UNIVERZITET U BEOGRADU
MAŠINSKI FAKULTET

Aleksandra M. Jovanović

DINAMIKA POSEBNIH KLASA SISTEMA SA KAŠNJENJEM NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU

Doktorska disertacija

Beograd, 2016

University of Belgrade
Faculty of Mechanical Engineering

Aleksandra M. Jovanović

DYNAMIC OF PARTICULAR CLASSES OF TIME–DELAY SYSTEMS DEFINED OVER FINITE TIME INTERVAL

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016

Белградский университет
Факультет машиностроения

Aleksandra M. Jovanović

ДИНАМИКА ОСОБЕННЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ

докторская диссертация

Белград,2016

Komisija za pregled, ocenu i odbranu doktorskog rada

Mentor: **prof. dr Dragutin Lj. Debeljković**, redovni profesor, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

prof. dr Sreten B. Stojanović, redovni profesor,Tehnološki fakultet u Leskovcu, Univerzitet u Nišu

Članovi komisije:

prof. dr Dragutin Lj. Debeljković, redovni profesor, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

prof. dr Sreten B. Stojanović, redovni profesor,Tehnološki fakultet u Leskovcu, Univerzitet u Nišu

prof. dr Mihajlo P. Lazarević, redovni profesor, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

Datum odbrane:

Apstrakt

U ovoj doktorskoj disertaciji su razmatrani problemi dinamičke analize posebnih klasa sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, kao i njihovo ponašanje na konačnom.

U uvodnom delu akcenat izlaganja stavljen je na proučavanje suštinskih osobina singularnih sistema, sistema sa kašnjenjem i singularnih sistema sa kašnjenje, kao i na njihove diskretene analogane.

U tom smislu razmatrana su pitanja koja se tiču egzistencije i jedinstvenosti rešenja, problema impulsnih ponašanja i konzistentnih početnih uslova, kauzalnosti i funkcija početnih uslova razmatranog sistema.

Detaljan pregled do sada postignutih rezultata na polju izučavanja neljapunovske stabilnosti oličene u konceptu stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i praktične stabilnosti na ove klase sisteme, iscrpno je dat u odgovarajućem poglavlju.

Disertacija je prvenstveno posvećena osnovnom pianju koje je vezano za teoriju a posebno za primenu automatskog upravljanja u praksi, tj. za pitanje stabilnosti u tzv. neljapunovskom smislu, a to pitanje je bilo rešavano sa dva stanovišta: metode koji koristi deskriptivni prilaz i postupke koji se zasnivaju na primeni klasičnih algebarskih matričnih nejednakosti (Jensenova i Kopelova nejednačina), imajući u vidu da poslednje pomenuti prilaz redukuje probleme upravljanja na rešavanje jednostavnih algebarskih nejednačina, koje se lako sprovode standardnim numeričkim procedurama, a oba prilaza vode ka samo dovoljnim uslovima stabilnosti primenjenog koncepta, što je sasvim prihvatljivo sa inženjerske tačke gledišta.

U prvom slučaju, za izvođenje dovoljnih uslova stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, korišćene su funkcionali tipa Ljapunov-Krsovski.

Za razliku od nekih ranijih rezultata, ovi funkcionali ne moraju da zadovoljavaju neke stroge matematičke uslove, kao što je pozitivna određeneost u celom prostoru stanja, kao i da ne poseduju negativnu određenost njihovih izvoda duž kretanja sistema.

U svim slučajevima od interesa, numeričkim primerima datim u ovoj disertaciji, dodatno je potvrđena primena predloženih novih metodologija, kao i analitičko sračunavanje i iznalaženje uslova stabilnosti.

Konačno, utvrđeno je da su izvedeni dovoljni uslovi manje restriktivni u poređenju sa ranije izvedenim rezultatima.

Analogni zaključci mogu se izvesti i za rezultate dobijene na polju izučavanja praktične stabilnosti.

Još neki manje značajni doprinosi pruženi su u sferi proučavanja osobina robusnosti sistema i njihove stabilizacije.

Autor

Ključne reči: Singularni sistemi, deskriptivni sistemi, sistemi sa kašnjenjem, vremenski kontinualni i diskretni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem, stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, praktična stabilnost, atraktivna praktična stabilnost

Naučna oblast: Mašinstvo

Uža naučna oblast: Automatsko upravljanje

UDK broj:

Abstract

In this doctoral thesis the problems of dynamical analysis of particular class of control time delay systems were considered, as well as their behavior on finite and time intervals.

Following the introduction disscusion emphasis has been put on the peculiar properties of singular, time delay and singular time delay systems, as well as on theirs discrete counterparts.

In that sense the questions, concerning the existence and uniqueness of the solutions, the problems of impulsive behavior, consistent initial conditions, causality and functions of initial conditions of the system itself.

On overview of the modern stability frameworks has been presented, starting from the so called non-Lyapunov concepts: finite time stability and practical stability in particular.

A historical overview of ideas, concepts and results has been presented and the key contributions have been highlighted through key papers from the modern literature.

This dissertation is mostly dedicated to the main question of control engineering, eg., to the question of stabilitly in Non-Lyapunov sense, two main lines of research were established: the qvasy descriptive methodology and the approach based on classical matrix algebraic inequalites (Jensen's and Coppel inequality), the latter being known to reduce control tasks to simple algebraic conditions easily solvable by numerical computation, in both casses leading to the sufficient stability conditions, only, what is more than acceptable for the engineering point ov view.

In the first case for the derivation of the finite time stability sufficient conditions, the Lyapunov-Krassovski functionals were used.

Unlike in the previously reported results, the functionals did not have to satisfy some strict mathematical conditions, such as positivity in the whole state space and possession of the negative derivatives along the system state trajectories.

In all cases, of interest, the numerical examples presented in this study additionally clarified the implementation of the new methodologies, and the calculations and analitical determination of the stability conditions.

Finally, it was found that the proposed sufficient conditions were less restrictive compared to the ones previously reported.

The analogous results have been derived for practical stability.

Some others contributions has been given through some disscussion of concept of stability robustness and stabilization procedure.

Author

Key words: Singular systems, descriptor systems, time delay systems, continuous and discrete singular (descriptor) time-delay systems, finite time stability, practical stability, attractive practical stability

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Automatic control engineering

UDC number:

Абстракт

В этой докторской диссертации рассмотрены проблемы динамического анализа особенных классов систем с чистым временным запаздыванием как и их поведение на конечном временском интервале.

В вводной части акцент сообщения поставлен на изучение основных особенностей сингулярных систем, системы с запаздыванием и сингулярных систем с запаздыванием, как и на их дискретных аналогах.

В этом ключе рассмотрены вопросы которые касаются существования и единствености решения, проблемы импульсного поведения и конзистентных начальных условий, каузуальности и функции начальных условий рассмотреной системы.

Детальный обзор до настоящего времени достигнутых результатаов на поле изучения нельяпуновской устойчивость воспроизведеных в концепте устойчивость на конечном временском интервале и практической стабильности в этом классе систем, подробно дат в соответствующей главе.

Диссертация, во-первых, посвещена основному вопросы связанному с теорией, а во-вторых, применению автоматического управления на практике, то есть вопросу устойчивость в такозваном нельяпуновском смыслу и этот вопрос решался двояко: методом который использует дескриптивный подход и поступак который основывается на применении классических алгебарских матричных неравенств (Женсенпово и Копелово неравенство), имея ввиду что последний упомянутый подход упрощает проблему управления при решении простых алгебарских неравенств, которые легко обрабатываются стандартными числовыми процедурами, а оба подхода приводят к самодостаточным условиям устойчивость применённого концепта, что совсем в согласии с инженерной позицией.

В начале, для выведения довольных условий устойчивость на конечном временском интервале, использованы функционалы типа Ляпунов – Красовский.

В отлични от некоторых ранних результатов, эти функционалы не должны удовлетворять некоторые строгие математические условия как, например, позитивная определённость в целом пространстве состояниа, также как и не имеют негативную определённость их выведений по траектории движения системы.

В этих случаях, которые нас интересуют, числовыми примерами данными в этой диссертации дополнительно подтверждено применение предложенных новых методологий, как и аналитический расчёт и нахождение условий устойчивость.

Наконец, утверждено что изведённые довольные условия меньше рестрективны в сравнении с ранее выведенными результатами.

Аналогичные заключения можно вывести и для результатов полученных на поле изучения практической стабильности.

Ещё некоторые менее значительные вклады предложены и в сфере изучения особеностей робусности системы и её стабилизации.

Автор

Ключевые слова: сингулярные системы, дескриптивные системы, системы с запаздыванием, временные континуиранные и дискретные системы с чистым временским запаздыванием, устойчивость на конечном временном интервале, практическая устойчивость, атрактивная практическая устойчивость.

Научная область: Машинство

Уская научная область: Автоматическое управление

UDC:

PREDGOVOR

Treba primetiti da je u nekim sistemima potrebno uzeti u obzir karakter njihovog dinamičkog i statičkog ponašanja u isto vreme.

Singularni sistemi (takođe, poznati i kao degenerativni, deskriptivni, generalizovani, opisani diferencijalno- algebarskim jednačinama ili sistemi sa polu - stanjem) su oni sistemi čija je dinamika pokrivena kombinacijom algebarskih i diferencijalnih jednačina i u tom smislu odgovaraju prethodno pomenutim potrebama.

Već dugi niz godina brojni naučnici su sa puno pažnje proučavali i bavili se singularnim sistemima. Kompleksna priroda singularnih sistema prouzrokuje mnoge poteškoće u analitičkom i numeričkom tretmanu istih, posebno kada postoji potreba za njihovim upravljanjem.

Oni, takođe, nastaju prirodno kao linearna aproksimacija modela sistema u mnogim aplikacijama kao što su: električne mreže, dinamika aviona, hemijski, termički i difuzioni procesi, veliki sistemi, povezani sistemi, ekonomija, optimizacioni problemi sistemi sa povratnom spregom, roboti, demografija, biologija, itd

Problem istraživanja sistema sa kašnjenjem, takođe, je eksploatisan tokom mnogih decenija.

Vremensko kašnjenje se vrlo često susreće u raznim tehničkim sistemima, kao što su električni, pneumatski i hidraulični vodovi, hemijskim procesima, duge dalekovode, itd. Postojanje čistog vremenski sa ostatkom, bez obzira da li je prisutno u upravljanju i / ili stanju, može izazvati nekvalitetne prelazne procese pa čak nestabilnost.

Prema tome, problem analize stabilnosti ove klase sistema je jedan od glavnih interesa za mnoge istraživače.

U principu, prisustvo fenomena kašnjenja čini njihovu analizu mnogo komplikovanijom.

Mora se naglasiti da postoji izvestan broj sistema koji imaju fenomen vremenskog kašnjenja i singularnost, u iskazanom smislu, koji se moraju razmatrati jednovremeno.

Ovi sistemi imaju mnoga specifična svojstava. Ako želimo da ih tačno opišemo, da ih preciznije projektujemo i da njima efikasnije upravljamo, moramo im posvetiti dužnu pažnju prvenstveno pri modeliranju, a kasnije kroz analizu i sintezu.

Kada su u pitanju sistemi sa kašnjenjem uopšte, u postojećim kriterijumima stabilnosti, uglavnom su usvojeni na dva načina pristupa.

Naime, jedan pravac razmatra stabilnosti kada iznos čistog vremenskog kašnjenja nije uključen u formulisani kriterijum stabilnosti, a drugi prilaz gde je ta informacija uključena i egzistira.

Prvi slučaj se odnosi na tzv. kriterijume nezavisne od kašnjenja a drugi zavisne od kašnjenja. U prvom slučaju dobijaju se dovoljni uslovi stabilnosti u vidu prostih algebarskih nejednačina a u drugom nešto složeniji ali i kvalitetniji, s obzirom da uključuju informaciju o čistom vremenskom kašnjenju.

Praktična pitanja zahtevaju da se koncentrišemo ne samo na stabilnost sistema (na primer u smislu Liapunova), već i u granice do kojih doszu trajektorije sistema pri njegovom kretanju u integralnom prostoru.

Sistem bi mogao biti stabilan, ali i dalje potpuno beskoristan jer poseduje nepoželjne dinamičke performanse. Tada, može biti korisno razmatriti stabilnost sistema u odnosu na date skupove, kao početnih tako i dozvoljenih stanja sistema, pa i izlaza ako treba.

Osim toga, od posebnog značaja je ponašanje dinamičkih sistema posmatranih samo na ograničenom vremenskom intervalu.

Ovi svojstva ograničenosti kretanja sistema bilo u slobodnom bilo u prinudnom radnom režimu veoma su važna sa inženjerske tačke gledišta.

Shvatajući ovu činjenicu, uvedene su brojne definicije tzv. tehničke i praktične stabilnosti. Grubo rečeno, ove definicije se u suštini zasnivaju na unapred definisanim granicama perturbacije početnih uslova i dozvoljenh perturbacijom kretanja ili odziva sistema.

To je doprinelo da ova doktorska disertacija istražuje neke korisne ideje u okviru koncepta neljapunovske stabilnosti određenih klasa sistema sa kašnjenjem.

Vezano za singularne ili deskriptivne sisteme, geometrijska teorija konzistentnosti dovodi do prirodne klase pozitivnih određenih kvadratnih formi na potprostoru konzistentnih stanja koja sadrži sva rešenja. Ova činjenica omogućava formiranje teorije neljapunovske stabilnosti za sve klase sistema.

Kada uzmemo u obzir koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, dovoljni uslovi su izvedeni korišćenjem pristupa na osnovu kvazi - Ljapunovljevih funkcija i njihovih osobina na podprostoru konzistentnih i dopustivih početnih uslova i početnih funkcija. Ove funkcije ne moraju da imaju svojstva pozitivne određenosti u celom prostoru stanja, niti negativnu određenost njihovih izvoda duž trajektorija sistema koji se razmatra.

Sve je to daleko složenije kada su u pitanju nelinearni sistemi, što ovde nije bio predmet razmatranja.

Kada je praktičana atraktivna stabilnost u pitanju, kombinuju se klasična Ljapunovljeva tehnika koja garantuje atraktivnost, sa kriterijumima koji obezbeđuju stabilnost na konačnom vremenskom intervalu.

Imajući u vidu da su u oba slučaja, do sada, uglanom obezbeđeni samo dovoljni uslovi, jasno je da je predmet ove disertacije bilo njihovo unapređenje i poboljšanje što se i u velikoj meri postiglo novim tehnikama ili revizijom starih, nadograđenih originalnim idejama, prvenstveno na planu majorizacija i minorizacija, kada su iste bile prisutne u dokazima originalno formulisanih teorema.

Autor izražava duboku i neizmernu zahvalnost mentoru Dr Dragutinu Lj. Debeljkoviću , profesoru Mašinskog fakulteta, Univerziteta u Beogradu, za ideje pri realizaciji doktorske disertacije i za niz sugestija koje su doprinele njenom kvalitetu.

Posebnu zahvalnost prema profesoru Debeljkoviću, autor disertacije duguje zbog već dugogodišnje saradnje i neprekidne i nesebične podrške u akademskim izazovima.

Neosporna je i činjenica da je veliki deo ove doktorske disertacije bio inspirisan naučnim doprinosima mojih mentora Dr Dragutina Lj . Debeljkovića, redovnog profesora Mašinskog fakulteat, Univerziteta u Beogradu i Dr Sretena B. Stojanovića, redovnog profesora Tehnološkog fakulteatu Leskovcu, Univerziteta u Nišu, objavljenih tokom poslednjih desetak godina i autor ove doktorske disertacije im ovim povodom izražava posebnu zahvalnost .

Autor

SADRŽAJ:

OPŠTA RAZMATRANJA

I. OPŠTI DEO

1. UVODNA RAZMATRANJA

Snažna motivacija, za redove koji slede, proističe iz brojnih radova i monografija grupe naučnika, okupljenih oko prof. D. Lj. Debeljkovića, koji zajedno sa njim već više od dvadestpet godina permanentno daju značajne doprinose razvoju kako ljapunovskog tako i neljapunovskog koncepta stabilnosti.

Linearni sistemi su oduvek privlačili pažnju naučne i stručne javnosti i taj interes postoji i dan danas i zaokuplja sve tehničke discipline podržan snažnim matematičkim aparatom osnovanim na odabranim poglavljima linearne algebre, operatorskog računa i teorije diferencijalnih jednačina, sa i bez pomerenog argumenta, što im neosporno daje veliki značaj, pa je samim tim prirodno da se još jednom nađu u stvarnoj žiži interesovanja, a sa nekih drugih aspekta njihovog dinamičkog delovanja i ponašanja.

Valja posebno istaći i činjenicu, da iako predstavljaju najveću idealizaciju i ako je mnogo toga pozitivno rešeno, linearni sistemi i dan danas zaokupljuju pažnju naučnika i predstavljaju izazov u pokušajima da se stvore nove metode, koncepti i rešenja ili da se, pak, sve postojeće poznato proširi na neke nove klase linearnih sistema koje, kao pečurke, niču iz dana u dan.

Ova klasa sistema, u najširem smislu te reči, biće predmet ove doktorske disertacije, sa snažnom fluktuacijom ka nekim njenim posebnim klasama, o čemu daleko više biti reči u esencijalnim poglavljima.

U aktuelnoj teoriji sistema automatskog upravljanja usvojeni su i eksploatišu se različiti koncepti stabilnosti, kao na primer: stabilnost u smislu Ljapunova, stabilnost na konačnom vremnskom intervalu, orbitalna stabilnost, eksponecijalna stabilnost, praktična asimptotska stabilnost, tehnička stabilnost i BIBO stabilnost itd., od kojih se, u prvom redu, očekuje da odgovore na veliki broj suštinski različitih pitanja po pitanju dinamičkih karateristika razamatranih sistema, što uključuje osobine prelaznih procesa, osobine upravljivosti i osmotrivosti, kao i pitanja osetljivosti i robusnosti, a posve jasno stabilnosti u duhu usvojenog koncepta.

Valja napomenuti, da pre ovih značajnih pitanja u mnogim prilikama treba pre toga raščistiti i sa nekim fundamentalnim pitanjima kao što je egzistencija i jedinstvenost rešenja datog sistema diferencijalnih jednačina, razmotriti kako su formulisane definicije koje izražavaju izabrani koncept, kao i iznaći odgovarajuće uslove stabilnosti za date klase sistema od interesa, posebno formirajući prikladne kriterijume koji omogućavaju da se efikasno odgovori na pitanja osobina stabilnosti, a bez rešavanje diferencijalnih jednačina kretanja.

Na taj način, dolazi se do potrebne platforme i pozicija sa kojih je moguće efikasno analizirati dinamičko ponašanje razmatranih sistema sa željenog aspekta.

Jasno je da se, korišćenjem odgovarajućih kriterijuma, mogu dobiti odgovori po pitanju različitih koncepata stabilnosti razmatranih sistema i bez rešavanja njihovih diferencijalnih jednačina kretanja, čime se postiže pun analitički efekat.

Kvalitetan rad savremenih sistema automatskog upravljanja, pored dobro poznate osobine stabilnosti i obezbeđivanje visokih kvaliteta pokazatelja dinamičkog ponašanja, zahteva i primereno ispunjavanje osobine osetljivosti ali i robusnosti, pri čemu je ovoj drugoj osobini u poslednjih nekoliko decenija daje daleko veći značaj.

I dok se u sferi *osetljivosti* razmatra uticaj malih promena parametara unutar razmatranog sistema na ponašanje njegovih izlaznih veličina *robusnost* dozvoljava i velike promene, a unosi i centralno pitanje kako te promene utiču na očuvanje vitalnih ososbina sistema uprkos neizvesnosti u modelima na kojima se vrši analiza aktuelnih sistema i mogućih perturbacija, koje mogu biti kako strukturne tako i nestrukturne.

Sva dosadašnja izlaganja bila su, očigledno, metodološki vezana za analzu sistema, kao instituciju koja podrazumeva primenu postupaka, metoda i različitih kriterijuma za utvrđivanje objektivnih osobina objekata, procesa, upravljačkih sistema i sistema u celini.

Fenomen *povratne sprege* leži u srcu *sinteze* ili *projektovanja* sistema automatskog upravljanja.

I dok se, u prvom slučaju, projektant zadovoljava samo matematičkim rešenjem postavljenog zadatka, birajući pri tome baziĉnu metodu i domen u kome će se sprovovesti usvojeni postupak, *projektovanje* podrazumeva i zavšnu fazu sinteze, a to je praktična impementacija dobijenog rezultata u praksi.

Dobro je poznato da su mnogi značjni rezulatai teorije automatskog upravljanja, recimo čuvena Viner Hopfova jednačina, morali kasnije da budu značajno dopunjeni kako bi se zadovoljili uslovi fizičke ostvarljivosti, tako dobijenog rešenja i slično.

U tom smilsu projektovanje predstavlja krunu postupaka sinteze i praktičnu aplikaciju istih za potrebe rada realnih sistema.

Ako se ponovo vratimo konceptu upravljanja u zatvorenom kolu dejstva, jasno da se isti koristi za preobličavanje dinamike polaznog (baznog sistema, sistema u otvorenom kolu dejstva) sistema prema novopostaljenim, često oprečnim, zahtevima najčešće uperenim prema ispunjavanju realtivne stabilnosti sistema, njegove brzine reagovanja ili čak postizanju željene tačnosti rada u stacionarnim radnim režimima.

Mimo toga efikasnost postojanja ili uvođenja *povratne sprege* omogućava efikasno rešenje problema *praćenja*, smanjenja *osetljivosti* sistema u celini na *delovanje poremećaja* i *šumova*, kao i delotvorno umanjenje ili otklanjanje neizvesnosti prisutnih u referentnim modelima.

Prethodna razmatrnja, nedvosmisleno otvaraju problem tzv., *stabilizacije* sistema, koja je već odavno snažan i neotuđiv alat u rukama projektanata.

Naime, dobro je poznato da se metodama podešavanja polova, u uslovima kada je sistem u otvrenom kolu upravljiv, ili barem upravljim po spornim veličina stanja,može izvršiti željena prelokacija sopstevnih vrednosti matrice sistema i time postići zadovoljavajuće ponašanje.

Korišćenje statičkih i dinamičkih uskladnika lociranih u povratnim spregama buduće sintetizovanih sistema, ili po veličinama stanja ili po izlaznim veličinama imaju prednosti, a i nedostatke.

U svakom slučaju stabilizacija je danas nezabilazan način u sintezi sistema, a u istoj meri se može koristiti za različite koncepte stabilnosti, a i krajnje divergentne zahteve.

Ako se uz sve ovo, zahteva da buduće sintetizovani sistem poseduje takve osobine da nominalni sistem očuva i dalje neke svoje eminentne osbine u prisustvu poremećaja ili raznih neodređenosti govori se o *robusnoj stabilizaciji.*

Koncept izlaganja u ovoj *doktorskoj disertaciji*, zamišljen je i sproveden tako da se prvo razmotre sve klase sistema od interesa i da se, pri tome, izlože i apostrofitraju nihove najznačajnije osobine, prouče i izlože neki osnovni koncepti stabilnosti, da se osvetle neka osnovna pitanja robusnosti fundamentalnih osobina sistema, prouče i prezentuju neke metode stabilizacije sistema korišćenjem koncepta upravljanja u zatvorenom kolu dejstva, kao i da se svuda gde god je to potrebo da kraća i selektivna rekapitulacija najznačajnih rezultata vezanih za tematska poglavlja ove disertacije.

Dalja izlaganja, prezentuje idejnu skicu budućeg doktorata kako morfološki tako i fenomenološki a u dogovoru sa mentorima disrtacije.

Nastavak izlaganja daje uvid u već objavljene radove sa njihovom detaljnom prezentacijom i diskusijom rezultata.

Završni deo disertacije, odnosi sa na nastavak mogućih istraživanja, koja se planiraju, započete teme i predikciju mogućih doprinosa kako na poljima različitih klasa ovde razmntanih sistema, tako i na planu dobijanja kvalitetnijh uslova stabilnosti, koji će obuhvatiti kako kriterijume koji uzimaju u obzir iznos čistog vremnskog kašnjenja tako i na one druge gde se taj iznos ne pominje.

To sve zahteva značjne napore kako bi budući doprinosi dali rezulate koji su manje konzervativni, od postojećih, imajući u vidu da je reč o samo dovoljnim uslovima stabilnosti.
Kao moguča kruna svih tih istraživanja, bili bi odgovarajući i potrebni i dovoljni uslovi predmetnih koncepata stabilnosti, imajući u vidu da je takvih, barem dosada veoma malo.

Numeričkim primerima, testirajući samo školske primere, treba potvrditi ispravnost buduće dobijenih rezulata.

Okosnoca ove doktorske disertacije počiva na savremenoj teoriji upravljanja i razrešava niz veoma složenih i ozbiljnih pitanja neljapunovske stabilnosti, posebnih klasa, sistema automatskog upravljanja
U tom smislu izloženi su detaljno i neki zajednički radovi mentora ove doktorske disertacije i drugih osvedočenih autoriteta iz ove oblasti, kao i izvestan broj koautoskih radova autora ove disertacije kao novog doprinosa uvek aktuelnoj i atraktivnoj oblasti savremene teorije upravljanja i stabilnosti.

Literatura

D. Lj. Debeljković, **Time Delay Control Systems,** GIP Kultura Belgrade 1994.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, **Continuous Singular Control Systems,** GIP Kultura, Belgrade, 1996.

D. Lj. Debeljkovic, S. A .Milinkovic, M. B. Jovanovic, **Application of singular system theory in chemical engineering: Analysis of process dynamics**, Monograph, 12 th International Congress of Chemical and Process Eng., CHISA 96, Prague (Czech Republic), 25 - 30 August, 1996, Process Eng. Publishing, **1977.**

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, **Discrete Singular Control Systems,** GIP Kultura, Belgrade, 1998.

D. Lj. Debeljkovic , S. A. Milinkovic, **Finite Time Stabilty of Time Delay Systems,** GIP Kultura, Belgrade, 1999.

M. P. Lazarevic, **D. Lj. Debeljkovic**, D. Krstic, **Optimal Control of Time Delay Sytems in Industrial Processes ,** Cigoja press, Belgrade, 2003.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, **Continuous Singular Systems,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, Lj. A. Jacic, **Discrete Descriptor Systems,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, S. B. Stojanovic, **Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval,** Cigoja press, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, A. Lj. Jacic, M. Medenica **Time Delay Systems: Stabilty and Robustness,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, **Linear System Design: Pole Placement Methods,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, N. S. Visnjic, **Linear Singular Systems: Pole Placement Methods and Observer Design** Mechanical Faculty, Belgrade, 2006.

D. Lj. Debeljkovic, I. M. Buzurovic, **Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: A Geometric Approach,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2007.

D. Lj. Debeljkovic, **Linear System Design: Pole Placement Methods Part II**,Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2007.

Pjescic, R M., V. Chistyakov, **D. Lj. Debeljkovic**, **On Dynamical Analysis of Particular Class of Linear Singular Time Delayed Systems: Stabilty and Robusteness,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2008.

D. Lj. Debeljkovic, **Linear System Design: Pole Placement Methods Part III**,Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2008.

D. Lj. Debeljkovic, **Stability of Control Systems over Infinite Time Interval,**Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2009.

I. M. Buzurovic, **D. Lj. Debeljkovic**, **Geometric Approach and Dynamical Behavior Study for Particular Class of Linear Singular Systems with Application in Medicine,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2009.

D. Lj. Debeljkovic, **Linear Singular Systems with Time Delay: Stabilty, Robustness, Stabilizability and robustness stabilizability,Part I**,Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010.

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, **Stabilty of Particular Classes of Linear Control Systems over Finite and Infinite Time Interval,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010.

D. Lj. Debeljkovic- Editior, *Time Delay Systems, I–Tech*, Vienna, (Austria), **. 2011**

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, **Systems, Structure and Control - Editior** Petr Husek, **– C**hapter : *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach*, I – Tech, Vienna, ISBN 978-7619-05-3**, 2008**, pp. 029 – 060.

D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, **Time Delay Systems**, **-** Chapter **2 :** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval, *I–Tech*, Vienna, (Austria), pp.15 – 30, **2011**.a.

D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, **Time Delay Systems**, - Chapter **3 :** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems", *I–Tech*, Vienna, (Austria), pp. 31 – 74, **2011.**b.

D. Lj. Debeljkovic, M. S. Aleksendric , N. J. Dimitrijevic, **ContemporaryTheory of Multi Input - Multi Output Linear Control Systems**,Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, **Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: Impulsive behaviour, generalized inverses, stabilization, regularization, optimization and applications**,Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, D. N. Popov, **Contemporary Methods for Linear Systems Design**, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, **Stabilty of Automatic Control Systems over Finite and Infinite Time Interval,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, M. P. Lazarevic **Dynamics of Continuous Linear Singular Control Systems,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2012.

D. Lj. Debeljkovic, N. J. Dimitrijevic, **Linear System Design: Pole Placement Methods Part IV**,Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2012.

II.OPŠTE OSOBINE KLASE RAZMATRANIH SISTEMA

2. LINEARNI SINGULARNO – DESKRIPTIVNI SISTEMI

2.1 VREMENSKI KONTINUALNI UOPŠTENI SISTEMI U PROSTORU STANJA

Već više od dve pune decenije *singularni* sistemi privlače pažnju naučne i stručne javnosti širom sveta.

Njihovo prisustvo u svim granama tehnike i u pojedinim oblastima društvenih nauka više je nego evidentno, što obavezuje da im se sa svih mogućih aspekata proučavanja posveti dužna pažnja.

U matematičkom smislu ovi sistemi su predstavljeni tipičnom kombinacijom diferencijalnih i algebarskih jednačina, pri čemu ove druge predstavljaju ograničenje koje treba ispuniti pri rešavanju onih prvih.

Imajući to u vidu, sasvim je jasno da je odgovarajuće poznavanje linearne algebre, funkcionalne analize i teorije sistema neophodno za shavtanje i kvalitetno objašnjenje generisanih rezultata.

Sa te platforme istraživanja prisutno je više različitih pristupa za izučavanja dinamičkih osobina sistema automatskog upravljanja.

Reč je tada ili o analitičkom pristupu, numeričkom ili kvantitativnom prilazu (analizi), a neki drugi autori nameću podele sa stanovišta geometrijskog gledišta ili klasične algebre.

Za izlaganja koja su ovde od interesa, može se matematički model u prostoru stanja ovih sistema zapisati u sledećom obliku:

$$\begin{aligned} E\big((\cdot)\big)\dot{\mathbf{x}}(t) &= A_0\mathbf{x}(t) + B_0\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}_i(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{aligned}, \tag{2.1}$$

gde su date matrice saglasnih dimenzija, pri čemu je kvadratna matrica E obavezno nepotpunog ranga, odnosno *singularna.*

Ovde je iznet model za prinudni radni režim.

Poredeći sa tzv. “klasičnim” sistemima, koji su daleko brojniji u odnosu na ovde proučavane, brojni rezultati i konkretne aplikacije su pokazali da ovako dobijeni verodostojni modeli imaju znatne prednosti, kao što su:

- Zadržavanje osnovnih fizičkih svojstava u modelu;
- Prisnu vezu sa stvarnim fizičkim varijablama stanja sistema i, u izvesnom smislu, bolje prikazivanje strukture razmatranog sistema ili procesa;
- Ne zahtevaju eliminaciju spregnuto promenljivih varijabli, što je i praktično nemoguće u nelinearnim slučajevima;
- Ispisivanje bilansnih i drugih jednačina daleko je egzaktnije, sa posebnom mogućnošću da su iste iskazane kroz stvarne fizičke varijable;

- Matrice koje figurišu u ovim matematičkim modelima, po pravilu su “šuplje”, što znatno uprošćava matematičke postupke u onim prilikama kada su iste neophodne.

Imajući u vidu da su uopšteni sistemi u prostoru stanja iskazani spregom algebro-diferencijalnih jednačina, ispoljava čitav niz specifičnosti i karakteristika koje ih suštinski diferenciraju u odnosu na tzv. “klasične” sisteme.

U tom smislu, razmatranja postojanja, jedinstvenosti i formi njihovih rešenja iskazuju bazična pitanja, na koja treba uopšteno dati pozitivne odgovore, a sve sa aspekta postavljenih zadataka ispitivanja sistema u celini.

Mimo toga, postojanje impulsnih članova i vremenskih derivativa ulaznih varijabli u trajektorijama uopštenih sistema u prostoru stanja, kao i moguća nesvojstvenost matrice prenosa i neuzročnost između ulaznih varijabli i varijabli stanja i varijabli izlaza, čine ih posebno karakterističnim, a samim tim i interesantnijim sa gledišta.

Valja istaći da bazična rešenja tih problema na nalaze u integralnom prostoru stanja, već da ih valja prepoznati u nekom njegovom potskupu.

Vremenski kontinualni uopšteni sistemi u prostoru stanja se prirodno pojavljuju u mnogim tehničkim oblastima i problemima, kao što su električna, elektro - magnetna kola, u dinamici vazduhoplova i manipulatora i kompleksnim termoenergetskim procesima, u problemima ekstremnih upravljanja i klasične i savremene optimizacije, a takođe i u biološkim procesima, ekonomiji, demografiji i kao periferni primer singularno perturbovanih sistema, *Debeljković et al* (2006).

2.2 VREMENSKI DISKRETNI DESKRIPTIVNI SISTEMI

U matematičkom smislu ovi sistemi su predstavljeni spregom diferencnih i algebarskih jednačina, pri čemu ove druge predstavljaju ograničenje koje treba zadovoljiti pri rešavanju onih prvih, *Debeljković et al* (2006).

Sama činjenica da su deskriptivni sistemi iskazani spregom algebro-diferencnih jednačina, povlači za sobom niz specifičnosti i osobenosti koje ih jasno izdvajaju i razlikuju u odnosu na tzv. “normalne” sisteme.

U tom smislu, razmatranja postojanja, jedinstvenosti i struktura njihovih rešenja predstavljaju osnovna pitanja, na koja treba uopšteno odgovoriti, a u svetlu postavljenih istraživanja.

Mimo toga, moguća nesvojstvenost matrice prenosa i pitanje globalne fizičke ostvarljivosti u svetlu nekauzalnost između ulaznih varijabli i varijabli stanja i veličina izlaza, čine ih još više osobenim.

Očigledno je da u slučaju vremenski diskretnih uopštenih sistema u prostoru stanja, koncept neprekidnosti ima mnogo manji značaj, ali ideja saglasnih početnih uslova $\mathbf{x}_0$, koji stvaraju niz rešenja $\left(\mathbf{x}(k) : k \geq 0\right)$, ima svoju potpunu opravdanost.

Diskretni uopšteni sistemi u prostoru stanja se pojavljuju u mnogim inženjerskim oblastima i problemima, kao što su električna, elektro - magnetna kola, ali ih ima znatno više u ekonomiji, demografiji, problemima ekstremalne optimizacije i kao granični slučaj deskriptivno perturbovanih procesa.

Za izlaganja koja su ovde od interesa, može se matematički model, u prostoru stanja, ovih sistema zapisati u sledećom obliku:

$$\begin{gathered} E\big((\cdot)\big)\mathbf{x}(k+1)=A_0\mathbf{x}(k)+B_0\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{x}_i(k)=C\,\mathbf{x}(k)+D\mathbf{u}(k) \end{gathered}, \tag{2.2}$$

gde su date matrice saglasnih formata, pri čemu je kvadratna matrica E obavezno nepotpunog ranga, odnosno *iregularna.*

Njihove suštinse osobine, koje ih izdvajaju u odnosu na tzv. „normalne" (klasične) sisteme, skoro su identične osobinama ranije razmatranih vremenski kontinualnih uopštenhi sistema u prostoru stanja, pa se stoga ovde neće ponavljati.

Literatura

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, **Continuous Singular Control Systems,** GIP Kultura, Belgrade, 1996.

D. Lj. Debeljkovic, S. A .Milinkovic, M. B. Jovanovic, **Application of singular system theory in chemical engineering: Analysis of process dynamics**, Monograph, 12 th International Congress of Chemical and Process Eng., CHISA 96, Prague (Czech Republic), 25 - 30 August, 1996, Process Eng. Publishing, **1977.**

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, **Discrete Singular Control Systems,** GIP Kultura, Belgrade, 1998.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, **Continuous Singular Systems,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, Lj. A. Jacic, **Discrete Descriptor Systems,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, N. S. Visnjic, **Linear Singular Systems: Pole Placement Methods and Observer Design** Mechanical Faculty, Belgrade, 2006.

D. Lj. Debeljkovic, I. M. Buzurovic, **Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: A Geometric Approach,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2007.

I. M. Buzurovic, **D. Lj. Debeljkovic**, **Geometric Approach and Dynamical Behavior Study for Particular Class of Linear Singular Systems with Application in Medicine,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2009.

D. Lj. Debeljkovic, **Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: Impulsive behaviour, generalized inverses, stabilization, regularization, optimization and applications**,Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, M. P. Lazarevic **Dynamics of Continuous Linear Singular Control Systems,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2012.

3. LINEARNI SISTEMI SA MRTVIM VREMENOM

3.1 VREMENSKI KONTINUALNI SISTEMI SA MRTVIM VREMENOM

Već više od pola veka *sistemi sa mrtvim vremenom* privlače pažnju naučne i istraživačke javnosti širom planete.

Njihovo prisustvo u svim granama tehnike i u pojedinim oblastima društvenih nauka više je nego evidentno, što obavezuje da im se sa svih mogućih aspekata proučavanja posveti dužna pažnja.

Matematički gledano, ovi sistemi automatskog upravljanja iskazani su sistemom običnih diferencijalnih jednačina sa pomerenim argumentom, što povlači znatno usložnjavanje brojnih procedura za njihovo ispitivanje.

Međutim, kao procesi beskonačnog reda, njihovo proučavanje u *s* domenu otežano je prisustvom transcedentnih prenosnih funkcija, što ponekada zahteva bazičnu modifikaciju postojećih uslova i postupaka razvijenih za linearnizovane sisteme, a ponekada i generisanje potpuno novih postupaka i metoda za rešavanje postavljenih problema i klasične i moderne teorije upravljanja i sistema.

Ova klasa sistema je opisana svojom vektorskom diferencijalnom jednačinom stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) \tag{3.1.a}$$

i sa pripadajućom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau \le t \le 0 \tag{3.1.b}$$

gde je sa τ označeno mrtvo vreme u stanju.

Kada se uopšteno razmatraju sistemi sa mrtvim vremenom, u aktuelnim kriterijumima stabilnosti, koriste se dva suštinski različita prilaza.

Prvi pristup generiše uslove stabilnosti koji *ne uključuje* saznanje o mrtvom vremenenu, a drugi pristup uključuje tu informaciju i pokazuje u kojoj meri mrtvo vreme utiče na dinamiku sistema.

Prvi prstup se često naziva kriterijumom nezavisnim od mrtvog vremena i generalno je iskazan kroz veoma proste algebarske nejednačine.

Drugi prilaz, koji je svakako superiorniji, jer pored matrica sistema u uslovima stabilnosti egzistira i vrednsot mrtvog vremena, ali zbog toga postoji nužnost za rešavanjem daleko složenijih izraza, a u nekim okolnostima i potreba za rešavanjem ili transcedentih algebarskih jednačina ili nelinearnih matričnih običnih, pa čak i diferencijalnih, jednačina visokog reda.

Osim navedenog, u ovim okolnostima, kako bi se iskoristili dobijeni kriterijumi, potrebno je određivanje i maksimalnih ili minimalnih solvenata takvih jednačina, što često vodi ka optimizacionim postupcima veoma kompleksnim algoritamskih procedura.

Njihova primena je prisutna svuda gde postoji ili transportno ili tehnološko ili informaciono zaostajanje signala, a to su tipični predstavnici dugačkih električnih, hidrauličnih ili pneumatskih vodova, svi hemijski reaktori čiji se rad zasniva na primarnom mešanju nekih supstanci, procsi hladnog ili vrućeg valjanja limenih ploča gde je nemoguće locirati merač debljine u samom cevu valjaka već nešto posle, respektivno, itd.

Neotuđivo su vezani i prisutni u dinamici manipulatora i vazduhoplova i velikim sistemima.

Prisustvo mrtvog vremena, bezobzira da li ono egzistira u ulaznim veličinama i/ili u stanju može da rezultira u pogubne tranzientne osobine, pa i da dovede do nestabilnih radnih režima.

Ta pojava veoma je česta kada se razmatraju sistemi u zatvorenom kolu dejstva, sa dejstvom poremećaja i šuma ili bez njih.

Samim tim ova istraživanja naišla su na veliku pažnju kod mnogih naučnika i istraživača.

U opštem slučaju razmatranje problema koji uključuje i mrtvo vreme povlači daleko složeniju matematičku analizu.

3.2 VREMENSKI DISKRETNI SISTEMI SA MRTVIM VREMENOM

Diskretni sistemi sa mrtvim vremenom, opisani su u matematičkom smislu u vidu sistema diferencnih jednačina sa pomerenim argumentom i odlikuju se brojnim karateristikama koje nisu prisutne kod običnih diskretnih procesa.

Za potrebe ove disertacije opisani su vektorskom diferencnom jednačinom stanja:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-h) \tag{3.2.a}$$

i sa pripadajućom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-h, (-h+1), \dots, 0\} \tag{3.2.b}$$

gde h označava mrtvo vreme u stanju.

Jasno, to zahteva sasvim drugi prilaz u razmatranjima a slika jednog takvog novog postupka utemeljen je u reševanju mnogih, ovde postavljenih, kompleksnih problema ispitivanja stabilnosti ove klase sistema.

Literatura

D. Lj. Debeljković, **Time Delay Control Systems,** GIP Kultura Belgrade 1994.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, S. B. Stojanovic, **Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval,** Cigoja press, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, A. Lj. Jacic, M. Medenica **Time Delay Systems: Stabilty and Robustness,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, **Stability of Control Systems over Infinite Time Interval,** Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2009.

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, **Stabilty of Particular Classes of Linear Control Systems over Finite and Infinite Time Interval,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010.

D. Lj. Debeljkovic- Editior, *Time Delay Systems, I–Tech*, Vienna, (Austria), **. 2011**

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, **Systems, Structure and Control – Editior,** Petr Husek, **– C**hapter : *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach*, I – Tech, Vienna, ISBN 978-7619-05-3**, 2008**, pp. 029 – 060.

D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, **Time Delay Systems**, - Chapter **2 :** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval, *I–Tech,* Vienna, (Austria), pp.15 – 30, **2011**.a.

D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, **Time Delay Systems**, - Chapter **3 :** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems", *I–Tech*, Vienna, (Austria), pp. 31 – 74, **2011.**b.

D. Lj. Debeljkovic, M. S. Aleksendric , N. J. Dimitrijevic, **ContemporaryTheory of Multi Input - Multi Output Linear Control Systems**,Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, D. N. Popov, **ContemporaryMethods for Linear Systems Design**,Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, **Stabilty of Automatic Control Systems over Finite and Infinite Time Interval,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

4. LINEARNI SINGULARNO - DESKRIPTIVNI SISTEMI SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

Danas egzistira znatan broj realnih procesa u sistemima automatskog upravljanja u kojima je iskazan jednovremeni fenomen mrtvog vremena i prisutna singularnost tako da ova klasa procesa evidentirana pod nazivom **Singularni (deskriptivni) sistemi sa kašnjenjem** zaslužuje posebnu pažnju.

Ovi procesi poseduju mnoga specifična obeležja.

U matematičkom smislu ova klasa sistema automatskog upravljanja predstavljena je spegnutim sistemom diferencijalnih (diferencnih) jednačina sa pomerenim argumentom, kojima je ataširan odgovarajući sistem algebarskih jednačina koje, generalno, mogu biti, takođe, sa mrtvim vremenom ili bez njega.

4.1 VREMENSKI KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

Matematički zapis, ove klase sistema, obično se daje, takođe, preko vektorske diferencijalne jednačine stanja, a može i izlaza, ako je potrebno, što za ova razmatranja ima manji značaj:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau)\,, \qquad (4.1.a)$$

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau \le t \le 0 \tag{4.1.b}$$

sa obaveznom matricom E nepotpunog ranga, odnosno *iregularnom* kada su u pitanju »kvadratni sistemi« i ostalim konstantnim sistemskim matricama i *prihvatljivom* funkcijom početnih stanja, a zbog prisutnog fenomena kašnjenjenja prvobitno ponašanje sistema iskazuje se kroz funkciju saglasnih početnih uslova, jed. (4.1.b), a za samo ona početna stanja koja pripadaju podskupu saglasnih početnih uslova $\mathcal{W}_k$, generisanih sledećim algoritmom, u klasičnom prostoru stanja:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_0 = \mathbb{R}^n, \\ &\vdots \\ &\mathcal{W}_{j+1} = A^{-1}\left(E\,\mathcal{W}_j\right), \quad j \ge 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

pri čemu $A^{-1}(\cdot)$ označava inverznu sliku $(\cdot)$ nad operatorom A.

4.2 VREMENSKI DISKRETNI DESKRIPTIVNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

Matematički zapis ovih sistema, dat je takođe, vektorskom diferencnom jednačinom stanja i može biti iskazan u sledećoj formi:

$$E\,\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-h) \tag{4.3.a}$$

sa obavezno matricom E nepotpunog ranga, odnosno iregularnom matricom i sa ostalim matricama čiji su elementi definisani nad poljem realnih brojeva i *prihvatljivom* funkcijom početnih stanja, iskazana kao:

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-h, (-h+1), \dots, 0\} \tag{4.3.b}$$

za samo ona trenutna početna stanja koja pripadaju podskupu saglasnih početnih uslova.

Osnovni geometrijski prilaz za određivanje podskupa saglasnih početnih uslova $\mathcal{W}_d$ generalisanih sistema u prostoru stanja je niz podskupova, koji se generiše na sledeći način:

$$\begin{aligned} &W_{d,0} = \mathbb{R}^n \\ &\vdots \\ &\mathcal{W}_{d,j+1} = A^{-1}\left(E\mathcal{W}_{d,j}\right), \quad (j \ge 0) \end{aligned} \tag{4.4}$$

$A^{-1}(\,\cdot\,)$ označava inverzni lik $(\cdot)$ nad operatorom A, a $\aleph(F)$ i $\Re(F)$ označavaju nulti prostor i rang matrice F, respektivno.

Niz podskupova $\{\mathcal{W}_{d,0},\ \mathcal{W}_{d,1},\ \mathcal{W}_{d,2}, \dots\}$ se formira na sledeći način:

$$\mathcal{W}_{d,0} \supset \mathcal{W}_{d,1} \supset \mathcal{W}_{d,2} \supset \mathcal{W}_{d,3} \supset \cdots \tag{4.5}$$

Pored toga važi i:

$$\aleph(A) \subset \mathcal{W}_{d,j}, \quad (j \geq 0) \tag{4.6}$$

i egzistira ceo broj $k \geq 0$, tako da:

$$\mathcal{W}_{d,k+1} = \mathcal{W}_{d,k} \tag{4.7}$$

pa je: $\mathcal{W}_{d,k+1} = \mathcal{W}_{d,k}$ za $j \geq 1$.

Ako je k^* najmanji takav ceo pozitivan broj sa ovim karakteristikama, važi:

$$\mathcal{W}_{d,k} \cap \aleph(E) = \{0\}, \quad (k \geq k^*) \tag{4.8}$$

i garantuje da matrica $(\lambda E - A)$ ima svoju inverznu matricu za neko $\lambda \in \mathbb{C}$, *Owens, Debeljkovic* (1985).

Ovaj algoritam, identičan po strukturi, primenjuje se i za vremenski kontinualne singularne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem, *Owens*, *Debeljkovic* (1985).

Literatura

Pjescic, R M., V. Chistyakov, **D. Lj. Debeljkovic**, **On Dynamical Analysis of Particular Class of Linear Singular Time Delayed Systems: Stabilty and Robusteness,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2008.

D. Lj. Debeljkovic, **Linear Singular Systems with Time Delay: Stabilty, Robustness, Stabilizability and robustness stabilizability,Part I**,Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010.

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, **Stabilty of Particular Classes of Linear Control Systems over Finite and Infinite Time Interval,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010.

D. Lj. Debeljkovic- Editior, *Time Delay Systems, I–Tech,* Vienna, (Austria), **. 2011**

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, **Systems, Structure and Control - Editior** Petr Husek, **– C**hapter : *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach*, I – Tech, **2008**, pp. 029 – 060.

D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, **Time Delay Systems**, - Chapter **2 :** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval, *I–Tech*, Vienna, (Austria), pp.15 – 30, **2011**.a.

D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, **Time Delay Systems**, - Chapter **3 :** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems", *I–Tech*, ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), pp. 31 – 74, **2011.**b.

D. Lj. Debeljkovic, **Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: Impulsive behaviour, generalized inverses, stabilization, regularization, optimization and applications**,Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, **Stabilty of Automatic Control Systems over Finite and Infinite Time Interval,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljković, **Time Delay Control Systems,** GIP Kultura Belgrade 1994.

D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, S. B. Stojanovic, **Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval,** Cigoja press, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, A. Lj. Jacic, M. Medenica **Time Delay Systems: Stabilty and Robustness,** Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

D. Lj. Debeljkovic, **Stability of Control Systems over Infinite Time Interval,**Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2009.

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, **Stabilty of Particular Classes of Linear Control Systems over Finite and Infinite Time Interval,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010.

D. Lj. Debeljkovic- Editior, *Time Delay Systems*, *I–Tech*, Vienna, (Austria), **. 2011**

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, **Systems, Structure and Control - Editior** Petr Husek, **– C**hapter : *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach*, I – Tech, Vienna**, 2008**, pp. 029 – 060.

D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, **Time Delay Systems**, - Chapter **2 :** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval, *I–Tech*, Vienna, (Austria), pp.15 – 30, **2011**.a.

D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, **Time Delay Systems**, - Chapter **3 :** Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems", *I–Tech*, ISBN 978-953—307-559-4, Vienna, (Austria), pp. 31 – 74, **2011.**b.

D. Lj. Debeljkovic, M. S. Aleksendric , N. J. Dimitrijevic, **ContemporaryTheory of Multi Input - Multi Output Linear Control Systems**,Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, D. N. Popov, **ContemporaryMethods for Linear Systems Design**,Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, **Stabilty of Automatic Control Systems over Finite and Infinite Time Interval,** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. H. Owens, **D. Lj**. **Debeljkovic**., "**Consistency and Liapunov stability of linear descriptor systems: a Geometric analysis**", *IMA*, *Journal of Math. Control and Information*, (1985). No. 2, pp. 139 – 151.

KVALITATIVNE
I KVANTITATIVNE OSOBINE
KLASA RAZMATRANIH SISTEMA

III VREMENSKI KONTINUALNI
UOPŠTENI SISTEMI U PROSTORU STANJA

5. KVALITATIVNE I KVANTITATIVNE OSOBINE

U proteklom periodu, javlja se značajni interes na polju izučavanja vremnski kontinualnih generalisanih sistema u prostoru stanja.

Ova klasa sistema se javlja kao neposredni rezultat postavljanja osnovnih bilansnih jednačina procesa koji se razmatra, što u krajnjoj liniji dovodi do traženog matematičkog modela.

Sa opravdanim ciljem da se u postupku modeliranja, dobije što verodostojniji matematički model fizičkom procesu od interesa, ovi sistemi to izražavaju na najbolji mogući način sa aspekta modeliranja.

Kao što je rečeno ovi procesi, u matematičkom smislu, predstavljeni su sistemom kuplovanih diferencijalnih i algebarskih jednačina, koje treba simulatano rešiti, uvažavajući, za njih date saglasne početne uslove.

Sa tog stanovišta, razlikuju se brojni pristupi ovoj problematici, pa neki autoriteti to iskazuju kroz numerički prilaz, analitički tretman ili kvalitativnu spoznaju dinamičkih karakteristika sistema, dok neki tu različitost vide kroz geometrijski prilaz ili pozicije čiste algebarske analize, *Debeljković et. al* (1996).

U odnosu na klasičnu teoriju sistema, koja se zasnivala na dinamičkom opisu razmatranog sistema kroz njihovu funkciju prenosa, bilo da su u pitanju sistemi sa jednim ulazom i jednim izlazom, ili kada su u pitanju višestruko prenosni sistemi današnja i aktuelna teorija sistema se u celosti bazira na konceptu prostora stanja.

Savremena teorija sistema polazi od opisa interne dinamike procesa preko *vektorske diferencijalne jednačine stanja* i ataširanu vektorsku jednačinu izlaza.

Pomenute jednačine imaju oblik :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right), \tag{5.1}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{g}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right), \tag{5.2}$$

gde su vektorske funkcije $\mathbf{f}((\cdot))$ i $\mathbf{g}((\cdot))$, u opštem slučaju:

$$\mathbf{f}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{g}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p, \tag{5.3}$$

gde $t \in \mathbb{R}$, označava vreme, a $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^p$ vektore stanja, ulaza i izlaza respektivno, *Debeljković et. al* (1996).

Jed. (5.1) i jed. (5.2) predstavljaju matematički model objekta, procesa ili sistema u prostoru stanja.

Opis matematičkog modela procesa daje se, kao :

$$\mathbf{f}\left(t, \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{x}_i(t)\right) = \mathbf{0}, \tag{5.4}$$

i obično se naziva sistemom *implicitnih* diferencijalnih jednačina.

Mogući oblici matematičkih modela, datih jed. (5.4), su:

$$E\big(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{z}(t)\big)\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}\big(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{q}(t)\big), \tag{5.5}$$

$$\mathbf{g}\big(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),\mathbf{x}_i(t),\mathbf{z}(t)\big)=\mathbf{0}, \tag{5.6}$$

gde vektor $\mathbf{q}(t)$ predstavlja, uslovno rečeno, redudantne varijable.

Prema tome, $\mathbf{x}(t)$ igra ulogu vektora stanja varijabli procesa, ako postoji mogućnost da se redudantna veličina $\mathbf{q}(t)$ ukloni iz jed. (5.5 - 5.6).

To nije moguće uvek postići pa se javljaju i još neke dopunske poteškoće, posebno u slučajemima kada:

1. Matrica $E\big((\cdot)\big)$ može biti pravougaonog formata, a kada je i kvadratna traba da bude iregularna.
2. Kada je matrica $E\big((\cdot)\big)$ pravougaona i još uz to i nepotpunog ranga, tretman takvih sistema izuzetno je složen.

Posebni oblici implicitnih sistema, datih jed. (5.5) ili jed. (5.6), mogu se pojaviti i kao:

$$E\big(t,\mathbf{x}(t)\big)\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}\big(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\big), \tag{5.7}$$

$$E(t)\dot{\mathbf{x}}(t)=A\big(t,\mathbf{x}(t)\big)\mathbf{x}(t)+B\big(t,\mathbf{x}(t)\big)\mathbf{u}(t), \tag{5.8}$$

tj.:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathrm{f}\big(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\big), \tag{5.9}$$

pri:

$$\mathbf{x}_i(t)=\mathrm{g}\big(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\big). \tag{5.10}$$

U posebnom slučaju, koji je ovde od interesa, kontinualne vektorske funkcije $\mathbf{f}\big((\cdot)\big)$ i $\mathbf{g}\big((\cdot)\big)$ su *linearne* funkcije svojih argumenata, tako da se dobija vektorska jednačina stanja i vektorska jednačina izlaza sa matricama A, B, C, D koje su odgovarajućih formata a čiji su elementi definisani nad poljem realnih brojeva, a uz sve to i sa *konstantnom kvadratnom matricom* E, uobičajeno nepotpunog ranga, tako da je rang $E \overset{\Delta}{=} q < n$, pa sledi:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t), \tag{5.11}$$

$$\mathbf{x}_i(t)=C\mathbf{x}(t)+D\mathbf{u}(t). \tag{5.12}$$

Imajući u vidu ovu činjenicu, velika klasa ovih sistema poznata je u literaturi kao *Uopšteni sistem u prostoru stanja* (singularni sistemi, deskriptivni sistemi, sistemi sa polu stanjem, sistemi opisani algebro-diferencijalnim jednačina, degenerativni, itd.).

U situacijama kada je matrica E regularna, det $E \neq 0$ sistem, dat jed. (5.11), svodi se na:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=E^{-1}A\mathbf{x}(t)+E^{-1}B\mathbf{u}(t), \tag{5.13}$$

odnosno:

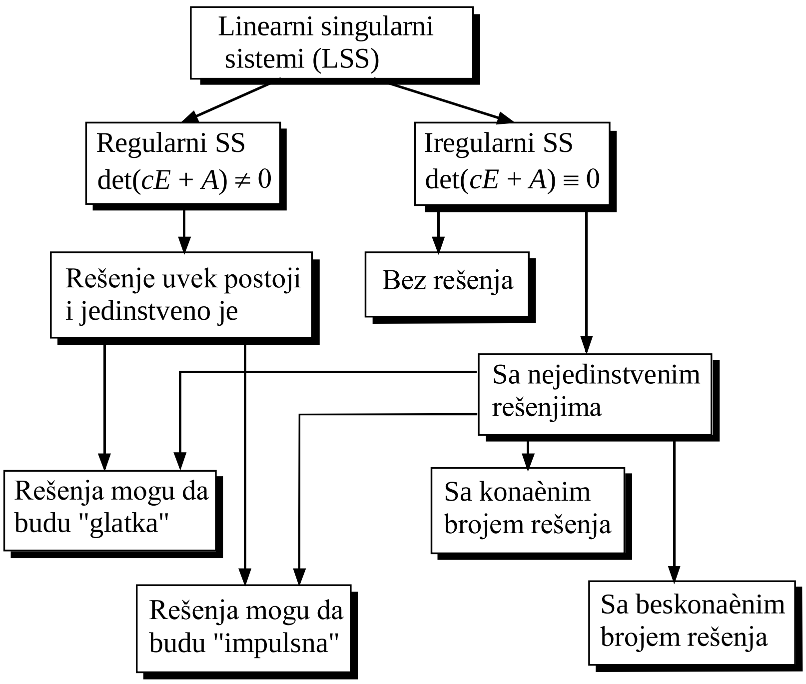
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + B_0\mathbf{u}(t), \tag{5.14}$$

što predstavlja standardnu formu opisa sistema u savremenoj teoriji upravljanja, sa dobro poznatim rezultatima koji se na nju oslanjaju, *Lewis* (1986).

Uopšteni sistem u prostoru stanja se najčešće nazivaju i diferencijalno-algebarski sistemi jer su upravo diferencijalne jednačine sa ograničenjima koje nameću pridružene im algebarske jednačine.

Sa stanovišta postojanja i jedinstvenosti rešenja značajno je samo razmotriti tu podelu sa stanovišta *linearnih kontinualnih generalisanih sistema u prostoru stanja*.

Šematski prikaz podele ovih sistema je dat na sl.5.1.



Sl.5.1

Regularni uopšteni sistem u prostoru stanja imaju uvek jedinstveno rešenje koje, zavisno od kvaliteta dodeljenih početnih uslova, može da bude "neprekidno" ali i da sadrži impulse, *Debeljković et al.* (2006.a).

Iregularni uopšteni sistem u prostoru stanja mogu uopšte da nemaju rešenja, a ako ga i imaju, ona su nejedinstvena, *Debeljković et al.* (2006.a).

Onda rešenja mogu biti konačno prebrojiva konačan ili njihov broj može biti beskonačan.

Zajedničko sa regularnim singularnim sistemima i ovde se pojavljuju "glatka" ili rešenja sa impulsom, što podrazumeva prisustvo Dirakove funkcije u odzivu sistema.

Karakter vremenskih promena elemenata matrice $E(t)$ unosi još jednu podelu.

Naime, ima slučajeva kada dolazi do promene ranga matrice $E(t)$ u toku vremena, tako da za neko t_1 matrica $E(t_1)$ može biti singularna, a za neko drugo t_2, $E(t_2)$ je regularna matrica.

Ovakav slučaj se označava kao *izolovana singularnost*, a tretman takvog sistema zaslužuje posebnu pažnju, naročito u trenutku t_1, *Debeljković et. al* (1996).

Drugi slučaj javlja se kada je matrica $E(t)$ singularna u svakom trenutku, pri čemu se njen rang može menjati od trenutka do trenutka.

Stacionarna singularnost podrazumeva singularnu matricu E nad poljem realnih brojeva.

Ta singularnost obično je ili *strukturna* ili *parametarska.*

Ova podela se ilustruje sledećim primerom.

