



**УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ**

**Факултет инжењерских наука**

**Милица Николић, дипл. маш. инж.**

**ЕЛЕКТРО-МЕХАНИЧКИ МОДЕЛ КОХЛЕЕ И АНАЛИЗА  
ОДЗИВА МОДЕЛА**

Докторска дисертација

Крагујевац, 2017. године

<b><i>I. Аутор</i></b>
Име и презиме: Милица Николић
Датум и место рођења: 26.09.1985. Крагујевац
Садашње запослење: Факултет инжењерских наука, Крагујевац
<b><i>II. Докторска дисертација</i></b>
Наслов: Електро-механички модел кохлее и анализа одзива модела
Број страница: 131
Број слика: 76
Број библиографских података: 73
Установа и место где је рад израђен: Факултет инжењерских наука, Крагујевац
Научна област (УДК бројчано): [621+519.6]:616.28-072.7(043.3) (УДК текстуално): [машинско инжењерство + нумеричка анализа] : уши, отологија – функционално тестирање, тестови оштрине слуха (докторска дисертација)
Ментор: др Ненад Филиповић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу
<b><i>III. Оцена и одбрана</i></b>
Датум пријаве теме: 29.06.2015. године
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:
Комисија за оцену подобности теме и кандидата: <ol style="list-style-type: none"> <li>1. др Ненад Филиповић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Научне области: примењена механика, примењена информатика и рачунарско инжењерство</li> <li>2. др Радован Славковић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Научне области: примењена механика, примењена информатика и рачунарско инжењерство</li> <li>3. др Драган Милосављевић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Научне области: примењена механика, примењена информатика и рачунарско инжењерство</li> <li>4. др Александар Пеулић, ванр. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, Научна област: рачунарска техника</li> <li>5. др Драган Данкуц, ред. проф., Медицински факултет Универзитета у Новом Саду, Научна област: оториноларингологија.</li> </ol>
Комисија за оцену докторске дисертације: <ol style="list-style-type: none"> <li>1. др Гордана Јовичић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, председник комисије. Научна област: примењена механика.</li> <li>2. др Александар Пеулић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, члан комисије. Научна област: електротехничко и рачунарско инжењерство.</li> <li>3. др Драган Ракић, доцент, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, члан комисије. Научна област: примењена механика, примењена информатика и рачунарско инжењерство.</li> <li>4. др Владимир Дунић, доцент, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, члан комисије. Научна област: примењена механика.</li> <li>5. др Драган Данкуц, ред. проф., Медицински факултет Универзитета у Новом Саду, члан комисије. Научна област: оториноларингологија.</li> </ol>

Комисија за одбрану докторске дисертације:

1. др Гордана Јовичић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, председник комисије.

Научна област: примењена механика.

2. др Александар Пеулић, ред. проф., Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, члан комисије.

Научна област: електротехничко и рачунарско инжењерство.

3. др Драган Ракић, доцент, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, члан комисије.

Научна област: примењена механика, примењена информатика и рачунарско инжењерство.

4. др Владимир Дунић, доцент, Факултет инжењерских наука у Крагујевцу, члан комисије.

Научна област: примењена механика.

5. др Драган Данкуц, ред. проф., Медицински факултет Универзитета у Новом Саду, члан комисије.

Научна област: оториноларингологија

Датум одбране докторске дисертације:

## ПРЕДГОВОР

Током свог досадашњег научно-истраживачког рада бавила сам се моделирањем и решавањем различитих модела из области биоинжењеринга. Учешће на међународном пројекту SIFEM (Semantic Infostructure interlinking an open source Finite Element tool and libraries with a model repository for the multi-scale Modelling and 3d visualization of the inner-ear, FP7-ICT-2011-9, Project ID: 600933) упутило ме је на истраживање чула слуха и моделирање кохлеје. Ова теза је резултат трогодишњег рада на пројекту и за њено писање дугујем захвалност многим људима који су се нашли на мом путу.

Посебну захвалност дугујем др Ненаду Филиповићу, редовном професору Факултета инжењерских наука у Крагујевцу, који је прихватио да буде мој ментор и који ми је пружио прилику да се бавим биоинжењерингом у оквиру Истраживачко-развојног центра за биоинжењеринг у Крагујевцу.

Захвалност дугујем и др Милошу Којићу, директору Истраживачко-развојног центра за биоинжењеринг, дописном члану Српске академије наука и уметности и научном сараднику института The Methodist Hospital Research Institute у Хјустону, који је увидео значај мултидисциплинарног истраживања и створио први центар за биоинжењеринг у Крагујевцу.

У свакодневним изазовима и при решавању нових проблема увек могу да се ослоним на колеге из Истраживачко-развојног центра за биоинжењеринг и овом приликом им се захваљујем свима. Посебно бих хтела да се захвалим колеги, др Велибору Исаиловићу, који је уложио много труда у SIFEM пројекат и био од велике помоћи при изради модела. Такође бих волела да поменем и колегу, др Дејана Петровића, са којим сам највише сарађивала прве две године рада на међународном пројекту MUST.

Захваљујем се Министарству просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије за учешће на националном научно-истраживачком пројекту.

И на крају, највише бих се захвалила својим родитељима, Младену и Драгани, и сестри Ивани, који су обликовали човека у мени, ћерки Татјани и супругу Александру, због којих све има лепши смисао, као и осталим члановима породице, од којих сам имала неизмерну подршку, како у писању овог рада, тако и у другим аспектима живота.

У Крагујевцу, мај 2017. године

Милица Николић

# ЕЛЕКТРО-МЕХАНИЧКИ МОДЕЛ КОХЛЕЕ И АНАЛИЗА ОДЗИВА МОДЕЛА

Милица Николић

Факултет инжењерских наука, Универзитет у Крагујевцу

## РЕЗИМЕ

Правилан рад свих чула омогућава човеку нормално функционисање у средини која га окружује. Оштећење или губитак чула слуха отежава свакодневни живот, смањује могућности за рад и друштвени живот и може довести особу у стање депресије. Губитак слуха може бити последица различитих узрока, оштећења различитих делова ува или аудиторних нерава. Побољшање слуха је најчешће могуће остварити применом слушних апарата и слушних импланата. У зависности од степена и врсте оштећења предлаже се одговарајући имплант – пасивни или активни, кохлеарни или имплант средњег ува, имплант који ради на принципу провођења звука кроз ваздух или звука кроз темпоралну кост. Иако доприносе побољшању слуха сви импланти се уграђују оперативним путем што носи дозу ризика.

О чулу слуха се зна доста и опет недовољно. О уву, као органу чула слуха, се зна доста о његовој структури и функцији. Кохлеа, која чини део унутрашњег ува, има сложenu структуру и доста процеса се одвија унутар ње. Проблем са изучавањем кохлее се огледа у томе што је тешко прикупити експерименталне податке. Кохлеа је смештена дубоко у лобањи, готово неприступачна и велика је вероватноћа да ће доћи до оштећења приликом мерења на живом пацијенту. На тај начин експериментални приступ је веома ограничен. С друге стране, кохлеа брзо губи своја својства по наступању смрти, тако да није могућ у великој мери ни рад на мртвим кохлеама. Због тога компјутерско моделирање кохлее и анализа одзива имају велику улогу у овој области истраживања.

Циљ ове тезе је развој механичких и електро-механичких модела кохлее који описују нормално функционисање кохлее и омогућавају анализу одзива – посматрање промене одзива са променом извесних параметара. Довођење у везу узрока оштећења са његовом последицом, односно променом одговарајућег параметра који утиче на оштећење слуха, омогућава примену модела у пракси. Моделирање кохлее има за циљ и утврђивање

постојања одређених сигнала који указују на оштећење и предлог начина мерења. На овај начин је установљена кохлеарна микрофонија и појава отоакустичних емисија које се користе за детектовање чула слуха код новорођених беба. Модели кохлеје могу да допринесу и побољшању карактеристика слушних импланата и њиховом бољем позиционирању.

У овом раду су представљени механички и електро-механички модели кохлеје који су решавани методом коначних елемената и као модели у простору стања. Приказани су основни одзиви, извршено је поређење са одређеним експерименталним мерењима и резултатима других модела из литературе и дата је анализа добијених одзива. Даљи рад на развоју ових модела могао би да води до њихове примене у претклиничкој пракси, а наставак истраживања је усмерен на примену у области слушних импланата.

Кључне речи: кохлеа, модел коначних елемената, модел у простору стања, анализа одзива

# **ELECTRO-MACHANICAL COCHLEA MODEL AND RESPONSE ANALYSIS**

Milica Nikolic

Faculty of Engineering, University of Kragujevac

## **ABSTRACT**

Proper work of human senses allows normal functioning in the surrounding environment. Damage or hearing loss makes difficult everyday life, decreases possibilities for work and social life and can bring person to the state of depression. Hearing loss can be consequence of different causes, damage of different part of the ear or auditory nerves. Hearing improvement is usually possible to accomplish by applying hearing aids and hearing implants. In dependence of the level and type of damage certain implant is suggested – passive or active, cochlear or middle ear implant, implant that works on principle of air conduction of sound or bone conduction of sound, through the temporal bone. Although all implants contribute to improving of hearing, they are implanted during the surgery, which carrying a dose of risk.

About hearing sense is known a lot of, but yet not enough. About ear, as organ of hearing sense, is known a lot about his structure and function. Cochlea, which makes part of the inner ear, has complex structure and a lot of processes are happening inside her. Problem with cochlear research is that it is hard to collect experimental data. Cochlea is placed deep inside the skull, almost unreachable and there is great possibility that it will be harmed during the experimental measurement on alive human. On that way experimental approach is very limited. On the other side, cochlea quickly loses its properties after death occurs, so it is not possible in larger scale to work with dead cochlea. That is the reason why computer modeling of cochlea and response analysis have great role in this research area.

The goal of this thesis is to develop mechanical and electro-mechanical cochlea models which describe proper functioning of the cochlea and allow response analysis – observation of the response change with change of certain parameters. By combining cause of damage with his consequence, namely change of the certain parameter which has influence on hearing damage, model can be applied in practice. Modeling of cochlea has as one of the goal to establish

existence of certain signals which pointing on damage and to propose way of signals measurement. On this way were established cochlear microphonic and appearance of otoacoustic emissions which are used for detection of hearing in newborn babies. Cochlea models can contribute in improvement of characteristics of hearing implants and their better positioning.

In this work are presented mechanical and electro-mechanical cochlea models which were solved with finite element method and as models in state space representation. Most common responses are shown, comparison with specific experimental measurements and with results from other models from literature are performed and analysis of obtained responses is given. Further work on development of these models could lead to their application in preclinical practice, while future investigations in this area are directed to application in area of hearing implants.

**Key words:** cochlea, finite element model, state space model, resposnse analysis



## Садржај

1. Увод.....	1
1.1. Предмет докторске дисертације .....	1
1.2. Основне полазне хипотезе .....	2
1.3. Значај и циљ истраживања са становишта актуелности у одређеној научној области ....	3
1.4. Преглед садржаја докторске дисертације .....	4
2. Анатомија и функција кохлее .....	6
2.1. Анатомија ува.....	6
2.2. Функција кохлее.....	18
3. Механички модели кохлее .....	22
3.1. Математички модел .....	22
3.1.1. Акустична таласна једначина .....	23
3.1.2. Њутнова динамичка једначина .....	28
3.1.3. Спрегнути систем.....	33
3.2. Хармонијски одзив.....	35
4. Електро-механички модели кохлее .....	36
5. Примена методе коначних елемената на моделе кохлее.....	40
5.1. Резултати.....	41
6. Модели кохлее у простору стања .....	56
6.1. Простор стања .....	56
6.2. Електро-механички модели кохлее у простору стања.....	59
6.2.1. Макромеханички део модела кохлее.....	59
6.2.2. Електропокретљивост спољашњих трепљастих ћелија .....	60
6.2.3. Електро-механичка конверзија спољашњих трепљастих ћелија.....	62
6.3. Модел кохлее у простору стања без уздужног електричног спрезања .....	63
6.4. Модел кохлее у простору стања са лонгитудиналним (уздужним) електричним спрезањем	
71	
6.4.1. Спрезање једначине електричног модела кохлее са једначином стања. ....	78
6.4.2. Фреквентни домен модела кохлее у простору стања .....	80

6.5. Резултати електро-механичких модела кохлее у простору стања.....	82
7. Поређење резултата модела кохлее са реалним резултатима и другим методама .....	94
8. Анализа одзива модела кохлее .....	109
9. Закључак .....	124
10. Литература.....	125

## 1. Увод

### 1.1. Предмет докторске дисертације

Људско уво се састоји од три дела – спољашњег, средњег и унутрашњег ува. По својој структури и функцији најједноставније је спољашње уво, које прима сигнале из околине. Сложенију структуру и функцију поседује средње уво, које садржи три мале кошчице – чекић, наковањ и узенгију. Анализа средњег ува је битна, јер унутар њега најчешће долази до запаљенских процеса, нарочито код деце, који су болни и узрокују отежано детектовање звукова. Упални процеси неадекватним лечењем могу да доведу и до трајног оштећења слуха. Најсложенију структуру и функцију има унутрашње уво, које при анализи слуха има најзначајнију улогу. Састоји од кохлее (пужа), вестибулума и полукружних канала.

Унутар кохлее дешава се простирање звучног таласа кроз флуид и вибрирање мембрана, што за последицу има промену потенцијала и појаву електричне струје, која доводи до инервације нерава, који даље информацију о звуку прослеђују кори великог мозга. Најсложенији део кохлее чини Кортијев орган са својом микроструктуром, унутар кога долази до промене механичке енергије у електричну енергију и до појачавања улазног сигнала, захваљујући чему људско уво може да детектује звуке у распону од 16 Hz – 20 kHz.

Постоји доста модела унутрашњег ува, првенствено кохлее, који описују понашање и функционисање чула слуха, али и даље постоји потреба за развојем нових модела кохлее, који би још прецизније опонашали функционисање овог сложеног дела људског тела. Коришћени модели из постојеће литературе ће бити наведени у наредним поглављима.

Предмет рада ове докторске дисертације је развој модела кохлее. Развијани модели кохлее су механички и електро-механички модели. Модели су решавани методом коначних елемената у програмском пакету ПАК, који је развијен на Машинском факултету у Крагујевцу и служи за решавање различитих инжењерских проблема методом коначних елемената. За симулације и развој модела коришћен је и комерцијални програмски пакет матлаб. Модели развијани у програмском пакету матлаб формиран су као модели у простору стања, а коришћена је и метода коначних разлика. Развијање нових модела

кохлее има за циљ боље разумевање начина рада чула слуха, као и могућност тестирања исправности рада кохлее и утврђивање различитих поремећаја слуха, што може бити од користи лекарима у дијагностиковању обољења. У овој дисертацији је објашњена појава кохлеарне микрофоније која се користи као додатна провера функционалности чула слуха и може служити као додатни податак при мерењу отоакустичних емисија.

## 1.2. Основне полазне хипотезе

На основу коришћене литературе, која је дата на крају дисертације, а везана је за моделе унутрашњег ува и моделе кохлее, утврђено је да се при развоју сложенијих модела морају узети у обзир и механичке и електричне компоненте, како би се створила прегледнија слика о функционисању кохлее. Кохлеа се састоји, грубо речено, од три коморе које су испуњене флуидом – ендолимфом и перилимфом и од две мембране, које раздвајају ове три флуидне коморе. Три коморе испуњене флуидом су вестибуларно степениште (лат. *scala vestibuli*), средишње степениште (лат. *scala media*) и бубно степениште (лат. *scala tympani*). Коморе кохлее су раздвојене двома мембранама – базиларном мембраном (енг. *basilar membrane*) и Рајснеровом мембраном (енг. *Reissner's membrane*). Базиларна мембрана раздваја средишње и бубно степениште, док Рајснерова мембрана раздваја вестибуларно и средишње степениште. Унутар средње коморе, средишњег степеништа, смештен је Кортијев орган који је битан за електрични модел кохлее јер се у њему дешава претварање механичке енергије у електричну, долази до промене потенцијала и до појаве струје. Електричне компоненте даље имају утицај на механичке компоненте, тако да Кортијев орган делује као појачавач у повратној спрези.

Пошто се утврди геометрија модела формира се математички модел кохлее, у зависности од тога шта ће се датим моделом описивати. Полазне хипотезе у изради дисертације су:

- При анализи механичког модела кохлее средња комора, средишње степениште, може да се занемари, јер не утиче у великој мери на одзив кохлее.
- Модели који укључују у анализу и механичке и електричне компоненте, електро-механички модели кохлее, представљају активне моделе кохлее.
- Таласна акустична једначина је одговарајућа за моделирање флуида у коморама, кроз који се простире звук.

- Чврсти делови кохлее у моделу, мембране, вибрирају под утицајем притиска из флуида (простирање таласа) и њихово понашање се може представити Њутновом динамичком једначином.
- Струје и напони који се јављају у Кортијевом органу одређују према Кирхофовим законима.
- Везивање акустичног, механичког и електричног дела кохлее се остварује одговарајућим једначинама спрезања. Развијани су модели и са slabим и са jakim спрезањем.
- Развијани модели кохлее се могу решавати методом коначних елемената и као модели у простору стања.

### **1.3. Значај и циљ истраживања са становишта актуелности у одређеној научној области**

Основни циљ докторске дисертације је прављење што детаљнијег модела кохлее који може успешно да описује електро-механичко понашање кохлее. Модели који су развијани у оквиру ове дисертације су модели у простору стања и модели решавани методом коначних елемената. За решавање једначина које описују простирање таласа кроз флуид и вибрације мембрана представљана је и објашњена нумеричка метода коначних елемената. Предност формирања модела кохлее као модела коначних елемената се огледа у томе што је модел састављен од тродимензионалних елемената, чиме се могу елиминисати упрошћавања геометрије, а сложенија геометрија даје и могућност за добијање прецизнијих резултата модела. Модел кохлее који је развијан као модел у простору стања решаван је у оба домена – временском и фреквентном. Постављање и решавање модела у простору стања подразумева познавање операција над матрицама, као и коришћење Лапласове трансформације. На делу математичког модела примењена је метода коначних разлика, а искоришћена је и погодност решавања тродијагоналних матрица (тродијагонални алгоритам) које се појављују у моделу. Код који је развијан у матлабу је даље оптимизован како би се убрзао процес решавања система (LU декомпоновање и Вудбуријева матрица).

Значај истраживања и моделирања кохлее је у бољем разумевању функционисања чула слуха и у примени остварених запажања у пракси. Модели кохлее се могу користити за

анализирање механичких и електричних карактеристика од значаја. Прва мера успешности у моделирању се односи на поређење добијених резултата модела са постојећим мерењима и моделима, док је друга мера успешности анализирање одзива у функцији промене параметара, за које не постоје прецизна мерења. Овакви модели могу да се примене у претклиничкој пракси и могу да буду од користи лекарима за тестирање и утврђивање поремећаја чула слуха. Развој сложеног модела кохлее може бити од користи и за даљу анализу средњег и спољашњег ува, као и за анализу провођења звука и вибрација кроз кости лобање. Модел кохлее се може довести у везу са моделом главе и анализом процеса провођења звука кроз кости. На крају, важна примена сложених модела кохлее се односи на тестирање и унапређивање кохлеарних импланата – нове генерације уређаја који све више замењују слушне апарате. Кохлеарни импланти који су данас у употреби раде на принципу уметања низа електрода у кохлеу чији је задатак да за утврђену улазну фреквенцију створе побуду тачно одређеног аудиторног нерва. Овај вид импланата ради по основу провођења звука кроз ваздух. Поред њих, у употреби су и импланти који раде на принципу провођења звука кроз кости. У том случају се узрокују вибрације темпоралне кости које доводе до жељеног одзива кохлее. Детаљна анализа одзива кохлее и параметара који утичу на поремећај одзива може довести до побољшања карактеристика импланата. Даље усавршавање модела кохлее који су представљени у овој дисертацији и њихова примена у области кохлеарних импланата је један од задатака будућих истраживања.

#### **1.4. Преглед садржаја докторске дисертације**

Докторска дисертација садржи уводна разматрања у оквиру поглавља 1 која се односе на предмет рада, основне хипотезе које су коришћене у развоју модела, као и на циљ и значај истраживања и коришћене методе у раду. Поглавље 1 даје увид у анатомију и функцију ува, а самим тим и кохлее. Објашњена је структура делова ува и њихова одговарајућа улога, објашњени су процеси који се дешавају од појаве звука до примања информације о звуку. У наставку дисертације објашњени су механички модели (поглавље 3), акустична једначина која је коришћена за опис простирања таласа кроз флуидне коморе кохлее, Њутнова динамичка једначина којом се описује вибрирање мембране кохлее, као и спрегнути систем. На крају поглавља дат је хармонијски одзив који се погодан за анализу

сходно хармонијској побуди и хармонијском одзиву базиларне мембране. У четвртом поглављу (4) представљен је геометријски сложен 2D модел кохлее, укупно три пресека, који је моделиран као активни модел кохлее и који укључује у разматрање силу која се јавља на спољашњим слушним ћелијама, а која је последица појаве струја и промене потенцијала унутар Кортијевог органа. Сила која је добијена као резултат модела у простору стања (поглавље 6) у истом пресеку је коришћена као улазна величина 2D модела кохлее и поређена су померања њихових мембрана. У петом поглављу (5) су представљени механички модели кохлее који су решавани методом коначних елемената, дати су геометријски параметри и материјалне карактеристике и приказани су основни резултати модела. Поглавље 6 обухвата моделе у простору стања – једначине које су коришћене за формирање једначине стања и једначине излаза, уздужно електрично спрезање у временском домену и превођење на фреквентни домен Лапласовом трансформацијом. На крају овог поглавља су приказани и добијени резултати електро-механичких модела кохлее у простору стања. У поглављу 7 извршено је поређење добијених резултата модела, механичких и електро-механичких, са експерименталним мерењима, првенствено Гринвудовом функцијом, и резултатима других модела који су преузети из литературе. Поглавље 8 даје анализу одзива модела у складу са променом одређених параметара, утврђује како се одзив мења и у коликој мери ако се одређени параметар промени. У поглављу 8 дата су закључна разматрања, а поглавље 10 садржи коришћену литературу у изради дисертације.

## 2. Анатомија и функција кохлее

Кохлеа представља део унутрашњег ува и за разумевање функционисања кохлее неопходно је разумети функционисање целог ува и његову анатомију. Због тога је важно објаснити анатомију и функцију ува, а онда и засебно кохлее која представља један део овог сложеног органа, органа чула слуха.

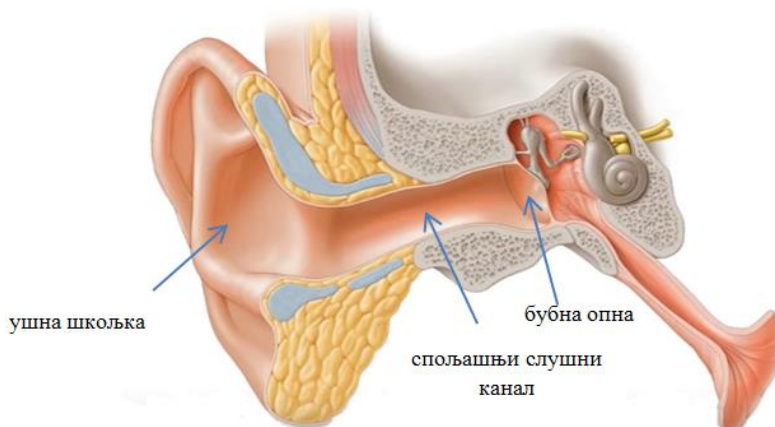
### 2.1. Анатомија ува

Људски орган слуха је уво. Уво прима информације о звуку из спољашње средине и тај звук се преноси преко спољашњег, средњег и унутрашњег ува до аудиторног нерва који прослеђује информацију о звуку до коре великог мозга [1].

Спољашње уво се састоји од ушне шкољке и спољашњег слушног канала (слика 1). На крају спољашњег слушног канала налази се бубна опна која дели спољашње уво од средњег [2]. Ушна шкољка прикупља вибрације из ваздуха које стварају звуке и спроводи их даље кроз спољашњи слушни канал до бубне опне. Структура ушне шкољке је углавном хрскавичаста. Хрскавица не постоји на крају ушне шкољке, у делу ресице, а има је мање у централном делу шкољке – унутар трагуса и на почетку хеликса [3]. Попут хрскавице носа и хрскавица ува расте током читавог живота. Ушна шкољка је причвршћена за главу спољашњим лигаментима (предњим и задњим), док су њени хрскавичасте делови повезани у целину унутрашњим лигаментима. Мишићи ушне шкољке се такође деле на спољашње и унутрашње.

Спољашњи слушни канал је дужине око 2,5 *cm* и у својој спољној трећини има хрскавичасту подлогу која, идући према крају, прелази у коштану. Слушни канал је облика латиничног слова S. Повлачењем ушне шкољке навише и уназад слушни канал се затеже и исправља у свом латералном делу, чиме постаје погодан за увлачење инструмената приликом прегледа бубне опне [2].



Слика 1: Спољашње уво<sup>1</sup>

Бубна опна затвара спољашњи слушни канал под углом од  $45^{\circ}$  –  $55^{\circ}$  тако да су доњи и предњи део канала дужи у односу на горњи и задњи део канала. Бубна опна је седефасте боје и има облик овалне плоче, јако је танка, свега  $0,1\text{ mm}$ , али је јако издржљива на оптерећења (пре свега на притисак).

Слика 2: Бубна опна<sup>2</sup>

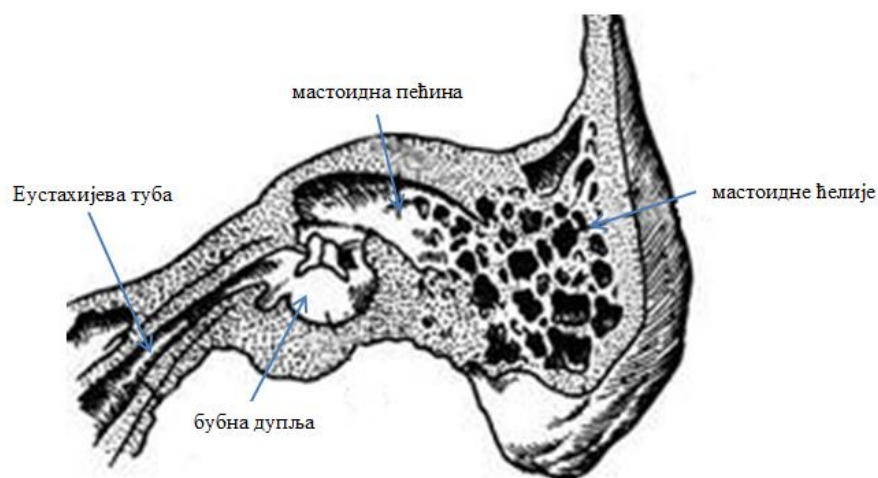
Јак ваздушни притисак ипак може да доведе до њеног оштећења. Оштећење бубне опне може бити изазвано и физичким дејством. Оштећена бубна опна доводи до слабљења или потпуног губитка слуха, у зависности од степена оштећења опне. Бубна опна у свом спољашњем, удубљеном, средишњем делу има левкасто удубљење – пупак (лат. *umbo*), повише ког се пружа трака (лат. *stria mallearis*) и на њеном врху мало округло испупчење

<sup>1</sup> Измењена слика изворно преузета са <https://www.kenhub.com/en/start?lecture=head-neck>

<sup>2</sup> Измењена слика изворно преузета са [http://otitismedia.hawkelibrary.com/normal/1\\_G](http://otitismedia.hawkelibrary.com/normal/1_G)

(лат. *prominentia mallearis*) [2]. Ова трака и испупчење су у контакту са дршком чекића и њеним латералним наставком. Захваљујући том контакту вибрације из спољашњег ува се преносе у средње уво. Бубна опна је у једном свом делу затегнута, а у другом лабава. На граници између лабавог и затегнутог дела пролази бубна врпца (лат. *chorda tympani*), која је грана н-фацијалиса (лат. *n. facialis*). У наставку бубне опне налази се средње уво.

Средње уво чине три шупљине – мастоидна пећина, бубна дупља и слушна труба (Еустахијева туба) [2]. Бубна дупља представља простор неправилног облика, испуњен ваздухом, који је смештен унутар темпоралне кости. Ваздух у дупљу улази из ждрела преко Еустахијеве тубе, а преко Еустахијеве тубе се врши и отицање слузи из дупље и њено стално проветравање. У бубној дупљи се налазе три кошчице – чекић, наковањ и узенгија (најмања кост у људском организму) које су у међусобном контакту и преносе вибрације из спољашњег ува, преко бубне опне, до унутрашњег ува. Бубна дупља је ограничена у латералном правцу бубном опном, у медијалном правцу латералним делом зида унутрашњег ува, у задњем делу је у контакту са мастоидном пећином, преко које је у контакту са мастоидним ћелијама, а у предњем делу је у контакту са аудиторном, Еустахијевом тубом. У зиду бубне дупље постоји канал, у делу ка бубној опни, кроз који бубна врпца улази у дупљу. Кроз Хјугиеров канал (енгл. *canal of Huguier*) бубна врпца напушта бубну дупљу [3].

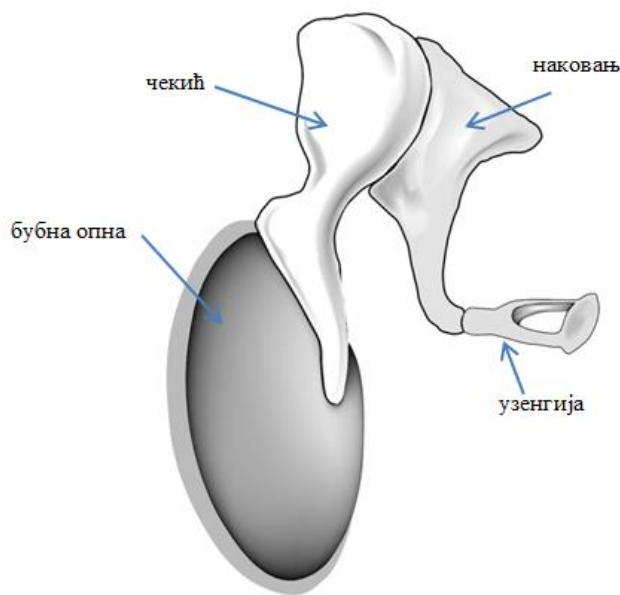


Слика 3: Средње уво<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Измењена слика изворно преузета са

[http://intranet.tdmu.edu.ua/data/kafedra/internal/lor/classes\\_stud/en/stomat/lor/1anatomy%20%20of%20%20the%20%20ear.htm](http://intranet.tdmu.edu.ua/data/kafedra/internal/lor/classes_stud/en/stomat/lor/1anatomy%20%20of%20%20the%20%20ear.htm)

Слушне кошчице (лат. ossicles) – чекић, наковањ и узенгија, које се налазе у бубној дупљи, пружају се од бубне опне до вестибуларног отвора коштаног унутрашњег ува. Везане су за зидове дупље лигаментима (три за чекић и по један за наковањ и узенгију), а међусобно су спојене помоћу два покретна зглоба и покривене слузокожом средњег ува.



Слика 4: Слушне кошчице – чекић, наковањ и узенгија<sup>4</sup>

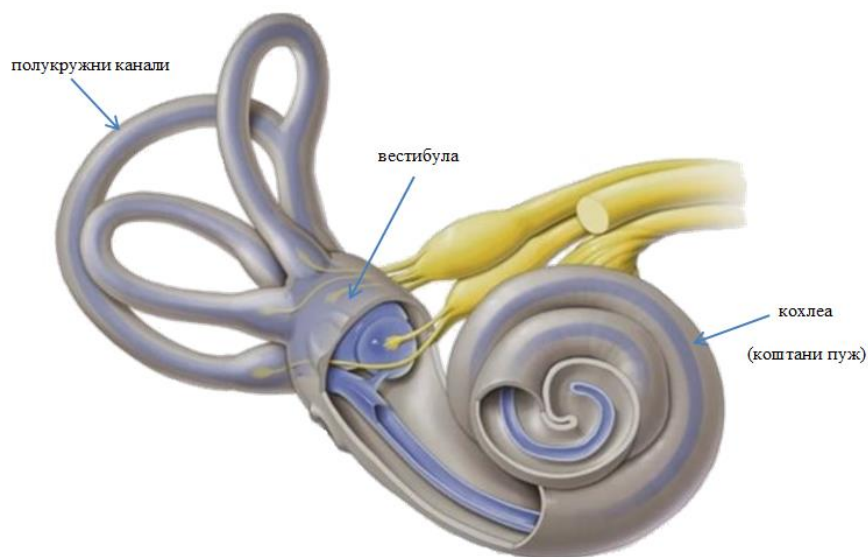
Слушне кошчице имају два мишића (лат. *m. tensor tympani* и *m. stapedius*) који врше одређене покрете у зглобовима кошчица и имају улогу да смање амплитуду осциловања таласа, а да повећају притисак за око 20 пута [4]. Чекић је највећа слушна кошчица и у контакту је са бубном опном, док је узенгија најмања слушна кошчица и њена основа је причвршћена за ивицу вестибуларног отвора прстеном везом (овални прозор). Окоштавање овог прстена у старости доводи до губитка слуха.

Најважнији и најсложенији део ува је унутрашње уво које се налази одмах иза средњег ува. Назива се још и лавиринт због своје сложене структуре и састоји се из два дела – коштаног лавиринта, који представља низ шупљина које се налазе у веома чврстом, такорећи окамењеном делу темпоралне кости и мембранског (опнастог) лавиринта, који чине кесе и канали испуњени вискозном течношћу (ендолимфа), одвојени мембранама, а

<sup>4</sup> Измењена слика изворно преузета са <https://www.studyblue.com/notes/note/n/lab-practical-1-osteology/deck/15566657>

које се налазе у коштаном шупљини. Опнасти лабиринт не испуњава коштани лабиринт, већ се између њих налази течност, која се назива перилимфа [2], [3].

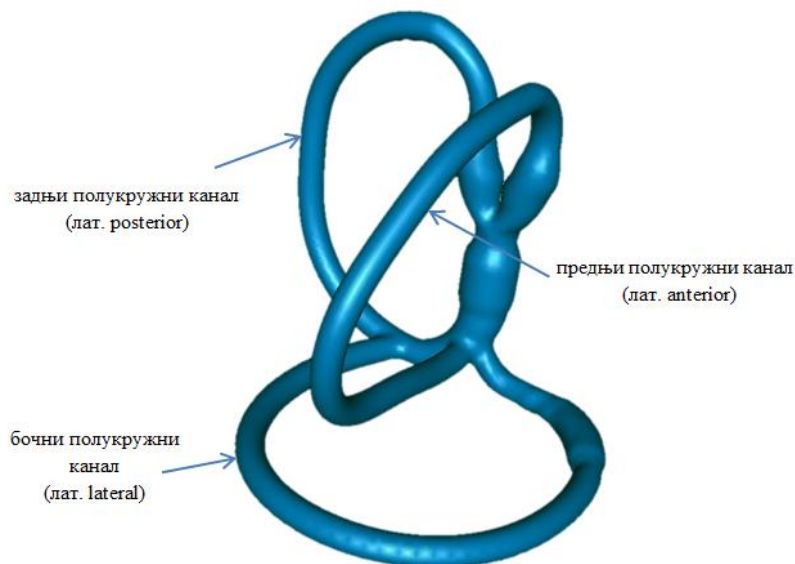
Коштани лабиринт чине три дела: вестибула, полукружни канали и кохлеа (пуж). Вестибула је централни део коштаног лабиринта и на њеном латералном зиду се налази овални прозор (лат. fenestra vestibuli) који представља површ по којој се додирују унутрашње уво и узенгија.



Слика 5: Коштани лабиринт<sup>5</sup>

Полукружних канала има три. То су предњи (лат. canalis semicircularis anterior), задњи (лат. canalis semicircularis posterior) и спољни или бочни (лат. canalis semicircularis lateralis). Ови канали се налазе у трима равнима, које су под углом од 90°. Сви канали на крајевима имају проширења које се називају ампуле. Канали укупно имају пет отвора, односно улаза у вестибулу, с обзиром да предњи и задњи канал имају један заједнички улаз.

<sup>5</sup> Измењена слика изворно преузета са <https://www.kenhub.com/en/videos/structure-of-labyrinth-and-inner-ear>

Слика 6: Полукружни канали<sup>6</sup>

Трећи део коштаног лавиринта је кохлеа (слика 7). Назива се још и пуж зато што грађом подсећа на кућицу баштенског пужа.

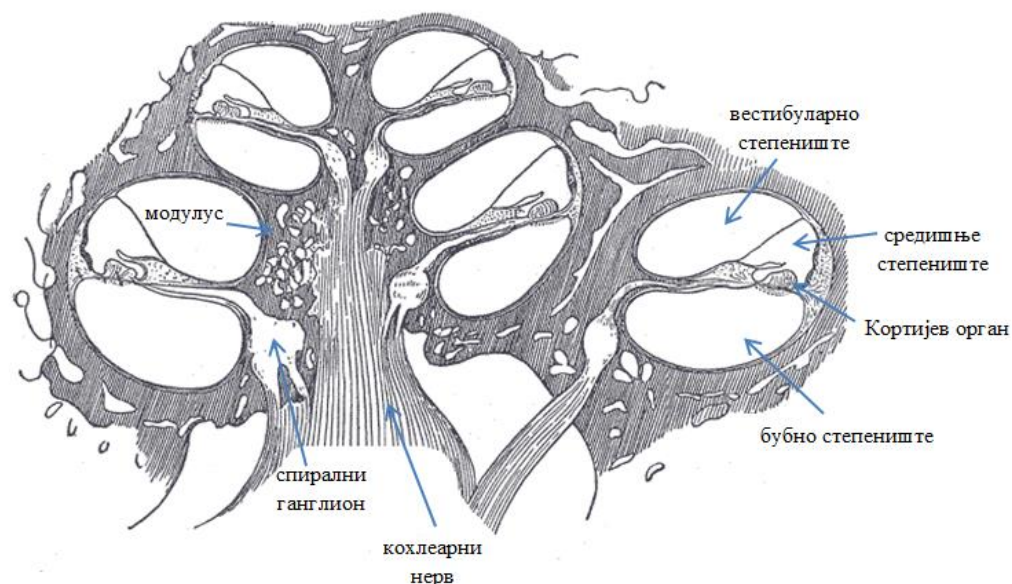
Слика 7: Коштани лавиринт – кохлеа. Два навоја и три четвртине око модулуса<sup>7</sup>

Кохлеа заузима предњи део коштаног лавиринта. Састоји се од централне осе коничног облика, која се назива модурус (лат. modiolus cochleae) и канала, чији су унутрашњи зидови ограничени модурусом и који описују два круга и три четвртине спирале око

<sup>6</sup> Слика модела креираног у Истраживачко-развијном центру за биоинжењеринг, Крагујевац.

<sup>7</sup> Измењена слика изворно преузета са <http://aclanganatomy.com/multimediaoplayer.aspx?multimediaid=10528695>

модулуса, идући од базе ка апексу. Ослонац кохлеје садржи спирални канал у коме се налази ганглион слушног живца.

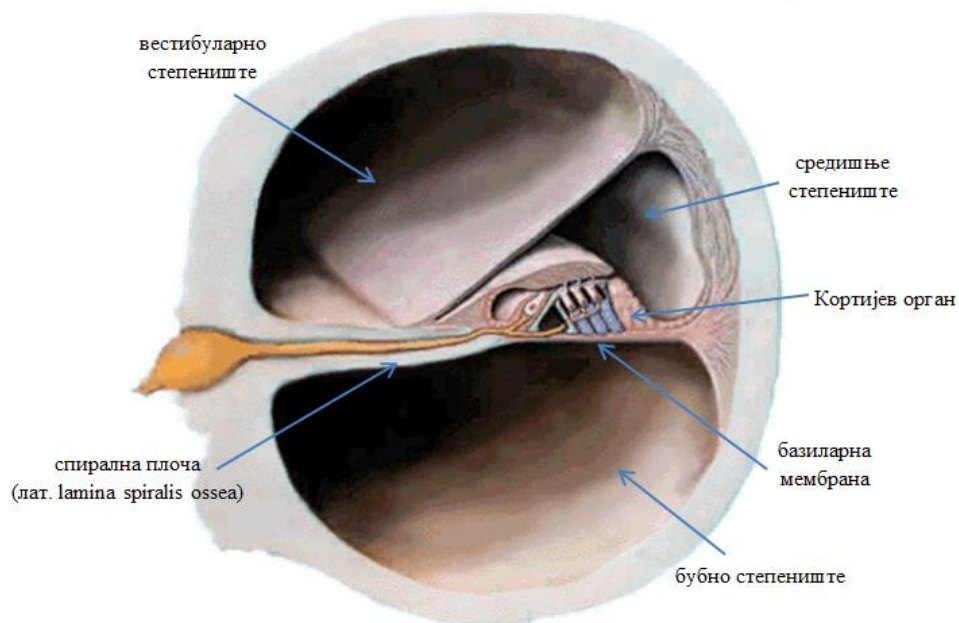


Слика 8: Кохлеа – попречни пресек<sup>8</sup>

Од ослонаца креће и спирална плоча (лат. *lamina spiralis ossea*), која заједно са базиларном мембраном дели кохлеу на два дела – вестибуларно степениште (лат. *scala vestibuli*) и бубно степениште (лат. *scala tympani*). Базиларна мембрана простире се од слободног краја спиралне плоче до спољашњег зида кохлеје и на тај начин учествује у раздвајању ове две коморе, које комуницирају међусобно у делу апекса модулуса преко малог отвора који се зове хеликотрема (лат. *helicotrema*).

<sup>8</sup> Измењена слика изворно преузета са <http://www.bartleby.com/107/illus928.html>

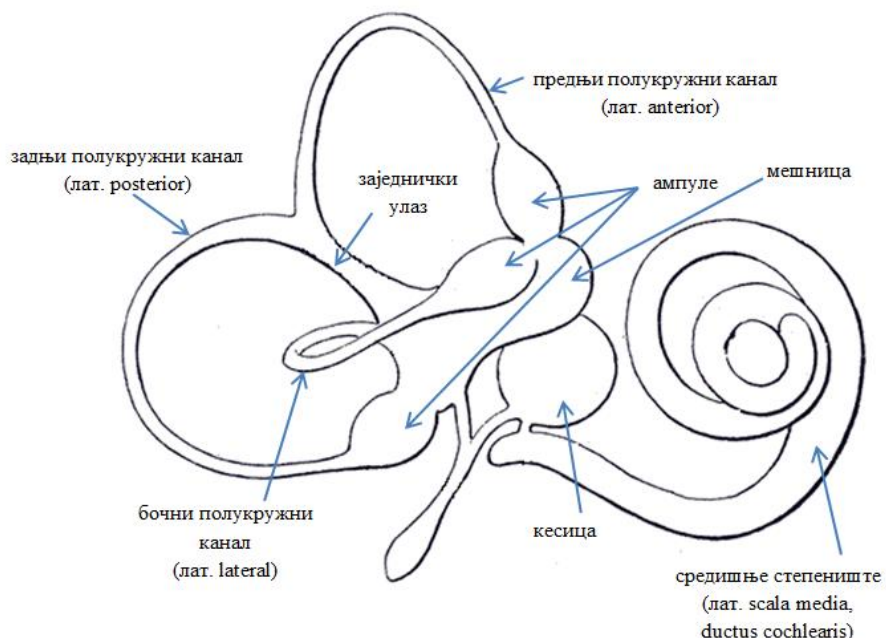




Слика 9: Кохлеа – делимични попречни пресек<sup>9</sup>

Мембрански лавиринт смештен је у коштаном лавиринту, али је од њега мањи. Он не испуњава простор до коштаног лавиринта, већ се између налази течност – перилимфа (перилимфа настаје од ендолимфе која процесом осмозе пролази кроз зид мембранског лавиринта). Унутрашњост мембранског лавиринта је такође испуњена течношћу – ендолимфом. На његовим зидовима гранају се акустични нерви.

<sup>9</sup> Измењена слика изворно преузета са [http://www.apsubiology.org/anatomy/2010/2010\\_Exam\\_Reviews/Exam\\_4\\_Review/CH\\_15\\_Spiral\\_Organ\\_of\\_Corti.htm](http://www.apsubiology.org/anatomy/2010/2010_Exam_Reviews/Exam_4_Review/CH_15_Spiral_Organ_of_Corti.htm)

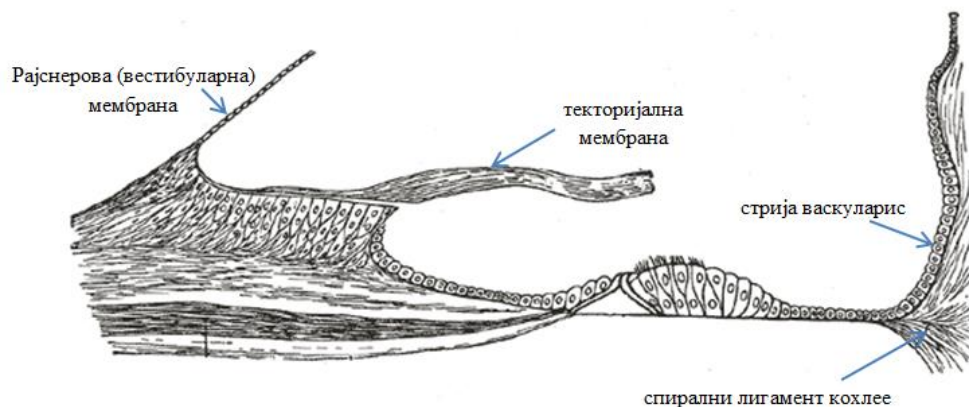
Слика 10: Мембрански лавиринт<sup>10</sup>

Унутрашњи, мембрански лавиринт има два проширења у централној шупљини коштаног ува, у вестибулуму. То су мешница (лат. *utricle*) и кесица (лат. *sacculus*). Мешница је већа и овалног облика, док је кесица лоптастог облика [2]. Међусобно су повезане једним каналићем. Са мешницом су преко пет улаза повезана три опнаста полукружна канала (лат. *ductus semicirculares*), који се налазе у истоименим коштаном каналима. Кесица опнастог лавиринта је танким каналићем повезана са почетним, вестибуларним делом опнастог пужа.

У опнастом пужу (лат. *ductus cochlearis*) налази се рецептор чула слуха. Лат. *ductus cochlearis* представља средњу комору у коштаном лавиринту и назива се још и средишње степениште или лат. *scala media*. Описује такође два круга и три четвртине спирале око ослонца, модулуса и протеже се уз спољашњи зид коштаног пужа, насупрот спиралне плочице. Са истањеног дела периостеума прекривајући спиралну плочицу пружа се вестибуларна или Рајснерова мембрана (енгл. *Raissner's membrane*) која се завршава на спољашњем зиду коштаног пужа, мало повише краја базиларне мембране. Ова мембрана је танка и хомогена и прекривена слојем епителних ћелија. Рајснеровом мембраном је средишње степениште одвојено од вестибуларног.

