УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ГРАЂЕВИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Јован М. Поповић

ПОТПУНИ МЕТОД НАЈМАЊИХ КВАДРАТА У ФУНКЦИЈИ РЕШАВАЊА ГЕОДЕТСКИХ ПРОБЛЕМА

Докторска дисертација

Београд, 2016

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

Jovan M. Popović

TOTAL LEAST SQUARES METHOD FOR SOLVING GEODETIC TASKS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2016

ИНФОРМАЦИЈЕ О МЕНТОРИМА И ЧЛАНОВИМА КОМИСИЈЕ

Ментори:

Проф. др Иван Р. Алексић, дипл. инж. геод.,

Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Проф. др Бранко С. Божић, дипл. инж. геод.,

Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије:

Доц. др Александра Ерић, дипл. мат.,

Грађевински факултет, Универзитет у Београду

Проф. др Тоша Нинков, дипл. инж. геод.,

Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду

Датум одбране:____________________, Београд.

Захвалност

Захваљујем се менторима проф. др Ивану Р. Алексићу дипл. инж. геод. и проф. др Бранку С. Божићу дипл. инж. геод. на свесрдној подршци и корисним саветима током израде докторске тезе као и пажљивом прегледу и сугестијама за унапређење финалног текста.

Захваљујем се такође члановима комисије за преглед и оцену докторске дисертације проф. др Тоши Нинкову дипл. инж. геод. са Универзитета у Новом Саду као и доц. др Александри Ерић дипл. мат. на прихватању учешћа у комисији као и уложеном труду и пажњи при прегледу рада.

Захвалност дугујем и доц. др Бранку Миловановићу дипл. инж. геод. као и доц. др Марку Пејићу дипл. инж. геод. за уступљене податке који су послужили као илустрација приказаних решења.

Такође осећам потребу да напоменем да су основу за израду ове докторске дисертације представљала, у највећој мери, публикована истраживања у овој области истраживачке групе коју предводе професори Bukhard Schaffrin са Државног универзитета у Охају и Frank Netzel са Универзитета у Бону.

И на крају захваљујем се свим колегама и пријатељима са Одсека за геодезију и геоинформатику Грађевинског факултета у Београду за подстрек и подршку како током периода израде докторске тезе тако и током свог времена проведеног у заједничком наставном и истраживачком раду.

Јован М. Поповић

ПОТПУНИ МЕТОД НАЈМАЊИХ КВАДРАТА У ФУНКЦИЈИ РЕШАВАЊА ГЕОДЕТСКИХ ПРОБЛЕМА

РЕЗИМЕ

Докторска теза је посвећена примени технике потпуног метода најмањих квадрата (Total Least Squares, TLS) у оцени параметара математичких модела различитих геодетских проблема. Потпуни метод најмањих квадрата је релативно нова техника оцењивања параметара модела. Прва истраживања на пољу математике датирају од раних осамдесетих година прошлог века а прве примене јављају се у различитим негеодетским дисциплинама.

Истраживања могућности примене у оцени параметара геодетских модела каснијег су датума и јављају се пре око десет година (Kupferer, 2005, Schaffrin, 2006). Истраживања се развијају у правцу прилагођавања TLS геодетским проблемима у смислу налажења решења које урачунава различиту тачност као и међусобну корелисаност података (резултата мерења). Да би се то постигло, уместо решења добијених применом декомпозиције проширене матрице модела на сингуларне вредности развијена су решења на основу минимизације Lagrange-ове функције циља (Euler- Lagrange-ов поступак).

У оквиру докторске тезе приказани су класични (традиционално примењивани) модели у решавању геодетских задатака, посебно Gauss-Helmert-ов модел којиме се такође могу решавати проблеми третирани применом TLS. Такође, истражени су и приказани различити облици TLS модела како класични (хомоскедастички) тако и тежински односно модели који урачунавају различите варијансе као и међусобну корелацију чланова проширене матрице модела. Поред тога, дате су формуле за оцену тачности односно рачунање кофакторских матрица оцена параметара модела као и корекција (поправака, резидуала) резултата мерења и чланова матрице модела.

На три карактеристична геодетска проблема илистрована је примена TLS у решавању геодетских задатака.

Кључне речи: Математичко моделирање, Gauss-Markov-љев модел, Gauss-Helmert-ов модел, Потпуни метод најмањих квадрата (Total Least Squares, TLS).

TOTAL LEAST SQARES METHOD FOR SOLVING GEODETIC TASKS

ABSTRACT

A doctoral thesis deals with the application of Total Least Squares (TLS) techniques for parameters estimation of mathematical models for various geodetic problems. Total Least Squares is a relatively new technique of parameters model estimation. The first research in the field of mathematics dating from the early eighties and the first applications appeared in various nongeodetic disciplines.

Studies on possibility of applications in the parameters estimation of geodetic models are of later date, there are about ten years ago (Kupferer, 2005 Schaffrin, 2006). Research is developing towards adjustment TLS geodetic problems in the sense finding a solution that include different accuracy and mutual correlation of data (measurement results). In order to achieve this, rather than solutions obtained by decomposition of the extended matrix model on the singular values (SVD), solutions based on the minimization of Lagrange's objective function (Euler-Lagrange's method) are developed.

In the scope of the doctoral thesis, classical (traditional applied) geodetic models are presented, especially Gauss-Helmert's model by which the problems treated by TLS tchniques can also be solved. Also, various forms TLS models are explored and presented, from classic (homoskedastic) TLS models to weighted TLS models or models that include different variances as well as mutual correlation between members of the extended matrix model. In addition, the formulas for the accuracy assessment and cofactor matrices computation for parameters model estimate, correctinons of the measurement results and correctinons of the matrix model members are developed.

The applicatins of TLS for sovnig geodetic tasks are illustrated on the three characteristic cases.

Key words: Mathematic modelling, Gauss-Markov model, Gauss-Helmert model, Total Least Squares (TLS).

Листа ознака и скраћеница

$\|\cdot\|_2$	– оператор еуклидске норме вектора,
$\|\cdot\|_F$	– оператор Frobenius-ове норме матрице,
$\mathbf{A}$	– матрица модела (матрица дизајна),
$\mathbf{B}$	– матрица услова за мерене величине,
$\mathbf{I}_n$	– јединична матрица реда n,
$\mathbf{k}$	– вектор Lagrange-ових мултипликатора,
$\mathbf{l}$	– вектор резултата мерења,
$\mathbf{K}_\mathbf{l}$	– коваријациона матрица резултата мерења,
$\boldsymbol{\varepsilon}$	– вектор грешака резултата мерења,
$\mathbf{Q}_\mathbf{l}$	– кофакторска матрица резултата мерења,
σ_0^2	– референтна варијанса (варијанса јединице тежине),
$\mathbf{x}$	– вектор параметара модела,
$\mathbf{v}$	– вектор поправака,
$\mathcal{N}(\mathbf{A})$	– нула простор матрице $\mathbf{A}$,
Ω	– Lagrange-ова функција циља,
$\mathbf{R}$	– ”кровна” матрица,
$\mathbf{R}^\perp$	– матрица поузданости,
$\mathcal{R}(\mathbf{A})$	– простор колона матрице $\mathbf{A}$,
$\Re^n$	– n-димензионални простор реалних бројева,
$\mathrm{rank}(\mathbf{A})$	– ранг матрице $\mathbf{A}$,
$\mathrm{tr}(\mathbf{R})$	– траг матрице $\mathbf{R}$,

$\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ – матрице декомпозиције на сингуларне вредности,

$\mathbf{u}_i$ – i-ті леви сингуларни вектор,

$\mathrm{vec}(\cdot)$ – оператор трансформације матрице у вектор,

$\mathbf{v}_i$ – i-ті десни сингуларни вектор,

$\mathbf{w}$ – вектор неконзистентности условног модела,

$\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}$ – матрица услова ограничења,

$\mathbf{z}_{\mathrm{C}}$ – неконзистентност услова ограничења,

ζ_i – i-та сингуларна вредност матрице $\mathbf{A}$,

LS – Least Squares,

WLS – Weighted Least Squares,

EIV – Errors-In-Variables,

ETLS – Equilibrated TLS,

EW-TLS – Element-wise-Weighted TLS,

GHM – Gauss-Helmert Model,

GMM – Gauss-Markov Model,

GTLS – Generalized Total Least-Squares,

STLS – Structured Total Least-Squares,

SVD – Singular Value Decomposition,

TLS – Total Least Squares,

WTLS – Weighted Total Least Squares.

Листа слика и табела

САДРЖАЈ

1. УВОД

Математички модел представља опис система односно појаве реалног света коришћењем математичких концепата и језика. Процес развоја математичког модела назива се математичко моделирање. Математички модели користе се у природним наукама (физика, биологија, геонауке, метереологија), инжењерским наукама (компјуреске науке, вештачка интилигенција) као и у социјалним наукама (економија, психологија, социологија, политичке науке). Математички модели обично се састоје од релација и променљивих (варијабли). Релације се описују операторима као што су алгебарски оператори, функције, диференцијални оператори и. т. д. Променљиве представљају параметре система које је потребно оценити (квантификовати).

Процес оцене параметара медела може се углавном представити кроз четири оптимизациона проблема (Zhengyou, 1997):

- **критеријум**: избор најбоље функције која се оптимизује (минимизује или максимизује),
- **оцењивање**: избор најбољег метода оптимизације изабране функције,
- **дизајн**: оптимална имплеметација изабраног метода за добијање најбоље оцене параметара модела,
- **моделирање**: детерминисање (утврђивање) математичког модела који најбоље описује систем у оквиру којег су извршена мерења укључујући модел грешака.

Традиционални геодетски задатак састоји се од мерења и израде представа земљине површи, углавном кроз математичке моделе. На основу довољног броја мерења могу се формирати системи једначина и оценити параметри математичког модела. Обзиром да је број извршених мерења обично већи од броја неопходних параметара модела, као резултат добијају се преодређени системи једначина односно системи једначина са прекобројним мерењима. За апроксимирање решења ових преодређених система користи се метод најмањих квадрата (Least squares, LS) који су развили C. F. Gauss, A. M. Legendre и A. Markov у деветнаестом веку. Немачки геодета F. R. Helmert дао је такође значајан допринос теорији најмањих квадрата (Helmert, 1907). Gauss-Helmert-ов модел је вероватно још увек најприлагодљивија техника за оцењивање параметара у оквиру нелинеарних математичких модела.

Проблем оцене параметара модела настаје због потребе да се оцене истините вредности кључних параметара математичких модела који се не могу измерити директно. Према томе мери се скуп величина које су мерљиве и које су у директној математичкој вези са параметрима модела. Уколико су ове математичке везе нелинеарне, могу се користити погодне математичке технике (н. пр. Taylor-ова линеаризација) за њихово приказивање у линеарној форми.