Ako je matrica E oblika:

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{11}, e_{12} \neq 0, \tag{5.15}$$

bez obzira na vrednost njenih nenultih elemenata, ona će uvek biti singularna.

Ova singularnost naziva se strukturnom.

Ako je matrica E oblika:

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}, \quad e_{ij} \neq 0, \ \ \forall i, j = 1, 2, \tag{5.16}$$

tada, za neki izabrani nominalni radni režim, može da bude zadovoljen uslov:

$$e_{11}e_{22} - e_{12}e_{21} = 0. \tag{5.17}$$

Ovo je tipičan primer parametarske singularnosti, *Debeljković et. al* (1996).

Vraćajući se osnovnoj podeli, može se reći da su regularni generalisani sistemi u prostoru stanja oni sistemi za koje se može naći broj c, takav da je $\det(cE - A) \neq 0$, *iregularni* oni za koje je det $\det(cE - A) \equiv 0$, za svaki broj $c \in \mathbf{C}$.

U prvom slučaju se obično govori o regularnom matričnom paru (E, A), dok se u drugom slučaju govori o singularnom matričnom paru (E, A).

Posebna podela generalisanih sistema u prostoru stanja takođe se bazira na mogućim strukturama matrice E.

Ona može da bude nekvadratna, što je redji slučaj, ili kvadratna, što je uglavnom uobičajeni slučaj, koji proističe iz same prirode većine procesa i pripadajućeg matematičkog modela.

Kao i za ostale klase sistema, tako i za generalisane sisteme u prostoru stanja od najvećeg je značaja analizirati odgovarajuće dinamičko ponašanje u ustaljenim i nestacionarnim radnim režimima.

U analizi generalisanih sistema u prostoru stanja od posebnog je značaja pitanje rešljivost i generalisanog sistema u prostoru stanja jednačina.

U tom smislu izalžu se sledeći rezulati.

Vraćamo se ponovo na linearni singularni stacionarni sistem opisan svojom modelom u prostoru stanja, tj. jed. (5.11) i jed. (5.12) respektivno.

Gantmacher (1977), je pokazao da, ukoliko je *matrični par*[†] $(sE + A)$ *regularan*, tj. ukoliko je:

[†] Matrix pecil;
Sasvim je svejedno da li se razmatra $(sE + A)$ ili $(sE - A)$.
U drugom slučaju uobičajeno se vektorska jednačina stanja usvaja u obliku: $E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \ \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$

$$\det(sE + A) \neq 0\,, \quad s \in \mathbf{C}\,, \tag{5.18}$$

tada rešenja sistema, datog jed. (5.11), *egzistiraju i unikatna su*, a ako pri tome sistem kreće iz tzv. saglasnih početnih uslova, ona su tada i ta rešenja "glatka" (neimpulsna) i dobijaju se u klasičnoj zatvorenoj formi.

Tada *rešljivost* sistema, datog jed. jed. (5.11), direktno zavisi od regularnosti matričnog para (sE - A).

Prvi način svakako predpostavlja testiranje jed. (5.18).

Naime, ukoliko se pokaže da je:

$$\det(sE - A) \equiv 0, \tag{5.19}$$

generalisani sistem u prostoru stanja je *iregularan*.

Rešenja mogu *da egzistiraju*, a pri tome može se desiti da budu *jedinstvena* ili *nejedinstvena*, pa čak i *da ne postoje*.

Ovo razjašnjava sledeći rezultat, *Campbell*(1980).

Tvrdnja 5.1 Ako je matrični par ($\lambda E + A$) *regularan*, tada je:

$$\aleph(E) \cap \aleph(A) = \{\mathbf{0}\}\,. \tag{5.20}$$

Ukoliko je uslov, dat jed. (5.20) zadovoljen, to ne znači da je ispunjena i regularnost matričnog para $(\lambda E + A)$ za neko s, $s \in \mathbf{C}$.

Po tom pitanju *Debeljković, Owens* (1985) dali su sledeći dopprinos:

Tvrdnja 5.2 Ako je matrični par ($\lambda E + A$) regularan, $\lambda \in \mathbb{C}$, tada je:

$$\mathcal{W}_k \cap \aleph(E) = \{\mathbf{0}\}\,, \tag{5.21}$$

gde je $\mathcal{W}_k$ podskup saglasnih početnih uslova.

Kao i u prethodnom *Tvrđenju*, obrnuto ne mora da bude ispunjeno.

I na kraju, za generalisani sistem u prostoru stanja dat u svojoj *normalnoj kanoničkoj formi*, uslov rešljivost i (regularnosti) dat je sa:

$$\begin{aligned} &\det(sI - A_1)\det\left(-A_4 - A_3(sI - A_1)^{-1}A_2\right) = \\ &= (-1)^n \det A_4 \det\left((sI - A_1) - A_2A_4^{-1}A_3\right) \neq 0 \end{aligned}\,. \tag{5.22}$$

Za pitanja saglasnih početnih uslova, polazi se od već ranije poznatog modela linearnog generalisanog sistema u prostoru stanja:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\,. \tag{5.23}$$

Podskup saglasnih početnih uslova, u oznaci $\mathcal{W}_k$, dato je u *Campbellet al*. (1976).

Iz izraza:

$$\left(I - \hat{E}\hat{E}^D\right)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \tag{5.24}$$

koji je ekvivalentnan uslovu:

$$\mathcal{W}_k = \aleph\left(I - \hat{E}\hat{E}^D\right), \tag{5.25}$$

može se odrediti skup svih vektora $\mathbf{x}_0$ koji formiraju podskup saglasnih početnih uslova $\mathcal{W}_k$.

Sa $\hat{E}$ označena je matrica:

$$\hat{E} = \left(\lambda E - A\right)^{-1} E, \tag{5.26}$$

a indeks "D" označava Drazinovu inverziju matrice.

Osnovni geometrijski aparat u formiranju podskupa saglasnih početnih uslova je sekvenca potprostora, određena sa:

$$\begin{gathered} \mathcal{W}_0 = \mathbb{R}^n \\ \vdots \\ \mathcal{W}_{j+1} = A^{-1}\left(E\mathcal{W}_J\right), \quad j \geq 0 \end{gathered} \tag{5.27}$$

gde je $A^{-1}(\,\cdot\,)$ inverzna slika $(\,\cdot\,)$ pod dejstvom matrice A.

Lema 5.1 Niz podskupa $\left\{\mathcal{W}_0 \;\; \mathcal{W}_1 \;\; \mathcal{W}_2 \;\; \ldots \right\}$ formirana je tako da zadovoljava:

$$\mathcal{W}_0 \supset \mathcal{W}_1 \supset \mathcal{W}_2 \supset \mathcal{W}_3 \ldots \supset \;\ldots \tag{5.28}$$

Štaviše:

$$\aleph(A) \subset \mathcal{W}_j, \quad j \geq 0, \tag{5.29}$$

pri čemu postoji *nenegativan ceo broj* $k \geq 0$, takav da je:

$$\mathcal{W}_{k+1} = \mathcal{W}_k, \tag{5.30}$$

tj:

$$\mathcal{W}_{k+1} = \mathcal{W}_k, \quad j \geq 1. \tag{5.31}$$

Ako je k^* *najmanji nenegativni ceo broj* koji zadovoljava prethodnu jednačinu, tada je:

$$\mathcal{W}_k \cap \aleph(E) = \{\mathbf{0}\}, \quad k \geq k^*, \tag{5.32}$$

pod pretpostavkom da matrica $(\lambda E - A)$ ima svoju inverznu matricu, za neko $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.1 Pod uslovima *Leme* 5.1, $\mathbf{x}_0$ je saglasni početni uslov za sistem dat jed. (5.23) ako i samo ako je $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_{k^*}$.

Štaviše, $\mathbf{x}_0$ generiše jedinstveno rešenje $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{W}_{k^*}, \quad t \geq 0$

Dokazi ovih i svih drugih ranije izloženih *Teorema* rigorozno su izloženi u lit. *Debeljković et al.* (2005.b) a ovde su, iz praktičnih razloga ne izlažu.

Način određivanja podskupa saglasnih početnih uslova pruža mogućnost prevođenja polaznog generalisanog sistema u prostoru stanja na svoju *normalnu kanoničnku formu*.

Algebarski deo sistema, tada, u potpunosti definiše taj prostor, odnosno:

$$\mathbf{0} = A_3\mathbf{x}_{10} + A_4\mathbf{x}_{20}, \tag{5.33}$$

ili, u ekvivalentnoj notaciji:

$$\mathcal{W}_k = \aleph\left(\begin{pmatrix} A_3 & A_4 \end{pmatrix}\right). \tag{5.34}$$

Slične mogućnosti pruža i *posebna* kanonička forma.

Generalisani sistem u prostoru stanja dat jed. (5.23) je u *SVD kanoničkoj formi*, ako je:

$$UEV\,\dot{\mathbf{z}}(t) = UAV\mathbf{z}(t) + UB\mathbf{u}(t), \tag{5.35}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = CV\mathbf{z}(t) + D\mathbf{u}(t), \tag{5.36}$$

pri:

$$UEV = \begin{pmatrix} \Sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad UAV = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{5.37}$$

$$UB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad CV = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1(t) \\ \mathbf{z}_2(t) \end{bmatrix}, \tag{5.38}$$

$$\begin{gathered} \det U \neq 0, \ \det V \neq 0, \\ \Sigma^2 = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ \sigma_2, \ \cdots, \ \sigma_\nu, \ 0, \ \cdots, \ 0\}, \end{gathered} \tag{5.39}$$

gde su σ_i, i = 1, ..., ν; singularne vrednosti matrice E različite od nule, $\mathbf{u}(t)$ je ulazna veličina, a $\mathbf{x}_i(t)$ je vektor izlaznih veličina.

Razmatra se generalisani sistem u prostoru stanja:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \tag{5.40}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = C\mathbf{x}(t) \tag{5.41}$$

Koristeći *Laplace*-ovu transformaciju, pri svim početnim uslovima jednakim nuli, dobija se:

$$W(s) = C(sE - A)^{-1}B = C\frac{\operatorname{adj}(sE - A)}{\det(sE - A)}B, \tag{5.42}$$

matrica prenosa generalisanog sistema u prostoru stanja sa svojim karakterističnim polinomom:

$$f_E(s) = \det(sE - A) \ . \tag{5.43}$$

Matricu prenosa mogu da oforme samo *regularni generalisani sistemi u prostoru stanja*, tj. samo oni kod kojih je $\det(sE - A) \neq 0$, za neko $s \in \mathbf{C}$.

Ako je *generalisani sistem u prostoru stanja iregularan*, odnosno kada je $\det(sE - A) \equiv 0$, $\forall s$, on nema matricu prenosa, ali to još ne ukazuje da isti ne ostvarju odgovarajuću dinamiku, po svim pitanjima.

Šta više, ta dinamika egzistira i iskazana je *ulazno-izlaznim ponašanjem* koje se, tada, iskazuje sa:

$$R(s)\mathbf{X}_i(s) = Q(s)\mathbf{U}(s), \tag{5.44}$$

gde su $R(s)$ i $Q(s)$ klasični polinomi.

Ova kalsa generalisanih sistema u prostoru stanja detaljno je analizirana u radovima *Dziurla*, *Newcomb* (1987.b) i *Dai* (1989.a), gde su prezentovane i njihove odgovarajuće fizičke realizacije.

Osnovni razlog za to je postojanje i algebarskih jednačina koje matematički impliciraju nemogućnost prihvatanja svih početnih uslova.

Oni početni uslovi koji su prihvatljivi, u smislu generisanja glatkih, ali ne i impulsnih rešenja, nazivaju se *saglasni početni uslovi*.

Posmatra se početna vrednost vektora stanja:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{5.45}$$

koja uz jed. (5.23) i definiše problem početnog uslova.

Pod pretpostavka da vektor početnog stanja zadovoljava uslove konzistentnosti, date u *Debeljković et. al* (1996) i *Buzurović* (2000), tada se dobijaju, prema ranije iznetoj podeli,jedinstvena rešenja, i to glatka.

Za, uslovno rečeno, normalne sisteme jedinstvenost rešenja je garantovana.

Za generalisane sisteme u prostoru stanja se, u opštem slučaju, ne može garantovati jedinstvenost rešenja.

Definicija 5.1 $\mathbf{x}_0$ je saglasni početni vektor sistema, datog jed. (5.23), ako postoji bar jedno rešenje problema sa početnim uslovom koje zadovoljava saglasni početni uslov $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Teorema 5.2 Uopšteni sistem u prostoru stanja, dat jed. (5.23), sa pridruženim saglasnim početnim vektorom, ima jedinstveno rešenje ako i samo ako postoji kompleksni skalar s, takav da matrica $(sE - A)^{-1}$ postoji, *Campbell* (1980.a).

Ovde se neće dati detaljan dokaz ove teoreme, kao što je načelno rečeno, već samo skica dokaza koja se zasniva na činjenici da ako postoji prethodna inverzija, rešenje se može naći koristeći *Laplace*-ovu transformaciju.

Nakon utvrđivanja uslova za jedinstvenost rešenja, ostaje otvoreno pitanje rešenja.

Postoje četiri osnovna načina za rešavanje generalisanog sistema u prostoru stanja jednačina sa pridruženim saglasnim početnim uslovom.

Detaljniju analizu navedenog, pogledati u *Campbell* (1980.a), *Dai* (1988).

Rešavanje navedenih sistema je moguće primenom sledećih postupaka:

☑ Redukovanje sistema, do dobijanja vektora stanja, pa samim tim i sistema nižeg reda. Postupak je poznat kao redukacija dimenzije sistema.

☑ Rešenje u vremenskom domenu, korišćenjem *Drazin*-ove i *Moore-Penrose*-ove inverzije.

☑ Aproksimiranje generalisanih sistema u prostoru stanja sekvencama koje nisu singularne. Rešenja su data, u ovom slučaju, kao granični slučaj pre izraženog dejstva singularnosti na sistem.

☑ Rešenja dobijena primenom *Laplace*-ove transformacije.

Teorema 5.3 Dat je sistem, jed.(5.23), i saglasni početni vektor $\mathbf{x}_0$.
Matrica A_2 ima potpuni rang ako sistem ima jedinstveno rešenje, *Campbell* (1980.a).

Uopšteno rešenje generalisanih sistema u prostoru stanja u vremenskom domenu, dato je sledećim izrazom:

$$\mathbf{x}(t)=e^{-\hat{E}^D\hat{A}(t-t_0)\hat{E}\hat{E}^D}\mathbf{x}_0+e^{-\hat{E}^D\hat{A}t}\int_{t_o}^{t}e^{\hat{E}^D\hat{A}\tau}\hat{E}^D B\hat{\mathbf{u}}(\tau)d\tau+\left(I-\hat{E}\hat{E}^D\right)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\left(\hat{E}\hat{A}^D\right)^i\hat{A}^D\hat{B}\mathbf{u}^{(i)}(t),\tag{5.46}$$

gde je:

$$\begin{aligned}\hat{E}&=(sE-A)^{-1}E\\ \hat{A}&=(sE-A)^{-1}A\\ \hat{B}&=(sE-A)^{-1}B\end{aligned}\tag{5.47}$$

Gornji indeks D označava *Drazin*-ovu inverziju, i označava *i*-ti izvod po vremenu, I je jedinična matrica, $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}(t_0)$ je saglasni početni vektor, dok je s kompleksna promenljiva.

Rešenje ne zavisi od vrednosti s, pa jed. (5.46) važi za bilo koju vrednost.

Uopšteno rešenje dato jed. (5.46) važi samo za konzistentne početne vektore, dok za nekonzistentne početne vektore ne daje ispravne rezultate.

Dalja rešenja pored konzinstentnih tretiraju i nekonzistentne početne uslove.

Rešavanje generalisanog sistema u prostoru stanja sa zadatim početnim uslovom može se ostvariti primenon *Laplace*-ove transformacije.
Posmatra se uopšteni sistem u prostoru stanja, dat jed. (5.23).
Primenjujući navedenu operaciju, dobija se:

$$\mathbf{x}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(sE-A)^{-1}E\mathbf{x}(0)\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{(sE-A)^{-1}B\mathbf{U}(s)\right\}.\tag{5.14}$$

Ovakvo rešenje postoji jedino ako postoji $(sE-A)^{-1}$, što je upravo uslov za postojanje jedinstvenog rešenja.

Literatura

Applevich, J. D., *Implicit linear systems*, Springer Verlag, Berlin, 1991.

Bajić, V. B., *Lyapunov's direct method in the analysis of singular systems and networks*, Shades Technical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.a.

Bender, D. J., A. J. Laub, "The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems", *IEEE Proc. on CDC*, Ft. Lauderdale, Fl, (1985) 957–962.

Bender, D. J., A. J. Laub, "The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems", *IEEE Trans. Atomat. Cont*., **AC-32** (8) (1987.b) 672–688.

Bernhard, P., "On Singular Implicit Linear Dynamical Systems", SIAM J. Control and Optim., **20** (5) (1982) 612–633.

Blanchini, F., "Computation of the Transfer Function for Singular Systems", *Int. J. System Sci*., **21** (2) (1990) 407–414.

Buzurović, I. M., D. Lj. Debeljković, *Geometrijski prilaz dinamičkom ponašanju posebnih klasa linearnih generalisanih sistema u prostoru stanja sa primenom u medicini*, Mašinski fakultet, Beograd, 2009.

Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations*, Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations II*, Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

Christodolou, M. A., "Recent results in realization theory for singular systems", *Proc. Int. Symp. Singular Systems*, Atlanta, GA, **1** (1987) 25–28.

Cobb, D., "On the Solution of Linear Differential Equations with Singular Coefficients", *J. Differential Equations*, **46** (1982) 310–323.

Dai, L., "The difference between regularity and irregularity in singular systems", *Circ. Syst. Sig. Proc*., **8** (4) (1989.a) 435–444.

Dai, L., *Singular control systems*, Springer Verlag, Berlin, 1989.b.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Application of singular systems theory in chemical engineering*, MAPRET Lecture – Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Praha, Czech Republic 1996.a.

Debeljković, D. Lj., S. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni generalisani sistemi u prostoru stanja automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1996.b.

Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. Milinković, Lj. A Jacić, *Diskretnigeneralisani sistemi u prostoru stanjaautomatskogupravljanja*, GIPKultura, Beograd, 1998.

Debeljković, Lj. D., Lj. A. Jacić, M. S. Medenica, *Sistemisakašnjenjem*, Mašinskifakultet, Beograd, 2005.a.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni generalisani sistemi u prostoru stanja*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.b.

Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A Jacić, *Diskretnini deskriptivni sistemi*, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.c.

Debeljković, D. Lj., N. S. Višnjić, *Linearni generalisani sistemi u prostoru stanja*: *Metode podešavanja polova i projektovanje observera,* Mašinski fakultet, Beograd,2006.

Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, *Dinamikakontinualnihlinearnihgeneralisanih sistema u prostoru stanja* - Geometrijskiprilaz, Mašinskifakultet, Beograd, 2007.

Dervisoglu, A., C. A. Desoer, "Degenerate networks and minimal differential equations", *IEEE Trans. Circuits and Systems,* **CAS-22** (10) (1975) 769–775.

Dziurla, B., R. W. Newcomb, "Nonregular semistate systems: examples and input-output pairing", *IEEE Proc. on CDC,* Los Angeles, CA (1987) 1125–1126.

Fettweis, A., "On the algebraic derivation of the state equations", *IEEE Trans. Circuit Theory,* **CT-16** (2) (1969) 171–175.

Gantmacher, F. R., *The theory of matrices,* Chelsea Publishing Company, New York, USA, Vol. I, 1977.

Gantmacher, F. R., *The theory of matrices,* Chelsea Publishing Company, New York, USA, Vol. II, 1977.

Kucera, V., "Recent results on singular systems", *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA, (1987) 5–9.

Lewis, F. L., "A survey of linear singular systems", *Circ. Syst. Sig. Proc.*, **5** (1) (1986.a) 3–36.

Lewis, F. L., "Recent work in singular systems", *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA (1987.a) 20–24.

Luenberger, D. G., "Dynamic equations in descriptor form", *IEEE Trans. Automat. Cont.,* **AC-22** (3) (1977) 312–321.

Luenberger, D. G., "Time-invariant descriptor systems", *Automatica*, **14** (1978) 473–480.

Luenberger, D. G., "Nonlinear descriptor systems", *J. Econom. Dynam. Control*, **1** (1979) 219–242.

Malabre, M., "A structural approach for linear singular systems", *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA (1987.a) 34–37.

Malabre, M., "More geometry about singular systems", *IEEE Proc. on CDC, Los Angeles,* CA (1987.b) 1138–1139.

Malabre, M., "Geometric algorithm and structural invariants for linear singular systems", *Proc.* 12th *IMACS World Congr*., Paris (1988) 181–183.

Malabre, M., "On infinite zeros for generalized linear systems", *Proc. MTNS*, Amsterdam, **1** (1989.a) 271–278.

Malabre, M., "Generalized linear systems: geometric and structural approaches", *Linear Algebra Applic*., (1989.b) 591–621.

Mertzios, B. G., "Recent work in singular systems", *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA (1987) 14–17.

Ozcaldrian, K., *Control of descriptor systems*, Ph. D. Thesis, School of Elec. Eng., Georgia Inst. Techn., Atlanta, GA, USA, 1985.

Ozcaldrian, K., "Geometric notes on descriptor systems", *IEEE Proc. on CDC,* Los Angeles, CA (1987.b) 1134–1137.

Rodriguez, J., D. Sweet, “A characterization of semistate systems”, *Circ. Syst. Sig. Proc.*, **5** (1) (1986) 125–138.

Schumacher, J. M., “Algebraic characterization of almost invariance”, *Int. J. Control*, **38** (1) (1983) 107–124.

Sincovec, R. F., A. M. Erisman, E. L. Yip, M. A. Epton, “Analysis of descriptor systems using numerical algorithms”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-26** (1) (1981) 139–147.

Sincovec, R. F., E. L. Yip, M. A. Epton, J. W. Manke, A. M. Erisman, B. Dembart, P. Lu, “Solvability of large-scale descriptor systems”, *NTIS*, Springfield, VA (1979) CONF-790904-P2.

Van Dooren, P., “The computation of Kronecker’s canonical form of singular pencil”, *Linear Algebra and Appl.*, **27** (1979.b) 103–140.

Van Dooren, P. M., “The generalized eigenstructure problem in the linear system theory”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-26** (1) (1981.a) 111–129.

Verghese, G. C., “Further notes on singular descriptions”, *Proc. JAAC*, Charlottesville, VA (1981) TA-4B.

Verghese, G. C., T. Kailath, “Impulsive behavior in dynamical systems; structure and significance”, *Proc. MTNS*, Delft (1979.a) 162–168.

Verghese, G. C., B. C. Levy, T. Kailath, “A generalized state-space for singular systems”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-26** (4) (1981) 811–831.

Yip, E. L., J. W., Manke, *Solvability of large-scale descriptor systems*, Boeing Comp. Services Co., Topical Report, 1978.

Willems, J. C., “Almost A (mod B)-invariant subspaces”, *Asterisque*, **75-76**, (1980) 239–248.

Willems, J. C., “Almost invariant subspaces: an approach to high gain feedback design – Part I: Almost controlled invariant subspaces”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-26** (1) (1981) 235–252.

Willems, J. C., “Almost invariant subspaces: an approach to high gain feedback design – Part II: Almost conditionally invariant subspaces”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-27** (5) (1982) 1071–1084.

Wolovich, W. A., *Linear Multivariable Systems*, Spinger-Verlag, New York, 1974.

Wonham, W. M., *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer-Verlag, New York, 1974.

IV VREMENSKI DISKRETNI
UOPŠTENI SISTEMI U PROSTORU STANJA

6. KVALITATIVNE I KVANTITATIVNE OSOBINE

U proteklom periodu, nešto manji interes na polju izučavanja diskretnih generalisanih sistema u prostoru stanja.

Ova klasa sistema se javljuju kao posledica matematičkog modeliranja različitih sistema i procesa, posebno u društvenim nauka.

U cilju dobijanja što tačnijeg modela fizičkog procesa, ovi sistemi se pojavljuju kao adekvatan matematički aparat koji takav problem rešava.

Kao što je rečeno ovi procesi, u matematičkom smislu, dati su sistemom kuplovanih diferencnih i algebarskih jednačina, koje treba simulatano rešavatii, vodeći računa o odgovarajućim saglasnim početnim uslovima.

Sa tog stanovišta, postoji i više različitih prilaza proučavanju ove klase sistema automatskog upravljanja

Neki autoriteti to vide kao analitički tretman ili numerički prilaz i kvalitativnu proceduru, a drugi to vide kroz prilaz sa čisto geometrijskog stanovišta ili algebarskog prilaza koje se, u krajnjoj liniji, svodi na formiranje algebarskih, a kad kad i diferencijalnih nejednačina, *Debeljković et. al* (1996).

Za diskretne uopštene sisteme u prostoru stanja od prvorazrednog značaja je ispitati njihovu stabilnost, saglasno usvojenom konceptu i klasične osobine kontrolabilnosti, observabilnosti, dostižljivosti, optimalnosti, identifikabilnosti i posebno osobunu regularizacije.

U tom smislu, od posebnog su značaja razmatranja vezana za egzistencija i jedinstvenost rešenja, bitisanje početnih uslova koji stvaraju uzročna rešenja, mogućnosti formalnog matematičkog opisa onih uopštenih sistema u prostoru stanja koji nisu u stanju da iznedre matricu prenosa, prilika kada se matrica E javlja kao nekvadratna, *Debeljkovic et al.* (2006.a,b).

Jasno, pruža se prilika da se u ponuđenom izboru referenci, letimičnim pregledom naslova, prepoznaju radovi od interesa i da se po potrebi odaberu i ako treba hronološki, ili nekako drugačije, sistematizuju.

Da bi izlaganja koja slede postigla svoj željeni cilj, neophodno je odrediti klasu diskretnih uopštenih sistema u prostoru stanja i klasu ulaznih signala koji će biti predmet ovih istraživanja.

Posmatraće se vremenski diskretni uopšteni u prostoru stanja, stacionarni linearni sistemi, bilo u slobodnom:

$$\begin{aligned} E\mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0, \\ \mathbf{x}_i(k) &= C\mathbf{x}(k), \end{aligned} \tag{6.1}$$

bilo u prinudnom radnom režimu:

$$
\begin{aligned}
E\,\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \quad & \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0^*, \\
\mathbf{x}_i(k) = C\,\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k) &
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

sa matricom $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ obavezno neregularnom i ostalim matricama: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $C \in \mathbb{C}^{p\times n}$ i $D \in \mathbb{C}^{p\times m}$, u opštem slučaju.

U velikoj većini slučajeva elementi pomenutih matrica pripadaće skupu *realnih brojeva*.

Vezano za jed. (6.1) i jed. (6.2) valja ukazati da generalno, saglasni početni uslovi za rad u slobodno i/ili prinudnom radnom režimu *ne moraju* da budu isti.

U metodološkom smislu postoje tri bazična priliaz za analizu dinamičkih karakteristika uopštenih sistema u prostoru stanja, a to su: *numerički*, *analitički* i *kvalitativni*.

Vezano za glavne i očekivane doprinose, jasno je da će poslednje pomenuti prilaz biti bazična alatka u izvođenju osnovnih rezultata ove disertacije.

Za dalja interesovanja, za ovu klasu sistema polazi se od singularnog sistema diskretnih jednačina, u obliku:

$$
E_{k+1}\mathbf{x}(k+1) = A_k\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k), \;\; k = 0,1,2,\dots N-1 \tag{6.3}
$$

ili u matričnom obliku:

$$
\begin{pmatrix}
-A_0 & E_1 & & & & \\
0 & -A_1 & \ddots & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & E_{N-1} & 0 \\
 & & & 0 & -A_{N-1} & E_N
\end{pmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(N-1) \\ \mathbf{x}(N)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(N-1)
\end{bmatrix},
\tag{6.4}
$$

sa ranije usvojenim i datim oznakama.

Jed. (6.4) sadrži $(N+1)$ nepoznatih vektora $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, iako egzistira *samo N* matričnih jednačina jednakih dinemzionalnosti *n*.

To povlačii višak nepoznatih u odnosu na dati broj jednačina, pa je logično postaviti pitanje egzistencija okolnosti koje mogu da obezbede barem jedno rešenje ili pak više njih, *Debeljkovic et al.* (2005.a,b).

Obeležimo li blokovsku matricu u jed. (6.4) sa *F* (0, *N*), tada njen format iznosi $N\times(N+1)$ ili $nN\times n(N+1)$ imajući u vidu dimenziju polu-vektora stanja.

Blokovska matrica *F* (0, *N*) uobičajeno se zove *koeficijentnom* matricom, *Luenberger* (1977):

Definicija 6.1 Linerani, diskretni, dinamički singularni sistem jednačina, jed. (6.3), je *rešljiv* ako je njegova koeficijentna matrica *F* (0, *N*) *punog ranga, Luenberger* (1977)

Sistemu jednačina, dat jed. (6.4), može se pridružiti i tzv. "*uslovna*" matrica tipa:

$$G(0,\, N) = \begin{pmatrix} E_1 & & & & \\ -A_1 & E_2 & & & \\ & -A_2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & E_{N-1} \\ & & & & -A_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

koja, očigledno, predpostavlja podmatricu matrice *F* (0, *N*), oformljenu eliminacijom prvih *n* i poslednjih *n* kolona koeficijentne matrice, *Luenberger* (1977)

Definicija 6.2 Linearni, diskretni, dinamički singularni sistem jednačina, jed. (6.3), je *uslovljiv* ako je njegova matrica *G* (0, *N*) nultog ranga, *Luenberger* (1977)

Ako je subdualni sistem, dat sa:

$$E_k^T \mathbf{q}(k-1) = A_k^T \mathbf{q}(k) + \mathbf{v}(k), \quad k = 0,1,2, \dots N-1, \tag{6.6}$$

tada se ima, *Luenberger* (1977):

Teorema 6.1 Sistem dinamičkih jednačina je *uslovljiv* ako i samo ako je njegov subdualni sistem *rešljiv*, *Luenberger* (1977).

Teorema 6.2. Sistem dinamičkih jednačina je *rešljiv* ako i samo ako je njegov subdualni sistem *uslovljiv*, *Luenberger* (1977).

Kako jed. (6.4) odgovara nestacionarnom sistemu jednačina, pokazano je u citiranim radovima da isti zaključci važe i da se bez ograničenja proširuju i na stacionarne diskretne deskriptivne sisteme, date sa:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \quad k = 0,1,2, \dots N-1, \tag{6.7}$$

Iz rezultata prethodnih razmatranja, proističu sledeće *Teoreme*, *Luenberger* (1977):

Teorema 6.3 Sistem dat jed. (6.7) je *rešljiv* ako i samo ako $\det(A - zE)^{\dagger}$ nije identički jednaka nuli.

Uslov *Teoreme* 6.3 je ispunjen, ako je matrični par $(E,\, A)$ *regularan*.

Teorema 6.4 Sistem dat jed. (6.5) je *rešljiv* ako i samo ako je uslovljiv, *Luenberger* (1977).

Definicija 6.3 Neka matrice $E, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i $k_0 \in \mathbb{R}$, *Campbell* (1980)

Vektor $\mathbf{x}(k_0) \in \mathbb{R}^n$ naziva se *saglasni početni vektor* pridružen trenutku k_0, ako jed. (6.7) ima najmanje *jedno rešenje*.

---

† z – kompleksan broj *Z* transformacije, $z \in \mathbb{C}$.

Definicija 6.4 Jed. (6.7) je *prihvatljiva* ako ima *jedinstveno rešenje* za svaki saglasni početni vektor.

Ako je linearna homogena jed. (6.5) prihvatljiva bar u jednom trenutku $k_0 \in \mathbb{R}$, tada je ona prihvatljiva u svakom trenutku $k \in \mathbb{R}$, pa je ista *prihvatljiva.*

Naime, Campbell *et al*. (1976), izneli su sledeći rezultat:

Tvrdnja 6.1 Ako je matrični par $(zE + A)$ *regularan*, tada je:

$$\aleph(E) \cap \aleph(A) = \{\mathbf{0}\}. \tag{6.8}$$

Međutim, ispunjenje uslova datog jed. (6.3) nije dovoljno da garantuje regularnost matričnog para $(zE + A)$ za neko *z*, $z \in \mathbf{C}$.

Tvrdnja 6.2 Ako je matrični par $(zE + A)$ regularan, $z \in \mathbf{C}$, tada je:

$$\mathcal{W}_d \cap \aleph(E) = \{\mathbf{0}\}, \tag{6.9}$$

gde je $\mathcal{W}_d$ podskup saglasnih početnih uslova deskriptivnog sistema, *Debeljković, Owens* (1985).

Kao i u prethodnoj Tvrdnji, obrnuto ne mora da važi.

Neka je *uopšteni diskretni* sistem u prostoru stanja, dat vektorskom jednačinom stanja:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \quad k = 0,1,2,\ldots N-1, \tag{6.10}$$

regularan, tj. $\det(zE - A) \neq 0$.

Tada niz rešenja $\mathbf{x}(k)$ postoji za sve date nizove ulaznog signala $\mathbf{u}(k)$.

Prirodni broj *N* specificiran je posmatranim vremenskim intervalom, *Luenberger* (1977).

Kada je matrica *E regularna*, sistem jednačina dat jed. (6.1) može da se reši rekurzivnim postupcima, kao primer navodi se metoda *unaprednih konačnih razlika*† pri poznatom *vektoru početnih uslova* $\mathbf{x}(0)$.

Ako je pri tome matrica *A*, regularna, procedura korišćenjem rekurzivnih procedura zahteva korišćenje *unazadnih konačnih razlika*‡ pri poznatom *vektoru krajnjih uslova* $\mathbf{x}(N)$.

U prilikama kada su matrice *E* i *A* singularne problem se mnogostruko komplikuje.

Luenberger (1977) je pokazao, pri uslovu da je par (*E*, *A*) *regularan*, da je *jedinstveni niz* rešenja $\mathbf{x}(k)$ određen nizom signala $\mathbf{u}(k)$ i pridodatim uslovima koji su upereni na niz signala $\mathbf{x}(k)$ kako u početnom trenutko $k = 0$ tako i u krajnjem $k = N$.

Aditivni uslovi¶ $\mathbf{x}(0)$ i $\mathbf{x}(N)$ ne mogu da budu okarakterisani proizvoljno.

Problemje poznat kao određivanje “dozvoljenih aditivnih uslova”.

---

† Na engleskom jeziku: *forward differences*.

‡ Na engleskom jeziku: *backward differences*.

¶ Na neki način odgovaraju, ranije objašnjenim, konzistentnim početnim uslovima kontinualnih singularnih sistema.

Teorema 6.5 Ako je dinamički diskretni singularni sistem jednačina *uslovljiv*, tada se skup *dodatnih uslova* može iskazati uvek kroz *inicijalni i finalni uslov*, *Luenberger* (1977).

Prikažimo to jednim jednostavnim primerom skalarnog diskretnog uopštenog sistema u prostoru stanja:

$$x_i(k) = u(k+1), \tag{6.11}$$

Sistem je *rešljiv*, jer je $\det(zE - A) \neq 0$, ali bilo koji uslovi *ne mogu* se definisati u početnom trenutku $k = 0$, *Debeljković et al* (2006).

Da bi se dobilo unikatno rešenje, dva aditivna uslova obavezno treba definisati u krajnjem trenutku *N*.

Lema 6.1 Ako se potprostor $\bar{\mathcal{W}}_j\ (j \geq 0)$, stavara nizom:

$$\begin{gathered}\bar{\mathcal{W}}_0 = \mathbb{R}^n \\ \bar{\mathcal{W}}_{j+1} = (A - \lambda E)^{-1} E\bar{\mathcal{W}}_j, \quad \lambda \in \mathbf{C}\end{gathered}, \tag{6.12}$$

tada važi:

$$\bar{\mathcal{W}}_j = \mathcal{W}_j, \quad (j \geq 0), \tag{6.13}$$

gde je $\mathcal{W}_j$ *podskup* saglasnih početnih uslova singularnog sistema, *Owens*, *Debeljković* (1985)[‡].

Lema 6.1 omogućava još jedan značajan rezultat, *Owens, Debeljković* (1985).

Teorema 6.6 Pod uslovima *Leme* 6.1., $\mathbf{x}_0$ je vektor saglasnih početnih uslova za *autonomni* sistem dat jed. (6.10) ako i samo ako $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}_{d^*}$.

Štaviše, $\mathbf{x}_0$ tada generiše niz rešenja $(\mathbf{x}(k) : k \geq 0)$ takve da $\mathbf{x}(k) \in \mathcal{W}_{d^*}$ za $\forall k \geq 0$.

Razmatraće se rešenja singularnog sistema diferencnih jednačina samo kada su matrice E i A *kvadratne*.

Iznose se rezultati dati u radu *Campbell* (1980).

Slobodni Radni Režim

Za ova razmatranja uopšteni diskretni sistem u prostoru stanja, daje se u svojoj uobičajenoj formi:

$$E\mathbf{x}(k+1) + A\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{6.14}$$

Teorema 6.7 Neka je jed. (6.14) *prihvatljiva*.

Tada je njeno rešenje određeno sledećim izrazom:

---

‡ Potprostor konzistentnih početnih uslova *diskretnih sistema* obeležava se sa $\mathcal{W}_d$.

$$\mathbf{x}(k)=\begin{cases}\hat{E}\hat{E}^D\mathbf{q}, & \text{ako je } k=0\\ \left(\hat{E}^D\hat{A}\right)^k\mathbf{q}, & \text{ako je } k\geq 1\end{cases}, \quad \mathbf{q}\in\mathbb{C}^n. \tag{6.15}$$

gde je:

$$\hat{E}=(zE-A)^{-1}E, \quad \hat{A}=(zE-A)^{-1}A, \quad \exists z \ni \det(zE-A)\neq 0. \tag{6.16}$$

Stanje $\mathbf{x}_0\in\mathbb{C}^n$ je vektor saglasnih početnih uslova za datu homogenu jednačinu, ako i samo ako je:

$$\mathbf{x}_0=\hat{E}\hat{E}^D\mathbf{x}_0, \tag{6.17}$$

ili, u ekvivalentnoj notaciji:

$$\mathbf{x}_0\in\Re\left(\hat{E}^p\right)=\Re\left(\hat{E}\hat{E}^D\right), \tag{6.18}$$

pa je rešenje jed. (6.14), sa saglasnim vektorom početnih uslova dato sa:

$$\mathbf{x}(k)=\left(\hat{E}^D\hat{A}\right)^k\hat{E}\hat{E}^D\mathbf{x}(0), \quad \forall k\geq 1 \tag{6.19}$$

Svi dokazi značajnijih *Lema* i *Teorema nalaze se u lit. Debeljković et al.* (2005.a, 2005.b) kako za kontinualne tako i za diskretne sisteme ovde razmatranih klasa, *Campbell* (1980).

Prinudni Radni Režim

Za naredna izlaganja koristi se matematički model diskretnog deskriptivnog sistema u obliku:

$$E\mathbf{x}(k+1)=A\mathbf{x}(k)+\mathbf{u}(k), \tag{6.20}$$

što ni u kom slučaju ne umanjuje opštost razmatranja.

Neka važi sledeća jednačina:

$$\hat{\mathbf{u}}(k)=(zE-A)^{-1}\mathbf{u}(k), \quad p=\operatorname{Ind}(E). \tag{6.21}$$

Teorema 6.8 Neka je jed. (6.20) *prihvatljiva*.

Tada je njeno rešenje za $k\geq 1$ određeno sledećim izrazom:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k)&=\mathbf{x}_{\text{hom}}(k)+\mathbf{x}_{part}(k)\\ &=\left(\hat{E}^D\hat{A}\right)^k\hat{E}\hat{E}\mathbf{q}+\hat{E}^D\sum_{i=0}^{k-1}\left(\hat{E}^D\hat{A}\right)^{k-i-1}\hat{\mathbf{u}}(k)\\ &-\left(I-\hat{E}\hat{E}^D\right)\sum_{i=0}^{p-1}\left(\hat{E}\hat{A}^D\right)^i\hat{A}^D\mathbf{f}(k+i)\end{aligned}. \tag{6.22}$$

Lako se pokazuje da rešenje ne zavisi od izbora *z*.

Neka je:

$$\hat{\mathbf{w}} = \left(I - \hat{E}\hat{E}^D\right)\sum_{i=0}^{p-1}\left(\hat{E}\hat{A}^D\right)^i \hat{A}^D\hat{\mathbf{u}}(i) \ . \tag{6.23}$$

Vektor početnog stanja je konzistentan ako i samo ako:

$$\mathbf{x}_0 \in \left[\hat{\mathbf{w}} + \Re\left(\hat{E}^k\right)\right]. \tag{6.24}$$

Kao i u kontinualnom slučaju, i ovde se lepo vidi da saglasni početni vektor ne mora, u opštem slučaju, da bude isti za singularni sistem u slobodnom i prinudnom radnom režimu, *Campbell* (1980).

Prilaz Rešavanju kretanja sa Pozicija Kanoničkih Formi

Naime, pod pretpostavkom da postoje dve nesingularne matrice U i V, takve da je:

$$UEV = \text{diag}\left\{I_{n_1},\ N\right\},\quad UAV = \text{diag}\left\{A_1,\ I_{n_2}\right\}, \tag{6.25}$$

sa matricom $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ i $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ nilpotentnom indeksa $\nu = Ind(N)$, pri $n = n_1 + n_2$, može se *regularni* diskretni sistem, dat svojom jednačinom stanja i jednačinom izlaza:

$$\begin{gathered} E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \quad k = 0,1, \dots\ L \\ \mathbf{x}_i(k) = C\mathbf{x}(k) \end{gathered}, \tag{6.26}$$

prevesti na svoju standardnu kanoničku formu, u obliku:

$$\mathbf{x}_1(k+1) = A_1\mathbf{x}_1(k) + B_1\mathbf{u}(k), \tag{6.27}$$

$$N\mathbf{x}_2(k+1) = \mathbf{x}_2(k) + B_2\mathbf{u}(k), \tag{6.28}$$

$$\mathbf{x}_i(k) = C_1\mathbf{x}_1(k) + C_2\mathbf{x}_2(k), \tag{6.29}$$

gde je:

$$\mathbf{x}(k) = V\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k)\end{bmatrix},\ UB = \begin{pmatrix}B_1 \\ B_2\end{pmatrix},\ CV = \begin{pmatrix}C_1 & C_2\end{pmatrix}. \tag{6.30}$$

U prethodnim jednačinama, jed. (6.27) ima “unapredni” rekurentni karakter, čije je stanje *jedinstveno* određeno početnim *podvektorom* stanja $\mathbf{x}_1(0)$ i ulaznom sekvencom: $\mathbf{u}(k)$, k = 0, 1, …L, a što se lepo vidi iz njenog rešenja:

$$\mathbf{x}_1(k) = A_1^k\mathbf{x}_1(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_1^{k-i-1}B_1\mathbf{u}(i). \tag{6.31}$$

Jed. (6.28) ima “*unazadni*” rekurentni karakter i njeno stanje je *jedinstveno* određeno krajnjim stanjem $\mathbf{x}_2(L)$ drugog podvektora i ulazne sekvence $\mathbf{u}(k)$, k = 0, 1, …L, što se argumentuje datim rešenjem:

$$\mathbf{x}_2(k) = N^{L-k}\mathbf{x}_2(L) - \sum_{i=0}^{L-k-1} N^i B_2 \mathbf{u}(k+i). \tag{6.32}$$

Poslednje dve jednačine nesumnjivo pokazuju da *početno podstanje* $\mathbf{x}_1(0)$ i *krajnje podstanje* $\mathbf{x}_2(L)$ obrazuju *kompletan uslov* koji formira jedinstveno rešenje, dato sa:

$$\begin{gathered}\mathbf{x}(k) = V\begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}\left(A_1^k \mathbf{x}_1(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A_1^{k-i-1} B_1 \mathbf{u}(i)\right) + V\begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}\left(N^{L-k}\mathbf{x}_2(L) - \sum_{i=0}^{L-k-1} N^i B_2 \mathbf{u}(k+i)\right) \\ \mathbf{x}_i(k) = C\mathbf{x}(k) \quad k = 0,1,\dots L \end{gathered} \tag{6.33}$$

Vidi se da kod *diskretnog deskriptivnog* sistema koji odgovara konačnim vremenskim serijama, stanje u bilo kom trenutku odabiranja ne zavisi samo od početnog stanja i dotadašnjih ulaza, što je recimo slučaj kod "normalnih" diskretnih sistema, već i od krajnjeg stanja i budućih ulaza sve do trenutka *k*.

Posmatra se linearni, uopšteni diskretni sistem u prostoru stanja opisan svojom vektorskom diferencnom jednačinom stanja i jednačinom izlaza:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \tag{6.34}$$

$$\mathbf{x}_i(k) = C\mathbf{x}(k). \tag{6.35}$$

Primenjujući Z transformaciju na prethodne jednačine, dobija se:

$$(zE - A)\mathbf{X}(z) = zE\,\mathbf{X}(0) + B\mathbf{U}(z), \tag{6.36}$$

$$\mathbf{X}_i(z) = C\,\mathbf{X}(z), \tag{6.37}$$

gde $\mathbf{X}(z)$, $\mathbf{U}(z)$ i $\mathbf{X}_i(z)$ predstavljaju odgovarajuće Z likove.

Pod uslovom da je sistem, dat jed. (6.34 - 6.35) *regularan*, iz jed. (6.36), dobija se:

$$\mathbf{X}(z) = (zE - A)^{-1}\left(zE\,\mathbf{X}(0) + B\mathbf{U}(z)\right), \tag{6.38}$$

a sa nultim početnim uslovima, dobija se:

$$W(z) = C(zE - A)^{-1} B = C \cdot \frac{\operatorname{adj}(zE - A)}{\det(zE - A)} B, \tag{6.39}$$

matrica prenosna diskretnog uopštenog sistema u prostoru stanja, sa karakterističnom jednačinom:

$$f_z(z) = \det(zE - A) = 0\ . \tag{6.40}$$

Ukoliko je razmatrani diskretni uopšteni sistem u prostoru stanja *iregularan*, on tada ne poseduje matricu prenosa, jer je jasno da je $\det(sE - A) \equiv 0$, što ne znači da ne poseduje dinamičko ponašanje.

Ono je tada opisano tzv. ulazno-izlaznim relacijama tipa:

$$R(z)\mathbf{X}_i(z)=Q(z)\mathbf{U}(z) \ , \tag{6.41}$$

gde su $R(z)$ i $Q(z)$ odgovarajući polinomi.

Ova klasa uopštenih sistema u prostoru stanja, posebno vremenski neprekidnih detaljno je obrađena u doprinosima *Dziurla*, *Newcomb* (1987.b) i *Dai* (1989.a).

Literatura

Applevich, J. D., *Implicit Linear Systems*, Springer Verlag, Berlin, 1991.

Bajić, V. B., *Lyapunov's direct method in the analysis of singular systems and networks,* Shades Technical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.a.

Bernhard, P., "On singular implicit linear dynamical systems", *SIAM J. Control and Optim*., **20** (5) (1982) 612–633.

Bender, D. J., A. J. Laub, "The linear quadratic optimal regulator for descriptor systems", *IEEE Trans. Atomat. Cont*., **AC-32** (8) (1987.b) 672–688.

Campbell, S. L., "Linear systems of differential equations with singular coefficients", *SIAM J. Math. Anal*., **8** (6) (1977) 1057–1066.

Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations*, Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

Campbell, S. L., *Singular systems of differential equations II*, Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

Campbell, S. L., "Consistent Initial Conditions for Singular and Nonlinear Systems", *Circ. Syst. Sig. Proc*., **2** (1) (1983) 45–55.

Campbell, S. L., C. D. Meyer, N. J. Rose, "Application of Drazin inverse to linear systems of differential equations", *SIAM J. Appl. Math.*, **31** (1976) 411–425.

Campbell, S. L., C. T. Kelley, K. D. Yeomans, "Consistent initial conditions for unstructured higher index DAES: A computational study", *Proc. Computational Engineering in System Applications*, Lille, France, (1996) 416–421.

Circuits, Systems and Signal Processing, Special issue on semistate systems, **5** (1) (1986).

Circuits, Systems and Signal Processing, Special Issue: Recent advances in singular systems, **8** (3) (1989).

Christodolou, M. A., Paraskevopoulos, P. N., "Solvability, controllability and observability of singular systems", *JOTA*, **45** (1) (1985) 53–72.

Christodolou, M. A., "Recent results in realization theory for singular systems", *Proc. Int. Symp. Singular Systems*, Atlanta, GA, **1** (1987.b) 25–28.

Cobb, D., "On the solution of linear differential equations with singular coefficients", *J. Differential Equations*, **46** (1982) 310–323.

Cobb, D., “A further interpretation of inconsistent initial conditions in descriptor-variable systems”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-28** (9) (1983) 920–922.

Cobb, D., “Fundamental properties of the manifold of singular and regular linear systems”, *J. Math. Anal. and Appl.,* **120** (1986) 328–352.

Dai, L., “The difference between regularity and irregularity in singular systems”, *Circ. Syst. Sig. Proc*., **8** (4) (1989.a) 435–444.

Dai, L., *Singular control systems,* Springer Verlag, Berlin, 1989.b.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1996.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, *Diskretni singularni sistemi automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1998.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.a.

Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A Jacić, *Diskretnini deskriptivni sistemi*, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.b.

Dziurla, B., R. W. Newcomb, “The Drazin inverse and semistate equations”, *Proc. MTNS,* Delft, July (1979) 283–289.

Dziurla, B., R. W. Newcomb, “Summary of microsystem laboratory activities in semistate theory”, *Proc. Int. Symp. Sign. Syst*., Atlanta (GA) **1** (1987.a) 1125–1126.

Dziurla, B., R. W. Newcomb, “Non-regular semistate systems: examples and input-output pairing”, *IEEE Proc. on CDC,* Los Angeles, CA (1987.b) 1125–1126.

Fang C. H., L. Lee, F. R. Chang, “Robust control analysis for discrete-time singular systems”, *Automatica,* **30** (11) (1994) 1741–1750.

Gantmacher, F. R., *Theory of Matrices*, Chelsea Publ. Company, 1977.

Joncheere, E., “Variational calculus for descriptor problem”, *IEEE Trans. Automat. Cont*., **AC-33** (5) (1988) 491–495.

Kucera, V., “Recent results on singular systems”, *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA, **I** (1987) 5–9.

Lewis, F., “Descriptor systems: decomposition into forward and backward subsystems”, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-29** (2) (1984) 167–170.

Lewis, F. L., “A survey of linear singular systems”, *Circ. Syst. Sig. Proc.*, **5** (1) (1986.a) 3–36.

Lewis, F. L., “Recent work in singular systems”, *Proc. Int. Symp. on Sing. Syst.*, Atlanta, GA (1987.a) 20–24.

Luenberger, D. G., “Time-invariant descriptor systems”, *Automatica,* **14** (1978) 473–480.

Luenberger, D. G., “Nonlinear descriptor systems”, *J. Econom. Dynam. Control,* **1** (1979) 219–242.

Newcomb, R. W., “The semistate description of nonlinear time-variable circuits”, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **CAS-28** (1) (1981) 62–71.

Newcomb, R. W., B. Dziurla, “Some circuits and systems applications of semi-state theory”, *Circ. Syst. Sig. Proc.*, **8** (3) (1989) 235–260.

Owens, D. H., D. Lj. Debeljković, “Consistency and Lyapunov stability of linear descriptor systems: a geometric approach”, *IMA Journal on Mathematical Control and Information*, **2** (1985) 139–151.

Ozcaldrian, K., *Control of descriptor systems*, Ph. D. Thesis, School of Elec. Eng., Georgia Inst. Techn., Atlanta, GA, USA, 1985.

Sincovec, R. F., E. L. Yip, M. A. Epton, J. W. Manke, A. M. Erisman, B. Dembart, P. Lu, “Solvability of large-scale descriptor systems”, *NTIS*, Springfield, VA (1979) CONF-790904-P2.

Sincovec, R. F., A. M. Erisman, E. L. Yip, M. A. Epton, “Analysis of descriptor systems using numerical algorithms”, *IEEE Trans. Automat. Cont*., **AC-26** (1) (1981) 139–147.

Verghese, G. C., B. C. Levy, T. Kailath, “A generalized state-space for singular systems”, *IEEE Trans. Automat. Cont*., **AC-26** (4) (1981) 811–831.

Yip, E. L., J. W. Manke, *Solvability of large-scale descriptor systems*, Topical Report (Boeing Comp. Service), 1978.

Yip, E., R. F. Sincovec, “Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems” *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-26** (3) (1981) 702–707.

V VREMENSKI KONTINUALNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

7. KVALITATIVNE I KVANTITATIVNE OSOBINE

Uticaj *fenomena mrtvog vremena* je veoma bitan za pravilno kvalitativno i kvantitativno opisivanje različitih procesa.

Tipični vidovi mrtvog vremena su: *transportno, tehnološko* i *informaciono mrtvo vreme*.

Postojanje *sistema sa mrtvim vremenom* je posledica *ili* inherentnog prisustva mrtvog vremena u objektu i/ili pojedinim komponentama upravljačkog sistema, *ili* svesnog uvođenja mrtvog vremena u sistem.

Fenomen mrtvog vremena prisutno je u mašinstvu, mehanici, hemiji, elektrotehnici, metalurgiji, biologiji i ekonomiji, itd..

Sistemi sa mrtvim vrememom, u osnovi su opisani algebarskim ili običnim diferencijalnim jednačinama sa "pomerenim argumentom".

Često se zovu i retardirani sistemi, misleći na prisutni fenomen zaostajanja.

Pri sastavljanju ovih jednačina, međuzavisnost nekih varijabli stanja trebalo bi razmatrati u jednom te istom momentu, mada se često fizičke varijable javljuju razdeljene u vremenu, tada ih je neophodno svesti na jedan te isti trenutak razmatranja, *Debeljkovic* (1994).

Matematički gledano to znači da će se, pored razmatrane velčine $\mathbf{x}(t)$, pojaviti i neka druga ili ista ta veličina uzeta u trenucima $(t-\tau)$ ili $(t+\tau)$.

Da se u jednačini ne bi javljala neodređenost, potrebno je uspostaviti *dopunsku relaciju* koja povezuje $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{x}(t-\tau)$.

Sa τ je označeno *čisto* vremensko mrtvo vreme.

Rešavanje običnih diferencijalnih jednačina obavlja se uz tzv. početne uslove koji su, po pravilu, skoncentrisani u vektoru početnih uslova, *Debeljković* (1994)

Kod *diferencijalnih jednačina sa pomerenim argumentom* obavezno je poznavati zakon izmene promenljive ne u jednom određenom momentu, već na nekom *poznatom početnom vremenskom intervalu, Debeljković* (1994)

Dinamika jednostavnijih sistema automatskog upravljanja sa mrtvim vremenom može se opisati sledećim sistemom diferencijalnih jednačina:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}\left(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(t-\tau)\right), \tag{7.1}$$

gde je $\mathbf{f}(,\,,\,)$ u opštem slučaju nelinearna vektorska funkcija, a τ konstantno vremensko mrtvo vreme.

Zadatak Cauchy sastoji se u iznalaženju neprekidnog rešenja $\mathbf{x}(t)$ koje pri $t>t_0$ zadovoljava jed. (7.1), a pri $t \le t_0$ i jednačinu:

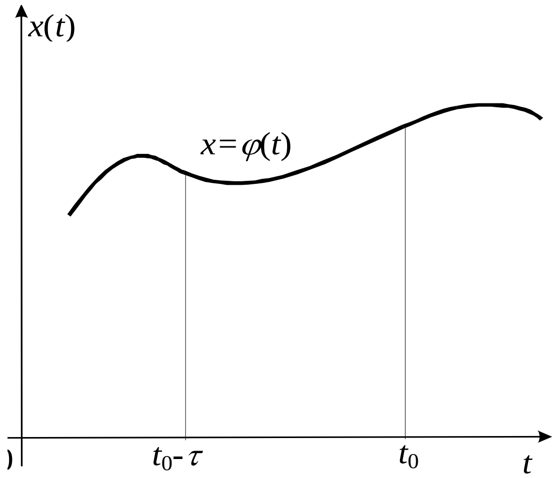
$$\mathbf{x}(t_0+\vartheta)=\boldsymbol{\varphi}(\vartheta),\quad -\infty<\vartheta\le 0\,, \tag{7.2}$$

gde je sa $\boldsymbol{\varphi}(\vartheta)$ označena unapred poznata neprekidna početna funkcija, sl. 7.1.

Vremenski interval $t_0-\tau\leq t\leq t_0$, na kome je zadata početna funkcija naziva se *početnim skupom*, a t_0 *inicijalnom tačkom*.

Više nego uobičajeno je, da važi:

$$\mathbf{x}(t_0+0) = \boldsymbol{\varphi}(t_0)\,. \tag{7.3}$$



Ako se argument ϑ u jed. (7.2) menja u intervalu $\vartheta\in\left]-\infty,\,0\right[$, tada se jed. (7.1) naziva jednačinom sa *neograničenim mrtvim vremenom*, a ako je njegova promena definisana na vremenskom intervalu $\vartheta\in\left]-\tau,\,0\right[$, tada je sistem, dat jed. (7.1) sa *ograničenim mrtvim vrememom*

Sl. 7.1.

U određenom broju problema, *početna funkcija* $\boldsymbol{\varphi}(\vartheta)$ određuje se eksperimentalnim putem.

Naime, početna funkcija nekada može biti određena i kao rešenje *običnih* diferencijalnih jednačina, što se ponekada javlja u određenim problemima automatskog upravljanja, koje na primer opisuju dinamiku procesa sve do trenutka kada počinje da se ostvaruje efekat delovanja povratne sprege.

Za razliku od običnih diferencijalnih jednačina, *rešenje zadatka Cauchy*, za sisteme sa mrtvim vremenom čak i za beskonačno puta diferencijabilne funkcije $\boldsymbol{\varphi}(\vartheta)$ i $\mathbf{f}(\,,\,,\,)$ ima, u opštem slučaju, *prekid prvog izvoda* u tački $t = t_0$.

U stvari:

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0+0)=\mathbf{f}\left(0,\,\boldsymbol{\varphi}(\vartheta)\right), \tag{7.4}$$

i nije jednako, u opštem slučaju, sa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0-0)=\dot{\boldsymbol{\varphi}}(0)\,. \tag{7.5}$$

U tački $t=t_0+\tau$ rešenje ima, u opštem slučaju, *prekid drugog izvoda*, ali je *prvi izvod* u toj tački *obavezno* neprekidan.

Koristeći ovu osobinu, rešenje sistema diferencijalnih jednačina sa mrtvim vremenom najčešće se nalazi *metodom koraka*, *Debeljković* (1994).

Primena metode koraka na jed. (7.1 – 7.2), u opštem slučaju, izgleda ovako:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\varphi}_0(t-\tau)\right), \tag{7.6}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}_0(t_0), \quad t_0 \le t \le t_0 + \tau, \tag{7.7}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{f}\left(t_0, \boldsymbol{\varphi}_0\right), \quad t_0 = t, \tag{7.8}$$

s obzirom da se na intervalu $t_0 \le t \le t_0 + \tau$, argument $(t-\tau)$ menja na početnom skupu $[t_0-\tau,\ t_0]$, pa je saglasno tome, treći argument funkcije $\mathbf{f}(\ ,\ ,\ )$ u jed. (7.1) jednak početnoj funkciji $\boldsymbol{\varphi}_0(t-\tau)$.

Pretpostavljajući postojanje rešenja $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1(t)$, na celom vremenskom intervalu $[t_0,\ t_0+\tau]$, analogno prethodnom ispisivanju, dobija se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\varphi}_1(t-\tau)\right), \tag{7.9}$$

$$\mathbf{x}(t_0+\tau) = \boldsymbol{\varphi}_1(t_0+\tau), \quad t_0 + \tau \le t \le t_0 + 2\tau, \tag{7.10}$$

$$\begin{matrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\varphi}_n(t-\tau)\right), \tag{7.11}$$

$$\mathbf{x}(t_0 + n\cdot\tau) = \boldsymbol{\varphi}_n(t_0 + n\cdot\tau), \quad t_0 + n\cdot\tau \le t \le t_0 + (n+1)\tau, \tag{7.12}$$

gde je $\boldsymbol{\varphi}_k$ rešenje postavljenog zadatka na vremenskom intervalu $t_0 + (k+1)\cdot\tau \le t \le t_0 + k\cdot\tau$.