<sup>10</sup> Измењена слика изворно преузета са <http://www.bartleby.com/107/illus924.html>

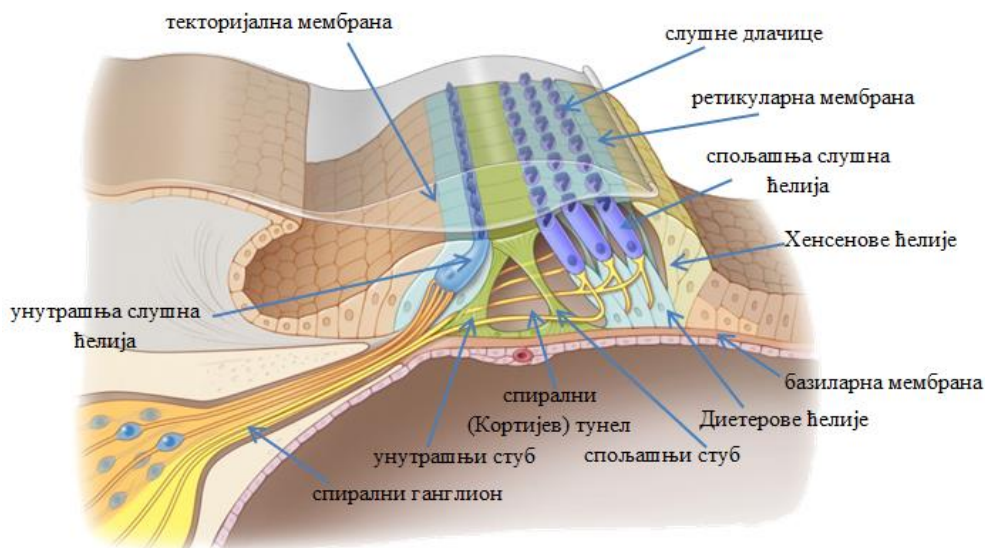


Слика 11: Доњи део опнастог пужа<sup>11</sup>

На свом горњем крају средишње степениште је у контакту са хеликотремом, а на свом доњем крају је спојена са кесицом косим, кратким каналом (Хенсенов канал). Унутар средишњег степеништа, на базиларној мембрани, налази се Кортијев орган који садржи рецепторе за звучне надражаје. Периостеум који формира спољашњи зид средишње коморе је знатно истањен и назива се спирални лигамент. Спирални лигамент се раздваја у три целине: базиларну кресту, која обезбеђује причвршћивање базиларне мембране, кесицу спиралног продужетка (лат. *sulcus spiralis externus*), која се налази повише базиларне кресте, а трећи део је део спиралног лигамента у коме се налази већи број капилара и крвних судова и који се назива стрија васкуларис (лат. *stria vascularis*) [3].

Спирална плоча се састоји од две коштане плоче између којих се налазе канали за трансмисију влакана акустичних нерава. Базиларна мембрана игра битну улогу у анатомији и функционисању унутрашњег ува. Она физички раздваја у наставку спиралне плоче простор коштаног лавиринта на две коморе – вестибуларно степениште и бубно степениште. На унутрашњој страни базиларне мембране, која је тања и покривена слојем васкуларног проводљивог ткива, налази се Кортијев орган. Кортијев орган има сложenu структуру и значајан је по томе што се у њему дешава стварање електричне струје и импулса и инервисање акустичних нерава, који даље информације о звуку прослеђују до коре великог мозга.

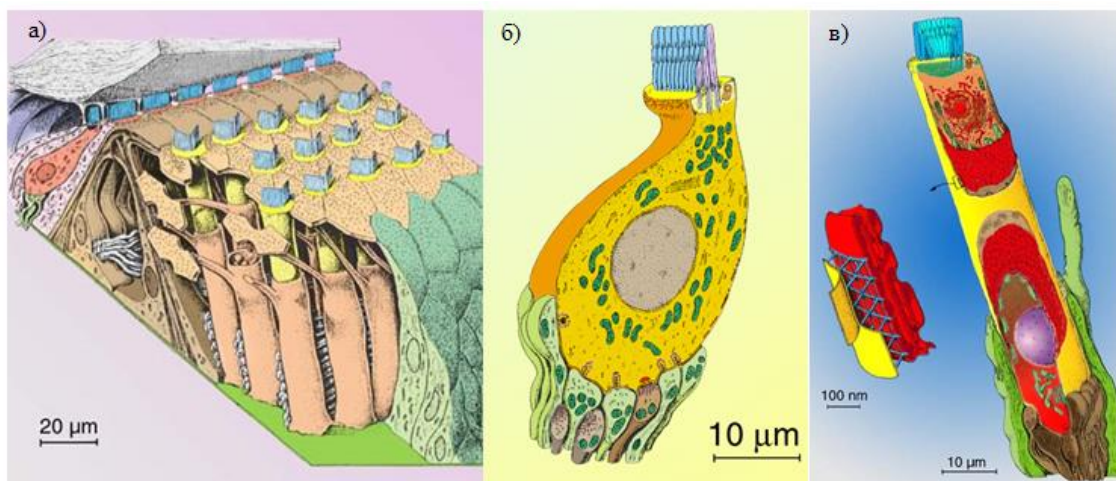
<sup>11</sup> Измењена слика изворно преузета са <http://www.bartleby.com/107/illus929.html>

Слика 12: Кортијев орган<sup>12</sup>

Кортијев орган иде спирално око ослонца заједно са флуидним коморама коштаног и мембранског лавиринта. Састављен је од низа епителних ћелија које су спиралним тунелом подељене на медијални (средишњи) и латерални (бочни) део. Ближе центру средишњег степеништа, у медијалном делу, налази се по један ред стубова на којима се налази један ред слушних, трепљастих ћелија. Унутрашњи стубови заклапају угао око  $60^\circ$  са базиларном мембраном. Нешто даље распоређени су спољашњи стубови који носе спољашње слушне ћелије (3-4). Спољашњи стубови заклапају угао од око  $40^\circ$  са базиларном мембраном. Унутрашњи и спољашњи стубови су нагнути једни ка другима и ослоњени међусобно, а у основи су ослоњени на базиларну мембрану, тако да формирају тунел облика троугла који се назива Кортијев тунел. Код спољашњих слушних, трепљастих ћелија ослонац пружају и такозване Диетерове (енгл. Dieters) и Хенсенове (енгл. Hensen) ћелије, које се налазе у наставку спољашњих стубова [3][3]. Слободни крајеви спољашњих трепљастих ћелија и потпорних ћелија образују мембрану попут мреже која се назива ретикуларна мембрана. Кроз ретикуларну мембрану пролазе наставци слушних ћелија, слушне длачице, а изнад њих се налази текторијална мембрана која прекрива цео Кортијев орган. При треперењима ендолимфе текторијална мембрана (причвршћена је само једним својим крајем за унутрашњи зид мембранског пуџа, док је

<sup>12</sup> Измењена слика изворно преузета са <https://hearinglosscore.stanford.edu/2012/10/organ-of-corti/>

други крај слободан) осцилује и надражује слушне длачице. Текторијална мембрана је осетљивија на попречне осцилације, него на уздужне.



Слика 13: Слушне ћелије – а) приказане на Кортијевом органу, б) унутрашња слушна ћелија, в) спољашња слушна ћелија<sup>13</sup>

Слушне ћелије су кратке ћелије, спаковане у колоне. Доњи крај ових ћелија је на половини Кортијевих стубова, а њихов слободни, горњи крај је у равни са главама стубова. Све ћелије имају велико једро. Доњи крај ћелија је у контакту са влакнима акустичних нерава. У једном пресеку Кортијевог органа налази се по једна унутрашња слушна ћелија и по 3-4 спољашње слушне ћелије (у делу који је ближи бази налазе се по три спољашње слушне ћелије, које су правило распоређене, док у апикалном делу може да их буде и по четири и да буду неправилно распоређене). Сматра се да људско здраво уво има око 12 000 спољашњих трепљастих ћелија и око 3 500 унутрашњих трепљастих ћелија, чије се димензије изражавају у микрометрима [5]. Настанак ових ћелија се дешава још у ембрионалном развићу и на даље се број ових ћелија може само смањити, што доводи до слабљења или губитка слуха.

У контакту са слушним ћелијама су дендрити неурона чија тела образују спирални ганглион. Од спиралног ганглиона полазе неурити који образују акустични део VIII можданог живца.

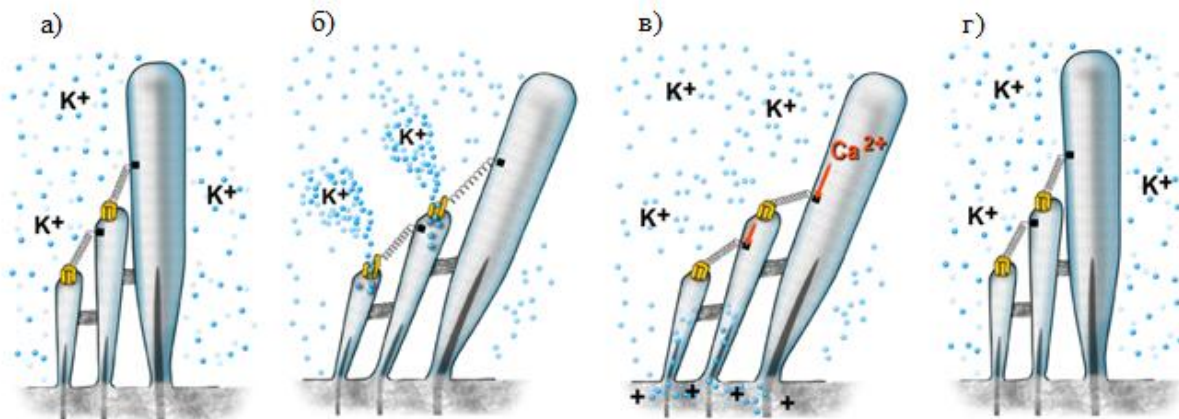
Акустични нерв се у близини доњег дела спољашњег слушног канала дели у две групе: предњи или кохлеарни и задњи или вестибуларни нерв. Кохлеарни нерв се у основи

<sup>13</sup> Слика је направљена од три слике преузете са <http://147.162.36.50/cochlea/cochleapages/anatomy/inner.htm>

модулуса грана на велики број влакана и формира спирални ганглион. Вестибуларни нерв иде до мешице, кесице и ампула полукружних канала. Од ових влакана се формира вестибуларни ганглион.

## **2.2. Функција кохлее**

Кохлеа обавља сложену функцију у процесу детектовања слуха. Вибрације које се преко спољашњег и средњег ува преносе на овални прозор кохлее доводе до појаве таласања флуида у горњој комори кохлее – вестибуларно степениште. Простирање таласа кроз перилимф вестибуларног степеништа преко хеликотреме узрокује појаву таласа кроз перилимф бубног степеништа, а заједно са њим и вибрације базиларне мембране. Базиларна мембрана дели бубно степениште од средишњег степеништа, па осцилације базиларне мембране покрећу и средишње степениште које је испуњено течносту – ендолимфом, у коме је смештен Кортијев орган који има сложену грађу и јако је малих димензија. Битни делови Кортијевог органа су спољашње и унутрашње трепљасте, слушне ћелије. Целом дужином средишњег степеништа налази се велики број ових ћелија. На врху трепљастих ћелија налазе се стереоцилије, које су у контакту са ретикуларном опном, мембраном (лат. *reticular lamina*). На врху стереоцилија налазе се кратке длачице – цилије, које су у контакту са текторијалном мембраном, која раздваја средишње степениште од вестибуларног. Померање базиларне мембране доводи до померања Кортијевог органа – спољашњих и унутрашњих трепљастих ћелија, њихових стереоцилија и цилија, које осим вертикалних трансляторних померања подлежу и смицању, услед контакта са текторијалном мембраном и ретикуларном опном. На тај начин долази до промене потенцијала унутар трепљастих ћелија и до механичко – електричне конверзије.



Слика 14: Деполаризација слушних ћелија – а) стереоцилије без оптерећења, б) извијање стереоцилија и отварање канала кроз који пролазе катјони калијума, в) отварање канала за пролаз калцијумових катјона, који активирају мијозин, г) затварање калијумових и калцијумових катјонских канала и враћање стереоцилије у првобитни положај<sup>14</sup>

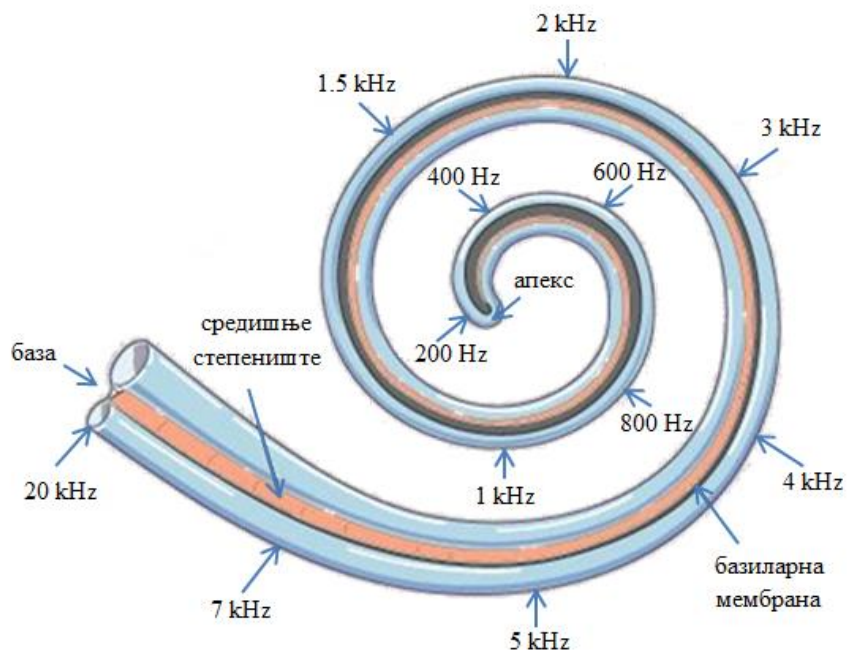
Извијањем стереоцилија отварају се јонски канали, осетљиви на истезање [6]. Ендолимф је богат калијумом и има потенцијал од око  $80\text{ mV}$ , док потенцијал трепљастих ћелија износи  $-70\text{ mV}$  и  $-55\text{ mV}$ . Отварањем јонских канала услед разлике у потенцијалу долази до апсорбовања калијума и у телу трепљастих ћелија долази до деполаризације. Осим калијума у тела трепљастих ћелија улазе и катјони калцијума. Канали кроз које пролазе катјони калијума се затварају пре враћања стереоцилије у првобитни положај. Промена потенцијала трепљастих ћелија доводи до појаве електричне струје. Струја која настаје у спољашњим трепљастим ћелијама доводи до појачавања сигнала. Захваљујући томе људско уво може да разликује звучне сигнале који имају фреквенцијски опсег од  $16\text{ Hz}$  до  $20\text{ kHz}$ . Струја настала у спољашњим трепљастим ћелијама доводи до појаве силе која делује натраг на базиларну мембрану, тако да долази до повратне спреге. Кортијев орган делује као појачавач и омогућава фино детектовање звука и његово нијансирање у датом фреквенцијском опсегу.

Сваки звук у опсегу од  $16\text{ Hz}$  до  $20\text{ kHz}$  доводи до вибрирања базиларне мемbrane тако да свакој фреквенцији одговара тачно једна позиција пика на дужини базиларне мемbrane, која код одраслог човека има дужину од око  $35\text{ mm}$ . Захваљујући томе што свакој фреквенцији звука одговара тачна позиција достизања максимума, пика, разликујемо

<sup>14</sup> Слика је направљена од четири слике извучене са анимације са <http://slideplayer.com/slide/7845723/>



звуке. Почетку базиларне мембране одговарају звуци високих фреквенција (20 kHz) и идући ка крају базиларне мембране одговарајуће фреквенције звука се смањују, тако да крају базиларне мембране, у делу до хеликотреме, максимуме достижу звуци ниских фреквенција (16 Hz) (слика 15).



Слика 15: Тонотопија базиларне мембране<sup>15</sup>

Ову карактеристику у функционисању базиларне мембране при детектовању слуха први је установио мађарски биофизичар, Џорџ вон Бекеси (Georg von Békésy), а прикупљање првих експерименталних резултата урадио је Гринвуд (Donald D. Greenwood) који је на основу тих резултата извео функционалну зависност између фреквенције звука и позиције остваривања максималне вредности на базиларној мембрани код неких животињских врста и код човека – Гринвудова функција [7]. Вибрације базиларне мембране се после достизања максималне амплитуде осциловања брзо пригушују, тако рећи нестају. Дуж целе базиларне мембране простире се и Кортијев орган, спољашње и унутрашње трепљасте ћелије. Спољашње трепљасте ћелије делују као појачавач сигнала и праве повратну спрегу са базиларном мембраном захваљујући сили која повратно делује на базиларну мембрану, док унутрашње трепљасте ћелије имају функцију у инервисању

<sup>15</sup> Измењена слика изворно преузета са <https://www.britannica.com/science/hearing-sense>

аудиторних нерава. Приликом провођења звука активираће се она унутрашња трепљаста ћелија која се налази изнад базиларне мембране, на делу где се достиже максимална амплитуда осциловања и самим тим тачно одређени аудиторни нерв који прослеђује информацију о звуку тачно одређене фреквенције до коре великог мозга.

При анализи механичких компоненти кохлее средње степениште је могуће изоставити у анализи, пошто не утиче у великој мери на одзив модела. Средња комора је битна у анализи електричних и електро-механичких модела кохлее, с обзиром да се у средњој комори налази Кортијев орган унутар кога долази до промене потенцијала и појаве електричне струје.

### 3. Механички модели кохлее

Механички модел кохлее је упрошћен модел који не обухвата средњу комору – средње степениште [8]. Овај модел је користан за разумевање функционисања кохлее и анализу одређених поремећаја и представља најједноставнији модел кохлее. Модел чине вестибуларно (енгл. SV) и бубно степениште (енгл. ST) које раздваја базиларна мембрана и њиме се остварује увид у механичко понашање кохлее – осциловање базиларне мембране које настаје као последица детектовања звука.

#### 3.1. Математички модел

Математички модел обухвата акустичну таласну једначину и Њутнову динамичку једначину. Акустична таласна једначина [9] описује простирање таласа које се дешава у флуиду унутар вестибуларног степеништа након што се вибрације са узенгије пренесу на овални прозор који се налази на вестибуларном степеништу и који има својства мембране. Талас се кроз флуид креће до краја коморе, до хеликотреме. Простирање таласа ствара притисак на базиларну мембрану која се налази испод вестибуларног степеништа и доводи до њеног осциловања. Захваљујући контакту две коморе (хеликотрема) долази до простирања таласа и у доњој комори, бубном степеништу. Таласање флуида у доњој комори такође утиче на вибрације базиларне мембране. Осциловање базиларне мембране је могуће описати Њутновом динамичком једначином [10]. Простирање таласа и осциловање базиларне мембране су међусобно чврсто везани и зависни тако да једначине чине спрегнути систем који је потребно решити.



### 3.1.1. Акустична таласна једначина

Таласном једначином се описује простирање таласа кроз одређену средину. Таласи могу бити светлосни, звучни, водени, електромагнетни итд. Ако је талас који се простире звучни, онда је таласна једначина акустична. Једначином се дефинише промена дате скаларне физичке величине  $\varphi$  у времену и у простору – други парцијални изводи. Таласна једначина припада групи парцијалних диференцијалних једначина вишег реда (другог реда). Парцијалне диференцијалне једначине се могу поделити у три групе, у зависности од тога да ли им је дискриминанта већа (хиперболичне), једнака (параболичне) или мања од нуле (елиптичне) [11]. Таласна једначина припада групи хиперболичних једначина. Аналитичко решавање таласне једначине, као и свих парцијалних диференцијалних једначина, је сложено, тако да је у пракси више у употреби нумеричко решавање.

Општи облик таласне једначине је [9]:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \varphi \quad 3.1$$

У једначини 3.1  $c$  представља брзину простирања таласа и константна је у датој средини, док  $\nabla^2 = \Delta$  представља Лапласијан. Брзина таласа може да се мења са фреквенцијом таласа и та појава се назива дисперзија. У том случају брзина таласа  $c$  из једначине 3.1 треба да буде замењена фазном брзином,  $v$ :

$$v = \frac{\omega}{k} \quad 3.2$$

У једначини 3.2  $k$  представља таласни број, а  $\omega$  је кружна фреквенција таласа ( $\omega = 2\pi f$ ). Брзина таласа може зависити и од амплитуде таласа, што доводи до нелинеарне таласне једначине:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c(\varphi)^2 \nabla^2 \varphi \quad 3.3$$

Када је талас који се описује звучни таласна једначина постаје акустична таласна једначина у којој је посматрана скаларна величина акустични притисак (или брзина кретања честице) који зависи од положаја у домену и времена.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p = c^2 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) \quad 3.4$$

У једначини 3.4  $p$  представља акустични притисак,  $c$  је брзина звука,  $t$  је време, а  $x, y, z$  су координате Декартовог координатног система.

Таласна једначина може да се реши аналитички уколико су дефинисане границе домена. За произвољне границе домена није могуће одредити аналитичко решење. Зато се за решавање таласне једначине користе нумеричке методе. Најчешће коришћене нумеричке методе за решавање парцијалних диференцијалних једначина су метода коначних елемената, метода коначних запремина и метода коначних разлика [12], [13]. Таласна акустична једначина је парцијална диференцијална једначина другог реда, па је погодна за формирање централних разлика методом коначних разлика [14], [15].

У даљем тексту је описан поступак дискретизације таласне акустичне једначине са циљем нумеричког решавања проблема применом методе коначних елемената.

Општи облик таласне акустичне једначине (једначине 3.4-3.6) се своди на матрични запис [16].

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad 3.5$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad 3.6$$

Једначина 3.6 се интеграла по запремини [17].

$$\int_V N_k \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) dV - \frac{1}{c^2} \int_V N_k \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dV = 0 \quad 3.7$$

$$\int_V \left( N_k \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{c^2} N_k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right) \right) dV = 0 \quad 3.8$$

$N_k$  су интерполационе функције које су функције координата и нису функције времена ( $N_k = f(x_i)$ ,  $N_k \neq f(t)$ ).

Акустични притисак се може написати као скуп производа вредности притисака у чворовима коначних елемената ( $p^J$ ) и одговарајућих интерполационих функција (једначина 3.9).

$$p = N_j p^J \quad 3.9$$

Први интеграл у једначини 3.8, део настао из Лапласијана, може да се изрази преко извода производа интерполационе функције и првог парцијалног извода притиска:

$$\int_V N_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left( N_k \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dV - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial N_k}{\partial x_i} dV \quad 3.10$$

На први члан са десне стране једначине 3.10 може да се примени Гаусова теорема [18] којом се овај запремински интеграл преводи на површински. Гаусова формула за превођење интеграла дата је једначином 3.11.

$$\iiint_V (\nabla \cdot F) dV = \iint_S (F \cdot n) dS \quad 3.11$$

Гаусова теорема, или теорија дивергенције, изједначава запремински интеграл са површинским интегралом по затвореној контури, површини која ограничава дату запремину, тј. изједначава се проток векторског поља кроз површину са понашањем векторског поља унутар те површине. Вектори нормале су усмерени од површине. На основу једначине 3.11 први члан са десне стране једначине 3.10 се преводи на површински интеграл.

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (N_k \frac{\partial p}{\partial x_i}) dV = \int_S N_k \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i dS \quad 3.12$$

Једначина 3.12 се мења у једначину 3.10.

$$\int_V N_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \int_S N_k \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i dS - \int_V \frac{\partial(N_k p^J)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial N_k}{\partial x_i} dV \quad 3.13$$

$$\int_V N_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \int_S N_k q_{Si} dS - \int_V \frac{\partial N_k}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_i} p^J dV, \quad q_{Si} = \frac{\partial p}{\partial x_i} n_i \quad 3.14$$

$$\int_V N_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = \int_S N_k q_{Si} dS - \int_V N_{k,i} \cdot N_{J,i} p^J dV, \quad N_{k,i} = \frac{\partial N_k}{\partial x_i}, \quad N_{J,i} = \frac{\partial N_J}{\partial x_i} \quad 3.15$$

$$\int_V N_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV = F_k^S - p^J \int_V N_{k,i} \cdot N_{J,i} dV, \quad F_k^S = \int_S N_k q_{Si} dS \quad 3.16$$

$F_k^S$  у једначини 3.16 представља спољашњу, површинску силу. Добијени израз се мења у једначину 3.8:

$$F_k^S - p^J \int_V N_{k,i} \cdot N_{J,i} dV - \frac{1}{c^2} \int_V N_k \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(N_J p^J)}{\partial t} dV = 0 \quad 3.17$$

$$p^J \int_V N_{k,i} \cdot N_{J,i} dV + \frac{1}{c^2} \int_V N_k \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(N_J p^J)}{\partial t} dV = F_k^S \quad 3.18$$

Интерполационе функције нису функције времена, па ће њихов извод по времену бити једнак нули, за разлику од вредности притисака по чворовима који ће се мењати са временом.

$$p^J \int_V N_{k,i} \cdot N_{J,i} dV + \frac{1}{c^2} \int_V N_k \frac{\partial}{\partial t} N_J \frac{\partial(p^J)}{\partial t} dV = F_k^S \quad 3.19$$

$$p^J \int_V N_{k,i} \cdot N_{J,i} dV + \frac{1}{c^2} \int_V N_k N_J \frac{\partial}{\partial t} \dot{p}^J dV = F_k^S \quad 3.20$$

$$p^J \int_V N_{k,i} \cdot N_{J,i} dV + \frac{1}{c^2} \int_V N_k N_J \ddot{p}^J dV = F_k^S \quad 3.21$$

$$p^J \int_V N_{k,i} \cdot N_{J,i} dV + \frac{1}{c^2} \ddot{p}^J \int_V N_k N_J dV = F_k^S \quad 3.22$$

$$p^J H_{kJ} + \frac{1}{c^2} \ddot{p}^J Q_{kJ} = F_k^S \quad 3.23$$

У једначини 3.23 формиране су матрице  $H$  (енгл. acoustic stiffness) и  $Q$  (енгл. acoustic inertia) [19].

$$H_{kJ} = \int_V N_{k,i} \cdot N_{J,i} dV \quad 3.24$$

$$Q_{kJ} = \int_V N_k N_J dV \quad 3.25$$

Коначно, акустична таласна једначина може да се запише у облику:

$$\frac{1}{c^2} Q_{kJ} \ddot{p}^J + H_{kJ} p^J = F_k^S \quad 3.26$$

Ако се искористи природни гранични услов [20] да је спољашња површинска сила једнака нули ( $F_k^S = 0$ ), онда једначина 3.26 добија облик:

$$\frac{1}{c^2} Q_{kJ} \ddot{p}^J + H_{kJ} p^J = 0 \quad 3.27$$

Једначина 3.27 је од почетне једначине 3.6 сведена на матрични облик. Даље је потребно ову једначину и решити методом коначних елемената, за шта је коришћена Њумаркова метода [20].

Претпоставка је да се други извод притиска у произвољном тренутку времена може апроксимирати на основу вредности одређених у два суседна временска корака:

$$\ddot{p}(\tau) = (1 - \delta) {}^t \ddot{p} + \delta {}^{t+\Delta t} \ddot{p} \quad 3.28$$

У једначини 3.28  ${}^t\ddot{p}$  и  ${}^{t+\Delta t}\ddot{p}$  представљају друге изводе притиска у временским тренуцима  $t$  и  $t + \Delta t$ , а  $\delta$  је константа којом се коригују резултати и има обично вредност 0.5. Ова једначина се интеграла у временском интервалу  $\Delta t$ .

$$\dot{p}|_t^{t+\Delta t} = [(1 - \delta) {}^t\ddot{p} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{p}] \cdot t|_t^{t+\Delta t} \quad 3.29$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{p} - {}^t\dot{p} = [(1 - \delta) {}^t\ddot{p} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{p}] \cdot \Delta t \quad 3.30$$

$${}^{t+\Delta t}p = {}^tp + [(1 - \delta) {}^t\ddot{p} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{p}] \cdot \Delta t \quad 3.31$$

Још једна интеграција је потребна у временском интервалу  $\Delta t$  да би се добило решење за притиске.

$$p|_t^{t+\Delta t} = {}^t\dot{p} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} [(1 - \delta) {}^t\ddot{p} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{p}] \cdot \Delta t^2 \quad 3.32$$

$${}^{t+\Delta t}p = {}^tp + {}^t\dot{p} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} [(1 - \delta) {}^t\ddot{p} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{p}] \cdot \Delta t^2 \quad 3.33$$

Боља стабилност и тачност решења се постиже ако се коефицијент  $\delta$  замени коефицијентом  $\alpha$ , ( $\alpha = \frac{\delta}{2}$ ).

$${}^{t+\Delta t}p = {}^tp + {}^t\dot{p} \cdot \Delta t + (\frac{1}{2} - \alpha) {}^t\ddot{p}\Delta t^2 + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{p} \cdot \Delta t^2 \quad 3.34$$

$$\alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{p} \cdot \Delta t^2 = {}^{t+\Delta t}p - {}^tp - {}^t\dot{p} \cdot \Delta t - (\frac{1}{2} - \alpha) {}^t\ddot{p}\Delta t^2 \quad 3.35$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{p} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^{t+\Delta t}p - \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^tp - \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t\dot{p} - \frac{1-2\alpha}{2\alpha} {}^t\ddot{p} \quad 3.36$$

Други извод притиска одређен на крају временског корака се мења у једначину 3.27, која треба да буде задовољена за временски тренутак  $t + \Delta t$ , с обзиром да је Њумаркова метода имплицитна.

$$Q\ddot{p}^J + Hp^J = 0, \quad Q = \frac{1}{c^2}Q_{kJ}, \quad H = H_{kJ} \quad 3.37$$

$$Q {}^{t+\Delta t}\ddot{p} + H {}^{t+\Delta t}p = 0 \quad 3.38$$

$$Q \left( \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^{t+\Delta t}p - \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^tp - \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t\dot{p} - \frac{1-2\alpha}{2\alpha} {}^t\ddot{p} \right) + H {}^{t+\Delta t}p = 0 \quad 3.39$$

$$Q \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^{t+\Delta t}p - Q \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^tp - Q \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t\dot{p} - Q \frac{1-2\alpha}{2\alpha} {}^t\ddot{p} + H {}^{t+\Delta t}p = 0 \quad 3.40$$

$$\left(Q \frac{1}{\alpha \Delta t^2} + H\right)^{t+\Delta t} p = Q \left( \frac{1}{\alpha \Delta t^2} {}^t p + \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^t \dot{p} + \frac{1-2\alpha}{2\alpha} {}^t \ddot{p} \right) \quad 3.41$$

$$\hat{H}^{t+\Delta t} p = Q (a_0 {}^t p + a_1 {}^t \dot{p} + a_2 {}^t \ddot{p}) \quad 3.42$$

У једначини 3.42 уведени су коефицијенти  $a_i$ :

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_2 = \frac{1-2\alpha}{2\alpha}, \quad \hat{H} = Q \frac{1}{\alpha \Delta t^2} + H = Q \cdot a_0 + H \quad 3.43$$

Формирана је инкрементална шема. Уколико је једначина нелинеарна онда се решење коригује по итерацијама. Матрице таласна акустичне једначине су константне, тако да није потребно вршити корекцију по итерацијама. Корекција решења по итерацијама ће бити објашњена при извођењу Њутнове динамичке једначине.

### 3.1.2. Њутнова динамичка једначина

Њутнова динамичка једначина описује понашање солида при оптерећењима која се мењају у току времена. Општи облик једначине укључује инерцију, пригушење и крутост тела које је изложено динамичком оптерећењу (једначина 3.44).

$$M\ddot{u} + B\dot{u} + Ku = F \quad 3.44$$

У једначини 3.44  $M, B$  и  $K$  су матрице маса, пригушења и крутости,  $F$  је вектор спољашњих сила, а  $\ddot{u}, \dot{u}$  и  $u$  су редом вектори убрзања, брзина и померања чворова. Интеграцију ове диференцијалне једначине другог реда могуће је извршити на више начина.

У наставку је описана Њумаркова метода временске интеграције Њутнове динамичке једначине, која је примењена и за решавање акустичне таласне једначине [20].

Њутнова динамичка једначина која представља диференцијалну једначину другог реда се интеграла у  $N$  временских корака ( $\Delta t = \frac{T}{N}$ ). Дискретизацијом времена при нумеричком решавању једначине добијају се решења на почетку и на крају временских корака. Величине унутар једног временског корака се могу добити интерполацијом крајњих тачака. Ако је  $\tau$  време унутар временског корака ( $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ ) може се увести претпоставка да је убрзање константно за дати корак. Претпоставка да се убрзање не мења унутар временског корака записана је једначином 3.45. У једначини 3.45  ${}^t \ddot{u}$  и  ${}^{t+\Delta t} \ddot{u}$  су убрзања на почетку и на крају временског корака, док је  $\delta$  параметар који има вредности

између нуле и јединице ( $0 \leq \delta \leq 1$ ) и одређује усвојену вредност убрзања у датом временском кораку. Ако је  $\delta = 0$  онда је убрзање у кораку ( $\ddot{u}(\tau)$ ) једнако убрзању са почетка корака ( $\ddot{u}(\tau) = {}^t\ddot{u}$ ). Ако је  $\delta = 1$  онда је убрзање у кораку једнако убрзању на крају корака  $\ddot{u}(\tau) = {}^{t+\Delta t}\ddot{u}$ . За  $\delta = \frac{1}{2}$  убрзање у кораку је аритметичка средина убрзања са почетка и краја временског корака ( $\ddot{u}(\tau) = \frac{{}^t\ddot{u} + {}^{t+\Delta t}\ddot{u}}{2}$ ).

$$\ddot{u}(\tau) = (1 - \delta) {}^t\ddot{u} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{u} \quad 3.45$$

Једначина 3.45 се интегрирали у временском кораку  $\Delta t$  како би се одредиле брзине чворова.

$$\dot{u}|_t^{t+\Delta t} = [(1 - \delta) {}^t\ddot{u} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{u}] \cdot t|_t^{t+\Delta t} \quad 3.46$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} - {}^t\dot{u} = [(1 - \delta) {}^t\ddot{u} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{u}] \cdot \Delta t \quad 3.47$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + [(1 - \delta) {}^t\ddot{u} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{u}] \cdot \Delta t \quad 3.48$$

Потребна је још једна интеграција у временском интервалу  $\Delta t$  како би се добило решење за померања.

$${}^{t+\Delta t}u = {}^tu + {}^t\dot{u} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} [(1 - \delta) {}^t\ddot{u} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{u}] \cdot \Delta t^2 \quad 3.49$$

Ако се уместо параметра  $\delta$  уведе параметар  $\alpha = \frac{\delta}{2}$  једначина 3.49 добија мало другачији облик (једначина 3.50).

$${}^{t+\Delta t}u = {}^tu + {}^t\dot{u} \cdot \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) {}^t\ddot{u} + \alpha {}^{t+\Delta t}\ddot{u}\right] \cdot \Delta t^2 \quad 3.50$$

Њумаркова интеграција је имплицитна метода, што значи да једначине морају да буду задовољене за крај корака – временски тренутак  $t + \Delta t$ .

$$M {}^{t+\Delta t}\ddot{u} + B {}^{t+\Delta t}\dot{u} + K {}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}F \quad 3.51$$

Једначина 3.51 треба да се реши на основу познатих решења из претходног корака  $t$ . Стога се из једначине 3.50 изражава убрзање на крају временског корака,  ${}^{t+\Delta t}\ddot{u}$ , у функцији од познатих решења из претходног корака и у функцији од померања у кораку  $t + \Delta t$  које се одређује.

$${}^{t+\Delta t}\ddot{u} = \frac{1}{\alpha \Delta t^2} {}^{t+\Delta t}u - \frac{1}{\alpha \Delta t^2} {}^tu - \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^t\dot{u} - \frac{1-2\alpha}{2\alpha} {}^t\ddot{u} \quad 3.52$$

Брзина на крају временског корака,  ${}^{t+\Delta t}\dot{u}$ , се одређује из једначине 3.48, при чему се за убрзање на крају временског корака узима израз дат једначином 3.52.

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + (1 - \delta) {}^t\ddot{u}\Delta t + \delta\left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^{t+\Delta t}u - \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^tu - \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t\dot{u} - \frac{1-2\alpha}{2\alpha} {}^t\ddot{u}\right) \cdot \Delta t \quad 3.53$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u}\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) + {}^t\ddot{u}\left[1 - \delta - \frac{\delta(1-2\alpha)}{2\alpha}\right]\Delta t + \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^{t+\Delta t}u - \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^tu \quad 3.54$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u}\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) + {}^t\ddot{u}\left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right)\Delta t + \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^{t+\Delta t}u - \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^tu \quad 3.55$$

Добијени изрази за убрзања и брзине на крају временског корака (једначине 3.52 и 3.55 редом) се уводе у једначину 3.51 одакле следи:

$$M\left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^{t+\Delta t}u - \frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^tu - \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t\dot{u} - \frac{1-2\alpha}{2\alpha} {}^t\ddot{u}\right) + B\left({}^t\dot{u}\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) + {}^t\ddot{u}\left(1 - \frac{\delta}{2\alpha}\right)\Delta t + \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^{t+\Delta t}u - \frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^tu\right) + K{}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}F \quad 3.56$$

У једначини 3.56 непозната величина је померање на крају временског корака, тако да та величина остаје са леве стране једначине после сређивања израза, док са десне стоје познате величине, израчунате у претходном кораку, што може бити написано у облику:

$${}^{t+\Delta t}u\left(M\frac{1}{\alpha\Delta t^2} + B\frac{\delta}{\alpha\Delta t} + K\right) = {}^{t+\Delta t}F + M\left(\frac{1}{\alpha\Delta t^2} {}^tu + \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t\dot{u} + \frac{1-2\alpha}{2\alpha} {}^t\ddot{u}\right) + B\left(\frac{\delta}{\alpha\Delta t} {}^tu + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1\right) {}^t\dot{u} + \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right)\Delta t {}^t\ddot{u}\right) \quad 3.57$$

Када се уведу коефицијенти  $a_i$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}, \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}, \quad a_2 = \frac{1}{\alpha\Delta t}, \quad a_3 = \frac{1-2\alpha}{2\alpha}, \quad a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1, \quad a_5 = \left(\frac{\delta}{2\alpha} - 1\right)\Delta t \quad 3.58$$

једначина 3.57 добија једноставнији запис:

$${}^{t+\Delta t}u(Ma_0 + B a_1 + K) = {}^{t+\Delta t}F + M(a_0 {}^tu + a_2 {}^t\dot{u} + a_3 {}^t\ddot{u}) + B(a_1 {}^tu + a_4 {}^t\dot{u} + a_5 {}^t\ddot{u}) = 0 \quad 3.59$$

Ако се означи са  $\hat{K} = Ma_0 + B a_1 + K$  и  ${}^{t+\Delta t}\hat{F} = {}^{t+\Delta t}F + M(a_0 {}^tu + a_2 {}^t\dot{u} + a_3 {}^t\ddot{u}) + B(a_1 {}^tu + a_4 {}^t\dot{u} + a_5 {}^t\ddot{u})$  онда скуп линеарних једначина које се решавају има облик дат једначином 3.60.

$$\hat{K}{}^{t+\Delta t}u = {}^{t+\Delta t}\hat{F} \quad 3.60$$

При решавању скупа линеарних једначина по непознатим померањима на крају временских корака параметри  $\delta$  и  $\alpha$  морају да испуне одређене услове стабилности и



тачности. У погледу стабилности треба да је испуњено да је  $\delta \geq \frac{1}{2}$  и  $\alpha \geq \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \delta)^2$  [21], док најбољу тачност дају вредности  $\delta = \frac{1}{2}$  и  $\alpha = \frac{1}{2}\delta = \frac{1}{4}$ . Уколико је скуп једначина који се решава линеаран онда су и матрице система (матрица маса, матрица пригушења и матрица крутости) непроменљиве у току времена. У случају да постоји нелинеарност матрице ће се мењати са временом. Код материјално нелинеарних проблема мењаће се матрица крутости, а решавање такве једначине Њумарковом методом по инкрементима није довољно. Потребно је да се за жељену тачност решења у оквиру једног временског корака спроведе више итерација. Итерације се врше у једном кораку све док се не испуни задати критеријум – неуравнотежена сила, неуравнотежено померање или неуравнотежена енергија.

Вредност величине која се одређује, у овом случају померање у чворовима, у једној итерацији може да се изрази преко збира вредности величине из претходне итерације и прираштаја померања у текућој итерацији, у оквиру истог временског корака, што се може приказати следећом једначином:

$${}^{t+\Delta t}u^i = {}^{t+\Delta t}u^{i-1} + \Delta u^i \quad 3.61$$

При томе треба имати у виду да је вредност померања која се рачуна за дати временски корак  $(t + \Delta t)$  у првој (нултој) итерацији заправо вредност померања из претходног временског корака  $(t)$ .

$${}^{t+\Delta t}u^0 = {}^t u \quad 3.62$$

Код решавања нелинеарних проблема матрице система се мењају, па се врши њихово израчунавање по временским корацима и итерацијама. Једначина равнотеже 3.60 сада узима у обзир променљивост матрица и тако се добија услов равнотеже за нелинеарне проблеме [20] дат следећом једначином:

$${}^{t+\Delta t}\hat{K}^{i-1}{}^{t+\Delta t}u^i = {}^{t+\Delta t}\hat{F}^{i-1} \quad 3.63$$

На основу једначина 3.61 и 3.63 се добија:

$${}^{t+\Delta t}\hat{K}^{i-1}({}^{t+\Delta t}u^{i-1} + \Delta u^i) = {}^{t+\Delta t}\hat{F}^{i-1} \quad 3.64$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{K}^{i-1}{}^{t+\Delta t}u^{i-1} + {}^{t+\Delta t}\hat{K}^{i-1}\Delta u^i = {}^{t+\Delta t}\hat{F}^{i-1} \quad 3.65$$

$${}^{t+\Delta t}\hat{K}^{i-1}\Delta u^i = {}^{t+\Delta t}\hat{F}^{i-1} - {}^{t+\Delta t}\hat{K}^{i-1}{}^{t+\Delta t}u^{i-1} \quad 3.66$$

Из једначине 3.66 се одређује прираштај померања за  $i$  – ту итерацију, а на основу прираштаја померања одређује се померање у датом временском кораку у  $i$  – тој итерацији.

### 3.1.3. Спрегнути систем

Ако систем чине два или више различитих домена онда они морају бити повезани на одређени начин, односно морају бити спрегнути. Постоји два начина спрезања система – слабо и јако спрезање [22]. Код слабог спрезања два различита домена се решавају наизменично, а решења једног домена коригују геометријске величине или граничне услове другог домена који се решава у датом временском кораку. Даље се решења из другог домена користе као улазне величине при решавању првог домена у наредном временском кораку. Решавање се врши наизменично док се не добије решење за цео систем у посматраном временском периоду. Решења која се добијају славим спрезањем су могу бити мање тачности, јер се утицаји система узимају наизменично, а не истовремено, али позитивна страна коришћења слабог спрезања је брже решавање система и мања употреба рачунарских ресурса. С друге стране, чврсто спрезање подразумева да се оба домена решавају истовремено. Да би оба домена могла да се решавају у истом временском кораку, потребно је да се уведе једначина спрезања. Једначина спрезања се примењује на елементе два домена који се налазе на граници, односно у контакту и представља једначину која дефинише на који начин домени зависе један од другог. Конкретно у случају механичког модела кохлее, на који је примењено јако спрезање, једначина спрезања треба да дефинише на који начин промена притисака у чворовима флуида из комора утиче на промену померања чворова базиларне мембране и обрнуто. Ако се узме у обзир да је елементарна запремина у контакту заједничка, изједначавају се компоненте сила елемената флуида и солида који се налазе у контакту које су нормалне на раван додира и усмерене од заједничке површи. Другим речима, изједначава се промена притиска флуида, његов градијент, у правцу нормале на заједничку раван додира, са убрзањем базиларне мембране, такође у правцу нормале на заједничку раван [23].

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p = \rho \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{u}} \quad 3.67$$

У једначини 3.67  $\mathbf{n}$  представља вектор нормале,  $\nabla p$  је градијент притиска, а  $\rho$  је густина базиларне мембране. Једначина спрезања се уводи у матрични спрегнути систем као гранични услов, односно на основу ње се формирају матрице спрезања за флуид и солид. Решења која се добијају јаким спрезањем су поузданија, али потребно је више рачунарских ресурса за решавање оваквих система. У пракси се користе оба начина

спрезања. Избор спрезања зависи и од тога шта је битније за решавање посматраног спрегнутог система – већа тачност или рачунарска ефикасност.

Чврсто спрегнути систем механичког модела кохлеје је потребно направити од једначина 3.37 и 3.44. Како би спрегнути систем имао једноставнији облик Њутнова динамичка једначина је преведена на облик који одговара акустичној таласној једначини, што подразумева запис Њутнове динамичке једначине у облик који садржи само убрзање и померање чворова базиларне мембране. Да би се то постигло, а задржале карактеристике једначине, матрица пригушења се изражава преко матрице крутости, као њена комплексна компонента [24].

$$M\ddot{u} + K(1 + i\eta)u = F \quad 3.68$$

Узимањем у обзир једначине 3.68 јако спрегнути систем механичког модела кохлеје је дат следећом једначином:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ -\rho_f R & Q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K(1 + i\eta) & -S \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ q \end{Bmatrix} \quad 3.69$$

У једначини 3.69 матрице  $R$  и  $S$  су матрице спрезања које су формиране на основу једначине спрезања 3.67 [23]. Између матрица спрезања постоји зависност да је  $R = S^T$ . Величина  $q$  представља јединичну побуду на чворовима који чине овални прозор, док је за остале чворове једнака нули.

