisao je 2010. godine. Položio je sve ispite na doktorskim studijama sa prosečnom ocenom 10.

Zaposlen je u Matematičkom Institutu od 2011. godine, na projektu III 44006 (Razvoj novih informaciono-komunikacionih tehnologija, korišćenjem naprednih matematičkih metoda, sa primenama u medicini, telekomunikacijama, energetici, zaštiti nacionalne baštine i obrazovanju).

Od 2001. godine je šahovski velemajstor. Višestruki je reprezentativac države u šahu. Redovni je reprezentativac Srbije u rešavanju šahovskih problema, u čemu je bio i pojedinačni prvak Evrope 2007. godine.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Бојан Вучковић

број уписа 2016/2010

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Нове комбинаторне конструкције у вези са проблемима из хроматске теорије графова, екстремалне теорије скупова и теорије Булових матрица

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 03.11.2017.

Бојан Вучковић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ____ Бојан Вучковић ____

Број уписа ____ 2016/2010 ____

Студијски програм ____ Информатика ____

Наслов рада ____ Нове комбинаторне конструкције у вези са проблемима из хроматске теорије графова, екстремалне теорије скупова и теорије Булових матрица ____

Ментор ____ др Миодраг Живковић ____

Потписани ____ Бојан Вучковић ____

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 03.11.2017.

Бојан Вучковић

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Нове комбинаторне конструкције у вези са проблемима из хроматске теорије графова, екстремалне теорије скупова и теорије Булових матрица

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 03.11.2017.

Бојан Вучковић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.