Међутим, увек отворено питање представља адекватност примењених математичких релација између параметара модела и мерених величина. Ове релације често нису познате саме по себи него теже да формирају слику феномена реалног света у једном прегледном и обрадивом математичком моделу. Према томе увек остаје отворено питање да ли су сви утицаји погодно обухваћени и моделирани. Према философији метода најмањих квадрата релације између вектора параметара модела $\mathbf{x}$ и резултата мерења $\mathbf{l}$ може се приказати у форми

$$\mathbf{l} \approx \mathbf{A}\mathbf{x} . \tag{1.1}$$

Знак приближности произилази из чињенице да се мерене величине никада не могу одредити апсолутно тачно због чега нехомогени систем (1.1) нема конзистентно решење. У циљу налажења решења, приступа се модификацији вектора резултата мерења пошто се сматра да је он оптерећен грешкама мерења

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} , \tag{1.2}$$

где је вектор $\mathbf{l}$ подељен на две међусобно ортогоналне компоненте $\mathbf{v} \in \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$ и $\mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ где су $\mathcal{S}(\cdot)$ и $\mathcal{N}(\cdot)$ оператори простора колона и нула простора матрице, респективно. Матрица $\mathbf{A}$, са друге стране, у математичкој вези између вектора параметара модела и резултата мерења $\mathbf{l}$, сматра се константном и није подложна модификацијама.

Уколико је матрица модела $\mathbf{A}$ неконстантна и предвиђа се њена модификација, у математичкој литератури, уместо класичног предложен је потпуни метод најмањих квадрата (Total Least Squares, TLS), (Björck, 1996). Једноставан пример који осликава разлику између класичног метода најмањих квадрата (Least Squares, LS) и потпуног метода најмањих квадрата (Total Least Squares, TLS) приказан је у Van Huffel и Vandervalle, (1991). Нека је дат математички модел

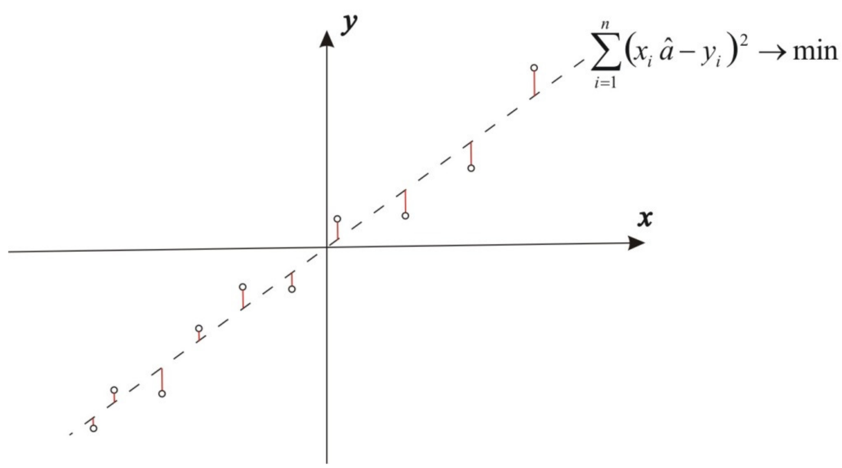
$$y = a\,x\,, \tag{1.3}$$

и нека је извршено n мерења величина x_i и y_i, $i = 1,\cdots,n$. Уколико се занемаре грешке у мерењима x и примени метод најмањих квадрата онда следи функција циља

$$\sum_{i=1}^{n} v_{y_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i\,\hat{a} - y_i\right)^2 \rightarrow \min\,, \tag{1.4}$$

и оцена за параметар a (Слика 1.1)

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,. \tag{1.5}$$



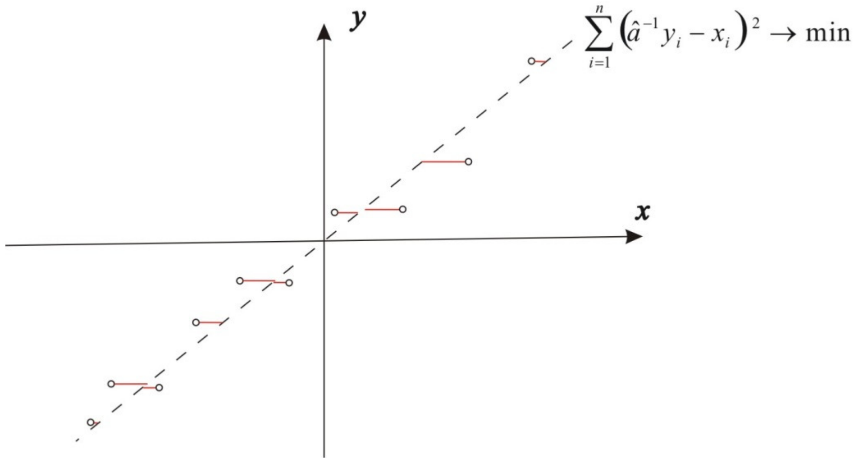
Слика 1.1. Решење по методу најмањих квадрата занемаривањем грешака мерења величине x

Уколико се моделом обухвате грешке мерења величине x а занемаре грешке мерења величине y, узимајући у обзир $x = a^{-1} y$, функција циља постаје

$$\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{a}^{-1} y_i - x_i\right)^2 \rightarrow \min\,, \tag{1.6}$$

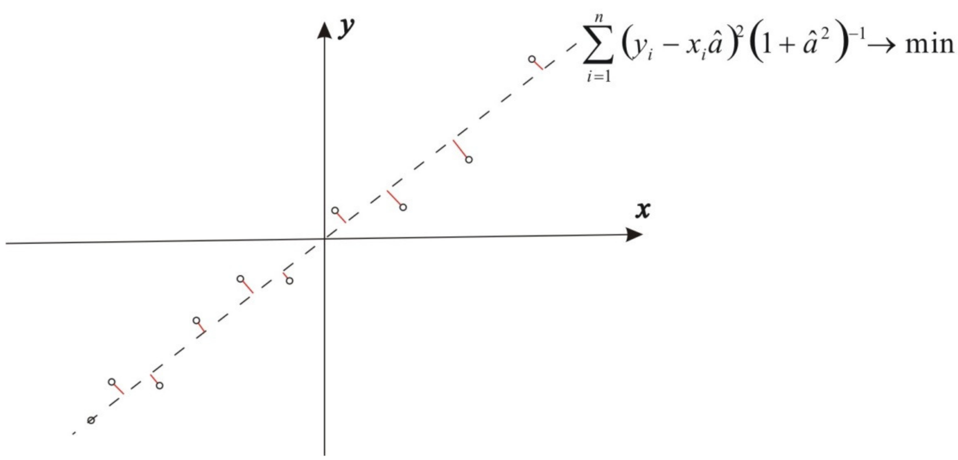
па се за оцену параметра a добија (Слика 1.1)

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i^2}{\sum_{i=1}^{m} x_i y_i}, \tag{1.7}$$



Слика 1.2. Решење по потпуном методу најмањих квадрата занемаривањем грешака мерења величине y

Уколико се моделом обухвате грешке мерења у обе променљиве, оптимална оцена за параметар a добија се избором праве линије тако да ортогонална растојања од сваке тачке (x_i, y_i) до праве буду што је могуће мања, односно функција циља гласи (Слика 1.3)



Слика 1.3. Ортогонална регресија обухватањем грешака мерења у обе променљиве, x и y

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i\hat{a})^2\left(1+\hat{a}^2\right)^{-1} \rightarrow \min \quad . \tag{1.8}$$

Решења за изравнавајућу праву линију по потпуном методу најмањих квадрата дата су у Golub и van Loan, (1989), Björck, (1996) и Felus и Schaffrin, (2003).

Модели са неконстантном матрицом дизајна (матирицом модела) познати су у литератури као модели са грешкама у променљивим величинама (Error in Variables Models, EIV) н. пр. (Gleser, 1981). Ови модели изучавани су још у Adcock, (1877) и поново истраживани много пута од тада на пољу математичке статистике (Markovsky и van Huffel, 2007).

Године 1980 Golub G. H. и Loan, C. F. увели су термин потпуни метод најмањих квадрата (Total Least Squares, TLS) за оцену параметара у EIV моделима, где се претпоставља да грешке резултата мерења $\mathbf{l}$ и чланова матрице модела $\mathbf{A}$ имају независне и идентичне расподеле. Модели који уводе ову претпоставку називају се класични EIV модели а поступак оцене параметара модела класични (нетежински) TLS (Snow, 2012). Насупрот њима, модели који претпостављају различите и евентуално корелисане расподеле грешака резултата мерења $\mathbf{l}$ и чланова матрице модела $\mathbf{A}$, дефинишу се као тежински EIV модели односно поступак оцене параметара модела као тежински TLS (Weigted Total Least Squares, WTLS).

Класични (нетежински) TLS проблем, који подразумева једнаке тежине резултата мерења $\mathbf{l}$ и чланова матрице модела $\mathbf{A}$, обично има јединствено решење које се може наћи декомпозицијом проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$ на сингуларне вредности (Singular Value Decomposition, SVD) (н. пр. Golub и van Loan, 1980, Van Huffel и Vandewalle, 1991). Класични (нетежински) TLS као и неке могућности примене у решавању геодетских задатака приказане су у (Kupferer, 2005) где је решење дефинисано као апроксимација матрицом нижег ранга.

Општија решења која урачунавају нивое грешака као и корелисаност резултата мерења дискутована су од стране више аутора. Тако уопштени (генерализовани) TLS (Generalized TLS, GTLS, (Van Huffel и Vandewalle, 1991) подразумева да су резидуали елемената проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$ по врстама независни али корелисани унутар врста са идентичном коваријационом матрицом. Неки аутори (н. пр. Schaffrin и Wieser, 2008) називају га еквилибрисани TLS (Equilibrated TLS, ETLS).

Још генералнији приступ претпоставља да су елементи проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$ независни али са различитим варијансама (Markovsky и др., 2006) за сваки елемент назива се TLS са различитим тежинама по сваком члану односно елементу (Element-wise-weighted TLS, EW-TLS).

У последњих неколико година публикован је велики број истраживања у области TLS оцена у циљу решавања геодетских задатака при чему се могу разликовати два основна присупа у решавању TLS проблема. Један приступ се заснива на декомпозицији проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$ на сигуларне вредности (Singular Value Decomposition, SVD, Teunissen, 1988, Felus, 2004, Kupferer, 2005, Akyilmaz, 2007, Schaffrin и Felus, 2008, Lampe, 2010). Други приступ подразумева третитање TLS као условљеног оптимизационог проблема минимизације коришћењем Euler-Lagrange-ове фукције циља уз различите нивое ограничења општости коваријационе матрице елемената проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$ (Felus and Burtch, 2009, Schaffrin и Felus, 2008, Schaffin и Wieser, 2008, Schaffrin и Wieser, 2009, Amiri-Simkooei и Jazaeri, 2012, Shen и др., 2011).

Најопштије решење које дозвољава корелацију између елемената матрице модела и вектора резултата мерења односно пуну симетричну позитивно дефинитну коваријациону матрицу проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$ приказао је у својој докторској дисертацији Fang, (2011). По форми идентичан алгоритам предложио је, у независном истраживању, Mahboub, (2012) са разликом што Mahboub-ов алгоритам не предвиђа корелацију између елемената матрице модела $\mathbf{A}$ и вектора резултата мерења $\mathbf{l}$.

Решења која дозвољавају сингуларну коваријациону матрицу проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$ дата су у истраживањима Snow, (2012) као и Schaffrin, Snow и Neitzel (2014).

Међутим, у неким радовима (н. пр. Neitzel и Petrovic, 2008, Neitzel, 2010, Schaffrin и Snow, 2010) показано је да се класични TLS као и тежински TLS проблем могу решити применом нелинеарног Gauss-Helmert-овог модела по итеративном алгоритму који је предложио Pope, (1972) по коме се могу избећи "замке" односно конвергенција ка погрешном решењу. Ово је разлог да се од стране неких аутора TLS приступ не сматра новим методом изравнања већ специјалим случајем, односно, новим начином формулације LS модела са неконстантном матрицом дизајна.