### 3.2. Хармонијски одзив

На спрегнути систем једначина (3.69) погодно је применити хармонијску анализу. Хармонијска анализа се примењује када је улаз у систем хармонијска функција, који као излаз опет има хармонијску функцију. Улаз у систем је осцилаторног карактера и под таквом побудом систем осцилује [25]. То је случај и код механичког модела кохлее. Улаз у систем је померање узенгије, самим тим и овалног прозора који је у контакту са узенгијом, а то померање има осцилаторни карактер и може се представити као синусна функција. Одговор система на ову побуду је такође осцилаторног карактера – простирање таласа је синусна функција, као и померање базиларне мембране. На тај начин је омогућено да се решења спрегнутог система претпоставе као синусне функције облика:

$$u = A_u \sin(\omega t + \alpha) \quad 3.70$$

$$p = A_p \sin(\omega t + \alpha) \quad 3.71$$

Даља примена хармонијске анализе подразумева да се нађу одговарајући изводи претпостављених решења и замене у систем спрегнутих једначина.

$$\dot{u} = A_u \omega \cos(\omega t + \alpha), \quad \ddot{u} = -A_u \omega^2 \sin(\omega t + \alpha) \quad 3.72$$

$$\dot{p} = A_p \omega \cos(\omega t + \alpha), \quad \ddot{p} = -A_p \omega^2 \sin(\omega t + \alpha) \quad 3.73$$

Заменом претпостављених решења и њихових других извода спрегнути систем добија облик дат једначином 3.74. На базиларну мембрану не делује ниједна спољашња сила, тако да је  $F = 0$ .

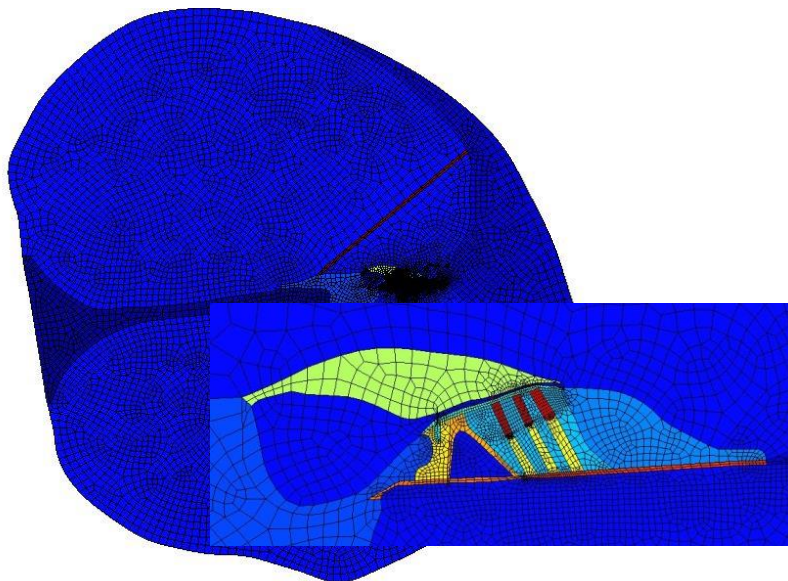
$$\begin{bmatrix} K(1 + i\eta) - \omega^2 M & -S \\ -\rho_f R & H - \omega^2 Q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_u \\ A_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ q \end{Bmatrix} \quad 3.74$$

Решавање једначине 3.74 се своди делом на решавање карактеристичних једначина које дају облик осциловања – сопствене учесталости и сопствене векторе.

У решавању механичких модела кохлее је примењивана хармонијска анализа, јер је за механички модел кохлее довољно познавати модове осциловања, пре него само простирање таласа у времену. Од већег значаја је и одређивање карактеристичног места улазне фреквенције на базиларној мембрани, а не начин и време одзива. Резултати различитих механичких модела кохлее решаваних хармонијском анализом су дати у поглављу 5.

#### 4. Електро-механички модели кохлее

Модели кохлее сложене геометрије су добијени у три попречна пресека – на растојању  $12\text{ mm}$ ,  $19\text{ mm}$  и  $24\text{ mm}$  од базе и представљају 2D моделе. Модели су креирани на основу медицинских снимака, после анотације од стране лекара. Један од модела је приказан на слици 16.

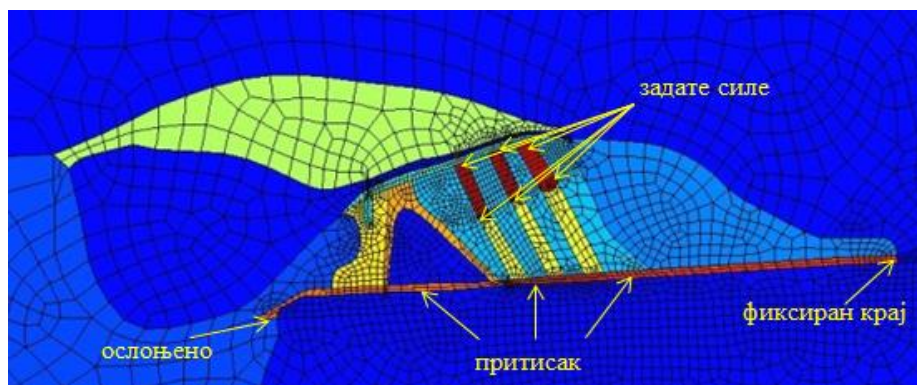


Слика 16: 2D модел кохлее на растојању  $12\text{ mm}$  од базе.

2D модели кохлее укључују сложену геометрију Кортијевог органа са укупно 24 различита материјала. Оријентација спољашњих и унутрашњих слушних ћелија се разликује због спиралног облика кохлее.

Модели су решавани методом коначних елемената чије су основне једначине дате у претходном поглављу. Коришћени су следећи гранични услови за 2D моделе кохлее: ослоњена базиларна мембрана на левом крају и учвршћена базиларна мембрана на десном крају. Поред тога задат је притисак на базиларну мембрану са доње стране, а могуће је и дефинисати силе које делују на спољашње слушне ћелије (слика 17).

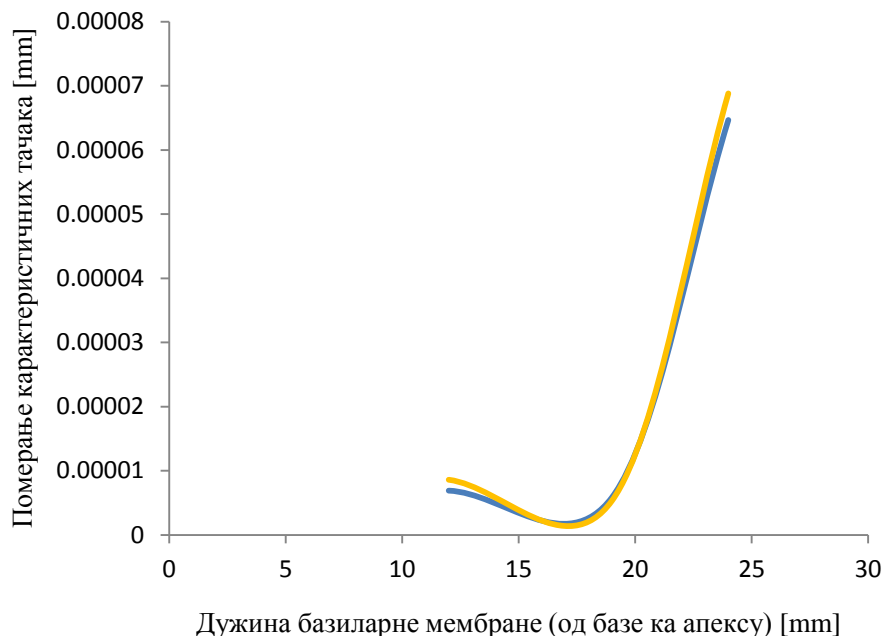
Одзив модела подразумева осцилације базиларне мембране и померање врхова спољашњих слушних ћелија. Померање врхова спољашњих слушних ћелија је од значаја, јер је у овим моделима узето у обзир смичуће кретање слушних длачица које се налазе у наставку спољашњих слушних ћелија, изнад ретикуларне мембране.



Слика 17: Део 2D модела кохлее, Кортијев орган, на растојању 12 *mm* од базе са граничним условима [26].

Пошто модели укључују у анализу силу унутар Кортијевог органа, тачније силе које делују на спољашње слушне ћелије, модели се могу сматрати активним. На изванредан начин ови модели могу да се тумаче и као електро-механички модели, јер може да се постави релација између сила и напона који се јављају, као и између сила и померања базиларне мембране.

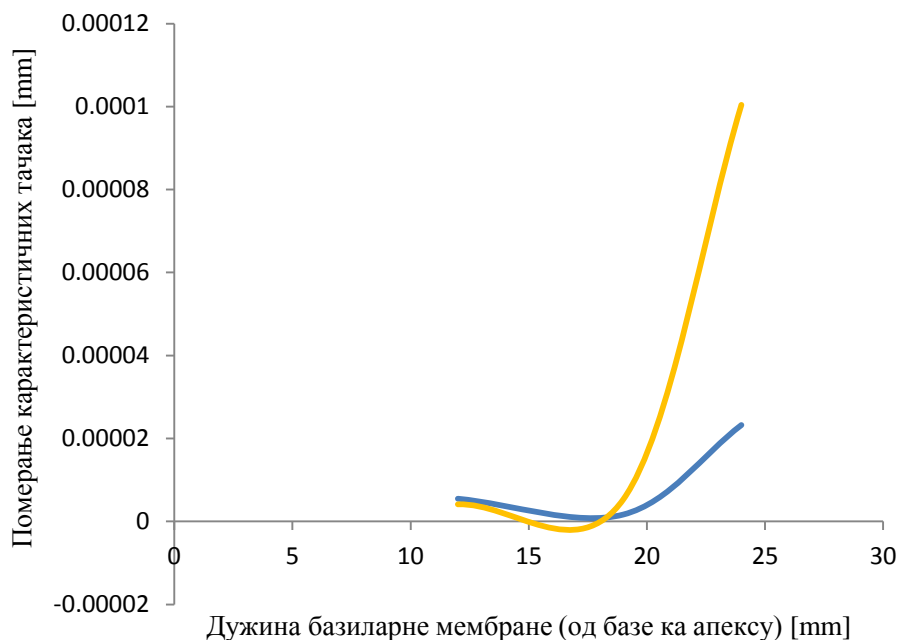
Модели кохлее са Кортијевом структуром су у анализи комбиновани са електро-механичким моделом у простору стања који је детаљно објашњен у поглављу 6. Електро-механички модел кохлее у простору стања је анализиран у програмском пакету матлаб и као један од међурезултата добијена је сила која делује на спољашње слушне ћелије. Сила у моделима простора стања није променљива стања, већ је функција истих и може се добити прерачунавањем решених величина стања. За одређену, изабрану улазну фреквенцију модел у простору стања је решен и силе у попречним пресецима који одговарају попречним пресецима 2D модела су израчунате. Затим су ове силе задате на спољашњим слушним ћелијама 2D модела кохлее као улазне величине, за исту улазну фреквенцију и модели су решени методом коначних елемената. На крају је извршено поређење добијених померања у одређеним репрезентативним тачкама – на ретикуларној мембрани (слика 18) и на телу спољашњих слушних ћелија (слика 19). Посматрањем слике 18 изводи се закључак да се одзиви добро поклапају, иако су модели различитих димензија, различите сложености геометрије, различитим методама решени и имају другачије одређене материјалне карактеристике.



Слика 18: Померање карактеристичних тачака ретикуларне мембране – 2D модел кохлее (плава), модел у простору стања (жута).  $X$ -оса представља дужину базиларне мембране у милиметрима, а  $y$ -оса померање ретикуларне мембране, такође у милиметрима. Улазна фреквенција је иста, а пресеци се налазе на растојању 12 mm, 19 mm и 24 mm од базе.

На слици 19 је приказано поређење добијених померања спољашњих слушних ћелија из 2D модела кохлее и модела у простору стања. Добијена померања се добро поклапају за прва два 2D модела кохлее (12 mm и 19 mm), док за трећи случај постоји разлика у оствареним померањима (24 mm).





Слика 19: Померање карактеристичних тачака спољашњих слушних ћелија – 2D модел кохлеје (плава), модел у простору стања (жута).  $X$ -оса представља дужину базиларне мембране у милиметрима, а  $y$ -оса померање померање спољашњих слушних ћелија, такође у милиметрима. Улазна фреквенција је иста, а пресеци се налазе на растојању 12 mm, 19 mm и 24 mm од базе.

Приказани 2D модели кохлеје могу да буду побољшани тако да прикажу више одзива због своје сложене геометрије. Део будућих истраживања ће бити посвећен томе.

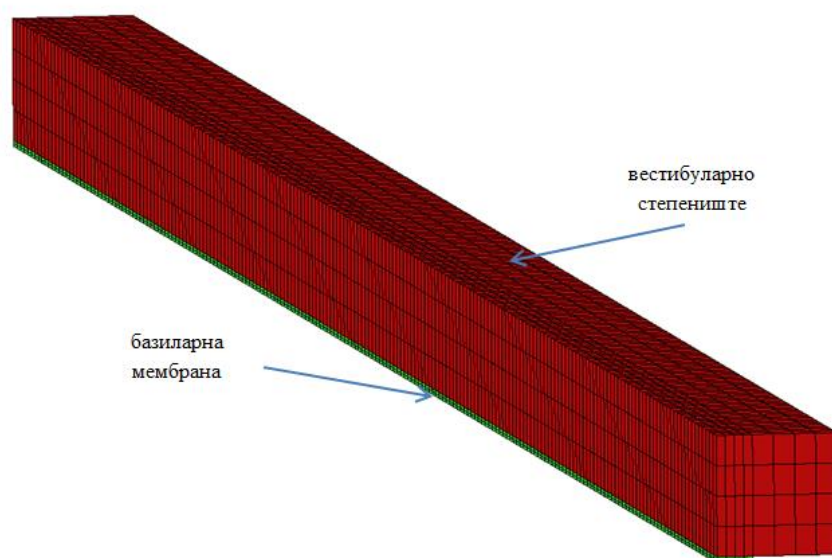
## 5. Примена методе коначних елемената на моделе кохлее

Метода коначних елемената је једна од најчешће коришћених метода за нумеричко решавање сложених једначина и система. Метода подразумева решавање обичних и парцијалних диференцијалних једначина за дате почетне и граничне услове. Домен који се решава се дели на коначан број малих поддомена, елемената, и једначине се пишу за сваки од њих. При томе се води рачуна да услови на граници два елемента буду исти тако да се остварује услов непрекидности средине, односно домена. Систем диференцијалних једначина који је сложен за решавање се преводи на систем једначина за сваки елемент, али систем простих једначина, лакших за решавање. На тај начин се мањи број сложених једначина преводи на велики број простих једначина [27], [28]. Првобитни проблем методе коначних елемената је било време које је потребно да се одреде решења за све елементе, али уз развој рачунара време је сведено на минимум. Метода је на тај начин постала и довољно брза, даје решења за сложене математичке моделе и добијена решења су задовољавајуће тачности. Све то утицало је на велику примену методе коначних елемената у многим прорачунима и у многим гранама инжењерства [29], [30].

Први корак примене методе коначних елемената на решавање неке једначине јесте припрема саме једначине - једначину треба записати у облику који је одговарајући за решавање применом методе коначних елемената, у матричном запису. Овај поступак је примењен и објашњен за акустичну таласну и Њутнову динамичку једначину у поглављу 3.

## 5.1. Резултати

Механички модели кохлее не узимају у обзир средњу флуидну комору, средишње степениште. У погледу геометрије модели обухватају вестибуларно степениште и бубно степениште, као и базиларну мембрану. Најпростији механички модел кохлее је модел кутије, где се кохлеа моделира као развијена [31] и са попречним пресеком облика правоугаоника. Геометрија таквог модела, кутијастог модела кохлее са уздужним спрезањем елемената, приказана је на слици 20.



Слика 20: Механички модел развијене кохлее представљен квадром са уздужним спрезањем елемената.

Доња флуидна комора (бубно степениште) је узета у обзир преко симетрије. Коморе иначе нису симетричне у односу на базиларну мембрану, али овако упрошћен модел може бити од користи за примену математичког модела и за тестирање основних карактеристика кохлее.

Геометријски параметри и материјалне карактеристике кутијастог модела кохлее приказаног на слици 20 дати су у табели 1.

Табела 1: Геометријски параметри и материјалне карактеристике кутијастих модела кохлеа са и без уздужног спрезања елемената и спиралног модела кохлеа.

Табела 1	Јединице	Кутијаста модел кохлеа са уздужним спрезањем	Кутијаста модел кохлеа без уздужног спрезања	Спирални модел кохлеа
<b>Димензије модела</b>				
Дужина базиларне мембране	[mm]	35		
Висина флуидне коморе	[mm]	1		
Ширина флуидне коморе	[mm]	1		
Ширина базиларне мембране	[mm]	0.3		
Дебљина базиларне мембране	[mm]	0.05		0.1
<b>Базиларна мембрана</b>				
Густина базиларне мембране	[kg/m <sup>3</sup> ]	1000		
Јангов модул еластичности $E$	[Pa]	14101716.454877 ÷ 640.216937 <sup>16</sup>		
Коефицијент пригушења	[-]	0.01 ÷ 1.484132 <sup>17</sup>		
<b>Флуид</b>				
Густина	[kg/m <sup>3</sup> ]	1000		
Брзина звука	[m/s]	1500		
<b>Спирала</b>				
Врста спирале		-	-	Архимедова
Корак завојнице	[mm]	-	-	0.006
Полупречник	[mm]	-	-	1
Површина	[mm <sup>2</sup> ]	-	-	0.2
Почетак намотавања	[□]	-	-	3π
Крај намотавања	[□]	-	-	7π

У табели 1 дате су почетне и крајње вредности Јанговог модула еластичности и коефицијента пригушења. Ове вредности се мењају у правцу дужине базиларне мембране и функција су положаја на базиларној мембрани [32]. Јангов модул еластичности дат је следећом једначином:

$$E_{BM} = 48f_B^2(1 - \nu^2)m_0B^4\pi^2e^{-\frac{2x}{l}}/(3.9266^4h^3) \quad 5.1$$

У једначини 5.1  $E_{BM}$  је модул еластичности базиларне мембране,  $f_B$  је сопствена фреквенција базе и износи 20000 Hz,  $\nu$  је Поасонов коефицијент базиларне мембране ( $\nu = 0.3$ ),  $m_0$  представља масу базиларне мембране по јединици површине ( $m_0 = 0.3 \text{ kg m}^{-2}$ ),  $B$  је ширина базиларне мембране ( $B = 0.3 \text{ mm}$ ),  $x$  представља положај на

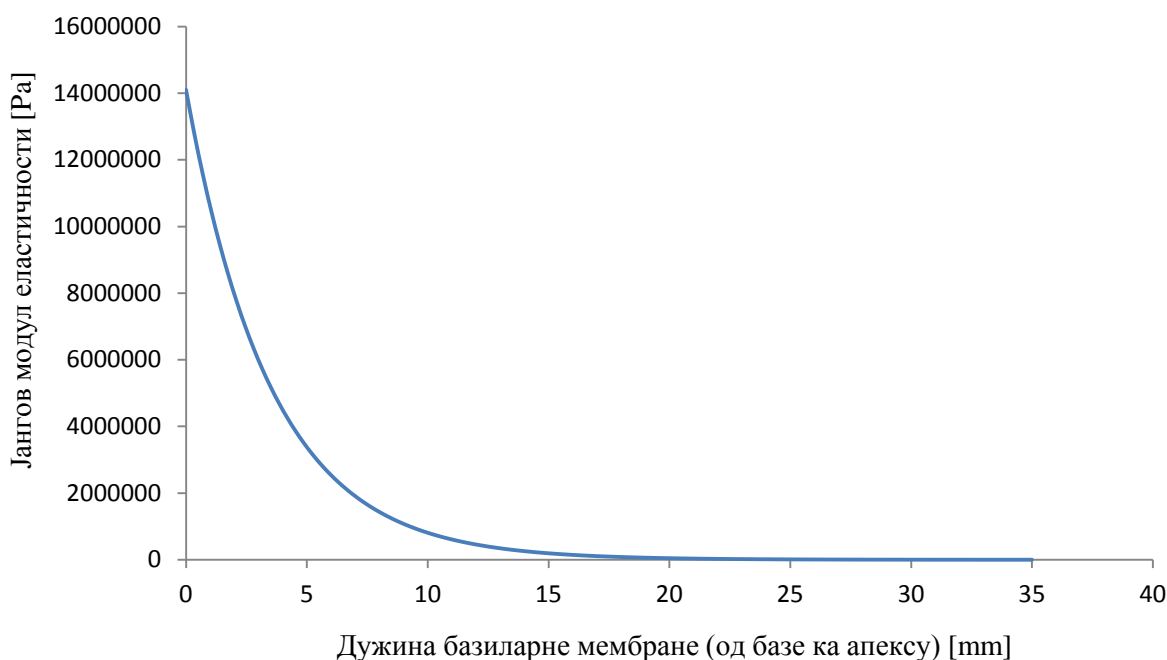
<sup>16</sup> Вредности Јанговог модула еластичности на почетку (база) и на крају базиларне мембране (апекс).

<sup>17</sup> Вредности коефицијента пригушења на почетку (база) и на крају базиларне мембране (апекс).

базиларној мембрани, односно растојање од базе,  $l$  је сопствена дужина базиларне мембране ( $l = 7 \text{ mm}$ ) и  $h$  је дебљина базиларне мембране ( $h = 0.05 \text{ mm}$ ). Заменом вредности у једначину 5.1 после сређивања израза добија се:

$$E_{BM}[Pa] = 1428800.84536145\pi^2 e^{-\frac{2x}{l}} \quad 5.2$$

У складу са једначином 5.1, односно 5.2, нацртан је дијаграм Јанговог модула еластичности (слика 21), који зависи од позиције на базиларној мембрани.



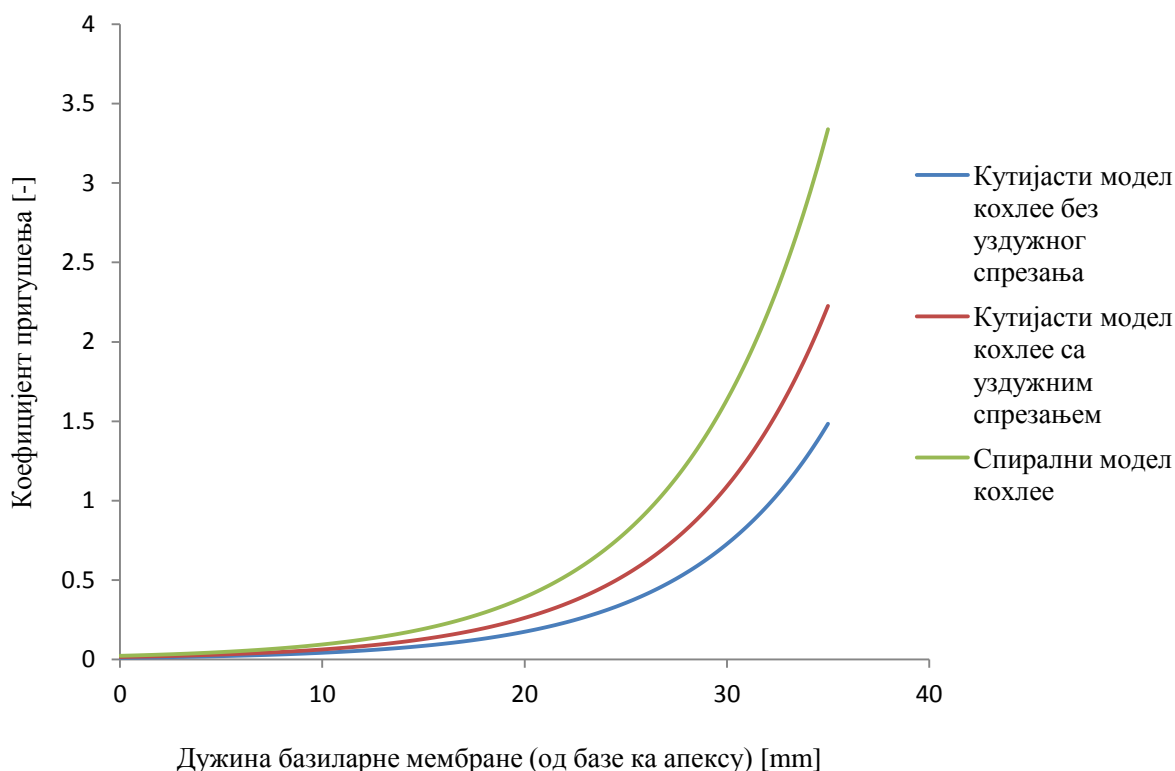
Слика 21: Јангов модул еластичности у функцији од положаја на базиларној мембрани за кутијасту модел кохлеу са и без уздужног спрезања елемената, као и за спирални модел кохлеу.

Коефицијент пригушења,  $\eta$ , дат је једначином:

$$\eta(x) = \frac{2\omega\xi_0 e^{x/l}}{\omega_B} = \frac{2f\xi_0 e^{x/l}}{f_B} \quad 5.3$$

У једначини 5.3 величина  $f$  представља фреквенцију побуде (улазну фреквенцију),  $f_B$  је сопствена фреквенција базе и износи  $20 \text{ kHz}$ ,  $\xi_0$  је однос пригушења и износи  $0.1$ ,  $l$  је сопствена дужина базиларне мембране ( $l = 7 \text{ mm}$ ), а  $x$  представља положај на базиларној мембрани, односно растојање од базе.

На основу једначине 5.3 формирана је и крива коефицијента пригушења. За кутијасту модел кохлеу без уздужног спрезања елемената коефицијент пригушења је одређен једначином 5.3, за кутијасту модел кохлеу са уздужним спрезањем елемената коефицијент пригушења је увећан 1.5 пута, а за спирални модел кохлеу увећан је 2.25 пута у односу на вредности које се добијају једначином 5.3, како би се постигло одговарајуће пригушивање таласа у моделу. Криве коефицијента пригушења за сва три модела за улазну фреквенцију од 1  $kHz$  приказане су на слици 22.

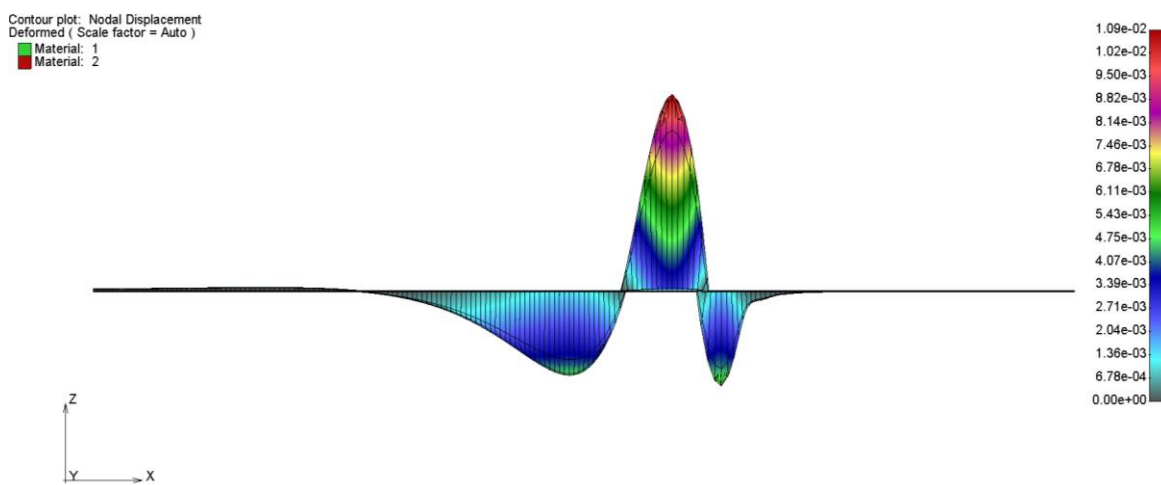


Слика 22: Коефицијент пригушења у функцији од положаја на базиларној мембрани за кутијасту модел кохлеу са и без уздужног спрезања елемената, као и за спирални модел кохлеу. Улазна фреквенција 1  $kHz$ .

Модул еластичности и коефицијент пригушења базиларне мембране се мењају дуж базиларне мембране. У осталим правцима се узимају исте вредности, тако да базиларна мембрана представља изотропни материјал.

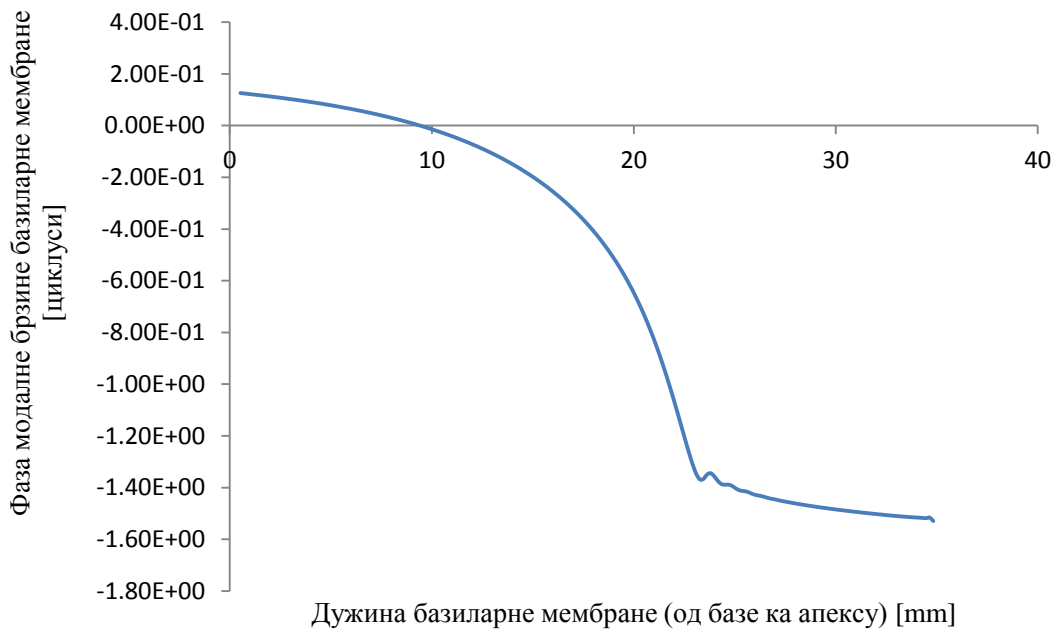
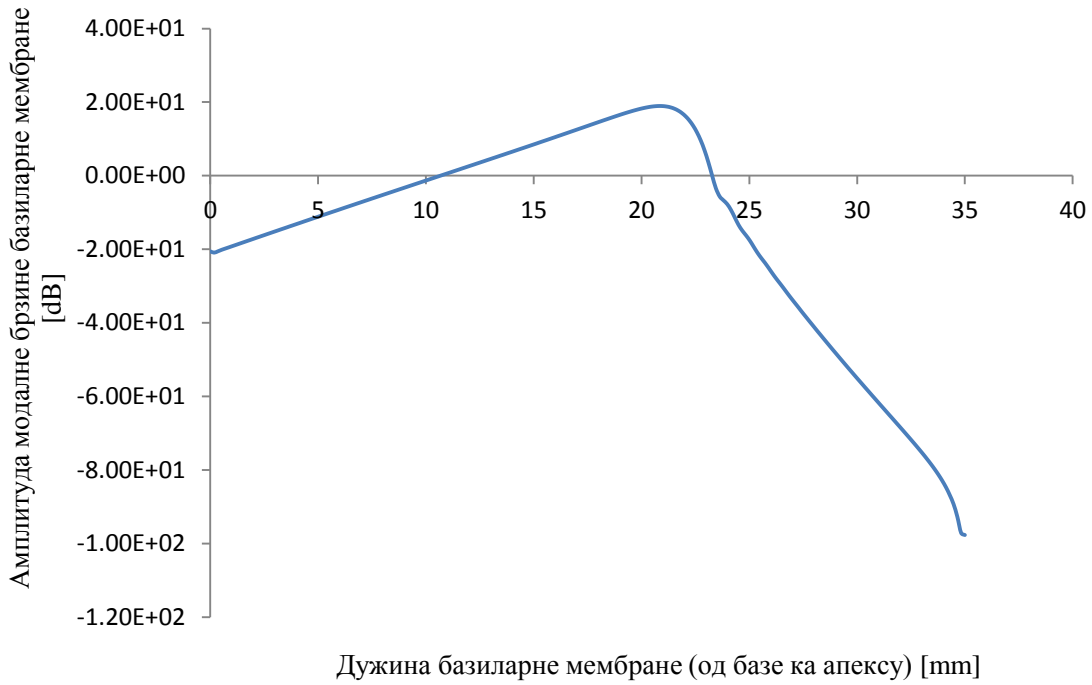
При стимулацији уха, као последица појаве и провођења звучних таласа долази до осциловања базиларне мембране. Експерименталним путем утврђено је да на дужини

кохлее, која износи у просеку  $35\text{ mm}$  код одраслог човека, свакој фреквенцији из опсега чујности одговара тачно одређен положај на мембрани, где амплитуда достиже своју максималну вредност [7]. После пика осцилације се убрзано пригушују. Померање базиларне мембране овог модела приказано је на слици 23. На левом крају је база, а на десном крају је апикални део базиларне мембране.



Слика 23: Померање базиларне мембране при улазној фреквенцији од  $1\text{ kHz}$  – кутијасти модел кохлее са уздужним спрезањем.

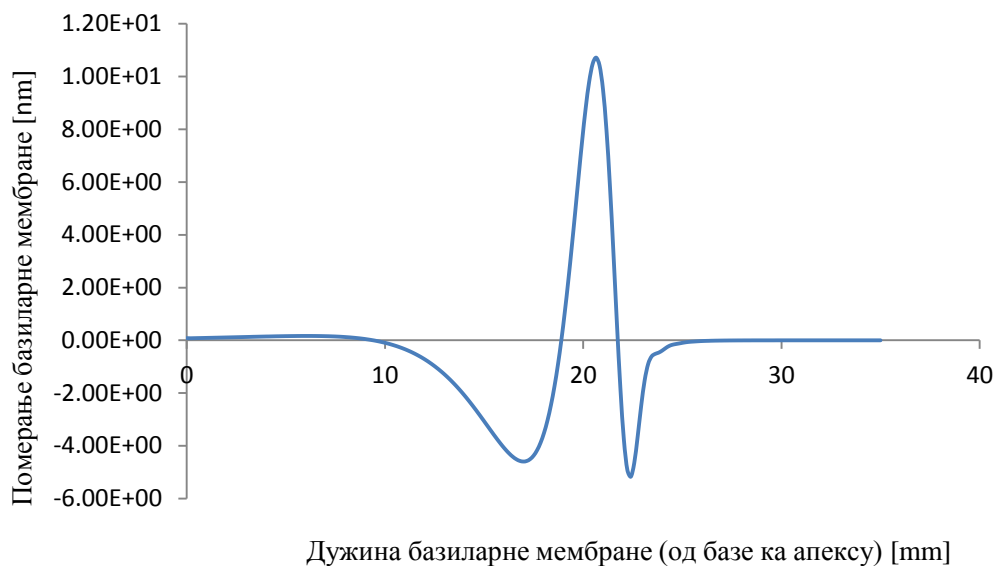
За анализирање одзива кохлее од користи је модална брзина – њена амплитуда и фаза. Модална брзина представља брзину кретања осцилаторног карактера, односно брзину која се изражава као хармонијска функција (синус, косинус) [33]. Применом Ојлерове формуле [34] брзина у комплексном домену састављена од синусне и косинусне функције може да се изрази преко експоненцијалне функције, која укључује амплитуду и фазу модалне брзине. Амплитуда и фаза модалне брзине при фреквенцији од  $1\text{ kHz}$  приказане су на Слика 24.



Слика 24: Амплитуда и фаза модалне брзине базиларне мембране у функцији од положаја при улазној фреквенцији од 1 kHz – кутијаста модел кохлеје са уздужним спрезањем.



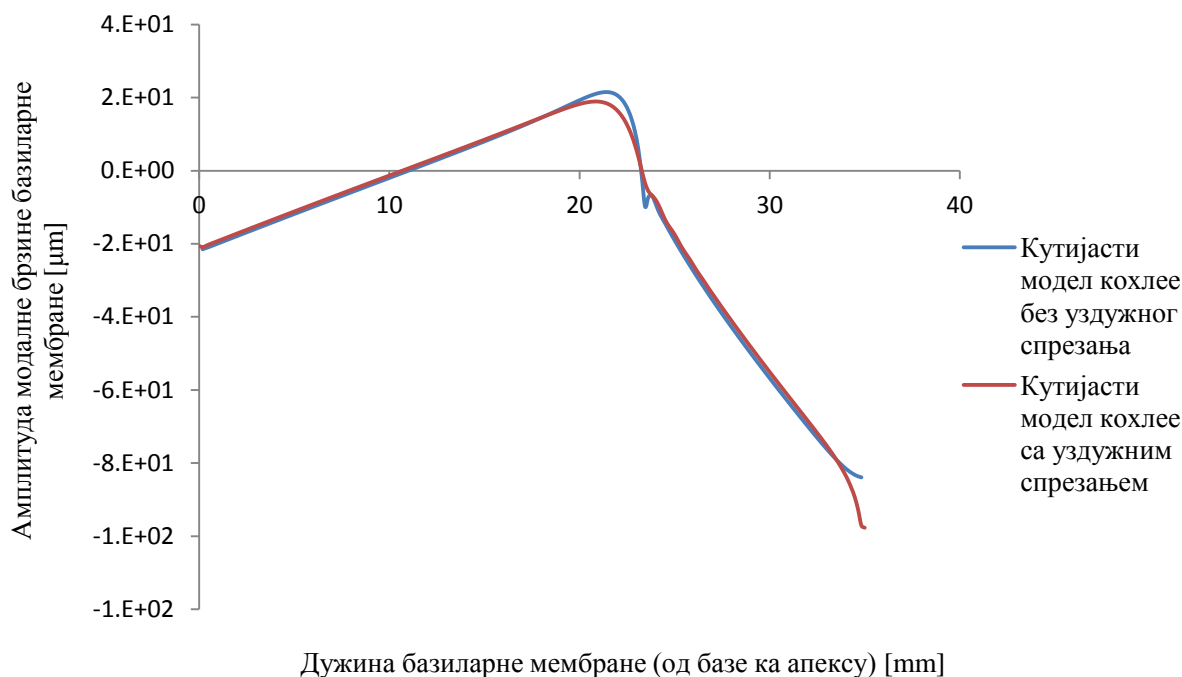
Један од дијаграма, који може да се добије из модела, је централна линија осциловања (слика 25).



Слика 25: Централна линија осциловања базиларне мембране при улазној фреквенцији од  $1\text{ kHz}$  - кутијаста модел кохлее са уздужним спрезањем.

Кутијаста модел кохлее може са задовољавајућом тачношћу бити употребљен за одређивање карактеристичног места улазне фреквенције. Са слике 25 се види да за улазну фреквенцију од  $1\text{ kHz}$  амплитуда достиже максималну вредност на растојању од око  $21\text{ mm}$  у односу на базу.

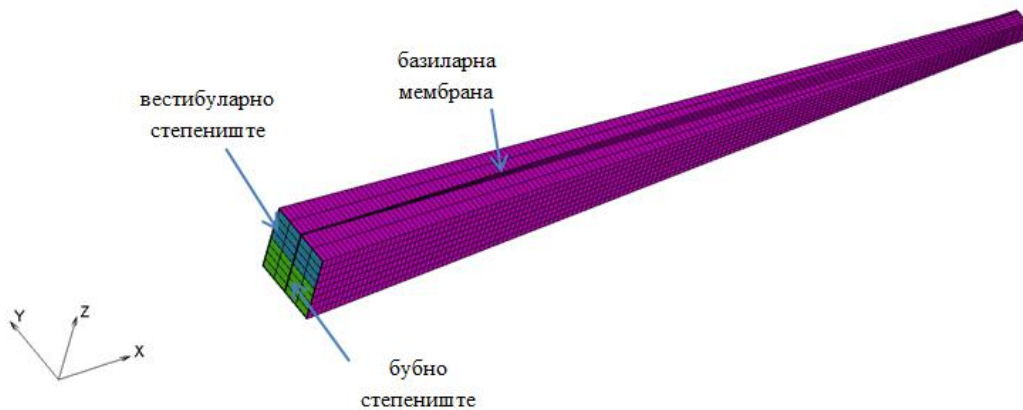
Кутијаста модел чији су резултати приказани има остварено уздужно спрезање између елемената. Развијен је и модел који нема уздужно спрезање елемената. На слици 26 су приказани одзиви кутијастих модела кохлее са и без уздужног спрезања.



Слика 26: Амплитуда модалне брзине базиларне мембране за кутијаста модел кохлее са (црвена) и без (плава) уздужног спрезања елемената базиларне мембране при улазној фреквенцији од  $1 \text{ kHz}$ .

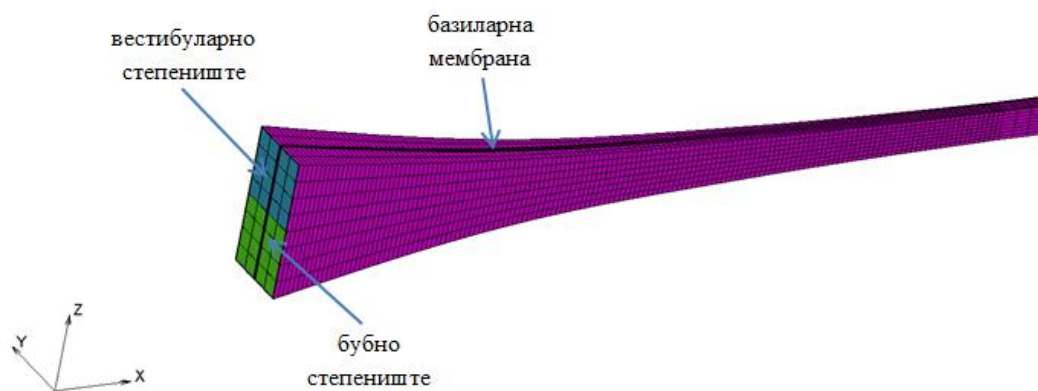
На основу упоредних дијаграма амплитуде модалне брзине долази се до закључка да не постоји велика разлика, односно закључак је да уздужно спрезање елемената нема великог утицаја на одзив модела кохлее, осим што обезбеђује нешто стабилнији одзив [35]. Облик амплитуде модалне брзине је готово исти, као и вредности амплитуда. Дијаграм амплитуде модалне брзине за кутијаста модел кохлее без уздужног спрезања је мало неправилнијег облика у односу на дијаграм амплитуде модалне брзине за кутијаста модел са уздужним спрезањем елементата. Карактеристична места улазне фреквенције се мало разликују – за кутијаста модел кохлее без уздужног спрезања елемената карактеристично место је померено удесно, али се може рећи да оба модела са задовољавајућом тачношћу могу да дају карактеристично место улазне фреквенције.

Поред кутијастих модела кохлее развијани су и конични модели кохлее. На слици 27 представљен је опружни модел кохлее са коничним сужавањем флуидних комора, гледано из правца базе ка апексу, такво да је кохлеа облика зарубљене правилне четворостране пирамиде.



Слика 27: Конични опружни модел кохлеје облика зарубљене пирамиде.

Поред поменутог модела развијен је још један конични опружни модел кохлеје са делимично промењеном геометријом и закривљеним странама (слика 28).



Слика 28: Конични опружни модел кохлеје са закривљеним странама.

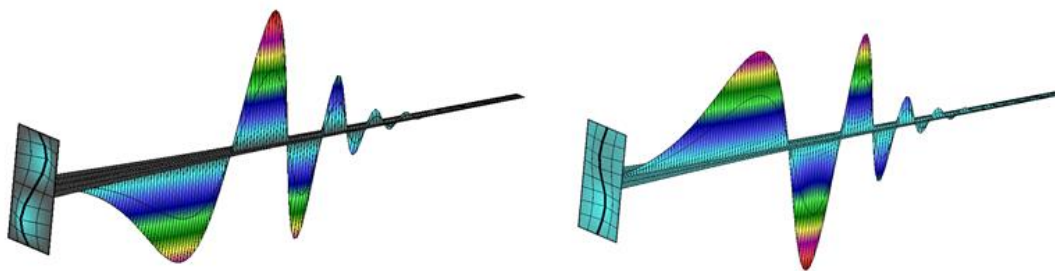
Основна разлика у односу на кутијасте моделе је да су конични модели ортотропни. Преглед геометријских параметара и материјалних карактеристика коничних опружних модела кохлеје са незакривљеним [36] и закривљеним странама [37] је дат у табели 2.

Табела 2: Вредности геометријских параметара и материјалних карактеристика коничних опружних модела кохлеје са незакривљеним и закривљеним странама.

Табела 2	Јединице	Конични опружни модел облика зарубљене пирамиде	Конични опружни модел са закривљеним странама
<b>Димензије модела</b>			
Дужина базиларне мембране	[mm]	35	
Висина флуидне коморе	[mm]	1	
Ширина флуидне коморе	[mm]	1	
Хеликотрема	[mm]	1	2
<b>Базиларна мембрана</b>			
Коефицијент пригушења	[-]	0.3	
Густина базиларне мембране	[kg/m <sup>3</sup> ]	1000	1200
Ширина базиларне мембране на почетку (база)	[mm]	0.06	0.15
Ширина базиларне мембране на крају (апекс)	[mm]	0.6	0.4744
Дебљина базиларне мембране на почетку (база)	[mm]	0.005	0.0052
Дебљина базиларне мембране на крају (апекс)	[mm]	0.005	0.0006
Јангов модул еластичности $E_{xx}$	[Pa]	10000	$(2.8240 \div 2.788) \cdot 10^7$
Јангов модул еластичности $E_{yy}$	[Pa]	100000000	$(3.259 \div 1.229) \cdot 10^8$
Јангов модул еластичности $E_{zz}$	[Pa]	100000000	$(2.8240 \div 2.788) \cdot 10^8$
Модул смицања $G_{xy}$	[Pa]	20000	$(9.9615 \div 4.9615) \cdot 10^6$
Модул смицања $G_{yz}$	[Pa]	100000	$(3.0996 \div 1.0696) \cdot 10^8$
Модул смицања $G_{zx}$	[Pa]	1	$(9.9615 \div 4.9615) \cdot 10^6$
Поасонов коефицијент $\nu_{xy}$	[-]	0.005	0.026 $\div$ 0.0681
Поасонов коефицијент $\nu_{yz}$	[-]	0.3	
Поасонов коефицијент $\nu_{zx}$	[-]	0.005	0.4147 $\div$ 0.3994
<b>Овални и округли прозор</b>			
Јангов модул еластичности	[Pa]	$3 \cdot 10^{10}$	$1 \cdot 10^{11}$
Поасонов коефицијент	[-]	0.3	
Густина базиларне мембране	[kg/m <sup>3</sup> ]	2000	1000
Пригушење	[-]	0	
<b>Флуид</b>			
Густина	[kg/m <sup>3</sup> ]	1000	
Брзина звука	[m/s]	1500	

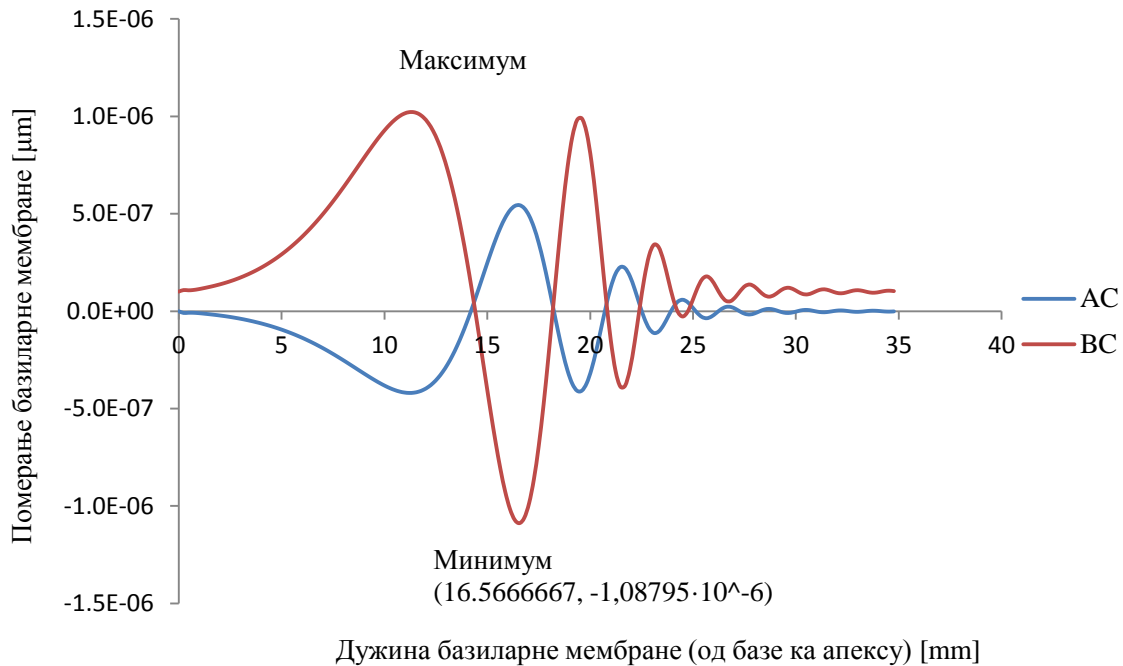
Конични опружни модели кохлеје се могу користити за симулације осциловања базиларне мембране при провођењу звука кроз ваздушну средину (енгл. air conduction, AC) и при

провођењу звука кроз кости (кости лобање, темпорална кост), (енгл. bone conduction, BC) [38]. Слика 29 приказује одзиве базиларне мембране при АС и ВС провођењу звука.