Imajući u vidu diskusiju izloženu o osobinama funkcije $\mathbf{f}(\ ,\ ,\ )$ i $\boldsymbol{\varphi}(\vartheta)$, jed. (7.4) i jed. (7.5) i idejnu osnovu metode koraka, može se pokazati da se tako dobijeno rešenje postepeno od koraka do koraka, sve više i više “pegla”, odnosno, rešenje postaje u velikoj meri glatko *Debeljković* (1994).

Analiza Kontinualnih Sistema sa Mrtvim vremenom u Prostoru Stanja

Prostor stanja vremenski kontinualnih sistema sa mrtvim vremenom je *beskonačno dimenzioni* vektorski prostor.

On predstavlja skup *n*-dimenzionalnih vektorskih funkcija i definisan je na sledeći način:

$$\sum = \left\{\mathbf{x}(t),\ \ t^* - \Delta \le t \le t^*\right\}, \tag{7.13}$$

gde je Δ najveće prisutno vremensko mrtvo vreme u sistemu.

Prostor stanja vremenski kontinualnih sistema sa mrtvim vremenom je u stvari *Banach*-ov prostor kontinualnih funkcija nad vremenskim intervalom dužine Δ, koji preslikava interval $\left[t^* - \Delta,\ t^*\right]$ u $\mathbb{R}^n$.

Koristeći koncept prostora stanja, moguće je svaki sistem sa mrtvim vremenom predstaviti svojom *vektorskom diferencijalnom* jednačinom *stanja* i vektorskom jednačinom *izlaza*.

Ako je uz to sistem još i *linearan* i *stacionaran*, prethodno pomenute jednačine poprimaju sledeću formu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^{\ell} A_j\mathbf{x}(t-\tau_j) + B_0\mathbf{u}(t) + \sum_{j=1}^{r} B_j\mathbf{u}(t-\theta_j), \tag{7.14}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = C_0\mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^{\ell} C_j\mathbf{x}(t-\tau_j) + D_0\mathbf{u}(t) + \sum_{j=1}^{r} D_j\mathbf{u}(t-\theta_j), \tag{7.15}$$

uz odgovarajuće početne uslove, odnosno početne funkcije.

Postupak izbora veličina stanja

Postupak izbora stanja, kod kontinualnih sistema sa mrtvo vremem je veoma specifičan i on u krajnjoj liniji dovodi do seledećeg modela:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{j=0}^{\ell} A_j\mathbf{x}(t-\tau_j) + \sum_{j=0}^{r} B_j\mathbf{x}_u(t-\theta_j), \tag{7.16}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = C\mathbf{x}(t), \tag{7.17}$$

vektorska diferencijalna jednačina stanja i jednačina izlaza, gde su:

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -L_q^j\left(L_0^0\right)^{-1} \\ I\delta_{j0} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -L_{q-1}^j\left(L_0^0\right)^{-1} \\ 0 & I\delta_{j0} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -L_{q-2}^j\left(L_0^0\right)^{-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I\delta_{j0} & \cdots & -L_1^j\left(L_0^0\right)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{7.18}$$

$$B_j^T = \left(G_q^j \;\; G_{q-1}^j \;\ldots\; G_1^j\right); \quad C = \left(0 \;\ldots\; 0 \;\ldots\; \left(L_0^0\right)^{-1}\right), \tag{7.19}$$

I - jedinična matrica, a δ_{j0}– *Kronecker*-ov simbol:

$$\delta_{j0} = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases} \tag{7.20}$$

Odgovarajuće početne funkcije, date su sa:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}(t), \quad t_0 - \tau_\ell \le t \le t_0, \tag{7.21}$$

$$\mathbf{x}_u(t) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}_u}(t), \quad t_0 - \theta_r \le t \le t_0. \tag{7.22}$$

Nije teško uočiti da su jed. (7.16 – 7.17) samo poseban i nešto opštiji oblik od polaznog sistema jednačina.

S druge strane, valja napomenuti da je ovde bio izložen postupak izbora veličina stanja kod *višestruko prenosnog sistema* sa mrtvim vremenom.

Kada je u pitanju klasa *jednostruko prenosnih* sistema, dobro je poznato da u zavisnosti od oblika jed. (7.1) i same mogućnosti izbora veličina stanja, postoji praktično beskonačan broj ekvivalentnih realizacija *tripla* (A, B, C) odnosno *kvadrela* (A, B, C, D). Nekoliko takvih primera, najčešće susretanih u praksi, mogu se naći u *Debeljković* (1994).

Kompleksni Domen

Pojam prenosne funkcije ili matrice prenosa povezan je sa razmatranjem dinamike sistema u kompleksnom domenu.

Primenjujući *Laplace*-ovu transformaciju, pri nultim početnim uslovima, lako se iz jed. (7.16) dobija tražena matrica prenosa:

$$W(s) = \left(\sum_{j=0}^{\ell} L^j(s) e^{-\tau_j s} \right)^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{r} G^j(s) e^{-\theta_j s} \,. \tag{7.23}$$

Valja istaći da je u praktičnim prilikama, a s obzirom na filterske osobine sistema sa mrtvim vremeom u zonama visokih učestanosti, stepen kvazipolinoma $G(s)$ po pravilu niži od stepena kvazipolinoma $L(s)$.

Polazeći od neke forme jed. (7.16 – 7.17) matrica prenosa može se izraziti preko matrica koje figurišu u vektorskim jednačinama stanja i vektorskim jednačinama izlaza sistema sa mrtvim vremenom.

Tako se u posebnom slučaju, pri $C_1 = 0$, dobija:

$$W(s) = C_0 \left(sI - A_0 - A_1 e^{-\tau s} \right)^{-1} B_0 + D_0 \,. \tag{7.24}$$

Valja zapaziti da, za razliku od sistema bez mrtvog vremena, elementi prenosne matrice *nisu* racionalne funkcije kompleksno promenljive *s*.

Ova osobina očigledno je uslovljena prisustvom transcedentnog člana $e^{-\tau s}$.

Jed. (7.24) definiše, takođe i *karakterističnu jednačinu* sistema sa mrtvim vremenom:

$$f\left(s, e^{-\tau s}\right) = \det\left(sI - A_0 - A_1 e^{-\tau s}\right) = 0 \,, \tag{7.25}$$

koja pri $0 \neq \tau > 0$ ima beskonačan broj korenova (nula).

Činjenica da sistem sa mrtvim vremenom, odnosno njegova prenosna funkcija, ima *beskonačan* broj polova potpuno je u saglasju sa ranije izrečenom konstatacijom da je *prostor stanja* vremenski kontinualnih sistema sa mrtvim vremenom beskonačne dimenzije.

Literatura

Debeljković, D. Lj., *Sistemi sa kašnjenjem* GIP Kultura, Begrad, 1994.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd 1999.

Goreckii, H., S. Fuksa, P. Grabowski, A. Korytowski, *Analysis and synthesis of time delay systems*, J. Wiley, New York, 1989.

Gu, K., Kharitonov, V. L., Chen, J., Stability of time-delay systems, Burkhauser, Boston, 2003.

Gureckii, H., *Analiz i sintez sistem upravlenia s zapazdivaniem*, Mašinostroenie, Moskva, 1974.

Halanay, A., Differential equations – stability, oscillations, time lags, Academic Press, New York, 1966.

Januševskii, R. T., *Upravlenie objektami s zapazdavaniem,* Nauka, Moskva, 1978.

Malek-Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time-delay systems*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

Marshall, J. E., *Control of time-delay systems*, Peter Peregrinus, London, 1979

Smith, O. J., *Feedback control systems*, McGraw-Hill, New York, 1958.

Solodov, A. V., E. A. Solodova, *Sistemi s peremenim zapazdivaniem*, Nauka, Moskva, 1980

VI VREMENSKI DISKRETNI
SISTEMI SA KAŠNJENJEM

8. KVALITATIVNE I KVANTITATIVNE OSOBINE

Iako mrtva vremena u diskretnim sistemima ne stvaraju kvalitativno nov problem, ona su, iz nekoliko razloga zanimljiva.

Diskretni vremenski modeli se odlikuju izuzetnom jednostavnošću, u matematičkom smislu, pa se iz tih razloga sugerišu svim istraživačima.

Ovo je uglavnom pogrešno jer se uvode nove i komplikovane aproksimacije.

Sistemi sa mrtvim vremenom su sistemi u kojima postoji vremensko kašnjenje između ulaza ili upravljanja i ispoljavanja efekata tih dejstava na sistem.

Ona su ili posledica mrtvog vremena svojstvenih komponentama sistema ili namernog uvođenja mrtvog vremena radi lakšeg upravljanja sistemom.

Mrtvo vreme su česta pojava u elektronskim, mehaničkim, biološkim i hemijskim procesima, *Debeljković, Milinković* (1999).

U slučaju pojave mrtvog vremena prilikom prenosa signala, ti sistemi postaju vremenski diskretni sistemi sa mrtvim vremenom i osnovna su tema ove disertacije zajedno sa kontinualnim.

Matematičko predstavljanje vremenski diskretnih sistema sa mrtvim vremenom iskazuje se odgovarajućim sistemom diferencnih jednačina sa retardiranim (pomerenim) argumentom.

Više nego jasno je da postoji potpuna analogija sa vremenski kontinualnim slučajem pa se, u tom smsilu svi *globalni* ranije izneti rezultati mogu ovde primeniti neposredno, *Debeljković, Milinković*, *Stojanović* (2005).

Kontinualni sistemi, definisani su običnim diferencijalnim jednačinama, i poseduju varijable određene u svakom momentu na klasičnom poluotvorenom intervalu $[t_0,\ +\infty[$.

Diskretni sistemi su određenei samo u diskretnim momentima, *Debeljković, Milinković* (1999).

Njihov opis, tada je u formi diferencnih jednačina.

Hibridni *ili mešoviti sistemi* objedinjuju prethodno izneta dva slučaja i danas ih je sve više u praktičnoj upotrebi.

Opisani su diferencijalno-diferencnim jednačinama.

Razmatra se sistem oblika:

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{f}\left(k,\mathbf{x}(k),\mathbf{u}(k)\right),\quad k=k_0,\ k_0+1,\ k_0+2,\ldots \tag{8.1}$$

gde je $\mathbf{x}(k)\in\mathbb{R}^n$ zavisna promenljiva (trenutno stanje), a upravljanje $\mathbf{u}(k)$ uzima vrednosti iz skupa $\mathbb{R}^m$, tako da:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \{\mathbf{x}(k-h_i),\ \ i=0,\ \dots,\ N\} \\ \mathbf{u}_k &= \{\mathbf{u}(k-h_i),\ \ i=0,\ \dots,\ N\}\end{aligned}, \tag{8.2}$$

gde su h_i su nenegativni celi brojevi, koji zadovoljavaju $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_N$.

Početni uslovi su dati sa:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k) &= \boldsymbol{\psi}(k)\ k = (k_0 - h_N),\ (k_0 - h_N + 1),\ \dots k_0 \\ \mathbf{u}(k) &= \mathbf{v}(k)\ \ k = (k_0 - h_N),\ (k_0 - h_N + 1),\ \dots (k_0 - 1)\end{aligned}, \tag{8.3}$$

gde su $\boldsymbol{\psi}(k)$ i $\mathbf{v}(k)$ date (poznate) funkcije, *Debeljković, Milinković*, *Stojanović* (2004).

Za poznato upravljačko dejstvo $\mathbf{u}(k)$, rešenje jed. (8.1) uz poznatnu funkciju početnih uslova, jed. (8.3) određeneo je, očigledno, sekvencom signala $\{\mathbf{x}(k),\ k = k_0 - h_N,\ k_0 - h_N + 1,\ \dots k_0,\ k_0 + 1,\ \dots\}$ takvim da $\mathbf{x}(k)$ zadovoljava jed. (8.3) za $k \le k_0$ i jed. (8.1) za $k > k_0$.

Očigledno da posebni uslovi, koji se nameću funkciji $\mathbf{f}(.,.)$, da bi rešenje egzistiralo i bilo jedinstveno, nisu, ovde, neophodni.

Lako se proverava da rešenje neprekidno zavisi od funkcije početnih uslova $\boldsymbol{\psi}(k)$ ako je $\mathbf{f}(.,.)$ neprekidna po svom prvom argumentu za proizvoljno izabrana druga dva argumenta, *Debeljković* (1994).

Neprekidnost rešenja u odnosu na upravljanje $\mathbf{u}(k)$ zahteva da funkcija $\mathbf{f}(.,.)$ bude neprekidna i po svom drugom argumentu.

Sa formalne tačke gledišta, jed. (8.1) je vremenski diskretna diferencna jednačina reda $(h_N + 1)$.

Skup vremenski diskretnih momenata oblika $\{k_0, k_0 + 1, \dots\}$ nije limitirana pošto se za bilo koji diskretnu sekvencu $\{k_i,\ i = 0, 1, \dots\}$ i bilo koju funkciju $F : \{k_i,\ i = 0, 1, \dots\} \to \mathbb{R}^k$ može formulisati funkcija $\tilde{F}(k_0 + i) = F(k_i)$, za i = 0, 1, …

Jedna važna odlika sistema datog jed. (8.1) jeste da se uvođenjem novih zavisnih varijabli on može pretvoriti u diferencni sistem prvog reda ili u sistem bez vremenskog mrtvog vremena po $\mathbf{x}(k)$.

Da bi se ovo i formalno izrazilo, neka je:

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{x}}_{k_0} = \mathbf{x}(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_1(k+1) = \tilde{\mathbf{x}}_2(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(k+1) = \tilde{\mathbf{x}}_3(k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}(k+1) = \mathbf{f}\left(k,\ \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}(k), \tilde{\mathbf{x}}_{k_1}(k), \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{k_N}(k),\ \mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k-h_N)\right) \\ k_i = h_N - h_i + 1\end{gathered} \quad . \tag{8.4}$$

Kod vremenski kontinualnih sistema *eliminisanje mrtvog vremena* nije moguće, *Debeljković, Milinković*, *Stojanović* (2004).

Linearni diskretni modeli mogu imati sledeći oblik:

$$\mathbf{x}(k+1)=\sum_{i=0}^{N} A_i(k)\mathbf{x}(k-h_i)+B_i(k)\mathbf{u}(k-h_i)+\mathbf{f}(k),$$
$$k=k_0,k_0+1,k_0+2,... \tag{8.5}$$

gde su $A_i(k)$ i $B_i(k)$ $(n\times n)$ i $(n\times m)$ matrice, sledstveno.

Početni uslovi i pretpostavke su kao i u jed. (8.1) .

Proučiće se eksponencijalna rešenja slobodnog sistema i homogenog dela jednačine:

$$\mathbf{x}(k+1)=\sum_{i=0}^{N} A_i\mathbf{x}(k-h_i),\quad k=k_0,\ k_0+1,... \tag{8.6}$$

pri proizvoljnim početnim uslovima.

Neka je $\lambda\neq 0$ kompleksni broj, a **c** kompleksni nenula n – vektor.

Jed. (8.6) ima eksponencijalno rešenje $\lambda^k\mathbf{c},\ k=k_0-h_N,\ k_0-h_N+1,...$ ako i samo ako je:

$$\Delta(\lambda)\mathbf{c}=\mathbf{0}\ , \tag{8.7}$$

gde je:

$$\Delta(\lambda)=I\cdot\lambda^{h_N+1}-\sum_{i=0}^{N}\lambda^{h_N-h_i}A_i\,. \tag{8.8}$$

Vektor **c** koji zadovoljava jed. (8.7) postoji ako i samo ako za karakterističnu jednačinu važi:

$$\det\Delta(\lambda)=0\,. \tag{8.9}$$

Determinanta $\det\Delta(\lambda)$ je polinom po λ na stepen $n(h_N+1)$ i naziva se *karakterističnim polinomom sistema*.

Nule polinome se zovu karakterističnim nulama sistema.

Sve kompleksne nule ovog polinoma su konjugovano - kompleksne (parne), obzirom da su elementi matrice A_i uzeti nad poljem realnih brojeva.

Analogno *Laplace*-ovoj transformaciji kod diskretnih sistema se koristi tzv. Z - transformacija.

Neka je F funkcija koja preslikava $\{0,1,2,...\}\to\mathbb{R}^n$.

Njena Z - transformacija, označena sa zF ili $\hat{F}(z)$, funkcija je kompleksne promenljive definisane izrazom:

$$\hat{F}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}F(k)z^{-k}. \tag{8.10}$$

Pretpostavlja se da je niz sa desne strane konvergentan za $|z|>r$, gde je r pozitivan realan broj.

Inverzna Z - transformacija od $\hat{F}(z)$, *označava se sa* $z^{-1}\hat{F}(z)$.

Diskretni sistemi su izuzetno rasprostranjeni u savremenoj tehnici, *Debeljković, Milinković, Stojanović* (2004).

Vremenski Domen

Ulogu izvoda kod diskretnih sistema preuzima *diferenca*, odnosno konačna razlika, *Debeljković, Milinković*, *Stojanović* (2004).

Kako se sistem posmatra na diskretnom vremenskom skupu određenom *periodom odabiranja*, potrebno je definisati *normalizovano* diskretno vreme: $k = \frac{t}{T}$, $t \in \mathcal{K}$, pri čemu je $\mathcal{K}$ vremenski diskretan skup.

Svakoj veličini $x(t)$ je pridružena funkcija $f(k)$ prema relaciji:

$$f(k) = \frac{1}{T} x(t), \tag{8.11}$$

odnosno:

$$f\left(\frac{t}{T}\right) = f(k) \;\Rightarrow\; \frac{1}{T} x(t+T) = f\left(\frac{t+T}{T}\right) = f(k+1). \tag{8.12}$$

Na ovaj način diferenca $\mathcal{D}x(t)$ može se dobiti samo u funkciji normalizovanog diskretnog vremena:

$$\mathcal{D}x(t) = \frac{x(t+T) - x(t)}{T} = f(k+1) - f(k) = \Delta f(k). \tag{8.13}$$

Za proceduru koja će biti prikazana potrebno je definisati i *operator pomeranja* $\wp(\cdot)$, na sledeći način:

$$\wp \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1), \tag{8.14}$$

pri čemu je $x(k)$ proizvoljna skalarna ili vektorska veličina,.

Tako se dalje dobija:

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k) = \wp x(k) - x(k) = (\wp - 1) x(k), \tag{8.15}$$

odnosno, za proizvoljnu diferencu *j*-tog reda:

$$\Delta^j x(k) = (\wp - 1)^j x(k), \tag{8.16}$$

$$\wp^j x(k) = x(k+j). \tag{8.17}$$

Analogno postupku sa kvazipolinomijalnim matricama, *Januševski* (1978) je razvio pristup za predstavljanje diskretnih sistema sa mrtvim vremenom, koji se u nastavku izlaže.

Polazeći od diferencne jednačine ponašanja i koristeći specifičnost diskretnih sistema sa mrtvim vremenom kod kojih su mrtva vremena celobrojni umnošci normalizovanog vremena *k*, dobijaju se sledeće relacije:

$$\wp x(k) = x(k+1), \tag{8.18}$$

$$\wp^{-1} x(k) = x(k-1), \tag{8.19}$$

odnosno mrtvo vreme kašnjenje je iskazano preko *istog* operatora koji važi i za i diferencu.

Uopšteni, nestacionarni model u prostoru stanja, dat je sa:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}\begin{pmatrix} k, \mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-1), \mathbf{x}(k-2), ..., \mathbf{x}(k-N), ... \\ .... \mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k-1), \mathbf{u}(k-2), ..., \mathbf{u}(k-R) \end{pmatrix}, \tag{8.20}$$

$$\mathbf{x}_i(k) = \mathbf{g}\begin{pmatrix} k, \mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-1), \mathbf{x}(k-2), ..., \\ ....\mathbf{x}(k-N), \mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k-1), \mathbf{u}(k-2), ..., \mathbf{u}(k-R) \end{pmatrix}. \tag{8.21}$$

Treba primetiti da su jed. (8.20) i jed. (8.21) čiste diferencne jednačine.

Za nestacionarni, linearni *diskretni sistem sa mrtvim vremenom* jednačina stanja i jednačina izlaza, biće:

$$\mathbf{x}(k+1) = A(k)\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{N} A_i(k)\mathbf{x}(k-i) + B(k)\mathbf{u}(k) + \sum_{i=1}^{R} B_i(k)\mathbf{u}(k-i), \tag{8.22}$$

$$\mathbf{x}_i(k) = C(k)\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{N} C_i(k)\mathbf{x}(k-i) + D(k)\mathbf{u}(k) + \sum_{i=1}^{R} D_i(k)\mathbf{u}(k-i). \tag{8.23}$$

Ako je sistem još i vremenski nepromenljiv, matrice neće zavisiti od normalizovanog diskretnog trenutka k, tj. biće konstantne.

Prostor Stanja

Januševski (1978) je sproveo postupak izbora veličina stanja polazeći od diferencne vektorske jednačine ponašanja sistema u operatorskom obliku:

$$L(\wp)\mathbf{x}_i(k) = G(\wp)\mathbf{x}_u(k), \tag{8.24}$$

za $k = 0, 1, 2, ...$, uz početne funkcije tipa:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(k) &= \boldsymbol{\psi}_u(k), \quad k = 0, -1, ..., -\tau_\ell \\ \mathbf{x}_i(k) &= \boldsymbol{\psi}_i(k), \quad k = 0, -1, ..., -\theta_r \end{aligned}, \tag{8.25}$$

pri čemu su polinomijalne matrice po argumentu $\wp$,određene sa:

$$L^i(\wp) = L_0^i \wp^q + ... + L_q^i, \quad G^i(\wp) = G_0^i \wp^q + ... + G_q^i, \tag{8.26}$$

$$L(\wp) = \sum_{i=0}^{\ell} L^i(\wp)\wp^{-\tau_i}, \quad G(\wp) = \sum_{i=0}^{r} G^i(\wp)\wp^{-\theta_i}, \tag{8.27}$$

dok *čista vremenska mrtvog vremena* zadovoljavaju:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_\ell \ , \qquad 0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_r \, . \tag{8.28}$$

Elementi matrica $G(\wp)$ i $L(\wp)$ su polinomi sa konstantnim koeficijentima.

Ako se iskoristi relacija:

$$\wp^{(\tau_i + p)} \mathbf{x}_i (k - \tau_i) = \wp^p \mathbf{x}_i (k), \quad \forall p \le q, \tag{8.29}$$

postupak formiranja matematičkog modela u prostoru stanja je identičan prethodno izloženom za kontinualne sisteme sa mrtvim vremenom i radi toga se izostavlja.

Sprovođenjem procedure do kraja, dobija se *diskretna* vektorska jednačina stanja sistema *sa mrtvim vremenom* u obliku:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=0}^{\ell} A_i \mathbf{x}(k - \tau_i) + \sum_{i=0}^{r} B_i \mathbf{x}_u (k - \theta_i), \tag{8.30}$$

kao i vektorska jednačina izlaza sistema:

$$\mathbf{x}_i (k) = C\mathbf{x}(k), \tag{8.31}$$

uz početne funkcije u obliku:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}} (k), \quad -h_\ell \le k \le 0 \\ \mathbf{x}_u (k) &= \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{u}} (k), \quad -h_r \le k \le 0 \end{aligned} , \tag{8.32}$$

Neka su sada komponente *novog* vektora stanja određene sledećim izrazima:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}(k - h_i) = \mathbf{x}_{h_i} (k) \\ \mathbf{x}_1 (k+1) = \mathbf{x}(k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad , \\ \mathbf{x}_{h_{\ell-1}} (k+1) = \mathbf{x}_{h_{\ell-2}} (k) \\ \mathbf{x}_{h_\ell} (k+1) = \mathbf{x}_{h_{\ell-1}} (k) \end{gathered} \tag{8.33}$$

tako da je novi vektor stanja transformisanog sisteama, dat sa:

$$\mathbf{x}_{eq} (k) = \left[\mathbf{x}^T (k), \ \mathbf{x}_1^T (k), \ ..., \ \mathbf{x}_{\tau h_i}^T (k), \ ..., \ \mathbf{x}_{h_\ell}^T (k) \right]^T . \tag{8.34}$$

Slično se transformiše i vektor ulaza, međutim to u ovom slučaju nije od posebnog interesa.

Pažnja će se zadržati na transformisanom vektoru stanja i pridruženoj mu matrici, *Debeljković, Milinković*, *Stojanović* (2004).

Ovako se znatno povećava dimenzija sitema, ali je on i dalje konačan.

Tada se matrice A_{eq} i B_{eq} transformišu na novu formu, kao što sledi, gde je sa N *označeno najveće kašnjenje u sistemu.*

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & ..A_i.. & A_N \\ I_n & 0 & ..0.. & 0 \\ 0 & I_n & ..0.. & 0 \\ 0 & 0 & ..I_n.. & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{eq} = \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8.35}$$

Posmatra se slobodni radni režim i matrica A_{eq}.

Ova kvadratna matrica ima dimenziju: $n \times (N+1)$, što odgovara redu *novoformiranog* diskretnog sistema bez mrtvog vremena.

Procedura eliminisanja mrtvog vremena je svojstvena *samo* diskretnim sistemima i omogućava da se umesto sistema sa mrtvim vremenom analizira *sistem bez mrtvog vremena*, *Debeljković, Milinković*, *Stojanović* (2004).

Posmatarju se dalje *diskretni sistem sa mrtvim vremenom*, sa svojim modelom u prostoru stanja:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=0}^{N} A_i \mathbf{x}(k-i), \tag{8.36}$$

uz funkciju početnih uslova:

$$\mathbf{x}(j) = \boldsymbol{\psi}(j), \quad \forall j = 0, -1, ..., -N. \tag{8.37}$$

Kompleksni Domen

Kompleksni domen je veoma značajan domen za proučavanje diskretnih sistema sa mrtvim vremenom.

Diskretne prenosne funkcije se mogu definisati kao kod sistema bez mrtvog vremena.

Ove funkcije imaju konačan broj polova, odnosno karakteristični polinom je sa konačnim brojem nula, koji odgovara dimenziji ekvivalentnog (proširenog) sistema bez mrtvog vremena.

Neposrednom aplikacijom Z - transformacije na jed. (8.36), proizlazi:

$$f(z) = \det\left(z\,I - \sum_{i=0}^{N} z^{-i} A_i \right). \tag{8.38}$$

Prethodno formulisana ekvivalentna matrica ispunajva sledeću jednačinu:

$$f(z) = \det\left(zI_n - \sum_{i=0}^{N} z^{-i} A_i \right) = \det\left(zI_{n\times(N+1)} - A_{eq} \right) = 0. \tag{8.39}$$

Ova relacija je i *osnovni razlog* uvođenja ekvivalentne matrice jer je to, po dimenziji, *najmanja matrica* koja sadrži sve potrebne informacije bitne za analizu diskretnog sistema sa mrtvim vremenom, *Debeljković, Milinković*, *Stojanović* (2004).

Razmatra se vremenski diskretni sistem sa jednim mrtvim vremenom i periodom odabiranja l po stanju:

$$\mathbf{x}(k+1)=A_0\mathbf{x}(k)+A_1(k)\mathbf{x}(k-l)+B\mathbf{u}(k), \quad k\geq k_0, \tag{8.40}$$

$$\mathbf{x}_i(k)=C\mathbf{x}(k)+D\mathbf{u}(k). \tag{8.41}$$

Treba primetiti da je l ceo broj.

Z - transformacija jed. (8.40 - 8.41), daje:

$$z\hat{\mathbf{X}}(z)-z\,\mathbf{x}(k_0)=A_0\hat{\mathbf{X}}(z)+A_1z^{-l}\hat{\mathbf{X}}(z)+B\hat{\mathbf{U}}(z), \tag{8.42}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_i(z)=C\,\hat{\mathbf{X}}(z)+D\hat{\mathbf{U}}(z). \tag{8.43}$$

Ako je početno stanje nulto, tada je $\hat{\mathbf{X}}_i(z)=\bar{W}(z)\hat{\mathbf{U}}(z)$, gde je:

$$\bar{W}(z)=C\left(zI-A_0-A_1z^{-l}\right)^{-1}B+D. \tag{8.44}$$

Važna razlika između $\bar{W}(z)$ u jed. (8.44) i analogne veličine $W(s)$ kod vremenski kontinualnih sistema sa mrtvim vremenom je to što je $\bar{W}(z)$ racionalna funkcija kompleksno promenljive a ne transcendentna kao tamo.

Polovi sistema su definisani kao one kompleksne vrednosti z za koje diskretna prenosna funkcija $\bar{W}(z)$ teži beskonačnosti.

Stoga, vrednosti z zadovoljavaju jednakost:

$$\det\left(zI-A_0-A_1z^{-l}\right)=0. \tag{8.45}$$

Jed. (8.45) ima konačan broj korenova.

Ovo potvrđuje da je prostor stanja vremenski diskretnog sistema sa mrtvim vremenom *konačne dimenzije*, *Debeljković, Milinković, Stojanović* (2004).

Diskretni sistemi sa mrtvim vremenom, kako je već pokazano, mogu se tretirati kao obični diskretni sistemi bez mrtvog vremena nakon transformacije stanja.

Nije potrebno posebno apostrofirati pogodnosti koje pruža implementacija digitalnog računara u upravljačkom sistemu.

Vremenski diskretni sistemi sa mrtvim vremenom se mogu analogno predstaviti u prostoru stanja, vektorskom diferencnom jednačinom stanja:

$$\mathbf{x}(k+1)=A_0\mathbf{x}(k)+A_N\mathbf{x}(k-N), \tag{8.46}$$

i početnom funkcijom, u obliku:

$$\mathbf{x}(k)=\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}(k), \quad \forall k=(k_0-N)\ (k_0-N+1),\ldots,k_0, \tag{8.47}$$

pri čemu je očigledno dopušteno jedno proizvoljno veliko *diskretno kašnjenje*.

Teorema 8.1 Rešenje jed. (8.46) može se predstaviti sumom:

$$\mathbf{x}(k)=\sum_{j=k_0-N}^{k_0}\Phi(k,j)\cdot\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}(j),\ \forall k\geq k_0, \tag{8.48}$$

pri čemu *diskretna fundamentalna matrica* $\Phi(k, j)$ zadovoljava:

$$\Phi(k+1, j) = A_0\Phi(k, j) + A_N\Phi(k-N, j), \quad \forall k \geq k_0, \tag{8.49}$$

$$\Phi(k, j) = I \cdot \delta(k-j), \quad \forall k, j \in [k_0 - N, \ k_0], \tag{8.50}$$

Malek-Zavarei, Jamshidi (1987), *Januševski* (1978)*.

Polazeći od vektorske jednačine stanja i početnih uslova sledećeg oblika:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{N} A_i\mathbf{x}(k-i), \tag{8.51}$$

$$\mathbf{x}(k) = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{x}}(k), \quad \forall k = 0, -1, \ldots, -N. \tag{8.52}$$

Januševski (1978) je dao rešenje jed. (8.51) u formi:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^{N} \Phi(k-i)A_i\mathbf{x}(-i). \tag{8.53}$$

Matrica $\Phi(k)$, ima ove karakteristike:

$$\Phi(k+1) = \sum_{i=0}^{N} A_i\Phi(k-i), \tag{8.54}$$

$$\Phi(0) = I. \tag{8.55}$$

Porde se rešenja vremenski neprekidnog i vremenski prekidnog sistema.

Poznato je da je fundamentalna matrica *vremenski neprekidnih* sistema *sa mrtvim vremenom* oblika:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left(sI - \sum_{i=0}^{k} A_i e^{-s\tau_i}\right)^{-1}\right\} \tag{8.56}$$

Kod *diskretnog sistema sa mrtvim vremenom* sve je sasvim drugačije.

Primenom Z - transformacije na jed. (8.56), sledi:

$$\Phi(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\left(zI - \sum_{i=0}^{N} z^{-i}A_i\right)^{-1}\right\} \tag{8.57}$$

Jed. (8.57) se jednostavno rešava.

Gorecki, *Fuksa*, *Grabowsky*, *Korytowsky* (1989), predlažu kao zamenu, sledeći polinom:

$$\Delta(\lambda) = I\lambda^{N+1} + \sum_{i=0}^{N} \lambda^{N-i}A_i, \tag{8.58}$$

što dovodi do istih tumačenja.

* Dokazi svih *Stavova* i *Teorema* mogu se naći u lit. *Debeljković et al.* (2004).

Barnett, S., *Matrices in control theory*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.

Bellman, R. K. L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, New York, 1963.

Debeljković, D. Lj., *Sistemi sa kašnjenjem*, GIP Kultura, Begrad, 1994.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd 1999.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stabilnost sistema čistim vremnskim kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd 2004

Elsgolc, L. E., S. B. Norkin, *Vvdenie v teoriu diferencijalnih uravnenia s otklonjajušćim argumentom*, Nauka, Moskva, 1971.

El'sgol'ts, L. E., S. B. Norkin, *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*, Academic Press, New York, 1973.

Goreckii, H., S. Fuksa, P. Grabowski, A. Korytowski, *Analysis and synthesis of time delay systems*, J. Wiley, New York, 1989.

Gu, K., Kharitonov, V. L., Chen, J., Stability of time-delay systems, Burkhauser, Boston, 2003.

Gureckii, H., *Analiz i sintez sistem upravlenia s zapazdivaniem*, Mašinostroenie, Moskva, 1974.

Halanay, A., Differential equations – stability, oscillations, time lags, Academic Press, New York, 1966.

Januševskii, R. T., *Upravlenie objektami s zapazdavaniem*, Nauka, Moskva, 1978.

Lakshmikantham, V., S. Leela, *Differential and integral inequalities*, Vol 1. Academic Press, New York, 1969.

Lancaster, P., M. Tismenetsky, *The theory of matrices*, Academic Press, New York, 1985.

Lazarević, P. M., D. Lj. Debeljković, "Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed states", *Preprints* 4th *IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Rocquencourt, Paris, France, September 2003, CD – Rom.

Malek-Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time-delay systems*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

Marshall, J. E., *Control of time-delay systems*, Peter Peregrinus, London, 1979

Miškis, A. D., *Lineinie diferencijalnie uravnenia s zapazdajušćim argumentom*, Nauka, Moskva, 1972.

Oguztoreli, M. N., *Time - lag control systems*, Academic Press, New York, 1966.

Smith, O. J., *Feedback control systems*, McGraw-Hill, New York, 1958.

Solodov, A. V., E. A. Solodova, *Sistemi s peremenim zapazdivaniem*, Nauka, Moskva, 1980.

VII VREMENSKI KONTINUALNI
SINGULARNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

9. KVALITATIVNE I KVANTITATIVNE OSOBINE

U prethodnim poglavljima, čitaocu se pružila jedinstvena prilika, da na jednom mestu spoznaju dve veoma specifične i aktuelne klase sistema automatskog upravljanja.

U tom smislu značajan prostor bio je namenjen izučavanju problema vezanih za dinamička ponašanja tzv. uopštenih sistema u prostoru stanja kao i sistemima koji poseduju mrtvo vreme, kao i njihovim diskretnim verzijama.

Inače ima veliki broj sistema u kojima je izražen jednovremeni fenomen mrtvog vremena i singularnosti tako da ova klasa sistema poznata pod imenom *Singularni - deskriptivni sistemi sa mrtvim vremenom* iziskuje veliku pažnju imajući u vidu da očigledno povezuju prethdno izložene specifičnosti ovde razmatranog vrsta procesa i sistema.

Oni poseduju mnoge specifične karakteristike.

Kada su u pitanju ovi sistemi ili procesi, matematički sistema automatskog upravljanja predstavljena je kuplovanim sistemom diferencijalnih jednačina sa pomerenim argumentom, kojima je ataširan sistem odgovarajućih algebarskih jednačina koje u opštem slučaju mogu biti, takođe, sa mrtvim vremenom ili bez njega.

Kao i kod običnih sistema sa kašnjenjem prošlost sistema, se ovde, prikazuje kroz vremenski kontinualnu *funkciju* saglasnih početnih stanja koja je u dejstvu sa podskupom saglasnih početnih uslova koji pripadaju delu sistema koji poseduje singularnost.

S*ingularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem*, obično se predstavljaju u vidu:

$$E(t)\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}\left(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(t-\tau),\mathbf{u}(t)\right), \quad t\geq 0, \tag{9.1.a}$$

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau\leq t\leq 0, \tag{9.1.b}$$

gde su: $\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ vektor stanja sistema, $\mathbf{u}(t)\in\mathbb{R}^m$ vektor upravljanja, $E(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ kvadratna neregularna vremenski promenljiva matrica. $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\left([-\tau,\ 0],\mathbb{R}^n\right)$ je dozvoljena (prihvatljiva) funkcija početnih stanja.

$\mathcal{B}\left([-\tau,\ 0],\mathbb{R}^n\right)$ je *Banach*-ov prostor vremenskih neprekidnih funkcija, koje preslikavaju vremenski interval $[-\tau,\ 0]$ u $n-$dimenzioni realni prostor, u oznaci $\mathbb{R}^n$, sa topologijom uniformne konvergencije, *Debeljkovic* (2010).

Norma elementa $\boldsymbol{\varphi}$ u *Banach*-ovom prostoru $\mathcal{B}$, uvodi se na sledeći način:

$$\|\boldsymbol{\varphi}\| = \sup_{\vartheta\in[-\tau,\ 0]}\|\boldsymbol{\varphi}\|, \tag{9.2}$$

sa osobinom: $\mathbf{f}\in\mathrm{C}^1\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R},\ \mathbb{R}^n\right)$, *Debeljković* (2010).

Linearna, neautonomna podklasa sistema, datog jed. (9.1), može se dati kao:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t)=A_0\mathbf{x}(t)+A_1\mathbf{x}(t-\tau)+B\mathbf{u}(t)+\mathbf{f}(t),\ t\geq 0, \tag{9.3.a}$$

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau\leq t<0, \tag{9.3.b}$$

gde su : $A_0,\, A_1\in\mathbb{R}^{n\times n},\, B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ konstantne matrice, a $\mathbf{f}(t)\in\mathbb{R}^n$ neprekidna funkcija u kojoj su oličene eksterna dejstava na razmatrani sistem.

Kanoničke Forme

Hronološki i detaljan uvid u kanonične forme, neprekidnih singularnih i diskretnih deskriptivnih sistema, nalaze se u prikaldnom obliku u lit. *Debeljković et al.*(1996.a, 1996.b, 2005.b) i *Debeljković et al*. (1998, 2005.c, 2010), respektivno.

Za vremenski kontinualne *singularne sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem*, za sistem dat jed. (9.3), data je u sledećem vidu,u jednom od klasičnih kanonskih oblika:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1(t)&=A_0^{11}\mathbf{x}_1(t)+A_1^{11}\mathbf{x}_1(t-\tau)+A_1^{12}\mathbf{x}_2(t-\tau)+B^1\mathbf{u}(t)+\mathbf{f}_1(t)\\ N\dot{\mathbf{x}}_2(t)&=\mathbf{x}_2(t)+A_1^{21}\mathbf{x}_1(t-\tau)+A_1^{22}\mathbf{x}_2(t-\tau)+B^2\mathbf{u}(t)+\mathbf{f}_2(t),\quad t\geq 0\end{aligned}, \tag{9.4}$$

$$\mathbf{x}_1(t)=\boldsymbol{\varphi}_1(t),\quad \mathbf{x}_2(t)=\boldsymbol{\varphi}_2(t),\quad -\tau\leq t\leq 0\,, \tag{9.5}$$

gde je matrica N nilpotentna i saglasnog formata za množenje.

Pod pretpostavkom da je matrični par $(E,\, A)$ regularan i neinpulsan, *Debeljković et al*. (1996.a, 1996.b), uvek postoje dve nesingularne matrice: $U, V\in\mathbb{R}^{n\times n}$, takve da :

$$UEV=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \ UA_0V=\begin{pmatrix} A_0^{11} & 0\\ 0 & I_{n-r}\end{pmatrix},\ \ UA_1V=\begin{pmatrix} A_1^{11} & A_1^{12}\\ A_1^{21} & A_1^{22}\end{pmatrix}, \tag{9.6}$$

gde su: $I_r\in\mathbb{R}^{r\times r},\, I_{(n-r)\times(n-r)}\in\mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ jedinične matrice koje autonomni sistem, dat jed. (9.3) mogu da prevedu u sledeću kanononsku formu, *Xu et al*., (2004):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1(t)&=A_0^{11}\mathbf{x}_1(t)+A_1^{11}\mathbf{x}_1(t-\tau)+A_1^{12}\mathbf{x}_2(t-\tau)\\ \mathbf{0}&=\mathbf{x}_2(t)+A_1^{21}\mathbf{x}_1(t-\tau)+A_1^{22}\mathbf{x}_2(t-\tau)\end{aligned}. \tag{9.7}$$

Kretanje ovih sistema u prostoru stanja,nisu od interesa za razmatranja u ovoj disertaciji , a konkretni izrazi mogu se naći u lit. *Debeljković* (2010).

Literatura

Debeljković, D. Lj., *Kontinualni singularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem*, I DEO, Mašinski fakultet Beograd, Beograd, 2010.

Debeljković, D. Lj., S. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1996.b.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stabilnostsistemasakašnjenjem nakonačnomvremeskomintervalu*, GIPKultura, Beograd, 1999.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stabilnostsistema sakašnjenjemnakonačnomibeskonačnomvremenskomintervalu*, Čigoja - Štampa, Beograd, 2004.

Debeljković, Lj.D., Lj. A. Jacić, M. S. Medenica, *Sistemisakašnjenjem*, Mašinskifakultet, Beograd, 2005.a.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.b.

Xu, S., J. Lam,C. Yang, ”Robust H_∞ Control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty”, *J. of Dynamics Contiuous, Discrete Impulsive Systems* (Canada) (2004).

VIII VREMENSKI DISKRETNI DESKRIPTIVNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

10. KVALITATIVNE I KVANTITATIVNE OSOBINE

Linearni vremenski diskretni, multivarijabilni sistemi koji poseduju i mrtvo vreme prisutno u stanju sistema, a za slobodni radni režim, mogu se dati svojim modelom u prostoru stanja sa:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{N} A_j\mathbf{x}(k-h_j), \tag{10.1.a}$$

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-h, -h+1, ..., 0\}, \tag{10.1.b}$$

gde su: $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja sistema, $E, A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sistemske matrice, $j = 1, 2, \ ,$ h je pozitivan ceo broj koji predstavlja čisto vremensko kašnjenje u stanju sistema, tako da važi: $0 = h_0 \leq h_1 \leq h_2 \leq, ...h_N$, sa kvadratnom matricom E obavezno neregularnom a $\boldsymbol{\psi}(\vartheta)$ je unapred poznata diskretna vektorska početna funkcija, *Debeljković* (2010).

U jednostavnijim prilikama jed. (24.1), se preinačuje u:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-h), \tag{10.2.a}$$

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-h, -h+1, ..., 0\}, \tag{10.2.b}$$

Definicija 24.1 Linearni vremenski diskretni deskriptivni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (10.2), je *regularan* ako važi:

$$\det\left(z^2E - zA_0 - A_1\right) \neq 0\,. \tag{10.3}$$

Xu et al. (2004).

Definicija 24.2 Linearni vremenski diskretni deskriptivni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (10.2), je *kauzalan* (uzročan) ako je regularan i ako važi:

$$\deg ree\left(z^n \det\left(zE - A_0 - z^{-1}A_1\right)\right) = n + rang\,E\,. \tag{10.4}$$

Xu et al. (2004).

Definicija 24.3 Linearni vremenski diskretni deskriptivni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (10.2) je *stabilan* ako je *regularan* i ako $\mathcal{Z}\left(E, A_0, A_1\right) \subset \mathcal{D}(0,1)$, gde je:

$$\mathcal{Z}\left(E, A_0, A_1\right) = \left\{z \mid \det\left(z^2E - zA_0 - A_1\right) = 0\right\}, \tag{10.5}$$

a $D(0,1)$ skup (otvoreni) tačaka unutar jediničnog kruga u z ravni sa centrom u njenom ishodištu, *Xu et al*. (2004).

Definicija 24.4 Linearni vremenski diskretni deskriptivni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem je *dopustiv* ako je *regularan, uzročan* i *stabilan, Xu et al*. (2004).

Literatura

Debeljković, D. Lj., *Kontinualni singularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem*, I DEO, Mašinski fakultet Beograd, Beograd, 2010.

Xu, S., C. Yang, "H_∞ State feedback control for discrete singular systems", *IEEETrans. Automat. Control***AC-45** (6) (2000.b) 1405-1409.

Xu, S., C. Yang, Y. Niu, J. Lam, "Robust stabilization for uncertain discrete singular systems", *Automatica*, Vol. 37, (2001.a) 769-774.

Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Quadratic stability and stabilization of uncertain linear discrete-time systems with state delay", *Systems Control Lett.* (43), (2001.b) 77-84.

Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Robust H_∞ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty", *Dynamics Continuous, Discrete Impulsive Systems*, Vol. 9, No. 4, (2004) 539 – 554.

.

NEKA RAZMATRANJA VEZANA
ZA OPŠTU TEORIJU STABILNOSTI
SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

IX OPŠTA RAZMATRANJA

11. SAVREMENI KONCEPTI U TEORIJI UPRAVLJANJA I STABILNOSTI SISTEMA

11.1 UVODNA RAZMATRANJA

Savremena teorija sistema i upravljanja raspolaže sa brojnim konceptima stabilnosti, koji su proistekli iz evidentih problema iz prakse ili imaju samo akademski značaj.

U tom smislu od prvorazrednog značaja je stabilnost u smislu Ljapunova, zatim inženjerska ili tzv. tehnička stabilnost koja se pojavljuje u brojnim konceptima pa su u tom smislu poznati: koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, praktična stabilnost, stabilnost ograničeni ulaz-ograničeni izlaz, konačna stabilnost, orbitalna stabilnost, eksponencijalna stabilnost i mnoge druge. Svi ti koncepti susreću se sa nekim neumitnim pitanjima koje treba rešeiti i dati odgovore na njih kako bi predloženi koncepti imali svoja suštinska opravdanja*:

- O čijoj se stabilnosti radi?
- Kako se definiše rastojanje između posmatranih stanja, odnosno kretanja u odnosu na razmatrano stanje, čija se stabilnost ispituje?
- Kako se definiše "bliskost" između stanja, odnosno kretanja?
- Pod kojim uslovima se zahteva tražena "bliskost"?
- Na kom se vremenskom intervalu zahteva tražena "bliskost"? *Grujić* (1970)

11.2 NEKA OPŠTA PITANJA TEORIJE PRAKTIČNE STABILNOSTI I STABILNOSTI NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU

U konkretnim slučajevima rada sistema nije uvek interesantno proučavatii ljapunovsku stabilnost sistema, imajući posebno u vidu sve one poznate nedostatke koja ona nosi sa sobom, u prvom redu beskonačni vremenski interval na kome se prati ponašanje sistema.

---

*U ovoj glavi izlaže se, skladno modifikovana materija, preuzeta iz monografije *Debeljković* (2009), imajući u vidu da je tematika ove doktorske disertacije neraskidivo povezana sa pomenutom monografijom imajući u vidu buduće doprinose same disertacije.

U tom smislu ovde izložena materija oslobođena je od svih suvišnih detalja i opštosti kojima je obilovala prethodna monografija, preciznije njen uvodni deo.

Nekada je, pored konačnog vremenskog intervala rada sistema prevashodno važno da se njegovo kretanje odvija unutar nekih a priori propisanih granica koje nameće realan problem.

Klasičan primer takvih zahteva oličen je u potrebi da sistem ni u kom trenutku ne izađe iz nekog skupa dozvoljenih stanja, ali da posle određenog vremena njegovo kretanje ne napušta unapred zadati skup, čime se praktično promoviše ponašanje sistema sa unapred zadatim vremenom smirenja, *Grujić* (1970).

Sistem može da bude stabilan, da ima i osobinu privlačenja što ga sve čini asimptotski stabilnim, ali da uprkos tome ima neprihvatljive pokazatelje tranzijentog procesa, u prvom redu preskoka, kao jednog od najznačajnih dinamičkih pokazatelja rada sistema.

Prema tome veoma je značajno izučavati stabilnost sistema u odnosu na unapred *zadate skupove dozvoljenih i početnih stanja* u faznom prostoru, *Dorato* (1960).

Činjenica je, da se danas, dinamičkom ponašanju sistema automatskog upravljanja nameću veoma strogi i kad kad oprečni zahtevi veoma je značajno izučavati njihovu dinamiku na *konačnom vremenskom intervalu*.

Imajući u vidu, da se u konceptu stabilnosti generišu uglavnom dovoljni uslovi, posve je jasno da su ovaki kriterijumi prihvatljivi sa inženjerske tačke gledišta.

Dovoljnost proističe iz činjenice da se uglavnom stabilnost ispituje na osnovu matrične mere koja se, uopšteno govoreći, menja pri linearnim nesingularnim transformacijama polaznog sistema i nije inherentan osobina sistema, kao što su sopstvene vrednosti (stabilnost), upravljivosi i recimo osmotrivost.

Kristalno je jasno da jedan te isti sistem u odnosu na neki skup $\{T, \alpha_1, \beta_1\}$ može biti stabilan na konačnom vremenskom intervalu, a da se ta ista osobina ne izkazujei za neki drugi izabrani skup $\{T, \alpha_2, \beta_2\}$.

Identičana razmišljanja izvode se ako se utvrde iznosi za granice skupova $\alpha_{(.)}$ i $\beta_{(.)}$, a varira trajanje vremenskog intervala $T_{(\cdot)}$.

Lako se konstatuje, da osobina stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu ne zavisi od suštinskih osobina sistema, oličenih prvenstveno kroz spektar sopstvenih vrednostima matrice sistema, već neke druge pokazatelje koji menjaju svoje iznose i pri linearnim nesingularnim transformacijama, polaznog sistema jednačina.

Literatura

Abgarijan, K. A., “Ustoičivost dviženia na konečnom intervale” v knjigi *Itogi nauki i tehniki*, VINITI AN SSSR, Obščaja mehanika, Moskva (1976) 43–124.

Abdullin, R. Z., Yu. L. Anapoljskii, “K zadačam praktičeskoj ustoičivosti” v knjigi *Vektor-funkcii Ljapunova i ih postoenie*, Nauka, Novosibirsk (1980) 34–911.

Barabashin, E. A, *Lyapunov Functions*, Nauka, Moscow, 1970.

Debeljković, D. Lj., *Stabilnost sistema automatskog upravljanja na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, Mašinski fakultet Beograd, Beograd, (2009).

Gajić, Z., M. Qureshi, *Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control*, Academic Press, San Diego, (USA), 1995.

Grujić, Lj. T., *Automatic Control System Synthesis of Rigid Body Motion through a Fluid*, M.Sc. Thesis (in Serbian), Electrical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, October 1970.

Grujić, Lj. T., *Large-Scale Systems Stability,* (in Serbian), Faculty of Mechanical Eng., Belgrade, 1974.

Grujić, Lj. T., A. A. Martinjuk, M. Ribbens-Pavella, *Stability of Large Scale Systems under Structural and Singular Disturbances*, Naukova Dumka, Kiev, 1984.

Hahn, W., *Theory and Application of Lyapunov's Direct Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1963.

Hahn, W., *Stability of Motion*, Spinger-Verlag, Berlin, 1967.

Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, MacMillan Publ. Company, New York, 1990.

Krasovskii, N. N., *Problems in the Theory of Stability of Motion*, StanfordUniversity Press, 1963.

Lyapunov, A. M., *General Problem of Stability of Motion*, Moscow, Leningrad, USSR Academy of Science,1956.

Rouche, N., P. Haberts, M. Laloy, *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*, Spinger-Verlag, New-York, 1977.

Tchetaev, N. G., *Stability of Motion*, Gosthizdat, Moscow, 1955.

Valeev, G. K., G. S. Finin, *The Construction of Lyapunov Functions*, Naukova Dumka, Kiev, 19811.

Yoshizawa, T., *Stability Theory by Lyapunov's Second Method*, The Mathematical Society of Japan,Tokyo,1966.

NEKA PITANJA OPŠTE TEORIJE ROBUSNOSTI I STABILIZACIJE SISTEMA

X ROBUSNOST STABILNOSTI

12. ROBUSNOST

12.1 Osnovni pojmovi o osobini robusnosti sistema[*]

12.1.1 Uloga modela u proučavanju sistema

Zadatak svakog sistema automatskog upravljanja je da obezbedi da odstupanje stvarnog od željenog dinamičkog ponašanja objekta bude dovoljno malo, čim je odstupanje ulaznih veličina i početnih uslova od svojih nominalnih vrednosti dovoljno malo, *Milojković, Grujuć,* (1990).

Da bi se objekti upravljanja mogli efikasno iskoristiti u praksi, neophodno je poznavati njihova svojstva. Postoji više načina iskazivanja ponašanja objekata (sistema), ali se danas prevashodno koriste matematičke zavisnosti u obliku diferencijalnih ili diferencnih jednačina.

Osnovni razlog za to je što ovaj pristup omogućava efikasno ispitivanje statičkih i dinamičkih osobina objekata (sistema), a često čini suvišnim i ispitivanja na njima ili njihovim fizičkim modelima, *Debeljković* (1989).

U cilju saznavanja bitnih osobina nekog objekta, isti se najpre posmatra i na njemu vrše merenja, da bi se na osnovu njih projektovao model koji u konciznoj formi pruža sve neophodne informacije o objektu. Tako se može doći do određenih zaključaka i obogatiti teorijska saznanja o njemu.

Da bi se ta saznanja verifikovala, neophodno je planirati nova posmatranja.

Na osnovu poznavanja matematičkog modela objekta moguće je projektovati upravljački sistem, odgovarajući zakon upravljanja i izvršiti optimalan izbor tehničkih sredstava za njegovo realizovanje.

Definicija 12.1 Model je opis suštinskih osobina realnog objekta koji o njemu u pogodnoj formi iskazuje svu neophodnu informaciju.

Jedna od najopštijih podela modela je na realne i simboličke.

Iz kategorije simboličkih, od posebne je važnosti klasa informacionih modela, koji se danas u najvećem broju slučajeva formiraju u obliku matematičkih modela, *Debeljković* (1989).

Definicija 12.2 Formalan matematički opis (opis pomoću matematičkih simbola, operacija i relacija) sistema koji omogućava potpunu analizu njegovih dinamičkih osobina i njegovog dinamičkog ponašanja za proizvoljne promene ulazne veličine i proizvoljne početne uslove je *matematički model* tog sistema, *Milojković, Grujuć,* (1990).

---

[*] Izlaže se, delimično prurеđena i prilagođena, materija preuzeta najvećim delom iz rada *Đurović* (1996) a manjim delom iz rada *Đurović* (1999).

12.1.2 Stepen tačnosti matematičkih modela

U našem okruženju još uvek ne postoje procesi ili pojave čiju prirodu potpuno poznajemo.

To znači da količina informacija koje mi o njima posedujemo nikad nisu dovoljne za njihov apsolutno tačan opis.

Sa druge strane, što detaljnije posmatramo proces, to njegov opis postaje sve složeniji.

Na primer, kada se u nekom procesu uzmu u obzir trenje, nelinearnosti statičkih karakteristika pojedinih prenosnih organa, nehomogenost strujnih i temperaturskih polja, vremenska promenljivost parametara procesa, vreme neophodno za transport signala kroz prostor u kojem se proces odvija i slično, kao rezultat matematičkog modeliranja tog procesa se dobija izuzetno složen sistem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem i vremenski promenljivim parametrima, *Debeljković* (1989).

To praktično znači da složenost matematičkog modela zavisi od usvojenog modela.

Model je jedan idealizovani proces, nastao kao rezultat uprošćavanja stvarnog procesa.

Stepen tačnosti matematičkog modela zavisi od broja i karaktera usvojenih pretpostavki o procesu koji opisuje.

Te pretpostavke moraju biti opravdane da bi se matematički model mogao efikasno praktično primeniti.

Prilikom njihovog formiranja čini se kompromis između stepena tačnosti opisa procesa i jasnoće i jednostavnosti njegove forme, tj. između dubine analize pojava u procesu i upotrebne vrednosti njegovog matematičkog modela, *Debeljković* (1989).

Stoga se proces najpre posmatra što objektivnije, uz minimalan mogući broj pretpostavki, radi dobijanja što verodostojnijeg matematičkog modela. Zatim se korišćenjem odgovarajućih matematičkih metoda vrši njegovo uprošćavanje, tako što se uvodi što veći broj realnih, opravdanih pretpostavki.

Pozitivna posledica ovog pristupa je razgraničavanje primarnih i sekundarnih karakteristika procesa bitnih za njegovo praktično korišćenje.

Ukoliko je opravdano, matematički model se svodi na svoj najjednostavniji oblik, a to je sistem običnih linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima, *Debeljković* (1989).

U tom cilju je potrebno izvršiti linearizaciju nelinearnih jednačina ponašanja, zanemariti nestacionarnost procesa i usvojiti konstantne vrednosti za njegove prostorno promenljive parametre.

Svi pomenuti uzroci netačnosti matematičkih modela se mogu klasifikovati u sledeće grupe, *Petkovski* (1984).

Netačnosti prisutne u matematičkom modeliranju realnog sistema mogu biti:

- Nedovoljno poznavanje svih procesa koji se odvijaju u sistemu
- Nemogućnost tačnog matematičkog opisa svih procesa u sistemu
- Linearizacija nelinearnosti i aproksimacija nestacionarnosti
- Nemogućnost tačnog određivanja pojedinih parametara u sistemu

- Uprošćavanje sistema da bi se dobio sistem nižeg reda

1. Promene dinamike sistema usled uticaja okoline, tolerancija uproizvodnji pojedinih elemenata, zamora i starenja materijala, odstupanja napajanja od nominalne vrednosti, itd.

2. Greške u kalibraciji instrumenata, itd.

U literaturi *Lehtowski et al*. (1984), *Petkovski* (1984) je dostupan čisto matematički pristup opisa samog procesa matematičkog modeliranja, koji uzima u obzir netačnosti koje se tom prilikom javljaju.

Ako se sa $\mathcal{S}$ obeleži *apsolutno tačan* matematički model nekog sistema, a sa $\mathcal{S}^*$ matematički model dobijen na osnovu usvojenog modela tog sistema, onda $\mathcal{S}^*$ predstavlja višestruku aproksimaciju $\mathcal{S}$.

Ona se može prikazati kao funkcija preslikavanja:

$$\eta : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^* . \tag{12.1}$$

Ako se uvedu parametri $\wp_i$, $i = 1,2,3,...$, od kojih svaki karakteriše jedan od mogućih vidova aproksimacije, onda se funkcija preslikavanja η može predstaviti kao funkcija tih parametara:

$$\eta = \eta\left(\wp_1, \wp_2, \wp_3, ...\ \right). \tag{12.2}$$

Neka je:

$$S = \left\{ \mathcal{S}_j^*,\quad j = 1,\ 2,\ 3,... \right\}, \tag{12.3}$$

skup svih mogućih prikaza sistema.

Tada je $\mathcal{S}$ samo jedan element tog skupa.

Svaka dva elementa ovog skupa se međusobno razlikuju samo usled različitih uticaja zanemarenih prilikom matematičkog modeliranja.

Svi uticaji zanemareni prilikom i - te aproksimacije sistema $\mathcal{S}$ se mogu predstaviti kao *vektor zanemarenih elemenata* $\mathbf{q}_i$ iz nekog skupa $\mathcal{Q}$, koji čini ograničeni beskonačni podskup skupa vektora $\mathbf{q}$, koji sadrži beskonačan broj vektora $\mathbf{q}_i$, koji se svi nalaze unutar neke granice.