Ова докторска дисертација бави се ефектима примене TLS модела у решавању различитих геодетских задатака, при чему је посебна пажња посвећена оцени тачности резултата изравнања.

Дисертација је организована у шест поглавља. У уводном поглављу представљена је дефиниција проблема као и хронологија досадашњих резултата истраживања у овој области.

Друго поглавље садржи опис конвенционалних модела у решавању геодетских проблема, односно модела који подразумевају константну (непромењљиву) матрицу модела.

У трећем поглављу приказана је дефиниција класичног (нетежинског) TLS модела и представљена решења применом декомпозиције проширене матрице модела на сингуларне вредности (SVD) као и Euler-Lagrange-овим поступком. Приказан је такође TLS модел са фиксним колонама као и TLS модел са условима ограничења. Изведене су формуле за оцену тачности параметара модела као и изравнатих вредности резултата мерења.

Четврто поглавље посвећено је тежинским TLS моделима (WTLS). Дата је дефиниција WTLS и представљена решења применом декомпозиције проширене матрице модела на сингуларне вредности (SVD) као и различити итеративни поступци изведени Euler-Lagrange-овим поступком. Изведене су формуле за рачунање кофакторских матрица оцењених параметара модела, вектора поправака резултата мерења као и матрице поправака чланова матрице модела.

У петом поглављу дати су нумерички примери примене TLS модела, класичних и тежинских у решавању различитих геодетских проблема укључујући ортогоналну регресију, фитовање линија и површи и емпиријску (датумску) трансформацију координата. На жалост, подаци који су служили за рачунање нумеричких примера били су преобимни да би се приказали у раду, у штампаној форми. Ови подаци могу се добити од аутора, путем e-mail-а, захтевом на адресу popovic@grf.bg.ac.rs.

Шесто поглавље садржи сажетак постигнутих резултата, закључна разматрања и препоруке за даља истраживања.

2. КОНВЕНЦИОНАЛНИ МОДЕЛИ У ГЕОДЕЗИЈИ

У овом поглављу биће укратко представљени традиционално примењивани (уобичајени) поступци математичког моделирања у геодезији у циљу њиховог упоређења са TLS приступом. Под уобичајеним (конвенционалним) поступцима математичког моделирања у геодезији подразумевају се:

- Gauss-Markov-љев модел, са или без услова ограничења;
- Gauss-Helmert-ов модел, са или без услова ограничења;
- Условни модел и
- Колокација.

Gauss-Markov-љев модел је релативно једноставан модел који подразумева да се свака мерена величина може експлицитно изразити као линеарна функција параметара модела. Када то није случај, може се користити Gauss-Helmert-ов модел који се може сматрати надскупом Gauss-Markov-љевог модела.

Условни модел представља математички еквивалент Gauss-Markov-љевом моделу. Он омогућује релативно компактну формулацију разматраног проблема јер за разлику од Gauss-Markov-љевог модела не укључује параметре модела већ само неконзистентности које произилазе из математичких услова које мерене величине морају међусобно испунити. Тешкоћа је, међутим, што се мора потпуно обезбедити да математички услови, за сваки проблем, буду коректно формулисани и међусобно независни. Ово има за последицу да је условни модел неподеснији за аутоматизацију у поређењу са Gauss-Markov-љевим моделом и, због тога, има малу примену у пракси.

Модел колокације омогућује не само изравнање укључених резултата мерења већ и прогнозирање (предикцију) хипотетичких мерења као и филтрацију опажачког материјала. Према томе, овај модел нуди више могућности него Gauss-Helmert-ов модел али је мање заступљен у практичним применама обзиром да предикција и филтрирање код решавања већине геодетских проблема нису неопходни.

2.1. Gauss-Markov-љев модел

Класа Gauss-Markov-љевих модела (GMM) може се сматрати подскупом Gauss-Helmert-ових модела. То је линеарни математички модел који се састоји од функционалних и стохастичких релација. У матричној нотацији Gauss-Markov-љев модел има следећу форму (Caspary W F, 1988)

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\mathbf{l}) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{или} \\
&\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \\
&\mathrm{D}(\mathbf{l}) = \mathrm{D}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\right) = \mathbf{K}_{\mathbf{l}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{l}},
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где су

- $\mathrm{E}(\cdot)$, $\mathrm{D}(\cdot)$ оператори математичког очекивања и дисперзије, респективно,
- $\mathbf{l} \in \Re^n$, вектор резултата мерења (опажања),
- $\mathbf{x} \in \Re^u$, вектор параметара модела,
- $\mathbf{A} \in \Re^{n \times u}$, детерминистичка матрица модела са потпуним рангом колона ($\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = u$) која репрезентује релације између мерених величина и параметара модела,
- $\boldsymbol{\varepsilon} \in \Re^n$, вектор истинитих (тачних) грешака резултата мерења,
- $\mathbf{K}_{\mathbf{l}} \in \Re^{n \times n}$, матрица варијанси и коваријанси (коваријациона матрица) резултата мерења,
- $\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} \in \Re^{n \times n}$, кофакторска матрица резултата мерења,
- σ_0^2, усвојена вредност референтне варијансе (најчешће 1).

Да би се овај теоријски модел применио за оцену параметара модела из реалних података потребно га је преформулисати у

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \\
&\mathrm{D}(\mathbf{l}) = \mathbf{K}_{\mathbf{l}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Вектор $\mathbf{v} = -\boldsymbol{\varepsilon}$ описује модификације (поправке, резидуале) резултата мерења које имају за циљ да систем једначина (2.2) учине конзистентним.

Уколико не постоји линеарна веза између параметара модела $\mathbf{x}$ и математичког очекивања вектора резултата мерења $\mathbf{l}$ онда се она описује кроз систем нелинеарних диференцијабилних једначина

$$\mathrm{E}(\mathbf{l}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \text{или}$$
$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}). \tag{2.3}$$

Детерминистичка матрица модела $\mathbf{A}$ може се тада добити парцијалним диференцирањем функције $\mathbf{f}$ у односу на $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{x}^0}. \tag{2.4}$$

Модел линеаризован у позицији израчунатих (приближних) вредности параметара модела $\mathbf{x}^0$ може се онда представити изразом

$$\mathbf{l}_{\mathrm{R}} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}, \tag{2.5}$$

где је $\mathbf{l}_{\mathrm{R}} = \mathbf{l} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{l} - \mathbf{l}_0$ редуковани вектор резултата мерења који се у геодетским применама обично назива “мерено - израчунато (приближно)“, (н. пр., Xu, 2007) а $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ вектор прираштаја параметара модела.

Решење по методу најмањих квадрата (вектор оцена прираштаја параметара модела) произилази из минимизације Lagrange-ове функције циља (н. пр. Михаиловић и Алексић, 2008)

$$\Omega = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{v} = (\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} - \mathbf{l}_{\mathrm{R}})^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}(\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} - \mathbf{l}_{\mathrm{R}}) \rightarrow \min . \tag{2.6}$$

Неопходан услов за налажење минимума функције циља Ω онда је

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial \Omega}{\partial \Delta\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{l}_{\mathrm{R}} := \mathbf{0}, \tag{2.7}$$

док је довољан услов да је $\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}$ позитивно дефинитна матрица. Из (2.7) следи оцена за вектор прираштаја непознатих параметара

$$\Delta\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{l}_{\mathrm{R}} \tag{2.8}$$

са кофакторском матрицом оцена непознатих параметара

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}. \tag{2.9}$$

Оцене вектора мерених величина $\hat{\mathbf{l}}_{\mathrm{R}}$ и поправака резултата мерења $\hat{\mathbf{v}}$ онда се могу представити изразима

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{l}}_{\mathrm{R}} &= \mathbf{R}_{\mathrm{GM}} \mathbf{l}_{\mathrm{R}}, \\ \hat{\mathbf{v}} &= -\mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp} \mathbf{l}_{\mathrm{R}}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

са респективним кофакторским матрицама

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} &= \mathbf{R}_{\mathrm{GM}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} \mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} &= \mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} \mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp\,\mathrm{T}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где су $\mathbf{R}_{\mathrm{GM}}, \mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp} \in \Re^{n \times n}$ два међусобно ортогонална пројектора

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathrm{GM}} &= \mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1} \mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}, \\ \mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp} &= \mathbf{I}_{n} - \mathbf{R}_{\mathrm{GM}} = \mathbf{I}_{n} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

$\mathbf{I}_n$ је јединична матрица реда n. Матрица $\mathbf{R}_{\mathrm{GM}}$ позната је као “кровна матрица” (hat matrix, Schaffrin, 1997) обзиром да она пројектује вектор резултата мерења $\mathbf{l}$ у вектор оцена мерених величина, $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \hat{\mathbf{l}}_{\mathrm{R}}$, где је $\mathrm{tr}(\mathbf{R}_{\mathrm{GM}}) = u$. Матрица $\mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp}$ назива се матрица поузданости (reliability matrix, Shan, 1989) или матрица сувишности (redundancy matrix, Schaffrin, 1997) где је $\mathrm{tr}(\mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp}) = n - u$. За матрицу $\mathbf{R}_{\mathrm{GM}}$ користи се још термин матрица спољашње поузданости (external reliability) а за матрицу $\mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp}$, матрица унутрашње поузданости (internal reliability), (Caspary W F, 1988).

Оцена вредности функције циља (2.6) онда је

$$\hat{\Omega} = \hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1} \hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}_{\mathrm{R}})^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1} (\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}_{\mathrm{R}}) = \mathbf{l}_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp\,\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1} \mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp} \mathbf{l}_{\mathrm{R}}, \tag{2.13}$$

и може се изразити без оцењеног вектора параметара модела док је непомерена и најбоља оцена варијансе јединице тежине $\hat{\sigma}_0^2$,

$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\Omega}\,(n-u)^{-1}. \tag{2.14}$$

Особине непомерености оцена вектора параметара, вектора мерених величина и вектора поправака као и средња квадратна грешка вектора оцењених параметара могу се представити изразима

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(\Delta\hat{\mathbf{x}}) = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x},\\
&\mathrm{E}\left(\hat{\mathbf{l}}_{\mathrm{R}}\right) = \mathrm{E}(\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\mathrm{E}(\Delta\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathrm{E}(\mathbf{l}_{\mathrm{R}}),\\
&\mathrm{E}(\hat{\mathbf{v}}) = \mathrm{E}\left(-\mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp}\mathbf{l}_{\mathrm{R}}\right) = -\mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp}\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0} = -\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}),\\
&\mathrm{E}\left(\|\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}\|^{2}\right) = \mathrm{tr}\,\mathrm{E}\left((\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x})(\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\right) = \mathrm{tr}\,\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

2.2. Gauss-Markov-љев модел са условима ограничења

Уколико су параметри Gauss-Markov-љевог модела подложни ограничењима (у циљу регуларизације сингуларног проблема или у циљу санкционисања познатих релација између параметара модела), ова ограничења могу се изразити кроз q диференцијабилних једначина облика

$$
\mathbf{f}_{\mathrm{C}}(\mathbf{x}) - \mathbf{C} = \mathbf{0}, \tag{2.16}
$$

где $\mathbf{C} \in \Re^{q}$ може бити вектор случајних величина или познатих константни. После линеаризације у позицији израчунатих (приближних) вредности параметара модела $\mathbf{x}^{0}$ преодређени систем једначина (2.2) допуњен условима ограничења постаје