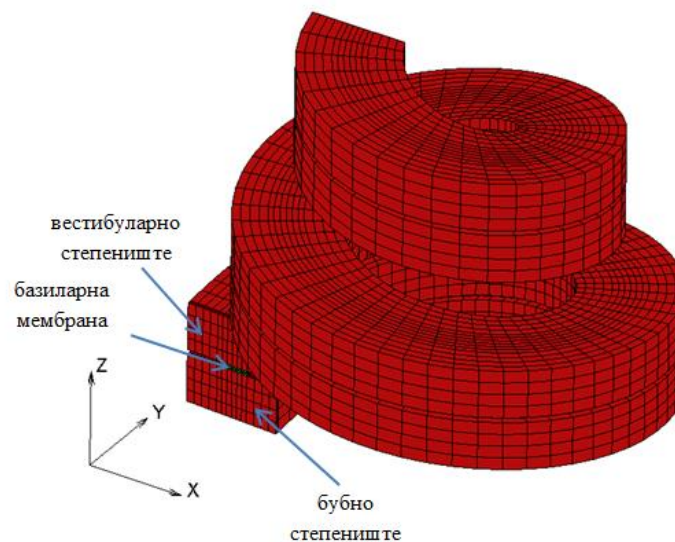
Слика 29: Померање базиларне мембране при АС (лево) и ВС (десно) провођењу звука – конични опружни модел кохлее са закривљеним странама (1 kHz).

При АС провођењу звука улаз у модел представља померање узенгије, односно овалног прозора који се налази на вестибуларном степеништу, које је условљено струјањем ваздуха кроз слушни канал и даљим вибрацијама бубне опне и кошчица средњег ува. При ВС провођењу звука улаз у модел представљају вибрације задате на целој кохлеи које су последица осциловања костију лобање и темпоралне кости које се даље преносе преко коштаног лавиринта на флуид унутар кохлее. Оба модела могу са задовољавајућом тачношћу да покажу карактеристично место улазне фреквенције, односно место достизања пика (слика 30).



Слика 30: Централне линије базиларне мембране при АС (плава линија) и ВС (црвена линија) провођењу звука – конични модел кохлее са закривљеним странама (1 kHz).

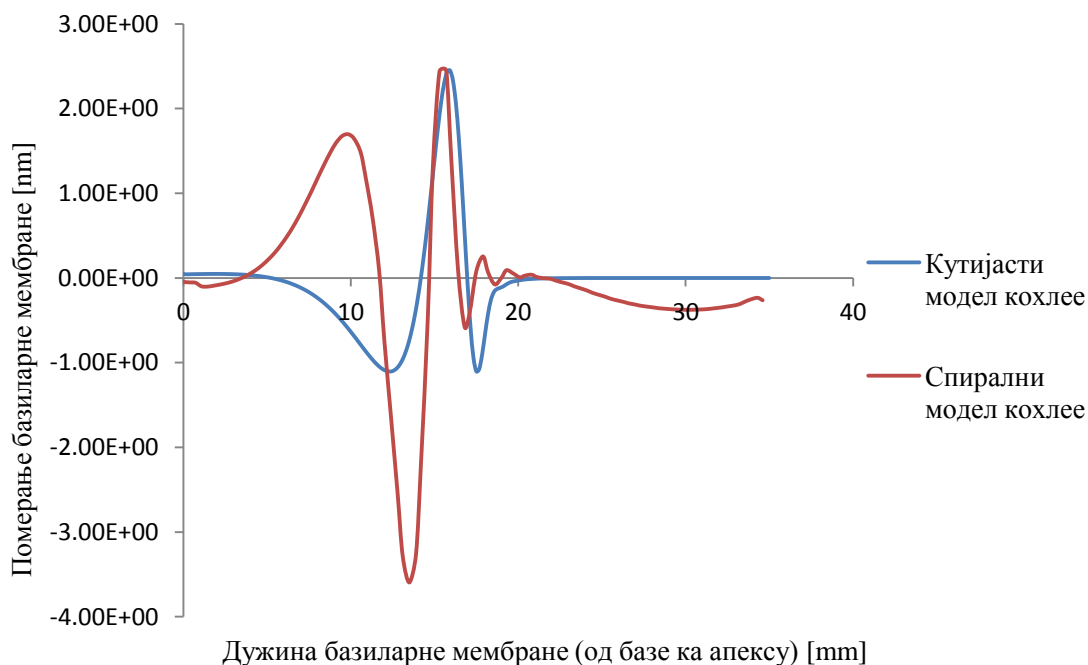
На крају, направљен је и модел кохлее који је спиралног облика, што одговара реалном изгледу кохлее (увијање флуидних комора око ослонца, модууса кохлее за два круга и три четвртине). Геометрија кохлее је упрошћена у односу на реалну и може бити задата параметарски. Елементи базиларне мембране су спрегнути у уздужном правцу.



Слика 31: Спирални механички модел кохлее.

Спирални модел кохлеје је направљен како би се установило да ли заиста не постоје велике разлике у одзиву између савијеног и развученог модела кохлеје, као што је навођено у литератури за механичке моделе кохлеје [39].

На слици 32 су приказани упоредни одзиви базиларне мембране при улазној фреквенцији од  $2\text{ kHz}$  за развучени кутијаста модел кохлеје чији су елементи уздужно спрегнути и за спирални модел кохлеје.



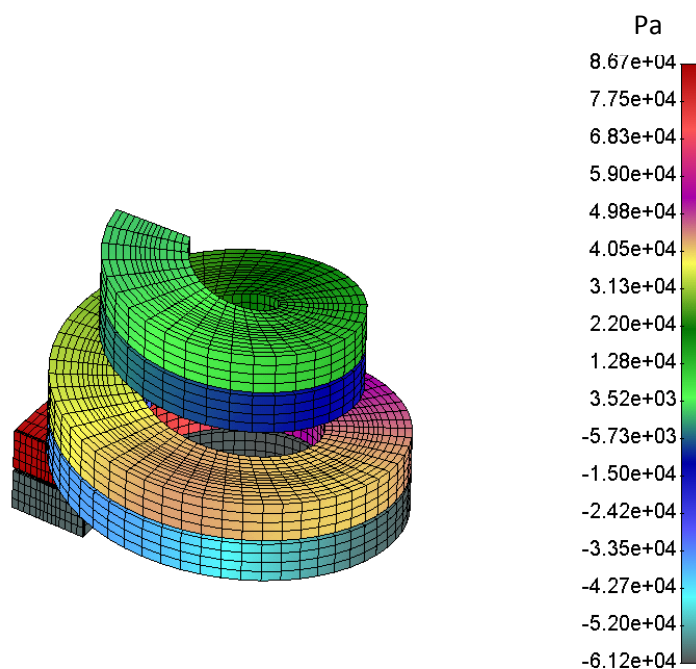
Слика 32: Поређење померања базиларне мембране – кутијаста модел кохлеје (плава) и спирални модел кохлеје (црвена) при улазној фреквенцији од  $2\text{ kHz}$ .

Са слике 32 се може уочити да се одзиви ова два модела незнатно разликују. Максимална амплитуда осциловања је изражено већа у односу на остала померања код кутијастог модела, што није случај код спиралног модела кохлеје. Такође, спирални модел кохлеје нема тако брзо смиривање таласа после достизања максималне амплитуде, али амплитуде смиривања су мале тако да ова појава може да се занемари код анализе спиралног модела. Достизање максималне амплитуде (карактеристичног места) је остварено код оба модела на истом делу базиларне мембране. За спирални модел карактеристично место при улазној фреквенцији од  $2\text{ kHz}$  се налази на растојању  $15.7\text{ mm}$  од базе, док за кутијаста модел кохлеје то растојање износи  $15.9\text{ mm}$ . На основу тога може се закључити да оба модела са довољном тачношћу могу да одреде карактеристично место на базиларној мембрани за

улазну фреквенцију из опсега чујности, у овом случају  $2\text{ kHz}$ . Према Гринвудовој функцији [7] улазној фреквенцији од  $2\text{ kHz}$  одговара карактеристично место које се налази на растојању  $16.38329\text{ mm}$  од базе, што значи да је грешка одзива у случају кутијастог модела кохлее  $2.95\%$ , а у случају спиралног модела кохлее износи  $4.17\%$ . С обзиром да су у оба случаја грешке мање од  $5\%$  може се рећи да модели са довољном тачношћу могу да одреде карактеристично место за дату улазну фреквенцију.

Геометрија механичког модела кохлее не утиче посебно на резултате одзива кохлее, као што је већ навођено у литератури [40]. С друге стране параметри који у великој мери утичу на одзив механичког модела кохлее су материјалне карактеристике саме кохлее, првенствено базиларне мембране, о чему ће бити више речи у поглављу 8.

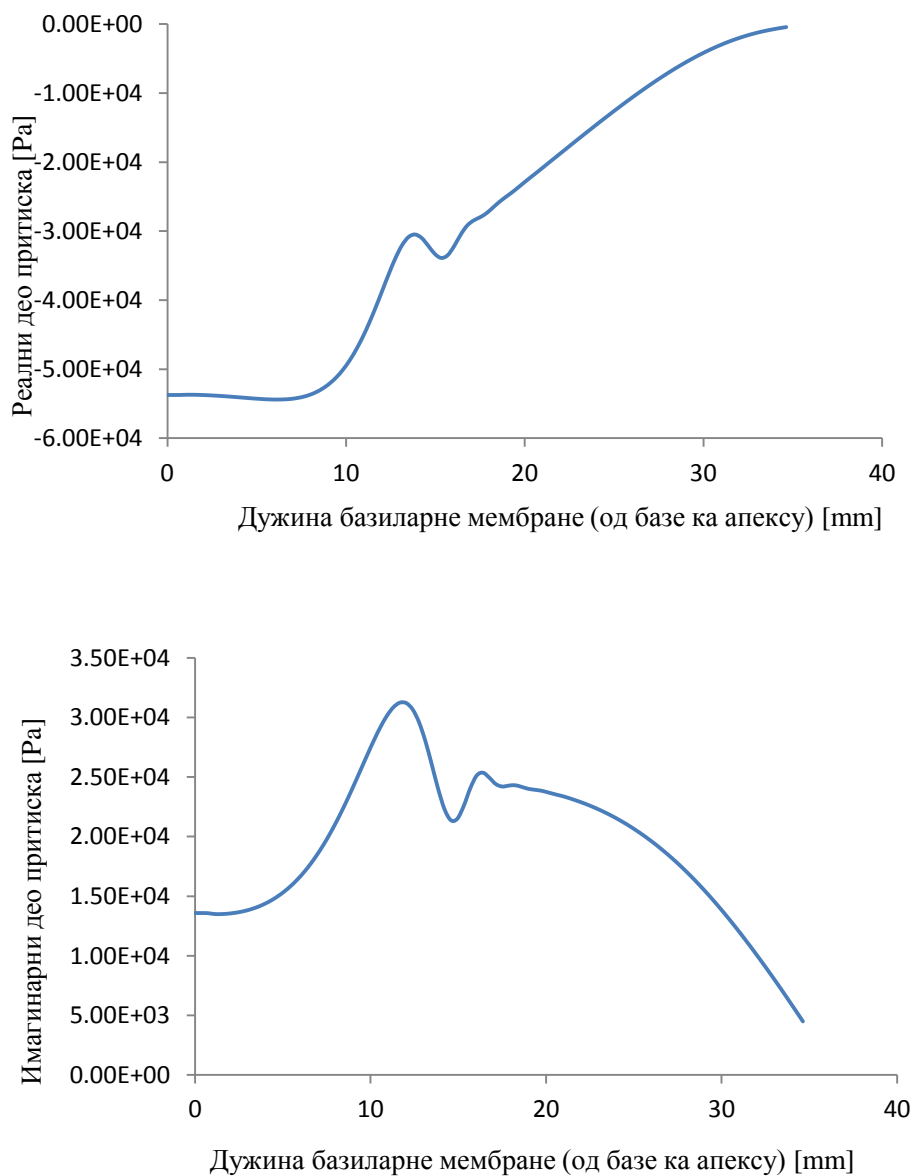
На слици 33 је приказана расподела притисака унутар флуидних комора при улазној фреквенцији од  $1\text{ kHz}$ .



Слика 33: Расподела притиска у флуидним коморама – спирални модел кохлее, улазна фреквенција од  $1\text{ kHz}$ .



За све моделе постоји и могућност исцртавања дијаграма за притисак у флуидним коморама – реални и имагинарни делови притиска.



Слика 34: Реални (горе) и имагинарни (доле) део притиска у флуидним коморама спиралног модела кохлеје у односу на положај на базиларној мембрани при улазној фреквенцији од 2 kHz.

Израчунати притисци могу да се сачувају и као текстуални документи који садрже одвојено реални и имагинарни део притиска из флуидних комора.

## 6. Модели кохлее у простору стања

Модели кохлее извођени су и решавани у простору стања. Репрезентација модела кохлее у простору стања је пожељна, јер упрошћава сложени математички модел - систем диференцијалних једначина вишег реда преводи на систем диференцијалних једначина првог реда. Модели кохлее који су решавани у простору стања представљају електро-механичке моделе кохлее. Њихово изођење, решавање и резултати биће представљени у овом поглављу.

### 6.1. Простор стања

Модели у простору стања користе минимални број променљивих стања (вектор стања) и њихове прве изводе како би описали одређени систем. Репрезентација система у простору стања замењује  $n$ -ти ред диференцијалне једначине у матричну диференцијалну једначину првог реда [41].

Математички модели описани диференцијалним или диференцијалним једначинама вишег реда се преводе на скуп диференцијалних и диференцијалних једначина првог реда, односно преводе се на моделе у простору стања. Тако дефинисани математички модели су једноставнији за решавање и бржи. Да би систем могао да се запише у простору стања неопходно је да улази и излази из система буду познати, као и да се успоставе релације између променљивих стања и њихових извода. Предност простора стања се огледа и у томе што је запис модела у простору стања веома једноставан и чак и најсложенији системи се могу записати са две опште једначине простора стања.

Општи облик модела у простору стања дат је једначином стања и једначином излаза:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \quad 6.1$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \quad 6.2$$

У једначинама 6.1 и 6.2 величина  $x(t)$  представља вектор променљивих стања,  $\dot{x}(t)$  је вектор извода променљивих стања,  $u(t)$  је вектор улаза у систем, док  $y(t)$  представља вектор излаза из система. Вектор променљивих стања ( $x(t)$ ) је скуп независних променљивих, које заједно са познатим улазима у систем и једначинама које описују динамику система омогућавају одређивање будућих стања и излаза из система [42].

Матрица стања је означена словом  $A$  у једначини 6.1 и квадратна је матрица димензија  $n \times n$ , где је  $n$  број променљивих стања.  $B$  је матрица улаза и димензија је  $n \times r$ , где је  $r$  број улаза у систем. Матрица  $C$  је матрица излаза, димензије  $m \times n$ , где је  $m$  број излаза из система и матрица  $D$  је улазно – излазна матрица (матрица директне транзиције), димензија  $m \times r$ .

Сви системи у простору стања имају исти облик, па је могуће направити алгоритме за решавање који се могу применити на све системе.

Модели у простору стања могу бити записани и у временском и у фреквентном домену. Такође, могу бити непрекидни или дискретни модели. Једначине 6.1 и 6.2 описују непрекидне моделе у временском домену. Дискретни модел у временском домену у простору стања би имао општи облик дат једначинама 6.3 - 6.5 [43].

$$x(kT + T) = Ax(kT) + Bu(kT) + Ke(kT) \quad 6.3$$

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) + e(kT) \quad 6.4$$

$$x(0) = x_0 \quad 6.5$$

У једначинама 6.3 - 6.5 величина  $T$  представља период одабирања,  $u(kT)$  је улаз у тренутку одабира  $kT$ ,  $y(kT)$  је излаз у тренутку одабира  $kT$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,  $e(kT)$  је грешка сигнала или поремећај, шум, док је  $x_0$  дефинисано почетно стање.

Модел у простору стања у фреквентном домену се добија након извршене Лапласове трансформације над једначинама стања и излаза [44]. Најједноставнији случај се добија за усвојене нулте почетне услове (једначина 6.6).

$$SX(S) = A \cdot X(S) + B \cdot U(S) \quad 6.6$$

$$X(S) = (SI - A)^{-1}B \cdot U(S) \quad 6.7$$

$$Y(S) = CX(S) + D \cdot U(S) = [C(SI - A)^{-1}B + D] \cdot U(S) \quad 6.8$$

На основу једначина 6.6 - 6.8 може се формулисати и функција преноса, која је по дефиницији однос излаза из система и улаза у дати систем:

$$W(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = C(SI - A)^{-1}B + D \quad 6.9$$

Модели у простору стања се решавају решавањем матричних једначина. Матричне једначине могу бити дефинисане и решене у Матлаб програмском пакету коришћењем ODE солвера.

## 6.2. Електро-механички модели кохлее у простору стања

Првобитно развијен електро-механички модел кохлее развијен је као 1D упрошћен модел у простору стања. Модел, осим кохлеарне макромеханике, укључује електрична својства спољашњих трепљастих ћелија и електро-механичку конверзију која се догађа у овим ћелијама.

### 6.2.1. Макромеханички део модела кохлее

Понашање флуида у коморама и осциловање базиларне мембране припадају макромеханичком делу модела кохлее. За опис овог дела модела коришћен је други Њутнов закон и једначина континуитета. Разлика притисака између две коморе – вестибуларног степеништа и бубног степеништа је функција промене брзине флуида [45].

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{A} \dot{U} \quad 6.10$$

У једначини 6.10  $\rho$  представља густину флуида,  $A$  је површина попречног пресека флуидне коморе,  $\dot{U}$  је брзина флуида, а  $x$  је положај на базиларној мембрани, удаљеност од базе.

Модел узима као претпоставку нестишљивост флуида, па се принцип континуитета може исказати једначином 6.11.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = w \dot{\xi}_r \quad 6.11$$

$w$  је ширина кохлее (базиларне мембране), а  $\dot{\xi}_r$  је први извод померања ретикуларне мембране (брзина ретикуларне мембране), мембране која прекрива спољашње трепљасте ћелије Кортијевог органа.

Кретање базиларне мембране је описано Њутновом динамичком једначином:

$$m_b \ddot{\xi}_b + r_b \dot{\xi}_b + k_b \xi_b = -p \quad 6.12$$

$m_b$ ,  $r_b$  и  $k_b$  из једначине 6.12 су редом маса, пригушење и крутост базиларне мембране по јединици површине, док су  $\xi_b$ ,  $\dot{\xi}_b$  и  $\ddot{\xi}_b$  редом померање, брзина и убрзање базиларне мембране а  $p$  је притисак у флуиду.

Гранични услови макромеханичког дела модела су промена притиска на почетку вестибуларног степеништа, у делу овалног прозора, као и промена притиска у делу хеликотреме, на контакту две флуидне коморе, вестибуларног и бубног степеништа.

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\rho \dot{v}_s \quad 6.13$$

У једначини 6.13  $\dot{v}_s$  је промена брзине овалног прозора, узрокована померањем узенгије.

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\frac{\rho}{Am_h} p \quad 6.14$$

У једначини 6.14  $m_h$  представља акустичну индукцију која је последица кинетичке енергије флуида, а која у ширем смислу може да се тумачи као маса флуида на делу хеликотреме ( $m_h = 110 \frac{g}{cm^4}$ ) [46].

Овим једначинама је додата и једначина која је узета у обзир због упрошћавања модела, а то је да је померање базиларне мембране ( $\xi_b$ ) једнако збиру померања ретикуларне мембране ( $\xi_r$ ) и спољашњих трепљастих ћелија ( $\xi_{ohc}$ ).

$$\xi_b = \xi_r + \xi_{ohc} \quad 6.15$$

У реалним условима Кортијев орган не функционише као круто тело, али за потребе развоја електро-механичког модела кохлее може се рећи да је дозвољена апроксимација, која не утиче превише на тачност резултата. С друге стране, идеја је да се овим моделом покажу основне електричне карактеристике кохлее – појава струје и промена потенцијала, а на другом месту је тачност одзива.

### 6.2.2. Електропокретљивост спољашњих трепљастих ћелија

Електропокретљивост дефинише покретљивост спољашњих трепљастих ћелија под утицајем електричне побуде. Унутар спољашњих трепљастих ћелија долази до промене потенцијала и појаве електричне струје, као што је објашњено у поглављу 2. Струја која настаје у спољашњим трепљастим ћелијама зависи од капацитета ( $C$ ) и проводљивости ( $G$ ) мембране, од потенцијала мембране ( $V$ ), као и од акумулираног потенцијала ( $Q$ ) који се јавља услед електропокретљивости.

$$i = C \frac{dV}{dt} + GV + \frac{dQ}{dt} \quad 6.16$$

Први електро-механички модел кохлее не узима у обзир струју која настаје у слушним длачицама (енгл. hair bundle).

У спољашњим слушним ћелијама се јавља пиезоелектрични ефекат [47], који подразумева појаву површинског напона када се на пиезоелектрични кристал делује механичким

притиском. Такође, довођење спољног напона на пиезоелектрични кристал узроковаће његову деформацију. На основу тога може се рећи да су материјална својства спољашњих трепљастих, слушних ћелија слична својствима пиезоелектричних кристала. Појава напона доводи до померања спољашњих трепљастих ћелија.

$$\xi_{ohc} = T_p Q \quad 6.17$$

У једначини 6.17 величина  $T_p$  представља пиезоелектричну константу. Акумулирани потенцијал ( $Q$ ) зависи од потенцијала мембране ( $V$ ), пиезоелектричне константе ( $T_p$ ) и силе контракције која се јавља у спољашњим трепљастим ћелијама ( $f_{ohc}$ ). Зависност ових величина одговара Болцмановој функцији [48].

$$Q = f(\tilde{V}), \quad \tilde{V} \triangleq V - T_p f_{ohc} \quad 6.18$$

С обзиром да је акумулирани потенцијал,  $Q$ , функција напона, његов извод по времену се може одредити на следећи начин:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ(\tilde{V})}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial \tilde{V}} \cdot \frac{d\tilde{V}}{dt} = C_g \cdot \frac{d\tilde{V}}{dt}, \quad C_g = \frac{\partial Q}{\partial \tilde{V}} \quad 6.19$$

$C_g$  означава капацитет отварања канала (капија, пора) и приближно је константан у току времена. Даље је потребно одредити први извод напона  $\tilde{V}$ :

$$\frac{d\tilde{V}}{dt} = \frac{d(V - T_p f_{ohc})}{dt} = \frac{dV}{dt} - \frac{d(T_p f_{ohc})}{dt} = \frac{dV}{dt} - T_p \frac{df_{ohc}}{dt} = \dot{V} - T_p \dot{f}_{ohc} \quad 6.20$$

Извод  $\frac{dQ}{dt}$ , на основу једначина 6.19 и 6.20, постаје:

$$\frac{dQ}{dt} = C_g \cdot \frac{d\tilde{V}}{dt} = C_g \cdot (\dot{V} - T_p \dot{f}_{ohc}) \quad 6.21$$

Заменом једначине 6.21 у једначину 6.16 добија се нова једначина за израчунавање струје.

$$i = C \frac{dV}{dt} + GV + \frac{dQ}{dt} = C\dot{V} + GV + C_g \cdot (\dot{V} - T_p \dot{f}_{ohc}) = (C + C_g)\dot{V} - C_g T_p \dot{f}_{ohc} + \quad 6.22$$

$GV$

Спољашње трепљасте ћелије се контракују – издужују и скраћују под дејством силе  $f_{ohc}$ . Кретање спољашњих трепљастих ћелија може да се опише Њутновом динамичком једначином.

$$M\ddot{\xi}_{ohc} + R\dot{\xi}_{ohc} + K\xi_{ohc} = f_{ohc} \quad 6.23$$

У једначини 6.23  $M$ ,  $R$  и  $K$  су редом маса, пригушење и крутост спољашњих трепљастих ћелија.

### 6.2.3. Електро-механичка конверзија спољашњих трепљастих ћелија

Унутар спољашњих трепљастих ћелија долази до претварања механичке енергије у електричну. Вибрације базиларне мембране узрокују вибрације Кортијевог органа, а смицање које се јавља између ретикуларне и текторијалне мембране доводи до отварања јонских канала и промене потенцијала, услед чега долази до појаве струје и инервисања аудиторних нерава.

Струја која је настала услед промене потенцијала, количине катјона калијума и калцијума, који улазе и излазе из ћелија приликом механичког кретања ћелија и отварања канала, је функција померања и брзине ретикуларне мембране [45].

$$i_r = \alpha_d \xi_r + \alpha_v \dot{\xi}_r \quad 6.24$$

У једначини 6.24  $i_r$  представља струју која се јавља у спољашњим трепљастим ћелијама услед померања ретикуларне мембране,  $\xi_r$  и  $\dot{\xi}_r$  су померање и брзина ретикуларне мембране, а  $\alpha_d$  и  $\alpha_v$  су одговарајуће константе пропорционалности.

У овом моделу није узето у обзир померање текторијалне мембране и појава смичућег напона, као ни утицај тог померања на јачину струје. Додатно усложњавање модела може да се постигне ако се разматра и појава друге струје на врховима спољашњих трепљастих ћелија, на груписаним трепљама, слушним длачицама [49]. Првенствено је разматрана само струја  $i_r$ .



### 6.3. Модел кохлее у простору стања без уздужног електричног спрезања

Једначине које формирају математички модел кохлее и описују величине које се појављују у средњој комори, средишњем степеништу, су једначине 6.10 - 6.24. На основу анализе ових једначина може се закључити да у њима фигурише пет међусобно независних променљивих, које се узимају као променљиве стања. То су померање спољашњих трепљастих ћелија ( $\xi_{ohc}$ ), и померање и брзина ретикуларне мембране ( $\xi_r$  и  $\dot{\xi}_r$ ) од механичких карактеристика, као и потенцијал мембране спољашњих слушних ћелија ( $V$ ) и акумулирани потенцијал ( $Q$ ) од електричних карактеристика.

Да би модел кохлее био представљен у простору стања у општем облику потребно је да постоји функционална зависност између променљивих стања са десне стране једначине и њихових извода, који се налазе са леве стране једначине. Вектор стања има пет независних променљивих -  $\{\xi_r, \dot{\xi}_r = u_r, \xi_{ohc} = u_{ohc}, V, Q\}$ . Даље сређивање једначина 6.10 - 6.24 подразумева да се изводи променљивих запишу као функција променљивих стања.

Извод померања ретикуларне мембране једнак је брзини кретања ретикуларне мембране.

$$\dot{\xi}_r = u_r \quad 6.25$$

Извод друге променљиве стања, брзине ретикуларне мембране, може да се одреди из једначине 6.12 при чему једначина 6.15 мора бити узета у обзир.

$$m_b(\ddot{\xi}_r + \ddot{\xi}_{ohc}) + r_b(\dot{\xi}_r + \dot{\xi}_{ohc}) + k_b(\xi_r + \xi_{ohc}) = -p \quad 6.26$$

$$\ddot{\xi}_r = -\ddot{\xi}_{ohc} - \frac{r_b}{m_b}\dot{\xi}_r - \frac{r_b}{m_b}\dot{\xi}_{ohc} - \frac{k_b}{m_b}\xi_r - \frac{k_b}{m_b}\xi_{ohc} - \frac{1}{m_b}p \quad 6.27$$

Други извод померања спољашњих трепљастих ћелија одређује се из једначине 6.23.

$$\ddot{\xi}_{ohc} = -\frac{R}{M}\dot{\xi}_{ohc} - \frac{K}{M}\xi_{ohc} + \frac{1}{M}f_{ohc} \quad 6.28$$

Силу која се јавља у спољашњим трепљастим ћелијама се добија након интеграције једначине 6.21.

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{Q} = C_g \cdot (\dot{V} - T_p \dot{f}_{ohc}) \Rightarrow \dot{f}_{ohc} = \frac{1}{T_p} \dot{V} - \frac{1}{C_g T_p} \dot{Q} \Rightarrow f_{ohc} = \frac{1}{T_p} V - \frac{1}{C_g T_p} Q \quad 6.29$$

Заменом израза за силу из једначине 6.29 у једначину 6.28 добијамо извод брзине кретања спољашњих трепљастих ћелија у функцији променљивих стања:

$$\ddot{\xi}_{ohc} = -\frac{R}{M}\dot{\xi}_{ohc} - \frac{K}{M}\xi_{ohc} + \frac{1}{M}\left(\frac{1}{T_p}V - \frac{1}{c_g T_p}Q\right) \quad 6.30$$

Други извод померања спољашњих трепљастих ћелија из једначине 6.30 се уводи у једначину 6.27 и после сређивања извод брзине кретања ретикуларне мембране добија облик дат једначином 6.32.

$$\ddot{\xi}_r = \left(\frac{R}{M} - \frac{r_b}{m_b}\right)\dot{\xi}_{ohc} - \frac{r_b}{m_b}\dot{\xi}_r + \left(\frac{K}{M} - \frac{k_b}{m_b}\right)\xi_{ohc} - \frac{k_b}{m_b}\xi_r - \frac{1}{T_p M}V + \frac{1}{c_g T_p M}Q - \frac{1}{m_b}p \quad 6.31$$

У једначини 6.31 потребно је још средити члан који садржи померање спољашњих трепљастих ћелија ( $\xi_{ohc}$ ), с обзиром да та величина није променљива у простору стања. Померање спољашњих трепљастих ћелија ( $\xi_{ohc}$ ) је функција потенцијала мембране спољашњих слушних ћелија (једначина 6.17). Крајњи израз извода брзине кретања ретикуларне мембране записан је једначином 6.32.

$$\ddot{\xi}_r = \dot{u}_r = -\frac{k_b}{m_b}\xi_r - \frac{r_b}{m_b}u_r + \left(\frac{R}{M} - \frac{r_b}{m_b}\right)u_{ohc} - \frac{1}{T_p M}V + \left(\frac{KT_p}{M} - \frac{k_b T_p}{m_b} + \frac{1}{c_g M}\right)Q - \frac{1}{m_b}p \quad 6.32$$

Крајњи израз извода брзине кретања спољашњих трепљастих ћелија дат је једначином 6.33.

$$\ddot{\xi}_{ohc} = \dot{u}_{ohc} = -\frac{R}{M}u_{ohc} + \frac{1}{T_p M}V + \left(-\frac{KT_p}{M} - \frac{1}{c_g T_p}\right)Q \quad 6.33$$

Механичке карактеристике су изведене у функцији променљивих стања. Потребно је још извести и електричне карактеристике у функцији променљивих стања. Извод потенцијала мембране се добија изједначавањем израза за електричну струју (једначине 6.16 и 6.24).

$$C\dot{V} + GV + \dot{Q} = i = \alpha_d \xi_r + \alpha_v \dot{\xi}_r \Rightarrow \dot{V} = \frac{\alpha_d}{C}\xi_r + \frac{\alpha_v}{C}u_r - \frac{1}{CT}u_{ohc} - \frac{G}{C}V \quad 6.34$$

Извод акумулираног потенцијала,  $Q$ , добија се диференцирањем једначине 6.17:

$$\xi_{ohc} = T_p Q \Rightarrow Q = \frac{1}{T_p}\xi_{ohc} \Rightarrow \dot{Q} = \frac{1}{T_p}\dot{\xi}_{ohc} = \frac{1}{T_p}u_{ohc} \quad 6.35$$

Једначине 6.25 и 6.32 - 6.35 формирају простор стања, што може бити запосано у облику:

$$\begin{cases} u_r \\ \dot{u}_r \\ \dot{u}_{ohc} \\ \dot{V} \\ \dot{Q} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_b}{m_b} & -\frac{r_b}{m_b} & \frac{R}{M} - \frac{r_b}{m_b} & -\frac{1}{T_p M} & \frac{KT_p}{M} - \frac{k_b T_p}{m_b} + \frac{1}{C_g M} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{M} & \frac{1}{T_p M} & -\frac{KT_p}{M} - \frac{1}{C_g T_p M} \\ \frac{\alpha_d}{c} & \frac{\alpha_v}{c} & -\frac{1}{CT_p} & -\frac{G}{c} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_p} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \xi_r \\ u_r \\ u_{ohc} \\ V \\ Q \end{cases} + \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{m_b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} p \quad 6.36$$

У једначини 6.36 матрица стања, димензија  $5 \times 5$ , састоји се од више параметара, чије су вредности познате и које се углавном мењају дуж базиларне мембране. Вредности параметара матрице стања дати су у табели 3 (вредности су дате у основним јединицама SI система).

Табела 3: Вредности параметара матрице стања.

Табела 3	Ознака	Јединице	База	Средина	Апекс
Механичке карактеристике Кортијевог органа					
Маса спољашњих слушних ћелија	$M$	[kg]	$2.8 \cdot 10^{-11}$	$5 \cdot 10^{-10}$	$2.8 \cdot 10^{-8}$
Пригушење спољашњих слушних ћелија	$R$	[kg/s]	$9.4 \cdot 10^{-7}$	$9.23 \cdot 10^{-7}$	$1.85 \cdot 10^{-6}$
Крутост спољашњих слушних ћелија	$K$	[kg/s <sup>2</sup> ]	$1.96 \cdot 10^{-1}$	$1.06 \cdot 10^{-2}$	$7.64 \cdot 10^{-4}$
Маса базиларне мембране по јединици површине	$m$	[kg/m <sup>2</sup> ]	$1.24 \cdot 10^{-2}$	$7.1 \cdot 10^{-2}$	$4.1 \cdot 10^{-1}$
Пригушење базиларне мембране по јединици површине	$r$	[kg/s·m <sup>2</sup> ]	$4.8 \cdot 10^2$	$7.97 \cdot 10^2$	$1.68 \cdot 10^3$
Крутост базиларне мембране по јединици површине	$k$	[kg/s <sup>2</sup> ·m <sup>2</sup> ]	$1.96 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^7$	$3.14 \cdot 10^5$
Електро-механичке карактеристике спољашњих трепљастих ћелија					
Осетљивост канала на померање ретикуларне мембране, подужна густина електричне струје	$\alpha_d$	[A/m]	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$6.23 \cdot 10^{-4}$	$2.04 \cdot 10^{-4}$
Осетљивост канала на брзину ретикуларне мембране, електрични потенцијал	$\alpha_v$	[C/m]	$4.36 \cdot 10^{-6}$	$1.78 \cdot 10^{-6}$	$6.81 \cdot 10^{-7}$
Максимални вредност струје на спољашњим трепљастим ћелијама	$I_{max}$	[A]	$6.7 \cdot 10^{-10}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$	$8.3 \cdot 10^{-11}$
Пиезоелектрична константа	$T_p$	[m/C]	$2.4 \cdot 10^6$		
Проводљивост мембране	$G (G_4)$	[S]	$9.1 \cdot 10^{-7}$	$5.1 \cdot 10^{-7}$	$3.29 \cdot 10^{-8}$
Капацитет мембране	$C (C_4)$	[F]	$1.4 \cdot 10^{-11}$	$3.23 \cdot 10^{-11}$	$7.9 \cdot 10^{-11}$
Капацитет пролаза	$C_g$	[F]	$1.8 \cdot 10^{-11}$	$3.3 \cdot 10^{-11}$	$7 \cdot 10^{-11}$
Базиларна мембрана					
Дужина базиларне мембране	$x$	[m]	$35 \cdot 10^{-3}$		
Ширина базиларне мембране	$w$	[m]	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$5.1 \cdot 10^{-4}$
Флуидна комора					
Ширина	$y$	[m]	$3.54 \cdot 10^{-3}$	$1.67 \cdot 10^{-3}$	$7.89 \cdot 10^{-4}$
Висина	$z$	[m]	$1.77 \cdot 10^{-3}$	$8.35 \cdot 10^{-4}$	$3.94 \cdot 10^{-4}$
Густина флуида	$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	1000		
Кохлеа					
Површина попречног пресека кохлеа	$A$	[m <sup>2</sup> ]	$6.27 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$3.1 \cdot 10^{-7}$
Акустичка индуктанса (маса хеликотреме)	$m_h$	[kg/m <sup>4</sup> ]	$110 \cdot 10^5$		

Проблем за решавање модела датог једначином 6.36 је притисак који се налази на десној страни једначине и који је функција променљивих стања, што се види из једначина 6.10 - 6.14. Стога, прво треба израчунати притисак, а затим решити вектор стања. Из једначине 6.10 се види да је парцијални извод притиска по координати, односно промена притиска дуж базиларне мембране пропорционална брзини кретања флуида. Да би се искористила промена брзине кретања флуида дуж базиларне мембране (једначина 6.11) једначина 6.10 се још једном диференцира по  $x$  координати.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\rho}{A} \frac{dU}{dt} \right) = -\frac{\rho}{A} \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\rho}{A} \frac{d}{dt} (w \dot{\xi}_r) = -\frac{\rho w}{A} \ddot{\xi}_r \quad 6.37$$

Даље други извод померања ретикуларне мембране може да се замени изразом из једначине 6.32 или из друге једначине матричне једначине 6.36.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{\rho w}{A} \left[ -\frac{k_b}{m_b} \xi_r - \frac{r_b}{m_b} u_r + \left( \frac{R}{M} - \frac{r_b}{m_b} \right) u_{ohc} - \frac{1}{T_p M} V + \left( \frac{KT_p}{M} - \frac{k_b T_p}{m_b} + \frac{1}{C_g M} \right) Q - \frac{1}{m_b} p \right] \quad 6.38$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{\rho w}{A} \left[ -\frac{k_b}{m_b} \xi_r - \frac{r_b}{m_b} u_r + \left( \frac{R}{M} - \frac{r_b}{m_b} \right) u_{ohc} - \frac{1}{T_p M} V + \left( \frac{KT_p}{M} - \frac{k_b T_p}{m_b} + \frac{1}{C_g M} \right) Q \right] + \frac{\rho w}{A m_b} p \quad 6.39$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho w}{A m_b} \right) p = -\frac{\rho w}{A} \left[ -\frac{k_b}{m_b} \xi_r - \frac{r_b}{m_b} u_r + \left( \frac{R}{M} - \frac{r_b}{m_b} \right) u_{ohc} - \frac{1}{T_p M} V + \left( \frac{KT_p}{M} - \frac{k_b T_p}{m_b} + \frac{1}{C_g M} \right) Q \right] \quad 6.40$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho w}{A m_b} \right) p = f(\xi_r, u_r, u_{ohc}, V, Q) \quad 6.41$$

Једначина 6.40 даје функционалну зависност притиска и променљивих стања. Пошто са леве стране једначине 6.40 постоји други парцијални извод притиска по  $x$  координати којом се дефинише положај дуж базиларне мембране, одговарајуће је да се примени метода коначних разлика за решавање притиска и то централна. За решавање је неопходно знати и граничне услове, који су у овом случају дефинисани једначинама 6.13 и 6.14. Овако дефинисани гранични услови који подразумевају први извод тражене величине (потпуни или парцијални) називају се Дирихлеови гранични услови [50]. Други извод притиска се апроксимира централном разликом (једначина 6.42), при чему је  $\delta$  величина коначног дела и у овом случају износи  $50 \mu m$ .

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{p(x-\delta) - 2p(x) + p(x+\delta)}{\delta^2} \quad 6.42$$

Коефицијенти који стоје уз притиске у суседним пресецима могу да се групишу тако да формирају матрицу која је по својој структури тродијагонална. На овакве матрице примењује се тродијагонални матрични алгоритам (алгоритам тродијагоналних матрица) или Томасов алгоритам (назван по британском физичару и математичару Томасу, енгл. Clewellyn Thomas) [51], који представља упрошћен облик Гаусове елиминације. Тродијагонални систем написан за  $n$  непознатих ( $i = 1 \div n$ ) има општи облик:

$$a_i x(i-1) + b_i x(i) + c_i x(i+1) = d_i \quad 6.43$$

Тродијагонални систем написан за  $n$  непознатих (једначина 6.43) има матрични запис дат следећом једначином:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{Bmatrix} \quad 6.44$$

Тродијагонални системи немају први коефицијент  $a_1$  и последњи коефицијент  $c_n$  ( $a_1 = c_n = 0$ ), јер са њима би се излазило из домена непознатог вектора који се тражи (у овом случају  $x$ ). Непознате величине су притисци по пресецима дуж базиларне мембране ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ , ( $n = 701$ )). Вектор  $d$  представља вектор улаза, познате величине.

При решавању потребно је додати и граничне услове који су дефинисани на почетку и на крају домена обично, тако да се у матрици врши корекција првог и последњег реда.

Гранични услови (једначине 6.13 и 6.14) се апроксимирају коначним разликама првог реда предњим ( $x = 0$ ) и задњим ( $x = l$ ).

$$\frac{p(x+\delta)-p(x)}{\delta} = -\rho \dot{v}_s \Rightarrow \frac{1}{\delta} p(x+\delta) - \frac{1}{\delta} p(x) = -\rho \dot{v}_s \quad 6.45$$

$$\frac{p(x)-p(x-\delta)}{\delta} = -\frac{\rho}{Am_h} p(x) \Rightarrow \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\rho}{Am_h}\right) p(x) - \frac{1}{\delta} p(x-\delta) = 0 \quad 6.46$$

Коефицијент  $\delta$  је вредност корака и износи  $50 \mu m$  ( $35 mm/700$ ). На основу једначине 6.45 виде се вредности коефицијената  $b_1 = -\frac{1}{\delta}$  и  $c_1 = \frac{1}{\delta}$ . Из једначине 6.46 добијају се коефицијенти  $a_n = -\frac{1}{\delta}$  и  $b_n = \frac{1}{\delta} + \frac{\rho}{Am_h}$ . Вектор  $d_i$  има познат први члан добијен из првог граничног услова,  $d_1 = -\rho \dot{v}_s$ . Остали чланови имају вредност нула, на почетку прорачуна.

Тродијагонална матрица притиска ( $F$ ) има коначан облик:

$$Fp = d \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{\delta} & \frac{1}{\delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^2} & \frac{1}{\delta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -\frac{2}{\delta^2} & \frac{1}{\delta^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta} & \frac{1}{\delta} + \frac{\rho}{Am_h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\rho\dot{v}_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 6.47$$

Други парцијални извод притиска је функција извода брзине ретикуларне ламине (једначина 6.37), односно на тај начин функција свих променљивих вектора стања. Због тога ће десна страна једначине 6.47 имати додатни члан који укључује вектор извода променљивих стања помножен са матрицом повезаности.

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\delta} & \frac{1}{\delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^2} & \frac{1}{\delta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & -\frac{2}{\delta^2} & \frac{1}{\delta^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\delta} & \frac{1}{\delta} + \frac{\rho}{Am_h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\rho\dot{v}_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [0 \quad -\frac{\rho w}{A} \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{Bmatrix} u_r \\ \dot{u}_r \\ \dot{v}_{ohc} \\ \dot{V} \\ \dot{Q} \end{Bmatrix} \quad 6.48$$

Притисак се одређује из једначине 6.48 инверзијом матрице притиска,  $F$ . Добијени израз за притисак се мења у једначину стања (једначина 6.36). Матрична једначина се даље сређује груписањем чланова, тако да се добије општи облик једначине стања са новим матрицама стања и улаза. Објашњен поступак је исписан у наставку.