Od tog vektora zavisi odstupanje modela od stvarnog sistema, pa se skup S može predstaviti kao:

$$S = \left\{ \mathcal{S}_i^* : \mathcal{S}_i^* = \mathcal{S}_i^*\left(\mathbf{q}_i\right),\quad \mathbf{q}_i \in \mathcal{Q},\quad i = 1,2,3,... \right\}, \tag{12.4}$$

odnosno:

$$S = \left\{ \mathcal{S}_i^* :\ \mathcal{S} = \left(\mathcal{S}_i^*,\ \partial\mathcal{S}_i^*\right),\quad \left|\partial\mathcal{S}_i^*\right| \le \zeta,\quad i = 1,2,3,... \right\}. \tag{12.5}$$

Sistem $\mathcal{S}$ je ovde definisan kao par $\left(\mathcal{S}_i^*, \partial\mathcal{S}_i^*\right)$, gde je $\partial\mathcal{S}_i^*$ odstupanje modela $\mathcal{S}_i^*$ od sistema $\mathcal{S}$, odnosno greška modeliranja, a $\left|\partial\mathcal{S}_i^*\right|$ je neka mera te greške.

Postoje različite mogućnosti njihovog definisanja i daljeg korišćenja, zavisno od fizičke prirode sistema i dostupnog matematičkog aparata.

12.1.3 Pojam osetljivosti i robusnosti

Greška koja se čini prilikom modeliranja sistema pri njegovoj praktičnoj primeni mora uzeti u obzir. S obzirom na činjenicu da se na osnovu modela projektuju i upravljački sistem i algoritam upravljanja objektom, može se desiti da greška modeliranja dovede do znatnog odstupanja stvarnog od željenog ponašanja celog sistema.

Pojedine njegove osobine, bitne za pravilno funkcionisanje, mogu biti narušene.

Na ovo mogu uticati i varijacije u samom sistemu, nastale kao posledica promene radnih uslova i slično *Barrett* (1980).

Svi ovi faktori se mogu obuhvatiti pojmom perturbacije parametara modela *Patel, Toda* (1980) i u zavisnosti od načina njihovog tretmana postoji više teorijskih pristupa problemu određivanja njihovog uticaja na ponašanje sistema *Lehtowski et al.* (1984), *Petkovski* (1984).

Osetljivost je osobina sistema da mu ponašanje zavisi od infinitezimalnih promena parametara.

Tako se može definisati funkcija osetljivosti neke osobine ili veličine sistema na promenu pojedinih njegovih parametara.

Na primer, funkcija osetljivosti izlazne veličine $\mathbf{x}_i$ na promenu nekog parametra $\mathbf{p}$ se može definisati kao:

$$\Xi = \frac{\dfrac{\Delta \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_i^0}}{\dfrac{\Delta \mathbf{p}}{\mathbf{p}^0}}, \tag{12.6}$$

gde je $\mathbf{x}_i^0$ izlazna veličina sistema kada parametar $\mathbf{q}$ ima vrednost $\mathbf{q}^0$.

U ovom slučaju je neophodno znati stvarnu vrednost parametra i veličinu njegove promene.

Definicija 12.3. *Robusnost* sistema u smislu određenog svojstva ψ u odnosu na skup $\Im$, tj. robusnost tog svojstva sistema na $\Im$, je njegova sposobnost da održi to svojstvo na skupu $\Im$, *Novaković* (1987).

Pored ove definicije, u literaturi postoje i druga tumačenja koja ne menjaju njenu suštinu.

Tako se može pročitati da se teorija robusnosti bavi problemom očuvanja određenih osobina sistema u prisustvu velikih perturbacija u njegovom modelu, *Petkovski* (1984) i da je njen zadatak analiza mogućnosti kompenzacija razlika između matematičkog modela i realnog objekta.

Do sada se nije specificiralo o robusnosti kog svojstva sistema se radi.

To znači da se teorija robusnosti može primeniti na razne osobine sistema, bitne za njegovo ispravno funkcionisanje i kvalitetno dinamičko ponašanje, kao što su stabilnost, upravljivost, osmotrivost, adaptibilnost i slično.

Analiza i sinteza sistema automatskog upravljanja je sa stanovišta robusnosti danas uobičajena praksa, koja svoje opravdanje nalazi u razlozima navedenim u prethodnim redovima.

Ono što karakteriše pojam robusnosti i što ga razlikuje od njemu sličnih pojmova se može sažeti u sledeće tri karakteristike, *Novaković* (1987).

- Odnosi se na promene parametara koje u opštem slučaju nisu infinitezimalno male,
- Obuhvata sve moguće vektore zanemarenih uticaja prilikom modelovanja sistema,
- Mora se specificirati osobina sistema na koju se odnosi.

Tako bi, recimo, *robusno stabilni* sistem automatskog upravljanja trebalo da ima što jednostavniji, po mogućnosti linearni, regulator nepromenljive strukture i konstantnih parametara u cilju očuvanja stabilnosti sistema i pri velikim perturbacijama.

U isto vreme, odgovarajući *adaptivni* sistem automatskog upravljanja sa istim zadatkom trebalo bi da ima regulator promenljive strukture i/ili podešljivih parametara i nelinearan zakon upravljanja.

Robusnost stabilnosti se mora garantovati, znači ispuniti sa sigurnošću, a ne sa nekom verovatnoćom, što je slučaj kod projektovanja sistema korišćenjem stohastičkog tretmana greške modeliranja.

Jedina razlika u pristupu između teorija robusnosti i osetljivosti je veličina odstupanja modela od realnog sistema, obuhvaćenog vektorom zanemarenih uticaja pri modeliranju.

Dok su ta odstupanja kod teorije osetljivosti infinitezimalno mala, kod teorije robusnosti ona nisu ograničena, pa se može u oba slučaja govoriti o robusnosti, uz napomenu o veličini posmatranih odstupanja.

12.1.4 Robusnost stabilnosti

Osnovni zahtev svakom praktično primenljivom sistemu automatskog upravljanja je robusnost njegove stabilnosti, tj. sposobnost da je očuva čak i u prisustvu raznih perturbacija.

To je posledica činjenice da sistem ne može ispravno da vrši svoju funkciju ako nije stabilan, i to ne samo u određenoj radnoj tački, već i u nekoj njenoj okolini.

Veličina te okoline zavisi od prisutnih perturbacija, koje mogu biti posledica promene parametara samog sistema u toku rada ili nepreciznosti prilikom matematičkog modeliranja sistema.

Načini predstavljanja perturbacija mogu se klasifikovati prema količini informacija o strukturnoj raspodeli njihovog dejstva na sistem, *Barrett* (1980).

Oni zavise kako od poznavanja fizičkih mehanizama koji prouzrokuju perturbacuje, tako i od sposobnosti projektanta da ih prikaže na odgovarajući način.

Tako postoje *jake* i *slabe* strukturne perturbacije.

Jake strukturne perturbacije uključuju nepoznate parametre u poznatu strukturu modela i najčešće su posledica korišćenja linearizovanih modela u okolini različitih radnih tačaka.

Zato se one u literaturi prosto nazivaju strukturnim perturbacijama.

Slabe strukturne perturbacije su one za koje je poznat samo intenzitet ili norma, a ne i njihovo strukturno raspoređivanje u modelu sistema. Njihovo dejstvo u sebi uglavnom podrazumeva nepoznatu ili svesno zanemarenu dinamiku sistema u oblasti visokih frekvencija.

Njihov alternativni naziv u literaturi je nestrukturne perturbacije.

Ove dve vrste perturbacija su samo granični slučajevi, između kojih leži prostor potencijalnih načina njihovog predstavljanja.

Prednost korišćenja nestrukturnog prikaza perturbacija je u lakoći matematičkih izračunavanja koja prate ovu problematiku, jer se ona uglavnom svode na određivanje normi matrica perturbacija, kao što će u narednim izlaganjima biti pokazano. Međutim, to ima za posledicu konzervativnost dobijenih granica dozvoljenih perturbacija, jer se neuzimanjem u obzir strukture raspodele njihovog dejstva na sistem često dolazi do pogrešnih zaključaka.

Praktično to znači da se može zaključiti da sistem *nije robusno stabilan* u nekoj radnoj tački, iako on to u praksi jeste.

U današnje vreme ovaj problem se rešava na sledeći način.

Prvo se osobina robusnosti sistema ispituje korišćenjem nestrukturnog prikaza perturbacija, pa ako ustanovi da sistem nije robusno stabilan, pribegava se korišćenju strukturnog prikaza, koji će ili potvrditi ili opovrgnuti rezultate dobijene prvim pristupom.

Tako se čini kompromis između složenosti matematičkih izračunavanja i tačnosti dobijenih rezultata.

Ispitivanje robusnosti stabilnosti sistema ima za cilj da utvrdi kvantitativne mere perturbacija u okviru kojih sistem zadržava osobinu stabilnosti.

Ispitivanje se vrši u okolini poznate radne tačke sistema, u kojoj sistem mora biti stabilan, a što se obezbeđuje još u fazi projektovanja sistema.

Iako se u literaturi već duže vremena mogu naći rezultati ispitivanja u ovoj oblasti, ona i dalje predstavlja aktivnu oblast istraživanja[*].

Pored poboljšavanja postojećih rezultata, većina autora pred sebe postavljaju kao cilj i njihove primene na posebne klase sistema.

Rezultati koji su do sada izloženi u literaturi proističu iz primene teorije robusnosti korišćenjem prilaza koji koriste dva različita domena: frekventni i vremenski.

Analiza u frekventnom domenu se sprovodi korišćenjem postupka dekompozicije singularnih vrednosti (*singular value decomposition*), analizom sopstvenih vrednosti i primenom teorije M - matrica.

Prilaz u frekventnom domenu ima manje pristalica a i rezultata jer vremenski domen, osnovan na Ljapunovljevoj metodi analize stabilnosti u prostoru stanja, daje nesumnjivo bolje mogućnosti da se ova problematika uspešnije rešava.

Prve radove iz ove oblasti su objavili *Bellman* (1969), *Barnett, Storey* (1970), *Davison* (1976) i *Desoer et al*. (1977).

Do kvantitativnih mera dozvoljenih perturbacija su ipak došli *Patel*, *Toda* (1980) i to samo za slučaj nestrukturnih perturbacija.

---

[*] Detaljan hronološki prikaz rezultata iz ove oblasti,
kao i prikaz nekih fundamentalnih rezultata može se naći u*Debeljković et al.* (2005).

12.2 ROBUSNOST SISTEMA SA MRTVIM VREMENOM

Kada su u pitanju sistemi sa kašnjenjem pojam robusnosti stabilnosti sistema u potpunosti odgovara robusnosti stabilnosti običnih sistema.

Sva razmatranja vezana za obične sisteme se mogu, bez poteškoca, primeniti na sisteme sa mrtvim vremenom, vodeči računa o evidentnim specifičnostima ove klase sistema.

Robusnost stabilnosti sistema sa mrtvim vremenom je bila predmet izucavanja vrlo malog broja autora, pa su i dostupni rezultati iz te oblasti nešto manje obimniji.

Svi oni se odnose na asimptotsku stabilnost.

Do sada nisu izloženi rezultati vezani za robusnost stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu.

Nedavno, obnovljeno je interesovanje za projektovanje i analizu sistema preko metoda u parametarskom ravni (*prostoru*).

Novije interesovanje za robusnim upravljačkim sistemima podvrgnutim strukturnim perturbacijama ponovo je oživelo parametarske metode i proširilo istraživanja ka Ljapunovljevoj metodi i frekventnom domenu.

12.3 ROBUSNOST SINGULARNIH SISTEMA

Na osnovu proučavanja postojeće literature, sa sigurnošću se može reći da monografija *Bajić* (1992) najcelovitije i najsadržajnije razmatra robusnost stabilnosti singularnih sistema.

Literatura

Chen, H. G., Kuang, W. H., “Improved quantitative measures of robustness for multivariable systems“, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. AC - **39**, No. 4, (1994) 807810.

Debeljković, D. Lj., S. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1996.

Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. Milinković, Lj. A Jacić, *Diskretni singularni sistemi automatskog upravljanja*, GIP Kultura, Beograd, 1998.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stabilnosts istemasa mrtvim vremenom na konačno mvremeskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd, 1999.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stabilnost sistema sa mrtvim vremenom na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, Čigoja - Štampa, Beograd, 2004.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Kontinualni singularni sistemi*, Mašinski fakultet u Beogradu, Beograd, 2005.a.

Debeljković, D. Lj., M. B. Jovanović, S. A. Milinković, Lj. A Jacić, *Diskretnini deskriptivni sistemi*, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.b.

Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Quantitative Measures of Robustness of Generalized State Space Systems”, *Proc. AMSE Conference on System Analysis, Control and Design,* Lyon (France), July (1994.a) 219–230.

Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, A. U. Grgić, S. A. Milinković, “Further Results in Non-Lyapunov Stability Robustness of Generalized State Space Systems”, *Proc. 1st IFAC Workshop on New Trends in Design of Control Systems*, Smolenice, (Slovak Republic), **1**, September (1994.b) 255–260.

Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, A. U. Grgić, S. A. Milinković, “Non-Lyapunov Stability and Instability Robustness Analysis for Linear Descriptor Systems*AMSE Periodicals - Advances in Modeling and Analysis*, **49** (1) (1995.a) 59–64.

Debeljković, D. Lj., V. B. Bajić, A. U. Grgić, S. A. Milinković, “Non-Lyapunov Stability and Instability Robustness Consideration for Linear Singular Systems”, *Proc. ECC95,* Roma (Italy), September (1995.b) 3702–3707.

Debeljkovic, D.Lj., V.B.Bajic, T.Eric, S.A.Milinkovic, “A Lyapunov analysis of stability robustness for discrete descriptor linear systems” *IMA Journal of Mathematical Control and Information,* Vol. 15, No.1, (1998) 52-63.

Đurovic, K.V., D.Lj. Debeljkovic, S.A.Milinkovic, M.B.Jovanovic, “Lypunov stability robustness consideration for linear singular systems: New results”**,***AMSE - Advances in Modeling and Simulation* (France), Part C, Vol. 52, No.1, (1998) 54 - 64. also in *Facta Universitatis* (YU), Vol. 2, No.8. (1998) 715 - 728.

Đurovic, K., *Robusnost stabilnosti singularnih sistema*, Magistarski rad, Mašinski fakultet u Beogradu, 1996.

Đurovic, M., *Robusnost stabilnosti nekih posebnih klasa sistema sa čistim vremenskim mrtvim vremenom*, Magistarski rad, Mašinski fakultet u Beogradu, 1999.

Novaković Z. J., *O robusnosti stabilnosti višeprenosnih sistema automatskog upravljanja*, Magistarski rad, Mašinski fakultet u Beogradu, 1987.

Patel, V., Toda, M., “Quantitative measures of robustness for multivariable systems“, *Proc. Joint Cont.J. Conf.,* San Francisco, (1980), CA, TP8-A.

Petkovski Đ., *Savremene Metode Automatskog Upravljanja Složenim Sistemima,* Privredni pregled, Beograd, 1983.

Yedavalli, J. K., “Improved measures of stability robustness for linear state space models“, *IEEE Trans. Autom. Cont. J.,* Vol. AC-**30**, No. 6, (1985) 577-579.

Yedavalli, J. K., Z. Liang., “Reduced conservatism in stability robustness bounds by state transformation“, *IEEE Trans. Autom. Cont. J.,* Vol. AC-**31**, No. 9, (1986) 863-866.

Zhou, K., P. P. Khargonekar, “Stability robustness bounds for linear state-space models with structured uncertainty“, *IEEE Trans. Autom. Cont. J.,* Vol. AC-**32**, No. 7, (1987), 621-623

NEKA PITANJA STABILIZACIJE SISTEMA

XI METODE PODEŠAVANJA POLOVA

13. METODE PODEŠAVANJA POLOVA I STABILIZACIJE

13.1 UVODNA RAZMATRANJA

Linearni sistemi su oduvek privlačili pažnju naučne i stručne javnosti i taj interes postoji i dan danas i zaokuplja sve tehničke discipline podržan snažnim matematičkim aparatom osnovanim na odabranim poglavljima linearne algebre, operatorskog računa i teorije diferencijalnih jednačina i matrične analize.

Počev od daleke 1930 - *te* godine linearni skalarni sistemi intenzivno se proučavaju sa više različitih stanovišta a korišćenjem klasičnih prilaza među kojima dominiraju tehnike vezane za korišćenje frekventnog i kompleksnog domen.

Nešto kasnije se uviđa da je primena tih metoda ograničena i da klasičan prilaz izučavanju sistema sa pozicija ulazno – izlaznih relacija ne može kvalitetno da odgovori da na čitav niz značajnih pitanja dinamičke analize i sinteze kako vremenski stacionarnih tako i vremenski nestacionarnih, najopštijih klasa, sistema upravljanja, *Debeljković, Mulić* (2003).

Polazeći od pionirskih radova Bellmana i Kalmana, evidentni nedostaci klasične teorije, bivaju otklonjeni, prevaziđeni i razrešeni novom modernom teorijom upravljanja zasnovanoj na konceptu stanja dinamičkih sistema.

Sveobuhvatno i rigorozno definisanje pojma stabilnosti i uvođenje čitavog niza novih koncepata kao što su: upravljivost, osmotrivost, optimalnost, osetljivost, robusnost, svodljivost, minimalnost i nekih drugih snažno su podstakli otvaranje i celovito i uspešno rešavanje ovih značajnih pitanja.

Uporedo sa time diskretno se nametnula logična potreba da se pomenuti koncepti prošire i na višestruko prenosne sisteme upravljanja, jedine skladne i verne reprezente dinamičkog ponašanja realnih sistema.

Okosnoca ovih izlaganja, u jednom svom delu, počiva na savremenoj teoriji upravljanja i postavlja i razrešava veoma složen problem strukturne sinteze sistema automastskog upravljanja uvođenjem dobro poznatih uskladnika ili kompenzatora i to lociranih u povratnim spregama buduće sintetzovanih sistema po veličinama stanja ili izlaza.

Ova složena problematika razmatra se za dve klase savremenih sistema automatskog upravljanja i u jasno metodološkom i logičnom pristupu razmatraju se obični linearni vremenski kontinualni sistemi, kao bi se ista problematika nešto kasnije izložila i primenila na posebne klase linearnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, *Debeljković, Mulić* (2003).

13.2 KONCEPT SINTEZE I PROJEKTOVANJA

Klasični postupci sinteze polaze od činjenice da je dinamičko ponašanje sistema izraženo ulazno-izlaznim relacijama.

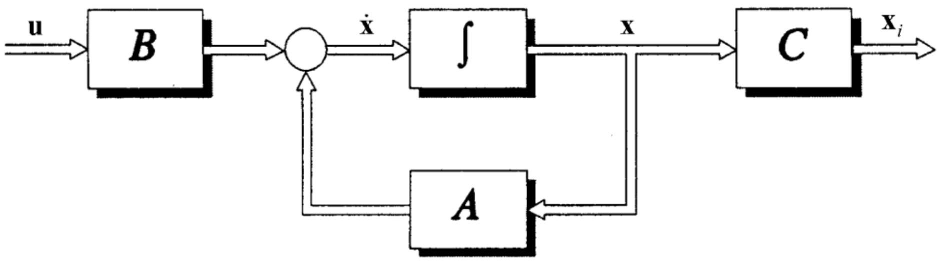
To praktično znači da je odgovarajuća prenosna funkcija sistema osnovni i polazni podatak za daljipostupak.

Nažalost, u nekim slučajevima, kada smo naprimer zainteresovani za ponašanje sistema u vremenskom domenu, upotreba prenosne funkcije nije dovoljna za egzaktnu i rigoroznu analizu. To proističe iz njene definicije, koja polazi od toga da su početni uslovi jednaki nuli.

Prethodno rečeno, nikako ne umanjuje veliki značaj prenosne funkcije za analizu i sintezu sistema u frekventnom domenu kao i njenu odlučujuću ulogu u analizi stabilnosti sistema. Isto tako, predstavljanje struktura sistema korišćenjem blok dijagrama, kao i mogućnost da se na osnovu lokacije njenih nula i polova dobiju kvalitetne informacije o ponašanju sistema, čine sve zajedno upotrebu prenosne funkcije neophodnim aparatom savremene teorije, *Debeljković* (2005, 2007, 2008).

Pomenuti nedostatak prenosne funkcije sistema, rigurozno definisanje stabilnosti sistema i primenu koncepta: upravljivosti, osmotrivosti, osetljivosti i optimalnosti, kao i niz drugih problema, otklanja, obuhvata i razrešava nova, *moderna teorija automatskog upravljanja*, zasnovana na *konceptu stanja dinamičkih sistema*, na primer *Ogata* (1967), *Kuo* (1975), *Milojković, Grujić* (1981).

Osnovni cilj sinteze sistema *u prostoru stanja* je, koristeći informacije o *neregulisanom objektu* ili *sistemu u otvorenom kolu dejstva* predstavljenim matričnim modelom u prostoru stanja, odnosno odgovarajućim blok dijagramom sl. 13.1, *projektovanje uskladnika* koji će obezbediti unapred zadatu konfiguraciju polova prenosne funkcije *sistema u zatvorenom kolu dejstva u kompleksnoj ravni*, *Debeljković, Mulić* (2003).



Sl.13.1

S obzirom da se ovde proučavaju samo linearni, stacionarni, vremenski neprekidni sistemi i imajući u vidu da je sistem predstavljen svojom vektorskom diferencijalnom jednačinom stanja i jednačinom izlaza, uobičajeno je da se zahtevi izražavaju kroz željenu lokaciju sopstvenih vrednosti matrice sistema automatskog upravljanja, s obzirom da one stoje u biunivokoj korespodenciji sa polovima prenosne funkcije sistema.

Varijante unošenja uskladnika u zatvoreni sistem automatskog upravljanja su mnogobrojne i prvenstveno zavise od zadatka i cilja sinteze, kao i od strukture sistema kojeg treba uskladiti, *Debeljković, Mulić* (2003), *Debeljković* (2005, 2007, 2008).

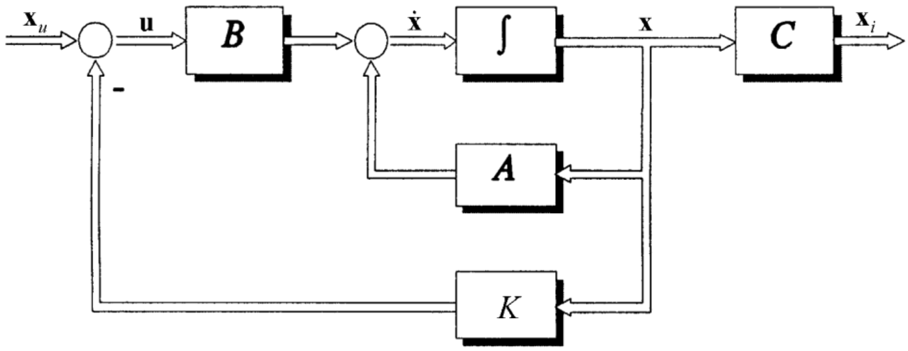
Usklađivanje koje se obavlja unošenjem uskladnika u povratnu granu sistema regulisanja se naziva *povratno usklađivanje*.

Upravljanje po principu povratne sprege može da ima sledeća dva oblika.

1. Upravljačke veličine se generišu na osnovu informacija o veličinama stanja a linearni proporcionalni uskladnik se nalazi u povratnoj sprezi sistema po veličinama stanja, sl.13.2.

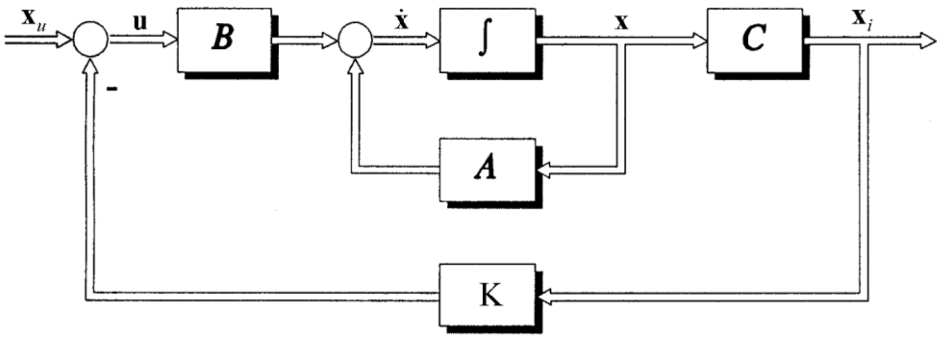
Zakon upravljanja je linearna funkcija veličina stanja:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_u(t) - K\mathbf{x}(t). \tag{13.1}$$



Sl.13.2

2. Upravljačke veličine se generišu na osnovu izlaznih veličina sistema kada se linearni proporcionalni uskladnik nalazi u povratnoj sprezi po izlaznim (upravljanim) veličinama, sl. 13.3.



Sl.13.3

U ovom slučaju zakon upravljanja je linearna funkcija izlaznih veličina:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_u(t) - \mathrm{K}\mathbf{x}_i(t). \tag{13.2}$$

Povratna sprega po stanju ima prevashodno akademski, a vrlo mali praktični interes s obzirom da njena realizacija podrazumeva merenje svih veličina stanja.

Unajvećem broju slučajeva ovo merenje nije moguće, a i tamo gde su sve veličine stanja dostupne, njihovo merenje i uvođenje u uskladnik nije ekonomično zbog relativno velikog broja veličina stanja.

Otuda se u praksi meri samo jedan broj dostupnih ili merljivih promenljivih, a to su izlazne (upravljane) veličine.

Povratna sprega po stanju ima prednost nad povratnom spregom po izlazu jer je njom moguće vršiti podešavanje svih polova prenosne funkcije sistema, uz uslov da je objekt potpuno upravljiv, što kod povratne sprege po izlazu nije uvek moguće.

Iscrpan uvid u ovu problematiku, koji obuhvata ne samo metode podešavanja polova, odnosno stabilizaciju sistema, veći i detaljan uvid u postupke izbora veličina stanja, pitanja strukturnih osobina sistema, formiranja različitih reprezentacija sistema u prostoru stanja kao i međusobnu povezanost tih kanoničkih formi, dato je u monografskoj trilogiji, *Debeljković* (2005, 2007, 2008).

Veliki deo monografije *Debeljković* (2005) obuhvata ovu problematiku u svetlu posebnih klasa linearnih kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Kada je u pitanju primena ovih metoda na različite klase singularnih kontinualnih sistema, više nego obimna materija prezentovana je u *Debeljković*, *Višnjić* (2006).

Literatura

Debeljković, Lj. D., V. S. Mulić, *Sinteza linearnih sistema: Klasičan i moderan pristup*,Čigoja štampa, Beograd, 2002.

Debeljković, Lj. D., V. S. Mulić, *Savremena teorija višestruko prenosnih kontinualnih linearnih sistema*,Čigoja štampa, Beograd, 2003.

Debeljković, Lj. D., *Projektovanje Linearnih Sistema*: *Metode Podešavanja Polova* I Deo, Mašinski fakultet, Beograd, 2005.

Debeljković, D. Lj., N. S. Višnjić, *Linearni singularni sistemi*: *Metode podešavanja polova i projektovanje observera*, Mašinski fakultet, Beograd, 2006.

Debeljković, Lj. D., *Projektovanje Linearnih Sistema*: *Metode Podešavanja Polova* II Deo, Mašinski fakultet, Beograd, 2007.

Debeljković, Lj. D., *Projektovanje Linearnih Sistema*: *Metode Podešavanja Polova* III Deo, Mašinski fakultet, Beograd, 2008.

Debeljković, Lj. D., *Sinteza i Projektovanje Linearnih Sistema Automatskog Upravljanja*: *Klasičan i moderan pristup*, Mašinski fakultet, Beograd, 2009.

Debeljković, Lj. D., N. J. Dimitrijević, *Projektovanje Linearnih Sistema*: *Metode Podešavanja Polova* IV Deo, Mašinski fakultet, Beograd, 2012.

D. Lj. Debeljkovic- Editior, *Time Delay Systems, I–Tech,*, Vienna, (Austria), . 2011

D. Lj. Debeljkovic, S. B. Stojanovic, Systems, Structure and Control - Editior Petr Husek, – Chapter : *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach*, I – Tech, Vienna, 2008, pp. 029 – 060.

D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, Time Delay Systems, - Chapter 2 : Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval, *I–Tech*, Vienna, (Austria), pp.15 – 30, 2011.a.

D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, Time Delay Systems, - Chapter 3 : Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems", *I–Tech*, Vienna, (Austria), pp. 31 – 74, 2011.b.

D. Lj. Debeljkovic, M. S. Aleksendric , N. J. Dimitrijevic, Contemporary Theory of Multi Input - Multi Output Linear Control Systems, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: Impulsive behaviour, generalized inverses, stabilization, regularization, optimization and applications, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

D. Lj. Debeljkovic, D. N. Popov, Contemporary Methods for Linear Systems Design, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

Kuo, B., *Automatic Control Systems*, Prentice Hall, USA, 1975.

Milojković B., Lj. Grujić, *Automatsko Upravljanje*, Mašinski fakultet, Beograd, 1981.

Ogata, K., *State Space Analysis of Control Systems*, Prentice Hall, USA, 1967.

Ogata, K., *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, Englewood Cliff 1966.

NELJAPUNOVSKA STABILNOST KLASA RAZMATRANIH SISTEMA

XII STABILNOST NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU

14. STABILNOST NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU I PRAKTIČNA STABILNOST

14.1 UVODNA RAZMATRANJA

U praksi je često od posebnog interesa, ne samo ispitivati stabilnost sistema u smislu Ljapunova već je potrebno razmotriti, da li trajektorije sistema, odnosno njegovov stvarno ponašanaje, ukoliko je krenulo iz skupa početnih stanja, barem neko vreme ostaje unutar skupa dozvoljenih stanja, bez obaveze da u njemu ostane posle tog unapred usvojenog ili zadataog vremenskog skupa. Takvih primera je puno u praksi i uglavnom prositiču iz konkretnih inženjerskih problema.

Asimpotsi stabilan system, ili bolje rečeno system koji poseduje osobinu stabilnosti i osobinu privačlačenja, što sve dovodi do asimptotske stabilnosti, može da ima sasvim neprihvatljive tranzijentne karakteristike, pri čemu se tu u prvom redu misli na nedozvoljeno veliki preskok, ili previse dugo vreme smirenja.

Prema tome poptpuno je prihvatljivo pa čak i nužno trajektorije sistema posmatrati unutar ranije propisanih granica i njihov odnos prema tim ograničenjima

Mimo toga, od posebnog je interesa da se i dinamičko ponašanje sistema posmatra na konačnom vremenskom intervalu.

Granice do kojih dostiže odziv sistema bilo u slobodnom bilo u prinudnom radnom režimu predstavlja veoma značajan problem sa inženjersko-tehničke tačke gledišta. Uvažavajući ovu činjenicu pojavio se veliki broj definicija praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu.

Primena ovih različitih koncepata izuzetno se matematički usložnjava, kada razamtrane klase, baš kao ovde, sa mrtvim vremenom sa singularnostima, poseduju specifične osobine, koje se iskazuju kroz daleko složenije forme njihovoh matematičkih modela, a samim tim i iznalaženju tih rešenja, ili formiranju odgovarajućih kriterijuma, koji će bez rešavanja diferencijalnih jednačina kretanja, oformiti prikladen kriterijume za ispitivanje stabilnosti.

U kojoj meri se koncepti tehničke stabilnosti složeni, govori činjenica da postoji samo izuzetno mali broj kriterijuma koji objedinjuju i poterbne i dovoljne uslove stabilnosti a da većina od njih se zadovoljava samo **dovoljnim**, iako je to sa inženjerske tačke gledišta sasvim prihvatljivo.

Motivisani kratkom diskusijom o praktičnoj stabilnosti iz monografija *La Salle, Lefschetz* (1961) i *Weiss, Infante* (1965, 1967) uvodi se raznovrsno obeležavanje stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, za vremenski kontinualne sisteme i vremenski nepromenljiv skup koji određuje dozvoljene granice trajektorija razmatranog sistema.

Dalji razvoj ovih rezultata ostvaren je zahvaljujući mnogim drugim autorima.

14.2 MOTIVACIJA

U jednom delu ovog rada izlažiće se neki od već objavljenih koautorskih radova, mentora, komentora i autorke ove doktorske disetacije .

U tom smislu prezentovaće se dva potpuno različita prilaza razmatranim problemima a uporedo sa time izložiće se i izvestan broj radova snažno utemeljenih na primeni LMI metoda za dobijanje odgovarajućih uslova stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu.

Naime, u prvom od ponuđenih prilaza teži se formiranju odgovarajućih rezultata izraženih direktno preko sopstvenih vrednosti osnovnih matrica sistema A_0 i A_1, koje se prirodno pojavljuju u modelu sistema čime se izbegava potreba za uvođenjem bilo kakvih kanoničnih formi, ili transformacija u iskazu odgovarajućih *Teorema*.

U drugom slučaju teorija geometrijske konzistentnosti superiorno vodi do prirodne klase pozitivno određenih kvadratnih formi na potprostoru koji sadrži sva rešenja.

Ova činjenica omogućava razvijanje Ljapunovljeve i neljapunovske teorije stabilnosti čak i za sve klase kako kontinualnih tako i vremnski diskretnih, linearnih sistema sa ili bez čisto vremenskog kašnjenja u smislu da je osobina atraktivnosti ekvivalentna postojanju simetričnih, pozitivno određenih rešenja opšte forme Ljapunovljeve matrične jednačine koja uključuje uslov koji se odnosi na ograničenost rešenja.

Prva metoda se zasniva na klasičnom prilazu koji se uglavnom koristi za izvođenje dovoljnih uslova stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, nezavisnih od čisto vremenskog kašnjenja, mada to ne mora da bude pravilo.

U drugom slučaju uvedena je nova definicija, koja se zasniva na osobini *atraktivnosti* rešenja sistema, koja se može tretirati analogno *kvazi–kontraktivnoj* stabilnosti, *Weiss*, *Infante* (1965,1967).

Osim toga, planira se izvedjenje potpuno novog dovoljnog uslova, zavistanog od čisto vremenskog kašnjenja, koji garantuje da će razmatrani sistem biti praktično stabilan sa osobinom atraktivnosti njegovih rešenja, koji se može tretirati kao novi koncept takozvane ne–Ljapunovljeve stabilnosti.

Ova problematika uključuje kako sisteme sa kašnjenjem, tako i singularne i deskriptivne, koji takođe, sadrže čisto vremensko kašnjenje u stanju.

Formiranje novih kriterijuma koji će u formi dovoljnih i eventualno potrebnih uslova omogućiti efikasno istraživanje dinamičkog ponašanja ovih klasa sistema, kako na konačnom tako i beskonačnom vremenskom intervalu.

Dovoljni uslovi stabilnosti, koji se očekuju, prihvatljivi su za potrebe analize razmatranih klasa sistema sa inženjerskog stanovišta.

Formulacija i dokazi novih teorema stabilnosti, kako na konačnom tako i na beskonačnom vremenskom intervalu linearnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem kao i singularno – deskriptivnih sistema sa kašnjenjem, trebalo bi da se sprovedunovim klasičnim prilazom a da se ti isti rezultati uporede sa odgovarajućim, koji proistiću iz premene LMI postupaka, pa da se komparativnom analizom utvrde manje konzervativni rezultati i za to prvo daju zaključci a posle potraže suštinštinska objašnjenja.

14.3 VREMENSKI KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI

SELEKTIVAN I HRONOLOŠKI PREGLED DOSADAŠNJIH REZULTATA NA POLJU IZUČAVANJA PRAKTIČNE STABILNOSTI I STABILNOSTI NA KONAČNOM VREMENSKOMINTERVALU

Selektivan i detaljan pregled postignutih rezultata na polju izučavanja stabilnosti na konačnom vremenskom interval i praktične stabilnosti kontinualnih singularnih sistema do 2005. godine iscrpno je izložen u monografijama, *Debeljković et al.* (2013) i *Stojanović et al.* (2015), tako da se taj prikaz ovde neće navoditi a zainteresovani čitalac, radi kontinuiteta praćenja novih doprinosa, koji se izlažu u nastavku, upućuje se na pomenute reference.

Kao i kod klasičnihsistema automatskog upravljanja u aktuelnoj literature vladalo je izvesno zatišje,sve do 2006. godine, kada je u, radu *Shen, Shen* (2006) iskorišćen prilaz sa stanovišta Linearnih matričnih nejednačina na neke posebne klase u vremenski neprekidnih uopštenih sistema u prostoru stanja, inspirasani referencama *Amata et al.*(1998, 1999.a, 1999.b, 2001, 2002, 2003) i *Dorata* (2006).

Uveden je i koncept ograničenosti na konačnom vremenskom intervalu, za ovu klasu sistema, i rešen problem robusnog upravljanja u prisustvu vremenski zavisnih neizvesnosti i egzogenih spolajšnjih uticaja.

Izveden je i dovoljan uslov za robusnu stabilizaciju, korišćenjem povratne sprege uspostavljanje po veličinama stanja.

Ovaj selektivni i hronološki pregled rezultata završavamo kraćim prikazom rada *Kablar* (2010), gde su izloženi rezultati koji tretiraju ponašanje jedne klase nelinearnih singularno impulsivnih sistema, na konačnom vremenskom intervalu.

Prilaz se bazira na kvazi–Ljapunovljevim funkcijama i njihovim ososbinama u prostoru stanja.

Intenzivna primena izvedenih rezultata fokusira se na klase hibridnih sistema i kontaktnih problema.

Lako se uočava da je ovaj prgled rezultata prevashodno posvećen doprinosima koje su ostvarli autori ove monografije.

Za rezultate drugih autora, a koji su veoma brojni, zainteresovanom čitaocu preporučuje se obimna, po tom pitanju i za ovu klasu sistema, materija izložena u radovima i monografijama, *Debeljković et al* (2005, 2007, 2011.a, b, c).

Jedini značajni iskorak, u ovom smislu, a za jednu posebnu klasu linearnih singularnih sistema, dat je u radu *Kablar, Kvrgic, Debeljković* (2012).

U ovom radu, prvo je izveden i prezentovan novi matematički model singularno impulsivnog dinamičkog sistema, a kasnije razmatran postavljeni problem.

Dinamika takvih sistema opisana je kombinacijom diferencijalnih i diferencnih jednačima spregnutih sa običnim algebarskim jednačinama, koje u tom smislu predstavljaju ograničenje na rešenje prvog dela sistema jednačina, pri čemu se te mogu pojaviti i kao obične, a i kao diferencne.

Primeri takvih sistema, iscrpno su prezentovani u monografiji *Kablar, Debeljković* (2015), koja se, sticajem posebnih okolnosti, pojavila veoma kasno u akademskoj javnosti, i koja, sem u manjem delu, predstavlja izvod iz doktorske disertacije *Kablar* (2007).

Pomenuta klasa sistema, ustvari, označava posebnu klasu *hibridnih* sistema.

Osnovni doprinos rada predstavlja proširenje poznatih rezultata, ranije izvedenih za kontinualne singularne sisteme, na ovu klasu sistema u smislu formulacije i dokaza čuvene Bellman- Gronwall- ove leme.

Koristeći ovu *Lemu*, izvedeni su dovoljni uslovi praktične stabilnosti ove klase sistema.

Osnovna Literatura

Bajić, V. B., D. Lj. Debeljković, Z. Gajić, “Existence of Solution Converging Toward the Origin of the Phase Space of Singular Linear Systems”, *Proc. SAUM*, Kragujevac, Yugoslavia, June (1992.a) 334–348, also in *Proc. AMSE Conference on System Analysis, Control and Design*, Lyon, France, July (1994.a) 171–184.

Bajić, V. B., D. Debeljković, Z. Gajić, B. Petrović, “Weak Domain of Attraction and Existence of Solutions Convergent to the Origin of the Phase Space of Singular Linear Systems”, *University of Belgrade, ETF, Series: Automatic Control*, (1) (1992.b) 53–62

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljkovic, D, *Geometric Approach and Dynamical Behavior Study for Particular Class of Linear Singular Systems with Application in Medicine*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2009.

Buzurovic, I. M., D. Lj . Debeljkovic, “ Contact Problem and Controllability for Singular Systems in Biomedical Robotics”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 6, No. 2, (2010.a), pp. 128 – 141.

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljkovic, “ Geometric Approach to Solution of a Singular System with Contact Problem ” *Proc*. of 7*thInternational Fluid Power Conference*, Aachen, (Germany), 22 – 24 March, (2010.b), Poster Sesion, CD – Rom

Debeljkovic, D. Lj., D. H. Owens, “On practical stability of singular systems”, *Proc. Melecon Conf.* 85, October 85, Madrid (Spain), (1985) pp. 103 – 105.

Debeljkovic, D. Lj., “Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu vremenski neprekidnih linearnih singularnih sistema”, *Automatika* (Croatia), Vol.27, No. 1–2, (1986.a) pp. 17 – 24.

Debeljkovic, D. Lj., “Finite time stability of linear descriptor systems", *Preprints* of I.M.A.C.S. *Internacional Symposium Modelling and Simulation for Control of Lumped* and *Distributed Parametar Systems*, Lille, (France), June, (1986.b) pp. 57 – 61.

Debeljkovic, D. Lj.,, V. B. Bajic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, “Quantitative measures of robustness for generalized state space systems”, *Proc.* AMSE Conference: *System Analysis, Control and Design*, Lyon, (France), July, (1994.a)., pp. 219 – 230.

Debeljkovic, D. Lj.,, V. B. Bajic, A. U. Grgic, S. A. Milinkovic, “Further results in non – Lypunov stability robustness of generalized state–space systems", 1st IFAC *Workshop on New Trends in Design of Control Systems*”, Smolenice, Bratislava (Slovac Republic), September 7 – 10, (1994.b) pp. 255 – 260.

Debeljkovic, D. Lj.,, V. B. Bajic, A. U .Grgic, S. A. Milinkovic, "Non–Lyapuonov stability and instability robustness consideration for linear descriptor systems", *Advances in Modelling and Analysis*, AMSE *Period*, Vol.49, No.1, (1995.a) pp.59 –64.

Debeljkovic, D. Lj.,, V. B. Bajic, A. U. Grgic, S. A. Milinkovic, "Non–Lyapunov stability and instability robustness consideration for linear singular systems", *Proc*. 3–rd ECC, Roma (Italy), September 5 – 8, (1995.b) pp. 1373 – 1379.

Debeljkovic, D. Lj.,, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, *Continuous Singular Control Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1996.a.

Debeljkovic, D. Lj., S. A .Milinkovic, M. B. Jovanovic, *Application of singular system theory in chemical engineering*: Analysis of process dynamics, Monograph, 12 th International Congress of Chemical and Process Eng., CHISA 96, Prague (Czech Republic), Process Eng. Publishing 25 – 30 August, 1996.b, ,

Debeljkovic, D. Lj.,, M. P. Lazarevic, Đ. Koruga, S. Tomaševic, "Finite time stability of singular systems operating under perturbing forces: Matrix measure approach", *Proc.* AMSE *Conference,* Melbourne (Australia), October 29 – 31, (1997.a)., pp. 447 – 450.

Debeljkovic, D. Lj.,, M. R. Jovanovic, "Non–Lyapunov stability consideration of linear descriptor systems operating under perturbing forces", AMSE – Advances in Modeling and Analysis, (France), Part: C, Vol. 49, No. 1 – 2, (1997.b) pp. 1–8.

. Debeljkovic, D. Lj.,, N. A. Kablar, "On necessary and sufficient conditions of linear singular systems stability operating on finite time interval", *Proc*. XII CBA , Uberlandia (Brazil), September 14 – 18, Vol. IV (1998) pp. 1241 – 1246.

Debeljkovic, D. Lj.,, N. A. Kablar, "Finite time stability of linear singular systems: Bellman – Gronwall approach ", *Proc*. ACC 99, San Diego (USA), June 2 – 4 (1999), pp. 1803 – 1806.

Debeljkovic, D. Lj.,, N. A. Kablar, "Finite time stability robustness of time varying linear singular systems", *Proc*. Ascc 2000, July 4 – 7, (2000.a), Shanghai, (China) pp. 826 – 829.

Debeljkovic, D. Lj.,, N. A. Kablar, "Further results on finite time stability of discrete linear singular systems: Bellman – Gronwall approach ", *Proc*. APCCM (The 4th *Asia – Pacific Conf. on Control and Measurements*), 9 – 12 July (2000.b), Guilin (China) pp. D.10.

D. Lj. Debeljković, Đ. Koruga, "Non – Lyapunov Stability of Linear Singular Systems: A Quite New Approach", *Proc*. APCCM 2002, July 8 – 12, (2002), Dali, Lijiang (China), CD – ROM, also in *Proc*. CBA XIV, September 2 – 5, (2002.a), Natal (Brazil), CD – Rom.

Debeljkovic, D. Lj., S. Antonic, Y. Y. Nie, Q. L .Zhang, " On some Practical Aspects of Linear Singular Control Theory Application ", *Facta Universitatis* (Serbia), Series Mec. Eng. , Vol. 1, No 9, (2002.b) pp. 1161 – 1186.

Debeljkovic, D. Lj., " Lyapunov and Non – Lyapunov Stability Theory: Linear Autonomous and Non – autonomous Singular Systens", *Facta Universitatis*, Ser. MACR, Vol. 3, No.15, (2003), pp. 1071 –1031.

Debeljkovic, D. Lj., “Singular Control Systens”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 11, Series A: Math. Analysis, No. 5 – 6 (2004.a), pp. 691 – 706.

Debeljkovic, D. Lj.,, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Continuous Singular Systems, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.

Debeljkovic, D. Lj.,, N. S. Visnjic, Linear Singular Systems: Pole Placement Methods and Observer Design Mechanical Faculty, Belgrade, 2006.

Debeljkovic, D. Lj.,, I. M. Buzurovic, Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: A Geometric Approach, Mechanical Faculty, Belgrade, 2007.

Debeljkovic D. Lj, N. S. Visnjic, M. Pjescic, “The Stability of Linear Continuous Singular Systems over the Finite Time Interval: An Overview ”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 4, No. 4, (2008) pp. 560 – 584.

Debeljkovic, D. Lj.,*Dynamics of Continuous Linear Singular Systems*: *Impulsive behaviour, generalized inverses, stabilization, regularization, optimization and applications*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

Debeljkovic D. Lj, I.. M. Buzurovic, “Lyapunov Stability of Linear Continuous Singular Systems: An Overview ”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 7, No. 2–3, (2011), pp. 247 – 268.

Debeljkovic, D. Lj.,, M. P. Lazarevic, *Dynamics of Continuous Linear Singular Control Systems*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2012.

Kablar, N. A, *Singularno impulsni dinamički sistemi sa aplikacijom u biologiji*, Mašinski fakultetBeograd, Beograd, 2007.

Kablar, N. A, Debeljkovic, D. Lj.,, “Non – Lyapunov stability of linear singular systems: Matrix measure approach”, MNTS – Mathematical Theory of Networks and Systems, Padova (Italy), July 6 – 10, (1998.a) – Presented lecture, also in Proc. of Extended Abstracts, pp. TM7

Kablar, N. A, Debeljkovic, D. Lj.,, “Non – Lyapunov stability of linear singular systems: Matrix measure approach”, *Preprints* 5th IFAC *Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China), September 8 – 10 (1998.b), pp. TS13 16 – 20.

Kablar, N. A., Debeljkovic, D. Lj.,, “Finite time stability of time varying singular systems”, *Proc*. CDC 98, Florida (USA), December 10 – 12 (1998.c) pp. 3831 – 3836.

Kablar, N. A., Debeljkovic, D. Lj.,, “Finite time instability of time varying linear singular systems”, *Proc*. ACC 99, San Diego (USA), June 2 – 4 (1999), pp. 1796 – 1800.

Kablar, A. N., V. Kvrgic, D. Lj. Debeljkovic, “ Practical stability of singularly impulsive dynamical systems: Bellman – Gronwall approach ”, *Proc.*6th. *World Congrees of Nonlinear Analysis* 2012, June (2012)Athens, Greece, pp. 57 – 66.

Kablar, A. N.,D. Lj. Debeljkovic, *Singularly impulsive dynamical systems and applications in biology*, **(mongraph)** Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2015

Nie, Y. Y., D. Lj., Debeljkovic, “Non–Lyapunov Stability of Linear Singular Systems: A Quite new Approach in Time Domain”, *Dynamics of Continuous, Discrete and*

Impulsive Systems, (Canada), Vol. 11, Series A: Math. Analysis, No. 5 – 6 (2004), pp. 751 – 760.

Owens, H. D., D. Lj. Debeljkovic, "Consistency and Liapunov stability of linear descriptor systems: a Geometric analysis", *IMA, Journal of Math. Control and Information*, No. 2, (1985) pp. 139 – 151.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic, *Stability of Special Classess of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Technology, Nis, 2015.

Dopunska Literatura

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, "Robust Finite–Stabilization of Linear Systems Depending on Parameter Uncertainties", *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*, Tampa (Florida) (1998) 1207–1208.

Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, P. Dorato, "Dynamic Output Feedback Finite–Time Control of LTI Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances", *European Control Conference*, Karlsruhe (Germany) (1999.a).

Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, P. Dorato, "Finite–Time Control for Uncertain Linear Systems with Disturbance Inputs", *Proc. American Control Conf.*, San Diego (California) (1999.b) 1776–1780.

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, "Finite–Time Control of Linear Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances", *Automatica*, **37** (2001) 1459–1461.

Amato, F., M. Ariola, C. Abdallah, C. Cosentino, "Application of Finite–Time Stability Concepts to Control of ATM Networks", *40thAllerton Conf. on Communication, Control and Computers, Allerton* (Illinois) (2002).

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. Abdallah, P. Dorato, "Necessary and Sufficient Conditions for Finite–Time Stability of Linear Systems", *Proc. American Control Conf.*, Denevr (Colorado) (2003) 4452–4456.

Back, A., J. Guckenheimer, M. Myers, "A Dynamical Simulation Facility for Hybrid Systems", In R. Grossman, A. Nerode, A. Ravn and H. Rischel (Eds), Hybrid Systems, New York: Springer–Verlag, (1993), 255–267.

Bainov, D.D., P.S. Simeonov, *Systems with Impulse Effect: Stability*, Theory and Applications, England, Ellis Horwood Limited, 1989.

Bainov, D. D., P. S. Simeonov, „Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions", Singapore: World Scientic, (1995).

Bainov, D. D., A. B. Dishliev, I. M. Stamova, "Practical Stability of the Solutions of Impulsive Systems of Differential–Difference Equations via the Method of Comparsion and some Application to Population Dynamics, *Journal of ANZIAM*, Vol. 43, Australian Mathematical Society, Australia, (2002) 525–539.

Bajić, V. B., "Lyapunov Function Candidates for Semi–State Systems", *Int. J. Control*, **46** (6) (1987.b) 2171–2181.

Bajić, V. B., "Equations of Perturbed Motions and Stability of State and Semi–State Systems", *Int. J. Control*, **47** (6) (1988.b) 1849–1860.

Bajić, V. B., “Algebraic Conditions for Stability of Linear Singular Systems”, *Proc. 1991 IEEE Int. Symp. Circuits and Systems,* **2** (General Circuits and Systems), June 11–14, Singapore (1991.a) 1089–1092.

Bajic, B. V., “Algebraic Conditions for Stability of Linear Singular Systems”, *IEEE International Sympoisum on Circuits and Systems*, Vol.2, 11–14 June, (1991.b) 1089–1092.

Bajić, V. B., *Lyapunov’s Direct Method in The Analysis of Singular Systems and Networks*, Shades Technical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.a.

Bajić, V. B., *Generic Concepts of System Behavior and the Subsidiary Parametric Function Method*, SACAN, Link Hills, RSA, 1992.b.

Bajić, V. B., *Existence of Practically Stable Solutions of Singular Linear Systems*, Technical Report TR95–02, Control Laboratory, Technikon, Natal, RSA, 1995.

Bajić, V. B., M. M. Milić, “Extended Stability of Motion of Semi–State Systems”, *Int. J. Control*, **46** (6) (1987) 2183–2197.

Boyd, S., L. E. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, „Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory“. In: SIAM studies in applied mathematics, (1994).

Branicky, M. S., ”Multiple–Lyapunov Functions and other Analysis Tools for Switched and Hybrid Systems”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, (1998), 475–482.

Branicky, M. S., V. S. Borkar, S. K. Mitter, ”A Unified Framework for Hybrid Control: Model and Optimal Control Theory”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 43, (1998), 31–45.

Brockett, R. W., ”Hybrid Models for Motion Control Systems”, In H. L. Trentelman and J. C. Willems, editors, Essays in Control: Perspectives in the Theory and its Applications, 29–53. Birkhauser, Boston, (1993).

Brogliato, B., Non–smooth Impact Mechanics: Models, Dynamics and Control, London: Springer–Verlag, 1996.

Brogliato, B., S. I. Niculescu, P. Orhant, ”On the Control of Finite–dimensional Mechanical Systems with Unilateral Constraints”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42, (1997), 200–215.

Chen, D., J. Sun, “On the Conjunction Practical Stability and Controllability of Large–Scale Impulsive Control Systems”, Journal of Control Theory and Applications, Volume 3, Number 2, May, (2005) 181–185.

Dlala M., M. A. Hammami , “Uniform Exponential Practical Stability of Impulsive Perturbed Systems”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, Volume 13 , Issue 3, Hingham, MA, USA, July (2007) 373–386.

Dolezal, V., “Generalized Solutions of the Semistate Equations and Stability”, *Circ. Syst. Sig. Proc*, **5** (4) (1986) 391–401.

Dolezal, V., “Some Practical Stability Criteria for Semistate Equations“, *Journal Circuits, Systems and Signal Processing*, Volume 6, Number 3, Birkhauser, Boston, USA, September, (1987) 335–345 .

Dorato, P., “Comment on “Finite–Time Stability Under Perturbing Forces and on Product Spaces” *IEEE Transaction on Automatic Control*, 340, June, (1967) 340 –340.

Dorato, P., “An Overview of Finite–Time Stability”, *Currennt Trends in Nonlinear Systems and Control*, Part II, Birkhauser, Boston, USA, September, (2006) 185–194.

Dvirnyi, A. I., “Sufficient Conditions for the Practical and Technical Stability of Quasilinear Impulsive Systems”, *Journal of International Applied Mechanics*, Volume 41, Number 1, Springer, New York, USA, January (2005) 104–110.

Galkowski, K., E. Rogers, A. Gramacki, J. Gramacki, D. Owens, “Strong Practical Stability for a Class of 2D Linear Systems”, *ISCAS* 2000 – *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Geneva, Switzerland, May 28–31, (2000) I–403 – I–406.

Gollu, A., P. P. Varaiya, ”Hybrid Dynamical Systems”, *Proceedings of theIEEE Conference on Decision and Control*, (1989), 2708–2712.

Guan, Z. H., C. W. Chan, A. Y. T. Leung, G. Chen, “Robust Stabilization of Singular–Impulsive–Delayed Systems with Nonlinear Perturbations”, *IEEE Trans. on Circ. And Sys. – I: Fundamental Theory and Applications*, vol.48, No.3, (2001).

Haddad, W. M., V. Chellaboina, N. A. Kablar, "Nonlinear Impulsive Dynamical Systems: Stability and Dissipavity", *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr*., Phoenix, AZ, (1999a). Also in: *Int. J. Contr*., vol.74, (2001a), 1631–1658.

Haddad, W. M., V. Chellaboina, N. A. Kablar, “Nonlinear Impulsive Dynamical Systems: Feedback Interconnections and Optimality”, *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr*., Phoenix, AZ, (1999.a).

Haddad, W. M., V. Chellaboina, N. A. Kablar, “Nonlinear Impulsive Dynamical Systems: Feedback Interconnections and Optimality”, Also in: Int. J. Contr., vol.74, (2001.b),1659–16720.

Haddad, W. M., N. A. Kablar, V. Chellaboina, “Robustness of Uncertain Nonlinear Impulsive Dynamical Systems”, *Proc. IEEE Conf. Dec. Contr.*, Sydney, Australia, (2000), 2959–2964.

Haddad, W. M., N. A. Kablar, V. Chellaboina, ”Optimal Disturbance Rejection of Nonlinear Impulsive Dynamical Systems”, Nonlinear Anal., (2005).

Hagiwara, T., M. Araki, ”Design of a Stable Feedback Controller Based on the Multirate Sampling of the Plant Output”, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, (1988), 812– 819.

Hu, S., V. Lakshmikantham, S. Leela, ”Impulsive Differential Systems and the Pulse Phenomena”, Journal of Mathematics, Analysis and Applications, Vol. 137, (1989), 605–612.

Kablar, N. A., “Singularity Impulsive or Generalized Impulsive Systems”, *Proc. Amer. Contr. Conf. Denver*, Colorado (2003.a).

Kablar, N. A., “ Finite Time Stabilty of Singularly Impulsive Dynamical Systems”, *Proc. Control Decision Confonference*, USA, (2010).

Karamancioglu, A., F. L. Lewis, “A Geometric Approach to 2–D Implicit Systems”, Proc. of the 29th Conf. on Decision and Control, Honolulu, Hawai, USA, December, (1990) 470–475.

Kulev, G. K., D. D. Bainov, ”Stability of Sets for Systems with Impulses”, *Bull. Inst. Math. Academia Sinica*, Vol. 17, (1989) 313–326.

Lakshmikantham, V., D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations,* Singapore: World Scientic, 1989.

Lakshmikantham, V., X. Liu, ”On Quasi Stability for Impulsive Differential Systems”, *Non. Anal. Theory, Methods and Applications,* Vol. 13, (1989), 819–828.

Lakshmikantham, V., S. Leela, S. Kaul, ”Comparison Principle for Impulsive Differential Equations with Variable Times and Stability Theory”, *Non. Anal. Theory, Methods and Applications,* Vol. 22, (1994), 499–503.

Lee T. C., “Practical Stabilization for Nonholonomic Chained Systems with Fast Convergence, Pole–Placement and Robustness”, *Proc. of the* 2002*nd IEEE International Conf. on Robotics & Automation*, Washington, DC, USA, May, (2002) 3534–3539.

Leonessa, A., W. M. Haddad, V. Chellaboina, *Hierarchical Nonlinear Switching Control Design with Applications to Propulsion Systems,* London: Springer– Verlag, 2000.

Liu, X., ”Quasi Stability via Lyapunov Functions for Impulsive Differential Systems”, *Applicable Analysis,* Vol. 31, (1988), 201–213.

Liu, X., ”Stability Results for Impulsive Differential Systems with Applications to Population Growth Models”, *Dynamic Stability Systems,* Vol. 9, (1994), 163–174.

Lygeros, J., D. N. Godbole, S. Sastry, ”Verified Hybrid Controllers for Automated Vehicles”, *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 43, (1998), 522–539.

Martynyuk, A. A., “Practical Stability of Hybrid Systems”, *Journal of International Applied Mechanics*, Volume 25, Number 2, Springer, New York, USA, February, (1989) 194 –200.

Milić, M. M., V. B. Bajić, “Qualitative Analysis of the Semi–State Model for Large–Scale Systems”, *Proc. 6th European Conf. Circ. Theory and Design* (ECCTD83), Stuttgart (1983) 131–131.

Milić, M. M., V. B. Bajić, “Some Properties of Solutions of Semi–State Model for Nonlinear Nonstationary Systems”, *Circ. Syst. Sig. Proc, Special Issue on Semistate Systems*, **5** (1) (1986) 109–121.

Milić, M. M., V. B. Bajić, “Stability Analysis of Singular Systems”, *Circ. Syst. Sig. Proc, Special Issue: Recent Advances in Singular Systems*, **8** (3) (1989) 267–287.

Milić, M. M., V. B. Bajić, “Qualitative Analysis of Systems and Circuits Described by Continuous Semistate Models: An Overview of Methods based on Lyapunov Functions (Keynote and Tutorial Lectures)”, *Proc.* 6*–th Int. Symp. Networks, Systems and Signal Processing* (ISYNT89), ETAN and IEEE CAS Society, Zagreb, Yugoslavia, (1989.b) 10–15.

Milić, M. M., V. B. Bajić, “A Lyapunov Function for the Analysis of a Class of Singular Systems and Networks”, *Proc.* 10*–th Europ. Conf. Circ. Theory and Design* (*ECCTD* 91), Copenhagen, Denmark, **III** (1991) 1263–1269.

Milić, M. M., D. Đurić, “An Approach to the Qualitative Analysis of Singular Dynamical Systems”, *Proc. SAUM* 92, Kragujevac, (Serbia) (1992) 349–367.

Nersesov, G. S., W. M. Haddad, "Finite–time stabilization of nonlinear impulsive dynamical system", Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Vol.2, (2008), 832–845.