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{l}_{\mathrm{R}} + \mathbf{v}_{\mathrm{C}} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{C}}\\
&\mathbf{z}_{\mathrm{C}} + \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{C}}
\end{aligned},
\tag{2.17}
$$

са стохастичким особинама резидуала

$$
\mathrm{E}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}\\ \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad \mathrm{D}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}\\ \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}\end{bmatrix} = \sigma_{0}^{2}\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\mathbf{C}}\end{bmatrix}, \tag{2.18}
$$

где су $\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{C}}$, $\mathbf{v}_{\mathrm{C}}$ и $\mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}$ вектори прираштаја параметара модела, поправака резултата мерења и услова, респективно а

$$
\mathbf{Z}_{\mathrm{C}} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}_{\mathrm{C}}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{x}_{0}} \in \Re^{q\times u}, \qquad \mathrm{rank}(\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}) = q \ \text{ и } \qquad \mathbf{z}_{\mathrm{C}} = -(\mathbf{f}_{\mathrm{C}}(\mathbf{x}_{0}) - \mathbf{C}) \in \Re^{q}. \tag{2.19}
$$

Решење по методу најмањих квадрата произилази из минимизације Lagrange-ове функције циља (Cothren, 2005)

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{C}} &= \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{v} + \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}} - 2\mathbf{k}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{C}} - \mathbf{z}_{\mathrm{C}} - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}\right) = \\ &= \left(\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{C}} - \mathbf{l}_{\mathrm{R}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\left(\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{C}} - \mathbf{l}_{\mathrm{R}}\right) + \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}} - \\ &\quad - 2\mathbf{k}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{C}} - \mathbf{z}_{\mathrm{C}} - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}\right) \to \min,\end{aligned} \tag{2.20}$$

где је $\mathbf{k}_{\mathrm{C}} \in \Re^{q}$ вектор Lagrange-ових мултипликатора, одакле следе неопходни услови минимума функције циља Ω_{C}

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\,\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{C}}}\bigg|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{l}_{\mathrm{R}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} := \mathbf{0} \tag{2.21}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\,\mathbf{k}_{\mathrm{C}}}\bigg|_{\mathbf{x}_0} = -\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\Delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} + \mathbf{z}_{\mathrm{C}} + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}} := \mathbf{0} \tag{2.22}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\,\mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}}\bigg|_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{Q}_{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}} + \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} := \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}} = -\mathbf{Q}_{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} \tag{2.23}$$

Довољни услови минимума су испуњени пошто су Hessian матрице других извода функције циља по векторима резидуала $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\,\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}$ и $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\,\mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}\mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}^{\mathrm{T}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{C}}^{-1}$ позитивно дефинитне матрице.

Из (2.21) – (2.23) следи систем нормалних једначина

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A} & -\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{Z}_{\mathrm{C}} & -\mathbf{Q}_{\mathbf{C}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} \\ \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{l}_{\mathrm{R}} \\ -\mathbf{z}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix}, \tag{2.24}$$

и решење преодређеног система једначина (2.17). Ако је вектор вредности услова ограничења $\mathbf{C}$ константан, односно $\mathbf{Q}_{\mathbf{C}} \to \mathbf{0}$, систем нормалних једначина (2.24) постаје

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A} & -\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{Z}_{\mathrm{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} \\ \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{l}_{\mathrm{R}} \\ -\mathbf{z}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Уколико матрица модела $\mathbf{A}$ нема потпун ранг колона односно $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < u$ (у геодетским применама обично због непотпуне дефиниције датума), услови ограничења морају бити постављени тако да је $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) + \operatorname{rank}(\mathbf{Z}_\mathrm{C}) \geq u$, односно да матрице система нормалних једначина (2.24)–(2.25) буду регуларне.

Ако је пак $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = u$, односно ако је матрица $\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1}\mathbf{A}$ регуларна, инверзија матрице система нормалних једначина (2.24)–(2.25) могу се извести секвенцијално па се за вектор Lagrange-ових мултипликатора добија

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}_\mathrm{C} &= -\left(\mathbf{Z}_\mathrm{C}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{Z}_\mathrm{C}^\mathrm{T} + \mathbf{Q}_\mathbf{C}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}_\mathrm{C}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}_\mathrm{C}\right) \quad \text{са} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}_\mathrm{C}} &= \left(\mathbf{Z}_\mathrm{C}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{Z}_\mathrm{C}^\mathrm{T} + \mathbf{Q}_\mathbf{C}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

односно за $\mathbf{Q}_\mathbf{C} \to \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}_\mathrm{C} &= -\left(\mathbf{Z}_\mathrm{C}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{Z}_\mathrm{C}^\mathrm{T}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}_\mathrm{C}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}_\mathrm{C}\right) \quad \text{са} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}_\mathrm{C}} &= \left(\mathbf{Z}_\mathrm{C}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{Z}_\mathrm{C}^\mathrm{T}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

где су $\Delta\hat{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ оцена вектора прираштаја параматара модела и његова кореспондентна кофакторска матрица добијене у Gauss-Markov-љевом моделу без услова ограничења, на основу израза (2.8) и (2.9).

За оцену вектора непознатих параметара Gauss-Markov-љевог модела са условима ограничења може се тада писати

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} &= \Delta\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{Z}_\mathrm{C}^\mathrm{T}\hat{\mathbf{k}}_\mathrm{C} = \Delta\hat{\mathbf{x}} + \delta\hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} \qquad \text{са} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}} &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{Z}_\mathrm{C}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}_\mathrm{C}}\mathbf{Z}_\mathrm{C}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} - \mathbf{Q}_{\delta\hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Оцене редуковног вектора мерених величина и поправака резултата мерења и услова ограничења онда су

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{l}}_{\mathrm{R}_\mathrm{C}} &= \hat{\mathbf{l}}_\mathrm{R} - \mathbf{A}\delta\hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}, \\ \hat{\mathbf{v}}_\mathrm{C} &= \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{A}\delta\hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} \quad \text{и} \\ \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{z}_\mathrm{C}} &= \mathbf{Z}_\mathrm{C}\Delta\hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} - \mathbf{z}_\mathrm{C} \end{aligned} \tag{2.29}$$

са кофакторским матрицама

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}_{\mathrm{C}}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \\
&\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \quad \text{и} \\
&\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}} = \left(\mathbf{Q}_{\mathrm{C}}^{-1} + \mathbf{Q}_{\mathrm{C}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathrm{C}}^{-1}\right)^{-1},
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

респективно. Уколико $\mathbf{Q}_{\mathbf{C}} \to \mathbf{0}$ онда је $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}} = \mathbf{0}$. За оцену вредности функције циља (2.20) може се добити

$$
\hat{\Omega}_{\mathrm{C}} = \hat{\Omega} + \left(\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}_{\mathrm{C}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}}\left(\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}_{\mathrm{C}}\right),
\tag{2.31}
$$

а за оцену референтне варијансе

$$
\hat{\sigma}_{0_{\mathrm{C}}}^{2} = \hat{\Omega}_{\mathrm{C}}\left(n - u + q\right)^{-1}.
\tag{2.32}
$$

На основу (2.30) за матрице спољашње и унутрашње поузданости (матрицу сувишности) Gauss-Markov-љевог модела са ограничењима добија се

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}_{\mathrm{GMC}} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}_{\mathrm{C}}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1} = \mathbf{R}_{\mathrm{GM}} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}, \\
&\mathbf{R}_{\mathrm{GMC}}^{\perp} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1} = \mathbf{R}_{\mathrm{GM}}^{\perp} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1},
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

где је $\mathrm{tr}\left(\mathbf{R}_{\mathrm{GMC}}\right) = u - q + \mathrm{tr}\left(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}}\mathbf{Q}_{\mathbf{C}}^{-1}\right)$ и $\mathrm{tr}\left(\mathbf{R}_{\mathrm{GMC}}^{\perp}\right) = n - u + q - \mathrm{tr}\left(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}}\mathbf{Q}_{\mathbf{C}}^{-1}\right)$. За оцене редуковног вектора мерених величина и поправака резултата мерења може се тада такође писати

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{l}}_{\mathrm{R}_{\mathrm{C}}} = \mathbf{R}_{\mathrm{GMC}}\mathbf{l}_{\mathrm{R}} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}}\mathbf{z}_{\mathrm{C}} \quad \text{и} \\
&\hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}} = -\mathbf{R}_{\mathrm{GMC}}^{\perp}\mathbf{l}_{\mathrm{R}} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}}\mathbf{z}_{\mathrm{C}}.
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

2.3. Gauss-Helmert-ов модел

Gauss-Markov-љев модел подразумева да се свака мерена величина може експлицитно изразити као линеарна функција параметара модела. Уколико то није случај примењује се уопштени модел (Helmert, 1907)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{f}\left(\mathrm{E}(\mathbf{l}), \mathbf{x}\right) = \mathbf{0} \qquad \text{или} \\
&\mathbf{f}\left(\mathbf{l} + \mathbf{v}, \mathbf{x}^{0} + \Delta\mathbf{x}\right) = \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

односно, веза између математичког очекивања вектора резултата мерења и параметара модела остварује се кроз систем диференцијабилних једначина. Овај модел назива се Gauss-Helmert-ов модел (GHM), док се још користе називи условно изравнање са непознатим параметрима (Перовић, 2005, Михаиловић и Алексић, 2008, Grafarend и Awange, 2012) или квазипосредно изравнање (Wolf, 1968).

Јакобијеве матрице (матрице модела) у односу на параметре модела и мерене величине могу се добити изразима

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{l}_0,\mathbf{x}_0} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{l}^{\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{l}_0,\mathbf{x}_0}, \tag{2.36}$$

где је $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l} - \underset{\sim}{\mathbf{0}}$ вектор иницијалних вредности мерених величина где $\underset{\sim}{\mathbf{0}}$ представља случајни нула вектор (вектор псеудо-опажања) са одговарајућим бројем чланова, према нотацији у Harville, (1977). Овиме се постиже да се вектор $\mathbf{l}_0$ може третирати као детерминистички, тако да су Јакобијеве матрице модела $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ неслучајне. Матрица $\mathbf{A} \in \Re^{r \times u}$ има потпуни ранг колона ($\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = u$), док матрица $\mathbf{B} \in \Re^{r \times n}$ има потпуни ранг врста ($\operatorname{rank}(\mathbf{B}) = r$), где је r број условних једначина.

Модел се онда може написати као линеарни (линеаризовани) GHM

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}, \\ &\mathrm{E}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad \mathrm{D}(\mathbf{l}) = \mathbf{K}_{\mathbf{l}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}, \end{aligned} \tag{2.37}$$

где је $\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{l}, \mathbf{x}_0)$ са кофакторком матрицом $\mathbf{Q}_{\mathbf{w}} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$. Решење по методу најмањих квадрата произилази из минимизације Lagrange-ове функције циља (н. пр. Михаиловић и Алексић, 2008)

$$\Omega = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{v} - 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{w}) \to \min, \tag{2.38}$$

одакле следе неопходни услови минимума функције циља Ω

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial \Omega}{\partial \Delta\mathbf{v}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{l}_0} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} := \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}, \tag{2.39}$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\,\mathbf{k}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{l}_0} = -\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{w} := \mathbf{0}\,, \tag{2.40}$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\,\Delta\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{l}_0} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} := \mathbf{0}\,. \tag{2.41}$$

Довољан услов минимума је испуњен пошто је $\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\,\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}$ позитивно дефинитна матрица.