Првобитно формирана једначина стања имала је облик дат једначином 6.36:

$$\dot{X} = AX + Bp \quad 6.49$$

С друге стране притисак из једначине 6.37 може да се напише у матричном облику:

$$Fp = d + C\dot{X} \Rightarrow p = F^{-1}(d + C\dot{X}) \quad 6.50$$

Заменом израза за притисак у једначину стања добија се нова једначина стања са новим матрицама стања и улаза.

$$\dot{X} = AX + BF^{-1}(d + C\dot{X}) = AX + BF^{-1}d + BF^{-1}C\dot{X} \quad 6.51$$

$$(I - BF^{-1}C)\dot{X} = AX + BF^{-1}d \quad 6.52$$

$$\dot{X} = (I - BF^{-1}C)^{-1}AX + (I - BF^{-1}C)^{-1}BF^{-1}d = A_1X + B_1d \quad 6.53$$

Новe матрице стања и улаза су:

$$A_1 = (I - BF^{-1}C)^{-1}A, \quad B_1 = (I - BF^{-1}C)^{-1}BF^{-1} \quad 6.54$$

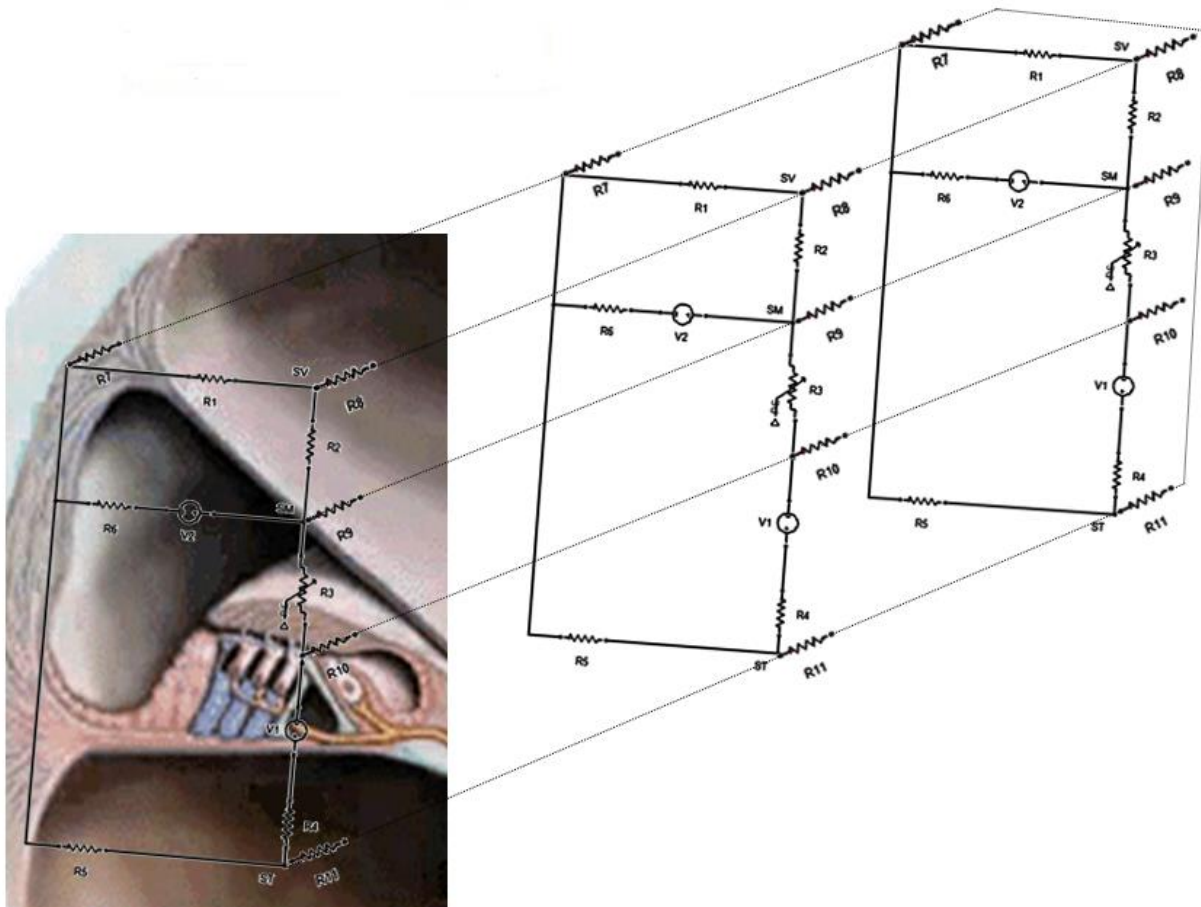
Једначина стања 6.53 је решавана у програмском пакету матлаб, коришћењем ODE (енгл. Ordinary Differential Equations) солвера. Резултати првог електро-механичког модела кохлеа су дати у на крају овог поглавља.



#### 6.4. Модел кохлее у простору стања са лонгитудиналним (уздужним) електричним спрезањем

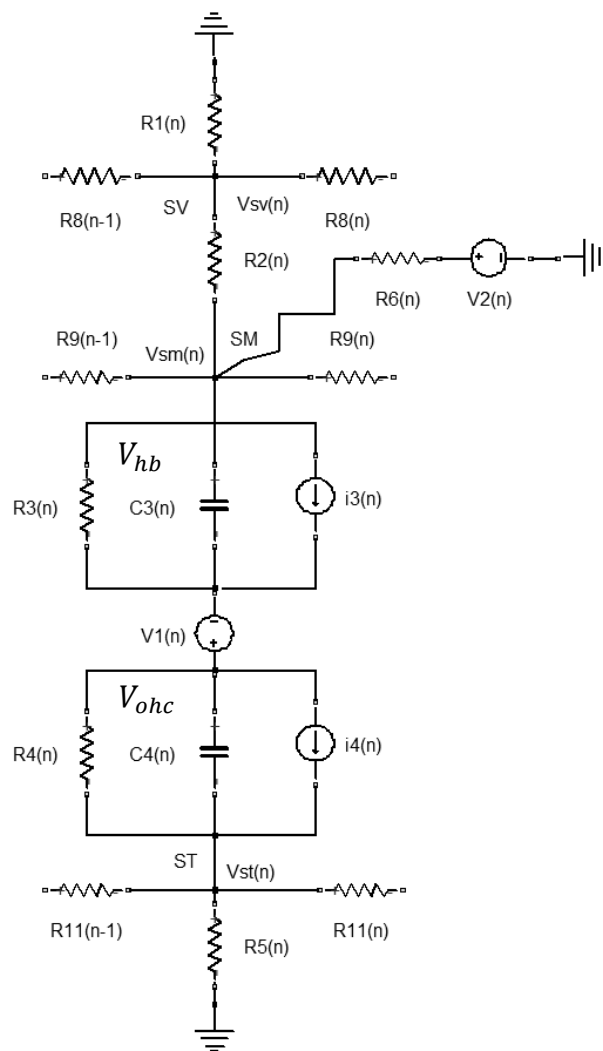
Претходно описани модел кохлее у простору стања (поглавље 1.1) представља електро-механички 1D модел кохлее. Модел је упрошћене геометрије, узима у обзир само једну струју која се ствара у спољашњим трепљастим ћелијама, не узима у разматрање уздужно електрично спрезање 1D елемената.

У реалности постоји промена потенцијала између три флуидне коморе у сваком пресеку, као и промена напона од пресека до пресека. Најприближнији модел који симулира овакво понашање је модел са отпорницима између пресека и отпорницима између комора (слика 35).



Слика 35: Шематски приказ електричних компоненти у коморама флуида и електричног уздужног спрезања кутијастог електро-механичког модела кохлее.

При сваком пресеку може се издвојити шема електричног кола, која је приказана на слици 36.



Слика 36: Шема електричног кола попречног пресека кохлеје.

Вредности отпорника и кондензатора који учествују у образовању електричног кола у попречном пресеку кохлеје су дате у табели 4.

Табела 4: Вредности електричних компоненти попречног пресека кохлеа – електро-механички модел кохлеа са уздужним електричним спрезањем елемената.

Табела 4	Ознака	Јединице	База	Средина	Апекс
Вредности отпорника електричног кола кохлеа					
Отпор између вестибуларног степеништа и лигаментa (уземљења)	$R_1$	[k $\Omega$ ]	200		
Отпор између вестибуларног и средишњег степеништа	$R_2$	[k $\Omega$ ]	500		
Отпор на слушним длачицама	$R_3$	[M $\Omega$ ]	6.6		
Отпор на спољашњим слушним ћелијама	$R_4$	[M $\Omega$ ]	11	19.6	30.4
Отпор између бубног степеништа и лигаментa (уземљења)	$R_5$	[k $\Omega$ ]	80		
Отпор између средишњег степеништа и лигаментa (уземљења)	$R_6$	[k $\Omega$ ]	540		
Отпор уздужног спрезања вестибуларног степеништа	$R_8$	[G $\Omega$ ]	10	20	60
Отпор уздужног спрезања средишњег степеништа	$R_9$	[G $\Omega$ ]	200	10	80
Отпор уздужног спрезања бубног степеништа	$R_{11}$	[G $\Omega$ ]	60	20	100
Вредности кондензатора електричног кола кохлеа					
Капацитет слушних длачица	$C_3$	[F]	$2.8 \cdot 10^{-12}$	-	$1.6 \cdot 10^{-11}$
Капацитет тела спољашњих слушних ћелија	$C_4$	[F]	$1.4 \cdot 10^{-11}$	$3.23 \cdot 10^{-11}$	$7.9 \cdot 10^{-11}$

Електрично коло приказано на слици 36 је потребно решити. Прво се примењују Кирхофови закони и једначине се пишу за све три флуидне коморе као и за два затворена кола, која описују функционисање спољашњих трепљавих ћелија.

Једнакост збира свих струја које улазе у чвор са збиром свих струја које из њега излазе (Први Кирхофов закон) за комору вестибуларног степеништа записана је једначином 6.55.

$$\frac{V_{sv}(n)}{R_1(n)} + \frac{V_{sv}(n)-V_{sv}(n-1)}{R_8(n-1)} + \frac{V_{sv}(n)-V_{sv}(n+1)}{R_8(n)} + \frac{V_{sv}(n)-V_{sm}(n)}{R_2(n)} = 0 \quad 6.55$$

Први Кирхофов закон се примењује и на остале чворове електричног кола – средишње степениште и бубно степениште, коло унутар спољашњих трепљастих ћелија, као и за коло које иде преко спољашњих трепљастих ћелија.

$$\frac{V_{sm}(n)-V_{sv}(n)}{R_2(n)} + \frac{V_{sm}(n)-V_2(n)}{R_6(n)} + \frac{V_{sm}(n)-V_{sm}(n-1)}{R_9(n-1)} + \frac{V_{sm}(n)-V_{sm}(n+1)}{R_9(n)} + \frac{V_{hb}(n)}{R_3(n)} + \quad 6.56$$

$$C_3(n)\dot{V}_{hb}(n) + i_3(n) = 0$$

$$\frac{V_{st}(n)-V_{st}(n-1)}{R_{11}(n-1)} + \frac{V_{st}(n)-V_{st}(n+1)}{R_{11}(n)} + \frac{V_{st}(n)}{R_5(n)} - \frac{V_{ohc}(n)}{R_4(n)} - C_4(n)\dot{V}_{ohc}(n) - i_4(n) = 0 \quad 6.57$$

$$i_3(n) + \frac{V_{hb}(n)}{R_3(n)} + C_3(n)\dot{V}_{hb}(n) = i_4(n) + \frac{V_{ohc}(n)}{R_4(n)} + C_4(n)\dot{V}_{ohc}(n) \quad 6.58$$

$$V_{sm}(n) = V_{st}(n) + V_{ohc}(n) - V_1(n) + V_{hb}(n) \quad 6.59$$

Једначине 6.55 - 6.59 се даље сређују груписањем заједничких чланова и пребацивањем познатих чланова на десну страну, која представља улаз за решавање непознатих напона и струја са леве стране једначина.

$$-\frac{V_{sv}(n-1)}{R_8(n-1)} + V_{sv}(n) \left[ \frac{1}{R_1(n)} + \frac{1}{R_8(n-1)} + \frac{1}{R_8(n)} + \frac{1}{R_2(n)} \right] - \frac{V_{sv}(n+1)}{R_8(n)} - \frac{V_{sm}(n)}{R_2(n)} = 0 \quad 6.60$$

$$-\frac{V_{sm}(n-1)}{R_9(n-1)} + V_{sm}(n) \left[ \frac{1}{R_2(n)} + \frac{1}{R_6(n)} + \frac{1}{R_9(n-1)} + \frac{1}{R_9(n)} \right] - \frac{V_{sv}(n)}{R_2(n)} - \frac{V_{sm}(n+1)}{R_9(n)} + \frac{V_{hb}(n)}{R_3(n)} + \quad 6.61$$

$$C_3(n)\dot{V}_{hb}(n) = \frac{V_2(n)}{R_6(n)} - i_3(n)$$

$$-\frac{V_{st}(n-1)}{R_{11}(n-1)} + V_{st}(n) \left[ \frac{1}{R_{11}(n-1)} + \frac{1}{R_{11}(n)} + \frac{1}{R_5(n)} \right] - \frac{V_{st}(n+1)}{R_{11}(n)} - C_4(n)\dot{V}_{ohc}(n) = i_4(n) + \quad 6.62$$

$$\frac{V_{ohc}(n)}{R_4(n)}$$

$$\frac{V_{hb}(n)}{R_3(n)} + C_3(n)\dot{V}_{hb}(n) - C_4(n)\dot{V}_{ohc}(n) = i_4(n) - i_3(n) + \frac{V_{ohc}(n)}{R_4(n)} \quad 6.63$$

$$V_{sm}(n) - V_{st}(n) - V_{hb}(n) = V_{ohc}(n) - V_1(n) \quad 6.64$$

Ако реципрочне вредности отпорника  $R_i$  заменимо са ознакама  $G_i$  једначине 6.60 - 6.64 добијају једноставнији запис, који је лакше пратити у матричном запису.

$$-V_{sv}(n-1)G_8(n-1) + V_{sv}(n)[G_1(n) + G_8(n-1) + G_8(n) + G_2(n)] - V_{sv}(n+1)G_8(n) - V_{sm}(n)G_2(n) = 0 \quad 6.65$$

$$-V_{sm}(n-1)G_9(n-1) + V_{sm}(n)[G_2(n) + G_6(n) + G_9(n-1) + G_9(n)] - V_{sv}(n)G_2(n) - V_{sm}(n+1)G_9(n) + V_{hb}(n)G_3(n) + C_3(n)\dot{V}_{hb}(n) = V_2(n)G_6(n) - i_3(n) \quad 6.66$$

$$-V_{st}(n-1)G_{11}(n-1) + V_{st}(n)[G_{11}(n-1) + G_{11}(n) + G_5(n)] - V_{st}(n+1)G_{11}(n) - C_4(n)\dot{V}_{ohc}(n) = i_4(n) + V_{ohc}(n)G_4(n) \quad 6.67$$

$$V_{hb}(n)G_3(n) + C_3(n)\dot{V}_{hb}(n) - C_4(n)\dot{V}_{ohc}(n) = i_4(n) - i_3(n) + V_{ohc}(n)G_4(n) \quad 6.68$$

$$V_{sm}(n) - V_{st}(n) - V_{hb}(n) = V_{ohc}(n) - V_1(n) \quad 6.69$$

Ако се узме у обзир да је кондензатор  $C_3 = 0$ , онда се извод напона на слушним длачицама не узима као непозната величина и тада вектор напона садржи пет напонских величина, које треба да се одреде на основу једначина 6.65 - 6.69. Уколико се усвоји да кондензатор  $C_3$  није занемарљив, онда ће вектор напона имати као пету напонску величину извод напона на слушним длачицама,  $\dot{V}_{hb}$ . Први случај, када је  $C_3 = 0$ , представља одређивање вектора напона, са пет векторских величина. То су три напона из три флуидне коморе, напон на слушним длачицама и извод напона на спољашњим трепљастим ћелијама -  $V = \{V_{sv}, V_{sm}, V_{st}, V_{hb}, \dot{V}_{ohc}\}^T$ .

$$\begin{bmatrix} G(1) & G(1+) & \dots & 0 & 0 \\ G(2-) & G(2) & G(2+) & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & G((N-1)-) & G(N-1) & G((N-1)+) \\ 0 & 0 & \dots & G(N-) & G(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(1) \\ V(2) \\ \vdots \\ V(N-1) \\ V(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(1) \\ U(2) \\ \vdots \\ U(N-1) \\ U(N) \end{bmatrix} \quad 6.70$$

$$G(n) = \begin{bmatrix} G_1(n) + G_8(n-1) + G_8(n) + G_2(n) & -G_2(n) & 0 & 0 & 0 \\ -G_2(n) & G_2(n) + G_6(n) + G_9(n-1) + G_9(n) & 0 & G_3(n) & 0 \\ 0 & 0 & G_{11}(n-1) + G_{11}(n) + G_5(n) & 0 & -C_4(n) \\ 0 & 0 & 0 & G_3(n) & -C_4(n) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad 6.71$$

$$G(n-) = \begin{bmatrix} -G_8(n-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_9(n-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{11}(n-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 6.72$$

$$G(n+) = \begin{bmatrix} -G_8(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_9(n) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{11}(n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 6.73$$

$$U(n) = \begin{Bmatrix} 0 \\ V_2(n)G_6(n) - i_3(n) \\ i_4(n) + V_{ohc}(n)G_4(n) \\ i_4(n) - i_3(n) + V_{ohc}(n)G_4(n) \\ V_{ohc}(n) - V_1(n) \end{Bmatrix} \quad 6.74$$

Матрични запис једначина 6.65 - 6.69 дат је једначином 6.70, уз додатне једначине 6.71 - 6.74, које дефинишу подматрице за сваки пресек дуж базиларне мембране ( $G(i)$ ,  $G(i-)$  и  $G(i+)$ ) и векторе улаза по пресецима ( $U(i)$ ).

Векторска једначина која узима у обзир напоне у коморама и на спољашњим трепљастим ћелијама, као и уздужно електрично спрежање, треба да буде коригована за граничне услове. Гранични услови (једначина 6.75) узимају у обзир да је напон вестибуларног степеништа на почетку базиларне мембране једнак нули, као и напон бубног степеништа, чиме су и одговарајући отпори једнаки нули. Поред тога узето је у обзир да је напон средишњег степеништа једнак нули на почетку и на крају базиларне мембране.

$$G_8(1) = G_9(1) = G_{11}(1) = G_9(N) = 0 \quad 6.75$$

Такође, отпорници  $R_8$  и  $R_{11}$  на крају хеликотреме су повезани, с обзиром да су преко хеликотреме повезане флуидне коморе, вестибуларно и бубно степениште. Стога се може уместо ових отпорника написати њихов збир.

$$R_8(N), R_{11}(N) \Rightarrow R_8(N) + R_{11}(N) \text{ или } G_8(N), G_{11}(N) \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{G_8(N)} + \frac{1}{G_{11}(N)}} \quad 6.76$$

Гранични услови се додају у једначине за дефинисање електричних матрица на почетку и на крају базиларне мембране ( $n = 1$ ,  $n = N$ ).

Матрица  $G(N)$  има још два нова члана ( $G_{31}$  и  $G_{13}$ ), с обзиром да се у хеликотреми спрежу вестибуларно и бубно степениште.

$$G(N) = \begin{bmatrix} G_1(N) + G_8(N-1) + \frac{1}{\frac{1}{G_8(N)} + \frac{1}{G_{11}(N)}} + G_2(N) & -G_2(N) & -\frac{1}{\frac{1}{G_8(N)} + \frac{1}{G_{11}(N)}} & 0 & 0 \\ -G_2(N) & G_2(N) + G_6(N) + G_9(N-1) & 0 & G_3(N) & 0 \\ -\frac{1}{\frac{1}{G_8(N)} + \frac{1}{G_{11}(N)}} & 0 & G_{11}(N-1) + \frac{1}{\frac{1}{G_8(N)} + \frac{1}{G_{11}(N)}} + G_5(N) & 0 & -C_4(N) \\ 0 & 0 & 0 & G_3(N) & -C_4(N) \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad 6.77$$

Извођење је извршено за случај када је  $C_3 = 0$ . У случају да  $C_3 \neq 0$  вектор напона ће имати за непознату извод напона на слушним длачицама уместо напона на слушним длачицама, који се сматра познатим, а матрична једначина ће имати нешто другачији облик.

$$\begin{bmatrix} G(1) & G(1+) & 0 & 0 & 0 \\ G(2-) & G(2) & G(2+) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G(N-1) & G((N-1)+) \\ 0 & 0 & 0 & G(N-) & G(N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1(1) \\ V_1(2) \\ \vdots \\ V_1(N-1) \\ V_1(N) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1(1) \\ U_1(2) \\ \vdots \\ U_1(N-1) \\ U_1(N) \end{Bmatrix} \quad 6.78$$

$$V_1 = \{V_{sv}, V_{sm}, V_{st}, \dot{V}_{hb}, \dot{V}_{ohc}\}^T \quad 6.79$$

$$G(n) = \begin{bmatrix} G_1(n) + G_8(n-1) + G_8(n) + G_2(n) & -G_2(n) & 0 & 0 & 0 \\ -G_2(n) & G_2(n) + G_6(n) + G_9(n-1) + G_9(n) & 0 & C_3(n) & 0 \\ 0 & 0 & G_{11}(n-1) + G_{11}(n) + G_5(n) & 0 & -C_4(n) \\ 0 & 0 & 0 & C_3(n) & -C_4(n) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 6.80$$

$G(n-)$  и  $G(n+)$  остају непромењене за случај да је  $C_3 \neq 0$ . Вектор улаза по пресецима има нешто другачији облик.

$$U_1(n) = \begin{Bmatrix} 0 \\ V_2(n)G_6(n) - i_3(n) - V_{hb}(n)G_3(n) \\ i_4(n) + V_{ohc}(n)G_4(n) \\ i_4(n) - i_3(n) + V_{ohc}(n)G_4(n) - V_{hb}(n)G_3(n) \\ V_{ohc}(n) - V_1(n) + V_{hb}(n) \end{Bmatrix} \quad 6.81$$

### 6.4.1. Спрезање једначине електричног модела кохлеје са једначином стања.

Улазни вектор  $U$  (једначине 6.74 и 6.81) може да се представи као функција променљивих стања. Напони  $V_1$  и  $V_2$  ће бити занемарени у даљој анализи. У случају да је  $C_3 = 0$  користи се улазни вектор из једначине 6.74. Струја из једначине 6.24 је струја  $i_3$ , док струја  $i_4$  одговара првом изводу акумулираног потенцијала ( $i_4 = \dot{Q} = \frac{1}{T_p} \dot{\xi}_{ohc} = \frac{1}{T_p} u_{ohc}$ ). Поред ових израза за струје користе се и једначине 6.17 и 6.29.

$$U = \begin{Bmatrix} 0 \\ -i_3 \\ i_4 + V_{ohc}G_4 \\ i_4 - i_3 + V_{ohc}G_4 \\ V_{ohc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_d & -\alpha_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_p} & G_4 & 0 \\ -\alpha_d & -\alpha_v & \frac{1}{T_p} & G_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_r \\ u_r \\ u_{ohc} \\ V = V_{ohc} \\ Q \end{Bmatrix} = C_E \begin{Bmatrix} \xi_r \\ u_r \\ u_{ohc} \\ V_{ohc} \\ Q \end{Bmatrix} = C_E X \quad 6.82$$

Вектор улаза може да се напише као функција променљивих стања, а матрица корелације је матрица  $C_E$ .

Матрица корелације треба да се одреди и за случај када се кондензатор  $C_3$  не изузима из обзира ( $C_3 \neq 0$ ). Вектор променљивих стања у том случају има још једну променљиву  $V_{hb}$ .

$$U_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -i_3 - V_{hb}G_3 \\ i_4 + V_{ohc}G_4 \\ i_4 - i_3 + V_{ohc}G_4 - V_{hb}G_3 \\ V_{ohc} + V_{hb} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_d & -\alpha_v & 0 & 0 & 0 & -G_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_p} & G_4 & 0 & 0 \\ -\alpha_d & -\alpha_v & \frac{1}{T_p} & G_4 & 0 & -G_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_r \\ u_r \\ u_{ohc} \\ V = V_{ohc} \\ Q \\ V_{hb} \end{Bmatrix} = C_{E1} X \quad 6.83$$

Једначина стања је проширена за члан који укључује вектор напона ( $V$ ) преко матрице повезаности ( $E$ ).

$$\dot{X} = AX + Bp + EV \quad 6.84$$

Друга матрична једначина је притисак из једначине 6.50, а као трећа матрична једначина се користи једначина 6.70 ( $GV = U$ ), при чему је улазни вектор дат једначином 6.82 (или једначином 6.83 ако је  $C_3 \neq 0$ ).

$$GV = U = C_E X \Rightarrow V = G^{-1} C_E X \quad 6.85$$

Заменом израза за притисак и напон у једначину стања добија се нова једначина стања са новим матрицама стања и улаза.



$$\dot{X} = AX + Bp + EV = AX + BF^{-1}(d + C\dot{X}) + EG^{-1}C_E X \quad 6.86$$

$$\dot{X} = (A + EG^{-1}C_E)X + BF^{-1}d + BF^{-1}C\dot{X} \quad 6.87$$

$$(I - BF^{-1}C)\dot{X} = (A + EG^{-1}C_E)X + BF^{-1}d \quad 6.88$$

$$\dot{X} = (I - BF^{-1}C)^{-1}(A + EG^{-1}C_E)X + (I - BF^{-1}C)^{-1}BF^{-1}d = A_2X + B_2d \quad 6.89$$

Новe матрице стања и улаза су:

$$A_2 = (I - BF^{-1}C)^{-1}(A + EG^{-1}C_E), \quad B_2 = (I - BF^{-1}C)^{-1}BF^{-1} \quad 6.90$$

Једначина стања 6.89 се такође решава у програмском пакету Матлаб, коришћењем ODE солвера.

Ако се анализира модел код кога важи  $C_3 \neq 0$  једначине 6.84 - 6.90 имају исти облик; једина разлика је што се уместо матрице  $C_E$  користи матрица  $C_{E1}$ .

У овим једначинама потребно је још дефинисати матрицу  $E$ , која представља везу између вектора напона ( $V = \{V_{sv}, V_{sm}, V_{st}, V_{hb}, \dot{V}_{ohc}\}^T$  или  $V_1 = \{V_{sv}, V_{sm}, V_{st}, \dot{V}_{hb}, \dot{V}_{ohc}\}^T$ ) и извода променљивих стања  $\{u_r, \dot{u}_r, \dot{u}_{ohc}, \dot{V} = \dot{V}_{ohc}, \dot{Q}\}^T$  или  $\{u_r, \dot{u}_r, \dot{u}_{ohc}, \dot{V} = \dot{V}_{ohc}, \dot{Q}, \dot{V}_{hb}\}^T$

У случају када је  $C_3 = 0$  матрица  $E$  постаје матрица  $E_1$ , односно када је  $C_3 \neq 0$  матрица  $E_2$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{5 \times 5}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 5} \quad 6.91$$

### 6.4.2. Фреквентни домен модела кохлеје у простору стања

Последњи део овог поглавља је посвећен превођењу модела из временског домена у фреквенцијски и његово решавање. Применом Лапласове трансформације на једначину 6.53 модел може да се преведе на фреквентни домен. Фреквентни домен је погоднији за решавање кад модел постане сложенији, јер алгоритам брже ради са фреквентним моделом, него са временским. То је један од разлога зашто је модел превођен и на фреквентни домен.

Ако се пође од једначине 6.89, као једначине стања најсложенијег разматраног модела кохлеје у простору стања, са записом у општем облику и изврши се Лапласова трансформација над њом добија се једначина 6.92 (почетни услови су узети да буду једнаки нули).

$$SX(S) = A_2X(S) + B_2D(S) \quad 6.92$$

У једначини 6.92  $X(S)$  је Лапласова трансформација вектора променљивих у временском домену  $X(t)$ ,  $D(S)$  је Лапласова трансформација вектора улаза  $d(t)$ , а  $S = j\omega$  је комплексна променљива. Даљим сређивањем једначине 6.92 добија се вектор променљивих у фреквентном домену.

$$(SI - A_2)X(S) = B_2D(S) \Rightarrow X(S) = (SI - A_2)^{-1}B_2D(S) \quad 6.93$$

$$X(j\omega) = (j\omega I - A_2)^{-1}B_2D(j\omega) \quad 6.94$$

$$X(j\omega) = [j\omega I - (I - BF^{-1}C)^{-1}(A + EG^{-1}C_E)]^{-1}(I - BF^{-1}C)^{-1}BF^{-1}D(j\omega) \quad 6.95$$

Једначина 6.95 може да се поједностави за решавање применом Вудбуријеве матрице идентитета (енг. Woodbury matrix identity) [52].

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1} \quad 6.96$$

Вудбуријева матрица идентитета се користи када је једноставније да се траже инверзне матрице појединачно, или су већ одређиване, па се избегава израчунавање завршне матрице која је једнака  $A + UCV$ , чија инверзија се тражи. Други случај је када су матрице  $U$  и  $V$  неприлагођене, односно сувише различите по вредностима од матрице  $A$ .

На крају једначина стања у фреквентном домену која треба да се реши има облик:

$$X(j\omega) = [j\omega I - (I - BF^{-1}C)^{-1}(A + EG^{-1}C_E)]^{-1}(I - BF^{-1}C)^{-1}BF^{-1}D(j\omega) \quad 6.97$$

Решавање једначине 6.97 подразумева познавање рада са матрицама. Осим матричног решавања не постоје друге компликације у решавању ове једначине. Не постоји диференцирање ни у једном делу. Први извод вектора променљивих у фреквентном домену добија се множењем вектора променљивих стања  $X(j\omega) = X(S)$  са имагинарним чланом, односно комплексном променљивом ( $j\omega = S$ ). Превођење у временски домен врши се применом инверзне Лапласове трансформације на једначину 6.97.

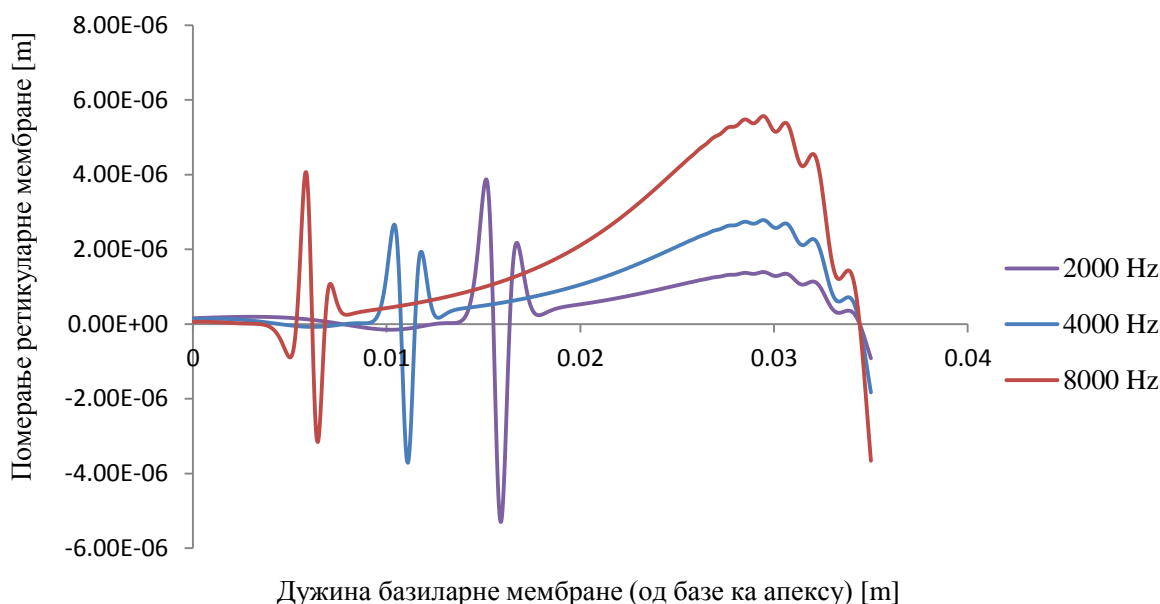
## 6.5. Резултати електро-механичких модела кохлее у простору стања

У овом поглављу описани су електро-механички моделе кохлее у простору стања. Објашњено је формирање четири различита модела кохлее. Заједничко свим моделима је да су једноставне геометрије и да су анализирани као 1D проблеми. Најједноставнији модел не узима у обзир електрично уздужно спрезање елемената. Наредна два модела кохлее разматрају уздужно електрично спрезање између елемената без и са укључивањем капацитивности слушних длачица у анализу. Модели су решавани у временском домену и у програмском пакету матлаб. На крају, најсложенији модел кохлее у временском домену је преведен на фреквентни домен применом Лапласове трансформације.

Базиларна мембрана у моделима је подељена на 700 делова по дужини и за сваки попречни пресек се решава одговарајућа једначина стања. На тај начин у било ком временском тренутку одређује се 3505 непознатих величина (по пет променљивих стања за сваки пресек), односно 4206 непознатих величина (по шест променљивих стања за сваки пресек). Иако је број једначина који се решава велики, једначине су обичне диференцијалне и једноставне за решавање на рачунару, нумеричком методом, у овом случају алгоритмом ODE који је развијен за решавање обичних диференцијалних једначина у програмском пакету матлаб. Решења се одређују у крајњем кораку, а могу бити штампана и међурешења, у изабраним међукорацима.

Сви модели у простору стања су поређени са Гринвудовом функцијом, која је први услов усклађености модела са реалним одзивом кохлее. Дијаграми добијених карактеристичних места улазних фреквенција и њивоха поређења са Гринвудовом функцијом дата су у поглављу 7.

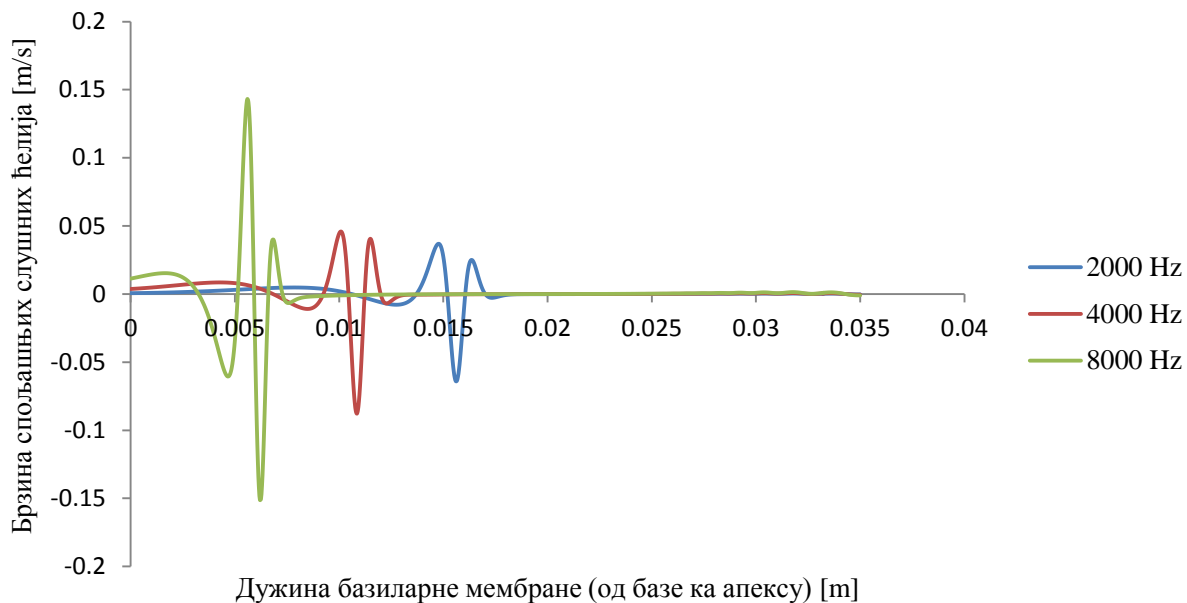
На слици 37 је приказан одзив (померање) ретикуларне мембране при различитим улазним фреквенцијама за најједноставнији електро-механички модел кохлее у простору стања – модел који не укључује електрично спрезање између елемената.



Слика 37: Померање ретикуларне мембране у функцији од улазне фреквенције. Електро-механички модел кохлеје у простору стања без уздужног електричног спрезања.

На основу слике 37 може се утврдити карактеристично место за улазну фреквенцију које одговара првим пиковима одзива. Такође, уочава се и неправилност одзива гледано у делу апекса, односно идући ка крају дужине ретикуларне мембране (базиларне мембране), што је последица неукључивања хеликотреме у модел. Хеликотрема, као место где се спајају две флуидне коморе, треба да буде укључена у модел преко одговарајућег граничног услова.

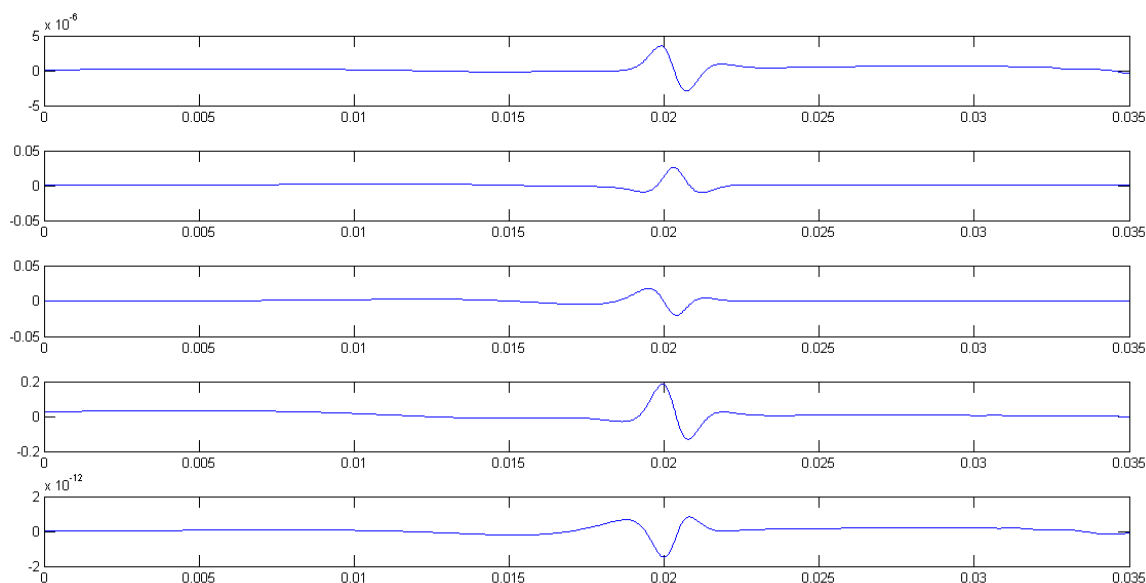
На слици 38 је приказана брзина спољашњих слушних ћелија електро-механичког модела кохлеје у простору стања без уздужног електричног спрезања у функцији од улазне фреквенције.



Слика 38: Брзина спољашњих слушних ћелија у функцији од улазне фреквенције. Електро-механички модел кохлеје у простору стања без уздужног електричног спрезања.

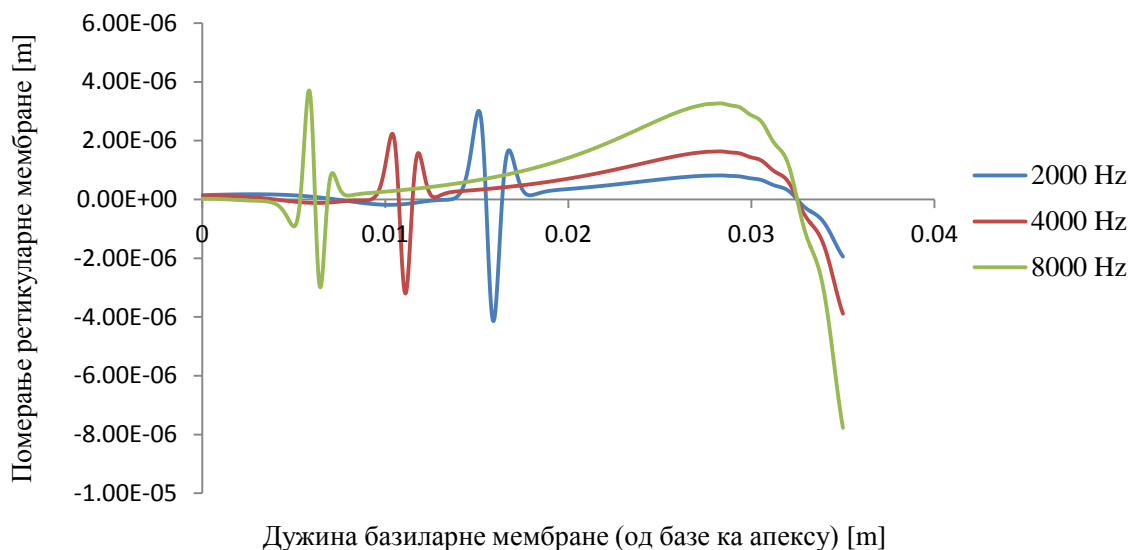
На основу слике 38 изводи се закључак да услов хеликотреме не погађа много одзив спољашњих слушних ћелија. То би значило да хеликотрема која повезује флуидне коморе утиче на осциловање мембрана, али не нарочито на појаву одговарајућих струја у спољашњим слушним ћелијама.

Одзиви свих променљивих стања на половини временског интервала интеграције ( $t = 25ms$ ) приказани су на слици 39.



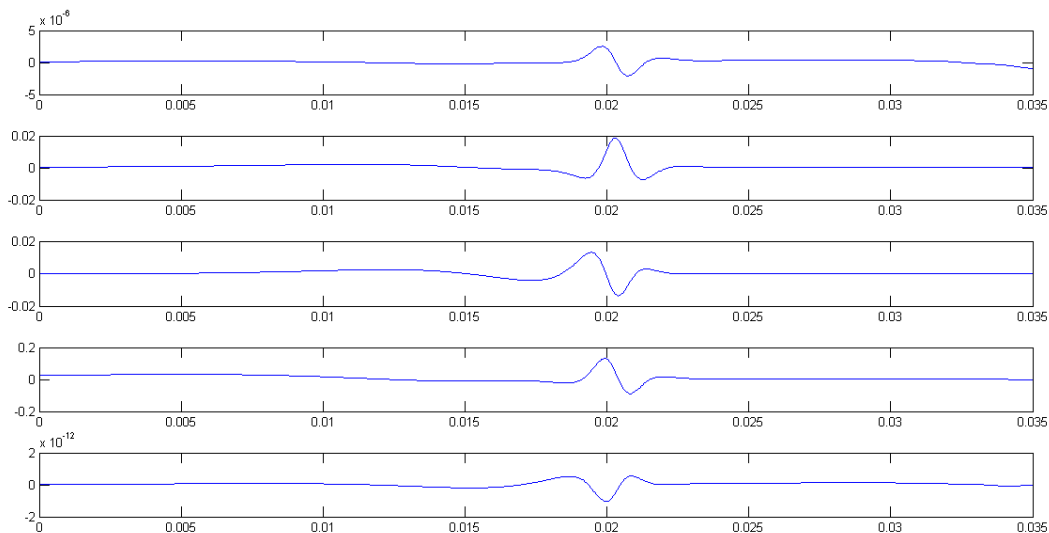
Слика 39: Одзиви променљивих стања електро-механичког модела кохлеје у простору стања који не укључује електрично уздужно спрезање елемената у тренутку  $t = 25ms$  од почетка симулације за улазну фреквенцију од  $1 kHz$ . На слици су приказане редом променљиве  $\{\xi_r \ u_r \ u_{ohc} \ V \ Q\}^T$ , гледано од највишег ка најнижем дијаграму, дуж ретикуларне мембране (базиларне мембране). Све величине су приказане у основним јединицама.

Електро-механички модел кохлеје у простору стања који узима у обзир електрично уздужно спрезање, али не и капацитивност слушних длачица, даје бољи одзив померања ретикуларне мембране, што се може видети на слици 40. Одступање од смиривања осцилација ретикуларне мембране и даље постоји у делу према апексу, али је то одступање мање него у случају првог модела, када електрично уздужно спрезање елемената није разматрано (слика 37).



Слика 40: Померање ретикуларне мембране у функцији од улазне фреквенције. Електромеханички модел кохлеје у простору стања са уздужним електричним спрезањем елемената, капацитивност слушних длачица није укључена.

На слици 41 су приказани одзиви променљивих стања, у тренутку  $t = 25ms$ , за улазну фреквенцију од  $1 kHz$ .



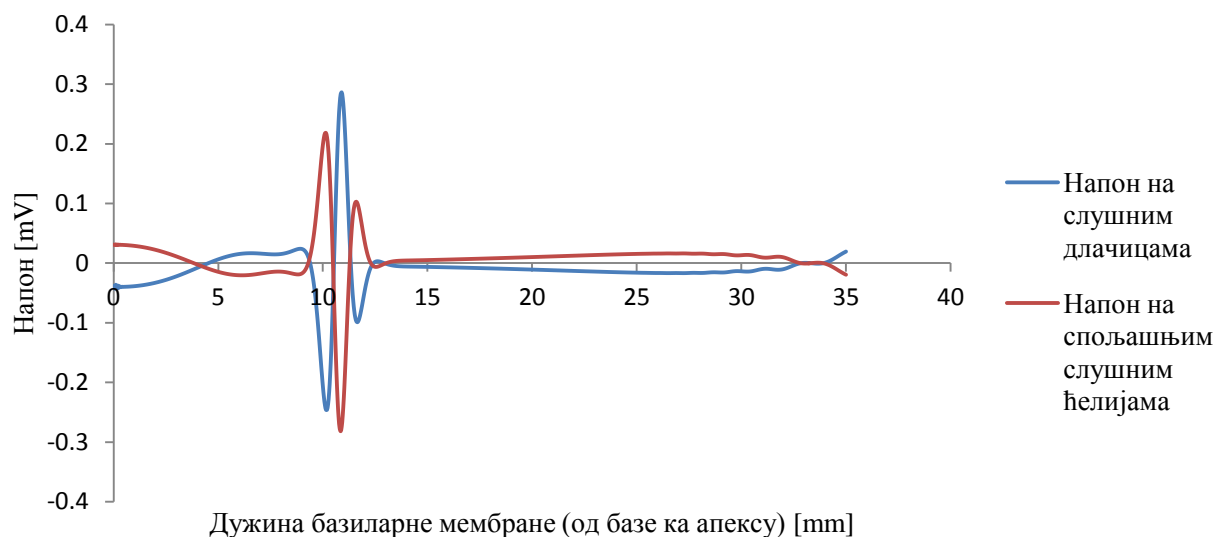
Слика 41: Одзиви променљивих стања електро-механичког модела кохлеје у простору стања који укључује електрично уздужно спрезање елемената, али не и капацитивност слушних длачица, у тренутку  $t = 25ms$  од почетка симулације за улазну фреквенцију од  $1 kHz$ . На слици су приказане редом променљиве  $\{\xi_r \ u_r \ u_{ohc} \ V \ Q\}^T$ , гледано од највишег ка најнижем дијаграму, дуж ретикуларне мембране (базиларне мембране). Све величине су приказане у основним јединицама.



Најсложенији електро-механички модел кохлее у простору стања, који је решаван у временском домену, укључује и уздужно електрично спрезање елемената и капацитивност слушних длачица.