Passino, K. M., A. N. Michel, P. J. Antsaklis, ”Lyapunov Stability of a Class of Discrete Event Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 39, (1994), 269–279.

Samoilenko, A. M., N. A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations*, Singapore: World Scientic, 1995.

Shen, Y., W. Shen, “Finite–Time Control of Linear Singular Systems with Parametric Uncertaines and Disturbances”, Preprint submitted to *Automatica*, (2006).

Simeonov, P. S. D. D. Bainov, ”The Second Method of Lyapunov for Systems with an Impulse Effect”, *Tamkang Journal of Mathematics*, Vol. 16, (1985), 19–40.

Simeonov, P. S., D. D. Bainov, ”Stability with Respect to Part of the Variables in Systems with Impulse Effect”, *Journal of Mathematics, Analysis and Applications*, Vol. 124, (1987), 547–560.

Tomlin, C., G. Pappas, S. Sastry, ”Conflict Resolution for Air Traffic Management: A Study in Multiagent Hybrid Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, (1998), 509–521.

Tavernini, L., ”Differential Automata and their Discrete Simulators”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods, and Applications*, Vol. 11, No. 6, (1987), 665–683.

Xia, Z., J. Sun, “On Practical Stability for Large Scale Impulsive Control System in Terms of Two Measurements”, *Proc. of the* 5th *World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hangzhou, China, 142–145, June (2004) 15–19.

Yang, C., Q. L. Zhang, Y. Lin, L. Zhou, “Practical Stability of Closed–loop Descriptor Systems”, *International Journal of Systems Science*, Volume 37, Issue 14, Taylor & Francis, Inc., Bristol, PA, USA, November (2006) 1059–1067.

Yang, T., *Practical Stability of Impulsive Control*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Volume 272/2001, Springer Berlin/Heidelberg, 2001.

14.4 VREMENSKI DISKRETNI DESKRPTIVNI SISTEMI

SELEKTIVAN I HRONOLOŠKI PREGLED DOSADAŠNJIH REZULTATA NA POLJU IZUČAVANJA PRAKTIČNE STABILNOSTI I STABILNOSTI NA KONAČNOM VREMENSKOMINTERVALU

Selektivan i detaljan pregled postignutih rezultata na polju izučavanja stabilnosti na konačnom vremenskom interval i praktične stabilnosti diskretnih deskriptivnih sistema do 2005. godine iscrpno je izložen u monografijama, *Debeljković et al.* (2013) i *Stojanović et al.* (2015), tako da se taj prikaz ovde neće navoditi a zainteresovani čitalac, radi kontinuiteta praćenja novih doprinosa, koji se izlažu u nastavku, upućuje se na pomenute reference.

Kada su u pitanju singularni i deskroptivni sistemi iprimena koncepta stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, sve do 2006. godine vladalo je zatišje, kada je, prvi put u radu *Shen*, *Shen* (2006) primenjen prilaz sa stanovišta (LMI) na kontinualne singularne Sistema, o čemu je većbilo reči u prethodom odeljku.

Dosta kasnije, od strane mentora ove disertacije, pojavila se diskretna verzija ovog rada, *Stojanović et al* (2013).

U radovima *Debeljković*, *Kablar* (1998.c, 1992.a, b) izvedene je, po prvi put, diskretna verzija čuvene *Bellman – Gronwall*-ove i primenjena za ispitivanje dinamičkog ponašanja ove klase sistema na konačnom vremsnkom intervalu.

Dobijeni dovoljni uslovi stabilnosti, bili su manje restriktivnijih, od tada postojećih.

Uveden je i koncept ograničenosti na konačnom vremenskom intervalu, za ovu klasu sistema i rešen problem robusnog upravljanja u prisustvu vremenski zavisnih neizvesnosti i egzogenih spolajšnjih uticaja.

Izveden je i dovoljan uslov za robusnu stabilizaciju, korišćenjem povratne sprege uspostavljanje po veličinama stanja.

Pre četiri godine objavljen je i rad *Debeljković et al.* (2012) kao diskretan analaoga rada *Shen*, *Shen* (2006), za diskretne deskriptivne sisteme a sa platforme primene linearnih matričnih nejednačina što je rezultiralo dovoljnim uslovima stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu kao i dovoljni uslovi ograničenosti, ia sve pri dejovanju egzogenog šuma.

Rad iz 2013. godine *Stojanović et al* (2013) razmatra stabilnost odnosno ograničenost rešenje diskretnog deskriptivnog sistema na konačnom vremenskom intervalu u prisustvu vremenski promeljivog spoljašnjeg uticaja.

Izvedena su tri dovoljna uslova ograničenosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu u formi (LMI) uslova koji se mogu bez poteškoća rešiti, znatno unapređen rad iz 2012. godine, što je i dokumentovano jednim eklatantnim primerom.

Novi značajni doprinos, a za jednu posebnu klasu linearnih diskretnih deskriptivnih sistema, dat je u radu *Stojanović*, *Debeljković* (2014).

U ovom radu razmatran je problem oganičenosti kretanja jednog diskretnog deskriptivnog sistema, podvrgnutom dejstvu vremenski promenljivih spoljašnjih poremećaja, na konačnom vremenskom intervalu.

Kombinujući prilaz sa pozicija kvazi-Ljapunovljevih funkcija i klasične primene LMI metoda, izvedeno je nekoloiko dovoljnih uslova ograničenosti kretanja na konačnom vremenskom intervalu i to u formi rešljivih uslova datih u formi LMI nejednakosti.

Šta vise isti ti rezultati iskorišćeni su za kvantifikaciju određenih paramnetara koji određuju stabilnost robusnosti, ove klase sistema, u duhu predloženog i korišćenog koncepta stabilnsoti.

Osnovna Literatura

Bajic, V. B. Debeljkovic, D. Lj., B. Bogicevic, M. B. Jovanovic, “Non-Lypunov stability robustness consideration for discrete descriptor linear systems”, IMA *Journal of Mathematical Control and Information,* Vol.15, No.2, (1998) pp. 105 - 115.

Bogicevic, B. B., D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, M .B. Jovanovic, “Non-Lyapunov Stability and Quantitive Measures Robustness of Linear Time Descrete

Singular Systems", Proc. SAUM 5, October 2-5, Novi Sad (YU), (1995) pp. 250 – 255.

Debeljkovic, D. Lj., A. B. Đordjevic, "Finite time stability of linear singular discrete time systems", *Proc. Conf. on Modelling and Simulation, Monastir* (Tunisia), November 85, (1985) pp. 2- 4.

Debeljkovic, D. Lj.,, D. H. Owens, "On non-Liapunov stability of discrete-descriptor systems", *Proc*. EUROCON Conf. 86, April (1986)., Paris (France), pp. 406 - 409

Debeljković, D.Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Application of singular system theory in chemical engineering: Analysis of process dynamics", Monograph, 12 th International Congress of Chemical and Process Eng., CHISA 96, Prague (Czech Republic), 25 - 30 August, 1996, Process Eng. Publishing, ISBN 80-86059-1-1.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, *Continouos Singular Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 1985.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, Time Delay Systems, - Chapter 2 : Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval, Vienna, (Austria), pp.15 – 30, 2011.

Debeljkovic, D. Lj.,, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, *Discrete Singular Control Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1998.

Debeljkovic, D .Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, "Finite time stability of linear descriptor systems", *Proc*. MELECON 98, Tel-Aviv (Israel), May 18-20, Vol.1, (1998.a) pp. 504-508

Debeljkovic, D. Lj.,, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, Đ. Koruga, "Finite time stability of linear discrete descriptor systems", Preprints 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation, Shenyang (China), September 8 - 10 (1998.b), pp. TS13 1 - 5.

Debeljkovic, D. Lj., N. A. Kablar, "On Finite Time Stability of Discrete Descriptor Systems: Bellman - Gronwall Approach", *Proc*. HIPNEF 98, Oktober 28 - 30, Belgrade (YU), (1998.c) 169 - 172.

Debeljkovic, D. Lj., N. A. Kablar,"Stability of discrete linear singular systems: Bellman - Gronwall approach", *Transactions of Mechanical Eng. Faculty*, Belgrade, No.1, (1999) 1 - 4.

Debeljkovic, D. Lj., N. A. Kablar, "Further results on finite time stability of discrete linear singular systems: Bellman - Gronwall approach", *Proc.* APCCM, The 4th Asia - Pacific Conf. on Control and Measurements, 9 - 12 July (2000) Guilin (China) D. 10.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, *Continouos Singular Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.a

Debeljkovic, D. Lj., M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, Lj. A. Jacic, *Discrete Descriptor Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.b.

Debeljkovic D. Lj, I.. M. Buzurovic, G. V. Simeunovic, "Stability of Linear Discrete Descriptor Systems in the sense of Lyapunov: An Overview ", *International Journal of Information & System Science,* (Canada), Vol. 7, No. 4, (2011) pp. 303 – 322.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanovic, M. S. Aleksendric, M. Mišić, "Finite Time Stability of Linear Time Invariant Discrete Descriptor System: an LMI Approach", *TTEM* (BIH), 2013 (submitted).

Dihovicni, Dj. N., B. B. Bogicevic, Debeljkovic, D. Lj.,, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, “Boudedness and existence of solutions of regular and irregular discrete descriptor linear systems”, *Proc.*ITHURS 96, Leon (Spain) July 5 -7 , (1996) pp. 373 - 378.

Owens, D. H., D. Lj. Debeljkovic, “Consistency and Liapunov stability of linear descriptor systems: a Geometric analysis“, IMA, *Journal of Math. Control and Information*, No.2 (1985) pp. 139 - 151.

Owens, D .H., D. Lj. Debeljkovic, “On non-Liapunov stability of discrete descriptor systems”, *Proc.* CDC, Athens (Greece), December (1986) pp. 2138 – 2134.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, T. Nestorovic, D. S. Antic, “ Finite-Time Boundedness Analysis of a Class of Linear Discrete Descriptor Systems: an LMI Approach”, *Proc*. of ICSC 13 (The 3rd International Conference on Systems and Control), Algeirs, (Algeria), October 29 – 31, (2013) pp. THCD.1 – ThCD.5.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic,“ Finite-Time Boundedness of Uncertain Discrete Time Descriptor Systems with Time – Varying Exogenous Disturbances”, *Journal of Theoretical and Application Mechanics,* Special Issue dedicated to memory of Anton Belimovič (2014).

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic, *Stability of Special Classess of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Technology, Nis, 2015.

Dopunska Literatura

Amato, F., M. Ariola, “Finite-Time Control of Discrete-Time Linear Systems,” *IEEE Trans. Autom. Control*, 50 (5), (2005), pp. 724–729.

Amato, F., M. Ariola, M. Carbone, and C. Cosentino, “Finite-time control of linear systems: A survey in current trends in nonlinear systems and control”: *In honor of Petar Kokotovic and Turi Nicosia*, (2006), pp. 195–213.

Amato, F., M. Ariola, and C. Cosentino, “Finite-Time Control of Discrete-Time Linear Systems: Analysis and Design Conditions,” Automatica, 46(5), 2010, pp. 919–924.

Bajić, V. B., *Lyapunov’s Direct Method in The Analysis of Singular Systems and Networks,* Shades Technical Publications, Hillcrest, Natal, RSA, 1992.a.

Bajić, V. B., *Generic Concepts of System Behavior and the Subsidiary Parametric Function Method*, SACAN, Link Hills, RSA, 1992.b.

Bajić, V. B., *Existence of Practically Stable Solutions of Singular Linear Systems*, Technical Report TR95-02, Control Laboratory, Technikon, Natal, RSA, 1995..

Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM*, Philadelphia (Pennsylvania) 1994.

Campbell, S. L., *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, London, 1980.

Dai, L., *Singular Control Systems: Lecture Notes in Control and Information Sciences*, New York, Springer, Vol. 118, 1989.

Dorato, P., “Short Time Stability in Linear Time-Varying Systems”, *Proceedings of the IRE International Convention Record*, Part 4, New York, 1961, pp. 83–87.

Hsiung, K. L., L. Lee, “ Lyapunov Inequality and Bounded Real Lemm for Discrete –time Descriptor Systems”, *IEE Proc. – Control Theory Appl.* (146) No. 4 (1999) pp. 327 - 331

Shen, Y., W. Shen, “Finite-Time Control of Linear Singular Systems with Parametric Uncertaines and Disturbances”, Preprint submitted to *Automatica*, (2006).

Xu, S., C. Yang, “Stabilization of Discrete Time Singular Systems: A Matrix Inequality Approach”, *Automatica* (35) (1999) 1405 – 1409.

Wu, Z., H. Su, J. Chu, “Robust Stabilization for Uncertain Discrete Singular Systems With State Delay,” *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 18(16), (2008) pp. 1532–1550.

Xu, S., J. Lam, “Robust Stability and Stabilization of Discrete Singular Systems: An Equivalent Characterization,” *IEEE Trans. Autom. Control*, 49(4), (2004), pp. 568–574.

Yang, C., Q. L. Zhang, Y. Lin, L. Zhou, “Practical Stability of Closed-loop Descriptor Systems”, *International Journal of Systems Science*, Volume 37, Issue 14, Taylor & Francis, Inc., Bristol, PA, USA, November (2006) 1059-1067.

14.5 VREMENSKI KONTINUALNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

SELEKTIVAN I HRONOLOŠKI PREGLED DOSADAŠNJIH REZULTATA NA POLJU IZUČAVANJA PRAKTIČNE STABILNOSTI I STABILNOSTI NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU

Selektivan i detaljan pregled postignutih rezultata na polju izučavanja stabilnosti na konačnom vremenskom interval i praktične stabilnosti vremenski kontinualnih sistema sa kašnjenjem do 2005. godine iscrpno je izložen u monografijama, *Debeljković et al.* (2013) i *Stojanović et al.* (2015),tako da se taj prikaz ovde neće navoditi a zainteresovani čitalac, radi kontinuiteta praćenja novih doprinosa, koji se izlažu u nastavku, upućuje se na pomenute reference.

Izvesno zatišje trajalo je skoro punih pet godina..

Izvesni novi doprinosi, dati u radovima *Debeljkovic et al.* (2010), zasnivaju se na pokušajima da se za član koji unosi čisto vremensko kašnjenje nađe pogodna zamena i u tom smislu koriste se poznate matrične nejednačine.

Međutim, tako dobijeni rezultati dosta su konzervativni, što je i razumljivo jer se zasnivaju na nekoliko uzastopnih minorizacija.

Kao poseban doprinos, može se spomenuti i proširenje koncepta *atraktivne praktične stabilnosti*, na klasu sistema sa kašnjenjem.

Ti rezultati, u osnovi, kombinuju postojeću drugu metodu Ljapunova sa konceptom stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, *Debeljkovic et al.* (2010).

Koristeći *Hale* - ovu transformaciju, dobijeni su novi dovoljni uslovi stabilnosti na konačnom vremsnkom intervalu, za kontinualne sisteme sa kašnjenjem, prevodeći ih u sisteme opisane običnim jednačinama diferencijalno-integralnog tipa, *Debeljković et al.* (2011.b, 2011.c).

Sa pojavom (LMI) prilaza javljaju se novi radovi autora ove monografije, koji rešavaju problem stabilnosti sa pomenutih pozicija a šta više i usputno problem stabilizacije ove klase sistema uvođenjem proporcionalnog (statičkog, nememorijskog) regulatora u povratnu spregu sistema po veličinama stanja.

Valja pomeniti, da je ovde po prvi put, barem koliko je autorima pozanto, za ovu klasu sistema primenjena i klasična minorizacija i majorizacija, a sve u cilju dobijanja manje konzervativnijih rezultata, *Stojanović, Debeljković, Antić* (2012).

Radovi *Debeljković et al.* (2012.a, 2012.b, 2012.c) razmatraju i daju nova poboljšanja rezultata na polju *atraktivne praktične stabilnosti*, ove klase sistema.

Jedan efikasan način za dobijanje dovoljnih uslova stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, ove klase sistema, ponuđen je u radu *Buzurović, Debeljković, Jovanović* (2013).

Naime, polazeći od prepostavke o pozitivnoj određenosti karakteristične matrice, dolazi se do veoma jedndostavnih kriterijuma, koji ne daju bolje rezulate od analognih (LMI) postupaka ali su daleko jednostavniji a njihova konzervativnost, sa te tačke gledišata, može se prihvati.

Znatno unapređenje ovog rezultata postignuto je u radu *Debeljković, Stoajnović, Jovanović* (2013.b), gde je odbačena prepostavka o pozitivno određenosti karakteristične matrice i zamenjena samo uslov o njenoj simetričnosti.

Još jedan efikasan rezultat generisan je, klasičnim prilazom, u radu *Debeljković et al.* (2013.a), a podržan *Hale*- ovom transformacijom.

Problem robusne stabilnosti i robusne stabilizacije, metodom podešavanja polova, na konačnom vremnskom intervalu, rešen je u radu *Stojanović, Debeljković, Antić* (2013).

I konačno, u 2013. godini, radom *Debeljković, Stoajnović, Jovanović* (**2013.c**), rešen je problem stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, jednim posebnim prilazom, utemeljen na idejama rada *Lee, Dianat* (1981).

U tom smislu posebnim izborom kvazi-Ljapunovljeve funkcije i sprovedene minorizacije korišćenjem *Coppel*- ove i *Jensen*-ove nejednakosti, dobijeni su dovoljni uslovi stabilnosti u formi sistema algebarskih jednačina koje treba rešiti.

U radu *Debeljković et al* (2013.d), razmatran je problem ispitivanja stabilnosti, posebne klase kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, prisutnim u stanju sistema na konačnom vremenskom intervalu, a što je uključilo i testiranje praktične stabilnosti ove klase sistema.

Za izvođenje ovih rezultata korišćen je Ljapunov- Krasovski funkcional.

U odnosu na ranije rezultate od ovog funkciovala, kao moguće agregacione funkcije pridružene razmatranom sistemu, nije se zahtevala pozitivna određenost u celom prostoru stanja, niti negativna određeneost njegovog izvoda duž kretanja sistema.

Na priloženom numeričkom primeru pokazana je manja konzervativnost izvedenih rezultata u odnosu na neke ranije doprinose iz iste tematske oblasti.

Rad *Debelković et al* (2014.a), bavi se novim, dovoljnim uslovima, zavisnim od kašnjenja, za posebnu klasu kontinualnih, linearnih sistema sa kašnjenjem u stanju.

Pozitivni rezultati, u ovom smislu, dobijeni su zahvaljujući, novom, posebnom i originalnom izboru kvazi-Ljapunovljevog funkcionala, namenski formulisanog za ovu klasu specifičnih problema, a utemeljenog na kultnom radu *Lee, Dianat* (1981).

Bazične majorizacije, postignute su korišćenjem čuvene Coppel-ove i Jensene-ove nejjednačine.

Superiornost i manja konzervativnost ovih rezultata pokazana je kroz nekoliko eklatantnih primera.

Nestabilnost na konačnom vremenskom intervalu, posebne klase kontiunalnih, linearnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju, razmatrana je u radu *Debeljković et al* (2014.b).

Korišćene su kvazi-Ljapunovljevi funkcionali sa posebnim osobinama, koje podrazumevaju da za ove namene, niti moraju da budu pozitivno određeni niti se zahteva da njihovi izvodi duž kretanja sistema treba da budu negativno određene funkcije, što praktično svode procedure izvođenja na potvrde ispravnosti formulaisanih *Definicija*. samo izvođenje počiva na specifičnim osobinama normi, i u tom smislu moguće je generisati dovoljne uslove nestabilnosti i zavisne i nezavisne od iznosa čisto vremenskog kašnjenja.

Značaj određivanja uslova nestabilnosti bilo kojih klasa sistema na konačnom vremenskom intervalu ima višestruk značaj.

Naime, ako se razmatra stvarna trajektorija sistema, u školskim primerima, lako se simulira kretanje sistema i razmatra njihovo ponašanje unutar propisanih granica, dovoljni uslovi karaterišu moguću procenu njihovog napuštanja dozvoljene granice, pre stvarnog napuštanja, ili kako se kaže sa *leve strane*, gledajući aktuelni konačni vremnski interval.

Kada su u pitanju kriterijumi koji procenjuju nestabilnost, ta procena se odnosi na krajnji vremenski interval, posle stvarnog napuštanja dozvoljene granice, kada sistem shodno proceni napušta tu granici (konkretno, kada je preseca).

Postavlja se, logično pitanje, kakva je konkretna korist od jednog takvog prilaza?.

Objašnjenje sledi i veoma je prosto.

Ukoliko ne raspolažemo simulacijom kretanja sistema, a poznate su granice dozvoljenih kretanja kao i propisani konačni vremenski interval, tada posedujući dovoljne uslove i stabilnosi i nestabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, možemo da odredimo stvarni vremenski interval, kada će realni sitem preseći, odnosno napustiti dozvoljeni skup kretanja β, ako su uslovi stabilnosti ranije definisani na klasičan način, tj. u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$.

Konkretno, u ovom radu, na numeričkom primeru pokazane su prethodno izrečene činjenice.

U radu *Debeljković et al* (2015.a), za posebnu klasu kontinualnih, linearnih sistema sa kašnjenjem, okarakterisanim jednim prirodnim svojstvom $\mu(A_0) > 0$ izvedeni su dovoljni uslovi stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, a numeričkim primerom pokazana je sva opravdansot uvedene pretpostavke.

Rad *Debeljković et al* (2015.b) bavi se problemom atraktivne praktične stabilnosti, iste klase sistema, a na osnovu objedinjavanja dovoljnih uslova koji sistem sa kašnjenjem mora da zadovolji pojedinačno za slučaj stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu a i za slučaj asimpotske stabilnosti. Na taj način, gledano sa praktčine tačke gledišta, može se govoriti o kontrolisanom preskoku, tokom prelaznog procesa, koji ima sva asimptotska obeležja.

U radu *Stojanović et al.* (2015.a), proširen je koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu na klasu linearnih, vremenski kontiunualnih sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem. U tom smislu, ovde su data i neka poboljšanja u odnosu na ranije postojeće rezultate, polazeći od funkcionala Ljapunov-Krasovskog, što je rezultiralo u sistem LMI, koji se lako rešava i vodi ka manje konzervativnim rezultatima.

Rad *Buzurović et al* (2015) u osnovi idejno replicira rad *Debeljković et al* (2015.a), što u osnovi dovodi do jednog sličnog rezultata, polazeći ovde od ograničenja tipa: $\mu\left(-A_0\right)<0$. Numeričkim primerom pokazana je ispravnost uvedenog ograničenja.

Osnovna Literatura

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljković, A. M. Jovanovic, " An Efficient Method for Finite Time Calculation of Continuous Time Delay Systems", *Proc. ASCC* 2013, Istanbul (Turkey), June 23 – 26 (2013) CD-Rom .

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljkovic, A. M. Jovanovic, G. V. Simeunovic, " On Finite Time Stabilty of Continuous Time Delayed Systems: New Delay Depenedent Conditions", *Proc.* Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2015, Qingdao (China), 23 – 25, May, (2015.a), pp. 5384 – 5389.

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljkovic, A. M. Jovanovic, G. V. Simeunovic, "On Attractive Practical Stabilty of Systems with State Delay: A New Algebraic Inequalities Approach", *Proc.* Chinese Control and Decision Conference, CCDC 2015, Qingdao (China), 23 – 25, May, (2015.b), pp. 5360 – 5365.

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljkovic, V. H. Jankovic, " On Finite Time Stability: Novel Delay Dependent Criteria", *Proc. STA* , Monastir (Tunissia), December 24 – 26, (2015). CD- Rom.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical Stability of Time–Delay Systems: New Results", *Proc.* 2nd *ASCC* 97,Seoul (Korea), July 22–25, (1997.a) pp. III–543–543.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Đ. Koruga, **"**Finite time stability for the metal strips cold rolling", *Proc.* ASI, Kyongju (Korea), July 16 – 18, (1997.b) pp. 233 – 238.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Đ. Koruga, S. Tomaševic, "On practical stability of time delay systems under perturbing forces", *Proc.* AMSE Conference, Melbourne (Australia), October 29 – 31, (1997.c) pp. 442 – 446.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B.. Jovanović, "On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. CDC* 97, San Diego, California (USA), December 21–23, (1997.d) pp. 2771–2772.

Debeljkovic, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, "Further results on non-Lyapunov stability of time delay systems", *Proc.* MELECON 98, Tel-Aviv (Israel), May 18 - 20, Vol.1, (1998.a) pp. 509 – 512.

Debeljkovic, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, "Non - Lyapunov stability analysis of linear time delay systems", *Preprints* DYCOPS 5, 5th IFAC Symposium on Dynamics and Process Systems, Corfu (Greece), June 8 - 10, (1998.b) pp. 549 - 553.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman–Gronwall Approach", *Proc.* 1st *IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France) July 6–7, (1998.c) pp. 171–173.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, Đ. Koruga, "Further results on Non - Lyapunov stability of time delay systems", *Preprints* 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation, Shenyang (China), September 8 - 10 (1998.d), pp. TS13 6 - 10.

Debeljkovic, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, "Further results on Non - Lyapunov stability of linear systems with delayed state", *Proc.* XII CBA - Brazilian Automatic Control Conference, Uberlandia (Brazil), September 14 - 18 (1998.e), Vol. IV, pp. 1229 - 1233.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Further Results on the Stability of Linear Nonautonomous Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc.* ***ACC*** 2000, Chicago Illinois (USA), June 28–30, (2000) 1450–1451.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, S. B. Stojanovic, Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval, Cigoja press, Belgrade, 2005.a.

Debeljkovic, D. Lj., A. Lj. Jacic, M. Medenica Time Delay Systems: Stabilty and Robustness, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.b.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, Systems, Structure and Control – **Editior** Petr Husek –(Scientific monograph) - Chapter: *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems*: *Delay Dependent Approach*, I–Tech, Vienna, 2008, 029–060.

Debeljkovic, D. Lj. Stability of Control Systems over Infinite Time Interval, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2009.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, I. M. Buzurovic, N. J. Dimitrijevic, "A new approach to the stability of time-delay systems in the sense of non - Lyapunov delay-independent and delay - dependent criteria", *Proc.* of 8 *th* International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, (Serbia), 10 – 11 September, (2010), 213 – 218, CD – Rom.

Debeljkovic, D. Lj., Stabilty of Automatic Control Systems over Finite and Infinite Time Interval, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011

Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, Time Delay Systems – **Editior** Dragutin Lj. Debeljković – (Scientific monograph) –Chapter: *Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems*, I–Tech, Vienna, 2011.a..

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, D. Popov, " On Finite and Practical Stability of Time Delayed Systems: Lyapunov - Krassovski Approach: Delay

Dependent Criteria", *Proc.* The 23 rd, Chinese Control and Decision Conference CCDC 2011, Mianyang, (China), 23 – 25 May , (2011.b) 331 – 337, also CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, D. Popov, " On Finite Time Stability and Asymptotic Practical Stability of Time Delayed Systems: New Delay Dependent Criteria ", *Proc.* Chinese Control Conference CCDC 2011, Yantai, (China), 24 – 26, June (2011.c) pp. 1058 – 1065, also CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, M. S. Aleksendric, " Time Delayed System Stability in the sense of Non-Lyapunov: Delay Independent and Delay Dependant Approach: New Results ", *Proc.* 2011 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC) Denver (Colorado), (USA), September 28 – 30, (2012.a), CD – Rom, pp. 1410 – 1417, also CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, G. V. Simeunovic, M. A. Misic,"Asymptotic Practical Stability of Time Delay Systems **"**, *Proc*. of 10 *th* International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, (Serbia), 23 – 26 September, (2012.b), 119 – 124, also CD – Rom.

Debeljkovic, D. Lj. S. B. Stojanovic, M. P. Lazarevic, T. Nestorovic, G. V. Simeunovic,
" On Practical Stability of Time Delayed Systems: Delay Independent and Delay Dependent Criteria ", *Proc. AADECA* 2012, 23⁰ Congreso Argentino Control Automatico, 3 – 5 October (2012.c), Buenos Aiers, (2012.c), also CD – Rom.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, A. M. Jovanovic, " Further Results on Finite Time and Practical Stabilty of Linear Continuous Time Delay Systems", *FME Transactions* (Serbia), Vol. 10, No. 3 (2013.a) 241 – 249.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, A. M. Jovanovic, N. J. Dimitrijevic,G. V. Simeunovic, " Delay-Dependent Conditions for Finite Time Stability of Continuous Systems with Latency", *Proc*. of 10 *th* International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, (Serbia), 23 – 26 September, (2013.b), 161 – 166, also CD – Rom.

Debeljkovic, D. Lj, S. B. Stojanovic, A. M. Jovanovic "Finite Time Stability of Continuous Time Delay Systems: Lypunov – like Appoach with Jensen's and Coppel's Inequality", *Acta Polytechnica Hungarica* (*Hungary*), Vol. 10, No. 7, (2013.c), pp. 135 – 150.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, A. M. Jovanovic, N. J. Dimitrijevic, G. V. Simeunovic, "Delay-Dependent Conditions for Finite Time Stability of Continuous Systems with Latency", *Proc*. of 10 *th* International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, (Serbia), 23 – 26 September, (2013.d), 161 – 166, also CD – Rom.

Debeljkovic, D. Lj., M. A. Mišic, Stability of Control Systems over Infinite Time Interval, Part III, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2013.d

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, D. S. Antic, Stability of Control Systems over Infinite Time Interval,Part II, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2013.e.

Debeljkovic, D. Lj., I. M.Buzurovic, N. J. Dimitrijevic, M. A. Misic, " Finite Time Stability of Continuous Time Delay Systems: Jensen's Inequality-based Approach", *Proc.* of The 9 th *IEEE Conference on Industrial Electronics and Application* (ICIEA 2014.a), June 09 – 11, Hangzhou (China), CD – Rom, pp. 24 – 30.

Debeljkovic, D. Lj.,I. M.Buzurovic, N. J. Dimitrijevic, G. V. Simeunovic, " On Finite Time Instability of Continuous Time Delay Systems", *Proc.* of The 9 th *IEEE Conference on Industrial Electronics and Application* (ICIEA 2014.b), June 09 – 11, Hangzhou (China), CD – Rom, pp. 1416 - 1421

Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, "Finite Time Stability of Time Delay Systems", *IMA J. Math. Control and Info.,* 16 (3) (1999).

Lazarevic, M. P., D. Lj. Debeljkovic, Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed state, Asian J. Control, Vol. 7, No. 4, pp. 440–447, 2003.

Nenadić, Z. Lj., *Sinteza kontinualnog automatskog upravljanja na konačnom vremenskom intervalu za objekte i procese sa kašnjenjem*, Dipl. rad, *Katedra za automatsko upravljanje*, Mašinski fakultet, Beograd (1995).

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Praktična stabilnost jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem", *Zbornik radova HIPNEF '96*, Vrnjačka Banja, 5–7 jun (1993.a) 197–204.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, *Tehnika – E*, **45** (11-12) (1993.b) E1–E7.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, "On Practical Stability of Time Delay Systems", *Proc. American Control Conference*, Albuquerque, (USA) June 4–6, (1997.a) 3235–3233.

Nenadic Z. Lj. D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems", *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium) July 2–6, (1997.b) pp. 307–311.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Comments on "Stability of Time–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.* (2006) (submitted).

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, D. S. Antic, "Finite Time Stabilty and Stabilization of Linear Time Delay Systems", *Facta Univ.,* Series: Automatic Control and Robotics, Vol. 11, No. 1, (2012) pp. 25 – 36.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, D. S. Antic, "Robust Finite Time Stabilty and Stabilization of Linear Uncertai Time Delay Systems", *Asian Journal Control* (Taiwan),Vol. 15 , No. 5 (2013), pp. 1548 – 1554.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic, *Stability of Special Classess of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Technology, Nis, 2015.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, G. V. Simeunovic, N. J. Dimitrijevic, "An improved finite-time stability of linear systems with time-varying delay", *Proc. Fifth Serbian Congress on Theoretical and Applied* Mechanics, 15 - 17 June, (2015.c), Aranđelovac, Serbia, pp. 01 – 10.

Dopunska Literatura

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, “State feedback stabilization over a finite-time interval of linear systems subject to norm bounded parametric uncertainties”, *Proc*. 36-th *Allerton Conference,* Monticello, Sept. 23-25,(1998).

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, “Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances”, *Automatica,* vol. 37 (9), pp. 1459-1463, 2001.

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. T. Abdallah, P. Dorato, “Necessary and sufficient conditions for finite-time stability of linear systems”, *Proc. American Control Conference*, Denver, Colorado, June 2003, pp. 4452–4456.

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, “Finite-time stabilization via dynamic output feedback”, Automatica, vol. 42, pp. 337-342, 2006.

Angelo, H., *Linear Time Varying Systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

Dorato, P. “Short time stability in linear time-varying system”, *Proc*. IRE Internat. Conv. Rec. Part 4, New York 1961, pp. 83–87.

Du, Z., Q. Zhang and L. Liu, “New delay - dependent robust stability of discrete singular systems with time-varying delay”, *Asian J. Control*, Vol. 13, No. 1, 136–147 (2011).

Garcia, G., S. Tarbouriech, J. Bernussou, Finite-time stabilization of linear time-varying continuous systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 54, pp. 364–369, 2009.

Hsiao, F. H. and J. D. Hwang “Stabilization of Nonlinear Singularly Perturbed Multiple Time Delay Systems by Dither”, *Trans. ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 118 (3), (1996) 177–181.

Hale, J. K., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer–Verlag, New York,1977.

Lee, T. N., S.Dianat, “Stability of Time–Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 26, No 4, (1981) 951–954.

Ming, Q., Y. Shen, “Finite-Time H∞ Control for Linear Continuous System with Norm-bounded Disturbance”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*., 14 1043-1049 (2009).

Shang, Y., F. Gao, F. Yuan, “Finite-time Stabilization of Networked Control Systems Subject to Communication Delay”, *Int. J. Adv. Comput. Technol*., 3 (3) 192-198 (2011).

Shen, Y., L. Zhu, Q. Guo, “Finite-Time Boundedness Analysis of Uncertain Neural Networks with Time Delay: An LMI Approach”, *Proc. 4th Int. Symp. Neural Networks*, Nanjing, China, 904–909, (2007).

Wang, X., M. Jiang, C. Jiang and S. Li, “Finite-time boundedness analysis of uncertain CGNNs with multiple delays”, *Proc*. of the 7th *International Symposium on Neural Networks*, Shanghai, China, June 2010, pp. 611-618.

Wang, J., J. Jian, P. Yan, “Finite-Time Boundedness Analysis of a Class of Neutral Type Neural Networks with Time Delays”, *Proc.* 6*th Int. Symp. Neural Networks,* Wuhan, China, 395–404 (2009).

Wang, X., M. Jiang, C. Jiang, S. Li, “Finite-Time Boundedness Analysis of Uncertain CGNNs with Multiple Delays”, *Proc. 7th International Symposium on Neural Networks, Shanghai,* China, 611–618 (2010).

14.6 VREMENSKI DISKRETNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

SELEKTIVAN I HRONOLOŠKI PREGLED DOSADAŠNJIH REZULTATA NA POLJU IZUČAVANJA PRAKTIČNE STABILNOSTI I STABILNOSTI NA KONAČNOM VREMENSKOMINTERVALU

Selektivan i detaljan pregled postignutih rezultata na polju izučavanja stabilnosti na konačnom vremenskom interval i praktične stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa kašnjenjem do 2005. godine iscrpno je izložen u monografijama, *Debeljković et al.* (2013) i *Stojanović et al.* (2015),tako da se taj prikaz ovde neće navoditi a zainteresovani čitalac, radi kontinuiteta praćenja novih doprinosa, koji se izlažu u nastavku, upućuje se na pomenute reference

Očigledno je da postoji više radova objavljenih na polju vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem nego na polju vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Sigurno je da jedan od osnovnih razloga leži u činjenici da su vremenski diskretni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem konačnih dimenzija, tako da se lako mogu formirati ekvivalentni sistemi znatno velikog reda, *Mori et al*. (1982.b), *Malek–Zavarei, Jamshidi* (1987), *Gorecki et al.* (1989), *Guet al.* (2003).

Pod pretpostavkom da je matrica ekvivalentnog sistema poznata moguće je, korišćenjem standardnih postupaka razvijenih za obične (klasične), linearne, vremenski diskretne sisteme, odrediti osobinu stabilnosti vremenski diskretnog sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Međutim, u tom slučaju, problemi numeričkog proračuna su još očigledniji i ozbiljniji.

U radu *Koepcke* (1965) je, po prvi put, razmatrana ova klasa sistema, u smislu rešavanja problema sinteze upravljanja sistemom, predstavljenim linearnim diferencijalno–diferencnim jednačinama. Pokazano je da su takvi sistemi ekvivalentni beskonačno dimenzionalnim diferencnim jednačinama čiji se matrični elementi mogu lako izračunati rekurzivnim formulama.

Ovaj rad bio je sjajna inspiracija za doprinose na polju stabinosti na konačnom vremenskom intervalu diskretnih sistema, po prvi put, saopšteni u referencama *Aleksendrić, Debeljković* (2002), *Debeljković, Aleksendrić* (2003) gde je započeto je istraživanje a i dato konačno rešenje još uvek, do tada, nerazjašnjenog problema ove prirode.

Sve donedavno, ovo je bio jedini rad vezan za ovu problematiku, bar koliko je autorima ove monografije, poznato.

Utvrđivanje stabilnosti pomoću njegove diskretne fundamentalne matrice je izuzetno teško, tako da je neophodno pronaći efikasnije metode koje treba da se zasnivaju na jednostavnom izračunavanju sopstvenih vrednosti ili norme odgovarajućih matrica sistema, kao što je urađeno za vremenski kontinualne sisteme, ili da se primeni (LMI) prilaz.

U radu *Debeljkovic et al.* (2012) na bazi uspostavljenih linearnih matričnih nejednakosti a korišćenjem kvazi_Ljapunovljevih funkcional, tipa Ljapunov – Krassovskii, izvedeni su novi dovoljni uslovi stabilnosti na konačnom vremenskom interval linearnih vremeski invarijantih diskretnih sistemna sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju.

Lako se pokazuje da su izvedeni rezultati manje restriktivnijih od do sada postojećih, baziranih manje višed na klasičnim prilazima.

Rad *Debeljkovic et al.* (2013), koristeći dobro poznatu vektorsku nejednačinu, *Su et. al* (1994), nudi rešenje ovih problema u jednoj vrlo kondeznovanoj i za numerički tretman lakoj formi. Ovaj prilaz bliži je klasičnim metoodama, nego prilazu (LMI), a stvarna i upotrebna vrednost tih rezultata tek treba da se ispita.

Rad *Buzurovic, Cvetkovic, Debeljkovic* (2015), bavi se iznalaženjem mogućih rešenja jedne nelinearne, kvadratne diskretne matrične jednačine.

Ta rešenja su krucijelna u formulaciji jednog posebnog kriterijuma stabilnosti, koji daje dovoljne uslove stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu klasične klase diskretnih sistema sa kašnjenjem, opisanih u modelu prostora stanja vektorskom diferencnom jednačinom stanja:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h)$$

Taj kriterijum daje dovoljne uslove, zavisne od iznosa čisto vremenskog kašnjenja, a sama nelinearna matrična jednačina, čije se rešenje traži prisutna je i u ljapunovskoj i neljapunovskoj stabilnosti.

U ovom radu data su neka njena rešenja, za posebne slučajeve i to tada kada se ista može faktorizoirati.

Poznati Traub i Bernoulli algoritmi, korišćeni su za sračunavanje dominatntih solvenata predmetne nelinearne diskreten matrične jednačine.

Rad *Debeljković, Buzurović, Cvetković, Janković* (2015) u svom uvodnom delu razmatra se jednomogućerešenjebazičnenelinearnekvadratnematričnejednačinei u tom smislu identičan je prethodno pomenutom radu.

U drugom delu, izlaže se jedan značajan rezultat koji pokušava da iznađe opšte rešenje ranije pomenute nelinearne matrične diferencijane jednačine, koja nema svojstva faktorizacije, i u tom smislu dobija se jedan parcijalni uslov, sa dosta ograničenja koje nije lako zadovoljiti.
rešavanje

Na bazi klasičnog matematičkog formalizma, izvodi se zaključak da se za sračunavanja dominantnogsolventamatričnogpolinoma, ne može garantovati solidna konvergencija u svim slučajevima, kao što je slučaj u konvencionalnim matematičkim postupcimna.

Izlažu se dava rezultata od kojih jedan daje posebno i **jedan opšte rešenje**, kojevažizaslučajkadasematričnipolinommožeprikazatiufaktorizovanomobliku, što predstavlja značajno proširenje doprinosa izloženog u prethodno pomenutom radu.

Numeričkimprimeromilustrovana je opravdanostpredloženeprocedure**.**

Rad *Stojanovic, Debeljkovic, Misic, Buzurovic* (2016.a) razmatra problem stabilnosti klase vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju tretira sličnu problematiku, kao i naredni, uz elegantno korišćenje diskretne *Jensen*- ove nejjednakosti, što dovodi do manje više sličnih rezultata sa sličnim komentarima kao i u narednom slučaju, iako je korišćen klasičan prilaz.

U radu *Stojanovic, Debeljkovic, Misic* (2016.b) razmatra se problem stabilnosti klase vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju. Ovde korišćeni Ljapunov- Krasovski funkcional uključuje konvoluciju vektora stanja sistema sa kašnjenjem i vremenski zavisne vektorske funkcije.

Novi, dovoljni uslovi stabilnosti, ovog koncepta, dobijeni su u formi linearnih matričnih nejednakosti (LMI), sa jasnim saznanjem da generišu daleko manje konzervativne uslove od onih koji su dobijeni u dosadašnjim istraživanjima.

Sve je to potkrepljeno eklatantnim primerima, koji dokazuju manju konzervativnost u odnosu na nedavno dobijene rezultate.

Rad *Stojanović* (2016) razmatra problem stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu diskretnih sistema sa intervalnim vremenski promenljivim kašnjenjem i nelinearnim perturbacijama ili prisutnim parametarskim neizvesnostima. U cilju dobijanja manje konzervativnijih rezultata ovog koncepta stabilnosti, predložen je konačna suma nejednakosti stanja sistema sa prisutnim kašnjenjem.

Izvedeni su dovoljni uslovi stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu u formi linearnih matričnih nejednakosti (LMIs) koristeći Ljapunov - Krasovskij - funkcional (LKLF) sa stepenom funkcijom i single / double sumirajućih članova.

Izvedene su i daleko preciznije procene gornje granice početni vrednosti (LKLF) i donje granice (LKLF).

Kao poseban slučaj, razmatra se stabilnost na konačnom vremenskom intervalu diskretnih sistemima sa konstantnim vremenskim kašnjenjem i prisutnim neizvesnostima.

Dati su i odgovarajući numerički primeri kako bi se ilustrovala primenjivost izvedenih rezultata kao i nihova manja konzervativnost.

Osnovna Literatura

Aleksendrić, M., *On Stability of Particular Class of Continual and Discrete Time Delay Systems on Finite and Infinite Time Interval*, Diploma Work, Univiversity of Belgrade, Department of Control Engineering, 2002.

Aleksendrić, M., D, Lj. Debeljkovic, "Finite Time Stability of Linear Discrete Time Delayed Systems*"*, *Proc. HIPNEF* 2002, Nis (Yu), October, 2-5, (2002) 333 – 340.

Buzurovic, I. M., A. Cvetkovic, D. Lj. Debeljkovic, " Delay Dependent Finite Time Stability of Discrete Time Delay Systems: Towards the New Solution", *Proc.* AMME (International Conference on Applied Mechanics and Mechatronics Engineering), October 25 – 26 2015, Bangkok (Thailand), CD Rom.

Debeljković, D. Lj., *Synthesis of Discrete Automatic Control over Finite Time Interval* (in Serbian), Ph.D. Dissertation, Mechanical Engineering Deptartment, University of Belgrade, Belgrade, July, 1979.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd, 1999.

Debeljkovic, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non – Lyapunov stability of linear discrete time delay systems", *Proc. ACC* 2003, Denver (Colorado), USA, June 4 - 6, (2003.a) CD-Rom.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, N. Y. Yong, Q. L. Zhang, "Lyapunov and Non–Lyapunov of Linear Discrete Time Systems with Delayed State", *Proc. ICCA* 2003, Montreal, (Canada), (2003.b) 296–301.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, N. J. Dimitrijevic, **"** On Finite and Practical Stabilty of Linear Discrete Time Delay Systems ", *Proc*. of 9 *th* International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, (Serbia), 08 – 10 September, (2011.a), 119 – 124, also CD – Rom.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, S. B. Stojanovic, D. Popov, T. Nestorovic, " Further Results on Stability of Linear Discrete Time Delay Systems over a Finite Time Interval: Novel Delay-Independent Conditions", *Proc.* 2011 IEEE ICCA (International Conference on Control and Automation, Santiago (Chile), December 19 - 21, (2011.b), 1213 – 1218, also CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, D. Popov, "The Stability of Linear Discrete Time Delay Systems Over a Finite Time Interval: New Results ", *Proc.* of WCICA (10 the World Congress on Itelligent Control and Automation), Beijing (China), July 6 – 8 (2012.a) 1459 - 1464, also CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, D. N. Popov, " On Non-Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems: LMIs Approach", *Proc.* of WCICA (10 the World Congres on Itelligent Control and Automation), Beijing (China), July 6 – 8 (2012.b), pp. 1535 - 1540, also CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, S. B. Stojanovic, A. M. Jovanovic,"Novel Conditions for Finite Time Stability of Discrete Time Delay Systems", *Proc.* ICSSE 2013 (IEEE International Conference on System Science and Engineering), July 4 – 6, (2013.a), Budapest (Hungary), CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, A. M. Jovanovic, Finite-Time Stability of Continuous Time Delay Systems: Lyapunov - like Approach with Jensen's and Coppel's Inequality, *Acta Polytechnica Hungarica* Vol. 10, No. 7, (2013.b) 135-150.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, M. A. Misic,"Finite-Time Stability Analysis of Discrete Time-Delay Systems Using New a Lyapunov-Like Functional with a Discrete Convolution of Delayed States**",** *Acta Hungarica* (2014), **submitted**.

Debeljkovic, Lj. D,A. Cvetkovic, I. M. Buzurovic, M. A. Misic, V. H. Jankovic**,** “On Finite Time Delay Dependent Stabilityof Linear Discrete Delay Systems : Numerical SolutionApproach“, *Scientific Science Review* (Serbia), Vol. 65, No. 3 (2015) pp. 39 – 45.

Stojanovic S. B., “Robust finite-time stability of discrete time systems with interval time-varying delay and nonlinear perturbations”, *Journal of the Franklin Institut*e, (2016), **submitted.**

Stojanovic S. B., D. Lj. Debeljkovic, N. J. Dimitrijevic, “Finite-time stability of discrete–time systems with time-varying delay”, *Chemical Industry and Chemical Engineering Quarterly*, vol. 18, no 4/I, (2012) 525-533.

Stojanovic S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic, “The application of different Lyapunov - like functionals and some aggregate norm approximations of the delayed states for finite-time stability analysis of linear discrete time-delay systems”, *Journal of the Franklin Institut*e, Vol. 351, No. 7, July 2014, pp. 3914-3931**.**

Stojanović S. B., D. Lj. Debeljković, D. S. Antić, “Finite Time Stabilty Analysis of Discrete Time Delay Systems using Discrete Convolution of Delayed States“, Facta Universitates, Series: Automatic Control and Robotics, Vol. 14, No.3, (2015), pp. 147 – 158.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic, *Stability of Special Class of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Technology, Nis, 2015.

Stojanovic S. B., D. Lj. Debeljkovic, M. A. Misic, I. M. Buzurovic, “Finite-Time Analysis of Discrete-Time Delay Systems by Using Discrete Convolution of Delayed States“, *Automatika* (Croatia), **submitted** (2016.a).

Stojanovic S. B., D. Lj. Debeljkovic, M. A. Misic, “Finite-Time Stability for a Linear Discrete-Time Delay Systems by Using Discrete Convolution: an LMI approach“, *International Journal of Control, Automation and Systems*, 14(4), (2016.b), 1144 – 1151.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic, *Stability and Robustness of Particular Class of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Technology, Nis, 2016. (**in press**).

Dopunska Literatura

Amato F., Ambrosino R., Ariola M., Calabrese F.: Finite-Time Stability Analysis of Linear Discrete-Time Systems via Polyhedral Lyapunov Functions, 2008 American Control Conference, Seattle, Washington, USA June 11-13, 2008, pp. 1656-1660.

Coppel, W. A. *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, Boston: D.23. Heath, 1965.

Desoer, 23. A. M. Vidysagar, *Feedback Systems: Input–Output Properties*, Academic Press, New York 1975.

Du, Z., Q. Zhang and L. Liu, New delay-dependent robust stability of discrete singular systems with time-varying delay, *Asian J. Control*, Vol. 13, No. 1, 136–147 (2011).

Hiroyuki I., Katayama H.: Finite-Time Control for Linear Discrete-Time Systems with Input Constraints, 2009 American Control Conference, St. Louis, MO, USA June10-12, (2009.a) 1171-1174.

Hiroyuki I., Katayama H.: Necessary and Sufficient Conditions for Finite-Time Boundedness of Linear Discrete-Time Systems, Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference Shanghai, China, December 16-18, (2009.b) 3226- 3231.

Koepcke, R. W., "On the Control of Linear Systems with Pure Time Delay", *Trans. ASME J. Basic Eng*., **3** (1965) 74–80.

Lee, T. N., S.Dianat, "Stability of Time–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* Vol. 26, No 4, (1981) 951–954.

Malek–Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time–delay systems,* North–Holland Systems and Control Series, Vol. 9, Amsterdam, 1987.

Moon Y. S., P. Park, W.–H. Kwon, Delay–dependent robust stabilization of uncertain state–delayedsystems, *Int J Control*, 74 (2001) 1447–1455.

Su, J. H., I. K. Fong, C. L. Tseng, "Stability Analysis of Linear Sytems with Time Delay", *IEEE Trans. Automat. Control***AC-39** (6) (1994) 1341–1344.

Xiang C., S. Zhong, L. Xiong, Delay–dependent robust stability of uncertain discrete–time switched systems, Journal of Math Res., 2 (1) (2010) 164–170.

14.7 VREMENSKI KONTINUALNI SINGULARNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

SELEKTIVAN I HRONOLOŠKI PREGLED DOSADAŠNJIH REZULTATA NA POLJU IZUČAVANJA PRAKTIČNE STABILNOSTI I STABILNOSTI NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU

Sa sigurnošću se može reći, da je rad *Yang et al.* (2006), prvi proširio koncept praktične stabilnosti na posebnu klasu linearnih vremenski kontinualnih singularnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

U tom smislu, pomenuti rad, bavi se istraživanjem uslova pod kojim će se realizovati ovaj koncept stabilnosti, jano u pozitivnom smislu, oslanjajući se na rezulatate faktičkog prikupljanja podataka o sistemu na osnovu dva izvršena merenja.

U izvesnom smislu ovi rezutati imaju izvesnu paralelu sa klasičnom teorijom Ljapunova, preuzimaju odatle odgovarajuće agregacione funkcije a koristeći *princip* poređenja, pokazuje se da se razmatrana klasa sistema, može svesti na klasične, obične, dobro poznate sisteme pa čak i bez kašnjenja.

Značajno proširenje ideja iz prethodnog rada može se naći u *Su et al.* (2010), gde je ranije postavljeni problem tretiran za slučaj beskonačno velikih kašnjenja a za potrebe uniformne parktične stabilnosti sistema, što svakako predstavlja evidentnu nadogradnju ranijih doprinosa.

Ti rezultati baziraju se na standardnim ljaupunovskim funkcionalima i tehnici *Razumikhin*-a.

Kao i ranije, uključeni su podaci prikupljeni na osnovu dva izvršena merenja.

Autori ove monografije, po prvi put su se oprobali u sferi ovih interesovanja radom, *Stojanovic, Debeljkovic, Antic* (2012).

U radu *Debeljkovic et al.* (2013.a) razmatran je problem određivanja dovoljnih uslova koji linearnom vremenski kontinualnom singularnom sistemu sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju obezbeđuje stabilnost na konačnom vremnskom intervalu a sa pozicija (LMI) prilaza. Dobijeni su veoma efikasni rezultati u kategoriji kriterijuma koji uključuje i iznos čisto vremenskog kašnjenja u krajnji rezultat.

U radu *Debeljkovic et al.* (2013) rešavan je ovaj isti problem na klasičan način koristeći dobro poznatu vektorsku nejednakost, *Su et al.* (1994).

Primenljivost ovih rezultata zbog evedentnog prisustva značajnih majorizacija, potrebno je tek ispitati.

Valja napomenuti da se u priloženom spsiku literature za ovu glavu, pored ovde pomenutih referenci, navode i neki već antologijski izvori, kojima su postavljeni temelji i razjašnjena osnovna pitanja *regularnosti*i *neimpulsnog* ponašanja, što su ključni uslovi za kvalitetnu spoznaju rada ove klase sistema.

U radu *Stojanovic, Debeljkovic* (2013.a) koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, proširen je na klasu kontinualnih, linearnih singularnih sistema sa kašnjenjem.

Izvedeni su novi, dovoljni uslovi ovog koncepta stabilnosti i to sa pozicija klasičnog prilaza i pozicija primene metoda koje se zasnivaju na primeni linearnih matričnih nejednačina.

U prvom slučaju, korišćene su algebarske matrične transformacije, dok je drugi slučaj podrazumevao izbor početnih funkcionala koji direktno vode do klasičnih LMI. U oba slučaja vođeno je strogo računa o regularsnosti razmatranih sistema kao i rešenjima koje garantuju neimpulsivna kretanja.

Numeričkim primerima ilustrovana je jednostanost primenjenih metoda.

U radu *Stojanovic, Debeljkovic, Antic* (2014), razmatrana je robusnost stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu posebne klase singularnih sistema sa kašnjenjem u stanju.

Neizvesnosti su bile iskazane kroz vremenski promenljive matrice ograničene po normi.

Koristeći kvazi-Ljapunovljeve funkcionale i prilaz sa pozicija LMI, izvedeni su dovoljni uslovi koji garantuju da je razmatrani singularni sistem sa kašnjenjem regularan,
sa neimpulsnim kretanjem i stabilan na propisanom konačnom vremenskom intervalu.

OsnovnaLiteratura

Monografije

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljkovic, *Geometric Approach and Dynamical Behavior Study for Particular Class of Linear Singular Systems with Application in Medicine*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2009.

Debeljkovic, D. Lj.,*Stability of Control Systems over Infinite Time Interval*,Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2009.

Debeljkovic, D. Lj., *Linear Singular Systems with Time Delay*: *Stabilty, Robustness, Stabilizability and robustness stabilizability*, Part I, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010.

Debeljkovic, D. Lj., *Stabilty of Automatic Control Systems over Finite and Infinite Time Interval*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

Debeljkovic, D. Lj., *Dynamics of Continuous Linear Singular Systems*: *Impulsive behaviour, generalized inverses, stabilization, regularization, optimization and applications*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, *Continuous Singular Control Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1996.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, *Discrete Singular Control System*s, GIP Kultura, Belgrade, 1998.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, *Finite Time Stabilty of Time Delay Systems*, GIP Kultura, Belgrade, 1999.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, *Continuous Singular Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.a

Debeljkovic, D. Lj., M. B. Jovanovic, S. A. Milinkovic, Lj. A. Jacic, *Discrete Descriptor Systems*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.b

Debeljkovic, D. Lj., , S. A. Milinkovic, S. B. Stojanovic, *Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interva*l, Cigoja press, Belgrade, 2005.c

Debeljkovic, D. Lj., A. Lj. Jacic, M. Medenica*Time Delay Systems: Stabilty and Robustness*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.d

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, *Dynamics of Continuous Linear Singular Systems: A Geometric Approach*, Mechanical Faculty, Belgrade, 2007.

Debeljkovic, D. lj., S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, *Stabilty of Particular Classes of Linear Control Systems over Finite and Infinite Time Interval*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2010.

Debeljkovic, D. Lj., - Editior, *Time Delay Systems*, *I–Tech*, Vienna, (Austria) 2011.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, Systems, Structure and Control - Editior Petr Husek, – Chapter : *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach*, I – Tech, Vienna, 2008.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, Time Delay Systems, - Chapter 2 : Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval, *I–Tech*, Vienna, (Austria) 2011.a.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, Time Delay Systems, - Chapter 3 : Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems", *I –Tech*, Vienna, (Austria) 2011.b.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic *Dynamics of Continuous Linear Singular Control Systems*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2012.

Debeljkovic, D. Lj., N. A. Kablar, V. M. Kvrgic, *Linear Singular Systems with Time Delay: Stabilty, Robustness, Stabilizability and robustness stabilizability*, Part II, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2013.a

Debeljkovic, D. Lj., M. A. Mišic, *Stability of Control Systems over Infinite Time Interval*,Part III, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2013.b

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, *Dynamics of Singular and Descriptive Time Delayed Control Systems: Stability, Robustness, Optimization, Stabilizability and Robustness Stabilizability*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2013.c

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, D. S. Antic, *Stability of Control Systems over Infinite Time Interval*,Part II, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2013.d

Pjescic, R M., V. Chistyakov, D. Lj. Debeljkovic, *On Dynamical Analysis of Particular Class of Linear Singular Time Delayed Systems: Stabilty and Robusteness*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2008.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic, *Stability of Special Class of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Technology, Nis, 2015.

Radovi

Buzurovic, I. M., D. Lj., Debeljkovic, "Contact Problem and Controllability for Singular Systems in Biomedical Robotics", *International Journal of Information and System Sciences*, Volume 6–2 (2012) 128–141.

Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, "On practical stability of singular systems", *Proc. Melecon Conf*. 85, Madrid, Spain 1985, 103–105

Debeljković, D. Lj., V. B. Bajic, Z. Gajic, B. Petrovic, "Boundedness and existence of solutions of regular and irregular singular systems", *Automatic Control*, No.1 (1993) 69–78.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarevic, Đ. Koruga, S. Tomaševic, "Finite time stability of singular systems operating under perturbing forces: Matrix measure approach", *Proc. AMSE Conference*, Melbourne, Australia (1997), 447–450.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, T. Nestorovic, D. Popov, " A New Approach to Stability of Singular Time Delay Systems in the sense of Non-Lyapunov: Delay Independent Conditions", *Proc.* 2011 IEEE ICCA (International Conference on Control and Automation, Santiago (Chile), December 19 - 21, (2011) pp. 312 - 317, also CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., S.B. Stojanovic, T. Nestorovic, "The stability of linear continuous singular and discrete descriptor time delayed systems over the finite time interval: an overview - Part I continuous case", Sci. Tech. Rev., 62 (1) (2012.a) 38-47.

Debeljković, Lj. D., I. M. Buzurović, L. Matija, Đ. Koruga, " Non-Lyapunov stability of singular systems: classical and modern approaches with application to automatic drug delivery", *Proc.* of *the* The *Fifth International Conference on Contemporary Materials*, Banja Luka (Republic of Srpska - BIH), July 5 – 7 (2012.b), CD-Rom

Debeljkovic, D. Lj, S. B. Stojanovic, M. S. Aleksendric, "Stability of Singular Time Delay Systems in the Sense of Non-Lyapunov: Classical and Modern Approach", *Hemijska Industrija*, (Serbia),) 67 (2) (2013.a) 193–202.

Debeljković, Lj. D., I. M. Buzurović, L. Matija, Đ. Koruga, " Non-lyapunov stability of singular systems: classical and modern approaches with application to automatic drug delivery", *Contempory material* (BIH), IV-1 (2013.b) pp. 22 – 33.