На основу (2.39)–(2.40) може се добити

$$\hat{\mathbf{k}} = -\left(\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w}\right) = -\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\left(\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w}\right), \tag{2.42}$$

док из (2.41)–(2.42) следи оцена вектора прираштаја непознатих параметара

$$\Delta\hat{\mathbf{x}} = -\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{w}\,, \tag{2.43}$$

са кореспондентим кофакторским матрицама

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} &= \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1},\\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1} - \mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}.\end{aligned} \tag{2.44}$$

Оцене вектора мерених величина и поправака резултата мерења онда су

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}},\\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}},\end{aligned} \tag{2.45}$$

са

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}}\mathbf{B}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} = \mathbf{R}_{\mathrm{GH}}^{\perp}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}\,,\\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}}\mathbf{B}\right)\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} = \mathbf{R}_{\mathrm{GH}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}.\end{aligned} \tag{2.46}$$

На основу (2.46) за матрице спољашње и унутрашње поузданости (матрицу сувишности) $\mathbf{R}_{\mathrm{GH}}, \mathbf{R}_{\mathrm{GH}}^{\perp} \in \Re^{n\times n}$, Gauss-Helmert-овог модела следи

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathrm{GH}} &= \mathbf{I}_n - \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}}\mathbf{B},\\ \mathbf{R}_{\mathrm{GH}}^{\perp} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}}\mathbf{B},\end{aligned} \tag{2.47}$$

где је $\mathrm{tr}\left(\mathbf{R}_{\mathrm{GH}}\right)=u$ и $\mathrm{tr}\left(\mathbf{R}_{\mathrm{GH}}^{\perp}\right)=n-u$.

Оцене вредности функције циља (2.38) и варијансе јединице тежине онда су

$$\begin{aligned}&\hat{\Omega}=\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\hat{\mathbf{v}}=\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{w}+\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}} \quad \text{и}\\&\hat{\sigma}_0^2=\hat{\Omega}\,\left(r-u\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{2.48}$$

У случају нелинеарности функције $\mathbf{f}\left(\mathbf{l}+\mathbf{v},\mathbf{x}^0+\Delta\mathbf{x}\right)=\mathbf{0}$ оцене параметара модела $\hat{\mathbf{x}}$ и вектора мерених величина $\hat{\mathbf{l}}$ користе се као почетне вредности за налажење решења Gauss-Newton-овим итеративним поступком па се узима

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}_0^{(1)}=\hat{\mathbf{x}}-\underset{\sim}{\mathbf{0}},\\&\mathbf{l}_0^{(1)}=\hat{\mathbf{l}}-\underset{\sim}{\mathbf{0}},\end{aligned} \tag{2.49}$$

односно у i-тој итерацији,

$$\mathbf{x}_0^{(i)}=\hat{\mathbf{x}}^{(i-1)}-\underset{\sim}{\mathbf{0}}, \qquad \mathbf{l}_0^{(i)}=\hat{\mathbf{l}}^{(i-1)}-\underset{\sim}{\mathbf{0}}, \tag{2.50}$$

$$\mathbf{A}^{(i)}=\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{l}_0^{(i)},\,\mathbf{x}_0^{(i)}}, \quad \mathbf{B}^{(i)}=\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{l}^{\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{l}_0^{(i)},\,\mathbf{x}_0^{(i)}} \quad \text{и}$$

$$\mathbf{w}^{(i)}=\mathbf{f}\left(\mathbf{l}_0^{(i)},\mathbf{x}_0^{(i)}\right)+\mathbf{B}^{(i)}\left(\mathbf{l}-\mathbf{l}_0^{(i)}\right).$$

Оцене параметара модела $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ и вредности мерених величина $\hat{\mathbf{l}}^{(i)}$ добијају се, у i-тој итерацији, као (Koch, 2014)

$$\begin{aligned}&\hat{\mathbf{x}}^{(i)}=\mathbf{x}_0^{(i-1)}+\Delta\hat{\mathbf{x}}^{(i)},\\&\hat{\mathbf{l}}^{(i)}=\mathbf{l}+\hat{\mathbf{v}}^{(i)}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Критеријум за завршетак итеративног поступка може бити

$$\left|\hat{\mathbf{x}}^{(i)}-\mathbf{x}_0^{(i)}\right|<\varepsilon, \tag{2.52}$$

где је ε усвојена (довољно мала) вредност или ако су услови

$$\mathbf{f}\left(\hat{\mathbf{l}}^{(i)},\hat{\mathbf{x}}^{(i)}\right)=\mathbf{0}, \tag{2.53}$$

испуњени са довољном тачношћу.

Нелинеарни Gauss-Helmert-ов модел може у извесном смислу бити незгодан за израчунавање и, у случају неправилног ажурирања између итерација, конвергирати ка погрешном решењу. Приказани итеративни поступак у складу је са препорукама које је дефинисао Pope, (1972) у циљу избегавања извесних “замки“ код сровођења итеративног поступка у решавању нелинеарног проблема, односно конвергенције ка погрешном решењу. Основне препоруке код спровођења итеративног изравнања у решавању нелинеарног проблема које је дефинисао Pope, (1972) су:

1. Коефицијенти (чланови) матрица модела, у i-тој итерацији, $\mathbf{A}^{(i)}$ и $\mathbf{B}^{(i)}$ морају се рачунати за најажурније изравнате вредности за све параметре модела и све мерене величине;
2. Вектор $\mathbf{w}^{(i)}$ не мора обавезно имати форму $\mathbf{f}\left(\mathbf{l},\mathbf{x}_0^{(i)}\right)$ осим у првој итерацији иако то, у неким случајевима, може бити довољно добра апроксимација;
3. У општем случају други члан израза $\mathbf{w}^{(i)} := \mathbf{f}\left(\mathbf{l}_0^{(i)},\mathbf{x}_0^{(i)}\right)+\mathbf{B}^{(i)}\left(\mathbf{l}-\mathbf{l}_0^{(i)}\right)$ нумерички се не губи и
4. Вектори $\mathbf{x}_0^{(i)}$ и $\mathbf{l}_0^{(i)}$ ажурирају се различито. Вектор $\mathbf{x}_0^{(i)}$ ажурира се тако што се оцена $\Delta\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ додаје на вредност $\mathbf{x}_0^{(i-1)}$ из претходне итерације и онда (теоретски) одузима случајни нула вектор, док се вектор $\mathbf{l}_0^{(i)}$ ажурира тако што се на вектор резултата мерења $\mathbf{l}$ додаје најажурнија вредност оцена поправака $\hat{\mathbf{v}}^{(i)}$ (па се онда одузима случајни нула вектор, како би чланови вектора $\mathbf{l}_0^{(i)}$ могли бити третирани као константе).

2.4. Gauss-Helmert-ов модел са условима ограничења

Услови ограничења система једначина (2.35), слично Gauss-Markov-љевом моделу, могу се изразити кроз q диференцијабилних једначина (2.16). После линеаризације у позицији израчунатих (приближних) вредности параметара модела $\mathbf{x}^0$ и мерених величина $\mathbf{l}^0$ преодређени систем једначина (2.37) допуњен условима ограничења постаје

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}_C + \mathbf{B}\mathbf{v}_C + \mathbf{w} \quad = \mathbf{0},\\
&\mathbf{Z}_C\Delta\mathbf{x}_C - \left(\mathbf{z}_C + \mathbf{v}_{\mathbf{z}_C}\right) = \mathbf{0},
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

са стохастичким особинама резидуала

$$
\mathrm{E}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_C\\ \mathbf{v}_{\mathbf{z}_C}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad \mathrm{D}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_C\\ \mathbf{v}_{\mathbf{z}_C}\end{bmatrix} = \sigma_0^2\begin{bmatrix}\mathbf{Q_l} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q_C}\end{bmatrix},
\tag{2.55}
$$

где су $\Delta\mathbf{x}_C$, $\mathbf{v}_C$ и $\mathbf{v}_{\mathbf{z}_C}$ вектори прираштаја параметара модела, поправака резултата мерења и услова, респективно. Јакобијеве матрице $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ дате су изразима (2.36) а матрица $\mathbf{Z}_C$ и вектор $\mathbf{z}_C$, за услове ограничења, изразима (2.19).

Имајући у виду (2.23), Lagrange-ова функције циља може се написати у облику (Heiker, 2013),

$$
\begin{aligned}
\Omega_C = {}& \mathbf{v}_C^{\mathrm{T}}\mathbf{Q_l}^{-1}\mathbf{v}_C - 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\Delta\mathbf{x}_C + \mathbf{B}\mathbf{v}_C + \mathbf{w}\right) -\\
& - 2\mathbf{k}_C^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Z}_C\Delta\mathbf{x}_C - \mathbf{z}_C\right) - \mathbf{k}_C^{\mathrm{T}}\mathbf{Q_C}\mathbf{k}_C \to \min,
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

где су $\mathbf{k} \in \Re^r$ и $\mathbf{k}_C \in \Re^q$ вектори Lagrange-ових мултипликатора за једначине Gauss-Helmert-овог модела и једначине услова ограничења респективно. Неопходни услови за налажење минимума Lagrange-ове функције циља тада су

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_C}{\partial\,\Delta\mathbf{v}_C}\bigg|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{l}_0} = \mathbf{Q_l}^{-1}\hat{\mathbf{v}}_C - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} := \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{v}}_C = \mathbf{Q_l}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}},
\tag{2.57}
$$

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_C}{\partial\,\Delta\mathbf{x}_C}\bigg|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{l}_0} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} - \mathbf{Z}_C^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}_C := \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} = -\mathbf{Z}_C^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}_C,
\tag{2.58}
$$

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_C}{\partial\,\mathbf{k}}\bigg|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{l}_0} = -\mathbf{A}\Delta\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{B}\hat{\mathbf{v}}_C - \mathbf{w} := \mathbf{0},
\tag{2.59}
$$

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega_C}{\partial\,\mathbf{k}_C}\bigg|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{l}_0} = -\mathbf{Z}_C\Delta\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{Q}_C\hat{\mathbf{k}}_C + \mathbf{z}_C := \mathbf{0}.
\tag{2.60}
$$

Довољни услови минимума су испуњени пошто су $\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial \mathbf{v}_{\mathrm{C}}\mathbf{v}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}\,\mathrm{T}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}$ и $\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}\mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}^{\mathrm{T}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{C}}^{-1}$ позитивно дефинитне матрице.

На основу (2.57) – (2.60), може се добити систем нормалних једначина

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{A} & -\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{Z}_{\mathrm{C}} & -\mathbf{Q}_{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} \\ \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{w} \\ -\mathbf{z}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix}, \tag{2.61}$$

и решење преодређеног (overdetermined) система једначина (2.54). Ако је вектор вредности услова ограничења $\mathbf{C}$ константан, односно $\mathbf{Q}_{\mathbf{C}} \rightarrow \mathbf{0}$, систем нормалних једначина (2.61) постаје

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} \\ \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{w} \\ \mathbf{z}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix}. \tag{2.62}$$

Системи нормалних једначина (2.61) односно (2.62) личе на решење Gauss-Markov-љевог модела са условима ограничења (2.24) односно (2.25). У ствари, сваки Gauss-Helmert-ов модел може се трансформисати у Gauss-Markov-љев модел, где се вектор неконзистентности (одступања) условних једначина Gauss-Helmert-овог модела $\mathbf{w}$ третира као трансформисани вектор опажања са кофакторском матрицом $\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}$. Вектор $\mathbf{Bv}$ третира се као трансформисани вектор поправака (резидуала) резултата мерења.