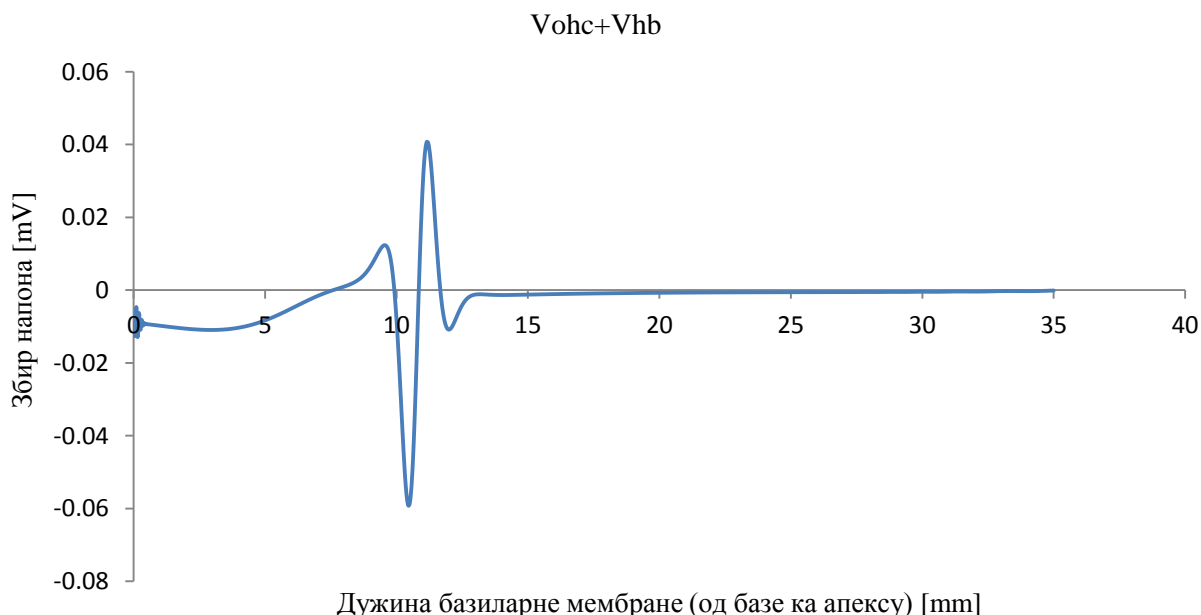
Померања ретикуларне мембране и брзине ретикуларне мембране и спољашњих слушних ћелија код електро-механичког модела кохлее у простору стања са уздужним електричним спрезањем и укљученом капацитивношћу слушних длачица имају готово исти одзив као и код електро-механичког модела кохлее у простору стања који укључује електрично уздужно спрезање, али не и капацитивност слушних длачица, што је и очекивано, јер напон на слушним длачицама, који представља нову променљиву стања, не утиче на механичке променљиве модела у великој мери. Ако се погледа извођење модела, увођење нове променљиве стања, напона на слушним длачицама, утицаће на напон средишњег степеништа и на напон на спољашњим слушним ћелијама, који има утицај на механичке карактеристике. Из тог разлога нису представљани одзиви механичких карактеристика, већ резултати одговарајућих напона.

Напон на спољашњим слушним ћелијама и напон на слушним длачицама се готово поништавају (слика 42).



Слика 42: Напон на слушним длачицама и напон на спољашњим слушним ћелијама за улазну фреквенцију од 4 kHz. Електро-механички модел кохлее у простору стања који укључује електрично уздужно спрезање елемената и капацитивност слушних длачица.

Сабирањем напона на слушним длачицама и напона на спољашњим слушним ћелијама не добија се нула, што је утисак на основу првог погледа на слику 42. Највеће одступање од нуле јавља се око карактеристичног места, око места пикова напона (слика 43).



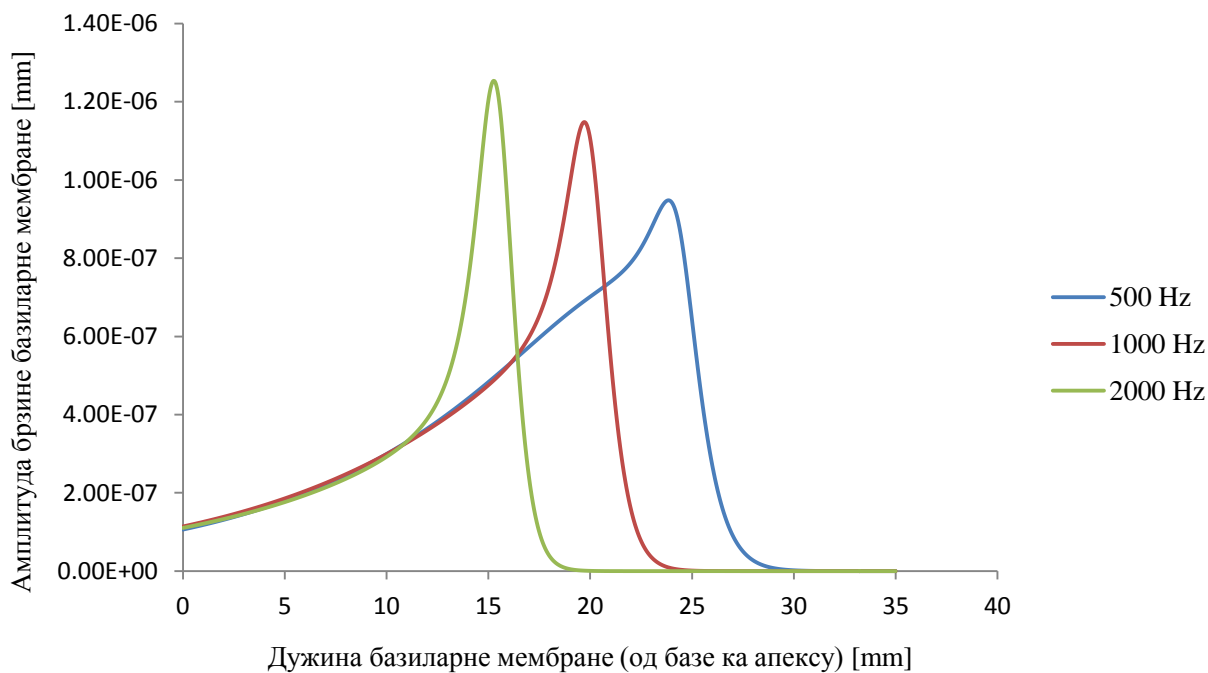
Слика 43: Збир напона на слушним длачицама и напона на спољашњим слушним ћелијама за улазну фреквенцију од 4 kHz. Електро-механички модел кохлее у простору стања који укључује електрично уздужно спрезање елемената и капацитивност слушних длачица.

Напони на слушним длачицама и на спољашњим слушним ћелијама имају разлику од скоро  $\pi$  у пределу пикова [53].

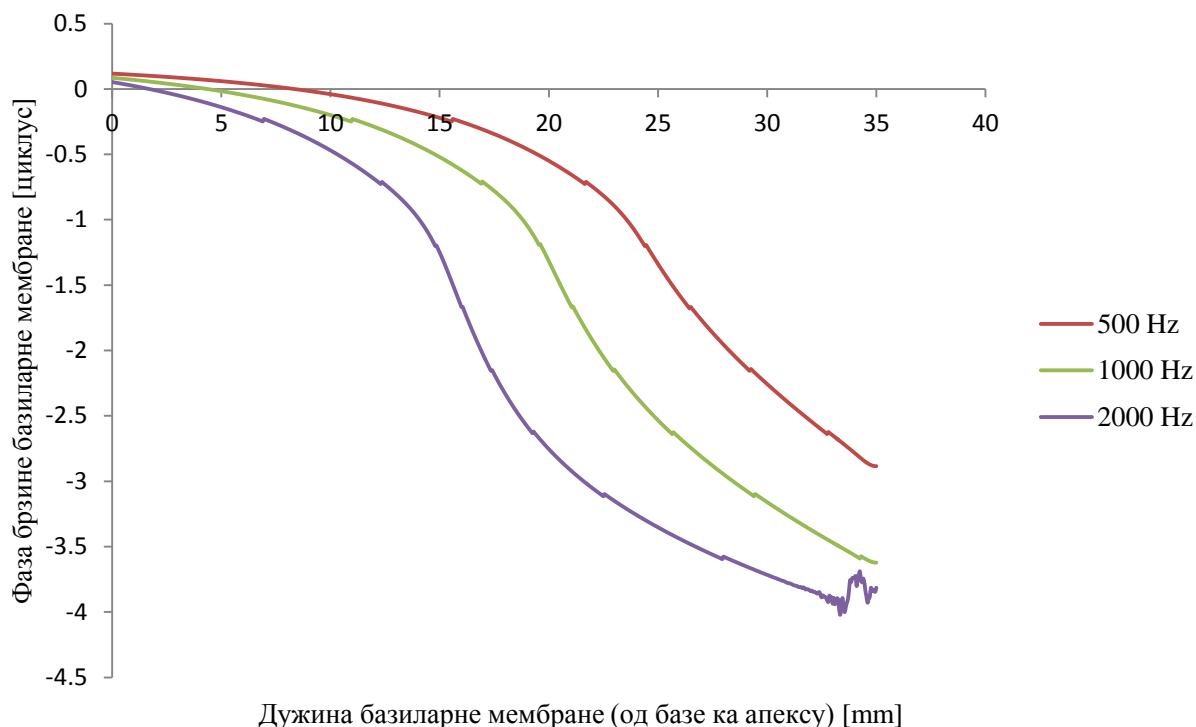
На крају, најсложенији електро-механички модел кохлее у простору стања, који је решаван у временском домену и који укључује електрично уздужно спрезање елемената и капацитивност слушних длачица, је преведен на фреквентни домен. Код фреквентног домена решавањем матричне једначине добијају се решења, која су комплексни бројеви, што је последица коришћења комплексне променљиве фреквентног домена ( $S = j\omega$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $j$  –имагинарна јединица).

Због добијених решења у комплексном запису, погодно је одредити дијаграме модула и фазе, односно амплитуде и фазе, померања ретикуларне мембране, брзине базиларне мембране, одговарајућих напона.

На слици 44 и слици 45 су приказане амплитуде и фазе брзине базиларне мембране у односу на дужину базиларне мембране за различите улазне фреквенције побуде. Брзина базиларне мембране је добијена сабирањем брзина ретикуларне мембране и спољашњих слушних ћелија, што је коришћено као једна од апроксимација при извођењу електро-механичких модела кохлеје у простору стања.



Слика 44: Амплитуде брзине базиларне мембране у односу на дужину базиларне мембране за улазне фреквенције од 0.5, 1 и 2 kHz. Електро-механички модел кохлеје у простору стања, фреквентни домен.

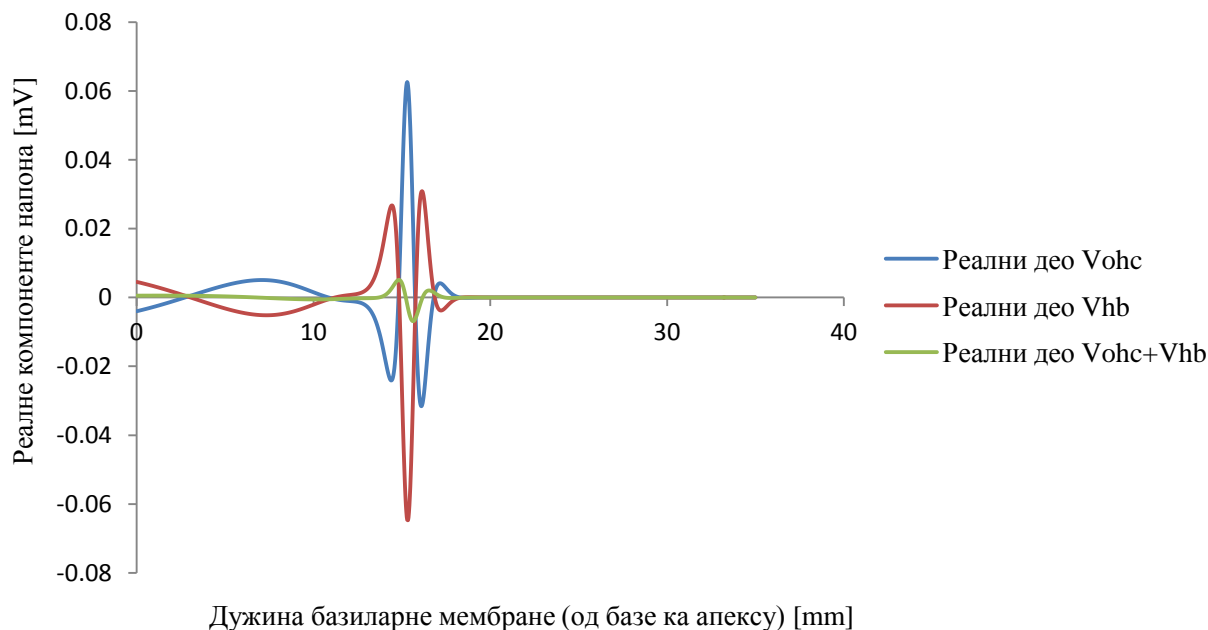


Слика 45: Фазе брзине базиларне мембране у односу на дужину базиларне мембране за улазне фреквенције од 0.5, 1 и 2 kHz. Електро-механички модел кохлее у простору стања, фреквентни домен.

Посматрањем дијаграма амплитуда и фаза брзине базиларне мембране може се извести закључак да дијаграми амплитуда постају оштрији са повећањем улазне фреквенције, односно повећава се брзина осциловања, а смањује период. Што се тиче фаза, све три улазне фреквенције направе до четири циклуса до смиривања сигнала. Превојне тачке фаза дешавају се око карактеристичних места, односно места највеће амплитуде брзине базиларне мембране. Добијени дијаграми и запажања су у складу са постојећим резултатима из литературе, а њихово поређење је дато у поглављу 7.

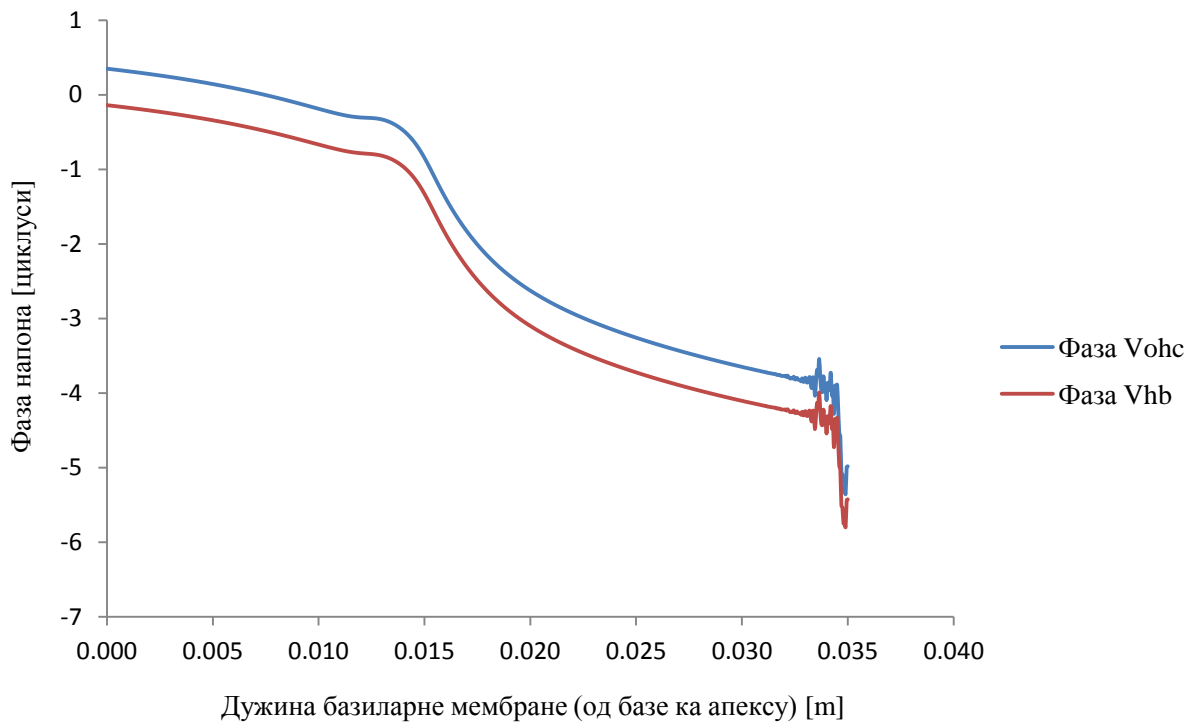
Напони који се стварају унутар Кортијевог органа – напон на спољашњим слушним ћелијама и напон на слушним длачицама су одређени као променљиве стања електро-механичког модела кохлее у фреквентном домену. Електричне променљиве стања за решења у фреквентном домену такође дају комплексне бројеве. Њихови одзиви су поређени и анализирани.

На слици 46 је приказан дијаграм реалних вредности напона на спољашним слушним ћелијама, напона на слушним длачицама и реални део њиховог збира у функцији положаја на базиларној мембрани.



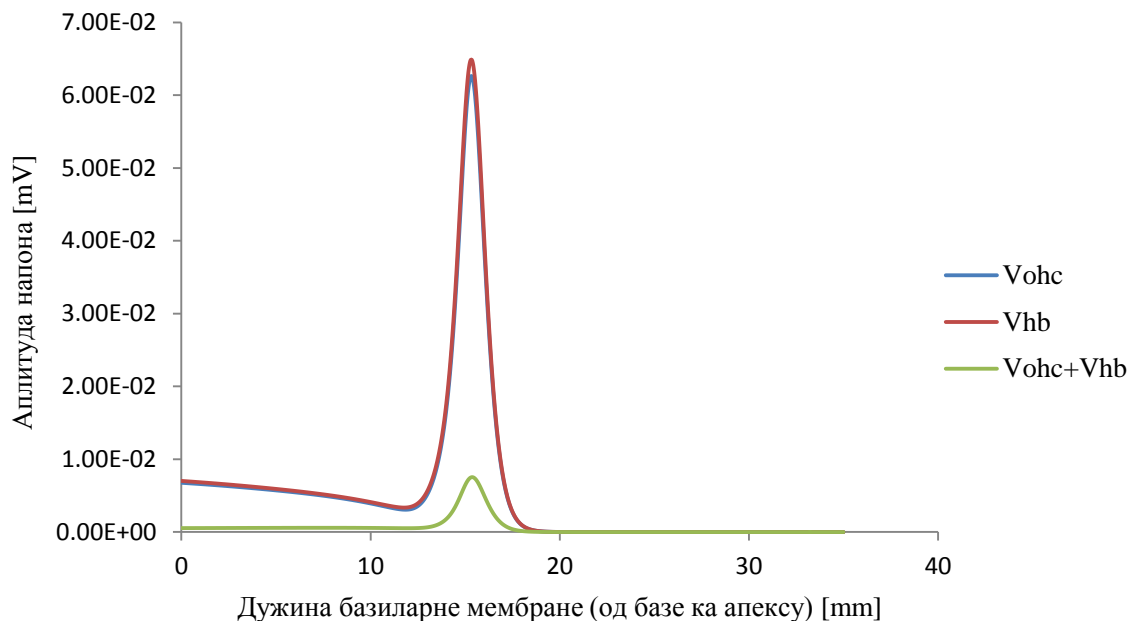
Слика 46: Реалне компоненте напона на спољашњим слушним ћелијама, на слушним длачицама и реална компонента њиховог збира у функцији од положаја на базиларној мембрани за улазну фреквенцију од  $2\text{ kHz}$ . Електро-механички модел кохлеје у простору стања, фреквентни домен.

Напон на спољашњим слушним ћелијама и напон на слушним длачицама имају готово исти, али супротан одзив – скоро да се налазе у против фази. У делу око пикова сигнали имају фазну разлику од приближно  $\pi$ . Сигнали би се поништавали када би им амплитуде биле једнаке, а фазна разлика била  $\pi$ . С обзиром да се њихове амплитуде ипак разликују и да је фазна разлика нешто мања од  $\pi$  у делу око достизања максималних вредности, постојаће сигнал који представља њихов збир. Фазна разлика напона који настају унутар Кортијевог органа – напона на спољашњим слушним ћелијама и напона на слушним длачицама за улазну фреквенцију од  $2\text{ kHz}$  је приказана на слици 47.



Слика 47: Фазна разлика напона на спољашним слушним ћелијама и напона на слушним длачицама за улазну фреквенцију од  $2\text{ kHz}$ . Електро-механички модел кохлеје у простору стања, фреквентни домен.

На слици 48 су приказане амплитуде напона на спољашњим слушним ћелијама и на слушним длачицама, као и амплитуда њиховог збира.



Слика 48: Амплитуде напона на спољашњим слушним ћелијама, на слушним длачицама и амплитуда збира напона у функцији од положаја на базиларној мембрани за улазну фреквенцију од 2 kHz.

Електро-механички модел кохлеје у простору стања, фреквентни домен.

На основу приказаних одзива може се закључити да су амплитуде ових напона сличне, али се разликују за одређени износ у делу достизања максималних вредности, што показује амплитуда њиховог збира.

Појава да при улазном сигналу спољашње слушне ћелије стварају одређени сигнал назива се кохлеарна микрофонија и има улогу у детектовању слуха [54]. Сигнал који представља збир напона, који настају унутар Кортијевог органа, је мерљив и даје потврду функционалности спољашњих слушних ћелија, што је од великог значаја за пацијенте који нису у могућности да комуницирају са лекарима – новорођене бебе и пацијенти са извесним повредама или болестима. Провера слуха помоћу сигнала кохлеарне микрофоније може да буде додатак провери слуха помоћу отоакустичних емисија [54], [55].

## 7. Поређење резултата модела кохлее са реалним резултатима и другим методама

Резултате модела кохлее је потребно потврдити – потребно је показати да се понашање модела уклапа у реално понашање кохлее. Једна од првих провера модела је испитивање карактеристичних места улазне фреквенције и поређење остварених карактеристичних позиција са емпиријским подацима. Појаву да различите фреквенције из опсега чујности побуђују нерве на различитим местима дуж базиларне мембране, односно да улазне фреквенције на местима изнад побуђених нерава достижу максималну вредност први је приметно и објаснио мађарски биофизичар Џорџ фон Бекеси (енгл. Georg von Békésy), који је 1961. године добио Нобелову награду из области физиологије и медицине за дати допринос разумевању функционисања кохлее код сисара [56]. На основу Бекесових запажања професор Доналд Гринвуд (енгл. Donald Greenwood) је 1961. године извршио мерења на четворици студената млађих од 29 година, чиме је претпостављено да су им кохлее здраве, односно слух очуван. У изолованим собама су излагани једном чистом тону из опсега чујности, а затим је пуштан и други тон исте фреквенције, коју је затим Гринвуд мењао до тренутка када би испитаник чуо и други тон [7]. На основу ових мерења Гринвуд је одредио таласне дужине улазних фреквенција дуж базиларне мембране и извео криву за сисаре која даје зависност између улазне фреквенције чистог тона и позиције на базиларној мембрани, где се налазе слушне ћелије које су побуђене тим тоном.

$$f = A(10^{ax} - K) \quad 7.1$$

У једначини 7.1  $f$  је фреквенција побуде,  $A$  је константа скалирања за улазну фреквенцију и највишу фреквенцију коју врста може да чује (горња граница из опсега чујности),  $K$  је константа интеграције, која представља одступање од логаритамске природе криве и зависи од најниже фреквенције коју врста може да чује (доња граница из опсега чујности),  $a$  је нагиб криве, а  $x$  представља растојање од апикалног дела базиларне мембране до региона од интереса, односно до карактеристичног места улазне фреквенције.

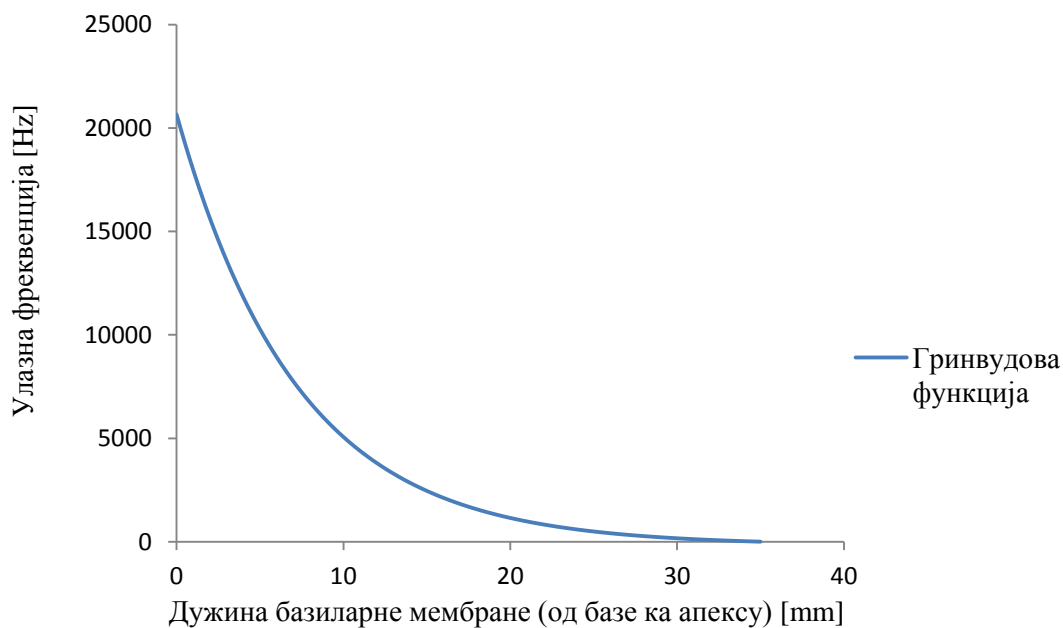
Вредности параметара из једначине 7.1 су дати у табели 5 за човека и још неке животињске врсте из класе сисара [57].



Табела 5: Параметри Гринвудове функције за човека и још неке животиње из класе сисара.

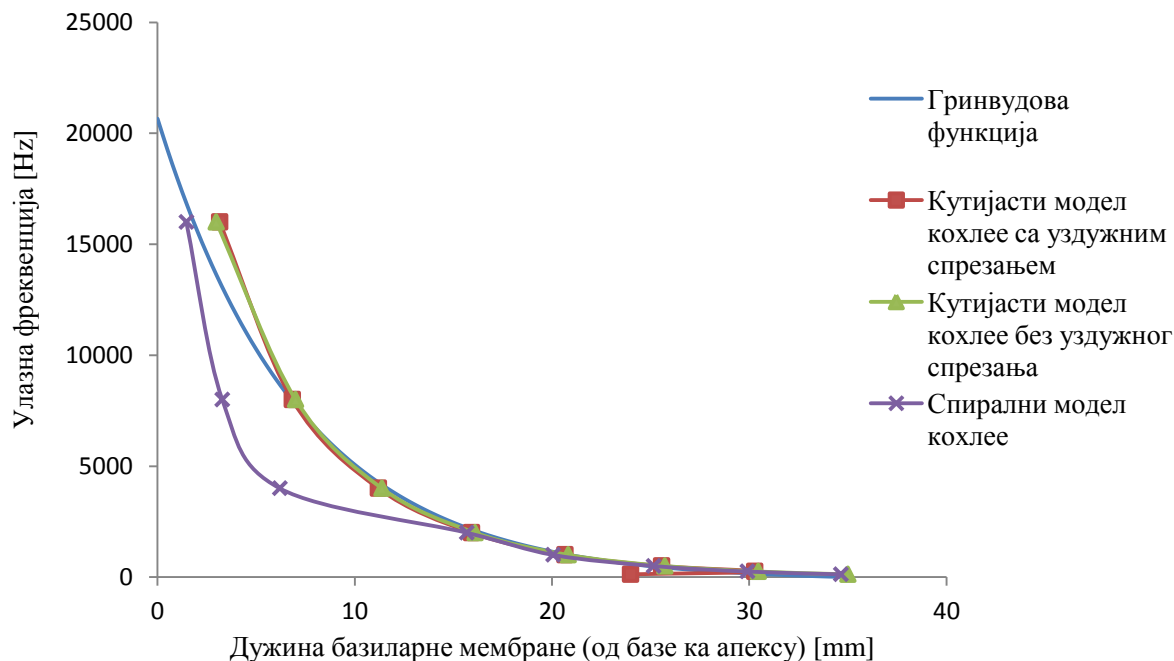
Табела 3	A [-]	a [-]	x [mm]	K [-]
Човек	165.4	0.06	0÷35	1
Мачка	456	0.084	0÷25	0.8
Чинчила	163.5	0.114	0÷18.4	0.85
Морско прасе	0.35	0.1135	0÷18.5	0.85
Мајмун	0.36	0.08203	0÷25.6	0.85

У складу са једначином 7.1, када се узму у обзир параметри за људску кохлеу; добија се Гринвудова крива, приказана на слици 49.



Слика 49: Гринвудова функција

Одзиви свих модела кохлеа су поређени са Гринвудовом функцијом. На слици 50 су приказани одзиви механичких модела кохлеа – кутијастих модела кохлеа са и без уздужног спрезања елемената, као и спиралног модела кохлеа.

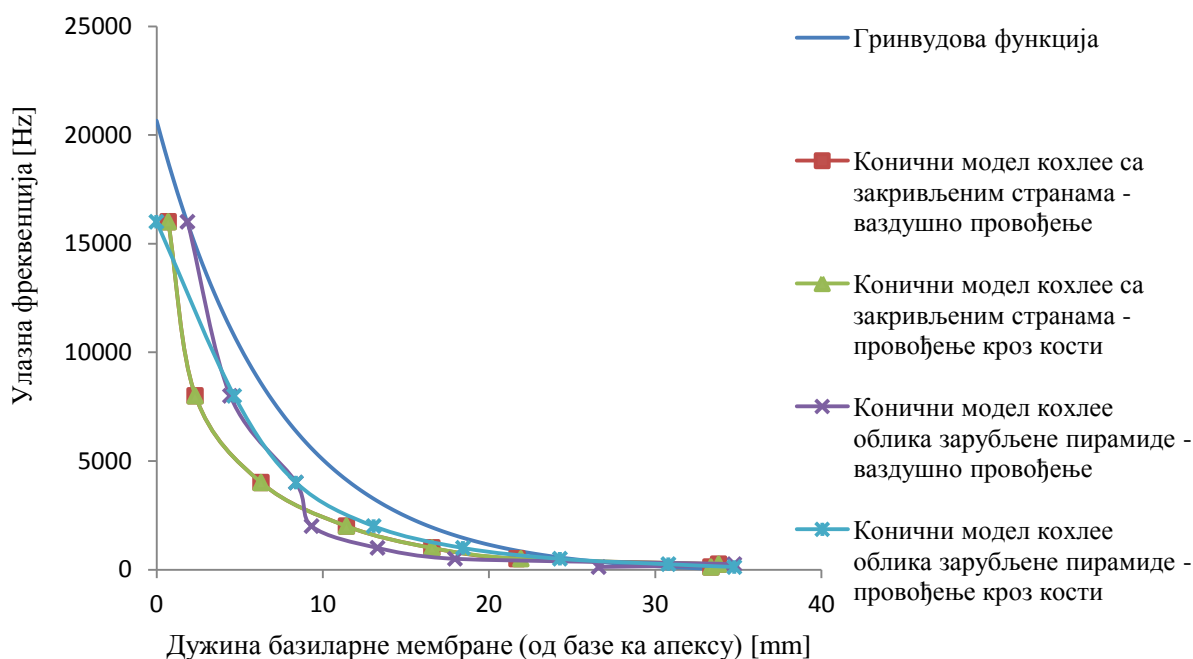


Слика 50: Поређење добијених резултата карактеристичних места улазних фреквенција механичких модела кохлеје – кутијастих модела кохлеје са и без уздужног спрезања елемената и спиралног модела кохлеје са Гринвудовом функцијом.

Са слике 50 се може видети да кутијаста модела кохлеје са и без уздужног спрезања елемената прате добро Гринвудову криву. Одступања од Гринвудове криве за ова два модела настају при улазним фреквенцијама већим од  $10\text{ kHz}$ . За улазну фреквенцију од  $16\text{ kHz}$  кутијаста модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената даје карактеристично место на растојању  $3.15\text{ mm}$  од базе, док израчунавањем Гринвудове функције то растојање износи  $1.832484\text{ mm}$  у односу на базу кохлеје. Одступање решења модела у односу на емпиријско решење износи приближно  $72\%$ . Кутијаста модела кохлеје без уздужног спрезања елемената за исту фреквенцију даје карактеристично место на растојању  $2.975\text{ mm}$  од базе, што у односу на вредност Гринвудове функције представља одступање од приближно  $62.35\%$ . Осим тога, кутијаста модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената показује веће одступање и за ниске улазне фреквенције ( $< 250\text{ Hz}$ ). Ипак, за оба модела се може рећи да дају добро предвиђање карактеристичних места улазних фреквенција од интереса, а то су улазне фреквенције у опсегу од  $250\text{ Hz} - 6\text{ kHz}$ , односно фреквенције које су битне за нормално функционисање говорног апарата [58]. Са слике 50 се може приметити и да спирални модел кохлеје јако добро прати Гринвудову

криву за фреквенције до  $2\text{ kHz}$ . За фреквенције веће од  $2\text{ kHz}$  график показује већа одступања до високих фреквенција (око  $15\text{ kHz}$ ), након чега график опет прати Гринвудову криву. Ове карактеристике одзива се могу поправити мењањем материјалних карактеристика базиларне мембране – пригушења и модула еластичности, чије вредности највише утичу на одзив модела, више него геометрија модела, што ће бити приказано у поглављу 8.

Остварена карактеристична места улазних фреквенција коничних модела кохлее су такође поређена са Гринвудовом функцијом. У случајну коничних опружних модела кохлее – облика зарубљене правилне пирамиде и са закривљеним странама рачунати су одзиви модела и на ваздушно провођење звука и на провођење звука кроз кости лобање, односно темпоралне кости као најважније за провођење звука до кохлее. Израчуната карактеристична места улазних фреквенција за два конична опружна модела кохлее, за две врсте провођења звука, су приказана на слици 51 заједно са Гринвудовом функцијом.

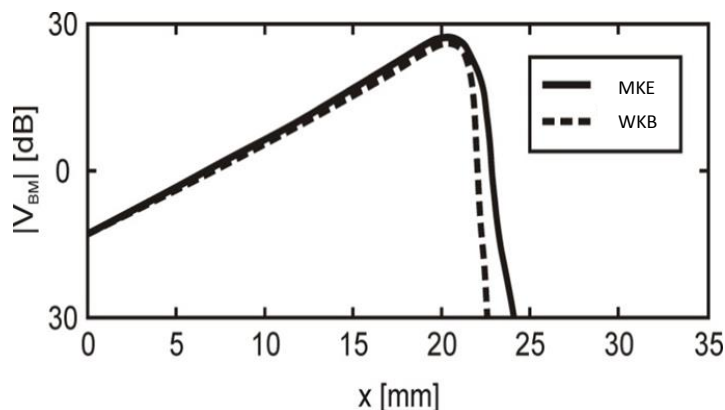


Слика 51: Поређење добијених резултата карактеристичних места улазних фреквенција механичких модела кохлее – коничних модела кохлее облика зарубљене пирамиде и са закривљеним странама, са ваздушним провођењем и провођењем кроз кости, са Гринвудовом функцијом.

Са слике 51 се може видети да конични модели кохлее прате обликом одзива Гринвудову функцију, али у погледу тачности дају лошије резултате у односу на кутијасте моделе кохлее. Даљим кориговањем параметара – геометријских параметара и материјалних карактеристика базиларне мембране, првенствено пригушења и модула еластичности, могу се добити бољи резултати за карактеристична места улазних фреквенција и боље поклапање са Гринвудовом функцијом. Постојећи конични модели кохлее су од користи за симулације и анализу одзива модела при промени геометријских параметара или материјалних карактеристика, при ваздушном и при провођењу звука кроз кости. Део ове анализе је дат у поглављу 5.

Осим цртања централних линија померања базиларне мембране за различите механичке моделе из којих може да се одреди карактеристично место улазне фреквенције и нацрта крива зависности улазних фреквенција и карактеристичних места, која се пореди са Гринвудовом функцијом, за разумевање функционисања кохлее је од користи и дијаграм модалне брзине базиларне мембране. Модална брзина базиларне мембране је комплексна величина, изражена преко хармонијских функција, на основу којих могу да се одреде модуо, односно амплитуда брзине и фаза.

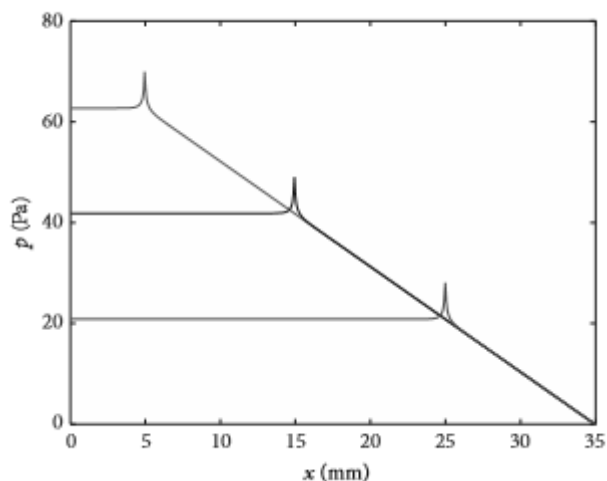
Амплитуда модалне брзине базиларне мембране кутијастог механичког модела кохлее са уздужним спрезањем елемената, који је решаван методом коначних елемената, је поређена са амплитудом модалне брзине, која је добијена WKB методом (иницијали физичара који су развили методу – енгл. Wentzel–Kramers–Brillouin) [59], [60], [61]. WKB метода подразумева решавање линеарних диференцијалних једначина методом променљивих коефицијената, чиме се добија приближно решење. Амплитуда модалне брзине базиларне мембране је одређивана при улазној фреквенцији од  $1\text{ kHz}$ , а добијена решења су приказана на слици 52.



Слика 52: Поређење методе коначних елемената и WKB методе при одређивању модалне брзине базиларне мембране механичког модела кохлее.

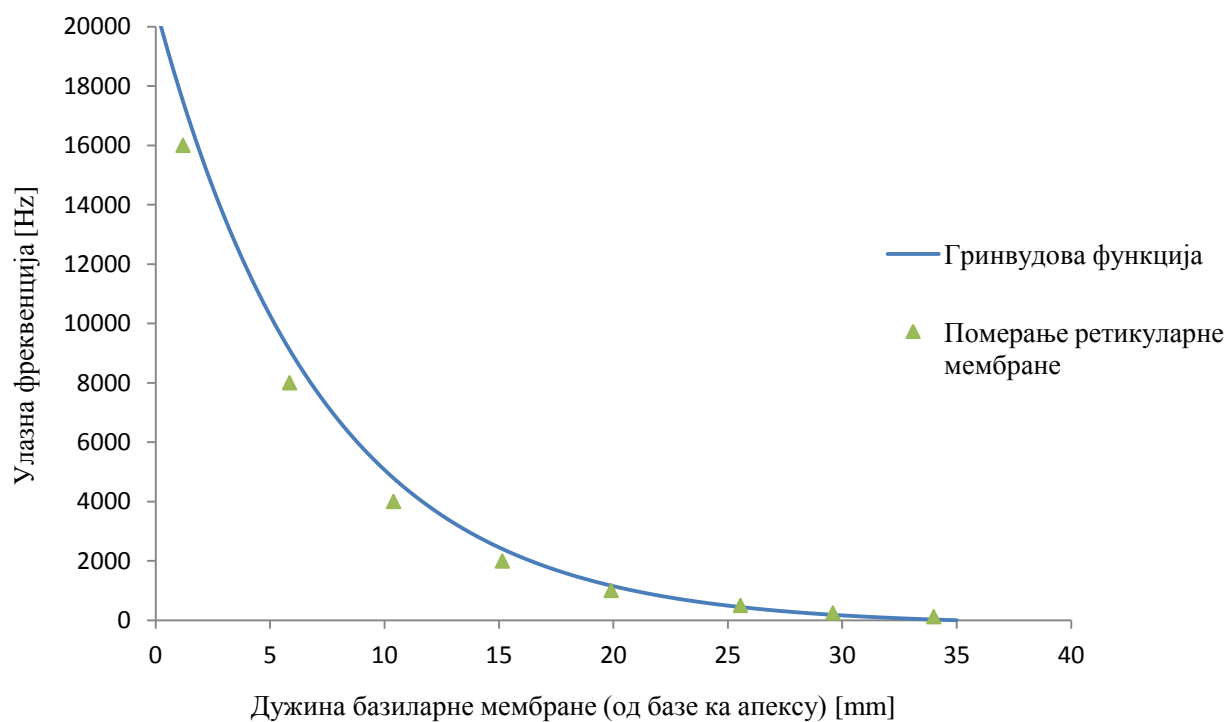
Са слике 52 види се да се решења добијена методом коначних елемената и WKB методом готово поклапају, чиме је потврђена употреба развијаног механичког модела и методе коначних елемената за даља истраживања.

Притисак флуида у коморама механичких модела кохлее је рачунат као комплексна величина и за било коју побуду, улазну фреквенцију, могуће је нацртати дијаграме који дају зависност између реалног и имагинарног дела притиска и удаљености од базе кохлее. Добијени резултати за притисак за кутијасте механички модел кохлее са уздужним спрезањем су поређени са резултатима из литературе [32] (слика 53).



Слика 53: Расподела укупне разлике притиска дуж базиларне мембране услед побуде на једном елементу на растојању од 5 mm, 15 mm и 25 mm од базе, редом, при улазној фреквенцији од 1 kHz.

Електро-механички модели кохлее који су развијани у моделу стања и решавани у матлаб софтверском пакету су првобитно испитивани на тачност одређивања карактеристичног места улазне фреквенције, што значи да су добијени резултати поређени са Гринвудовом функцијом. Највеће померање ретикуларне мембране може да се сматра карактеристичним местом улазне фреквенције, јер модели кохлее у простору стања не укључују засебно смицање слушних длачица, самим тим и додатно померање ретикуларне мембране у односу на базиларну мембрану. На слици 54 приказани су добијени резултати најпростијег разматраног електро-механичког модела кохлее у простору стања, а то је модел који не укључује у обзир уздужно електрично спрезање елемената.

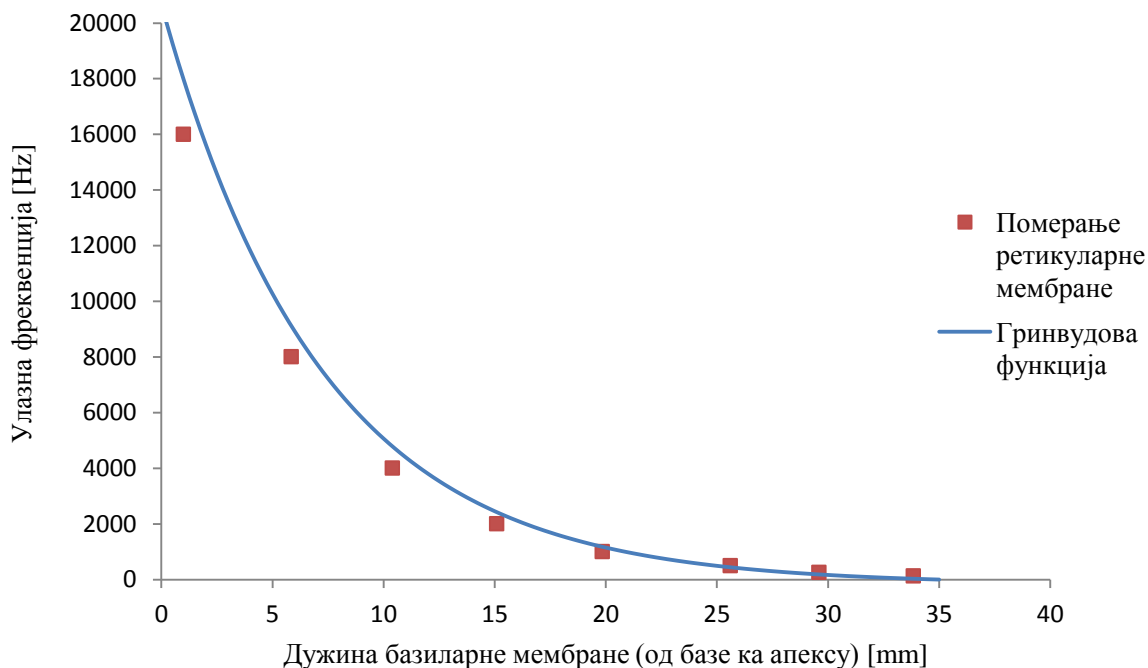


Слика 54: Поређење добијених резултата карактеристичних места улазних фреквенција електро-механичког модела кохлее у простору стања без уздужног електричног спрезања елемената са Гринвудовом функцијом.

На основу слике 54 може се закључити да електро-механички модел кохлее у простору стања без електричног уздужног спрезања елемената добро прати Гринвудову функцију. Карактеристична места су прецизније одређена за ниже улазне фреквенције. Осим тога за више улазне фреквенције је потребно вршити корекцију, која подразумева да се за максимална померања узимају вредности из првог пика одзива, јер код виших

фреквенција се уочава нестабилност одзива и појава другог пика веће амплитуде, о чему је било речи у делу 1.1.

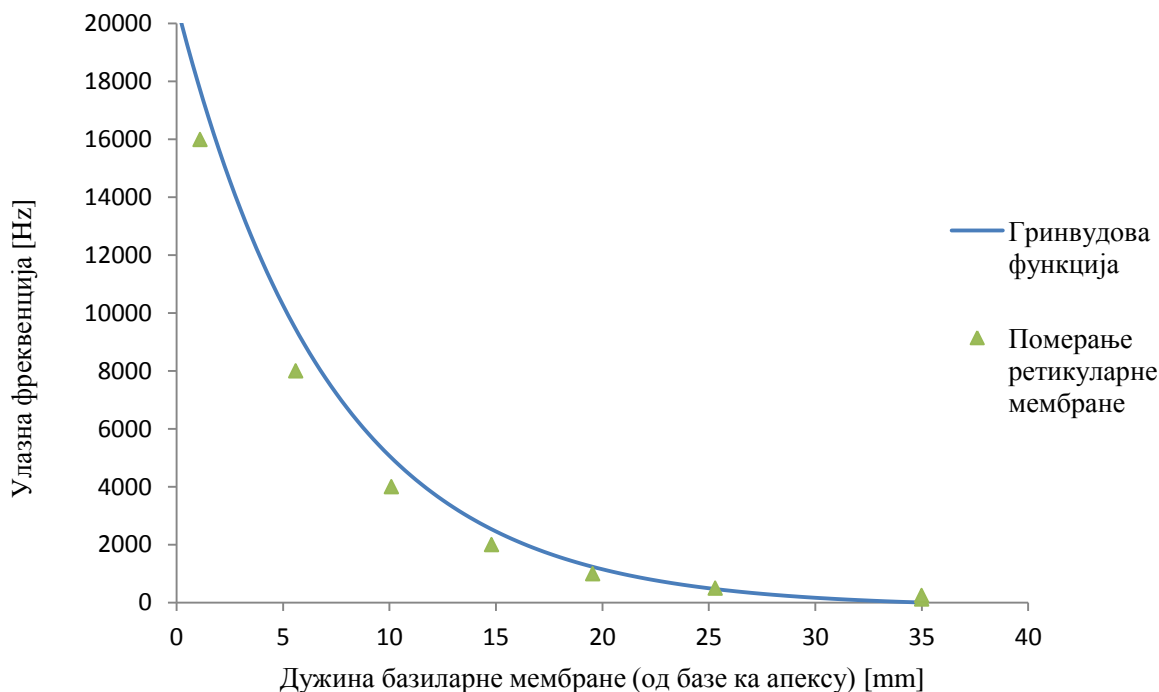
Карактеристична места улазних фреквенција су одређивана и за електро-механичке моделе кохлее у простору стања са уздужним електричним спрезањем елемената – модел који не укључује капацитивност слушних длачица (слика 55) и модел који укључује капацитивност слушних длачица (слика 56).