Nie, Y. Y., D. Lj. Debeljković, "Non–Lyapunov Stability of Linear Singular Systems: A Quite new Approach in Time Domain", *Dynamics of Continuous*, *Discrete and Impulsive Systems*, Vol.11, Series A: Mat. Analysis, No.5-6 (2004), 751–760.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic " Finite - time stability and stabilization of singular time delay systems ", *Proc. SAUM* November 14 - 16 (2012), Nis, (Serbia) pp. 228 – 231.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, G. V. Simeunovic, N. J. Dimitrijevic, " Further results on finite - time stability of singular time delay systems: Delay – dependent conditions ", *Proc. Forth Serbian Congress on Theoretical and Applied* Mechanics, 04 - 07 June, (2013.a), Vrnjačka Banja, Serbia, pp. D02: 585 – 590.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic,T. Nestorovic, D. S. Antic, " Further Results on Stability of Singular Time Delay Systems in the Sense of Non-Lyapunov: a New Delay Dependent Conditions", *Proc*. of ICSC 13 (The 3rd International Conference on Systems and Control), Algeirs, (Algeria), October 29 – 31, (2013.b), pp.WeAD.2-WeAD.7.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, " On stability of singular time delay systems over the finite time interval: Classical and LMI approach", *Scientific Review* **S2** (2013.c),pp. 289 – 302.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic "Robust Finite-Time Stability of Uncertain Singular Time Delay Systems", *Proc. SAUM* November 12 - 14 (2014), Nis, (Serbia),CD – Rom,

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic, "Finite-time stability and stabilization of singular state-delay systems using improved estimation of a lower bound on a Lyapunov-like functional ", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*-Technical Sciences, vol. 63 No. 2, pp. 479-487, 2015.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic, *Stability of Special Class of Control Systems over Infinite Time Interval*, Faculty of Technology, Nis, 2015.a.

Dopunska Literara

Bajic, V. B., *Lyapunov Direct Method in the Analysis of Singular Systems and Networks*, Shades Technical Publications, Technicon Natal, RSA, 1992.

Buzurovic, I. M., "Dynamic Model of Medical Robot Represented as Descriptor", *System, International Journal of Information and System Sciences*, Vol.2, No.2 (2007) 316–333.

Buzurovic, I. M., T. K. Podder, Y. Yu, "Force Prediction and Tracking for Image-guided Robotic System using Neural Network Approach", IEEE Biomedical Circuits and Systems Conference, Bio CAS, Baltimore, Maryland, USA (2008), 41–44.

Buzurovic, I. M., T. K. Podder, Yan Yu, "Prediction Control for Brachytherapy Robotic", System, *Journal of Robotics*, Vol. 20 (2010), 155–165.

Dai, L.,*Singular control systems*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer, Berlin, 118, 1989.

Ghaoui, L. El., F. Oustry, M. Ait Rami, "A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems", *IEEE Trans. Autom. Control* 42 (1997) 1171-1176.

Hale, J. K., *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York. 1977.

Jun, F., W. Zhen and S. Jia-Bing, "Finite-time control of linear singular systems subject to parametric uncertain and disturbances", Acta Autom. Sin., Vol. 31, No. 4, (2005) 634-637.

Li, Y. Q., Y. Q. Liu, „Stability of Solutions of Singular Systems with Delay", *Control Theory Appl*., 15, (1998) 542–550.

Li, Y., Y. Liu, „Stability of Solution of Generalized Functional Equations", *Acta. Appl. Mat7.*, 22, (1999) 130–138.

Liu, X. Z., Q. Wang, „On the Stability in Terms of Two Measures for Impulsive FunctionalDifferential Equations", *Comput. Mat7. Appl*., 326, (2007) 252–265.

Liu, H., Y. Shen, X. Zhao, "Finite - time stabilization and boundedness of switched linear system under state-dependent switching", *J. Franklin Inst*., DOI: http://dx.doi.org/10.1016/ j.jfranklin.2012.12.014.

Owens, D. 7., D. Lj. Debeljković, "Consistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems: a Geometric Analysis", *IMA Journal of Mat7. Control and Information*, No.2 (1985) 139–151.

Su, J. 7., I. K. Fong, C. L. Tseng, "Stability Analysis of Linear Sytems with Time Delay", *IEEE Trans. Automat. Control* AC-39 (6) (1994) 1341–1344.

Su, Z., Q. L. Zhang, W. Liu, "Practical Stability and Controllability for Nonlinear Discrete Time–delay Systems", 2009 *IEEE International Conference on Control and Automation Christchurch*, New Zealand, December 9–11, (2009) 41–46.

Su, Z., Q. L. Zhang, W. Liu, "Practical Stability and Controllability for a Class of Nonlinear Discrete Systems with Time Delay", *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* 10 (2), (2010.a) 161–174.

Su, Z., Q. L. Zhang , J. Ai, C. Yang, "A New Approach to Uniform Practical Stabilty of Descriptor Systems with Infinite Time Delays in Terms of Two

Measurement “, *International Journal of Information and Systems Sciences* Vol. 6, No. 4, (2010.b) 345 – 354.

Su, M., S. Wang, X. Zhang, “Finite-time stabilization for singular linear time-delay systems with time-varying exogenous disturbance”, *Adv. Mater. Res.*, 490-495 (2012) 2459 - 2463.

Xu, S., C. Yang, “An algebraic approach to the robust stability analysis and robust stabilization of uncertain singular systems”, *Int. J. System Science*, Vol. 31, (2000), 55–61.

Xu, S., P. V. Dooren, R. Stefan, J. Lam, “Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty”, *IEEE Trans. Autom. Control*, 47 (7) (2002) 1122–1128.

Xu, S., J. Lam, C. Yang, “Robust H∞ control for uncertain singular systems with state delay”, *Int. J. Robust Nonlin. Control*, 13 (13) (2003) 1213–1223.

Xu, S., J. Lam, Y. Zou, “An improved characterization of bounded realness for singular delay systems and its applications”, *Int. J. Robust Nonlin. Control*, 18 (3) (2008) 263–277.

Yang, D. M., Q. L. Zhang, B. Yao., *Descriptor Systems*, Science Publisher, Beijing, 2004.

Yang, C. Y., Q. L. Zhang, L. Zhou, “Practical Stabilization and Controllability of Descriptor Systems”, *International Journal of Information and System Science*, Vol. 1, No. 3-4 (2005.a), 455–466.

Yang, C. Y., Q. L. Zhang, Y. P. Lin, “Practical Stability of Descriptor Systems”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, Series B Part - 12.b, (2005.b) 44–57.

Yang, C., Q. Zhang, L. Zhou, “Practical stability of descriptor systems with time delays in terms of two measurements”, *J. Franklin Inst.*, 343 (2006.a) 635–646.

Yang, C., Q. Zhang, Y. Lin, L. Zhou, „Practical Stability of Closed–loop Descriptor Systems“,*Interntional Journal of Systems Science*, 37 (14) (15), (2006.b) 1059–1067.

Yang, C. Y., X. Jing, Q. L. Zhang, L. N. Zhou, “Practical stability analysis and synthesis of lineardescriptor systems with disturbances”, *Int. J. Autom. Comput.*, Vol. 5, No. 2, (2008) 138–144 .

Zhang, S. N., „A New Technique in Stability of Infinite Delay Differential Equations“, *Computersand Mathematics with Applications*, 44, (2002) 1275–1287.

Zhu, S., C. Zhang, Z. Cheng, J. Feng, “Delay-dependent robust stability criteria for two classes of uncertain singular time-delay systems”, *IEEE Trans. Autom. Control*, 52 (5) (2007) 880–885.

Zhu, S., Z. Li, C. Zhang, “Delay decomposition approach to delay-dependent stability for singular time-delay systems,” *IET Control Theory Appl*, 4(11), (2010) 2613–2620.

14.8 VREMENSKI DISKRETNI DESKRIPTIVNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM

SELEKTIVAN I HRONOLOŠKI PREGLED DOSADAŠNJIH REZULTATA NA POLJU IZUČAVANJA PRAKTIČNE STABILNOSTI I STABILNOSTI NA KONAČNOM VREMENSKOMINTERVALU

Koliko je poznato, do pojave rada *Debeljkovic et al.* (2012.a, 2013.a), nije bilo rezultata, sa pozicija primene (LMI) postupaka, a na ovom polju istraživanja.

U pomenutim radovima razmatran je problem stabilnosti na konačnom vremenskom intrevalu, kao i atraktivna praktična stabilnost ove klase sistema sa pozicija primene matričnih nejednakosti.

U radu *Debeljkovic et al.* (2012.a) korišćene su kvazi – Ljuapunovljeve funkcije kao i njihove osobine na potprostoru konzistentnih početnih uslova.

Dobro je poznato da ovako izabrane agregacione funkcije ne moraju da budu pozitivno određene u celom prostoru stanja niti se zahteva da njihove potonje razlike bude negativno određene funkcije duž kretanja sistema.

Sledeći osnovu ideju u svih neljaupunovskih koncepata stabilnosti, oličenu u potrebi da se uspostvi veza između potonje razlike agregacione funkcije i nje same, dolazi se do dovoljnih uslova koji u algebarskoj formi matričnih nejednačina promovišu odgovarajuće kriterijume koji uzimaju u obzir i iznos čisto vremenskog kašnjenja.

Kada je reč o atraktivnoj praktičnoj stabilnosti, prethodno pomenuti prilaz kombinuje se sa klasičnom teorijom Ljapunov-a.

U radu *Debeljkovic et al.* (2013.a) rešavan je identični problem, bez potrebe da se kretanje sistema vezuje za podprostor konzistentnih početnih uslova.

U tom smislu bilo je zahtevano i dati su uslovi koji su obezbeđivali kao regularnost tako i kauzalnost razmatranog sistema.

Ostali deo oko formulacije i dokazivanja odgovarajućih teoema bio je rutinski i manje više sličan tehnici korišćenoj u prvo pomenutom radu.

Rezultati oba rada pokazuje se da se dobijaju uslovi koji su manje konzervativniji od onih u postojećoj literaturi.

U radu *Debeljković et al.* (2013.b) rešavan je ovaj isti problem na klasičan način koristeći dobro poznatu vektorsku nejednakost, *Su et al.* (1994).

Primenljivost ovih rezultata zbog evedentnog prisustva značajnih majorizacija, potrebno je tek ispitati.

U radu *Stojanovic*, *Debeljkovic*, *Antic* (2014), izvedeni su novi, dovoljni uslovi koncepta stabilnosti na konačnom vremenskom intervalua za klasu linearnih diskretnih deskriptivnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem prisutnim u stanju sistema.

Rezultati su dobijeni u formi strogih linearnih matričnih nejednakosti, što garantuje regularnost i kauzalnost razmatranog sistema.

Školskim primerima ilustrovana je jednostavnost predloženih procedura, kao i njihova korektnost.

Rad *Stojanovic*, *Buzurovic*, *Debeljkovic* (2015.a) tretira problem stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, jedne posebne klase diskretnih deskriptivnih sistema sa kašnjenjem.

Korišćenjem diskretnih kvazi_Ljapunovljevih funkionala, novi kriterijumi ovog koncepta stabilnosti su izvedeni i to u formi strogih linearnih matričnih nejednakosti, što razmatranom sistemu garantuje regularnost, kauzalnost i stabilnost na konanom vremenskom intervalu.

Rad *Stojanovic, Debeljkovic, Buzurovic,* (2015.b) razmatra problem identičan prethodnome radu, samo u prisustvu nelinearnih perturbacija.

Rad *Stojanovic, Debeljkovic* (2015.c) razmatra robusnost stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, posebne klase linearnih vremenski diskretnih, deskriptivnih sistema sa kašnjenjem.

Prisutna neizvesnost uključena je kroz vremenski promenljive sistemske matrica, koje su ograničene poznatim iznosom svojih normi, što je uobičajena pretpostavaka. Na osnovu uslova stabilnosti za nominalni sistem, izveden je novi kriterijum stabilnosti u formi dovoljnih uslova koji garantuje razmatranom sistemu sa prisutnim neizvesnostima regularnost, kauzalnost i ribusnu stabilnost na konačnom vremenskom intervalu.

Numeričkim primerom demonstrirana je efikasna tehnika i prednost ovog prilaza nad nekim drugim odomaćenim u savremenij literaturi.

Valja napomenuti da se u priloženom spsiku literature za ovo poglavlje, pored ovde pomenutih referenci, navode i neki već antologijski izvori, kojima su postavljeni temelji i razjašnjena osnovna pitanja *regularnosti* i *kauzalnosti*, što su ključni uslovi za kvalitetnu spoznaju rada ove klase sistema.

Osnovna Literatura

Antic, D. S., S. B. Stojanovic, D. Lj. Debeljkovic, “ Finite Time Stabilty and Stabilization of Singular Discrte Time – Delay Systems”, *Proc.* SAUM (International Conference on Systems, Automatic Control and Measurements), Niš (Serbia), November 14 - 16 (2012).

Debeljkovic, Lj. D. Time-Delay Systems(Monograph) - Editor D. Lj. Debeljkovic, I – Tech, Vienna, 2011.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, Time Delay Systems, - Chapter 2 : Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Systems over Infinite and Finite Time Interval, *I –Tech,* Vienna, (Austria) 2011.a.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, Time Delay Systems, - Chapter 3 : Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems”, *I – Tech*, Vienna, (Austria) 2011.b.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, T. Nestorovic, D. Popov, “ A New Approach to the Stability of Discrete Descriptor Time Delay Systems in the sense ofNon - Lyapunov Delay Independent Conditions”, *Proc.* Chinese Control Conference CCDC 2012, Taiyuan, (China), 23 – 25, May, (2012) 1155 - 1160, also CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic , S. B. Stojanovic, T. Nestorovic, “ A New Approach to the Stability of Discrete Descriptor Time Delay Systems in the sense of Non-Lyapunov: Delay Independent Conditions – LMI Approach”, *Proc.* INES 2012, Lisabon (Portugalia) June 13 – 15 (2012.a) 411 – 415.

Debeljkovic, Lj. D., S. B. Stojanovic, T. Nestorovic “ The Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems Over a Finite Time Interval: An Overview - Part I Continuous Case ”, *Scientific Science Review* (Serbia), Vol. LXII, No. 1, (2012.b) 38 – 50.

Debeljkovic, Lj. D., S. B. Stojanovic, T. Nestorovic, “ The Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems Over a Finite Time Interval: An Overview - Part II Discrete Case ”, *Scientific Science Review* (Serbia), Vol. LXII, No. 2, (2012.c) 62 - 75

Debeljkovic, Lj. D., S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, G. V. Simeunovic, “Neljaupunovska Stabilnost Sistema sa Čistim Vremenskim Kašnjenjem: Kriterijumi Nezavisni i Zavisni od Iznosa Čisto Vremenskog Kašnjenja”, *Tehnika* – Mašinstvo, (61), No. 3 (2012.d) 385 – 393.

Debeljkovic, D. Lj. S. B. Stojanovic, T. Nestorovic, G. V. Simeunovic, “ Finite Time Stability of Discrete Descriptor Time Delay Systems – LMI Approach”, *Proc. AADECA* 2012, 23^0 Congreso Argentino Control Automatico, 3 – 5 October 2012, Buenos Aiers, (2012.e) (**accepted** – not presented).

Debeljkovic, Lj. D., S. B. Stojanovic, A. M. Jovanovic, M. A. Misic, “Stabilty of Discrete Descriptor Time Delay Systems on Finite Time Interval: New Delay Dependent Conditions“, *Proc.* 13th *MELECON*, Chania (Creta) Greece, June 25 – 28, (2013) 652 – 657.

Debeljkovic, D. Lj., M. A. Mišic, *Stability of Control Systems over Infinite Time Interval*,Part III, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2013.a

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, *Dynamics of Singular and Descriptive Time Delayed Control Systems: Stability, Robustness, Optimization, Stabilizability and Robustness Stabilizability*, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2013.b

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, D. S. Antic, *Stability of Control Systems over Infinite Time Interval*,Part II, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2013.c.

Dopunska Literara

Boukas, E. K., “State feedback stabilization of nonlinear discrete-time systems with time-varying time-delay”, *Nonlinear Anal.*, Vol. 63, No. 6, pp. 1341–1350, 2007.

Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, Philadelphia (Pennsylvania), 1994.

Dai, L., *Singular Control Systems: Lecture Notes in Control and Information Sciences*, New York, Springer, Vol. 118, 1989.

D’Angelo H., *Linear Time-Varying Systems: Analiza i Sinteza*, Allyn and Bacon, Boston (Massachusetts), 1970.

Dorato, P., “Short Time Stability in Linear Time-Varying Systems”, *Proc. IRE International Convention”*, (6) (1961) 83-87.

Ghaoui,L. El., F. Oustry, M. Ait Rami, “A Cone Complementarity Linearization Algorithm for Static Output-Feedback and Related Problems”, *IEEE Trans. Automat. Contr*., Vol. 42, (1997) 1171-1176.

Fa, H., W. Bao-Wei, “Finite-time Control of Discrete-time Singular Systems”, *J. Chongqing Normal Univ.*, Vol. 29, No. 2 (2012) 51-54.

Feng, Z., J. Lam H. Gao, “Delay-dependent robust H∞ controller synthesis for discrete singular delay systems”, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 21 (2011) 1880–1902.

Ji, X., H. Su, J. Chu, “Delay-dependent robust stability of uncertain discrete singular time-delay systems”, *Proc. American Control Conf.*, Minneapolis, U.S.A.(2006) 3843–3848.

Lakshmikantham, V., S. Leela, A. Martynyuk, *Practical Stability of Nonlinear Systems*, World Scientific, Singapore, 1990.

Lam, L., L. Weiss, “Finite Time Stability with Respect to Time-Varying Sets”, *J. Franklin Inst*., **298** (1974) 415-421.

La Salle J. P., S. Lefschetz , *Stability by Lyapunov’s Direct Method*, Academic Press, New York, 1961.

Liang J. R., “Analysis of stability for descriptor discrete systems with time–delay”, *Journal of Guangxi University* (Nat. Sc. Ed.), 25 (3), (2000) 249–251.

Lin, Y., F. An, *Finite-Time Control of Linear Discrete Singular Systems with Disturbances*, : An Advances in Intelligent and Soft Computing, Vol. 128, *Adv. Multimedia*, *Software Engineer. Comput.*, (D. Jin, S. Lin, Ed.) Vol. 1, Pages 569-573. Springer, Berlin/Heidelberg, 2012.

Su, J. H., I. K. Fong, C. L. Tseng, “Stability Analysis of Linear Sytems with Time Delay”, *IEEE Trans. Automat. Control***AC-39** (6) (1994), 1341–1344.

Tan, C., “Finite-time control for one kind of linear discrete singular systems with parametric uncertainties and disturbances”, *Pioneer J. Math. Math. Sci.*, Vol. 3, No. 2, (2011) 293-305.

Weiss, L., “On Uniform and Nonuniform Finite Time Stability”, *IEEE Trans. Automat. Cont*., **AC-14** (3) (1969) 313–314.

Weiss, L., “Converse Theorems for Finite Time Stability”, *SIAM J. Appl Math*, **16** (6) (1968) 1319–1324.

Weiss, L., E. F. Infante, “Finite Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces”, *IEEE Trans. Automat. Cont*., **AC-12** (1967) 54–59.

Weiss, L., E. F. Infante, “On the Stability of Systems Defined over a Finite Time Interval”, *Proc. National Acad. Sci*., **54** (1965) 44–48.

Xu, S., C. Yang, “Stabilization of discrete–time singular systems: A matrix inequality approach”, *Automatica*, Vol. 35, (1999) 1613–1617.

Xu, S., J. Lam, C. Yang, “ Robust H_∞ control for discrete singular systems with state delayand parameter uncertainty ”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, Vol. 9, No. 4, (2002) 539 – 554.

Yang D. M., Q. L. Zhang, B. Yao., *Descriptor systems*, Science Publisher, Beijing, 2004.

15. STABILNOST NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU LINEARNIH VREMENSKI KONTINUALNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM:

Kratka rekapitulacija prethodnih rezultata

15.1 UVOD

Problem ispitivanja sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem je područje koje se istražuje godinama.

Čisto vremensko kašnjenje je veoma često prisutno u različitim tehničkim sistemima, kao što su električne, pneumatske i hidraulične mreže, dugačke transmisione linije, itd.

Postojanje čisto vremenskog kašnjenja, bilo da je ono prisutno u upravljanju ili/i stanju, može prouzrokovati neželjene prelazne odzive sistema, ili čak nestabilnost.

Kao posledica, problem analize stabilnosti ove klase sistema je jedno od glavnih polja istraživanja za mnoge istraživače.

U opštem slučaju, uvođenje faktora čisto vremenskog kašnjenja čini analizu komplikovanijom.

Kada se uopšteno razmatraju sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem, u postojećim kriterijumima stabilnosti, primenjena su uglavnim dva prilaza, jedan koji uključuje iznos mrtvog vremena i drugi koji to ne uzimaju u obzir.

Drugi prilaz se često naziva kriterijum nezavistan od čisto vremenskog kašnjenja i generalno obezbeđuje jednostavne algebarske uslove.

U tom smislu pitanje njihove stabilnosti zaslužuje veliku pažnju.

Mora se istaći da postoje mnogobrojni sistemi kod kojih je istovremeno prisutan fenomen čisto vremenskog kašnjenja i singularne karakteristike.

Takvi sistemi se nazivaju singularni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Ovi sistemi imaju mnoge specifične osobine.

Ukoliko želimo da ih opišemo tačnije, da ih projektujemo preciznije i da upravljamom njima efektivnije, ogromna pažnja se mora posvetiti njihovom istraživanju, ali to je očigledno težak posao.

U proučavanju ovakvih sistema, postoje još mnogi problemi za razmatranje i onih će biti predmet interesovanja u jednom od narednih poglavlja.

15.2.1 Vremenski kontinualni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem: Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu

Linearan, multivarijabilni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, opisan je svojim modelom u prostoru stanja sa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau), \tag{15.1}$$

i sa pridruženom funkcijom početnog stanja:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_x(t), \quad -\tau \le t \le 0\,. \tag{15.2}$$

Sistem, dat jed. (15.1), se naziva *autonomnim,* $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ je vektor prostora stanja, A_0, A_1, su konstantne matrice sistme odgovarajućih dimenzija, a τ je čisto vremensko kašnjnenje, $\tau = const.,(\tau > 0)$.

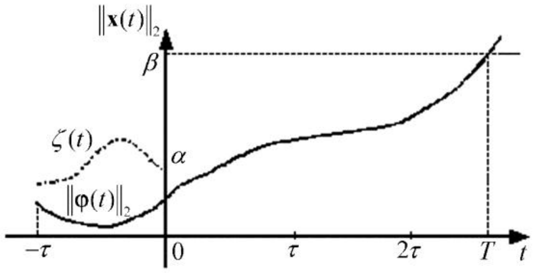
Dinamika sistema, datog jed. (15.1), sa početnim funkcijama, datim jed. (15.2), je određena je na kontinualnom vremenskom intervalu $\Im = \{t_0,\ t_0 + T\}$, gde veličina T može biti ili pozitivan realan broj ili simbol $+\infty$, tako da se istovremeno može razmatrati stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, praktična stabilnost i atraktivna praktična stabilnost, kao i drugi koncepti neljapunovske stabilnosti.

Očigledno je da $\Im \in \mathbb{R}_+$.

Vremenski nepromenljivi skupovi u obliku hipercilindara u prostoru stanja, koji ograničavaju i određuju granice do kojih mogu da dosegnu trajektorija sistema, ispunjavaju uobičajene uslove..

Definicije stabilnosti

Definicija 15.1 Sistem, dat jed. (15.1), koji zadovoljava početni uslov, dat jed. (15.2), je *stabilan nakonačnom vremenskom intervalu*u odnosu na $\{\zeta(t), \beta, \Im\}$ ako i samo ako $\|\boldsymbol{\varphi}_x(t)\| < \zeta(t)$, povlači $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$, $t \in \Im$, $\zeta(t)$ je skalarna funkcija sa osobinom $0 < \zeta(t) \le \alpha, -\tau \le t \le 0$, gde je α realan pozitivan broj i $\beta \in \mathbb{R}_+$ i $\beta > \alpha$, *Debeljkovic et al.* (1997.a, 1997.b, 1997.c, 1997.d), *Nenadic et al.* (1997).



Sl..15.1
Ilustracija prethodne definicije

Definicija 15.2 Sistem, dat jed. (15.1), koji zadovoljava početni uslov, dat jed. (15.2) je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu*u odnosu na $\{\zeta(t), \beta, \tau, \Im, \mu(A_0 \neq 0)\}$ ako i samo ako $\boldsymbol{\varphi}_x(t) \in \mathcal{S}_\alpha$, $\forall t \in [-\tau, 0]$ povlači $\mathbf{x}(t_0, t, \mathbf{x}_0) \in \mathcal{S}_\beta$, $\forall t \in [0, T]$, *Debeljkovic et al.* (1997.b, 1997.c).

Definicija 15.3 Sistem, dat jed. (15.1), koji zadovoljava početni uslov, dat jed. (15.2) je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu*u odnosu na $\{\alpha, \beta, \tau, \Im, \mu_2(A_0) \neq 0\}$ ako i samo ako $\boldsymbol{\varphi}_x(t) \in \mathcal{S}_\alpha$, $\forall t \in [-\tau, 0]$ povlači $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t)) \in S_\beta$, $\forall t \in \Im$, *Debeljkovic et al.* (1997.b, 1997.c).

Definicija 15.4 Sistem, dat jed. (15.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (15.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu*u odnosu na $\{t_0, \Im, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta\}$, ako i samo ako $\|\mathbf{x}(t_0)\|^2 = \|\mathbf{x}_0\|^2 < \alpha$, povlači $\|\mathbf{x}(t)\|^2 < \beta$, $\forall t \in \Im$, *Debeljkovic et al.* (2010).

Definicija 15.5 Sistem, dat jed. (15.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (15.2), je *atraktivno praktično stabilan*u odnosu na $\{t_0, \Im, \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{S}_\beta\}$, ako i samo ako $\|\mathbf{x}(t_0)\|_P^2 = \|\mathbf{x}_0\|_P^2 < \alpha$, povlači: $\|\mathbf{x}(t)\|_P^2 < \beta$, $\forall t \in \Im$, sa osobinom da: $\lim\limits_{k\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\|_P^2 \to 0$,*Debeljkovic et al.* (2010).

Definicija 15.6 Sistem, dat jed. (15.1), pri $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}$ je stabilan na konačnom vremenskom intervalu (FTS) u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, gde je $0 \leq \alpha < \beta$, ako je:

$$\sup_{t\in[-\tau,0]} \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(t) \leq \alpha \quad \Rightarrow \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \beta, \ \forall t \in [0, T].$$

Teoreme stabilnosti– **Uslovi stabilnosti zavisni od iznosa kašnjenja**

Teorema 15.1 Sistem, dat jed. (15.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (15.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \tau, \Im\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\left\|\Phi(t)\right\|_2 < \frac{\sqrt{\beta/\alpha}}{1+\tau\left\|A_1\right\|_2}, \qquad \forall t \in [0, T], \tag{15.3}$$

$\left\|(\cdot)\right\|$ je euklidska norma, a $\Phi(t)$ je fundamentalna matrica sistema, datog jed. (15.1), *Nenadicet al*. (1997), *Debeljkovicet al*. (1997.a).

Kada je $\tau = 0$ ili $\left\|A_1\right\| = 0$, problem se svodi na slučaj običnih linearnih sistema, *Angelo* (1974).

Rezultati koji će biti prezentovani u nastavku omogućavaju ispitivanje stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu razmatranih sistema, naime sistema, datog jed. (15.1) i jed.(15.2), bez nalaženja fundamentalne matrice ili odgovarajućih matričnih mera.

Jed. (15.2) se može prepisati u njenoj opštoj firmi na sledeći način:

$$\mathbf{x}(t_0+\vartheta) = \boldsymbol{\varphi}_x(\vartheta), \quad \boldsymbol{\varphi}_x(\vartheta) \in \mathcal{C}[-\tau,\ 0], \quad -\tau \le \vartheta \le 0\ , \tag{15.4}$$

gde je t_0 početni trenutak posmatranja sistema, datog jed. (15.1), a $\mathcal{C}[-\tau,\ 0]$ je *Banach*-ov prostorneprekidnih funkcija na vremenskom intervalu dužine τ, koji preslikava interval $[(t-\tau),\ t]$ u $\mathbb{R}^n$ sa normom definisanom na sledeći način:

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathcal{C}} = \max_{-\tau \le \vartheta \le 0} \|\boldsymbol{\varphi}(\vartheta)\|. \tag{15.5}$$

Osim toga, može se napisati:

$$\mathbf{x}(t_0+\vartheta) = \boldsymbol{\varphi}_x(\vartheta), \tag{15.6}$$

kao i:

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{f}\left(t_0, \boldsymbol{\varphi}_x(\vartheta)\right). \tag{15.7}$$

Teorema 15.2 Sistem, dat jed. (15.1), sa početnom funkcijom, datom jed. (15.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, t_0, \Im\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\left(1+(t-t_0)\sigma_{\max}\right)^2 e^{2(t-t_0)\sigma_{\max}} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in \Im, \tag{15.8}$$

$\sigma_{\max}(\cdot)$ je najveća singularna vrednost matrice $(\cdot)$, naime:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\max}(A_0) + \sigma_{\max}(A_1), \tag{15.9}$$

Debeljkovic et al. (1998.c), *Lazarevic et al.*(2000).

Napomena 15.1 U slučaju kada je u *Teoremi* 15.2 $A_1 = 0$, t.j. A_1 je nula matrica, dobija se rezultat sličan rezultatu prezentovanom u radu *Angelo*(1974).

Teorema 15.3 Sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (15.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{t_0,\tau,\Im,\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{S}_\beta,\|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha<\beta$, ako je zadovoljen sledeći uslov*:

$$e^{\Lambda_{\max}(\Pi)(t-t_0)}<\frac{\beta}{\alpha},\quad \forall t\in\Im, \tag{15.10}$$

gde je:

$$\Lambda_{\max}(\Pi)=\lambda_{1\max}(\ )+\tau\cdot\lambda_{2\max}(\ ), \tag{15.11}$$

i:

$$\begin{gathered}\lambda_{1\max}(\ )=\lambda_{1\max}\left(\left(A_0^T+A_0\right)+\left(A_1^T+A_1\right)\right)\\ \lambda_{2\max}(\ )=\lambda_{2\max}\left(\wp\left(A_1A_0A_0^TA_1^T+A_1A_1A_1^TA_1^T\right)+2\frac{q^2}{\wp}I\right),\end{gathered} \tag{15.12}$$

pri: $\wp>0$ i $q>1$, *Debeljkovic et al.* (2011.b).

Razmatra se linerani vremenski kontinualan sistem sa kašnjenjem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=A_0\mathbf{x}(t)+A_1\mathbf{x}(t-\tau)+B\mathbf{u}(t) \tag{15.13.a}$$

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t),\quad t\in[-\tau,0] \tag{15.13.b}$$

gde je $\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u}(t)\in\mathbb{R}^m$ je upravljačko dejstvo, $A_0\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $A_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$ i $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$ su poznate matričke konstante, τ je konstantno vreme kašnjenja† .

Početni uslovi, $\boldsymbol{\varphi}(t)$ je neprekidna i diferencijabilna vektorska funkcija $t\in[-\tau,0]$.

Ovde smo zainteresovani za projektovanje stabilizirajućeg statičkog kontrolera sledećeg oblika:

$$\mathbf{u}(t)=K\,\mathbf{x}(t) \tag{15.14}$$

gde je K projektnai parametar koji treba odrediti.

Pripajanjem izraza kontrolera jed.(15.17) u jed. (15.16.a), dobija se sledeća dinamika sistema u zatvorenom kolu dejstva:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\hat{A}_0\mathbf{x}(t)+A_1\mathbf{x}(t-\tau) \tag{15.15.a}$$

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}(t), \tag{15.15.b}$$

gde je:

$$\hat{A}_0=A_0+BK \tag{15.15.c}$$

Ovaj rad obrađuje stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i stabilizaciju posebne klase sistema, date jed. (15.15).

*Izlaže se, u osnovi, rad *Debeljković et. al.* (2011.b).

† Izlaže se, u osnovi, rad *Stojanovic, Debeljkovic, Antic* (2012).

Cilj je da se razvije metod stabilizacije koji obezbeđuje kontrolno pojačanje K takođe i gornju granicu τ_M kašnjenja tako da je sistem stabilan na konačnom vremenskom intervalu za svako τ zadovoljavajući $0 < \tau < \tau_M$.

Pre svega daće se sledeće definicije za stabilanost na konačnom vremenskom intervalu za sisteme sa kašnjenjem, jed. (15.13).

Napomena 15.2 Ljapunovljeva asimptotska stabilnost (LAS) i (FTS) su nezavisni koncepti: Sistem koji je (FTS) može ne bude asimptotski stabilan, obrnuto (LAS) sistem može da ne bude (FTS) ako, za vreme tranzicije, njegovo skretanje prelazi propisane granice.

Teorema 15.4 Sistem, dat jed. (15.13), sa $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ i vremenom kašnjenja τ je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji jedan nenegativan skalar $\wp$ i pozitivno definisana simetrična matrica P i Q tako da sledeći uslovi važe:

$$\Omega = \begin{pmatrix} A_0^T P + PA_0 + Q - \alpha P & PA_1 \\ * & -Q \end{pmatrix} < 0 \tag{15.16}$$

i:

$$\frac{\alpha}{\lambda_{\min}(P)}\left(\lambda_{\min}(P) + \tau \cdot \lambda_{\min}(Q)\right) e^{\wp t} < \beta, \quad \forall t \in \Im = [0, T] \tag{15.17}$$

Stojanovic, Debeljkovic, Antic (2012).

Literatura

Angelo, H., *Linear time varying systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

Coppel, W. A., *Stability and asymptotic behavior of differential equations*, Boston D.C. Heath, 1965.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems", *Proc. ECC* 97, Brussels, Belgium, July 2–6, (1997.a) 307–311.

Debeljkovic, D. Lj., Z. Lj. Nenadic, Dj.,Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, "On practical stability of time–delay systems new results", *Proc.* 2*nd* *ASCC* 97, 22–25 July, Seoul (Korea), (1997.b) 543–546.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. IEEE CDC* 97, San Diego, California, USA, December 21–23, (1997.c) 2771–2772.

Debeljkovic, D. Lj., Z. Lj. Nenadic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, "On the stability of linear systems with delayed state defined over finite time interval", *Proc. CDC* 97, San Diego, California (USA), (1997.d) 2771–2772.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj. Koruga, "Finite time stability for the metal strips cold rolling",*Proc. ASIAN* international workshop on automation in steel industry, Kyongju (Korea), July 16–18, (1997.e) 233–238.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, "Further Results on Non–Lyapunov Stability of Time Delay Systems", *Proc. MELECON* 98, Tel–Aviv, Israel, Vol. 1, May 18–20, (1998.a) 509–512.

Debeljkovic, D. Lj., Dj. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, "Non–Lyapunov stability analysis of linear time delay systems"**,** *Preprints DYCOPS* 5, 5th IFAC Symposium on Dynamics and Process Systems, Corfu (Greece), (1998.b) 549–553.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, "Finite time stability analysis of linear time delay systems Bellman–Gronwall approach", *Proc.* 1st*IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France) July 6–7, (1998.c) 171–175.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, Dj. Koruga, "Further results on non–Lyapunov stability of time delay systems"**,** *Prepr.* 5th*IFAC* Symp. on (LCA), Shenyang (China), September 8–10 , TS13, (1998.d) 6–10.

Debeljkovic, D. Lj., Dj. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, "Further results on non–Lyapunov stability of linear systems with delayed state", *Proc.* XII *CBA*–Brazilian Automatic Control Conference, Uberlandia (Brazil), September 14–18 Vol. IV, (1998.e) 1229–1215.

Debeljkovic, Lj. D., S. A. Milinkovic, *Finite Time Stabilty of Time Delay Systems*, GIP Kultura, ID 72600076, Belgrade, 1999.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval", *Proc. IEEE ACC* 2000, Chicago, Illinois, USA, June 28–30, (2000.a) 1450–1451.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj.. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, "Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval", *Proc. APCCM* (The 4th Asia–Pacific Conference on Control and Measurements), 9–12 July Guilin (China), D. 9 (2000.b).

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Dj. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, "Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval and application to different chemical processes", *CHISA* 2000, 27–31 Avgust, Praha (Czech Republic), CD–Rom, (2000.c).

Debeljkovic, Lj. D., A. Jacic, M. Medenica,*Time Delay Systems*:Stability and Robustness, Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, 2005.

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, *Systems, Structure and Control*–Editior Petr Husek,–Chapter *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems Delay Dependent Approach*, 029–060, I–Tech, ISBN 978–7619–05–3, Vienna, 2008.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, I. M. Buzurovic, N. J. Dimitrijevic, "A new approach to the stability of time–delay systems in the sense of non–Lyapunov delay–independent and delay–dependent criteria", *Proc. SISY* (8th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics), 10–11 Sept., Subotica (Serbia),CD – Rom (2010).

Desoer, C. A., M. Vidysagar, *Feedback Systems Input–Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.

Debeljkovic, D. Lj., **Editior**, *Time Delay Systems, I – Tech,* Vienna, (Austria),2011.

Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, Time Delay Systems **– Editior** Dragutin Lj. Debeljković – (Scientific monograph) –Chapter: *Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems*, I–Tech, Vienna, 2011.a

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, D. Popov, " On Finite and Practical Stability of Time Delayed Systems: Lyapunov-Krassovski Approach: Delay Dependent Criteria", *Proc.* The 23 rd, Chinese Control and Decision Conference CCDC 2011, Mianyang, (China), 23 – 25 , (2011.b) 331 – 337, also CD-Rom.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, A. M. Jovanovic, " Further Results on Finite Time and Practical Stabilty of Linear Continuous Time Delay Systems", *FME Transactions* (Serbia), (2013) (accepted).

Hsiao, F. H. and J. D. Hwang, "Stabilization of Nonlinear Singularly Perturbed Multiple Time Delay Systems by Dither", *Trans. ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, Vol.118 (3), (1996) 177–181.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, "On Practical Stability of Time Delay Systems", *Proc. IEEE American Control Conference*, Albuquerque, USA, June 4–6, (1997) 3235–3235.

Lazarevic, M. P., D. Lj. Debeljkovic, Z. Lj. Nenadic, S. A. Milinkovic, "Finite time stability of time delay systems, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Vol..17, No.3, (2000) 101–109.

Lazarevic, M. P.,D. Lj. Debeljkovic, "Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed state", *Preprints of IFAC Workshop on Time delay systems*, INRIA, Rocquencourt, Paris, (France), September 8–10, CD–Rom, (2003).

Lazarevic, M. P., D. Lj. Debeljkovic, "Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed state",*Asian J Contr*, Vol.7, No.4, (2005) 440–447.

Lee, T. N., S. Diant, "Stability of time delay systems", *IEEE Trans. Automat. Control*AC–26(4), (1981) 951–953.

Mao, X., Comments on "Improved Razumikhin–Type Theorem and its Applications", *IEEE Trans. Automat. Control*, 42 (3), (1997) 429–430.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Simple stability criteria for single and composite linear systems with time delay", *International Journal of Control*, 34, (6), (1981) 1175–1184.

Nenadic, Z. Lj., D. Lj. Debeljkovic, S. A. Milinkovic, "On practical stability of time delay systems", *Proc.ACC* 97, Albuquerque, New Mexico (USA), (1997) 3235–3236.

Pjescic, R M., V. Chistyakov, D. Lj. Debeljkovic, *On Dynamical Analysis of Particular Class of Linear Singular Time Delayed Systems: Stabilty and Robusteness***,** Faculty of Mechanical Engineering Belgrade, Belgrade, 2008.

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “Necessary and sufficient conditions for delay–dependent asymptotic stability of linear continuous large scale time delay systems”, *Asian Journal of Control*, (Taiwan) Vol. 7, No. 4, (2005) 414–418.

Stojanovic, S. B.,D. Lj. Debeljkovic, “The sufficient conditions for stability of continuous and discrete large–scale time delay interval systems”, *Internat. Journal of Infor. & System Science*, (Canada), Vol. 1, No. 1, (2005.a) 61–74.

Stojanovic, S. B.,D. Lj. Debeljkovic, “Necessary and sufficient conditions for delay–dependent asymptotic stability of linear continuous large scale time delay autonomous systems”, *Asian J Contr* (*Taiwan*), Vol. 7., No. 4,(2005.b).

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, “Comments on stability of time–delay systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.* (*submitted*), (2006).

Stojanovic, S. B., D. Lj. Debeljkovic, D. S. Antic “ Finite - time stability and stabilization of singular time delay systems ”, *Proc. SAUM* November 14 - 16 (2012), Nis, (Serbia), pp. 228 - 231

Su, J. H., “Further results on the robust stability of linear systems with single time delay”, *Systems & Control Letters* (23), (1994) 375–379.

Su, J. H., C. G. Huang, “Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*AC– 37(10), (1992) 1656–1659.

Tissir, E., A. Hmamed, “Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{x}(t-\tau)$”, *Automatica*, 32 (12), (1996) 1723–1726.

Xu, B., Y. Liu, “Improved Razumikhin–Type Theorem and its Applications”,*IEEE Trans. Automat. Control AC*– 39(4), (1994) 839–841.

16. STABILNOST NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU LINEARNIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM: LMI PRILAZ

Kratka rekapitulacija prethodnih rezultata

16.1 UVODNA RAZMATRANJA

U poslednjih dvadesetak godina, linearne matrične nejednakosti (LMI) pokazale su se korisnim alatom za analizu i projektovanje upravljačkih sistema.

Zahvaljujući veoma brzom razvoju kompjuterske tehnike kao i pronalasku vrlo efikasnih algoritama za konveksnu optimizaciju, veliki broj kako postojećih tako i novih problema u teoriji upravljanja preveden je u obliku LMI, *Boyd et al.* (1994).

S obzirom da LMI pripada klasi konveksnih optimizacionih problema, oni uvek poseduju globalno rešenje.

U poslednje vreme, za potrebe rešavanja LMI problema, razvijeni su mnogobrojni efikasni algoritmi, poput „*interior point*" metode, *Boyd et al.* (1994).

Kao rezultat toga, brojni problemi, koji nisu imali analitičko ili rešenje u zatvorenom obliku, sada se veoma efikasno numerički rešavaju pomoću LMI.

Drugim rečima, ukoliko smo u stanju da redukujemo upravljački problem na konveksni problem koji uključuje LMI, tada se dati problem može smatrati rešenim.

Druga prednost LMI prilaza ogleda se u tome što on obezbeđuje jedinstveni okvir za analizu i sintezu upravljačkih sistema.

Na primer, kada se jednom dođe do LMI uslova stabilnosti sistema, tada se oni mogu iskoristiti i za rešavanja problema sinteze sistema sa različitim upravljačkim ciljevima, ograničenjima i strukturama regulatora.

Rezultati koji razmatraju i ispituju problem analize neljapunovske stabilnosti linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem dati su u radu *Debeljković*, *Aleksendrić* (2003), gde je problem razmatran prvi put.

Ispitivanje stabilnosti sistema pomoću diskretne fundamentalne matrice je veoma teško, tako da postoji potreba da se pronađu efikasnije metode koje trebaju da se zasnivaju na jednostavnom izračunavanju sopstvenih vrednosti ili norme odgovarajućih matrica sistema, kao što je urađeno za vremenski kontinualne sisteme, ili da se primeni LMI prilaz.

Razmatra se linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju opisan sa:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{M} A_j\,\mathbf{x}(k-h_j), \tag{16.1.a}$$

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-N, (-N+1), \ldots, 0\}, \tag{16.1.b}$$

gde je $\mathbf{x}(k)\in\mathbb{R}^n$, $A_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $j=1,\dots,M$, h_j, $j=1,\dots,M$, su celi brojevi koji predstavljaju čista vremenska kašnjenja sistema, $N=\max\{h_1,h_2,\dots,h_M\}$ i $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ je poznata vektorska funkcija početnih uslova.

Jednačina sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju može se prikazati na sledeći način:

$$\mathbf{x}(k+1)=A_0\,\mathbf{x}(k)+A_1\,\mathbf{x}(k-h), \tag{16.2.a}$$

sa poznatom vektorskom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\vartheta)=\boldsymbol{\psi}(\vartheta),\quad \vartheta\in\{-h,-h+1,\dots,0\}, \tag{16.2.b}$$

gde je $\mathbf{x}(k)\in\mathbb{R}^n$ vektor stanja, A_0 i A_1 su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija, h je ceo broj koji predstavlja čisto vremensko kašnjenje sistema, a $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ je poznata vektorska funkcija početnih uslova.

Definicija 16.1 Linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (16.1.a), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha,\,\beta,\,N,\,\|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha\le\beta$, ako i samo ako za svako kretanje $\mathbf{x}(k)$ koje ispunjava početnu funkciju, datu jed. (16.1.b), tako da:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2<\alpha,\quad k=0,-1,-2,\dots,-N, \tag{16.3}$$

sledi:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2<\beta,\quad k\in K_N, \tag{16.4}$$

Debeljković, *Aleksendrić*(2003).

16.2 GLAVNI REZULTATI

Definicija 16.2 Sistem, dat jed. (16.2), je *stabilan nakonačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\beta,N\}$ ako i samo ako:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2<\alpha,\quad k=-1,0, \tag{16.5}$$

povlači:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2<\beta,\quad \forall k\in K_N. \tag{16.6}$$

Definicija 16.3 Sistem, dat jed. (16.2), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\{\alpha,\beta,N\}$, ako i samo ako:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2_{A_0^TPA_0}<\alpha,\quad k=-1,0, \tag{16.7}$$

povlači:

$$\left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2_{A_0^T P A_0} < \beta, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N, \tag{16.8}$$

sa osobinom da:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2_{A_0^T P A_0} \to 0. \tag{16.9}$$

Definicija 16.4 Sistem, dat jed. (16.2), je *praktično nestabilan* u odnosu na $\left\{ \alpha, \beta, N, \left\| (\cdot) \right\|^2 \right\}$, $\alpha < \beta$, ako za:

$$\left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2 < \alpha, \quad k = -1, 0, \tag{16.10}$$

postoji trenutak: $k = k^* \in \mathcal{K}_N$, tako da je ispunjen sledeći uslov:

$$\left\| \mathbf{x}\left(k^*\right) \right\|^2 \geq \beta, \tag{16.11}$$

za neko $k = k^* \in \mathcal{K}_N$.

Definicija 16.5 Sistem, dat jed. (16.2), je *atraktivno praktično nestabilan* u odnosu na $\left\{ \alpha, \beta, N, \left\| (\cdot) \right\|^2 \right\}$, $\alpha < \beta$, ako za:

$$\left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2_{A_0^T P A_0} < \alpha, \quad k = -1, 0, \tag{16.12}$$

postoji trenutak: $k = k^* \in \mathcal{K}_N$, tako da je ispunjen sledeći uslov:

$$\left\| \mathbf{x}\left(k^*\right) \right\|^2_{A_0^T P A_0} \geq \beta, \tag{16.13}$$

sa osobinom da:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2_{A_0^T P A_0} \to 0. \tag{16.14}$$

Teorema 16.1 Sistem:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h), \tag{16.15}$$

je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{ \alpha, \beta, \mathcal{K}_N, \left\| (\cdot) \right\|^2 \right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan skalar $\wp > 0$ i pozitivno određene matrice P i Q tako da važe sledeći uslovi:

$$\Xi = \begin{pmatrix} A_0^T P A_0 + Q + P - \wp P & A_0^T P A_1 \\ A_1^T P A_0 & Q - A_1^T P A_1 \end{pmatrix} < 0, \tag{16.16}$$

i:

$$\left(\wp+1\right)^{k}\left(\frac{\lambda_{\max}\left(P\right)}{\lambda_{\min}\left(P\right)}+h\frac{\lambda_{\max}\left(Q\right)}{\lambda_{\min}\left(P\right)}\right)<\frac{\beta}{\alpha},\quad \forall k\in K_{N}, \tag{16.17}$$

Debeljković, *Stojanović*, *Dimitrijević*, *Popov* (2012).

Literatura

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. Abdallah, P. Dorato, "Necessary and Sufficient Conditions for Finite–Time Stability of Linear System", *Proc. of the 2003 American Control Conference,* Denver, Colorado, (2003) 4452–4456.

Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory,* SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

Debeljković, D. Lj., "On Practical Stability of Discrete Time Control Systems", *Proc. 3rd International Conference on Control and Applications*, Pretoria, South Africa, December, (2001) 197–201.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non–Lyapunov stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Proc. ACC* 2003, Denver, Colorado (USA), June, (2003) 4450–4451.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, D. Popov, "On Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems: LMIs Approach", *The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*(*WCICA* 2012), Beijing (Chine), July 6–8, (2012).

Lee, E., W. Lu, N. Wu, "A Lyapunov Theory for Linear Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–31 (3), (1986) 259–262.

Lee, T., S. Diant, "Stability of Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–26, (4), (1981) 951–953.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, "On Practical Stability of Time Delay Systems", *Proc. AACC* (*Annual American Control Conference*), Alberquerque, New Mexico (USA), June, (1997) 3235–3236.

STABILNOST POSEBNIH KLASA

SISTEMA SA KAŠNJENJEM

NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU

NOVI REZULTATI

XIII ANALIZA STABILNOSTI
NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU

17. STABILNOST NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU LINEARNIH VREMENSKI KONTINUALNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM: Novi rezultati

17.1 UVODNA RAZMATRANJA

U ovim izlaganjima prezentuju se dva potpuno različita prilaza razmatranju neljapunovske stabilnosti vremenski kontinualnih sistema sa ćistim vremenskim kašnjenjem.

U tom smislu se tretiraju koncepti stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i koncept praktične stabilnosti.

Ova problematika bila je predmet detaljnih uvodnih proučavanja u ovoj doktorskoj disertaciji..

Uz objašnjenja koja slede, valja dodati i činjenicu da će se ovde ponoviti, u skraćenoj formi, neki od tamo izloženih rezultata ali i da će se razviti jedan sasvim novi priliazo ovoj temi, osnovan na kultnoj transformaciji koju je svojevremeno uveo *Hale* (1977) i koja se danas često koristi za ove namene.

Ovde će se ona iskoristiti, po prvi put, za potrebe proučavanja stabilnosti sistema na konačnom intervalu i praktičnoj stabilnosti.

Naime, prvi rezultat je izražen direktno preko . sopstvenih vrednosti osnovnih matrica sistema A_0 i A_1, koje se prirodno pojavljuju u modelu sistema, i izbegava se potreba za uvođenjem bilo koje kanonične forme, ili transformacije u iskazu *Teoreme*.

U drugom slučaju teorija geometrijske koezinstencije vodi do prirodne klase pozitivno određenih kvadratnih normi na potprostoru koji sadrži sva rešenja.

Ova činjenica omogućava primenu Ljapunovljeve i neljapunovljske teorije stabilnosti čak i za vremenski kontinualne, linearne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem u smislu da je osobina privlačenja ekvivalentna postojanju simetričnih, pozitivno određenih rešenja opšte forme Ljapunovljeve matrične jednačine koja uslov koji se odnosi na ograničenost rešenja.

Prva metoda se zasniva na klasičnom prilazu koji se uglavnom koristi za izvođenje dovoljnih uslova stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, nezavisnih od čisto vremenskog kašnjenja.

U drugom slučaju uvedena je jedna specifična i prilagođena definicija, koja se zasniva na osobini *privlačenja*, koja se može tretirati analogno *kvazi–kontraktivnoj* definicii stabilnosti koju su dali *Weiss, Infante* (1965,1967).

Osim toga, izveden je potpuno nov dovoljan uslov, zavistan od čisto vremenskog kašnjenja, koji garantuje da će razmatrani sistem biti praktično stabilan sa osobinom privlačenja njegovih rešenja, koji se može tretirati kao specifičan prilaz konceptu takozvane neljapunovske stabilnosti.

17.2 OZNAKE I PRELIMINARNA RAZMATRANJA

U opštem slučaju, nelinearni,upravljački sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem se mogu opisati kao:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{u}(t)\right), \quad t \geq 0 \\ \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t), \ -\tau \leq t \leq 0\end{aligned}, \tag{17.1}$$

gde je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ je vektor upravljanja, $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{B}^n = \mathcal{B}^n\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^n\right)$ je prihvatljiva funkcija početnih stanja, $\mathcal{B} = \mathcal{B}\left([-\tau, 0], \mathbb{R}^n\right)$ je *Banach*–ov prostorvremenski kontinualnih funkcija koje preslikavaju vremenski interval $[-\tau, 0]$ u $\mathbb{R}^n$ sa topologijom uniformne konvergencije.

Vektorska funkcija zadovoljava:

$$\mathbf{f}(\ ): \Im \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \tag{17.2}$$

i pretpostavlja se da je dovoljno glatka da obezbedi postojanje i jedinstvenost rešenja na vremenskom intervalu:

$$\Im = \left[t_0, (t_0 + T)\right[\in \mathbb{R}_+, \tag{17.3}$$

kao i neprekidnu zavisnost rešenja označenog sa $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ u odnosu na t i početne podatke.

Veličina T može biti ili pozitivan realan broj ili simbol $+\infty$, tako da se stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i praktična stabilnost mogu istovremeno tretirati, sledstveno.

U opštem slučaju, za autonomni sistem se ne zahteva da:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \tag{17.4}$$

što znači da nije neophodnoda koordinatni početak prostora stanja bude ravnotežno stanje.

$\mathbb{R}^n$ označava prostor stanja sistema, datog jed. (17.1), a $\|(\cdot)\|$ označava euklidsku normu.

Neka $V: \Im \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tako da je funkcija $V(t, \mathbf{x}(t))$ ograničena za $\forall t \in \Im$, $\forall \mathbf{x}(t)$ za koje je $\|\mathbf{x}(t)\|$ takođe ograničena.

Definiše se *Ojlerov* izvod funkcije $V\left(t, \mathbf{x}(t)\right)$ duž trajektorije sistema, datog jed. (17.1), na sledeći način:

$$\dot{V}\left(t,\mathbf{x}(t)\right) = \frac{\partial V\left(t,\mathbf{x}(t)\right)}{\partial t} + \left[grad\, V\left(t,\mathbf{x}(t)\right)\right]^T \mathbf{f}(\ ). \tag{17.5}$$

Za vremenski invarijantne skupove se pretpostavlja: $\mathcal{S}_{(\ )}$ je ograničen, otvoren skup.

Neka je $\mathcal{S}_\beta$ dati skup svih dozvoljenih stanja sistema za $\forall t \in \Im$.

Skup $\mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{S}_\beta$,označava skup svih dozvoljenih početnih stanja.

Skupovi $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\beta$ su povezani i *a priori* poznati.

$\lambda(\ )$ označava sopstvene vrednosti matrice $(\ )$.

$\lambda_{\max}$ i $\lambda_{\min}$ su maksimalna i minimalna sopstvena vrednost, sledstveno.

17.3 GLAVNI REZULTATI

Razmatra se linearan, vremenski kontinualan sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju, opisan sa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\,\mathbf{x}(t) + A_1\,\mathbf{x}(t-\tau), \tag{17.6.a}$$

sa poznatom vektorskom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}(t), \quad -\tau \le t \le 0, \tag{17.6.b}$$

gde su A_0 i A_1 konstantne matrice odgovarajućih dimenzija.

Definicija 17.1 Sistem, dat jed. (17.6.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (17.6.b), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{t_0, \Im, \alpha, \beta\}$, ako i samo ako:

$$\|\mathbf{x}(t_0)\|^2 = \|\mathbf{x}_0\|^2 < \alpha,$$

povlači:

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 < \beta, \quad \forall t \in \Im.$$

Teorema 17. 1 Sistem, dat jed. (17.6), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivni skalar $\Lambda_{\max}$, $\Lambda_{\max} > 0$ takav da je zadovoljen sledeći uslov:

$$(1+\tau)e^{\Lambda_{\max} \cdot t} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad t \in [0, T] \tag{17.7}$$

gde je:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\max} &= \lambda_{\max}(\Pi) \\ \Pi &= A_0^T + A_0 + A_1 A_1^T + I \end{aligned} \tag{17.8}$$

sa simetričnom matricom Π čiji spektar sopstvenih vrednosti pripada skupu reaalnih brojeva.*

Dokaz: Usvaja sledeća se kvazi –Ljapunovljeva agregaciona funkcija:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) + \int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta \tag{17.9}$$

Označimo sa $\dot{V}(\mathbf{x}(t))$ vremenski izvod funkcije $V(\mathbf{x}(t))$ duž kretanja sistema, datog jed. (17.6), pa se dobija:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \dot{\mathbf{x}}^T(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)\dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{d}{dt}\int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta \\ &= \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T + A_0\right)\mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t)A_1\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t-\tau)\mathbf{x}(t-\tau)\end{aligned} \tag{17.10}$$

Na bazi dobro poznate nejednakosti:

$$2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{v}(t-\tau) \le \mathbf{u}^T(t)\Gamma^{-1}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}^T(t-\tau)\Gamma\mathbf{v}(t-\tau),\ \Gamma = \Gamma^T > 0 \tag{17.11}$$

sa posebnim izborom matrice $\Gamma = I$, dobija se:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \le \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T + A_0 + A_1A_1^T + I\right)\mathbf{x}(t) \le \mathbf{x}^T(t)\Pi\mathbf{x}(t) \le \lambda_{\max}(\Pi)\mathbf{x}^T\mathbf{x}(t). \tag{17.12}$$

Štaviše, imajući u vidu da je pretpostavljeno $\lambda_{\max}(\Pi) > 0$ lako se vidi da važi:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}(t)) &< \lambda_{\max}(\Pi)\mathbf{x}^T\mathbf{x}(t) + \lambda_{\max}(\Pi)\int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta \\ &< \lambda_{\max}(\Pi)\left(\mathbf{x}^T\mathbf{x}(t) + \int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta\right) \\ &< \lambda_{\max}(\Pi)V(\mathbf{x}(t))\end{aligned} \tag{17.13}$$

s obzirom da je $\int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta > 0$.

Množeći jed. (17.13) sa $e^{-\lambda_{\max}(\Pi)\cdot t}$, dobija se:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda_{\max}(\Pi)\cdot t}V(\mathbf{x}(t))\right) < 0 \tag{17.14}$$

Integraleći, pak, jed. (17.14) od 0 do *t*, na vremenskom intervalu $t \in [0,T]$, dobija se:

$$V(\mathbf{x}(t)) < e^{\lambda_{\max}(\Pi)\cdot t} \cdot V(0) \tag{17.15}$$

Iz jed. (17.9), lako se vidi:

* Izlaže se, u osnovi, rad *Buzurovic, Debeljkovic , Jovanović* (2013).

$$V(0)=\mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0)+\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{\varphi}^T(\vartheta)\boldsymbol{\varphi}(\vartheta)d\vartheta\le\alpha+\alpha\int_{-\tau}^{0}d\vartheta\le\alpha+\alpha\cdot\tau=\alpha(1+\tau) \quad (17.16)$$

a u svetlu *Definicije* 17.1.

Kombinujući jed. (17.15) i jed. (17.16), vodi do:

$$V(\mathbf{x}(t))<\alpha(1+\tau)\cdot e^{\Lambda_{\max}\cdot t} \quad (17.17)$$

S druge strane, očigledno je:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)<\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)+\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}^T(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta=V(\mathbf{x}(t))<\alpha(1+\tau)\cdot e^{\Lambda_{\max}\cdot t} \quad (17.18)$$

Uslov, dat jed.(17.7) i prethodna nejednakost, povlače:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)<\alpha(1+\tau)\cdot e^{\Lambda_{\max}\cdot t}<\beta,\ t\in[0,T] \quad (17.19)$$

što je i trebalo pokazati, *Buzurovic*, *Debeljkovic*, *Jovanović* (2013). **Q.E.D.**

Kada je u pitanju sistem bez kašnjenja, tj., kada je $\tau=0$ ili $A_1=0$ rezultat, dat jed. (17.19), se svodi na onaj dat u *Angleo* (1974).