Ако је матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1}\mathbf{A}$ регуларна, инверзија матрице система нормалних једначина (2.61), (2.62) може се извести секвенцијално па се за решења Gauss-Helmert-овог модела са условима ограничења и кореспондентне кофакторске матрице добијају изрази идентични изразима (2.26) до (2.30), где су сада $\Delta\hat{\mathbf{x}}$ и $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ оцена вектора прираштаја параматара модела и његова кореспондентна кофакторска матрица добијене из Gauss-Helmert-овог модела без услова ограничења.

Оцена вредности функције циља (2.56) и варијансе јединице тежине онда су

$$\hat{\Omega}_{\mathrm{C}} = \hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1} \hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}} = \hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{w}}^{-1} \mathbf{B} \hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}} \quad \text{и}$$
$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\Omega}_{\mathrm{C}} \, (r - u + q)^{-1}. \tag{2.63}$$

Аналогно изразима (2.33) за матрице спољашње и унутрашње поузданости (матрицу сувишности) Gauss-Helmert-овог модела са условима ограничења може се добити

$$\mathbf{R}_{\mathrm{GHC}} = \mathbf{R}_{\mathrm{GH}} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1},$$
$$\mathbf{R}_{\mathrm{GHC}}^{\perp} = \mathbf{R}_{\mathrm{GH}}^{\perp} + \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\delta\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}, \tag{2.64}$$

где је $\mathrm{tr}(\mathbf{R}_{\mathrm{GHC}}) = u - q + \mathrm{tr}\left(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{zC}}} \mathbf{Q}_{\mathbf{C}}^{-1}\right)$ и $\mathrm{tr}\left(\mathbf{R}_{\mathrm{GHC}}^{\perp}\right) = n - u + q - \mathrm{tr}\left(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{zC}}} \mathbf{Q}_{\mathbf{C}}^{-1}\right)$.

3. МОДЕЛИ СА НЕКОНСТАНТНОМ МАТРИЦОМ ДИЗАЈНА И КЛАСИЧНИ ПОТПУНИ МЕТОД НАЈМАЊИХ КВАДРАТА

У математичкој статистици под моделима са неконстантном матрицом дизајна (Error In Variables models, EIV) подразумевају се регресиони модели који урачунавају грешке мерења у независно промењивим величинама модела (регресорима).

Насупрот њима, стандардни регресиони модели занемарују евентуалне грешке мерења независних промењивих (регресора), односно подразумевају да су њихове вредности апсолутно тачне док се моделом обухватају само грешке мерења зависних промењивих (одговора).

3.1. Класични (нетежински) потпуни метод најмањих квадрата у EIV моделима

Ако је дат математички модел у облику преодређеног система линеарних једначина

$$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{l}, \tag{3.1}$$

где је $\mathbf{A} \in \Re^{n \times u}$ матрица модела, $\mathbf{l} \in \Re^{n}$ вектор резултата мерења, $n > u = \operatorname{rank}(\mathbf{A})$ и ако постоји вектор $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}}$ такав да

$$\left\| \mathbf{l} - \hat{\mathbf{l}} \right\|_2 \to \min, \qquad \text{и} \qquad \hat{\mathbf{l}} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}), \tag{3.2}$$

где је $\|\cdot\|_2$ оператор еуклидске норме вектора а $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ простор колона матрице $\mathbf{A}$, онда свако $\mathbf{x}$ које је решење система једначина $\mathbf{Ax} = \hat{\mathbf{l}}$ представља решење по (нетежинском) методу најмањих квадрата. Вектор $\hat{\mathbf{v}} \in \Re^{n}$, у овом случају, садржи корекције (поправке, резидуале) елемената вектора $\mathbf{l}$ израчунате по методу најмањих квадрата.

Уколико за преодређени систем једначина (3.1) постоји матрица

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{l}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}} & \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}} \end{bmatrix} \in \Re^{n \times (u+1)}, \tag{3.3}$$

таква да

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{l}} \end{bmatrix} \right\|_{\mathrm{F}} \to \min \quad \text{и} \quad \hat{\mathbf{l}} \in \mathcal{R}(\hat{\mathbf{A}}), \tag{3.4}$$

где је $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ оператор Frobenius-ове норме матрице ($\|\mathbf{H}\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H})}$), онда свако $\mathbf{x}$ које је решење система једначина $\hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{l}}$ представља решење по потпуном (класичном, нетежинском) методу најмањих квадрата (Total Least Squares, TLS). Матрица $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}} \in \Re^{n \times u}$ садржи корекције (поправке) елемената матрице $\mathbf{A}$ система једначина (3.1) (матрице модела), док вектор $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}} \in \Re^{n}$ садржи корекције елемената вектора $\mathbf{l}$, израчунате по потпуном методу најмањих квадрата.

Атрибут "класични" или "нетежински" у литератури се обично користи за случај који подразумева да $\mathbf{V}_{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{v}_{\mathbf{l}}$ имају независне и идентичне расподеле и када постоји јединствено решење. Решење се може наћи редукцијом ранга проширене матрице модела $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix}$ (Golub and Van Loan, 1980, Kupferer, 2005) или Euler-Lagrange-овим поступком (Schaffrin и Felus, 2005, Schaffrin, 2006).

3.1.1 Решење декомпозицијом проширене матрице модела на сингуларне вредности

Израчунавање решења по потпуном методу најмањих квадрата може се наћи декомпозицијом проширене матрице модела $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix}$ на сингуларне вредности (Golub and Van Loan, 1980). Преодређени систем (3.1) може се преуредити у

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{bmatrix} \approx \mathbf{0}. \tag{3.5}$$

Декомпозиција матрице $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix}$ на сингуларне вредности може се онда представити изразом

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}, \tag{3.6}$$

где су $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1, & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \in \Re^{n \times n}$ и $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1, & \cdots & \mathbf{v}_{u+1} \end{bmatrix} \in \Re^{(u+1)\times(u+1)}$ ортогоналне матрице а $\mathbf{S} = \mathrm{diag}(\zeta_1, \cdots, \zeta_{u+1}) \in \Re^{n \times (u+1)}$ дијагонална матрица сингуларних вредности матрице $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix}$ и $\zeta_1 \geq \cdots \geq \zeta_{u+1} \geq 0$.

Услови за постојање и јединственост TLS решења за систем (3.1) су (Kupferer, 2005, Markovsky и Van Huffel, 2007):

1. TLS решење постоји ако и само ако је елеменат матрице $\mathbf{V}$, $v_{u+1,u+1} \neq 0$ и
2. TLS решење је јединствено ако и само ако је $\zeta_u \neq \zeta_{u+1}$.

Еквивалентан услов за постојање и јединственост TLS решења може се описати као $\gamma_u > \zeta_{u+1}$, где је γ_u најмања сингуларна вредност матрице $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ (Van Huffel и Vandewalle, 1991). Уколико решење није јединствено проблем се обично назива негенерички TLS проблем. Ако су услови постојања и јединствености решења задовољени, онда је TLS решење

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{l}} \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{S}_1\mathbf{V}^{\mathrm{T}} , \tag{3.7}$$

где је $\mathbf{S}_1 = \mathrm{diag}(\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \cdots \quad \zeta_u, \ 0)$.

Решење је нађено коришћењем Eckart-Young-Mirsky теореме (Eckart and Young, 1936, Mirsky, 1960) редуковањем за један ранга проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$ и има минималну норму, односно

$$\left\| [\mathbf{A} \quad \mathbf{l}] - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{l}} \end{bmatrix} \right\|_{\mathrm{F}} = \zeta_{u+1} . \tag{3.8}$$

Обзиром да је $\mathbf{V}$ ортогонална матрица односно $\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_j = 0$, за свако $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ и свако $i \neq j$, може се писати (Kupferer, 2005)

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{l}} \end{bmatrix} \mathbf{v}_{u+1} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{l}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} , \tag{3.9}$$

односно TLS оцена параметара модела (3.1) добија се после уразмеравања вектора $\mathbf{v}_{u+1}$ последњом компонентом $v_{u+1,u+1}$, да би се добила вредност -1

$$\hat{\mathbf{x}} := -\frac{1}{v_{u+1,u+1}} \begin{bmatrix} v_{1,u+1} \\ \vdots \\ v_{u,u+1} \end{bmatrix} . \tag{3.10}$$

Оцена матрице резидуала коефицијената модела и резултата мерења тада је

$$\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{l}}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{l}\end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{S}_1\mathbf{V}^{\mathrm{T}} - \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = -\zeta_{u+1}\mathbf{u}_{u+1}\mathbf{v}_{u+1}^{\mathrm{T}}. \tag{3.11}$$

Обзиром да је $\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} \\ -1\end{bmatrix}$ сингуларни вектор матрице $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{l}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{l}\end{bmatrix}$, по дефиницији, може се писати

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{l} \\ \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} & \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} \\ -1\end{bmatrix} = \zeta_{u+1}^2\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}} \\ -1\end{bmatrix}, \tag{3.12}$$

па се за TLS оцену параметара $\hat{\mathbf{x}}$ такође може добити

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \zeta_{u+1}^2\mathbf{I}_u\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}, \tag{3.13}$$

где је ζ_{u+1} најмања сингуларна вредност проширене матрице модела $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{l}\end{bmatrix}$.

За апроксимативну оцену кофакторске матрице вектора $\hat{\mathbf{x}}$ и оцену референтне варијансе може се добити (Kupferer, 2005)

$$\begin{aligned}&\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \approx \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \zeta_{u+1}^2\mathbf{I}_u\right)^{-1}\left(1 + \|\hat{\mathbf{x}}\|_2^2\right) = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \zeta_{u+1}^2\mathbf{I}_u\right)^{-1}\left(1 + \hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\right) \quad \text{и} \\ &\hat{\sigma}_0^2 = \left(\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}\right)(n-u)^{-1} = \zeta_{u+1}^2(n-u)^{-1},\end{aligned} \tag{3.14}$$

где је $\mathbf{I}_u$ јединична матрица реда u а $\mathbf{v}_{\mathbf{A}} = \mathrm{vec}\left(\mathbf{V}_{\mathbf{A}}\right)$. Оператор $\mathrm{vec}(\cdot)$ трансформише матрицу у вектор тако штоређа колоне матрице једну испод друге померајући их са лева на десно.