Слика 55: Поређење добијених резултата карактеристичних места улазних фреквенција електро-механичког модела кохлее у простору стања са уздужним електричним спрезањем елемената, без укључене капацитивности слушних длачица са Гринвудовом функцијом.

Електро-механички модел кохлее у простору стања са уздужним електричним спрезањем елемената, који не укључује капацитивност слушних длачица, остварује добро поређење са Гринвудовом функцијом, боље него први модел кохлее у простору стања. Код другог развијаног модела корекције карактеристичних места су потребне за екстремне вредности улазних фреквенција, што значи да је за најниже и највише улазне фреквенције из опсега чујности човека уочена појава секундарног пика, који није у складу са подацима из литературе.

Трећи модел кохлеје у простору стања, који осим електричног уздужног спрезања узима у обзир и капацитивност слушних длачица, даје сличан одзив за карактеристично место улазних фреквенција (слика 56), као и модел у коме капацитивност слушних длачица није узета у обзир. И код овог модела потребне су корекције за екстремне вредности улазних фреквенција.

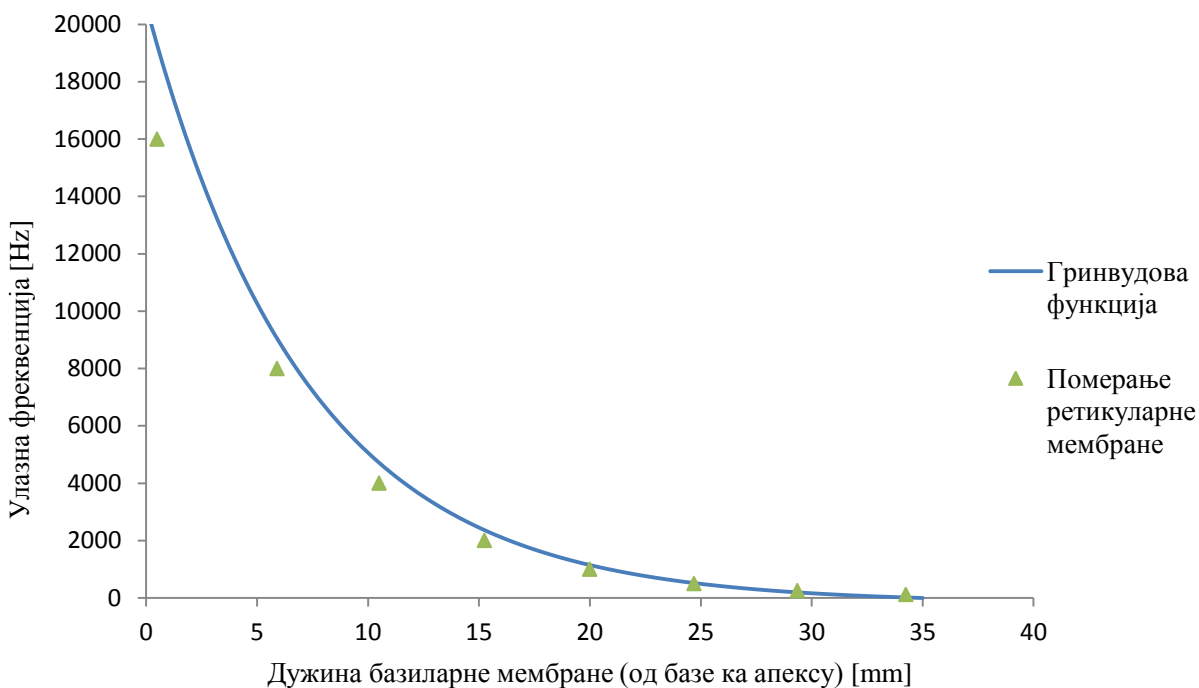


Слика 56: Поређење добијених резултата карактеристичних места улазних фреквенција електро-механичког модела кохлеје у простору стања са уздужним електричним спрезањем елемената, који укључује капацитивност слушних длачица са Гринвудовом функцијом.

На основу тога тоже се закључити да напон на слушним длачицама нема велики утицај на карактеристично место улазне фреквенције за изабране исте параметре модела – геометријске и материјалне карактеристике.

На крају, поређење са Гринвудовом функцијом је урађено и за најсложенији развијани временски електро-механички модел кохлеје у простору стања, који је преведен на фреквентни домен.





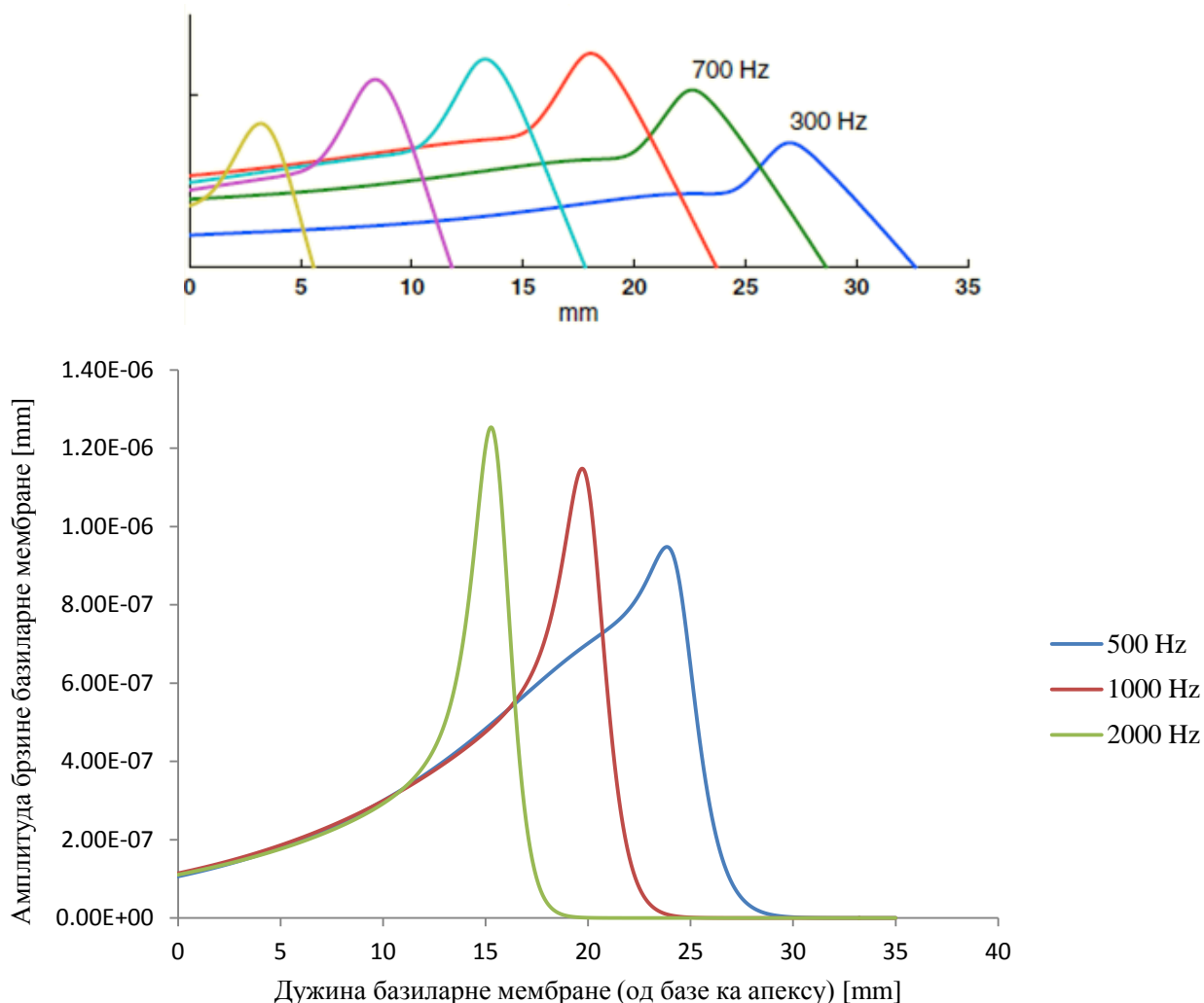
Слика 57: Поређење добијених резултата карактеристичних места улазних фреквенција електро-механичког модела кохлеје у простору стања у фреквентном домену са Гринвудовом функцијом.

Електро-механички модел кохлеје у простору стања, у фреквентном домену, даје решења задовољавајуће тачности у односу на Гринвудову функцију. Решења су ближа експерименталним мерењима за ниже улазне фреквенције. Изузетак су најниже улазне фреквенције, где се врши корекција, јер се уочава појава споредног пика, који претходи пику карактеристичног места.

Поређењем резултата, добијених за карактеристична места улазних фреквенција, за све електро-механичке моделе кохлеје, који су развијани у простору стања, са Гринвудовом функцијом може се доћи до закључка да сви модели дају одзиве задовољавајуће тачности. Изузетак су највише, најниже или обе екстремне улазне фреквенције, у зависности од модела до модела. Како би се избегла појава пикова који претходе пику карактеристичног места или се појављују после достизања првог пика, потребно је кориговати или материјалне карактеристике које су узете у моделима или граничне услове у делу базе и апекса. Покретањем више симулација са различитим вредностима материјалних карактеристика базе и апекса и анализом добијених одзива може се доћи до вредности, које би дале одговарајући одзив за најниже и највише улазне фреквенције из човечијег

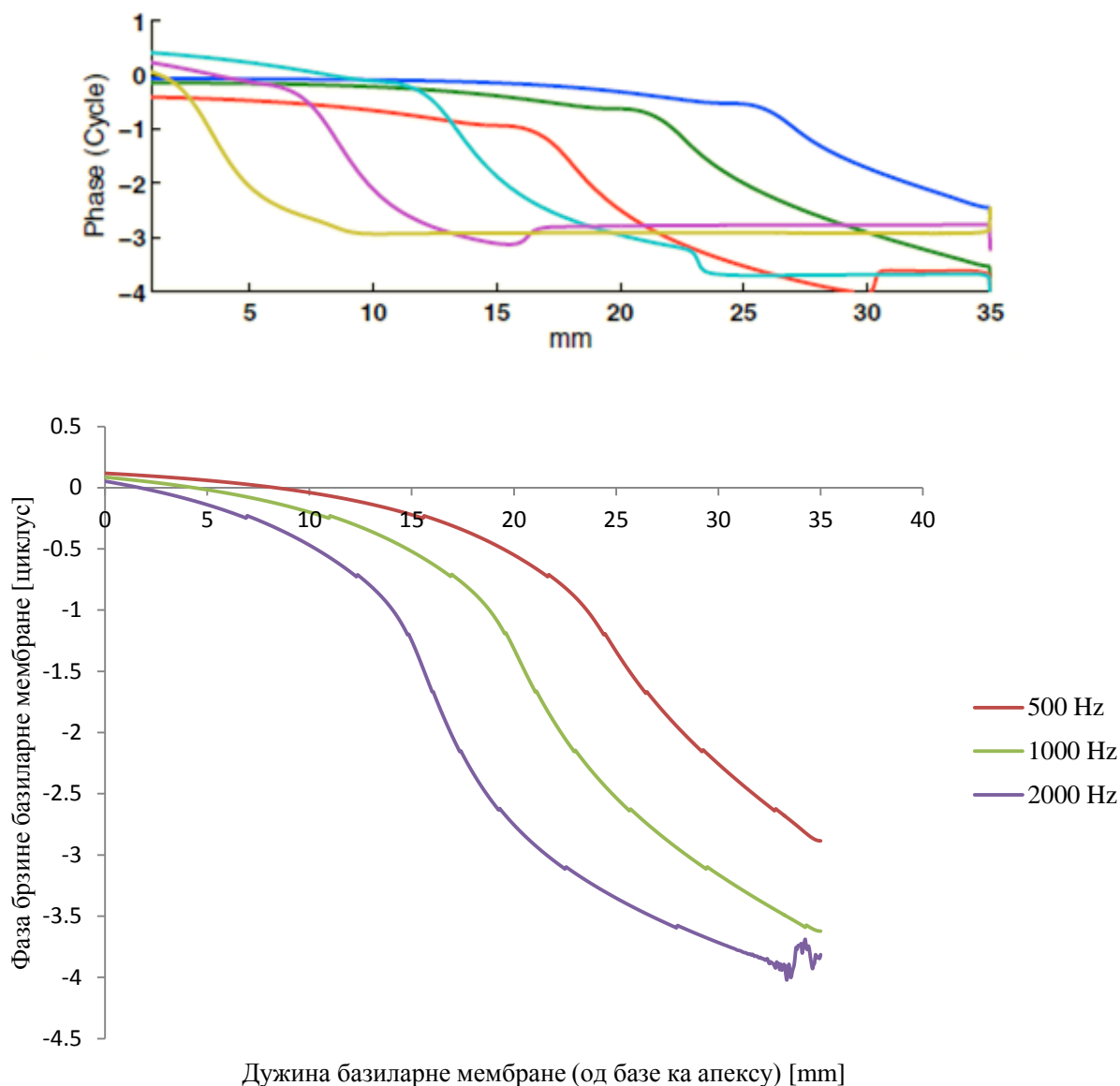
опсега чујности. С друге стране, одступања од тачности одзива за ове фреквенције су мање битна, с обзиром да се људски говор одвија у мањим границама опсега чујности и не обухвата најниже и највише фреквенције, које људско уво може да разликује.

Фреквентни домен за решења даје комплексне бројеве, јер садржи комплексну променљиву. Код комплексних бројева корисно је одредити амплитуде и фазе сигнала. На слици 58 су поређене амплитуде брзине базиларне мембране, а на слици 59 фазе брзине базиларне мембране са постојећом литературом [53], за различите улазне фреквенције. При поређењу амплитуда може се рећи да оба модела предвиђају карактеристична места улазних фреквенција у складу са очекиваним, у складу са Гринвудовом функцијом. Према расподели карактеристичних места више улазне фреквенције су ближе базалном делу, док су ниже улазне фреквенције померене ка апексу. Ако се посматрају две суседне улазне фреквенције из литературе -  $1400\text{ Hz}$  и  $700\text{ Hz}$ , може се видети да се њихова карактеристична места налазе редом лево ( $\approx 18\text{ mm}$ ) и десно ( $\approx 23\text{ mm}$ ) у односу на карактеристично место улазне фреквенције од  $1000\text{ Hz}$ , које је добијено решавањем електро-механичког модела кохлее у фреквентном домену ( $\approx 20\text{ mm}$ ). Вредности амплитуда нису поређене, јер су у литератури дијаграми амплитуда нацртани коришћењем произвољних логаритамских скала, како би шири спектар улазних фреквенција могао да буде приказан на истом дијаграму. Оштрина амплитуда је више изражена у развијаном електро-механичком моделу кохлее у фреквентном домену, али разлика у нагибу кривих није велика.



Слика 58: Поређење амплитуда електро-механичког модела кохлеје у простору стања, у фреквентном домену, са резултатима из литературе [53]. Фреквенције коришћене у литератури су 12000 Hz, 5900 Hz, 2900 Hz, 1400 Hz, 700 Hz и 300 Hz, гледано са леве стране (база) на десну (апекс).

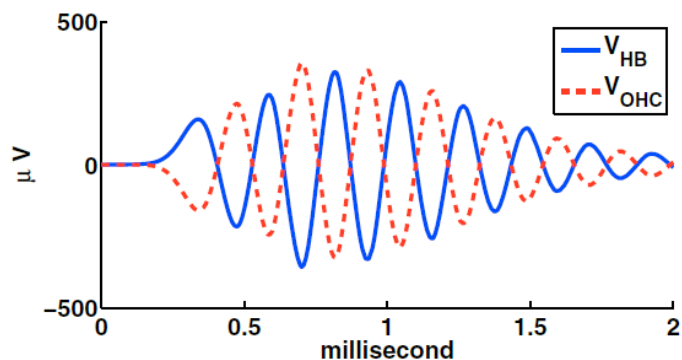
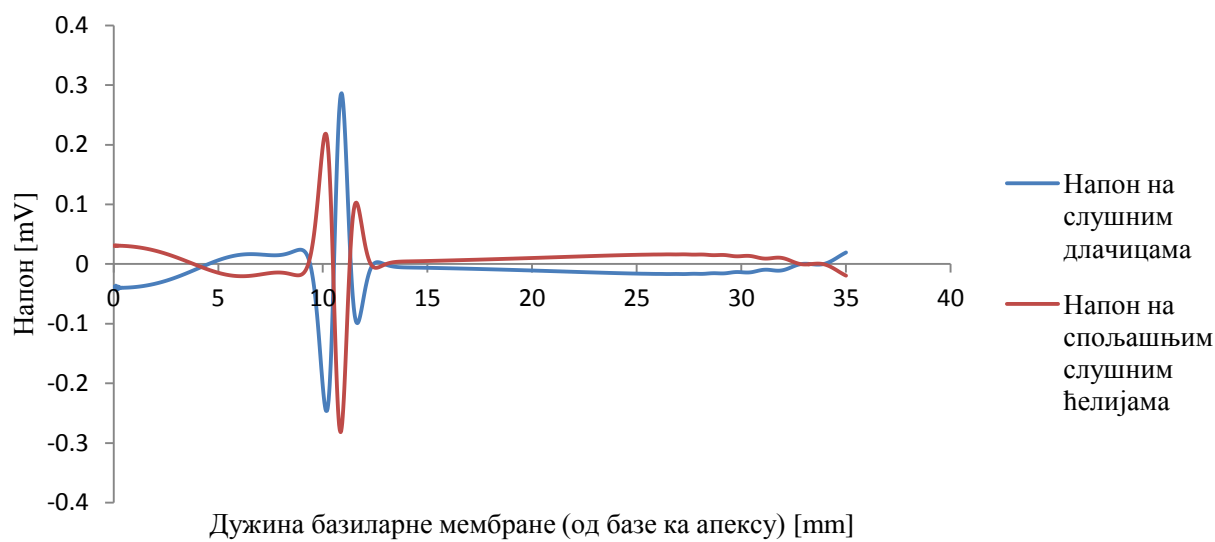
При поређењу фаза изводи се закључак да у оба модела смиривање сигнала за већину анализираних улазних фреквенција траје од три до четири циклуса, као и да ниже фреквенције имају блаже падове, односно спорије повећавају број циклуса, што је последица тога да ниже фреквенције достижу максималне вредности ближе апикуларном делу мембране и да су сигнали пре достизања максималне вредности стабилнији.



Слика 59: Поређење фаза електро-механичког модела кохлеје у простору стања, у фреквентном домену, са резултатима из литературе [53]. Фреквенције коришћене у литератури су 12000 Hz, 5900 Hz, 2900 Hz, 1400 Hz, 700 Hz и 300 Hz, гледано са леве стране (база) на десну (апекс).

Напони Кортијевог органа, који су добијени из електро-механичких модела кохлеје у простору стања, су поређени са резултатима из литературе. Напон на спољашњим слушним ћелијама и напон на слушним длачицама се скоро налазе у против фази и сличних су амплитуда. У делу достизања максималних вредности разлика је нешто мања од  $\pi$ , захваљујући чему постоји збирни сигнал ова два напона, који представља кохлеарну

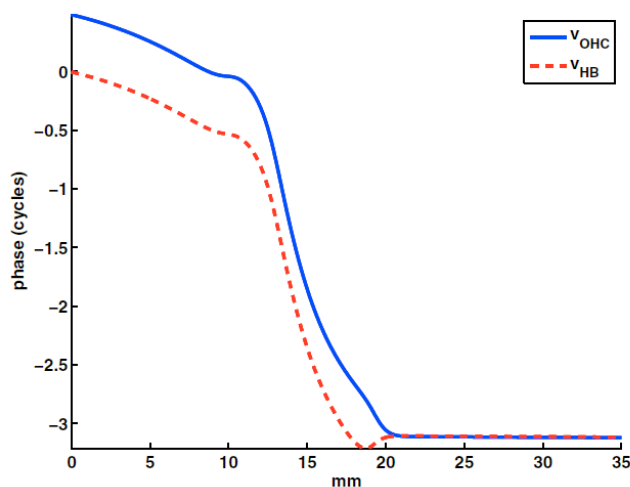
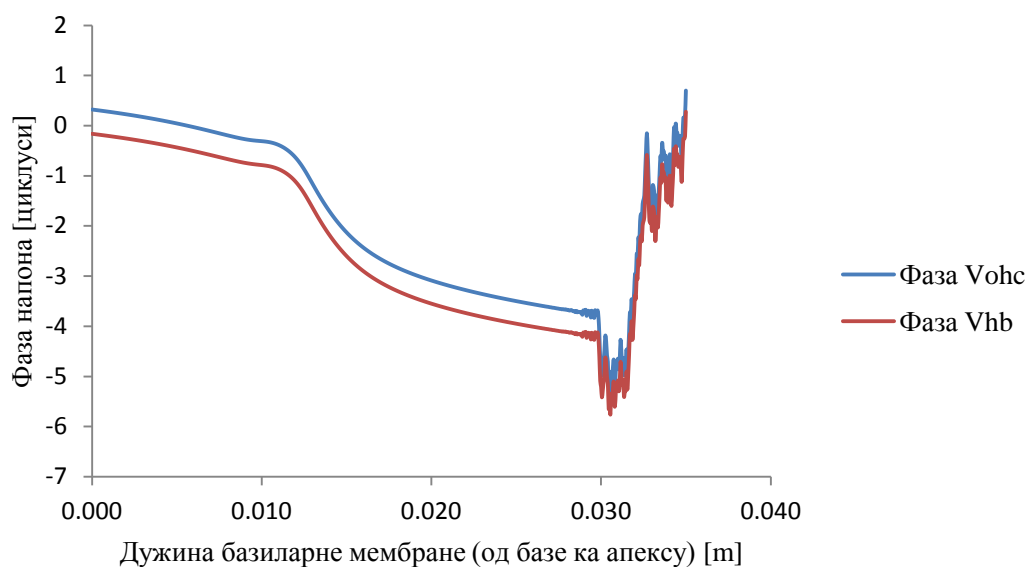
микрофонију, која може бити коришћена за потврду функционалности кохлеје. На слици 60 је приказано поређење напона Кортијевог органа, који су добијени из електро-механичког модела кохлеје у временском домену, са резултатима из литературе [53]. Фазна разлика између напона у оба модела је приближно  $\pi$  и може се видети да су добијене амплитуде приближних вредности.



Слика 60: Поређење сигнала напона на спољашњим слушним ћелијама ( $V_{ohc}$ ) и напона на слушним длачицама ( $V_{hb}$ ) временског електро-механичког модела кохлеје и модела из литературе [53].

На слици 61 су приказане фазе напона електро-механичког модела кохлеје у временском домену и фазе напона фреквентног модела из литературе за улазну фреквенцију од

2900 Hz. Напони из оба модела имају пад фазе око карактеристичног места ( $\approx 13$  mm). Фазна разлика износи приближно  $\pi$  до достизања максималне вредности. У делу око достизања максималне вредности се фазе оба модела смањују. Крајеви дијаграма се разликују. У развијаном електро-механичком моделу кохлеје у фреквентном домену постоји поремећај фазе, али су напони и даље са фазном разликом од приближно  $\pi$ , док у моделу из литературе сигнали напона остају приближно исти и константни на три циклуса.



Слика 61: Поређење сигнала напона на спољашњим слушним ћелијама (Vhb) и напона на слушним длачицама (Vohc) временског електро-механичког модела кохлеје и модела из литературе [53].

## 8. Анализа одзива модела кохлее

Описани механички и електро-механички модели кохлее се разликују по својој сложености и по начину решавања. Заједничко свим моделима кохлее је тежња да покажу стварно понашање кохлее, како оних најједноставнијих функција, тако и врло сложених процеса, који се одвијају унутар Кортијевог органа. Сложеност модела повећава могућност моделирања више различитих процеса унутар кохлее.

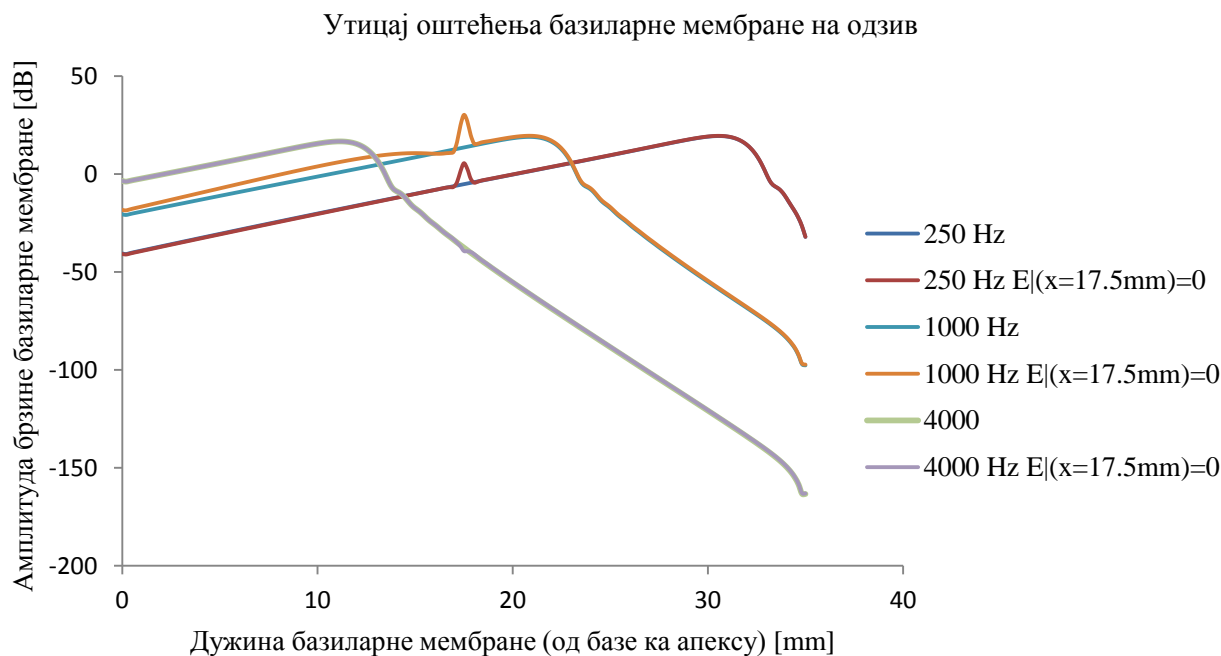
Моделирање кохлее може имати, осим истраживачког карактера, и примену у дијагностици поремећаја слуха. Не постоји много експерименталних података о унутрашњем уву, а самим тим и о кохлеи, првенствено због неприступачности кохлее која је смештена дубоко у лобањи унутар темпоралне кости. Осим тога, вероватноћа оштећења здраве кохлее приликом експерименталних мерења није занемарљива, а оштећења кохлее доводе до различитих степена губитка слуха или потпуног губитка слуха [62]. Није могуће извести ни много експеримената на кохлеама добијеним од лешева јер кохлеа губи својства врло брзо после наступања смрти [63]. Отежано прикупљање експерименталних података условљава потребу за развојем модела кохлее.

Од оних мерења која су изводљива најчешће се врши мерење сигнала на кружном прозору, који се налази у базалном делу бубног степеништа [64], [65]. Сигнал кохлеарне микрофоније је показатељ функционалности спољашњих слушних ћелија, што је већ помињано, али не и степена функционалности. Са кружног прозора се врши и мерење отоакустичних емисија које се најчешће користе за стандарни тест провере слуха код новорођених беба. Осим тога, експериментално је могуће мерити померање тачака на темпоралној кости изабраних тако да њихово померање одговара померању тачака које се налазе испод, у кохлеи. Тако се одређује померање узенгије, односно овалног прозора, бубне опне и слично [66], [67].

Познато је како изгледа одзив здраве кохлее – амплитуда и фаза брзине померања базиларне мембране, као и дијаграм улазна фреквенција – карактеристично место (Гринвудова функција). Одступање од облика одзива даје информацију да кохлеа не функционише како би требало. Начин на који одзив одступа од очекиваног може да покаже о ком недостатку је реч и да помогне лекару у доношењу одлуке о могућем лечењу. На извештајан начин одзив, који је снимљен код пацијента, даје информацији о

последници, која је довела до оштећења или губитка слуха, али не и о узроку оштећења. Механичка оштећења није могуће увести у анализу на други начин осим као случајну поремећајну функцију, али оштећења делова кохлеје, која су настала услед бактеријске инфекције или неке друге болести би могла да се доведу у везу: болест пацијента – оштећење одређеног дела кохлеје – одступање од регуларног одзива. У наставку је приказано неколико нерегуларних одзива кохлеје и оштећење ког дела кохлеје је довело до тог одступања.

Прво је анализиран одзив базиларне мембране код механичког кутијастог модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената када не постоји оштећење базиларне мембране и када постоји мало оштећење на средини мембране (слика 62). Појава прекида базиларне мембране је узета у обзир изједначавањем Јанговог модула еластичности са нулом за елементе који представљају прекид. У конкретном примеру узето је у обзир да само на делу једног елемента постоји оштећење и амплитуде брзине базиларне мембране су приказане за улазне фреквенције од 250 Hz, 1000 Hz и 4000 Hz.

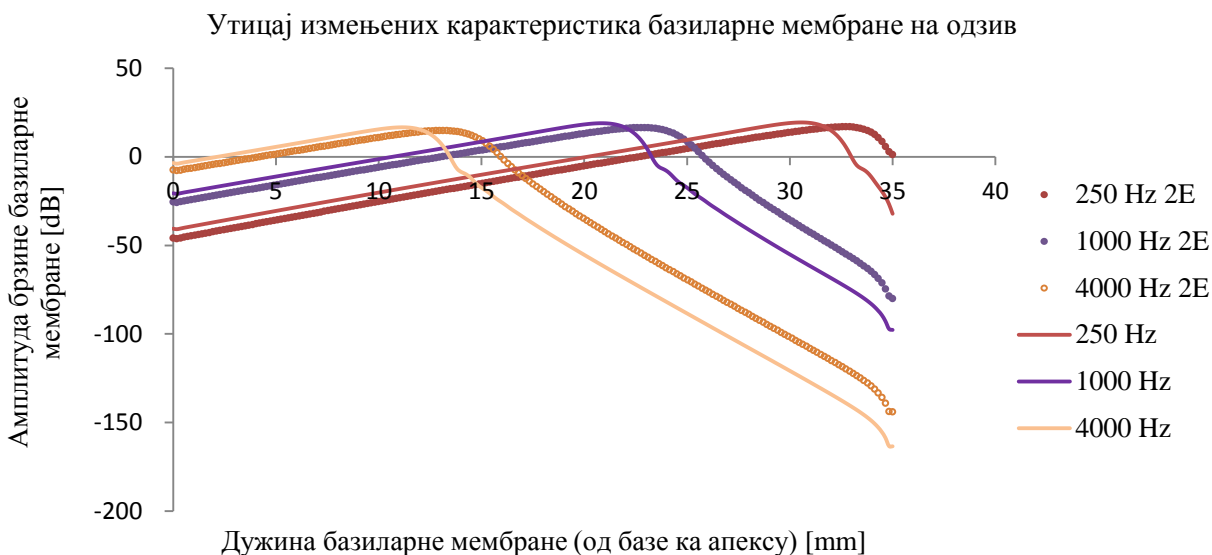


Слика 62: Амплитуда брзине базиларне мембране при појави прекида на средини дужине мембране и без оштећења (здрава мембрана) за улазне фреквенције од 250 Hz, 1000 Hz и 4000 Hz кутијастог механичког модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената.



На месту прекида мембране, конкретно у овом случају на њеној средини, дошло је до скока у одзиву, што је и очекивано, с обзиром да мембрана не поседује крутост у том делу, којом би се одупрла већим осцилацијама. Такође, на основу приказаног дијаграма може се закључити да ће скок бити већи ако се место оштећења налази ближе карактеристичном месту дате улазне фреквенције (1000 Hz). Амплитуда ће имати већи скок и ако се оштећење мембране налази лево од карактеристичног места (250 Hz), него ако се налази десно од карактеристичног места (4000 Hz). Разлог за то су веће осцилације које претходе пику и њихово смиривање након достизања максималне вредности амплитуде. У експерименталном мерењу, које би могло да се доведе у везу са брзином базиларне мембране, појава пика који одступа од регуларног нагиба могла би да се тумачи као одсуство крутости, тј. као појава прекида на базиларној мембрани.

У другом случају испитивано је како повећање крутости базиларне мембране утиче на њен одзив. Амплитуде брзине базиларне мембране су одређиване за улазне фреквенције од 250 Hz, 1000 Hz и 4000 Hz, као и у претходном примеру, са разликом да су сада поређене амплитуде регуларних базиларних мембранама са мембранама који имају два пута увећану крутост (слика 63). На основу приказаних амплитуда може се закључити да већа крутост базиларне мембране помера карактеристично место улево и смањује у извесној мери вредност максималних амплитуда [68]. Добијени резултати су у складу са очекиваним – већа крутост утиче на мање осцилације базиларне мембране и дуже време достизања максималне вредности [69] Повећање крутости се може да настане услед старости човека, мада може бити и узрок неке инфекције. У пракси се не дешава да мембрана на целој дужини повећа крутост равномерно, као што је то симулирано у овом примеру, али се механички кутијаста модел кохлее са уздужним спрезањем елемената може искористити за симулирање различитих делова мембране са различитом крутошћу у циљу добијања што јаснијег одзива базиларне мембране при овим променама.

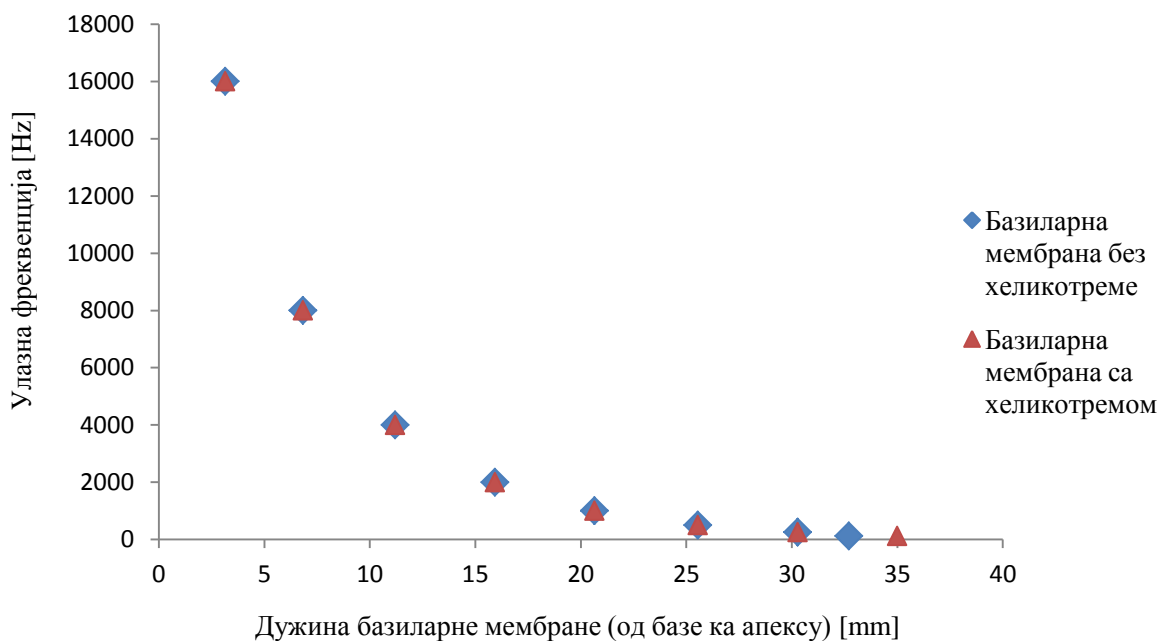


Слика 63: Амплитуда брзине базиларне мембране код два пута увећане крутости мембране и код мембране са регуларном крутошћу (здрава мембрана) за улазне фреквенције од 250 Hz, 1000 Hz и 4000 Hz кутијастог механичког модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената.

Повећање крутости базиларне мембране се јавља углавном код старијих пацијената и остварени одзиви су у складу са чињеницом да њихов губитак слуха укључује немогућност детектовања нижих тонова, чија су карактеристична места померена ка апексу или излазе из опсега мембране [70]. Осим неадекватне крутости базиларне мембране код старијих пацијената велики удео у губитку слуха има и губитак слушних ћелија, чији је број највећи при рођењу и временом може само да се смањује [71]. Губитак слушних ћелија значи и немогућност инервације адиторних нерава.

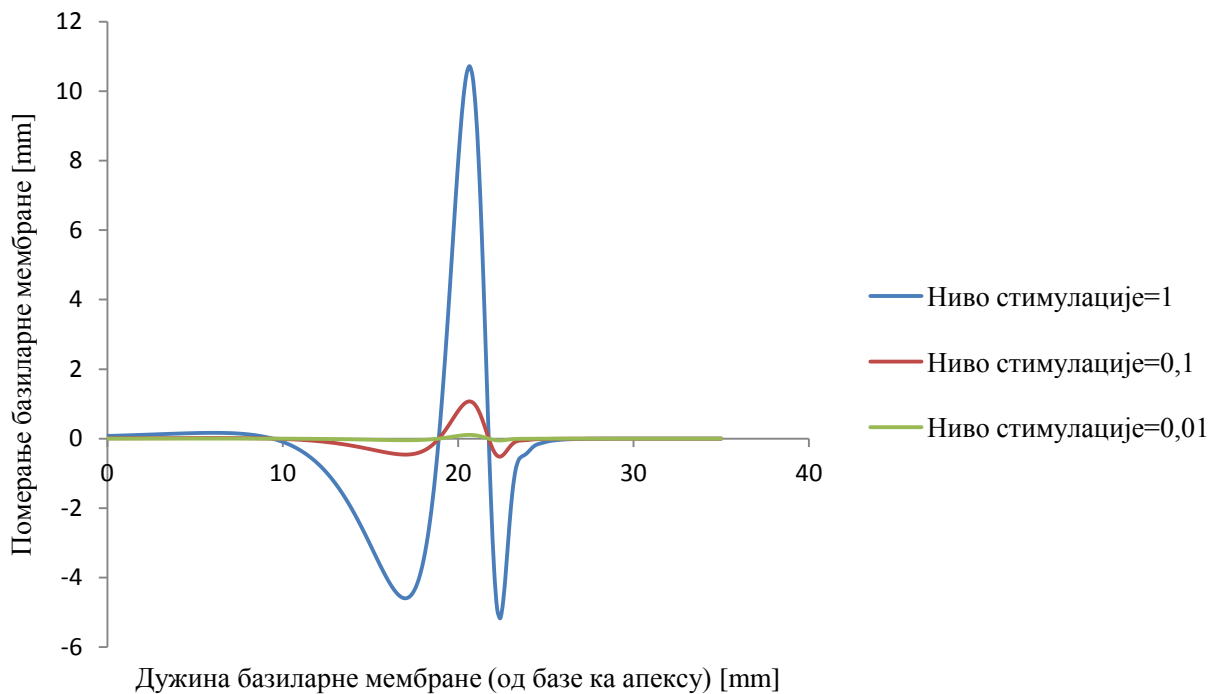
На слици 64 приказан је дијаграм улазна фреквенција – карактеристично место са и без хеликотреме кутијастог механичког модела са уздужним спрезањем елемената. Хеликотрема је место на крају базиларне мембране, у делу апекса, на коме се спајају две коморе – вестибуларно и бубно степениште. Утицај хеликотреме у моделу је узет у обзир изједначавањем Јанговог модула еластичности са нулом за последњи елемент базиларне мембране. Као што се може видети са слике 64 хеликотрема показује утицај на одзив базиларне мембране, конкретно на карактеристично место улазне фреквенције, само за ниске улазне фреквенције, што је у складу са очекиваним, јер ниске фреквенције достижу максималну амплитуду у делу апекса. Како ниске фреквенције не припадају групи

фреквенција које су кључне при говору утицај хеликотреме на одзив може бити занемарен у анализи одзива.

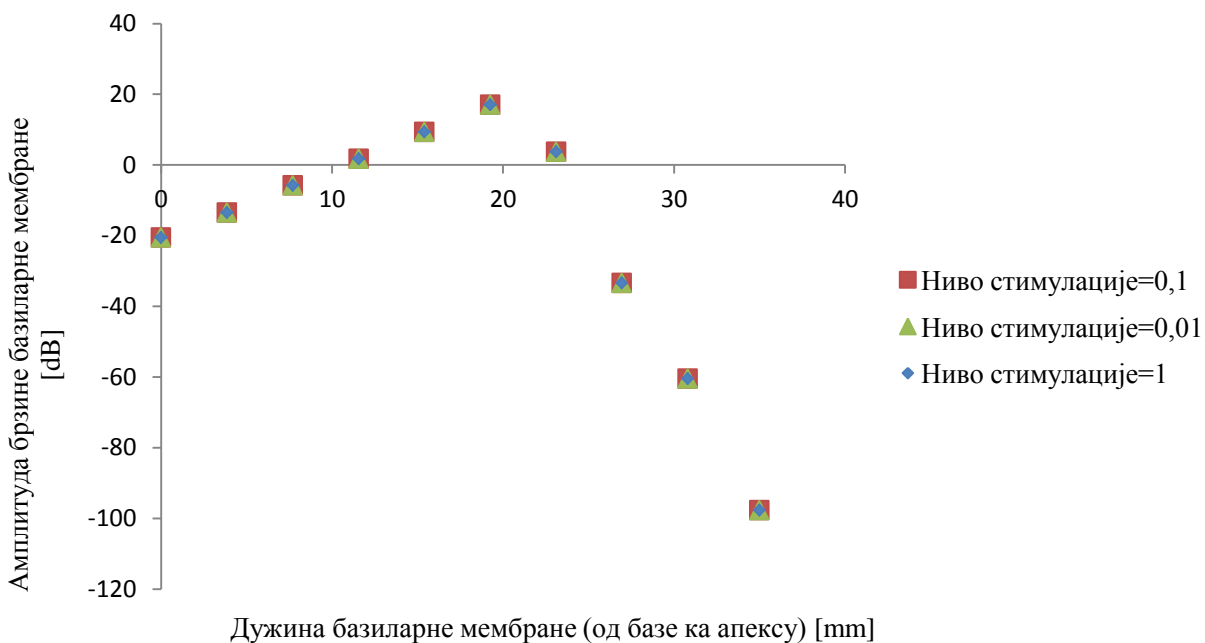


Слика 64: Дијаграм улазна фреквенција – карактеристично место за различите фреквенције са и без хеликотреме кутијастог механичког модела кохлее са уздужним спрезањем елемената.

Један од улазних параметара за механичке моделе кохлее је и вредност померања овалног прозора, односно померање узенгије (или притисак), који је означен као ниво стимулације. Промена амплитуде осциловања узенгије ће имати утицај на вредност померања базиларне мембране, али ће дијаграм амплитуде брзине базиларне мембране при истој улазној фреквенцији остати непромењен, што је приказано на слици 65 (померање) и слици 66 (амплитуда).

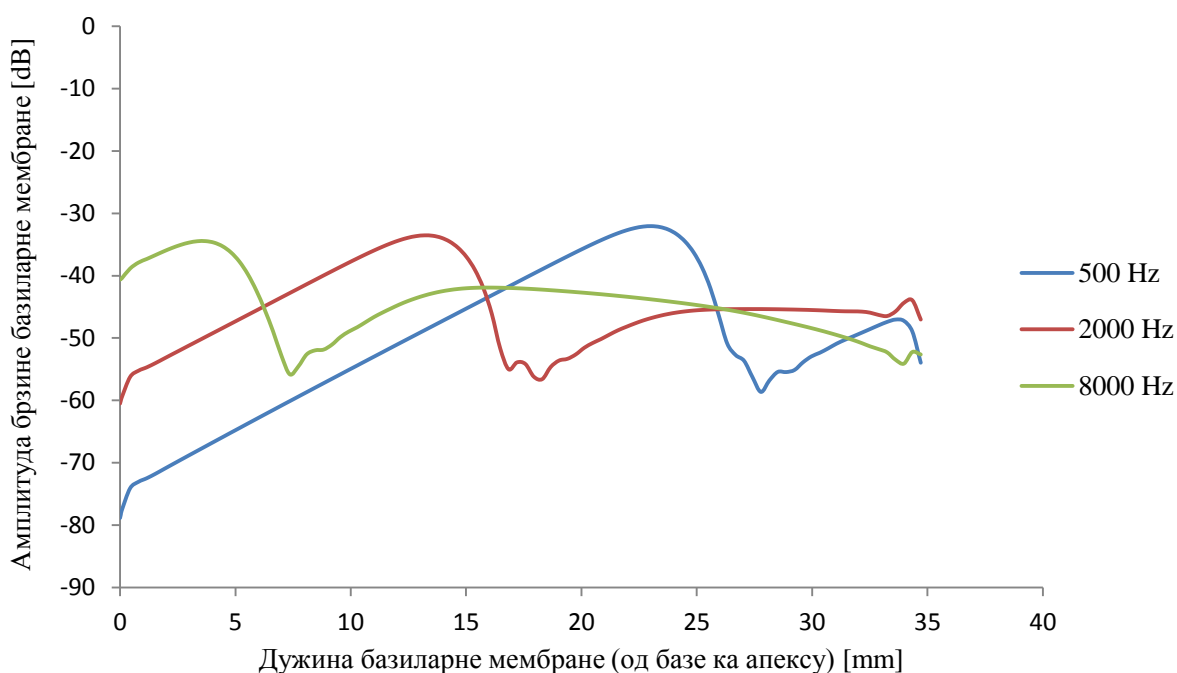


Слика 65: Утицај промене амплитуде осциловања узенгије на одзив померања базиларне мембране кутијастог механичког модела кохлеје са уздужним спрезањем за улазну фреквенцију од 1 kHz.



Слика 66: Утицај промене амплитуде осциловања узенгије на одзив амплитуде базиларне мембране кутијастог механичког модела кохлеје са уздужним спрезањем за улазну фреквенцију од 1 kHz.