Literatura

Angelo, H., *Linear Time Varying Systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljković , A. M. Jovanovic, “An Efficient Method for Finite Time Stability Calculation of Continuous Time Delay Systems”, *Proc. ASCC*(Asian Control Conference), June 23 – 26, 2013, Istanbul (Turkey), CD-Rom, ISSN 978-1-4673-5769-2/13&31.00©2013. IEEE.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems”, *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium) July 2–6, (1997.a) 307–311.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On Practical Stability of Time–Delay Systems: New Results”, *Proc.* 2nd *ASCC* 97,Seoul (Korea), July 22–25, (1997.b) III–543–545.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B.. Jovanović, “On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval”, *Proc. CDC* 97, San Diego, California (USA), December 21–23, (1997.c) 2771–2772.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman–Gronwall Approach”, *Proc.* 1st*IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France) July 6–7, (1998) 171–175.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Further Results on the Stability of Linear Nonautonomous Systems with Delayed

State Defined over Finite Time Interval”, *Proc*. ***ACC*** 2000, Chicago Illinois (USA), June 28–30, (2000) 1450–1451.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, D. Popov, “ On Finite and Practical Stability of Time Delayed Systems: Lyapunov-Krassovski Approach: Delay Dependent Criteria”, *Proc.* The 23 rd, Chinese Control and Decision Conference CCDC 2011, Mianyang, (China), 23 – 25 , (2011) 331 – 337, also CD-Rom.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, **A. M. Jovanovic**, “ Further Results on Finite Time and Practical Stabilty of Linear Continuous Time Delay Systems”, *FME Transactions* (Serbia), (2013).

Dorato, P. “Short time stability in linear time-varying system”, Proc. IRE Internat. Conv. Rec. Part 4, New York 1961, pp. 83–87.

Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, “Finite Time Stability of Time Delay Systems”, *IMA J. Math. Control and Info.,* 16 (3) (1999).

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, “On Practical Stability of Time Delay Systems”, *Proc. American Control Conference,* Albuquerque, (USA) June 4–6, (1997) 3235–3235.

18. STABILNOST NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU LINEARNIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM: KLASIČAN PRILAZ – Novi rezultati

18.1 UVODNA RAZMATRANJA

Razmatra se linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju opisan sa:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{M} A_j\,\mathbf{x}(k-h_j), \tag{18.1.a}$$

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-N, (-N+1), \ldots, 0\}, \tag{18.1.b}$$

gde je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $j = 1,\ldots,M$, h_j, $j = 1,\ldots,M$, su celi brojevi koji predstavljaju čista vremenska kašnjenja sistema, $N = \max\{h_1, h_2, \ldots, h_M\}$ i $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ je poznata vektorska funkcija početnih uslova.

Jednačina sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju može se prikazati na sledeći način:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h), \tag{18.2.a}$$

sa poznatom vektorskom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-h, -h+1, \ldots, 0\}, \tag{18.2.b}$$

gde je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, A_0 i A_1 su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija, h je ceo broj koji predstavlja čisto vremensko kašnjenje sistema, a $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ je poznata vektorska funkcija početnih uslova.

18.3 GLAVNI REZULTATI – KLASIČAN PRILAZ

Definicija 18.1 Linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (18.1.a), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha,\ \beta,\ N,\ \|(\cdot)\|^2\right\},\ \alpha \le \beta$, ako i samo ako za svaku trajektoriju $\mathbf{x}(k)$ koja zadovoljava početnu funkciju, datu jed. (18.1.b), tako da:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2 < \alpha, \quad k = 0,-1,-2,\ldots,-N, \tag{18.3}$$

sledi:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2 < \beta, \quad k \in \mathcal{K}_N, \tag{18.4}$$

Debeljković, *Aleksendrić* (2003).

Definicija 18.1 Linearan diskretan sistem sa kašnjenjem, dat jed. (18.2.a), je *stabilan nakonačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha,\ \beta,\ k_N,\ \|(\cdot)\|\right\},\ \alpha \le \beta$, ako i samo ako za svaku trajektoriju $\mathbf{x}(k)$ koja zadovoljava uslove iskazane funkcijom početnih uslova, date jed. (18.2.b), tako da $\|\boldsymbol{\psi}(k)\|^2 < \alpha,\ k = 0,-1,-2,\ldots,-N$ povlači: $\|\mathbf{x}(k)\|^2 < \beta,\ k \in \mathcal{K}_N$.

Teorema 18.1 Pretpostavimo da je sledeća matrica $\left(I - A_1^T A_1\right) > 0$ pozitivno određena. Sistem, dat jed. (18.2) je *stabilan nakonačnom vremenskom intervalu*u odnosu na $\left\{\alpha,\ \beta,\ k_N,\ \|(\cdot)\|\right\}, \alpha < \beta$, ako postoji pozitivni skalar $\lambda_{\max}(\Pi)$, $\lambda_{\max}(\Pi) > 0$ tako da je zadovoljen sledeći uslov:

$$(h+1)^k \left(\lambda_{\max}(\Pi) + 1\right)^k < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N. \tag{18.5.a}$$

gde je:

$$\Pi = \left(A_0^T A_0 + A_0^T A_1 \left(I - A_1^T A_1\right)^{-1} A_1^T A_0\right) \tag{18.5.b}$$

Debeljkovic, *Jovanovic*, *Buzurovic* (2013).

Dokaz. Razmotrimo sledeću Ljapunovljevu funkciju:

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \sum_{j=k-h}^{k-1} \mathbf{x}^T(j)\mathbf{x}(j). \tag{18.6}$$

Potonja razlika funkcije $V(\mathbf{x}(k))$, u oznaci $\Delta V(\mathbf{x}(k))$, duž kretanja sistema, datog jed.(18.2), je:

$$\begin{aligned}\Delta V(\mathbf{x}(k)) = {} & \mathbf{x}^T(k) A_0^T A_0 \mathbf{x}(k) + 2\mathbf{x}^T(k) A_0^T A_1 \mathbf{x}(k-h) \\ & - \mathbf{x}^T(k-h)\left(I - A_1^T A_1\right)\mathbf{x}(k-h)\end{aligned}, \tag{18.7}$$

Koristeći dobro poznatu nejednakost[*], sa posebnim izborom matrice Γ:

$$\mathbf{x}^T(k)\Gamma\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}^T(k)\left(I - A_1^T P A_1\right)\mathbf{x}(k) > 0,\ \forall \mathbf{x}(k) \in \mathcal{S}_\beta \tag{18.8}$$

[*] $2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{v}(t-\tau) \le \mathbf{u}^T(t)\Gamma^{-1}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}^T(t-\tau)\Gamma\mathbf{v}(t-\tau),\ \Gamma > 0$

tako da:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &\le \mathbf{x}^T(k)\left(A_0^T P A_0 + A_0^T A_1\left(I - A_1^T A_1\right)^{-1} A_1^T A_0\right)\mathbf{x}(k) \\ &\le \lambda_{\max}\left(A_0^T P A_0 + A_0^T A_1\left(I - A_1^T A_1\right)^{-1} A_1^T A_0\right)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) \\ &\le \lambda_{\max}(\Pi)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\end{aligned} \tag{18.9}$$

a pod pretostavkom uvedenom *Teoremom* 18.1 a matricom Π, datom jed. (18.5.b), za koju se lako konstatuje da je simetrična što povlači da je spektar njenih sopstvenih vrednosti definisan nad poljem realnih brojeva.

Šta više, lako je videti:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &< \lambda_{\max}(\Pi)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \lambda_{\max}(\Pi)\sum_{j=k-h}^{k-1}\mathbf{x}^T(j)\mathbf{x}(j) \\ &< \lambda_{\max}(\Pi)V\left(\mathbf{x}(k)\right)\end{aligned} \tag{18.10}$$

s obzirom na činjenice $\sum_{j=k-h}^{k-1}\mathbf{x}^T(j)\mathbf{x}(j) > 0$ i $\lambda_{\max}(\Pi) > 0$.

Takođe je, i očigledno:

$$\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) = V\left(\mathbf{x}(k+1)\right) - V\left(\mathbf{x}(k)\right) < \lambda_{\max}(\Pi)V\left(\mathbf{x}(k)\right), \tag{18.11}$$

tako da:

$$V\left(\mathbf{x}(k+1)\right) < \left(\lambda_{\max}(\Pi)+1\right)V\left(\mathbf{x}(k)\right). \tag{18.12}$$

Koristerći iterativnu proceduru u primeni na prethodnu nejednačinu, dobija se:

$$\begin{aligned}V\left(\mathbf{x}(k)\right) &< \left(\lambda_{\max}(\Pi)+1\right)V\left(\mathbf{x}(k-1)\right) < \left(\lambda_{\max}(\Pi)+1\right)^2 V\left(\mathbf{x}(k-2)\right) \\ &< \left(\lambda_{\max}(\Pi)+1\right)^3 V\left(\mathbf{x}(k-3)\right)\ldots \\ &< \left(\lambda_{\max}(\Pi)+1\right)^k V\left(\mathbf{x}(0)\right)\end{aligned} \tag{18.13}$$

S druge strane, ima se:

$$V\left(\mathbf{x}(0)\right) = \mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=-h}^{N=-1}\boldsymbol{\psi}^T(j)\boldsymbol{\psi}(j) \le \mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) + \sum_{j=-h}^{N=-1}\boldsymbol{\psi}^T(j)\boldsymbol{\psi}(j), \tag{18.14}$$

što, zajedno sa *Definicijom* 18.1, vodi ka:

$$V\left(\mathbf{x}(0)\right) < \alpha(1+h), \tag{18.15}$$

tj.

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right) < \left(\lambda_{\max}(\Pi)+1\right)^k V\left(\mathbf{x}(0)\right) < \alpha(1+h)\left(\lambda_{\max}(\Pi)+1\right)^k. \tag{18.16}$$

Očigledno je:

$$\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) < \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \sum_{j=k-h}^{k-1} \boldsymbol{\psi}^T(j)\boldsymbol{\psi}(j) = V(\mathbf{x}(k)) < \alpha(1+h)(\wp+1)^k . \qquad (18.17)$$

Uslov, dat jed.(18.5.a) i prethodna nejednačina, daju:

$$\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) < \beta, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N . \qquad (18.18)$$

što je i trebalo pokazati.**Q.E.D.**

U nastavku iznosimo jedan eklatantan primer, primene prethodno izložene *Teoreme* 18.1 kao i poređenje rezultata sa poznatom metodom LMI.

Primer 18.1 Razmatra se vremenski diskretni sistem sa kašnjenjem iz prethodnog *Primera* a sve sa ciljem mogućeg poređenja rezultata.

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.05 & 0.6 \end{pmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 0.25 & 0.1 \\ 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}\mathbf{x}(k-2).$$

Potrebno je ispitati stabilnost na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\left\{\mathcal{K}_N, \alpha, \beta, \|(\cdot)\|^2\right\}$, sa datim projektnim parametarima i početnim uslovima:

$$\alpha = 40, \quad \beta = 290$$

$$\boldsymbol{\psi}(\vartheta=-2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\psi}(\vartheta=-1) = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\psi}(\vartheta=0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \vartheta \in \{-2, -1, 0\}$$

Za ove namene pogodno je iskoristiti rezultate *Teoreme* 18.1 .

Valja zapaziti da uvek važi:

$$\boldsymbol{\psi}^T(\vartheta)\boldsymbol{\psi}(\vartheta) < \alpha, \ \vartheta \in \{-2, -1, 0\} .$$

Na osnovu raspoloživih podataka, može se sračunati sledeće:

$$\Gamma = \left(I - A_1^T A_1\right) = \begin{pmatrix} 0.7775 & -0.125 \\ -0.125 & 0.9275 \end{pmatrix} > 0$$

$$\sigma(\Gamma) = \{\lambda_1 = 0{,}7067 \quad \lambda_2 = 0{,}9983\}$$

$$\Pi = \left(A_0^T A_0 + A_0^T A_1 \left(I - A_1^T A_1\right)^{-1} A_1^T A_0\right) = \begin{pmatrix} 0.2877 & 0.0386 \\ 0.0386 & 0.0822 \end{pmatrix} = \Pi^T$$

$$\lambda(\Pi) = \{0.0752, \quad 0.2947\}$$

$$\lambda_{\max}(\Pi) = 0.2947 > 0$$

$$(h+1)^{k_{Nest}} \left(\lambda_{\max}(\Pi)+1\right)^{k_{Nest}} = (2+1)^{1.4} (0.2947+1)^{1.4} = 6.6833 < \frac{\beta}{\alpha} = 7.2500$$

$$k_N = k_{Nest} = 1.4\left[s\right].$$

Postupak rešavanja ovog problema sa pozicija primene (LMI) postupka, dat je u *nastavku,* i ovde se neće iznosti.

Od svih tamo izneti relevantnih podataka, naviodi se samo tamo dobijeno procenjeno vreme stabilnosti na izabranom konačnom vremenskom intervau koje iznosi $k_{N\max} = k_N^{est} = 9$.

Prema tom ovom proceduro dobija se $\left\{9, 40, 290, \left\|(\cdot)\right\|^2\right\}$.

Sa dijagrama kvadrata norme kretanja, sl. 18.3, lako se očitava stvarna vrednost vremenskog intervala, kao i trenutak kada pomenuta kriva napušta dozvoljene granice $\beta = 290$.

Taj trenutak iznosi $k_{actual} = 182$.

Valja istaći da je rezultat dobijen *Teoremom* 18.1 nešto konzervativniji od istog dobijenog *Teoremom* 18. 1 - (LMI) a što se može objasniti postojanjem određenih pretpostavki i oganičenja, ali se ujedno mora i priznati daleko jednostavniji numerički tretman.

Međutim, lako se konstatuje, u oba slučaja, da je procena dosta daleko od stvarne vrednosti što je neminovna posledica brojnih majorizacija u obe procedure.

Literatura

Aleksendrić, M., D, Lj. Debeljković, "Finite Time Stability of Linear Discrete Time Delayed Systems", *Proc. HIPNEF* 2002, Niš (Yu), October 2–5, (2002) 333–340.

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljković , A. M. Jovanovic, "An Efficient Method for Finite Time Stability Calculation of Continuous Time Delay Systems", *Proc. ASCC*(Asian Control Conference), June 23 – 26, 2013, Istanbul (Turkey), CD-Rom, ISSN 978-1-4673-5769-2/13&31.00©2013. IEEE.

Debeljković, D. Lj., "On Practical Stability of Discrete Time Control Systems", *Proc.* 3rd *International Conference on Control and Applications*, Pretoria, South Africa, December, (2001) 197–201.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Proc. ACC* 2003, Denver, Colorado (USA), June 4–6, (2003) 4450–4451.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval***,** Cigoja press, Belgrade, 2004.

Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, N. J. Dimitrijević, "On Finite Time and Practical Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", 9th *IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY),* Subotica (Serbia), September 8–10, (2011) 119–124.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, D. Popov, "On Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems: (LMI)s Approach", *The*

10th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA 2012), Beijing (Chine), July 6–8, (2012) 1535 - 1540, also CD Rom

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, S. B. Stojanovic, A. M. Jovanovic,“Novel Conditions for Finite Time Stability of Discrete Time Delay Systems”, *Proc.* ICSSE 2013 (IEEE International Conference on System Science and Engineering), July 4 – 6, 2013, Budapest (Hungary), CD-Rom.

19. DISKRETNI DESKRIPTIVNI SISTEMI SA KAŠNJENJEM: MODERNI LMI I KLASIČNI PRILAZ

Razmatra se linearan diskretan deskriptivni sistem sa kašnjenjem u stanju opisan jednačinom:

$$\begin{aligned} E\,\mathbf{x}(k+1) &= A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-1) \\ \mathbf{x}(k_0) &= \boldsymbol{\psi}(k_0), \quad -1 \le k_0 \le 0 \end{aligned} \tag{19.1}$$

pri čemu je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja

Matrica $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je nužno singularna, sa osobinom $rank\,E = r < n$ i sa matricama A_0 i A_1 odgovarajućih dimenzija.

Za linearni diskretni deskriptivni sistem sa kašnjenjem iz jed. (19.1), predstavljaju se sledeće definicije, preuzete iz *Xu et al*. (2004).

Za neke druge svrhe posmatraće se linearan diskretni sistem sa kašnjenje, opisan jednačinom:

$$\begin{aligned} E\,\mathbf{x}(k+1) &= A_0\,\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{M} A_j\,\mathbf{x}(k-h_j) \\ \mathbf{x}(\vartheta) &= \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-N, (-N+1), \, ..., 0\} \end{aligned} \tag{19.2}$$

pri čemu je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, vektor stanja $E,\, A_j \in \mathbb{R}^{n\times n},\ j = 1,\cdots,M$, $h_j,\ j = 1,\cdots,M$ su, očigledno, celi brojevi koji predstavljaju čisto vremensko kašnjenje, $N = \max\{h_1, h_2, \cdots, h_M\}$ a $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ je vektorska apriori poznata funkcija početnih uslova.

Neka je $\mathbb{R}^n$ prostor stanja sistema, datog jed. (19.1 – 19.2) a $\|(\cdot)\|$ euklidska norma.

Rešenja, sistema datog jed. (19.1– 19.2), su označena sa: $\mathbf{x}(k,\boldsymbol{\psi}) \equiv \mathbf{x}(k)$.

K_N označava diskretni vremenski interval, ako skup nenegativnih celih brojeva: $\mathcal{K}_N = \{\, k : 0 \le k \le k_N \}$.

Veličina k_N može biti pozitivan celi broj ili simbol $+\infty$, tako da je moguće tretirati istovremeno i praktičnu stabilnost i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu.

$\lambda(\ )$ označava sopstvene vrednosti matrice, dok su $\lambda_{\max}(\lambda_{\min})$ maksimalna (minimalna) sopstvena vrednost matrice koje se mogu izračunati na više načina, u zavisnosti od problema.

Definicija stabilnosti

Definicija 19.1 Kauzalni sistem, dat jed. (19.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{k_0, \mathcal{K}_N, \alpha, \beta, R\}$ sa $R > 0$, ako i samo ako za $\forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{W}^{*}_{dis}$ koje zadovoljava:

$$\left\| \mathbf{x}(k) \right\|_{E^T RE}^2 < \alpha, \quad k = 0, -1, -2, \ldots -h,$$

važi:

$$\left\| \mathbf{x}(k) \right\|_{E^T RE}^2 < \beta, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N,$$

gde je $\mathcal{W}_{dis}^*$ je podprostor konzistentnih početnih uslova diskretnog deskriptivnog sistema.

Sada je moguće dati dovoljne uslove pod kojima će sistem, dat jed. (19.2), bez pretpostavki o regularnosti i fizičkoj ostvarljivosti, biti regularan, kauzalan i stabilan na konačnom vremenskom intervalu, istovremeno.

Teorema 19.1 Sistem (19.2) je kauzalan i *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{ \alpha, \beta, \mathcal{K}_N, \left\| (\cdot) \right\|^2 \right\}$ $\alpha < \beta,$ ako za $E^T PE = E^T R^{\frac{1}{2}} \Pi R^{\frac{1}{2}} E$, postoji pozitivni skalar γ i dve pozitivno određene matrice Π, Q takve da su ispunjeni sledeći uslovi*:

$$E^T PE \geq 0$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} A_0^T PA_0 + Q + E^T PE - \gamma E^T PE & A_0^T PA_1 \\ A_1^T PA_0 & -\left(Q - A_1^T PA_1\right) \end{pmatrix} < 0. \tag{19.3}$$

$$\left(\gamma + 1\right)^k \left(\frac{\lambda_{\max}(\Pi)}{\lambda_{\min}(\Pi)} + h \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(\Pi)} \right) < \frac{\beta}{\alpha}, \ \forall k \in \mathcal{K}_N$$

Dokaz. Ako se razmatra sledeća kvaziljapunovska agregaciona funkcija:

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right) = \mathbf{x}^T(k) E^T P E \mathbf{x}(k) + \sum_{j=k-h}^{k-1} \mathbf{x}^T(j) Q \mathbf{x}(j). \tag{19.4}$$

Tada je potonja razlika duž trajektorije sistema, datog jed. (19.2), određena sa:

$$\begin{aligned} \Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= V\left(\mathbf{x}(k+1)\right) - V\left(\mathbf{x}(k)\right) \\ &= \mathbf{x}^T(k)\left(A_0^T PA_0 + Q - E^T PE\right)\mathbf{x}(k) \\ &+ \mathbf{x}^T(k) A_0^T PA_1 \mathbf{x}(k-h) + \mathbf{x}^T(k-h) A_1^T PA_0 \mathbf{x}(k), \\ &- \mathbf{x}^T(k-h)\left(Q - A_1^T PA_1\right)\mathbf{x}(k-h) \\ &= \boldsymbol{\zeta}^T(k) \Gamma \boldsymbol{\zeta}(k) \end{aligned} \tag{19.5}$$

pri čemu je:

*Izlaže se, u osnovi rad, *Debeljkovic et al.* (2012) i *Stojanovic et al.* (2013.a).

$$\boldsymbol{\zeta}^{T}(k)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{T}(k) & \mathbf{x}^{T}(k-h)\end{bmatrix}$$
$$\Gamma=\begin{pmatrix} A_0^T P A_0+Q+E^T PE & A_0^T P A_1 \\ A_1^T P A_0 & -\left(Q-A_1^T P A_1\right)\end{pmatrix}. \tag{19.6}$$

Iz jed. (19.2) i jed.(19.5) se izvodi:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= \zeta^T(k)\Gamma\zeta(k)\\ &= \zeta^T(k)\left(\Xi-\begin{pmatrix}-\gamma E^T PE & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)\zeta(k)\\ &= \zeta^T(k)\Xi\zeta(k)-\zeta^T(k)\begin{pmatrix}-\gamma E^T PE & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\zeta(k)\\ &= \zeta^T(k)\Xi\zeta(k)+\gamma\mathbf{x}^T(k)E^T PE\,\mathbf{x}(k)\\ &< \gamma\mathbf{x}^T(k)E^T PE\,\mathbf{x}(k)\\ &< \gamma\mathbf{x}^T(k)E^T PE\,\mathbf{x}(k)+\gamma\sum_{j=k-h}^{k-1}\mathbf{x}^T(j)Q\,\mathbf{x}(j)\\ &= \gamma V\left(\mathbf{x}(k)\right)\end{aligned} \tag{19.7}$$

s obzirom da važi $\zeta^T(k)\Xi\zeta(k)<0.$

Dalje, očigledno je da:

$$\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right)=V\left(\mathbf{x}(k+1)\right)-V\left(\mathbf{x}(k)\right)<\gamma V\left(\mathbf{x}(k)\right), \tag{19.8}$$

tako da je:

$$V\left(\mathbf{x}(k+1)\right)<(\gamma+1)V\left(\mathbf{x}(k)\right). \tag{19.9}$$

Iterativnom procedurom iz jed. (19.9), dobija se:

$$\begin{aligned}V\left(\mathbf{x}(k)\right) &< (\gamma+1)V\left(\mathbf{x}(k-1)\right)\\ &< (\gamma+1)^2 V\left(\mathbf{x}(k-2)\right)\\ &< (\gamma+1)^3 V\left(\mathbf{x}(k-3)\right)\cdots\\ &< (\gamma+1)^k V\left(\mathbf{x}(0)\right)\end{aligned} \tag{19.10}$$

Dok je sa druge strane:

$$
\begin{aligned}
V\left(\mathbf{x}(0)\right) &= \mathbf{x}^T(0)E^T PE\ \mathbf{x}(0) + \sum_{j=-h}^{-1} \mathbf{x}^T(j)Q\mathbf{x}(j) \\
&\mathbf{x}^T(0)E^T R^{\frac{1}{2}}\Pi R^{\frac{1}{2}}E\ \mathbf{x}(0) + \sum_{j=-h}^{-1} \mathbf{x}^T(j)Q\mathbf{x}(j) \qquad , \\
&\le \lambda_{\max}(\Pi)\mathbf{x}^T(0)E^T RE\mathbf{x}(0) + \lambda_{\max}(Q)\sum_{j=-h}^{-1} \mathbf{x}^T(j)\mathbf{x}(j)
\end{aligned} \tag{19.11}
$$

što uz osnovne pretpostavke *Definicije* 19.1 dovodi do:

$$
V\left(\mathbf{x}(0)\right) < \alpha\left(\lambda_{\max}(\Pi) + h\cdot\lambda_{\max}(Q)\right). \tag{19.12}
$$

Dalje je očigledno da važi i:

$$
V\left(\mathbf{x}(k)\right) > \mathbf{x}^T(k)E^T PE\ \mathbf{x}(k) \ge \lambda_{\min}(\Pi)\mathbf{x}^T(k)E^T RE\ \mathbf{x}(k) \tag{19.13}
$$

Kombinovanjem jed. (19.9), jed. (19.11) i jed. (19.12), lako se utvrđuje da je:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{\min}(\Pi)\mathbf{x}^T(k)E^T RE\,\mathbf{x}(k) < V\left(\mathbf{x}(k)\right) \\
&\qquad < (\gamma+1)^k V\left(\mathbf{x}(0)\right) < (\gamma+1)^k \alpha\left(\lambda_{\max}(\Pi) + h\cdot\lambda_{\max}(Q)\right)
\end{aligned} \tag{19.14}
$$

ili:

$$
\mathbf{x}^T(k)E^T RE\ \mathbf{x}(k) < (\gamma+1)^k \alpha\left(\frac{\lambda_{\max}(\Pi)}{\lambda_{\min}(\Pi)} + h\cdot\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(\Pi)}\right). \tag{19.15}
$$

Uslov, dat jed. (19.3) i prethodna nejednakost povlače:

$$
\mathbf{x}^T(k)E^T RE\ \mathbf{x}(k) < \beta, \quad \forall k \in K_N, \tag{19.16}
$$

što je trebalo dokazati.**Q.E.D.**

Napomena 19.1 Treba primetiti da uslov iz *Teoreme*19.1 nijeklasičan LMI uslov u odnosu na γ, P, Q, ali se lako proverava da je uslov, dat jed. (19.3), obezbeđen postavljanjem sledećih relacija:

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 I < P < \gamma_2 I \\
0 < Q < \gamma_3 I
\end{aligned} \tag{19.17}
$$

$$
\begin{pmatrix}
-\gamma_1\beta(\gamma+1)^{-k_N} & \gamma_2\sqrt{\alpha} & \gamma_3\sqrt{\alpha h} \\
\gamma_2\sqrt{\alpha} & -\gamma_2 & 0 \\
\gamma_3\sqrt{\alpha h} & 0 & -\gamma_3
\end{pmatrix} < 0, \tag{19.18}
$$

za neke pozitivne skalare $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Kada se usvoji fiksno γ, uslovi, dati jed. (19.1) i jed.(19.2) se mogu pretvoriti u LMI problem izvodljivosti.

Napomena 19.2 Ovde izložena materija, predstavlja suženi prikaz, rada autora *Stojanovic et al.* (2013.a) koji je podnesen za ASCC (Asisan Control Conference), June 23 – 25, 2013, Istanbul (Turkey) i koji u velikoj meri proširuje doprinose date u radu *Debeljkovic et al.* (2012).

Izlaže se, jedan novi prilaz celoj ovoj problematici.

Definicija stabilnosti

Definicija 19.2 Linearan diskretno deskriptivni sistem, dat jed. (19.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\beta,N\}$, $\alpha<\beta$ ako:

$$\sup_{k\in\{0,-1,\cdots,-h\}} \boldsymbol{\psi}^T(k)E^TE\boldsymbol{\psi}(k)<\alpha$$

implies:

$$\mathbf{x}^T(k)E^TE\mathbf{x}(k)<\beta,\ \ \forall k\in\{0,1,\cdots,N\}$$

Teorema 19. 2 Regularni i kauzalni linearni vremenski diskretni deskriptivni sistem, dat jed. (19.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\beta,N\}$ ako postoji realan pozitivan scalar $\bar{\lambda}_{\max}(\Xi)>0$ i ako su zadovoljene sledeći uslovi:

$$\mathbf{x}^T(k-k)\Big(I+A_1^TA_1-\big(E^TE\big)\big(E^TE\big)\big(E^TE\big)^D\Big)\mathbf{x}(k-h)\le 0\,, \qquad (19.19)$$

$$\forall\mathbf{x}(k-h)\in\mathcal{W}_{dis}\setminus\{0\}$$

$$\Pi=\Big(I+E^TE\Big(I-\big(E^TE\big)\big(E^TE\big)^D\Big)\Big)>0\,, \qquad (19.20)$$

$$(1+h)\big(\lambda_{\max}(\Xi)+1\big)^k<\frac{\beta}{\alpha},\quad \forall k\in K_N\,, \qquad (19.21)$$

gde je $(\ )^D$ *Drazin*- ova inverzija matrice $(\ )$, a:

$$\bar{\lambda}_{\max}(\Xi)=\max\Big(\mathbf{x}^T(t)\Xi\mathbf{x}(t):\ \ \mathbf{x}^T(t)E^TE\mathbf{x}(t)=1\Big) \qquad (19.22)$$

$$\Xi=A_0^T\left(I+A_1\Pi^{-1}A_1^T\right)A_0 \qquad (19.23)$$

Debeljkovic, Stojanovic, Jovanovic, Misic (2013).

Dokaz. Usvaja se sledeća kvazi – Ljapunovljeva agregaciona funkcija:

$$V\big(\mathbf{x}(k)\big)=\mathbf{x}^T(k)E^T\,E\mathbf{x}(k)+\sum_{j=k-h}^{k-1}\mathbf{x}^T(j)E^T\,E\mathbf{x}(j)\,. \qquad (19.24)$$

Potonja razlika agregacione funkcije, duž kretanja sistema, datog jed. (19.2), data je sa:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right)&=V\left(\mathbf{x}(k+1)\right)-V\left(\mathbf{x}(k)\right)\\&=\mathbf{x}^T(k)A_0^TA_0\mathbf{x}(k)+2\mathbf{x}^T(k)A_0^TA_1\mathbf{x}(k-h)\ .\\&-\mathbf{x}^T(k-h)\left(E^TE-A_1^TA_1\right)\mathbf{x}(k-h)\end{aligned}\tag{19.25}$$

Na osnovu dobro poznate nejednačine*, sa posebno ciljanim izborom umetnute matrice, date jed. (19.20) a koristeći pri tome i jed.(19.19) jasno je da se jed. (19.25) redukuje na:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right)&=\mathbf{x}^T(k)A_0^TA_0\mathbf{x}(k)+\mathbf{x}^T(k)A_0^TA_1\Pi^{-1}A_1^TA_0\mathbf{x}(k)\\&+\mathbf{x}^T(k-h)\Pi\mathbf{x}(k-h)-\mathbf{x}^T(k-h)\left(E^TE-A_1^TA_1\right)E^TE\,\mathbf{x}(k-h)\end{aligned}\tag{19.26}$$

ili:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right)&=\mathbf{x}^T(k)A_0^T\left(I+A_1\Pi^{-1}A_1^T\right)A_0\mathbf{x}(k)\\&+\mathbf{x}^T(k-h)\left(I+A_1^TA_1-\left(E^TE\right)\left(E^TE\right)\left(E^TE\right)^D\right)\mathbf{x}(k-h)\end{aligned}\tag{19.27}$$

odnosno, imajući u vidu jed.(19.19), konačno:

$$\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right)\le\mathbf{x}^T(k)\Xi\mathbf{x}(k)\tag{19.28}$$

Štaviše, očigledno je:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right)}{\mathbf{x}^T(k)E^TE\,\mathbf{x}(k)}&<\frac{\mathbf{x}^T(k)\Xi\mathbf{x}(k)}{\mathbf{x}^T(k)E^TE\mathbf{x}}\le\max\left\{\frac{\mathbf{x}^T(k)\Xi\mathbf{x}(k)}{\mathbf{x}^T(k)E^TE\mathbf{x}}\right\}\\&=\max\left\{\begin{matrix}\mathbf{x}^T(k)\Xi\mathbf{x}(k):\\\mathbf{x}^T(k)E^TE\mathbf{x}(k)=1\end{matrix}\right\}=\bar{\lambda}_{\max}(\Xi)\end{aligned}\tag{19.29}$$

Prethodna nejednačina dozvoljava da se napiše, sledeće:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right)&<\bar{\lambda}_{\max}(\Xi)\mathbf{x}^T(k)E^TE\,\mathbf{x}(k)\\&\le\bar{\lambda}_{\max}(\Xi)\mathbf{x}^T(k)E^TE\,\mathbf{x}(k)\\&+\bar{\lambda}_{\max}(\Xi)\sum_{j=k-h}^{k-1}\mathbf{x}^T(j)E^TE\,\mathbf{x}(j)\\&=\bar{\lambda}_{\max}(\Xi)V\left(\mathbf{x}(k)\right)\end{aligned}\tag{19.30}$$

s obzirom da je: $\sum_{j=k-h}^{k-1}\mathbf{x}^T(j)E^TE\mathbf{x}(j)\ge 0$ a $\lambda_{\max}(\Xi)>0$.

Takođe je, očigledno:

* $2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{v}(t-\tau)\le\mathbf{u}^T(t)\Pi^{-1}\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}^T(t-\tau)\Pi\mathbf{v}(t-\tau),\ \Pi=\Pi^T>0$

$$\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right)=V\left(\mathbf{x}(k+1)\right)-V\left(\mathbf{x}(k)\right)<\lambda_{\max}(\Xi)V\left(\mathbf{x}(k)\right), \tag{19.31}$$

tako da:

$$V\left(\mathbf{x}(k+1)\right)<\left(\lambda_{\max}(\Xi)+1\right)V\left(\mathbf{x}(k)\right). \tag{19.32}$$

Primenjujući iterativnu proceduru na jed. (19.32), dobija se:

$$\begin{aligned} V\left(\mathbf{x}(k)\right) &< \left(\lambda_{\max}(\Xi)+1\right)V\left(\mathbf{x}(k-1)\right) \\ &< \left(\lambda_{\max}(\Xi)+1\right)^2 V\left(\mathbf{x}(k-2)\right) \\ &< \left(\lambda_{\max}(\Xi)+1\right)^3 V\left(\mathbf{x}(k-3)\right)\ldots \\ &< \left(\lambda_{\max}(\Xi)+1\right)^k V\left(\mathbf{x}(0)\right) \end{aligned}. \tag{19.33}$$

S druge strane, lako se vidi da je:

$$\begin{aligned} V\left(\mathbf{x}(0)\right) &= \mathbf{x}^T(0)E^T E\mathbf{x}(0)+\sum_{j=-h}^{-1}\mathbf{x}^T(j)E^T E\mathbf{x}(j) \\ &\le \mathbf{x}^T(0)E^T E\mathbf{x}(0)+\sum_{j=-h}^{-1}\mathbf{x}^T(j)E^T E\mathbf{x}(j) \end{aligned}, \tag{19.34}$$

a zajedno sa *Definicijom* 19.2, vodi ka:

$$V\left(\mathbf{x}(0)\right)<\alpha(1+h), \tag{19.35}$$

tj..

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right)<\left(\lambda_{\max}(\Xi)+1\right)^k V\left(\mathbf{x}(0)\right)<\alpha(1+h)\left(\lambda_{\max}(\Xi)+1\right)^k. \tag{19.36}$$

Očigledno je:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(k)E^T E\mathbf{x}(k) &< \mathbf{x}^T(k)E^T E\mathbf{x}(k)+\sum_{j=k-h}^{k-1}\mathbf{x}^T(j)E^T E\mathbf{x}(j) \\ &= V\left(\mathbf{x}(k)\right)<\alpha(1+h)\left(\lambda_{\max}(\Xi)+1\right)^k \end{aligned}. \tag{19.37}$$

Uslov, dat jed. (19.21), i prethodna nejednačina povlače:

$$\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)<\beta, \quad \forall k\in K_N. \tag{19.38}$$

što je i trebalo pokazati. **Q.E.D.**

Literatura

Debeljkovic, Lj. D. Time-Delay Systems (Monograph) - Editor D. Lj. Debeljkovic, I – Tech, Vienna, 2011.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic , S. B. Stojanovic, T. Nestorovic, " A New Approach to the Stability of Discrete Descriptor Time Delay Systems in the sense of Non-Lyapunov: Delay Independent Conditions – LMI Approach", *Proc.* INES 2012, Lisabon (Portugalia), June 13 – 15 (2012) 411 – 415, also CD Rom

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanovic, **A. M. Jovanovic**, M. A. Misic, "Stability of Discrete Descriptor Time Delay Systems on Finite Time Interval: New Delay Dependent Conditions", *Proc.* 21st MELECON (Mediterranean Conference on Control and Automation), June 25 – 28, 2013, Chania (Greece), CD-Rom, pp. 652 – 657, ISSN 978-1-4799-0995-7/13&31.00©2013. IEEE.

Xu, S., C. Yang, "Stabilization of discrete–time singular systems: A matrix inequality approach",*Automatica,* Vol. 35, (1999) 1613–1617

Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Robust H_∞ control for discrete singular systems with state delay and parameter uncertainty", *Dynamics Continuous, Discrete and Impulsive Systems,* Vol. 9, No.4, (20035.b) 539–554

20. STABILNOST NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU

VREMENSKI KONTIUNALNI SISTEMA SA KAŠNJENJEM:

Prilaz sa pozicija kvazi- Ljapunovljevih funkcija sa pridruženom Jensenovom i Kopelovom nejednačinom

Ideja za ovakav prilaz, potekla je od spoznaje rezultata koji su svojevremeno izložili *Lee, Dianat* (1981), razmatrajući stabilnost sistema sa kašnjenjem u smislu Ljapunova.

Posmatra se kontinualni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t), \quad t \in [-\tau,\ 0] \end{aligned} \tag{20.1}$$

gde je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ vektor upravljanja, $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $A_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ su poznate matrice sa elementima nad poljem realnih brojeva.

τ je konstantno vremensko kašnjenje.

Definicija 20.1 Sistem, dat jed. (20.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, gde je $0 \le \alpha < \beta$, ako važi: $\sup\limits_{t\in[-\tau,0]} \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(t) \le \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \beta,\ \forall t \in \Im$

Lema 20.1 Za bilo koju pozitivnu simetričnu konstantnu matricu, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i skalare $a,\ b$ koji zadovoljavaju $a < b$, gde je vektor funkcija $\mathbf{f}:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ takva da su integracije dobro definisane, će da važi:

$$\left(\int_a^b \mathbf{f}(\theta)d\theta\right)^T M \left(\int_a^b \mathbf{f}(\theta)d\theta\right) \le (b-a)\int_a^b \mathbf{f}^T(\theta)\, M\, \mathbf{f}(\theta)d\theta \tag{20.2}$$

(*Jensen*-ova integralna nejednakost)

Lema 20.2 Za bilo koju simetričnu pozitivno određenu matricu $\Gamma = \Gamma^T > 0$ važe sledeći izrazi:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{v}(t) &\le \mathbf{u}^T(t)\Gamma\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}^T(t)\Gamma^{-1}\mathbf{v}(t) \\ -2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{v}(t) &\le \mathbf{u}^T(t)\Gamma\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}^T(t)\Gamma^{-1}\mathbf{v}(t) \end{aligned} \tag{20.3}$$

U onome što sledi će se izložoće se *Lema* neophodna u izboru odgovarajuće agregacione funkcije.

Lema 20.3 Neka je skalarna agregatna funkcija $V(\mathbf{y}(t))$, definisana sa:

$$V(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{y}^T(t)\mathbf{y}(t) \tag{20.4}$$

gde vektor biva definisan na sledeći način:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \int_0^\tau Q(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)d\theta \tag{20.5}$$

$Q(t)$ je $(n \times n)$ matrica koja je kontinualna i diferencijabilna na vremenskom intervalu $[0,\tau]$ i zadovoljava sledeću diferencijalnu matričnu jednačinu:

$$\dot{Q}(\vartheta) = \left(A_0 + Q(0)\right)Q(\vartheta), \quad \vartheta \in [0,\tau] \tag{20.6}$$

sa početnim uslovima:

$$Q(\tau) = A_1 \tag{20.7}$$

Tada je Ojlerov izvod funkcije $V(\mathbf{y}(t))$ duž kretanja sistema, dat sa:

$$\dot{V}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{y}^T(t)\,\Xi\,\mathbf{y}(t) \tag{20.8}$$

gde:

$$\Xi = \left(A_0 + Q(0)\right)^T + \left(A_0 + Q(0)\right) \tag{20.9}$$

Dokaz Iz jed.(20.4), sledi:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{y}(t)) = &\left(\dot{\mathbf{x}}^T(t) + \frac{d}{dt}\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\theta)Q^T(\theta)d\theta\right) \times \left(\mathbf{x}(t) + \int_0^\tau Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)d\eta\right) \\ &+ \left(\mathbf{x}^T(t) + \int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\theta)Q^T(\theta)d\theta\right) \times \left(\dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{d}{dt}\int_0^\tau Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)d\eta\right)\end{aligned} \tag{20.10}$$

Dalje dokazivanje je, rutinsko, ako se odredi vrednost sledećeg integrala:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\tau Q(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)d\theta$$

U tom pogledu, razmotriće se sledeći izraz pod izvodom promenljive θ:

$$\frac{d}{d\theta}\left(Q(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)\right) = \dot{Q}(\theta)\mathbf{x}(t-\theta) + Q(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathbf{x}(t-\theta)\right) \tag{20.11}$$

Očigledno je da:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathbf{x}(t-\theta)\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{x}(t-\theta)\right) \tag{20.12}$$

Zamenom prethodne jednačine u (20.11), dobiće se sledeća jednačina:

$$\frac{d}{d\theta}\left(Q(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)\right)=\dot{Q}(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)-Q(\theta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{x}(t-\theta)\right) \tag{20.13}$$

ili, preuređeno:

$$Q(\theta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{x}(t-\theta)\right)=\dot{Q}(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)-\frac{d}{d\theta}\left(Q(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)\right) \tag{20.14}$$

Sledeći odnos je više nego očigledan:

$$\frac{d}{dt}\left(Q(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)\right)=Q(\theta)\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{x}(t-\theta)\right) \tag{20.15}$$

tako da, na osnovu jed.(20.15), na kraju se dobija:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\tau Q(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)d\theta=\int_0^\tau \dot{Q}(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)d\theta-\frac{d}{d\theta}\int_0^\tau Q(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)d\theta \tag{20.16}$$

tj:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\tau Q(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)d\theta=\int_0^\tau \dot{Q}(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)d\theta-Q(\tau)\mathbf{x}(t-\tau)+Q(0)\mathbf{x}(t) \tag{20.17}$$

Korišćenjem jed. (20.7), prethodna jednačina može se napisati u obliku:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\tau Q(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)d\theta=\int_0^\tau \dot{Q}(\theta)\mathbf{x}(t-\theta)d\theta-A_1\mathbf{x}(t-\tau)+Q(0)\mathbf{x}(t) \tag{20.18}$$

Konačno, jed. (20.10), postaje:

$$\begin{aligned}&\dot{V}\left(\mathbf{y}(t)\right)=\\ &=\begin{pmatrix}\mathbf{x}^T(t)A_0^T+\mathbf{x}^T(t-\tau)A_1^T+\\ +\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\theta)\dot{Q}^T(\theta)d\theta-\mathbf{x}^T(t-\tau)A_1^T+\mathbf{x}^T(t)Q^T(0)\end{pmatrix}\times\left(\mathbf{x}(t)+\int_0^\tau Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)d\eta\right)\\ &+\left(\mathbf{x}^T(t)+\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\theta)Q^T(\theta)d\theta\right)\times\begin{pmatrix}A_0\mathbf{x}(t)+A_1\mathbf{x}(t-\tau)+\\ +\int_0^\tau \dot{Q}(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)d\eta-A_1\mathbf{x}(t-\tau)+Q(0)\mathbf{x}(t)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{20.19}$$

$$
\begin{aligned}
\dot V(\mathbf{y}(t)) = {} & \left(\mathbf{x}^T(t) A_0^T + \mathbf{x}^T(t) Q^T(0) + \int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\theta)\dot Q^T(\theta) d\theta \right) \times \\
& \times \left(\mathbf{x}(t) + \int_0^\tau Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta) d\eta \right) \\
& + \left(\mathbf{x}^T(t) + \int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\theta) Q^T(\theta) d\theta \right) \times \\
& \times \left(A_0 \mathbf{x}(t) + Q(0)\mathbf{x}(t) + \int_0^\tau \dot Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta) d\eta \right)
\end{aligned} \tag{20.20}
$$

i, nakon nekih jednostavnih preuređivanja, sledi:

$$
\begin{aligned}
\dot V(\mathbf{y}(t)) = {} & \mathbf{x}^T(t)\left(\left(A_0^T + Q^T(0) \right) + \left(A_0 + Q(0) \right) \right) \mathbf{x}(t) \\
& + \mathbf{x}^T(t) \int_0^\tau \left(A_0^T Q(\eta) + Q^T(0) Q(\eta) + \dot Q(\eta) \right) \mathbf{x}(t-\eta) d\eta \\
& + \left(\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\theta) \left(Q^T(\theta) A_0 + Q^T(\theta) Q(0) + \dot Q^T(\theta) \right) d\theta \right) \mathbf{x}(t) \\
& + \int_0^\tau \int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\theta) \left(\dot Q^T(\theta) Q(\eta) + Q^T(\theta) \dot Q(\eta) \right) \mathbf{x}(t-\eta) d\theta d\eta
\end{aligned} \tag{20.21}
$$

Na osnovu jed. (20.6), dobiće se:

$$
\begin{aligned}
\dot V(\mathbf{y}(t)) = {} & \mathbf{x}^T(t)\, \Xi\, \mathbf{x}(t) \\
& + \mathbf{x}^T(t) \int_0^\tau \left(A_0^T + Q^T(0) + A_0 + Q(0) \right) Q(\eta) \mathbf{x}(t-\eta) d\eta \\
& + \left(\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\theta) Q^T(\theta) \left(A_0^T + Q^T(0) + A_0 + Q(0) \right) d\theta \right) \mathbf{x}(t) \\
& + \int_0^\tau \int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\theta) \left\{ \begin{array}{l} Q^T(\theta)\left(A_0^T + Q^T(0) \right) Q(\eta) + \\ + Q^T(\theta) \left(A_0 + Q(0) \right) Q(\eta) \end{array} \right\} \mathbf{x}(t-\eta) d\theta d\eta
\end{aligned} \tag{20.22}
$$

to jest:

$$\dot{V}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\,\Xi\,\mathbf{x}(t)$$
$$+\mathbf{x}^T(t)\,\Xi\int_0^{\tau} Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\eta$$
$$+\left(\int_0^{\tau}\mathbf{x}^T(t-\theta)Q^T(\theta)\,d\theta\right)\Xi\,\mathbf{x}(t)$$
$$+\int_0^{\tau}\int_0^{\tau}\mathbf{x}^T(t-\theta)\left(Q^T(\theta)\,\Xi\,Q(\eta)\right)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\theta d\eta \qquad (20.23)$$

kao i:

$$\dot{V}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\,\Xi\left(\mathbf{x}(t)+\int_0^{\tau} Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\eta\right)$$
$$+\left(\int_0^{\tau}\mathbf{x}^T(t-\theta)Q^T(\theta)\,d\theta\right)\Xi\left(\mathbf{x}(t)+\int_0^{\tau} Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\eta\right) \qquad (20.24)$$

i, konačno:

$$\dot{V}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\,\Xi\,\mathbf{y}(t)+\left(\int_0^{\tau}\mathbf{x}^T(t-\theta)Q^T(\theta)\,d\theta\right)\Xi\,\mathbf{y}(t) \qquad (20.25)$$

$$\dot{V}(\mathbf{y}(t)) = \left(\mathbf{x}^T(t)+\int_0^{\tau}\mathbf{x}^T(t-\theta)Q^T(\theta)\,d\theta\right)\Xi\,\mathbf{y}(t) \qquad (20.26)$$

$$\dot{V}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{y}^T(t)\,\Xi\,\mathbf{y}(t) \qquad (20.27)$$

što na kraju i kompletira dokaz. **Q.E.D.,** *Debeljkovic*, *Stojanovic*, *Jovanovic* (2013.c).

Sada se dolazi do pozicije iz koje se može prikazati ključni doprinos.

Teorema 20.1 Sistem sa vremenskim kašnjenjem (20.1) je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, ako postoji pozitivni skalar $\wp$, tako da važe sledeći uslovi:

$$\mathbf{x}^T(t-\vartheta)\mathbf{x}(t-\vartheta) < q\,\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)$$
$$q>0, \quad \vartheta\in[-\tau,\,0], \quad \forall t\in[0,T] \qquad (20.28)$$

$$(1+\tau)(1+\psi)\left(1-\wp\psi-\frac{q\tau}{\wp}\right)^{-1} e^{\lambda_{\max}(\Xi)T} < \frac{\beta}{\alpha} \qquad (20.29)$$

$$\wp\in\left(\max\{\wp_1, 0\}, \quad \wp_2\right),$$
$$\wp_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4\psi\tau q}}{2\psi}, \quad 4\psi\tau q<1 \qquad (20.30)$$

gde:

$$R = A_0 + Q(0) \tag{20.31}$$

$$\Xi = R^T + R \tag{20.32}$$

$$\psi = \lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\frac{e^{2\mu_2(R)\tau} - 1}{2\mu(R)} \tag{20.33}$$

$\mu_2(R)$ predstavlja matričnu meru matrice R a Q (0) je rešenje sledeće nelinearne transcendentne matrične jednačine:

$$e^{A_0 + Q(0)\tau}Q(0) = A_1 \tag{20.34}$$

Debeljkovic, *Stojanovic*, *Jovanovic* (2013.c).

Dokaz. Iz jed.(20.8) sledi:

$$\dot{V}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{y}^T(t)\,\Xi\,\mathbf{y}(t) \le \lambda_{\max}(\Xi)V(\mathbf{y}(t)) \tag{20.35}$$

Integracijom jed.(20.35) u granicama od 0 do *t*, pri $t \in [0, T]$, dobija se:

$$V(\mathbf{y}(t)) < e^{\lambda_{\max}(\Xi)\cdot t}\cdot V(0) \tag{20.36}$$

Iz jed. (20.4) može se dobiti:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}(0)) &= \mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) \\ &+2\int_0^\tau \mathbf{x}^T(0)Q(\vartheta)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta \\ &+\left[\int_0^\tau Q(\vartheta)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta\right]^T \times \int_0^\tau Q(\vartheta)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta \end{aligned} \tag{20.37}$$

Na osnovu poznate nejednakosti i sa izborom da je $\Gamma = I$, može se dobiti:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}(0)) &\le \mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) \\ &+\int_0^\tau \mathbf{x}^T(0)Q(\vartheta)Q^T(\vartheta)\mathbf{x}(0)\,d\vartheta + \int_0^\tau \mathbf{x}^T(-\vartheta)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta \\ &+\left(\int_0^\tau Q(\vartheta)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta\right)^T \times \int_0^\tau Q(\vartheta)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta \end{aligned} \tag{20.38}$$

Na osnovu *Jensen*-ove integralne nejednakosti, *Leme* 20.1, dolazi se do toga da važe sledeće nejednakosti:

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{y}(0)) \le \mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) \\
&+\int_0^\tau \mathbf{x}^T(0)Q(\vartheta)Q^T(\vartheta)\mathbf{x}(0)\,d\vartheta+\int_0^\tau \mathbf{x}^T(-\vartheta)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta \\
&+\tau\int_0^\tau \mathbf{x}^T(-\vartheta)Q^T(\vartheta)Q(\vartheta)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta
\end{aligned}
\tag{20.39}
$$

Uvođenjem opšteg rešenja jed. (20.6), datog sa:

$$
\begin{gathered}
Q(\vartheta)=e^{R\vartheta}Q(0), \quad \vartheta\in[0,\tau] \\
R=A_0+Q(0)
\end{gathered}
\tag{20.40}
$$

i zamenom jed.(20.40) u jed.(20.39), dobija se sledeći izraz:

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{y}(0)) \le \mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) \\
&+\int_0^\tau \mathbf{x}^T(0)e^{R\vartheta}Q(0)Q^T(0)e^{R^T\vartheta}\mathbf{x}(0)\,d\vartheta \\
&+\int_0^\tau \mathbf{x}^T(-\vartheta)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta \\
&+\tau\int_0^\tau \mathbf{x}^T(-\vartheta)Q^T(0)e^{R^T\vartheta}e^{R\vartheta}Q(0)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta
\end{aligned}
\tag{20.41}
$$

ili:

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{y}(0)) \le \mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) \\
&+\lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\int_0^\tau \lambda_{\max}\left(e^{R\vartheta}e^{R^T\vartheta}\right)\mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0)\,d\vartheta \\
&+\int_0^\tau \mathbf{x}^T(-\vartheta)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta \\
&+\tau\int_0^\tau \lambda_{\max}\left(e^{R\vartheta}e^{R^T\vartheta}\right)\mathbf{x}^T(-\vartheta)Q^T(0)Q(0)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta
\end{aligned}
\tag{20.42}
$$

ili:

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{y}(0)) \le{} & \mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) \\
& +\mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0)\cdot\lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\int_0^\tau \lambda_{\max}\left(e^{R\vartheta}e^{R^T\vartheta}\right)d\vartheta \\
& +\int_0^\tau \mathbf{x}^T(-\vartheta)\mathbf{x}(-\vartheta)\,d\vartheta \\
& +\tau\,\lambda_{\max}\left(Q^T(0)Q(0)\right)\int_0^\tau \lambda_{\max}\left(e^{R\vartheta}e^{R^T\vartheta}\right)\mathbf{x}(-\vartheta)\mathbf{x}^T(-\vartheta)\,d\vartheta
\end{aligned}
\tag{20.43}
$$

Na osnovu *Definicije* 20.1, može se doći do:

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{y}(0)) \le{} & \alpha \\
& +\alpha\,\lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\int_0^\tau \lambda_{\max}\left(e^{R\vartheta}e^{R^T\vartheta}\right)d\vartheta+\alpha\,\tau \\
& +\alpha\,\tau\,\lambda_{\max}\left(Q^T(0)Q(0)\right)\int_0^\tau \lambda_{\max}\left(e^{R\vartheta}e^{R^T\vartheta}\right)d\vartheta
\end{aligned}
\tag{20.44}
$$

Iz *Coppel*-ove nejednakosti, date na sledeći način:

$$
\lambda_{\max}\left(e^{Ft}\cdot e^{F^T t}\right)\le e^{2\mu(F)t}
\tag{20.45}
$$

gde je $\mu(F)$ bilo koja matrična mera, sledi:

$$
V(\mathbf{y}(0))\le\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)\lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\int_0^\tau e^{2\mu(R)\vartheta}d\vartheta
\tag{20.46}
$$

ili:

$$
\begin{aligned}
V(\mathbf{y}(0)) &\le \alpha\,(1+\tau)\left(1+\lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\left.\frac{e^{2\mu(R)\vartheta}}{2\mu(R)}\right|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\tau}\right) \\
&=\alpha\,(1+\tau)\left(1+\lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\frac{e^{2\mu(R)\tau}-1}{2\mu(R)}\right)
\end{aligned}
\tag{20.47}
$$

ili, na kraju:

$$
V(\mathbf{y}(0))\le\alpha(1+\tau)(1+\psi)
\tag{20.48}
$$

S druge strane, više je nego očigledno da:

$$
\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)+2\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t)Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\eta<V(\mathbf{y}(t))
\tag{20.49}
$$

ili:

$$
\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)<V(\mathbf{y}(t))-2\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t)Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\eta
\tag{20.50}
$$

Sada će se naći ispravan drugi elemnt nejed. (20.50).

Korišćenjem sledeće nejednakosti za bilo koju realnu konstantu $\wp > 0$ i bilo koju simetričnu pozitivnu definisanu matricu $\Gamma = \Gamma^T > 0$

$$-2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{v}(t-\tau) \le \wp \mathbf{u}^T(t)\Gamma^{-1}\mathbf{u}(t) + \frac{1}{\wp}\mathbf{v}^T(t-\tau)\Gamma\mathbf{v}(t-\tau) \tag{20.51}$$

Na osnovu jed. (20.28) i jed. (20.40), može se naći:

$$\begin{aligned}
-2\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t)Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)d\eta &\le \wp\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t)Q(\eta)Q^T(\eta)\mathbf{x}(t)d\eta + \frac{1}{\wp}\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\eta)\mathbf{x}(t-\eta)d\eta \\
&< \wp\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t)e^{R\eta}Q(0)Q^T(0)e^{R^T\eta}\mathbf{x}(t)d\eta + \frac{q}{\wp}\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)d\eta \\
&\le \wp\lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t)e^{R\eta}e^{R^T\eta}\mathbf{x}(t)d\eta \\
&+ \frac{q}{\wp}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\int_0^\tau d\eta
\end{aligned} \tag{20.52}$$

ili:

$$\begin{aligned}
&-2\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t)Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)d\eta \le \\
&\le \wp\lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\int_0^\tau \lambda_{\max}\left(e^{R\eta}e^{R^T\eta}\right)d\eta + \frac{q\tau}{\wp}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \\
&< \wp\lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\int_0^\tau e^{2\mu(R)\eta}d\eta + \frac{q\tau}{\wp}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \\
&= \wp\lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\left.\frac{e^{2\mu(R)\vartheta}}{2\mu(R)}\right|_{\eta=0}^{\eta=\tau} + \frac{q\tau}{\wp}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)
\end{aligned} \tag{20.53}$$

ili:

$$\begin{aligned}
-2\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t)Q(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)d\eta &< \wp\lambda_{\max}\left(Q(0)Q^T(0)\right)\frac{e^{2\mu(R)\tau}-1}{2\mu(R)}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) + \frac{q\tau}{\wp}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \\
&= \left(\wp\psi + \frac{q\tau}{\wp}\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)
\end{aligned} \tag{20.54}$$

Tako, korišćenje jed. (20.54) i jed.(20.50), dovodi do:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) &< V(\mathbf{y}(t)) + \left(\wp\psi + \frac{q\tau}{\wp}\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \\ &\le e^{\lambda_{\max}(\Xi)t} V(\mathbf{y}(0)) + \left(\wp\psi + \frac{q\tau}{\wp}\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \\ &\le \alpha(1+\tau)(1+\psi)e^{\lambda_{\max}(\Xi)t} + \left(\wp\psi + \frac{q\tau}{\wp}\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{20.55}$$

i:

$$\left(1 - \wp\psi - \frac{q\tau}{\wp}\right)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \alpha(1+\tau)(1+\psi)e^{\lambda_{\max}(\Xi)t}, \ \forall t \in [0, T] \tag{20.56}$$

gde:

$$1 - \wp\psi - \frac{q\tau}{\wp} > 0 \tag{20.57}$$

Nejed. (20.57) je zadovoljena ako se uslov, dat jed. (20.30) pokaže ispravan.

Konačno, uslov, dat jed. (20.49) i gore pomenuta nejednakost nagoveštavaju:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \beta, \quad \forall t \in [0, T] \tag{20.58}$$

što je i trebalo dokazati. **Q.E.D.,** *Debeljkovic, Stojanovic, Jovanovic* (2013.c).

Napomena 20.1 Mora se primetiti da dovoljni uslov, dat jed. (20.29), u potpunosti zavisi od postojanja rešenja jed. (20.34). Ovo zahteva da nelinearna algebarska matrična jednačina, data jed. (20.34) ima rešenje.

Napomena 20.2 Uslovi u *Teoremi* 20.1 sadrže slobodan parametar tako da se rezultati mogu biti optimizirati.

Primer 20.1 Neka je dat kontinualni sistem sa kašnjenjem, u obliku:

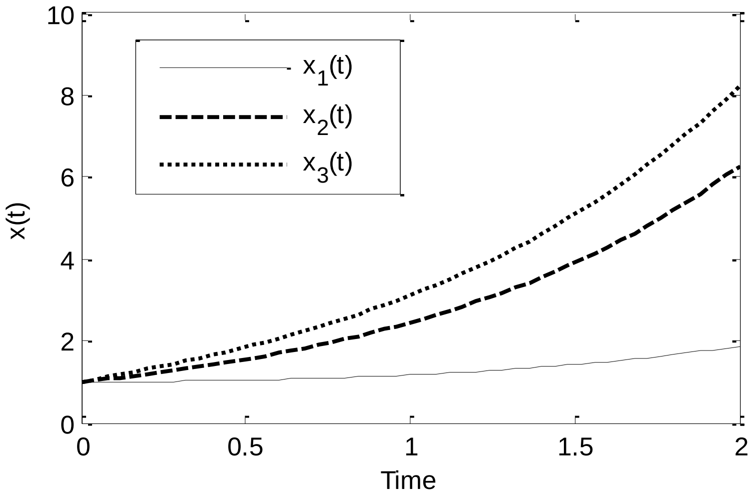
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t - 0.1)$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1.7 & 1.7 & 0 \\ 1.3 & -1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 & -0.6 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1.5 & -1.7 & 0.1 \\ -1.3 & 1.5 & -0.3 \\ -0.7 & 1 & 0.1 \end{pmatrix} \tag{20.59}$$

Da bi se potvrdila svojstva stabilnosti sistema, datog jed. (20.59), dinamika sistema se simulira pod uslovima $\boldsymbol{\varphi}(t) = [1 \ \ 1 \ \ 1]^T, \quad t \in [-\tau, 0]$.