3.1.2. Решење Euler-Lagrange-овим поступком

Поред описаног метода минималне сингуларне вредности решење се може наћи и Euler-Lagrange-овим поступком (Schaffrin, 2006). Преодређени систем једначина (3.1) може се преуредити у

$$\mathbf{l} + \mathbf{v}_{\mathbf{l}} = \left(\mathbf{A} + \mathbf{V}_{\mathbf{A}}\right)\mathbf{x}, \tag{3.15}$$

са стохастичким особинама резидуала

$$\mathrm{E}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{\mathbf{l}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{A}}\end{bmatrix} := \begin{bmatrix}\mathbf{v}_{\mathbf{l}} \\ \mathrm{vec}\,\mathbf{V}_{\mathbf{A}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{0}\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathrm{D}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{\mathbf{l}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{A}}\end{bmatrix} = \sigma_0^2\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_u \otimes \mathbf{I}_n\end{bmatrix}. \tag{3.16}$$

где је σ_0^2 усвојена вредност референтне варијансе. Оператор "$\otimes$" представља Kronecker–Zehfuss-ов производ за који важе следећа правила

$$\underset{a\times b}{\mathbf{C}} \otimes \underset{c\times d}{\mathbf{A}} = \underset{ac\times bd}{\left[c_{ij}\mathbf{A}\right]},$$

$$\operatorname{vec}(\mathbf{ABC}) = \left(\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{A}\right)\operatorname{vec}(\mathbf{B}), \tag{3.17}$$

$$\operatorname{tr}\left(\mathbf{ABC}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{tr}\left(\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{ABC}^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{vec}\left(\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)\left(\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}\right)\operatorname{vec}(\mathbf{B}).$$

На овај начин EIV-модел може се, третирати као нелинеарни Gauss-Helmert-ов модел пошто се, коришћењем идентитета $\mathbf{V_A x} = \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{v_A}$, (3.15) преформулише у

$$\mathbf{Ax} - \left[\mathbf{I}_n \quad -\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right]\begin{bmatrix} \mathbf{v_l} \\ \mathbf{v_A} \end{bmatrix} - \mathbf{l} = \mathbf{0}. \tag{3.18}$$

Формирањем Lagrange-ове функције циља за TLS проблем (3.18)

$$\Omega(\mathbf{v_l}, \mathbf{v_A}, \mathbf{k}, \mathbf{x}) = \mathbf{v_l}^{\mathrm{T}}\mathbf{v_l} + \mathbf{v_A}^{\mathrm{T}}\mathbf{v_A} - 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{Ax} + \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{v_A} - \mathbf{v_l} - \mathbf{l}\right] \to \min, \tag{3.19}$$

где је $\mathbf{k} \in \Re^n$ вектор Lagrange-ових мултипликатора, могу се добити неопходни услови минимума функције циља Euler-Lagrange-овог типа

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v_l}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}, \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l} + \hat{\mathbf{k}} := \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l} = -\hat{\mathbf{k}}, \tag{3.20}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v_A}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}, \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A} - \left(\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{V}}_\mathbf{A} = \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}, \tag{3.21}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}, \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}, \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}}} = -\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{V}}_\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}. \tag{3.23}$$

Једначине (3.20)–(3.23) представљају неопходне услове минимума функције циља Ω. Довољни услови минимума су испуњени пошто су Hessian матрице других извода функције циља по векторима резидуала $\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\,\mathbf{v_l v_l}^{\mathrm{T}}}=\mathbf{I}_n$ и $\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\,\mathbf{v_A v_A}^{\mathrm{T}}}=\mathbf{I}_u\otimes\mathbf{I}_n=\mathbf{I}_{nu}$ позитивно дефинитне матрице.

Из израза (3.20)–(3.22) следи фундаментална релација

$$\mathbf{l}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}=\hat{\mathbf{k}}\left(1+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\right), \tag{3.24}$$

и изрази за оцене поправака (резидуала)

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}&=-\hat{\mathbf{k}}=\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\right)^{-1},\\ \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}&=\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}=-\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\right)^{-1}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Из услова (3.23) и израза (3.24), (3.25) следи систем нелинеарних нормалних једначина

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}&=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}\left(1+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\right)=\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}\left(1+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\right)=\\ &=-\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right)=\hat{\mathbf{x}}\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\right)^{-1}=\hat{\mathbf{x}}\hat{\zeta}_{u+1}^{2},\end{aligned} \tag{3.26}$$

где је

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}_{u+1}^{2}&=\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}+\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}=\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\right)^{-1}=\\ &=\left[-\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right)+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}\right)\right]\left(1+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\right)^{-1}=\\ &=\left(\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}-\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\hat{\zeta}_{u+1}^{2}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}\right)^{-1}=\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}-\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

На основу израза (3.26) и (3.27) може се формирати проблем сингуларних вредности (3.12) што доказује потпуну еквивалентност са решењем заснованом на декомпозицији проширене матрице модела $\left[\mathbf{A}\quad\mathbf{l}\right]$ на сингуларне вредности оригинлно представљеним у Golub и van Loan, (1980).

За израчунавање решења за $\hat{\zeta}_{u+1}^{2}$ и $\hat{\mathbf{x}}$ на основу израза (3.26) и (3.27) може се користити традиционални итеративни алгоритам

$$\hat{\zeta}_{u+1}^{2}{}^{(0)}=0;\qquad \hat{\mathbf{x}}^{(1)}=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}, \tag{3.28}$$

$$\hat{\zeta}_{u+1}^{2}{}^{(i)}=\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^{(i)}-\mathbf{l}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^{(i)}-\mathbf{l}\right)\left(1+\hat{\mathbf{x}}^{(i)\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}^{(i)}\right)^{-1}, \tag{3.29}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{l} + \hat{\mathbf{x}}^{(i)}\hat{\zeta}^{2\;(i)}_{u+1}\right). \tag{3.30}$$

За убрзање итеративног поступка Björck и др., (2000) као и Schaffrin, (2006) предложили су да се после почетних неколико корака (када итеративни процес успори) итеративни процес настави Newton-овим (Newton-Raphson-овим) итеративним поступком где $\hat{\zeta}^{2\;(i)}_{u+1}$ и $\hat{\mathbf{x}}^{(i)}$ замењују улоге

$$\hat{\mathbf{x}}^{(i)} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \hat{\zeta}^{2\;(i)}_{u+1}\mathbf{I}_u\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}, \tag{3.31}$$

$$\hat{\zeta}^{2\;(i+1)}_{u+1} = \hat{\zeta}^{2\;(i)}_{u+1} + \left(\mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{l} - \mathbf{l}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^{(i)} - \hat{\zeta}^{2\;(i)}_{u+1}\right)\left(1 + \hat{\mathbf{x}}^{(i)\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}}^{(i)}\right)^{-1}. \tag{3.32}$$

За оцену тачности вектора оцена параметара модела $\hat{\mathbf{x}}$ у Schaffrin, (2006) предложен је апроксимативни израз за кофакторску матрицу

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \approx \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \hat{\zeta}^{2}_{u+1}\mathbf{I}_u\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \hat{\zeta}^{2}_{u+1}\mathbf{I}_u\right)^{-1}. \tag{3.33}$$

Другачији облик за матрицу $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ може се добити на основу (3.18), аналогно изразима (2.37) и (2.44), односно ако се стави $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_n & -\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\end{bmatrix}$, па се може писати

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \left(\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n & -\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n \\ -\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\end{bmatrix}\right)^{-1}\hat{\mathbf{A}}\right)^{-1} = \left[\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\right)^{-1}\hat{\mathbf{A}}\right]^{-1}. \tag{3.34}$$

За кофакторске матрице поправака резултата мерења $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}$ и чланова матрице модела $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}$ може тада добити

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}} &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}} = \left(\mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\right)^{-1} - \left(\mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\right)^{-1}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\right)^{-1}, \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}} &= \hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}} \otimes \hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{3.35}$$

3.2. Мешовити LS-TLS модел (модел са фиксним колонама)

Претходно разматрани EIV модел подразумева неконстантност свих елемената матрице модела. Међутим, постоје случајеви где неке колоне матрице модела $\mathbf{A}$ чине константни коефицијенти (у геодетским применама то се, на пример, догађа код датумских трансформација).

Нека је u_1 колона матрице модела (3.1) сачињено од фиксних елемената, при чему је $u_1 < u$. Без губитка општости, матрица модела $\mathbf{A}$ може се тада представити као

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2], \tag{3.36}$$

где је матрица $\mathbf{A}_1$ сачињена од фиксних елемената, односно колона са фиксним елементима. Због тога се још користи и назив TLS модел са фиксним колонама (Fang, 2011).

Мешовити LS-TLS модел подразумева тада налажење решења $[\hat{\mathbf{A}}_2 \quad \hat{\mathbf{l}}]$ које испуњава следеће услове

$$\begin{aligned} &\left\| [\mathbf{A}_2 \quad \mathbf{l}] - [\hat{\mathbf{A}}_2 \quad \hat{\mathbf{l}}] \right\|_{\mathrm{F}} \to \min \quad \text{и} \\ &\hat{\mathbf{l}} \in \mathcal{R}[\mathbf{A}_1 \quad \hat{\mathbf{A}}_2]. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Свако $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$ које задовољава једначину

$$\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \hat{\mathbf{A}}_2\mathbf{x}_2, \tag{3.38}$$

представља решење мешовитог LS-TLS модела а

$$[\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}_2} \quad \hat{\mathbf{v}}_1] = [\hat{\mathbf{A}}_2 \quad \hat{\mathbf{l}}] - [\mathbf{A}_2 \quad \mathbf{l}], \tag{3.39}$$

представља матрицу резидуала мешовитог LS-TLS модела.

У циљу налажења решења, потребно је извршити QR декомпозицију матрице података мешовитог LS-TLS модела

$$[\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \mathbf{l}] = \mathbf{Q}\,\mathbf{R}, \tag{3.40}$$

где је $\mathbf{Q} \in \Re^{(n\times n)}$ ортогонална матрица а $\mathbf{R} \in \Re^{(n\times u)}$ горња троугаона матрица. Обзиром да је $\mathbf{Q}$ ортогонална матрица, односно $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$ може се писати

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}[\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \mathbf{l}] = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\,\mathbf{R} = \mathbf{R} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} u_1 \\ n-u_1 \end{array}, \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u-u_1 & 1 \end{array} \end{array} \tag{3.41}$$

односно мешовити LS-TLS модел може се трансформисати у облик

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix}, \tag{3.42}$$

где $\mathbf{R}_{11}$ има облик горње троугаоне матрице. На овај начин може се издвојити део са неконстантном матрицом дизајна

$$\mathbf{R}_{22}\mathbf{x}_2 \approx \mathbf{r}_2, \tag{3.43}$$

за који се може наћи TLS решење $\hat{\mathbf{x}}_2$. Оцене за преостале параметре модела $\hat{\mathbf{x}}_1$ могу се добити из једначине

$$\mathbf{R}_{11}\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_{12}\hat{\mathbf{x}}_2. \tag{3.44}$$

3.3. Структуирани TLS модел (STLS)

Ако је структура матрице модела $\mathbf{A}$ компонована тако да се неке промењљиве појављују два или више пута, онда се то назива структуирани TLS (Structured TLS, STLS). Назив STLS први је увео De Moor, (1994). STLS се често појављује у применама обраде сигнала (Markovsky и Van Huffel, 2007). У геодезији овакав случај се јавља код емпиријске (датумске) трансформације координата (Felus и Schaffrin, 2005, Akyilmaz, 2007).