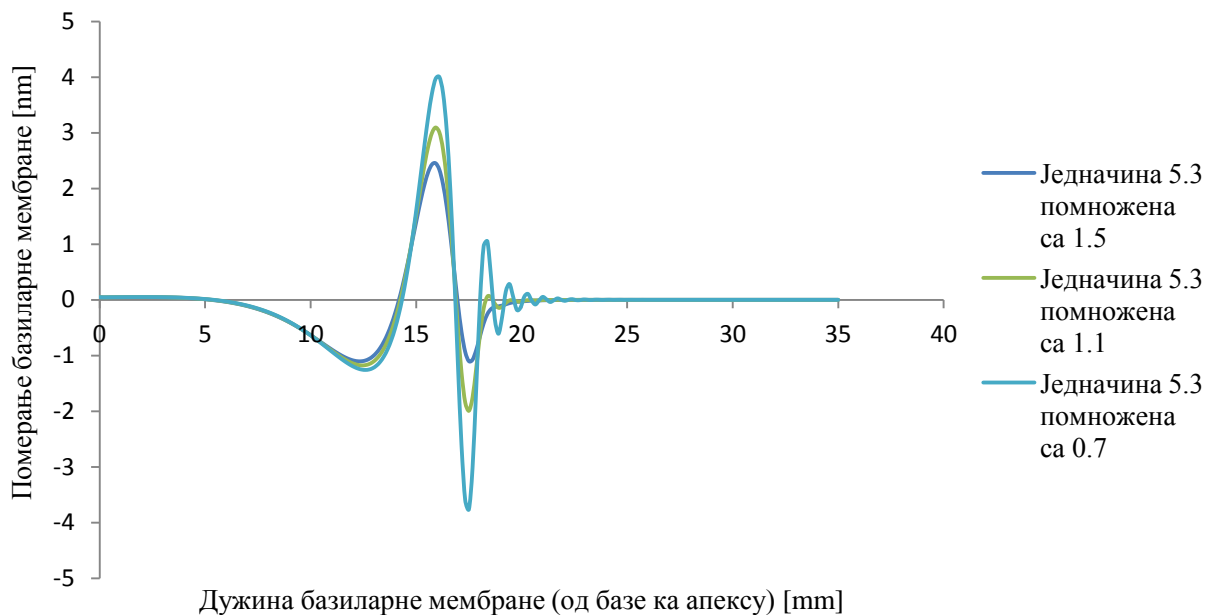
На слици 67 су приказане амплитуде брзине базиларне мембране спиралног механичког модела кохлеје при различитим улазним фреквенцијама. Амплитуде брзине базиларног мембране спиралног механичког модела одговарају очекиваним у делу према бази, до достигања максималне вредности. У делу према апексу сигнали се не смирују и показују појаву новог, мањег, пика, који није забележен на подацима добијеним на животињским кохлеама [72]. У том смислу потребно је посветити још пажње избору коефицијената пригушења у апикалном делу код спиралних модела кохлеје и питању да ли су карактеристике спиралног модела кохлеје изотропне или ортотропне.



Слика 67: Амплитуда брзине базиларне мембране спиралног модела кохлеје у функцији од положаја на базиларној мембрани за различите улазне фреквенције.

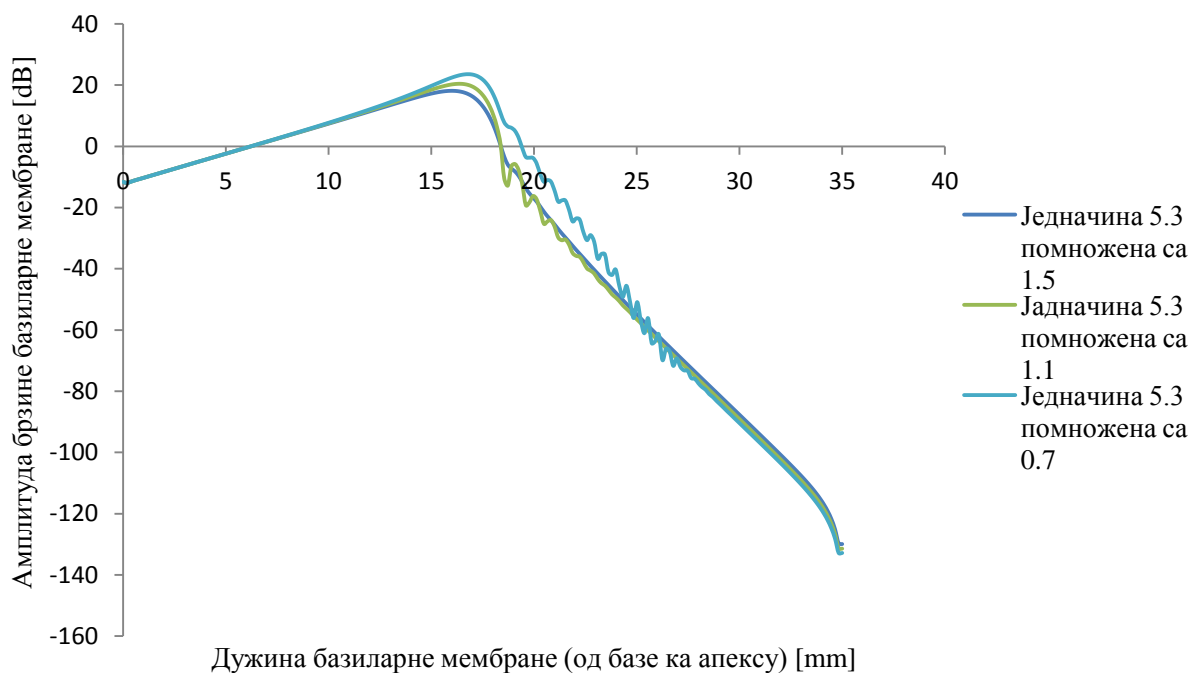
Утицај пригушења је анализиран на опружном механичком моделу кохлеје – кутијастом механичком моделу кохлеје са уздужним спрезањем елемената. За пригушење су узете вредности из једначине 5.3, које су помножене са факторима 1,5 (усвојено пригушење модела), 1,1 (смањено пригушење за 26,7 %) и 0,7 (смањено пригушење за 53,33%). На слици 68 је приказано померање базиларне мембране. Мање пригушење даће веће вредности померања и више осцилација после достигања максималне вредности. Разлика

у осцилацијама после пика није изражена за пригушење са фактором 1,5 и 1,1, али се примећује већи број осциловања после пика за пригушење са фактором 0,7.



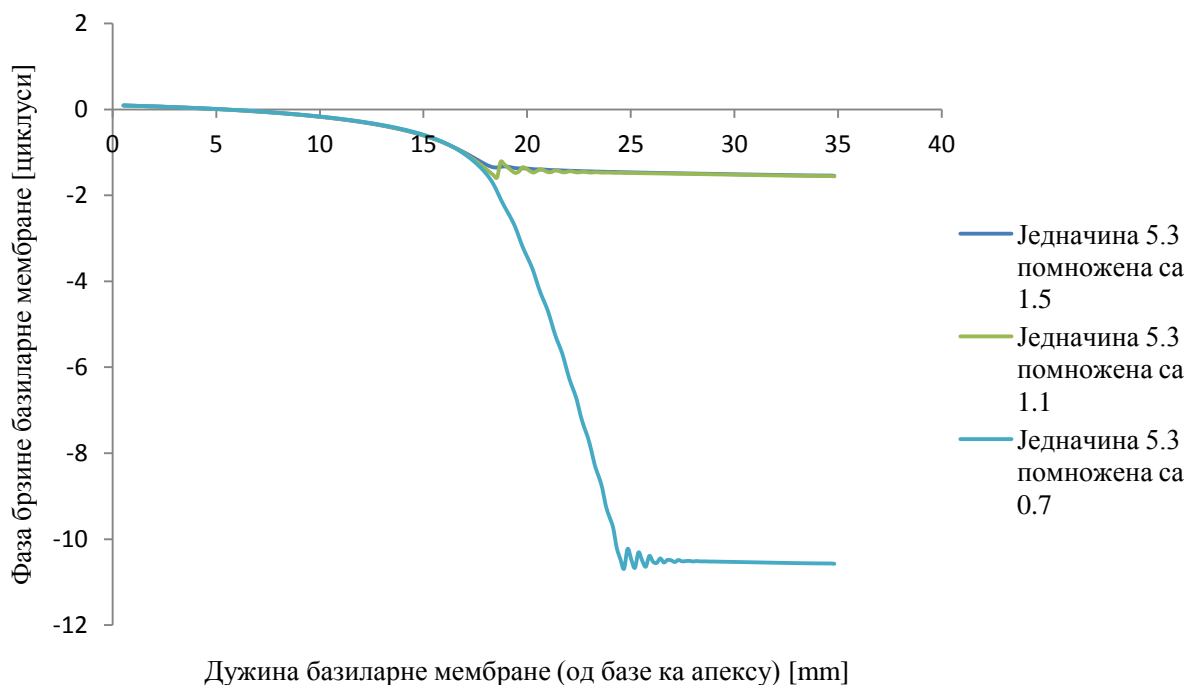
Слика 68: Померање базиларне мембране кутијастог механичког модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената за улазну фреквенцију од  $2\text{ kHz}$  при пригушењима која су регулисана једначином 5.3 и факторима пригушења 1,5, 1,1 и 0,7.

На слици 69 су приказане амплитуде брзине базиларне мембране за пригушења са поменутих факторима. Максимална вредност амплитуде се повећава са смањивањем пригушења, што је и очекивано. Карактеристично место улазне фреквенције је незнатно померено улево и примећује се да одзив после достизања максималне вредности није глатка крива, већ има мале осцилације око очекиваних вредности. Ове осцилације постоје и код фактора 1,1 и код фактора 0,7, али дуже трају код мањег пригушења. За фактор 1,1 се смирују после  $24\text{ mm}$ , док се за фактор 0,7 смирују после  $29\text{ mm}$ .



Слика 69: Амплитуда брзине базиларне мембране кутијастог механичког модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената за улазну фреквенцију од  $2\text{ kHz}$  при пригушењима која су регулисана једначином 5.3 и факторима пригушења 1,5, 1,1 и 0,7.

На крају анализе утицаја пригушења на одзив приказане су фазе брзине базиларне мембране кутијастог механичког модела кохлеје са уздужним спрезањем при улазној фреквенцији од  $2\text{ kHz}$ , за различита пригушења (слика 70).



Слика 70: Фаза брзине базиларне мембране кутијастог механичког модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената за улазну фреквенцију од  $2\text{ kHz}$  при пригушењима која су регулисана једначином 5.3 и факторима пригушења 1,5, 1,1 и 0,7.

Приказане фазе показују да не постоји велика промена у броју циклуса за пригушења са фактором 1,5 и 1,1, али је та разлика очигледна за пригушење са фактором 0,7, које има десет циклуса до смиривања.

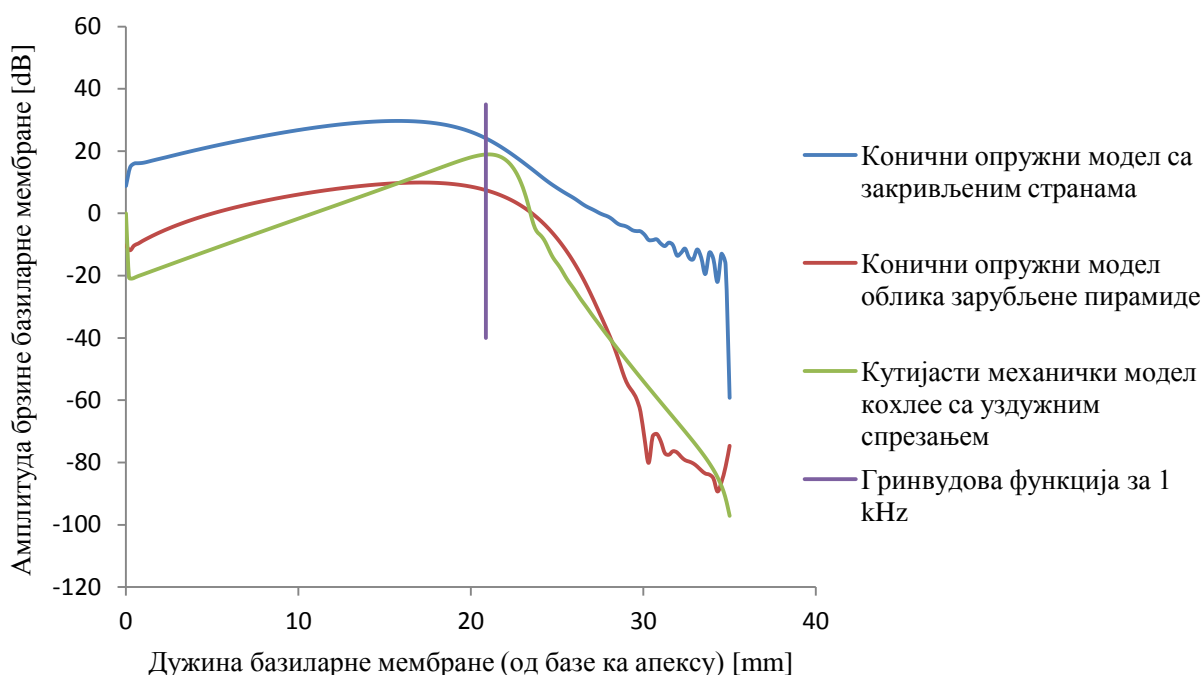
Смањење пригушења базиларне мембране утиче на више начина на одзив исте. Највећи утицај је појава осцилација након достизања максималне вредности – што је пригушење мање више ће бити осцилација и смиривање сигнала ће дуже трајати. Осцилације које се јављају после пика опадају до смиривања. Карактеристично место улазне фреквенције се не мења у великој мери. Постоји померање пика у леву страну, али то померање није велико, што значи да промена пригушења има утицај на облик осциловања после достизања максималне вредности и на вредност максималне амплитуде, али не и на место достизања максималне вредности.

С друге стране, промена Јанговог модула еластичности, као што је већ приказано, не утиче на промену облика одзива (промене постоје, али су јако мале), али утиче на промену карактеристичног места фреквенције.



Здрава кохлеа има усклађене ове параметре – модул еластичности и пригушење, тако да даје за одзив глатку криву, израженог нагиба и брзог пригушавања сигнала после достигнуте максималне вредности (одговарајуће пригушење) и тачног карактеристичног места улазне фреквенције (одговарајући Јангов модул еластичности). Промена пригушења не доводи до губитка слуха, али може да доведе до зашумљености сигнала и повећања амплитуде [73].

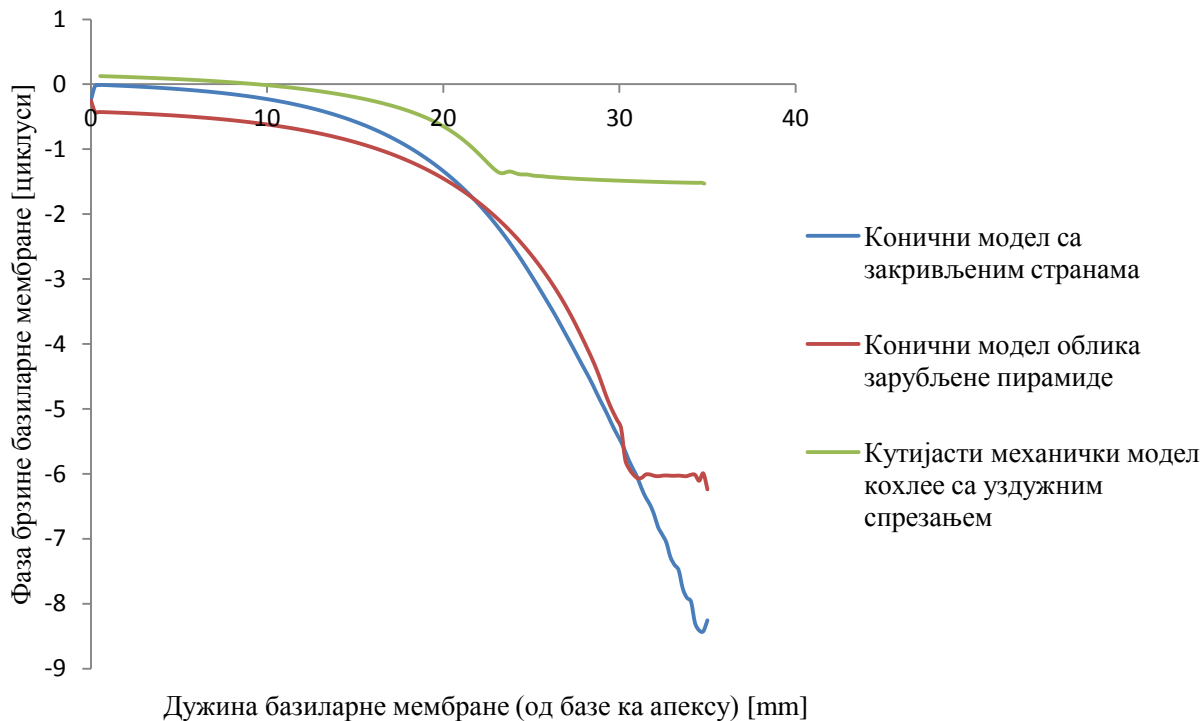
Амплитуде и фазе брзине базиларне мембране су одређене за различите механичке развијене моделе кохлеа за улазну фреквенцију од  $1\text{ kHz}$ . Добијени резултати су поређени и приказани на слици 71 и слици 72 .



Слика 71: Амплитуда брзине базиларне мембране за улазну фреквенцију од  $1\text{ kHz}$  кутијастог механичког модела кохлеа са уздужним спрезањем елемената, коничног опружног модела облика зарубљене пирамиде и коничног опружног модела за закривљеним странама.

Амплитуде брзине мембране за кутијаста механички модел и два конична модела кохлеа имају сличан облик и сличне вредности. Конични модели, са правим и зарубљеним странама, имају извесне осцилације после достизања максималне вредности, у делу апекса, што није у складу са подацима из литературе. Осим тога што кутијаста механички модел кохлеа има одзив без нежељених осцилација и одговарајући нагиб, односно брзо смиривање сигнала после достизања максималне вредности, овај модел даје и за резултат

положај карактеристичног места улазне фреквенције, које је најближе карактеристичном месту улазне фреквенције које је одређено експериментално (карактеристично место одређено за улазну фреквенцију од  $1\text{ kHz}$  према Гринвудовој функцији).

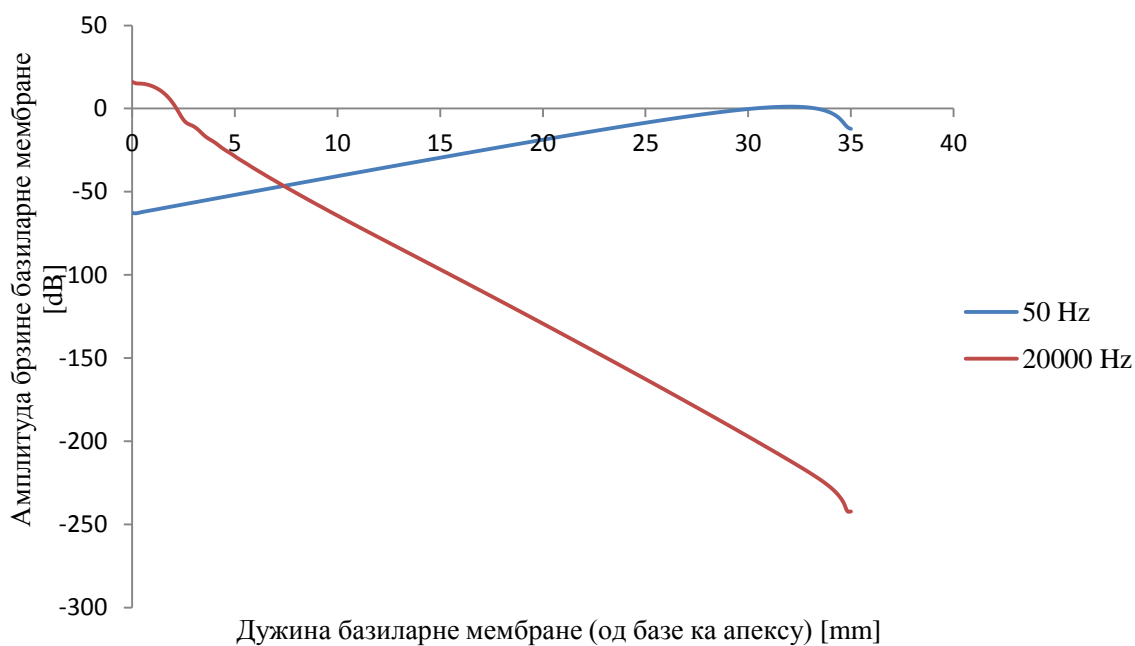


Слика 72: Фаза брзине базиларне мембране за улазну фреквенцију од  $1\text{ kHz}$  кутијастог механичког модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената, коничног опружног модела облика зарубљене пирамиде и коничног опружног модела за закривљеним странама.

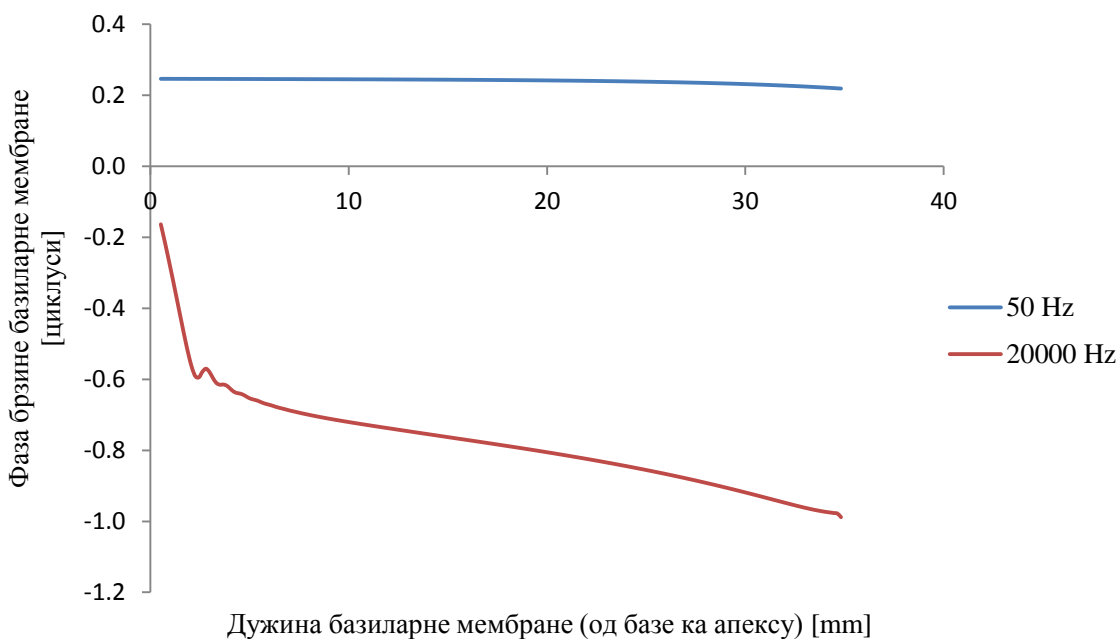
Појава осцилација коничних опружних модела кохлеје јасно се види на дијаграму за фазу брзине базиларне мембране. Најмање циклуса, најмање осцилација, има кутијаста механички модел кохлеје. Нешто више циклуса има конични модел облика зарубљене пирамиде, а највише конични модел кохлеје са закривљеним странама. И поред појаве нежељених осцилација у одзивима коничних опружних модела кохлеје и недовољне тачности карактеристичних места улазних фреквенција, ови модели су значајни због могућности моделирања провођења звука кроз кости.

Механички модели кохлеје који су анализирани показују највише одступања у деловима базе и апекса, на почетку и на крају базиларне мембране. Одзиви кутијастог механичког

модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената за граничне улазне фреквенције су приказани на слици 73 и на слици 74.

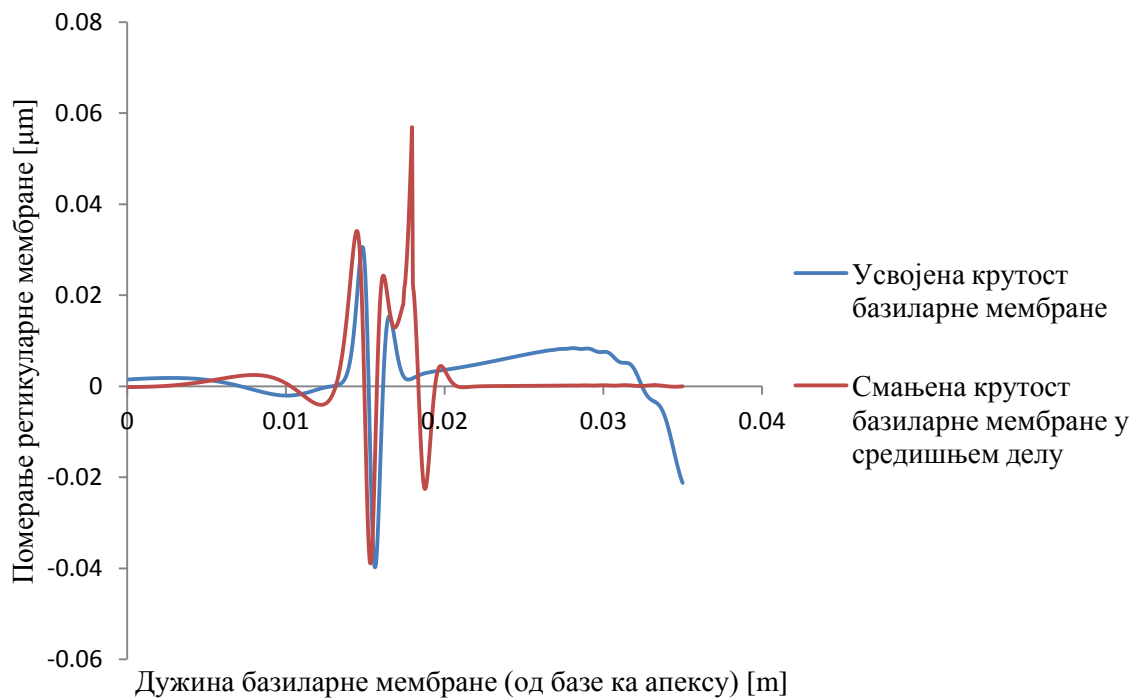


Слика 73: Амплитуде брзине базиларне мембране за граничне улазне фреквенције од 50 Hz и 20 kHz кутијастог механичког модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената.



Слика 74: Фазе брзине базиларне мембране за граничне улазне фреквенције од 50 Hz и 20 kHz кутијастог механичког модела кохлеје са уздужним спрезањем елемената.

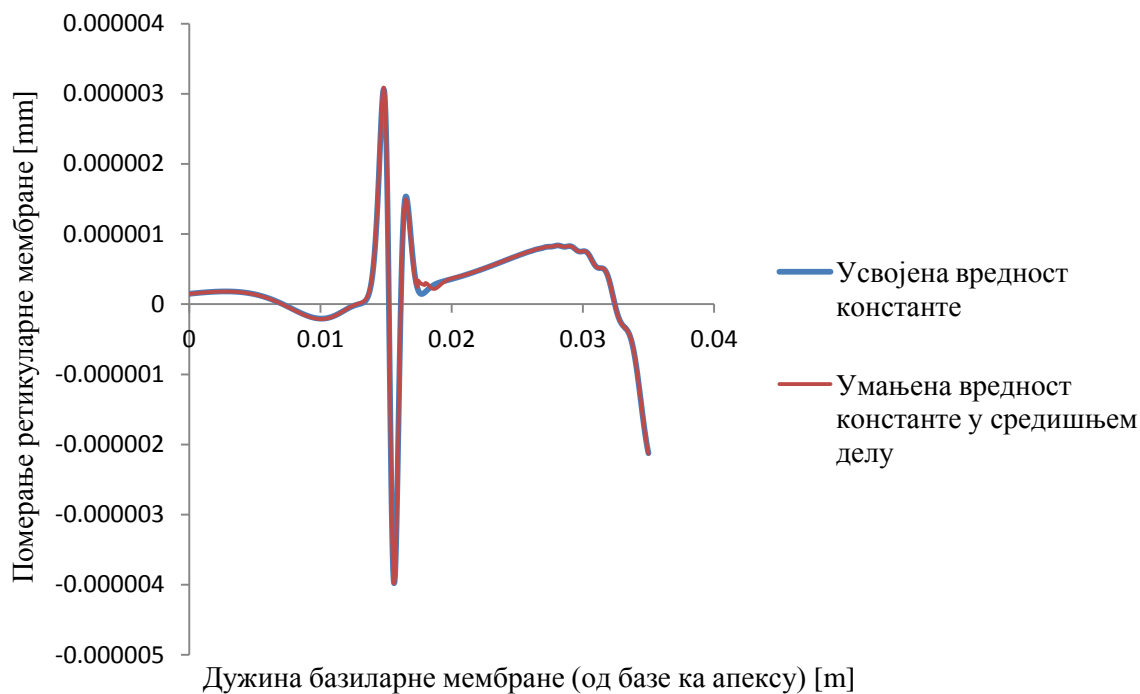
На слици 75 је приказан утицај промене крутости базиларне мембране на одзив ретикуларне мембране електро-механичког модела у простору стања. Крутост базиларне мембране је смањена у средишњем делу базиларне мембране.



Слика 75: Померање ретикуларне мембране електро-механичког модела кохлеје у простору стања за усвојену крутост базиларне мембране и смањену крутост у средишњем делу при улазној фреквенцији од 2 kHz.

На основу дијаграма са слике уочава се да смањење крутости доводи до увећања померања ретикуларне мембране, што је у складу са очекиваним.

Смањење параметара  $\alpha_d$  и  $G_4$  није битније утицало на одзив ретикуларне мембране. Нешто приметнији утицај на одзив је показало смањење параметра  $\alpha_v$  у средишњем делу, што је приказано на слици 76.



Слика 76: Померање ретикуларне мембране електро-механичког модела кохлеје у простору стања за усвојени параметар  $\alpha_v$  и за умањене вредности параметра  $\alpha_v$  у средишњем делу при улазној фреквенцији од 2 kHz.

Резултати који се разликују у већој мери од очекиваних указују на потребу да се изврши оптимизација параметара у циљу постизања резултата што ближих оним из постојеће литературе. Параметри који највише утичу на одзив су већ поменути Јангов модул еластичности и пригушење. Поред ових параметара на резултате утичу у мањој мери и геометрија модела, изотропне или ортотропне карактеристике мембране, број елемената у моделу и др. Самим тим, побољшавање одзива одређених модела захтева више времена и већи број симулација. Утицај свих појединачних параметара на одзив може да буде део будућих истраживања у овој области.

## 9. Закључак

У овом раду представљени су различити модели кохлее, механички и електро-механички. Модели се разликују по сложености геометрије и по начину решавања. За решавање неких модела кохлее је коришћена метода коначних елемената, а модели су решени у програмском пакету ПАК. За друге моделе кохлее коришћена је репрезентација у простору стања, а модели решени у програмском пакету матлаб, коришћењем ODE солвера и Лапласове трансформације.

Добијени резултати модела су поређени са одређеним експерименталним мерењима, као и са резултатима из литературе. Сви модели поседују одређена ограничења у пружању тачног одзива кохлее, али су показали и задовољавајуће тачности. Највише одступања у резултатима је примећено на крајевима модела, за најниже и највише улазне фреквенције побуде. То указује на потребу да се избор параметара на границама модела понављањем симулација коригује до постизања одговарајућег одзива. Други начин је да се коригују гранични услови у извесној мери.

У последњем поглављу тезе приказана је анализа одзива модела и како одређени параметри утичу на одзив кохлее. За употребу модела у претклиничкој пракси потребно је извршити детаљнију анализу одзива и направити везу између поремећаја параметара и сигнала који се генеришу, а који би могли да се измере.

С друге стране, анализа одзива модела при различитим поремећајима може бити од велике користи за произвођаче кохлеарних импланата. Добијени резултати могу бити искоришћени за побољшање карактеристика постојећих кохлеарних импланата или могу дати предлог бољег позиционирања импланата.

Будућа истраживања у овој области биће посвећена усавршавању развијених модела, прављењу нових модела кохлее, у зависности од потребе и њиховој примени на кохлеарне импланте.

## 10. Литература

[1] Guyton A. C., Hall J. E., “Медицинска физиологија”, Савремена администрација Београд, ISBN 86-387-0599-9, 1999.

[2] Boskovic M. S., “Anatomija coveka”, izdovac Naucna KMD, ISBN 86-84153-58-8, 2005.

[3] Gray, Henry. Anatomy of the Human Body. Philadelphia: Lea & Febiger, 1918; Bartleby.com, 2000. [www.bartleby.com/107/](http://www.bartleby.com/107/). ISBN: 1-58734-102-6.

[4] Koike T., Wada H., Kobayashi T., “Modeling of the human middle ear using the finite-element method”, The Journal of Acoustical Society of America, Vol. 111, No. 3 pp. 1306-1317, 2002.

[5] Purves D., Augustine G. J., Fitzpatrick D., Katz L. C., LaMantia A. S., O McNamara J., Williams S. M., “Neuroscience, 2nd edition”, Sunderland (MA), ISBN-10: 0-87893-742-0, 2001.

[6] Gillespie P. G., Müller U., “Mechanotransduction by Hair Cells: Models, Molecules, and Mechanisms”, Cell, Vol. 139, No. 1, pp. 33-44, ISSN 0001-4966, 2009.

[7] Donald D. Greenwood, "Critical Bandwidth and the Frequency Coordinates of the Basilar Membrane", The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 33, No. 10, pp. 1344–1356, ISSN 0001-4966, 1961.

[8] Ni G., Elliot, S. J., Ayat M. and Teal P., “Modelling cochlear mechanics”, BioMed Research International Volume 2014, Article ID 150637, 42 pages, [doi.org/10.1155/2014/150637](https://doi.org/10.1155/2014/150637), 2014.

[9] Elliot S. J., Ni G., Mace B. R. and Lineton B., “A wave finite element analysis of the passive cochlea”, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 133, No. 3, pp. 1535-1545, ISSN 0001-4966, 2013.

[10] Kojic M., Bathe K. J., “Inelastic Analysis of Solids and Structures”, Springer, Berlin, Germany, ISBN 978-3-540-22793-9, 2005.

[11] Kevorkian J., “Partial Differential Equations: Analytical Solution Techniques”, second edition, Texts in Applied Mathematics, Springer, ISBN-13: 978-0387986050, 1999.

[12] Grossmann C.; Roos H., Stynes M., “Numerical Treatment of Partial Differential Equations“, Springer Science & Business Media, ISBN 978-3-540-71584-9, 2007.

- [13] Morton K. W.; Mayers D. F., “Numerical Solution of Partial Differential Equations“, second edition, Cambridge University Press, ISBN-13 978-0-521-60793-3, 2005.
- [14] Olsen-Kettle L., “Numerical solution of partial differential equations “,The University of Queensland, ISBN 978-1-74272-149-1, 2011.
- [15] Smith G. D., “Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Method “, third edition, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, ISBN 978-0198596509, 1985.
- [16] Kojic M., Filipovic N., Stojanovic B. and Kojic N., “Computer Modeling in Bioengineering – Theoretical Background, Examples and Software”. John Wiley and Sons, ISBN 978-0-470-06035-3, England, 2008.
- [17] Fletcher C. A. J., “Computational Galerkin Methods “, Springer Series in Computational Physics, ISBN: 978-3-642-85951-9, 1984.
- [18] Stolze C. H., “A history of the divergence theorem”, *Historia Mathematica*, Vol. 5, No. 4, pp. 437-442, 1978.
- [19] Fahy F.; Gardonio P., “Sound and Structural Vibratio: Radiation, Transmission and Response“, second edition, Elsevier Academic Press, ISBN: 9780123736338, 2006.
- [20] Kojic M., Slavkovic R., Zivkovic M., Grujovic N., “Metod konacnih elemenata I – linearna analiza”, Masinski fakultet u Kragujevcu, ISBN 86-80581-27-5, 1998.
- [21] Bathe K. J., “Finite Element Procedures in Engineering Analysis“, Prentice Hall, Pearson Education, Inc., ISBN-13: 978-0-13-317305-5, 1982.
- [22] Filipovic N., Mijailovic S., Tsuda A. and Kojic M., An Implicit Algorithm within the Arbitrary Lagrangian-Eulerian Formulation for Solving Incompressible Fluid Flow with Large Boundary Motions, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 195, No. 44-47, pp. 6347-6361, 2006.
- [23] Zienkiewicz O. C., “The finite element method”, third edition, Published by McGraw-Hill Book Co., New York, ISBN 10:0070840725 / ISBN 13:9780070840720, 1983.
- [24] Myklestad N. O., “The concept of complex damping”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 19, pp. 284-286, 1952.
- [25] Isailovic V., Obradovic M., Nikolic D., Saveljic I., Filipovic N., “SIFEM Project: Finite Element Modeling of the Cochlea”, 13th IEEE International Conference on BioInformatics and BioEngineering,



November 10-13, 2013, Chania, Greece, pp.88-89, DOI:10.1109/BIBE.2013.6701611, ISBN: 978-1-4799-3162-0.

[26] Nikolic M., Isailovic V., Filipovic N., Electro-mechanical cochlea model, VII European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS Congress), Crete, Greece, 5-10 June, <https://www.eccomas2016.org/proceedings/pdf/9007.pdf>., 2016.

[27] Reddy J., “An Introduction to the Finite Element Method“, McGraw-Hill. ISBN 9780071267618, 2006.

[28] Barkanov E., “Introduction to the Finite Element Method“, Institute of Materials and Structures, Faculty of Civil Engineering, Riga Technical University, lecture notes, <http://icas.bf.rtu.lv/doc/Book.pdf>, 2001.

[29] Eldho T. L., Desai Y. M., “Finite Element Method with Application in Engineering“, Pearson India, ISBN: 9788131724644, 2011.

[30] Madenci E., Guven I., “The Finite Element Method and Application in Engineering Using ANSYS“, Springer US, ISBN: 978-1-4899-7549-2, 2015.

[31] Wang X., Wang L., Zhou J. and Hu Y., “Finite element modelling of human auditory periphery including a free-forward amplification of the cochlea”, Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, Vol. 17, No. 10, pp. 1096-1107, doi 10.1080/10255842.2012.737458, 2012.

[32] Ni G., “Fluid coupling and waves in the cochlea”, PhD thesis, University of Southampton, Faculty of engineering and the environment, Institute of sound and vibration research, pp. 1-202, 2012.

[33] Yoon Y., Puria S., Steele C. R., “Frequency and Spatial Response of Basilar Membrane Vibration in a Three-Dimensional Gerbil Cochlear Model“, Journal of Mechanics of Materials and Structures, Vol. 2, No. 8, 2007.

[34] Feynman R., Leighton R., Sands M., “The Feynman Lectures on Physics, Volume I, mainly mechanics, radiation, and heat“, Addison-Wesley, ISBN 0-201-02010-6., 1977.

[35] Meaud J., Grosh K., “The effect of tectorial membrane and basilar membrane longitudinal coupling in cochlear mechanics“, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 127, No. 3, pp. 1411-1421, ISSN 0001-4966., 2010.

- [36] Подаци добијени Mr Torsten Marquardt, UCL Ear Institute, London, у току сарадње на SIFEM пројекту.
- [37] Kim N., Homma K. and Puria S., “Inertial Bone Conduction: Symmetric and Anti-Symmetric Components”, J. ARO., Vol. 12, No. 3, pp. 261-279, 2011.
- [38] Stenfelt S., Puria S., Hato N. and Groode R. L., “Basilar membrane and osseous spiral lamina motion in human cadavers with air and bone conduction stimuli”, Hearing Research, 181, p. 131-143, 2002.
- [39] Steele C. R., Zais J. G., “Effect of coiling in a cochlear model“, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 77, No. 5, pp. 1849-1852, ISSN 0001-4966, 1985.
- [40] Manoussaki D., Chadwick R., “Effects of Geometry on Fluid Loading in a Coiled Cochlea“,SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 61, No. 2, pp. 369–386, ISSN (print): 0036-1399, ISSN (online): 1095-712X, 2006.
- [41] Miková L., Gmitterko A., Hroncová D., “State Space Representation of Dynamical Systems”, American Journal of Mechanical Engineering, Vol. 4, No. 7, pp. 385-389, 2016.
- [42] Nikolic M., Teal P., Isailovic V. and Filipovic N., “Finite element cochlea box model mechanical and electrical analysis of the cochlea”, Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Mechanics of Hearing Workshop, Cape Sounio, Greece, 2014.
- [43] Marszalek W., “Two-dimensional state-space discrete models for hyperbolic partial differential equations”, Applied Mathematical Modelling, Vol. 8, No. 1, pp. 11-14, 1984.
- [44] Davies A., “The solution of differential equations using numerical Laplace transforms”, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 30, No. 1, pp. 65-79, 1999.
- [45] Liu Y. W., Neely S. T., "Distortion product emissions from a cochlear model with nonlinear mechano-electrical transduction in outer hair cells", Acoustical Society of America, Vol. 127, No. 4, pp. 2420-2432, DOI: 10.1121/1.3337233, 2010.
- [46] Puria, S., Allen, J. B., “A parametric study of cochlear input impedance,” J. Acoust. Soc. Am., Vol. 89, No. 1, pp. 287–309, 1991.
- [47] Inaoka T., Shintaku H., Nakagawa T., Kawano S., Ogita H., Sakamoto T., Hamanishi S., Wada H., Ito J., “Piezoelectric materials mimic the function of the cochlear sensory epithelium”, Proc Natl Acad Sci U S A., Vol. 108, No.45, pp. 18390-18395, 2011.

- [48] Liu Y. W., Neely S. T., "Outer hair cell electromechanical properties in a nonlinear piezoelectric model", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 126, No. 2, pp. 751-761, ISSN 0001-4966, 2009.
- [49] Ricci A. J., Crawford A. C., Fettiplace R., "Mechanisms of Active Hair Bundle Motion in Auditory Hair Cells", *The Journal of Neuroscience*, Vol. 22, No. 1, pp. 44-52, Print ISSN: 0270-6474, Online ISSN: 1529-2401, 2002.
- [50] Bathe K. J., *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [51] Higham N., "Accuracy and Stability of Numerical Algorithms", second edition, SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, ISBN-13: 978-0898715217, 2002.
- [52] Max A. Woodbury, *Inverting modified matrices*, Memorandum Rept. 42, Statistical Research Group, Princeton University, Princeton, NJ, 1950, 4pp.
- [53] Ayat M. and Teal P. D., "Modelling the Generation of the Cochlear Microphonic", 35th Annual International Conference of the IEEE EMBS, Osaka, Japan, 3-7 July, 2013.
- [54] Santarelli R., Scimemi P., Arslan E., "Cochlear microphonic potential recorded by transtympanic electrocochleography in normally-hearing and hearing-impaired ears", *Acta Otorhinolaryngologica Italica*, Vol. 26, No. 2, pp. 78-95, 2006.
- [55] Fetterman B., "Distortion-Product Otoacoustic Emissions and Cochlear Microphonics: Relationships in Patients with and without Endolymphatic Hydrops", *The Laryngoscope*, Vol. 111, No. 6, pp. 946-954, 2001.
- [56] Békésy G. V., "The Variation of Phase along the Basilar Membrane with Sinusoidal Vibrations", *The Journal of the Acoustical Society of America* 19, 452-460, 1947.
- [57] Greenwood D. D., "A cochlear frequency-position function for several species – 29 years later", *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 87, p. 2592-2605, 1990.
- [58] Dalatri L., Marchese M. R., "The speech range profile (SRP): an easy and useful tool to assess vocal limits", *Acta Otorhinolaryngol Ital.*, Vol. 34, No. 4, pp. 253-258, 2014.
- [59] Dingle R. B., "Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation", Academic Press, ISBN-13: 978-0122165504, 1973.

- [60] Steele C. R. and Taber L. A., "Comparison of WKB calculations and experimental results for three-dimensional cochlear models", *The Journal of the Acoustical Society of America*, Volume 65, Issue 4, pp. 1007-1018, 1979.
- [61] de Boer E., Viergever M. A., "Validity of the Liouville-Green (or WKB) method for cochlear mechanics", *Hearing Research*, Vol. 8, No. 2, pp. 131-155, 1982.
- [62] Lee H. Y., Raphael P. D., Park J., Ellerbee A. K., Applegate B. E., Oghalai J. S., "Noninvasive in vivo imaging reveals differences between tectorial membrane and basilar membrane traveling waves in the mouse cochlea", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 112, No. 10, pp. 3128-3133, 2015.
- [63] Dallos P., "The Active Cochlea". *J. Neurosci.*, Vol. 12, No. 12, pp. 4575-4585, 1992.
- [64] Shakeel M., Spielmann P. M., Jones S. E., Hussain S. S. M., "Direct measurement of the round window niche dimensions using a 3-dimensional moulding technique – a human cadaveric temporal bone study", *Clinical Otolaryngology*, Vol. 40, No. 6, pp. 657-661, 2015.
- [65] Cohen D., Blinder G., Perez R., Raveh D., "Standardized Computed Tomographic Imaging and Dimensions of the Round-Window Niche", *International Tinnitus Journal*, Vol. 11, No. 2, pp. 158-162, 2005.
- [66] Zoua J., Lähelmäc J., Arnisalod A., Pyykköb I., "Clinically relevant human temporal bone measurements using novel high-resolution cone-beam CT", *Journal of Otology*, Vol. 12, No. 1, pp. 9-17, 2017.
- [67] Chan L. L., Manolidis S., Taber K. H., Hayman A., "In Vivo Measurements of Temporal Bone on Reconstructed Clinical High-Resolution Computed Tomography Scans", *The Laryngoscope*, Vol. 110, No. 8, pp. 1375-1378, 2000.
- [68] Böhnke F., Semmelbauer S. and Marquardt T., "Influence of Young's moduli in 3D fluid-structure coupled models of the human cochlea", *Proceedings of the 12<sup>th</sup> International Mechanics of Hearing Workshop*, Cape Sounio, Greece, 2014.
- [69] Eze N., Olson E. S., "Basilar Membrane Velocity in a Cochlea with a Modified Organ of Corti", *Biophys. J.*, Vol. 100, No. 4, pp. 858-867, 2011.
- [70] Kim J., Koo M., "Mass and Stiffness Impact on the Middle Ear and the Cochlear Partition", *Journal of Audiology and Otology*, Vol. 19, No. 1, pp. 1-6, 2015.

[71] Raphael Y., "Cochlear pathology, sensory cell death and regeneration", Br Med Bull, Vol. 63, No. 1, pp. 25-38, 2002.

[72] Rhode W. S., Recio A., "Basilar-membrane response to multicomponent stimuli in chinchilla", The Journal of Acoustical Society of America, Vol. 110, No. 2, pp. 981-994, 2001.

[73] Maoiléidigh D. O., Hudspeth A. J., "Effects of cochlear loading on the motility of active outer hair cells", Proc Natl Acad Sci U S A., Vol. 110, No. 14, pp. 5474-5479, 2013.