Očigledno je da: $\boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(t) = 3 = \alpha, \quad t \in [-\tau, 0]$.

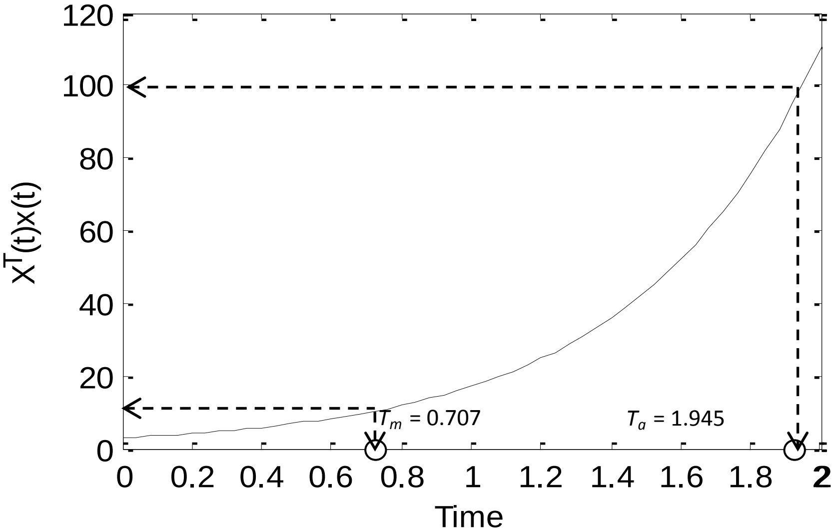
Sl. 20.1 prikazuje trajektorije stanja razmatranog sistema sa kašnjenjem za datu funkciju početnih uslova.



Sl.20.1

Primećuje se da promenljive stanja $\mathbf{x}_i(\infty) \to \infty$, $i = 1,2,3$, što znači da sistem, dat jed. (20.59) nije asimptotski stabilan.

Na sl. 20.2 prikazan je kvadrat norme kretanja razmatranog sistema.



Sl. 20.2

Na osnovu inicijalnog odziva sistema, datog jed. (20.59), može se odabrati:

$$q = 0.9 > \frac{\mathbf{x}^T(t-\vartheta)\mathbf{x}(t-\vartheta)}{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)}, \quad \vartheta \in [-\tau,\ 0], \quad \forall t \in [0, T]$$

tako da jed. (20.28) bude zadovoljena, *Debeljkovic et al.* (2013.c)

Iz jed. (20.31) i jed. (20.34) može se, naći:

$$Q(0)=\begin{pmatrix}1.5279 & -1.7336 & 0.0994\\ -1.2328 & 1.4145 & -0.2936\\ -0.5249 & 0.8069 & 0.1575\end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix}-0.1721 & -0.0336 & 0.0994\\ 0.0672 & 0.4145 & 0.4064\\ 0.1751 & 1.8069 & -0.4425\end{pmatrix},\quad \Xi=\begin{pmatrix}-0.3442 & 0.0335 & 0.2745\\ 0.0335 & 0.8290 & 2.2133\\ 0.2745 & 2.2133 & -0.8849\end{pmatrix}$$

Štaviše, ostale vrednosti se mogu takođe naći na licu mesta:

$$\lambda_{\max}\left\{Q(0)Q^T(0)\right\}=9.8109\ \mu(R)=1.1789\ \psi=1.1064\ \wp_1=0.1014\ \wp_2=0.8025\ ,$$

$$\wp\in(0.1014,\quad 0.8025)_,\ 4\psi\tau q=0.3983<1,\ \lambda_{\max}\{\Xi\}=2.3578.$$

Trebalo bi se istražiti stabilnost na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, T=T_m\}$, sa partikularnim izborom $\alpha=3$, za različite rezultate $\beta\in\{100, 2000, 5000\}$ i da se nađe maksimalna dozvoljena gornja granica T, T_m, za vremenski interval $[0,T]$ tako da sistem, dat jed. (20.59) bude stabilan na konačnom vremenskom intervalu.

Tabela 20.1 prikazuje upoređivanje $T_{\max}$ za različite vrednosti parametra β korišćenjem različitih metoda: *Teorema***1**, *Teorema* **2**, *Teorema* **3** i Teorema **20.1** (ovaj rad). Simulacijom sistema (20.59), stvarne vrednosti parametra T, T_a, su procenjene iz kvadrata norme kretanja sistema i takođe su prikazane u *Tabeli* 20.1.

U *Tabeli* 20.1su takođe date odgovarajuće vrednosti parametra $\wp$.

Tabela 20.1

	$\beta=100$ $T_a=1.945[s]$	$\beta=2000$ $T_a=3.525[s]$	$\beta=5000$ $T_a=4.004[s]$
Teorema**1** *Deb et al* (2011)	0.585	1.085	1.238
Teorema **2** *Deb et al* (2013.a)	0.448	0.842	0.962
Teorema **3** *Stoj et al* (2012) *Stoj et al* (2013) bez neizvesnosti	1.225	2.517	2.939
Teorema **20.1** (**ovaj rad**).	0.707 $\wp=0.2865$	1.978 $\wp=0.2851$	2.367 $\wp=0.2837$

Očigledno je da **Teorema 20.1** daje znatno bolje rezultate nego **Teorema 1** i **Teorema 2**, ali nešto lošije rezultate nego **Teorema 3**.

Međutim, za razliku od **Teoreme 3** koja koristi (LMI), **Teorema 20.1** je bazirana isključivo na algebarskim nejednakostima, koje mogu biti rešene bez korišćenja metoda za optimizaciju.

Literatura

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljković, **A. M. Jovanovic**, " An Efficient Method for Finite Time Calculation of Continuous Time Delay Systems", *Proc. ASCC* 2013, Istanbul (Turkey), June 23 – 26 (2013) CD-Rom .

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical Stability of Time–Delay Systems: New Results", *Proc.* 2nd *ASCC* 97,Seoul (Korea), July 22–25, (1997.a) pp. III–543–545.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Đ. Koruga, **"**Finite time stability for the metal strips cold rolling", *Proc.* ASI, Kyongju (Korea), July 16 – 18, (1997.b) pp. 233 – 238.

Debeljkovic, D. Lj., M. P. Lazarevic, Đ. Koruga, S. Tomaševic, "On practical stability of time delay systems under perturbing forces", *Proc.* AMSE Conference, Melbourne (Australia), October 29 – 31, (1997.c) pp. 442 – 446.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B.. Jovanović, "On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. CDC* 97, San Diego, California (USA), December 21–23, (1997.d) pp. 2771–2772.

Debeljkovic, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, "Further results on non-Lyapunov stability of time delay systems", *Proc.* MELECON 98, Tel-Aviv (Israel), May 18 - 20, Vol.1, (1998.a) pp. 509 – 512.

Debeljkovic, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, "Non - Lyapunov stability analysis of linear time delay systems", *Preprints* DYCOPS 5, 5th IFAC Symposium on Dynamics and Process Systems, Corfu (Greece), June 8 - 10, (1998)pp. 549 - 553.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman–Gronwall Approach", *Proc.* 1st *IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France) July 6–7, (1998.c) pp. 171–175.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, Đ. Koruga, "Further results on Non - Lyapunov stability of time delay systems", *Preprints* 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation, Shenyang (China), September 8 - 10 (1998.d), pp. TS13 6 - 10.

Debeljkovic, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinkovic, M. B. Jovanovic, Lj. A. Jacic, "Further results on Non - Lyapunov stability of linear systems with delayed state", *Proc.* XII CBA - Brazilian Automatic Control Conference, Uberlandia (Brazil), September 14 - 18 (1998.e), Vol. IV, pp. 1229 - 1233.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Further Results on the Stability of Linear Nonautonomous Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval”, *Proc*. ***ACC*** 2000, Chicago Illinois (USA), June 28–30, (2000) 1450–1451.

Debeljkovic, D. Lj., S. A. Milinkovic, S. B. Stojanovic, Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval, Cigoja press, Belgrade, 2005.a.

Debeljkovic, D. Lj., A. Lj. Jacic, M. Medenica Time Delay Systems: Stabilty and Robustness, Mechanical Faculty, Belgrade, 2005.b.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, Systems, Structure and Control – **Editior** Petr Husek – (Scientific monograph) - Chapter: *Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems*: *Delay Dependent Approach*, I–Tech, Vienna, 2008, 029–060.

Debeljkovic, D. Lj. Stability of Control Systems over Infinite Time Interval, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2009.

Debeljkovic, D. Lj., T. Nestorovic, I. M. Buzurovic, N. J. Dimitrijevic, “A new approach to the stability of time-delay systems in the sense of non - Lyapunov delay-independent and delay - dependent criteria”, *Proc*. of 8 *th* International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, (Serbia), 10 – 11 September, (2010), 213 – 218. CD – Rom.

Debeljkovic, D. Lj., Stabilty of Automatic Control Systems over Finite and Infinite Time Interval, Faculty of Mechanical Engineering, Belgrade, 2011

Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, Time Delay Systems – **Editior** Dragutin Lj. Debeljković – (Scientific monograph) –Chapter: *Stability of Linear Continuous Singular and Discrete Descriptor Time Delayed Systems*, I–Tech, Vienna, 2011.a

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, D. Popov, “ On Finite and Practical Stability of Time Delayed Systems: Lyapunov - Krassovski Approach: Delay Dependent Criteria”, *Proc.* The 23 rd, Chinese Control and Decision Conference CCDC 2011, Mianyang, (China), 23 – 25 May , (2011.b) 331 – 337, also CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, D. Popov, “ On Finite Time Stability and Asymptotic Practical Stability of Time Delayed Systems: New Delay Dependent Criteria ”, *Proc.* Chinese Control Conference CCDC 2011, Yantai, (China), 24 – 26, June (2011.c) pp. 1058 – 1065, also CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, S. B. Stojanovic, N. J. Dimitrijevic, M. S. Aleksendric, “ Time Delayed System Stability in the sense of Non-Lyapunov: Delay Independent and Delay Depandent Approach: New Results ”, *Proc.* 2011 IEEE Multi-Conference on Systems and Control (MSC) Denver (Colorado), (USA), September 28 – 30, (2012.a), CD – Rom, pp. 1410 – 1417, also CD-Rom.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, G. V. Simeunovic, M. A. Misic,“Asymptotic Practical Stability of Time Delay Systems **”**, *Proc*. of 10 *th* International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, (Serbia), 23 – 26 September, (2012.b), 119 – 124, also CD – Rom.

Debeljkovic, D. Lj. S. B. Stojanovic, M. P. Lazarevic, T. Nestorovic, G. V. Simeunovic, “ On Practical Stability of Time Delayed Systems: Delay Independent and Delay Dependent Criteria ”, *Proc. AADECA* 2012, 23^0 Congreso Argentino Control Automatico, 3 – 5 October (2012.c), Buenos Aiers, (2012.c) also CD – Rom.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, **A. M. Jovanovic**, “ Further Results on Finite Time and Practical Stabilty of Linear Continuous Time Delay Systems”, *FME Transactions* (Serbia), Vol. 10, No. 3 (2013.a) 241 – 249.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic, **A. M. Jovanovic**, N. J. Dimitrijevic,G. V. Simeunovic, “ Delay-Dependent Conditions for Finite Time Stability of Continuous Systems with Latency”, *Proc.* of 10 *th* International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, (Serbia), 23 – 26 September, (2013.b), 161 – 166, also CD – Rom.

Debeljkovic, D. Lj, S. B. Stojanovic, **A. M. Jovanovic** “Finite Time Stability of Continuous Time Delay Systems: Lypunov – like Appoach with Jensen’s and Coppel’s Inequality”, *Acta Polytechnica Hungarica* (*Hungary*), Vol. 10, No. 7, (2013.c), pp. 135 – 150.

Debeljkovic, D. Lj., M. A. Mišic, Stability of Control Systems over Infinite Time Interval,Part III, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2013.d

Debeljkovic, D. Lj., S. B. Stojanovic, D. S. Antic, Stability of Control Systems over Infinite Time Interval,Part II, Mechanical Faculty Enguneering, Belgrade, 2013.e

Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, “Finite Time Stability of Time Delay Systems”, *IMA J. Math. Control and Info.,* 16 (3) (1999).

Lazarevic, M. P., D. Lj. Debeljkovic, Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed state, Asian J. Control, Vol. 7, No. 4, pp. 440–447, 2005.

Nenadić, Z. Lj., *Sinteza kontinualnog automatskog upravljanja na konačnom vremenskom intervalu za objekte i procese sa kašnjenjem*, Dipl. rad, *Katedra za automatsko upravljanje*, Mašinski fakultet, Beograd (1995).

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Praktična stabilnost jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem”, *Zbornik radova HIPNEF ‘96*, Vrnjačka Banja, 5–7 jun (1995.a) 197–204.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, *Tehnika – E*, **45** (11-12) (1995.b) E1–E7.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, “On Practical Stability of Time Delay Systems”, *Proc. American Control Conference*, Albuquerque, (USA) June 4–6, (1997.a) 3235–3235.

Nenadic Z. Lj. D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems”, *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium) July 2–6, (1997.b) pp. 307–311.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Comments on “Stability of Time–Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.* (2006) (submitted).

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, D. S. Antic, “Finite Time Stabilty and Stabilization of Linear Time Delay Systems”, *Facta Univ.,* Series: Automatic Control and Robotics, Vol. 11, No. 1, (2012) pp. 25 – 36.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, D. S. Antic, “Robust Finite Time Stabilty and Stabilization of Linear Uncertai Time Delay Systems”, *Asian Journal Control* (Taiwan),Vol. 15 , No. 5 (2013), pp. 1548 – 1554.

Praktična stabilnost posebnih klasa sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem

NOVI REZULTATI

21. DALJI REZULTATI NA POLJU IZUČAVANJA STABILNOSTI NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU I PRAKTIČNE STABILNOSTI

VREMENSKI KONTINUALNIH SISTEMA SA KAŠNJENJEM

Osnovna inspiracija ovog istraživanja se bazira na radu *Lee, Diant* (1981), koji izučava problem potrebnih i dovoljnih uslova stabilnosti linearnih kontinualnih sistema sa vremenskim kašnjenjem.

U ovim izlaganjima se koriste sledeće oznake: $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ označavaju skupove prirodnih realnih i kompleksnih brojeva.

G^* predstavlja konjugovanu matricu matrice $G \in \mathbb{C}$, dok F^* predstavlja transponovanu konjugovanu matricu matrice $F \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

$\mathrm{Re}(s)$ predstavlja realni deo od $s \in \mathbb{C}$

T označava transpoziciju.

Za realnu matricu F, notacija $F > 0$ znači da je matrica F pozitivno određena.

$\lambda_i(F)$ predstavlja sopstvenu vrednost matrice F.

Spektar matrice je označen sa $\sigma(F)$, dok je spektralni radijus označen sa $\rho(F)$.

U ovom delu izlaganja, razmatraće se uslovi stabilnosti zavisni od iznosa čisto vremenskog kašnjenja.

Pre iznošenja krucijelnog rezultata, potrebno je izložiti određene diskusije i objašnjenja, kao in eke pomoćne rezultate. Radi kompletnosti izlaganja, izložiće se i neki ključni rezultai iz rada *Lee, Diant* (1981).

Razmatra se klasa kontinualnih sistema sa vremenskim kašnjenjem, u stanju, opisana sa*:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) \\ \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t), \ -\tau \le t < 0 \end{aligned} \tag{21.1}$$

Definicija 21.1 Sistem, dat jed. (21.1) sa pripadajućom funkcijom početnih uslova, je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* $\{\alpha,\beta,T\}$, gde je $0 \le \alpha < \beta$, ako $\sup\limits_{t\in[-\tau,\,0]} \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(t) \le \alpha$ povlači $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \beta$, , $t \in [0,T]$.

Definicija 21.2 Sistem, dat jed. (21.1) sa pripadajućom funkcijom početnih uslova, je *atraktivno praktično stabilan u odnosu na* $\{\alpha,\beta,T\}$, gde je $0 \le \alpha < \beta$,

---

*Izlaže se blago modifikovani rad, *Debeljkovic, Stojanovic, Jovanovic* (2013).

ako $\sup_{t\in[-\tau,0]} \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(t) \leq \alpha$ povlači $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \beta$, $t \in [0,T]$, sa osobinom da: $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \to 0$.

Teorema 21.1 Neka je razmatrani sistem, opisan jed. (21.1).

Ako je *za bilo koju datu* pozitivno određenu Hermitsku matricu Q postoji pozitivno određena Hermitska matrica P_0, tako da

$$P_0\left(A_0 + P_1(0)\right) + \left(A_0 + P_1(0)\right)^* P_0 = -Q \tag{21.2}$$

gde za $\kappa \in [0, \tau]$, matrica $P_1(\kappa)$ zadovoljava:

$$\dot{P}_1(\kappa) = \left(A_0 + P_1(0)\right)P_1(\kappa) \tag{21.3}$$

sa početnim uslovom $P_1(\tau) = A_1$ a $P_1(\tau) = 0$ bilo gde drugde, tada je razmatrani sistem asimptotski stabilan, *Lee, Diant* (1981).

U radu *Stojanovic, Debeljkovic* (2009) apostrofirana je činjenica da je ključ izbora agregacione funkcije, tj. Ljapunovljeve funkcije za razmatrani sistem, dat jed, (21.1) postojanje bar jednog rešenja diferencijane jednačine, jed, (21.3) po matrici $P_1(t)$ sa početnim uslovom $P_1(\tau) = A_1$.

Drugim rečima zahteva se da nelinearna, transcedentna matrična jednačina:

$$e^{\left(A_0 + P_1(0)\right)\tau} P_1(0) = A_1 \tag{21.4}$$

ima *bar jedno rešenje* po matrici $P_1(0)$.

Na osnovu *Teoreme* 21.1, *Lee, Diant* (1981), asimptotska stabilnost razmatranog sistema, datog jed. (21.1), može se ispitati poznavajući **samo jednog**, umesto **svih rešenja** nelinearne, transcedentne matrične jednačine, data jed. (21.4).

Koristeći kontraprimer, *Stojanovic, Debeljkovic* (2009) su pokazali da iskaz *Teoreme* 21.1, **nije korektan** jer ne uzima u obzir sva moguća rešenja jed.(21.3), odnosno (21.4).

U istom radu pokazana je i korektni iskaz *Teoreme* 21.1 i urađen primer koji ilustruje zabludu, koja proistiće iz *Teoreme* 21.1.

Napomena 21.1 Ako se uvede nova matrica:

$$R \triangleq A_0 + P_1(0) \tag{21.5}$$

tada uslov, dat jed. (21.2) transformiše se u:

$$P_0 R + R^* P_0 = -Q \tag{21.6}$$

što predstavlja dobro poznatu Ljapunovljevu algebarsku matričnu jednačinu, za sistem bez kašnjenja.

Ovaj uslov biće ispunjen ako i samo ako je R stabilna (Hurvicova) matrica, tj. ako je uslov:

$$\operatorname{Re}\lambda_i(R) < 0 \tag{21.7}$$

zadovoljen, *Stojanovic, Debeljkovic* (2009) .

Napomena 21.2 Jed. (21.4) izražena preko matrice R može biti napisana i u drugoj formi, kao što sledi:

$$R - A_0 - e^{-R\tau} A_1 = 0 \tag{21.8}$$

pa sled i::

$$\det\left(R - A_0 - e^{-R\tau} A_1\right) = 0 \tag{21.9}$$

Stojanovic, Debeljkovic (2009) .

Zamenjujući matričnu promenljivu R skalarom s u jed. (21.7), dobija se karakteristična jednačina sistema, datog jed. (21.1) u obliku:

$$f(s) = \det\left(sI - A_0 - e^{-s\tau} A_1\right) = 0 \tag{21.10}$$

Obeležimo sa:

$$\Sigma = \{s \mid f(s) = 0\} \tag{21.11}$$

skup svih karakterističnih korenova sistema, datog jed, (2.1), *Stojanovic, Debeljkovic* (2009).

Zbog potrebe da se koriguje iskaz fundamentalne *Teoreme*, navodi se nova, originalana *Teorema*, koja uklanja sve manjkavosti *Teoreme* 21.1.

Teorema 21.2 Pretpostavimo da postoji (**e**) rešenje (**a**) po matrici $P_1(0)$, jed. (21.4).

Tada je sistem, dat jed.(21.1) , asimptotski stabilan *ako i samo ako* su ispunjena sledeća dva uslova:

a) Za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P_0 = P_0^* > 0$ tako da jed (21.2) važi ***za sve*** matrice $P_1(0)$ koje predstavljaju rešenja jed. (21.4).

b) Uslov $\operatorname{Re}\lambda_i(R) < 0$ važi za sve matrce R koje predstavljaju rešenja jed.(21.8), *Stojanovic, Debeljkovic* (2009).

Napomena 21.3 Formulacija*Teorema* 21.2 zahteva ispunjenje odgovarajućih uslova za bilo koju matricu $P_1(0)$ koja predstavlja rešenje jed. (21.4) ili matrice R kao rešenja jed. (21.8).

Napomena 21.4 Iz prethodnih *Teorema* sledi praktično pitanje: kako je moguće numerički odrediti sve matrice $P_1(0)$ koa rešenja jed. (21.4) ili sve matrice *R,* kao rešenja jed. (21.8)?

Ovaj problem ne može se direktno numerički rešiti, jer je broj rešenja po matrici $P_1(0)$ ili po matrici R nije unapred poznat a može bit ii veoma veliki u opštem slučaju i beskonačan, imajući u vidu da je u pitanju transedentna algebarska jednačina.

Međutim, za efikasniji način ispitivanje stabilnosti razmatranog sistema, prethodno izloženi problem, može se zameniti odgovarajućom procedurom, utemeljenoj na korišćenju *maksimalnih solvenata* jed. (21.8), kako je to pokazano u *Stojanovic, Debeljkovic* (2009).

Definicija21.3 Svaki koren λ_m karakteristične jednačine date jed. (21.10),razmatranog sistema, jed. (21.1), koji zadovoljava sledeći uslov: $\operatorname{Re}\lambda_m = \max \operatorname{Re} s,\ s \in \Sigma$ biće označen kao maksimalni koren (sopstvena vrednost) sistema, datog jed. (21.1), *Stojanovic, Debeljkovic* (2009).

Definicija21.4 Svaki solvent $R_{\max}$ jed. (21.8), čiji spektar sopstvenih vrednosti sadrži maksimalnu sopstvenu vrednost λ_m Sistema, datog jed. (21.1), se označava kao *maksimal solvent* jed. (21.8) *Stojanovic, Debeljkovic* (2009).

Uzimajući u obzir *Napomenu* 21.4 i *Definicije* 21.3 and 21.4, moguće je preformulisati *Teoremu* 21.2 na sledeći način.

Teorema 21. 3 Pretpostavimo da postoji maksimalni solvent $R_{\max}$ jed. (21.8). Tada je, sistem, dat jed. (21.1), asimptotski stabilan *ako i samo ako* bilo koji od sledeća dva uslova ispunjen:

a) Ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P_0 = P_0^* > 0$ takva da je jed. (21.6) zadovoljena za solvent $R_{\max}$.

b) $\operatorname{Re}\lambda_i\left(R_{\max}\right) < 0$,

Stojanovic, Debeljkovic (2009) i *Debeljkovic, Stojanovic* (2008).

Sada smo u poziciji, da objedinimo dobijene rezultate i predstavimo glavni doprinos ovog rada vezano za praktičnu atraktivnu osobinu razmatranog sistema, datog jed. (21.1).

Teorema 21.4 Sistem sa kašnjenjem, dat jed. (21.1), je *atraktivno praktično stabilan u odnosu na* $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a)
$$\left(1+\tau\right)e^{\Lambda_{\max}\cdot t} < \frac{\beta}{\alpha},\quad t \in \left[0, T\right], \tag{21.12}$$

gde su:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\max} &= \lambda_{\max}\left(\Pi\right), \\ \Pi &= A_0^T + A_0 + A_1 A_1^T + I \end{aligned} \tag{21.13}$$

sa simetričnom matricom Π čiji spektar sopstvenih vrednosti pripada skupu realnih brojeva.

b) Postoji maksimalni solvent $R_{\max}$ sledeće matrične jednačine:

$$R - A_0 - e^{-R\tau} A_1 = 0 \tag{21.14}$$

c) $$\operatorname{Re}\lambda_i\left(R_{\max}\right)<0\,. \tag{21.15}$$

Dokaz. Uslovi **b**) and **c**) garantuju asimpotsku stabilnost sistema, datog jed. (21.1).

Štaviše, stabilnost na konačnom vremenskom interval, koja ograničava kretanje unutar vremenskog interval $[0,T]$je obezbeđena jed.(21.12), čime je okončan dokaz. **Q.E.D.**

Dokaz *Teoreme*21.4 je izostavljen ovde, a može se naći u dokazu *Teoreme* **17.1**, *Buzurovic, Debeljkovic, Jovanovic* (2013),na koji se upućuje zainteresovani čitalac.

Uslov, dat jed. (21.12), koji garantuje stabilnost na konačnom vremenskom interval, može se zameniti uslovom, datim jed. (21.17), koji nudi sledeća *Teorema.*

Efikasnost rezultata, biće prikazani kroz numerički primer.

Teorema 21.5 Sistem, dat jed. (21.6) je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\beta,T\}$, $\alpha<\beta$, ako postoji realan pozitivan broj $q,\ q>1$takav da važi:

$$\begin{gathered}\left\|\mathbf{x}(t+\tau)\right\| \leq \sup_{\vartheta\in[-\tau,0]}\left\|\mathbf{x}(t+\vartheta)\right\| < q\left\|\mathbf{x}(t)\right\|,\\ t\in[0,T],\ q>1,\end{gathered} \tag{21.16}$$

a ujedno je ispunjen i sledeći uslov:

$$e^{\bar{\Lambda}_{\max}\cdot t}<\frac{\beta}{\alpha},\quad t\in[0,T] \tag{21.17}$$

gde je:

$$\begin{gathered}\bar{\Lambda}_{\max}=\max\left(\mathbf{x}^T(t)(\Upsilon)\mathbf{x}(t):\ \ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)=1\right)\\ \Upsilon=A_0^T+A_0+A_1A_1^T+q^2\end{gathered} \tag{21.18}$$

Dokaz. Usvaja se sledeća agregaciona funkcija:

$$V\left(\mathbf{x}(t)\right)=\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)+\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}^T(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta \tag{21.19}$$

Totalni vremenski izvod predložene agregacione funkcije, u oznaci, $\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right)$ duž kretanja sistema , dat je sa:

$$\begin{gathered}\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right)=\mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T+A_0\right)\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^T(t-\tau)\mathbf{x}(t-\tau)\\ +2\mathbf{x}^T(t)A_1\mathbf{x}(t-\tau)+\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\end{gathered} \tag{21.20}$$

a korišćenjem, dobro poznate nejednakosti:

$$2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{v}(t)\leq\mathbf{u}^T(t)\Gamma\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}^T(t)\Gamma^{-1}\mathbf{v}(t) \tag{21.21}$$

sa posebnim izborom matrice $\Gamma=I$, iz jed. (21.10), može se dobiti:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right) \le \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T + A_0\right)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)A_1A_1^T\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t-\tau)I\,\mathbf{x}(t-\tau) \qquad (21.22)$$

Korišćenjem uslova, datog jed. (21.16), jasno je da se uslov, dat jed. (21.12), svodi na:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right) < \mathbf{x}^T(t)\Upsilon\mathbf{x}(t) \qquad (21.23)$$

gde je matrica Υ definisana jed.(21.18).

Iz jed. (21.23), dobija se:

$$\begin{aligned}\frac{d\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right)}{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)} &< \frac{\mathbf{x}^T(t)\Upsilon\mathbf{x}(t)}{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)} \le \max\left\{\frac{\mathbf{x}^T(t)\Upsilon\mathbf{x}(t)}{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)}\right\} \\ &= \max\left(\mathbf{x}^T(t)(\Upsilon)\mathbf{x}(t):\quad \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)=1\right) \qquad (21.24) \\ &= \bar{\Lambda}_{\max}\end{aligned}$$

ili:

$$\int_0^t \frac{d\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right)}{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)} < \int_0^t \bar{\Lambda}_{\max}\, dt \qquad (21.25)$$

i:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0)e^{\bar{\Lambda}_{\max}\cdot t} \qquad (21.26)$$

Konačno ako se iskoristi osnovni uslov sledeće:

Definicija Sistem, dat jed. (21.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, gde je $0 \le \alpha < \beta$, ako važi:

$$\sup_{t\in[-\tau,0]} \boldsymbol{\varphi}^T(t)\boldsymbol{\varphi}(t) \le \alpha \qquad (21.27.a)$$

povlači:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \beta,\ \forall t \in \Im \qquad (21.27.b)$$

tada je:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \alpha \cdot e^{\bar{\Lambda}_{\max}\cdot t} \qquad (21.28)$$

i konačno iz jed. (21.27):

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} < \beta, \quad t \in [0,T] \qquad (21.29)$$

što je i trebalo pokazati. **Q.E.D.**.

Primer 21.1 Razmatra se , sledeći sistem sa kašnjenjem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0.7 & -1.4 \\ -1.8 & -1.5 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t-1).$$

Potrebno je ispitati *stabilnost na konačnom vremenskom interval u odnosu na* $\{\alpha, \beta, T\}$, sa posebnim izborom granica skupova, kao i početnih uslova: $\alpha = 5.10$, $\beta = 6.0$ i $\boldsymbol{\varphi}(t) = [2 \quad -1]^T$, $-\tau \le t \le 0$.

Ovaj zadatak se rešava rezultatima koji nudi *Teorema* **21.4**

Valja primetiti da je $\boldsymbol{\varphi}^T(t)\,\boldsymbol{\varphi}(t) = 5.0 < \alpha$.

Na osnovu poznatih matrica sistema, lako se dolazi do sledećih podataka:

$$\Pi = \left(A_0^T + A_0 + A_1 A_1^T + I\right) = \begin{pmatrix} 1.45 & -0.16 \\ -0.16 & 0.49 \end{pmatrix} > 0$$

$$\sigma(\Pi) = \left\{\lambda_1 = 0.464, \quad \lambda_2 = 1.476 \quad \right\}$$

$$\lambda_{\max}(\Pi) = 1.476 > 0$$

$$(1+\tau)e^{\lambda_{\max}(\Pi)\cdot t} = (1+1)e^{1.476\cdot(0.15)}$$

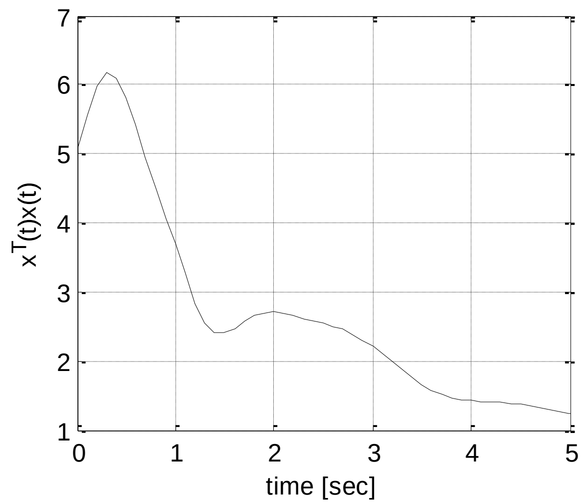
$$= 1.1659 < \frac{\beta}{\alpha} = \frac{6.0}{5.1} = 1.1765$$

tako da je:

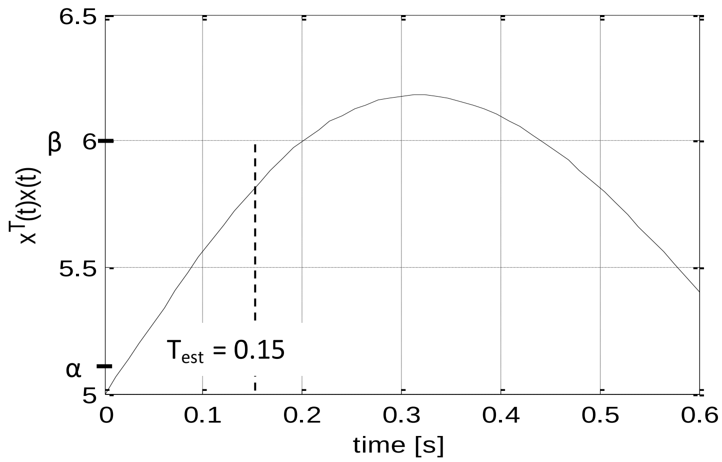
$$t = T_{est} = 0.15[s]$$

Vremenski zavistan kvadrat norme kretanja sistema, prikazan je na sl. 21.1

Detalji prelaznog procesa, od interesa, prikazani su na sl. 21.2 i, očigledno, zajedno sa sl. 21.1, potvrđuju teorijske dobijene rezultate.



Sl. 21.1



Sl. 21.2

U poređenju sa realnim vremenskim intervalom $[0,\ 0.20]_{\beta=6.0}$ lako se zaključuje da je dobijena procena dovoljno dobra, sl. 21.2.

Time je pokazana ispravnost korišćene *Teorema* **21.4**, pa je samim tim sistem stabilan na datom vremenskom intervalu

Da bi poredili rezultati, iskoristimo mogućnosti koje pruža *Teorema* **21.5,** za isti primer.

Prema jed.(21.18), matrica Υ se sračunava na sledeći način:

$$\Upsilon = \left(A_0^T + A_0 + A_1 A_1^T + q^2 I \right)_{q=1.1} = \begin{pmatrix} 1.6600 & -0.1600 \\ -0.1600 & 0.7000 \end{pmatrix}$$

pri:

$$\sigma_\Upsilon \left\{ \lambda_1, \lambda_2 \right\} = \left\{ \lambda_1 = 0.6740,\ \lambda_2 = \lambda_{\max} = 1.6860 \right\}.$$

Testirajući jed. (21.17):

$$e^{\Delta_{\max} \cdot T_{est}} = 1.1639 < \frac{\beta}{\alpha} = 1.1765,\ T_{est} = 0.09[s]$$

lako se pokazuje da je razmatrani sistem stabilan u konačnom vremenskom intervalu: $[0, T_{est}] = [0,\ 0.09]$ i to u odnosu na ostale date podatke.

Valja napomenuti da je uslov, dat jed. (21.17), kriterijum koji ne uzima u obzir iznos čisto vremenskog akašnjenja, za razliku od uslova, datog jed. (21.12), što je svakako predstavlja značajnu prednost, iako su u ovom slučaju dobijeni manje restriktivni rezultati.

Još jedan rad, *Debeljkovic, Buzurovic, Mišić, Jovanovic* (2015), pruža mogućnost da se efikasno ispita osobina praktične atraktivne stabilnosti, ovde razmatranog sistema.

Razlika u odnosu na prethodne izlaganje, ogleda se samo u formulaciji uslova, koji propisuje stabilnost na konačnom vremenskom interval, dok se bazični deo *Teoreme* **21.4** (uslovi **b**) i **c**)) zadržavaju u celosti, obezbeđujući asimptotsku stabilnost Sistema.

Radi celovitosti izlaganja, izlaže se i formuliše, u celosti, sledeća *Teorema.*

Teorema 21.6 **S**istem sa kašnjenjem, dat jed. (21.1), je *atraktivno praktično stabilan*u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, $\alpha < \beta$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a)
$$\wp^2 \cdot e^{2\mu(A_0)\cdot t} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad t \in [0,T], \tag{21.30}$$

gde:

$$\wp = \left(1 + \frac{\|A_1\|}{\mu(A_0)}\left(1 - e^{-\mu(A_0)\tau}\right)\right)$$
$$\mu(A_0) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}\left(A_0 + A_0^T\right) \tag{21.31}$$

gde je $\mu(\cdot)$ bilo koja matrična mera.

b) Postoji maksimalni solvent $R_{\max}$ sledeće matrične jednačine:

$$R - A_0 - e^{-R\tau}A_1 = 0 \tag{21.32}$$

b)
$$\operatorname{Re}\lambda_i\left(R_{\max}\right) < 0 . \tag{21.33}$$

Dokaz. Uslovi **b**) and **c**) garantuju asimpotsku stabilnost sistema, datog jed. (21.1).

Štaviše, stabilnost na konačnom vremenskom interval, koja ograničava kretanje unutar vremenskog interval $[0,T]$je obezbeđuje se jed. (21.12), a što je potrebno dokazati.

Rešenje vektorske diferencijalne jednačine stanja sistema sa kašnjenjem, datog jed. (21.1), sa pridruženom funkcijom početnih uslova, dato je sledećim izrazom:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_0(t)\boldsymbol{\varphi}_x(0) + \int_{-\tau}^{0}\Phi_0(t-\vartheta-\tau)A_1\boldsymbol{\varphi}_x(\vartheta)d\vartheta . \tag{21.34}$$

Koristeći prethodnu jednačinu, dobija se:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\varphi}_x^T(0)\Phi_0^{\,T}(t)\Phi_0(t)\boldsymbol{\varphi}_x(0)\\ &+\boldsymbol{\varphi}_x^T(0)\Phi_0^{\,T}(t)\left(\int_{-\tau}^{0}\Phi_0(t-\eta-\tau)A_1\boldsymbol{\varphi}_x(\eta)d\eta\right)\\ &+\left(\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{\varphi}_x^T(\vartheta)A_1^T\Phi_0^{\,T}(t-\vartheta-\tau)d\vartheta\right)\Phi_0(t)\boldsymbol{\varphi}_x(0).\\ &+\left(\int_{-\tau}^{0}\boldsymbol{\varphi}_x^T(\vartheta)A_1^T\Phi_0^{\,T}(t-\vartheta-\tau)d\vartheta\right)\times\\ &\times\left(\int_{-\tau}^{0}\Phi_0(t-\eta-\tau)A_1\boldsymbol{\varphi}_x(\eta)d\eta\right)\end{aligned} \tag{21.35}$$

Koristeći sledeće označavanje:

$$\Phi_0(t)\boldsymbol{\varphi}_x(0) = \mathbf{a}(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \tag{21.36}$$

$$\Phi_0(t-\vartheta-\tau)A_1\boldsymbol{\varphi}_x(\vartheta)=\mathbf{b}(t,)(t,\vartheta)\in\mathbb{R}^{n\times1}, \tag{21.37}$$

očigledno je, ako se uvede:

$$\int_{-\tau}^{0}\mathbf{b}(t,\vartheta)d\vartheta=\mathbf{c}(t)\in\mathbb{R}^{n\times1}, \tag{21.38}$$

tada jed. (21.35) postaje:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)&=\boldsymbol{\varphi}_x^T(0)\Phi_0^T(t)\Phi_0(t)\boldsymbol{\varphi}_x(0)\\&+\mathbf{a}^T(t)\mathbf{c}(t)+\mathbf{c}^T(t)\mathbf{a}(t)+\mathbf{c}^T(t)\mathbf{c}(t)\end{aligned}, \tag{21.39}$$

Dobro poznati rezultat iz teorije kvadratnih formi, daje:

$$\boldsymbol{\varphi}_x^T(0)\left(\Phi_0^T(t)\Phi_0(t)\right)\boldsymbol{\varphi}_x(0)\le\lambda_{\max}(t)\boldsymbol{\varphi}_x^T(0)\boldsymbol{\varphi}_x(0), \tag{21.40}$$

gde je:

$$\lambda_{\max}(t)=\max\sigma\left\{\Phi_0^T(t)\Phi_0(t)\right\}, \tag{21.41}$$

a $\sigma\{\ \}$ označava spektralni operator.

Lako je videti da je:

$$\mathbf{a}^T(t)\mathbf{c}(t)=f(t)\in\mathbb{R}$$

i

$$\mathbf{c}^T(t)\mathbf{a}(t)=f(t)\in\mathbb{R},$$

tako da sledi:

$$\mathbf{c}^T(t)\mathbf{a}(t)=\mathbf{c}(t)\mathbf{a}^T(t).$$

Sada se može napisati:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\le\lambda_{\max}(t)\boldsymbol{\varphi}_x^T(0)\boldsymbol{\varphi}_x(0)+2\mathbf{a}^T(t)\mathbf{c}(t)+\left\|\mathbf{c}(t)\right\|^2. \tag{21.42}$$

Štaviše:

$$f(t)\le\left|f(t)\right|,\qquad\left|\int_a^b\varphi(t)dt\right|\le\int_a^b\left|\varphi(t)\right|dt, \tag{21.43}$$

tako da sledi:

$$\mathbf{a}^T(t)\mathbf{c}(t)\le\left\|\boldsymbol{\varphi}_x^T(0)\right\|\cdot\left\|\Phi_0^T(t)\right\|\cdot\int_{-\tau}^{0}\left\|\mathbf{b}(t,\vartheta)\right\|d\vartheta\ . \tag{21.44}$$

Sada se jed. (21.42) može prepisati, kao:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)&\le\lambda_{\max}(t)\boldsymbol{\varphi}_x^T(0)\boldsymbol{\varphi}_x(0)\\&+2\left\|\boldsymbol{\varphi}_x^T(0)\right\|\cdot\left\|\Phi_0{}^T(t)\right\|\cdot\left\|A_1\right\|\times\int_{-\tau}^{0}\left\|\Phi_0(t-\vartheta-\tau)\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{\varphi}_x(\vartheta)\right\|d\vartheta\,\cdot\\&+\left\|A_1\right\|^2\left(\int_{-\tau}^{0}\left\|\Phi_0(t-\vartheta-\tau)\right\|\cdot\left\|\boldsymbol{\varphi}_x(\vartheta)\right\|d\vartheta\right)^2\end{aligned} \tag{21.45}$$

Međutim, ako važi:

$$\rho(t) \le \left\|\Phi_0\left(t-\vartheta-\tau\right)\right\| \cdot \left\|\boldsymbol{\varphi}_x\left(\vartheta\right)\right\| \le \gamma(t), \quad \forall \vartheta \in \left[-\tau, 0\right], \tag{21.46}$$

tada je i:

$$\rho(t)\tau \le \int_{-\tau}^{0} \left\|\Phi_0\left(t-\vartheta-\tau\right)\right\| \cdot \left\|\boldsymbol{\varphi}_x\left(\vartheta\right)\right\| d\vartheta \le \gamma(t)\tau \; . \tag{21.47}$$

Lako se pokazuje da važi:

$$\left\|\Phi_0\left(t-\vartheta-\tau\right)\right\|\Big|_{\vartheta\in[-\tau,0]} \le \left\|\Phi_0(t)\right\|, \quad \left\|\boldsymbol{\varphi}_x\left(\vartheta\right)\right\|\Big|_{\vartheta\in[-\tau,0]} < \sqrt{\alpha} \;, \tag{21.48}$$

kao i:

$$\left\|\boldsymbol{\varphi}_x(0)\right\| < \sqrt{\alpha}, \quad \left\|\Phi_0^{\;T}(t)\right\| = \left\|\Phi_0(t)\right\| , \tag{21.49}$$

tako da jed. (21.39) postaje:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) &\le \lambda_{\max}(t)\boldsymbol{\varphi}_x^T(0)\boldsymbol{\varphi}_x(0) \\ &+2\left\|\boldsymbol{\varphi}_x^T(0)\right\|\cdot\left\|\Phi_0^{\;T}(t)\right\|^2\left\|A_1\right\|\tau\sqrt{\alpha}+\left\|\Phi_0^{\;T}(t)\right\|^2\left\|A_1\right\|^2\tau^2\alpha\end{aligned} \; . \tag{21.50}$$

Koristeći bazične uslove sledeće dve *Definicije* **21.1** i **21.2**, dobija se:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) &\le \Lambda(t)\cdot\alpha \\ &+2\cdot\alpha\cdot\left\|\Phi_0^T(t)\right\|\cdot\left\|A_1\right\|\times\int_{-\tau}^{0}\left\|\Phi_0\left(t-\vartheta-\tau\right)\right\|d\vartheta+\alpha\cdot\left\|A_1\right\|^2\left(\int_{-\tau}^{0}\left\|\Phi_0\left(t-\vartheta-\tau\right)\right\|d\vartheta\right)^2\end{aligned} \tag{21.51}$$

Štaviše, bazirano na sledećoj činjenici:

$$\Lambda(t) \le \left\|\Phi_0^T(t)\Phi(t)\right\| \le \left\|\Phi_0^T(t)\right\|\cdot\left\|\Phi_0(t)\right\| = \left\|\Phi_0(t)\right\|^2 \tag{21.52}$$

sledi:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) &\le \alpha\left\|\Phi_0(t)\right\|^2 \\ &+2\cdot\alpha\cdot\left\|\Phi_0(t)\right\|\cdot\left\|A_1\right\|\times\int_{-\tau}^{0}\left\|\Phi_0\left(t-\vartheta-\tau\right)\right\|d\vartheta \\ &+\alpha\cdot\left\|A_1\right\|^2\left(\int_{-\tau}^{0}\left\|\Phi_0\left(t-\vartheta-\tau\right)\right\|d\vartheta\right)^2\end{aligned} \tag{21.53}$$

ili:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \le \alpha\left(\left\|\Phi_0(t)\right\|+\left\|A_1\right\|\left(\int_{-\tau}^{0}\left\|\Phi_0\left(t-\vartheta-\tau\right)\right\|d\vartheta\right)\right)^2 \tag{21.54}$$

Koristeći Coppel' – ovu nejednačine:

$$\left\|\Phi_0(t)\right\| = \left\|e^{A_0 t}\right\| \le e^{\mu(A_0)\cdot t}, \tag{21.55}$$

sledi:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) \le \alpha\left(e^{\mu(A_0)}\left(1+\|A_1\|e^{-\mu(A_0)\tau}\int_{-\tau}^{0}e^{-\mu(A_0)\vartheta}d\vartheta\right)\right)^2$$
$$\le \alpha\cdot e^{2\mu(A_0)}\left(1+\frac{\|A_1\|}{\mu(A_0)}\left(1-e^{-\mu(A_0)\tau}\right)\right)^2 \le \alpha\cdot\wp^2\cdot e^{2\mu(A_0)} \tag{21.56}$$

Koristeći relacije koji definišu početne uslove, lako se dokazuje, konačni rezultat, usputno koristeći i jed. (21.20):

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \alpha\cdot\wp^2\cdot e^{2\mu(A_0)} < \alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha} < \beta,\quad \forall t\in\Im, \tag{21.57}$$

što je i trebalo dokazati. **Q.E.D.**

Literatura

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljkovic, A. M. Jovanovic, G. V. Simeunovic, " On Finite Time Stabilty of Continuous Time Delayed Systems: New Delay Depenedent Conditions", *Proc.* Chinese Control and Decision Conference CCDC 2012, Qingdao (China), 23 – 25, May, (2015), pp. 5384 – 5389.

Buzurovic, I. M., D. Lj. Debeljkovic, A. M. Jovanovic, G. V. Simeunovic, " On Attractive Practical Stabilty of Systems with State Delay: A New Algebraic Inequalities Approach", *Proc.* Chinese Control and Decision Conference CCDC 2012, Qingdao (China), 23 – 25, May, (2015).

Debeljkovic, D. Lj.. Lazarevic, M.P., Koruga, Dj., Milinkovic, S. A., and Jovanovic, M. B.: Further results on the stability of linear nonautonomous systems with delayed state defined over finite time interval, *Proc. American Control Conference*, Chicago Illinois (USA), June 2000, pp. 1450-1451.

Debeljkovic, D. Lj., Lazarevic M. P., and Jovanovic, M.B.: Finite time stability analysis of linear time delay systems: bellman-gronwall approach, *Proc. 1st IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France), July 1998, pp. 171-175.

Debeljkovic, D. Lj., Nenadic, Z. Lj., Koruga, Dj., Milinkovic, S.A., Jovanovic, M.B.: On practical stability of time-delay systems: new results, *Proc. 2nd Asian Control Conference*, Seoul (Korea), July 1997, pp. 543-545.

Debeljkovic, D. Lj., Nenadic, Z. Lj., Milinkovic, S. A., and Jovanovic, M. B.: On practical and finite-time stability of time-delay systems, *Proc. European Control Conference*, Brussels (Belgium) July 1997, pp. 307-311.

Debeljkovic, D. Lj., Nenadic, Z. Lj., Milinkovic, S. A., and Jovanovic, M. B.: On the stability of linear systems with delayed state defined over finite time interval, *Proc. of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, California (USA), December 1997, pp. 2771-2772.

Debeljkovic, D. Lj., I. M. Buzurovic T. Nestorovic, D. Popov, " On Finite and Practical Stability of Time Delayed Systems: Lyapunov-Krassovski Approach: Delay Dependent Criteria", *Proc.* The 23 rd, Chinese Control and Decision Conference CCDC 2011, Mianyang, (China), 23 – 25 , pp. 331 – 337, also CD-Rom

Debeljkovic, D. Lj, S. B. Stojanovic, A. M. Jovanovic "Finite Time Stability of Continuous Time Delay Systems: Lypunov – like Appoach with Jensen's and Coppel's Inequality",*Acta Polytechnica Hungarica* (*Hungary*), Vol. 10, No. 7, (2013), pp. 135 – 150, ISSN 1785 – 8860, IF: 0.471

Lazarevic, M.P., Debeljkovic, D.Lj., Nenadic, Z. Lj., and Milinkovic, S . A., "Finite-time stability of delayed systems, *IMA J. Math. Control Inf*., Vol. 17 (2), pp. 101-109, 1999.

Lee, T. N., and Dianat, S.: Stability of Time-Delay Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr*., Vol. 26, No 4, pp. 951–954, 1981.

Nenadic, Z.Lj., Debeljkovic, D.Lj., and Milinkovic, S.A.: On practical stability of time delay systems, *Proc. American Control Conference*, Albuquerque, (USA) June 1997, pp. 3235-3235.

Stojanovic, S.B., and Debeljkovic, D. Lj.: Delay-dependent stability of linear time delay systems: necessary and sufficient conditions, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms,* Vol. 16, pp. 887-900, 2009.

22. PREGLED DO SADA OSTVARENIH REZULTATA I PRAVCI BUDUĆIH ISTRAŽIVANJA

Ostvareni rezultati

1. Detaljno je sakupljena, proučena i sistematizirana relevanta literatura, vezana za proučavane klase sistema.

2. Dat je sistematičan, celovit i detaljan prikaz osnovnih osobina tri klase sistema automatskog upravljanja i ukazan na njihov značaj za dinamičku analizu sistema.

3. Forulisane su i dokazane, potpuno nove *Teoreme* koje za različite klase vremenski kontinuiranih sa čistim vremenskim kašnjenjem daju dovoljne uslove stabilnosti ovih klasa sistema kako na ograničenom vremenskom intervalu tako i kada je u pitanju praktična atraktivna stabilnost. Mimo toga, određeni broj novih rezultata izlaže kriterije koji ne uzimaju u obzir iznos tog konstantnog čisto vremenskog kašnjenja a izvjestan broj koji tu činjencu ne prebegava.

Time je postignuto da se ista klasa sistema može razmatrati sa adekvantog stanovišta usvojenog koncepta stabilnosti samo preko sistemskih matrica, u prvom slučaju, ai preko njih sa dopunskom informacijom o iznosu kašnjenja u drugom slučaju, što može kvalitativno pa i kvantitativno upotpuniti saznanja o stabilnosti razmatranog sistema..

Ta prva grupa novoizvedenih rezulata važećim je u uslovima pozitivno određenosti jedne kvazisistemske matrice. Međutim, takva prepostavka ne umanjuje značaj rezultata, posebno kada su u pitanju vremenski diskretni sistemi sa kašnjenjem, jer takvi, do tada nisu ni postojali ili su bili iskazani preko fundamentalne matrice, što odgovara praktično potrebi za rešavanjem sistema diferenchih jednačlina sa pomerenim argumentom, što se jasno nastoji izbeći.

4. Primjena LMI metode za neke od klasa ovde razmatranih vremenski vremenski diskretnih deskriptivnih sistema sa kašnjenjem, na jedan specifičan način, predstavlja također, jedna značajan rezultat, koji je ovde dopunjen jednim elegantnim pristupom sa minimalnin potrebnim ograničenjima.

U formi dovoljnih uslova, ovaj kriterijum uključuje iznos čisto vremenskog kašnjanja, što mu daje poseban kvalitet.

U posebno slučaju, kada nema kašnjenja ili je izostaje singularnost, spomenuti rezultati, u oba slučaja, svode se na dobro poznate od ranije izvedene rezultate za obične sisteme.

Pravci daljih istraživanja

Kada su u pitanju pravci daljih istraživanja, valja reci da se, prvo, u daljem radu na doktorskoj disertaciji očekuju i novi rezultati u sferi kontinualnih sistema sa kašnjenjem proširivanjem prilaza *Lee, Dianat* (1981) na problem stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu pa čak i za klasu vremenski diskretnih sistema sa kašnjenjem.

Nisu isključeni, po tom pitanju, ni singualarni ni deskriptivni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Mimo toga potrebno je obezbediti valjano ponašnje razmatranih sistema na konačnom vremenskom intervalu kada se sa sigurnošću zna da isti nisu stabilni na propisanom vremenskom intervalu, što zalazi u domen sinteze sistema u jednom specifičnom smislu i znatno se razlikuje od standardnih postupaka stabilizacije.

Svemu tome treba dodati i značajan broj konkretrnih numeričkih primera, uzetih iz prakse, koji će se prezentovati a sve radi verifikacije iznetih rezultata i komparativnih potreba, kako bi se procenila pripadajuća konzervativnost.

Simulacije koje se predviđaju, samo treba još više da upotpune sliku o valjanosti izvedenih *Teorema* i svih prezentovanih rezultata.

ZAKLJUČAK

U žiži interesovanja ove doktorske disertacije bio je koncept neljapunovske stabilnosti u primeni na sisteme automatskog upravljanja sa kašnjenjem i neke posebne klase sistema koje iz njih proističu, kombinacijom istih i tzv. singularnih (deskriptivnih) sistema.

U tom smislu, bilo je od interesa izvesti dovoljene uslove ovog koncepta stabilnosti, za različite pomenute klase sistema i unaprediti već postojeće rezultate u savremenoj literaturi u čemu se uspelo u velikoj meri.

U **uvodnom delu i prvom poglavlju** veoma detaljno su analizirane i predstavljene predmetne klase razmatranih sistema, sa posebnim osvrtom na klase vremenski neprekidnih, a nešto manje, na klase vremenski diskretnih sistema, što je i prirodno imajući u vidu tematiku doktorske disertacije. Izlažu se elementarne specifičnosti singularnih i deskriptivnih sistema, i u tom smislu, posebno se apostrofira značaj pitanja egzistencije i jedinstvenosti rešenja, problem impulsnih ponašanja i konzistentnih početnih uslova, kao i pitanje fizičke ostvarljivosti (kauzalnosti) sistema. Posebno se apostrofira fenomen čisto vremenskog kašnjenja, koji obeležava veliki broj klasa sistema automatskog upravljanja. Dobro je poznato da njegovo prisustvo ima nepovoljan uticaj na dinamičke karakteristike sistema, a posebno na stabilnost sistema sa povratnom spregom. Klasa vremenski neprekidnih singularnih sistema sa kašnjenjem, objedinjuje sve specifičnosti prethodno pomenutih klasa sistema i jasno iz svih pomenutih razloga najsloženija je za dinamičku analizu. U tom smislu pitanja skupa konzistentnih početnih funkcija, predstavlja najznačajnije pitanje koje se mora rešavati a sve sa ciljem da se dobiju rešenja u zatvorenom obliku sa neimpulsnim članovima.U istom tom smislu ponašaju se i vremenski diskretni deskriptivni sistemi sa kašnjenjem, kao realno postojeći ili kao diskretni analogani ovih prvih.

U **drugom poglavlju** akcenat izlaganja je usmeren na detaljnom prikazivanju kvalitativnih i kvantitativnih osobina svih razmatranih klasa sistema, kako bi se pripremila podloga za kasnija proučavanja i istraživanja na polju robusnosti, stabilnosti i stabilizacije sistema.

Treće poglavlje detaljno razmatra i daje, hronološki pregled osnovnih koncepata stabilnosti, posebno stabilnost sistema u smislu Ljapunova, kao osnovnog koncepta koji se primenjuje u dinamičkoj analizi sistema. Mnogo više prostora se posvećuje različitim konceptima tzv. tehničke ili neljapunovske stabilnosti. U tom smislu posebno se ističe koncept *stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu* i koncept *praktične stabilnosti*. Ukazuje se na njihov značaj sa inženjerske tačke gledišta i primenljivosti u svakodnevnoj potrebi upravljanja tehnološkim i drugim procesima.

Četvrto poglavlje obuhvata značajnu selektivnu rekapitulaciju nekih osnovnih rezultata na polju proučavanja neljapunovske stabilnosti svih klasa ovde razmatranih sistema. Posebno je ukazano na motivaciju za tamo napisane redove i izvesne praznine u postojećoj literaturi, za koji postoji već duži niz godina hronični interes.

U **petom poglavlju** izlažu se novi, originalni i naučni doprinosi, oličeni u brojnim *teoremama*, njihovim dokazima i evidentnom verifikacijom kroz numeričke primere i simulacione postupke.U tom smislu izvode se i brojni rezultati, koji u formi dovoljnih uslova, garantuju *stabilnost na konačnom vremsnkom intervalu*, pojedinih, ovde razmatranih klasa sistema, prvenstveno sa kašnjenjem, a kroz kriterijume, koji uzimaju u obzir iznos čisto vremenskog kašnjenja ili koji tu značajnu činjenicu prenebregavaju.

I šesto poglavlje donosi nove rezultate, ovde na polju praktične i atraktivne praktične stabilnosti. U tom smislu, rezultati se za pojedine klase sistema sa kašnjenjem, generišu kao kombinacija onih rezultata koji garantuju ljapunovsku stabiilnost, sa posebnim zahtevom na osobinu privlačenja i rezultata koji obezbeđuju stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, koji može biti neprekidan ili dat u određeneim intervalima, a shodno zahtevima postavljenim sistemu.

Na kraju rada data je kraća rekapitulacija osnovih naučnih doprinosa, kao i pravci i smernice za buduća, dalja istraživalja.

Biografija

Ime i prezime:	Aleksandra Jovanović
Datum rođenja:	07.04.1983.
Mesto rođenja:	Požarevac, Srbija

Obrazovanje:

1990. – 1998.	Osnovna škola “Desanka Maksimović” u Požarevcu
1998. – 2002.	Požarevačka gimnazija
2002. – 2010.	Studije na Prirodno – matematičkom fakultetu, Univerziteta u Kragujevcu, smer matematika - informatika, prosečna ocena tokom studija 7,58 (sedam i 58/100)
2010.	Odbranila diplomski rad na Prirodno – matematičkom fakultetu, Univerziteta u Kragujevcu na temu “Aproksimacija funkcija“, sa ocenom 10 (deset), kod mentora prof. dr M. Stanić
2011. –	Doktorske studije na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Automatsko upravljanje

Posao:

2010. – 2012.	Ekonomsko – trgovinska škola u Požarevcu, Politehnička škola u Požarevcu
2012. –	Visoka tehnička škola strukovnih studija u Požarevcu

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Александра Јовановић

број индекса 39/11

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

ДИНАМИКА ПОСЕБНИХ КЛАСА СИСТЕМА СА КАШЊЕЊЕМ НА КОНАЧНОМ ВРЕМЕНСКОМ ИНТЕРВАЛУ

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, ________________

AJokanoLt

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Александра Јовановић

Број индекса 39/11

Студијски програм Аутоматско управљање

Наслов рада ДИНАМИКА ПОСЕБНИХ КЛАСА СИСТЕМА СА КАШЊЕЊЕМ НА КОНАЧНОМ ВРЕМЕНСКОМ ИНТЕРВАЛУ

Ментор Др Драгутин Љ. Дебељковић, редовни професор

Др Сретен Б. Стојановић, редовни професор

Потписани/а Александра Јовановић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

AJovanović

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

ДИНАМИКА ПОСЕБНИХ КЛАСА СИСТЕМА СА КАШЊЕЊЕМ НА КОНАЧНОМ ВРЕМЕНСКОМ ИНТЕРВАЛУ

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, ______________________

Јованов Ђ

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.