Математичким језиком речено, тражи се решење преодређеног система

$$\mathbf{l} + \mathbf{v}_\mathbf{l} = (\mathbf{A} + \mathbf{V}_\mathbf{A})\mathbf{x}, \tag{3.45}$$

уз услов

$$\left\| \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_\mathbf{A} & \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l} \end{bmatrix} \right\|_\mathrm{F} \rightarrow \min, \tag{3.46}$$

такво да матрица $[\mathbf{A} + \mathbf{V}_\mathbf{A} \quad \mathbf{l} + \mathbf{v}_\mathbf{l}]$ има исту афину структуру као матрица $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$. Решење, односно алгоритам дат у Felus и Schaffrin, (2005) заснован је на теореми о пројекцији матричних особина према којој се матрица $\mathbf{A}_\mathrm{L} \in \Re^{n \times u}$ која је најближа произвољној матрици $\mathbf{A} \in \Re^{n \times u}$ и која има исту афину структуру може израчунати као

$$\mathbf{A}_\mathrm{L} = \mathrm{vec}^{-1}_{n \times u}\left[\mathbf{G}\left(\mathbf{G}^\mathrm{T}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^\mathrm{T}\mathrm{vec}(\mathbf{A})\right], \tag{3.47}$$

где је $\mathbf{G}$ карактеристична матрица која пресликава вектор $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$ у вектор $\mathbf{a}$ сачињен од непонављајућих елемената вектора $\mathrm{vec}(\mathbf{A})$. Структуру матрице $\mathbf{G}$ илуструје пример емпиријске (датумске) трансформације координата где је, за две идентичне тачке,

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ y_1 & -x_1 \\ y_2 & -x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{vec}(\mathbf{A})=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ -x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}=\mathbf{Ga}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \tag{3.48}$$

односно за $n/2$ идентичних тачака

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n/2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{n/2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n/2} & \mathbf{I}_{n/2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{3.49}$$

На основу ове теореме у Felus и Schaffrin, (2005) представљен је алгоритам за решавање STLS проблема (Cadzow-љев алгоритам)

1) $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]=\mathbf{U}^i\,\mathbf{S}^i\,\mathbf{V}^{i\mathrm{T}}$,
2) Ако је $\zeta_{n+1}^i=\mathbf{S}^i{}_{(n+1,n+1)}>\varepsilon \Rightarrow \mathbf{S}_1^i=\mathrm{diag}\begin{pmatrix}\zeta_1^i & \cdots & \zeta_n^i & 0\end{pmatrix}$,
3) $\left[\hat{\mathbf{A}}^{i+1} \quad \hat{\mathbf{l}}^{i+1}\right]=\mathbf{U}^i\,\mathbf{S}_1^i\,\mathbf{V}^{i\mathrm{T}}$,
4) $\left[\hat{\mathbf{A}}^{i+1} \quad \hat{\mathbf{l}}^{i+1}\right]_{\mathrm{L}}=\mathrm{vec}_{n\times u}^{-1}\left\{\mathbf{G}\left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}\left[\hat{\mathbf{A}}^{i+1} \quad \hat{\mathbf{l}}^{i+1}\right]\right\}$,
5) $\left[\hat{\mathbf{A}}^{i+1} \quad \hat{\mathbf{l}}^{i+1}\right]_{\mathrm{L}}=\mathbf{U}^{i+1}\,\mathbf{S}^{i+1}\,\mathbf{V}^{i+1\mathrm{T}}$,
6) $i+1=i$, повратак на корак 2.

Вредност ε у кораку 2) представља критеријум за престанак итерација. У Cadzow, (1988) доказано је да агоритам конвергира матрици непотпуног ранга $\left[\hat{\mathbf{A}} \quad \hat{\mathbf{l}}\right]_{\mathrm{L}}$ која има исту афину структуру као матрица $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$. По завршетку итеративног процеса оцена вектора параметара модела $\hat{\mathbf{x}}$ може се добити коришћењем израза (3.10).

Међутим Cadzow, (1988) указао је да редослед пројекције матричних особина може променити финални резултат па је, према томе, овај алгоритам субоптималан (непотпуно оптималан). Такође Lemmerling, (1999) показао је да STLS процес, као условљени нелинеарни оптимизациони процес, неконвексан, односно да може имати много локалних минимума.

У Schaffrin и др., (2012), за примену у емпиријској трансформацији координата предложена је модификација корака 4,

$$\left[\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{\,i+1} \quad \mathbf{v}_{\hat{\mathbf{l}}}^{\,i+1}\right]_{\mathrm{L}} = 2\,\mathrm{vec}_{n\times u}^{-1}\left\{\mathbf{G}\left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}\left(\left[\hat{\mathbf{A}}^{i+1} \quad \hat{\mathbf{l}}^{i+1}\right]-\left[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}\right]\right)\right\}. \qquad (3.50)$$

Такође, показано је да се проблем може коректно решити применом тежинског TLS модела, уз коректно израчунавање кофакторске матрице $\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}$ и применом алгоритма предложеном у Mahboub, (2012).

3.4. Уопштени (генерализовани) TLS (GTLS)

У генерализованом TLS моделу, за чланове матрице поправака (резидуала) $[\mathbf{V}_{\mathbf{A}} \quad \mathbf{v}_{\mathbf{l}}]$ проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$**,** подразумева се да је независна по врстама и корелисана унутар врста са идентичном коваријационом матрицом. Иако преспоставља различите варијансе за поједине чланове проширене матрице модела GTLS се још увек не односи на општу коваријациону матрицу. Неки аутори га, због тога и у циљу избегавања конфузије називају и "еквилибрисани TLS" (Schaffrin и Wieser, 2008).

Дакле, потребно је наћи решење преодређеног система једначина (Van Huffel and Vandewalle, 1991, Felus, 2004, Akilmaz, 2007)

$$\mathbf{l} + \mathbf{v}_{\mathbf{l}} = \left(\mathbf{A} + \mathbf{V}_{\mathbf{A}}\right)\mathbf{x} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{V}_2\mathbf{x}_2, \qquad (3.51)$$

под условом

$$\left\|\mathbf{D}\left[\mathbf{V}_2 \quad \mathbf{v}_{\mathbf{l}}\right]\mathbf{C}\right\|_{\mathrm{F}} \rightarrow \min. \qquad (3.52)$$

где се претпоставља да су елементи матрице $\mathbf{A}_1 \in \Re^{n \times u_1}$ фиксни док су чланови матрице $\mathbf{A}_2 \in \Re^{n \times (u-u_1)}$ променљиве величине. Матрица $\mathbf{D}$ је $n \times n$ дијагонална матрица тежина придружених врстама, док је матрица $\mathbf{C}$, $(u-u_1+1) \times (u-u_1+1)$ дијагонална матрица тежина придружених колонама.

У овом случају GTLS проблем може бити решен у три корака:

1) Налажење QR фаторизације проширене матрице $\mathbf{D}[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}[\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \mathbf{l}] = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \mathbf{r}_{1b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{r}_{2b} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} u_1 \\ n-u_1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u-u_1 & 1 \end{array} & \end{array} . \tag{3.53}$$

2) Израчунавање класичног TLS решења $\hat{\mathbf{x}}_2$ за редуковани систем

$$[\mathbf{R}_{22} \quad \mathbf{r}_{2b}]\mathbf{C}\left(\mathbf{C}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \approx \mathbf{0} , \tag{3.54}$$

где је $\mathbf{C}$ дијагонална матрица тежина за колоне.

3) Коришћење SVD за добијање $\hat{\mathbf{x}}_2$ и $\hat{\mathbf{x}}_1$

$$[\mathbf{R}_{22} \quad \mathbf{r}_{2b}]\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^{\mathrm{T}} , \tag{3.55}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = -\frac{1}{c_{(u-u_1+1),(u-u_1+1)} v_{u+1,u+1}} \mathbf{C}_{11} \begin{bmatrix} v_{1,u+1} \\ \vdots \\ v_{u,u+1} \end{bmatrix} , \tag{3.56}$$

$$\mathbf{R}_{11}\hat{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{r}_{1b} - \mathbf{R}_{12}\hat{\mathbf{x}}_2 , \tag{3.57}$$

где је $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \\ & c_{(u-u_1+1),(u-u_1+1)} \end{bmatrix}$, са дијагоналном матрицом $\mathbf{C}_{11}$.

3.5. TLS модел са условима ограничења

Уколико се систем једначина (3.18) допуни са q услова ограничења, слично као за Gauss-Markov-љев односно Gauss-Helmert-ов модел са условима ограничења, може се писати

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{\mathrm{C}} - \left[\mathbf{I}_n \quad -\left(\mathbf{x}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}\end{bmatrix} - \mathbf{l} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}_{\mathbf{A}_{\mathrm{c}}} = \mathrm{vec}\left(\mathbf{V}_{\mathbf{A}_{\mathrm{c}}}\right),$$

$$\mathbf{z}_{\mathrm{C}} + \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}} = \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\mathbf{x}_{\mathrm{C}}, \tag{3.58}$$

са стохастичким особинама

$$\mathrm{E}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0}\end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathrm{D}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{z}_{\mathrm{C}}}\end{bmatrix} = \sigma_0^2\begin{bmatrix}\mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_u \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\mathrm{C}}\end{bmatrix}. \tag{3.59}$$

У циљу налажења решења, односно нелинеарног система нормалних једначина, потребно је наћи минимум генерализоване Lagrange-ове функције циља (Schaffrin, 2006)

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{C}}\left(\mathbf{v}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}}, \mathbf{v}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_{\mathrm{C}}, \mathbf{x}_{\mathrm{C}}\right) = {} & \mathbf{v}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}} + \mathbf{v}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}} - \\ & - 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\mathbf{x}_{\mathrm{C}} - \mathbf{l} - \mathbf{v}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}} + \left(\mathbf{x}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{v}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}\right] - \\ & - 2\mathbf{k}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\mathbf{x}_{\mathrm{C}} - \mathbf{z}_{\mathrm{C}}\right) - \mathbf{k}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathrm{C}}\mathbf{k}_{\mathrm{C}} \to \min,\end{aligned} \tag{3.60}$$

где су $\mathbf{k} \in \Re^n$ и $\mathbf{k}_{\mathrm{C}} \in \Re^q$ вектори Lagrange-ових мултипликатора, одакле следе неопходни услови минимума функције циља Euler-Lagrange-овог типа

$$\left.\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_{\mathrm{C}}}{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}}}\right|_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}}, \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}, \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}} = \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}} + \hat{\mathbf{k}} := \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}} = -\hat{\mathbf{k}}, \tag{3.61}$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_{\mathrm{C}}}{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}}\right|_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}}, \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}, \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}} = \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}} - \left(\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{k}} := \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}} = \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}, \tag{3.62}$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_{\mathrm{C}}}{\partial \mathbf{k}}\right|_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}}, \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}, \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}} = \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} - \left(\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}} := \mathbf{0}, \tag{3.63}$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_{\mathrm{C}}}{\partial \mathbf{x}_{\mathrm{C}}}\right|_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}}, \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}, \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}} = -\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}^{\mathrm{T}}\right)\hat{\mathbf{k}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} := \mathbf{0}, \tag{3.64}$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega_{\mathrm{C}}}{\partial \mathbf{k}_{\mathrm{C}}}\right|_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}}, \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}, \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}} = \mathbf{z}_{\mathrm{C}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} - \mathbf{Q}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} := \mathbf{0} \tag{3.65}$$

и позитивно дефинитне матрице других извода по $\mathbf{v}_{\mathbf{l}_C}$ и $\mathbf{v}_{\mathbf{A}_C}$. Из услова (3.62)–(3.63) може се добити фундаментална релација

$$\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_C = \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}_C}\hat{\mathbf{x}}_C - \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_C} = \hat{\mathbf{k}}\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}_C\right), \tag{3.66}$$

и изрази за оцене поправака (резидуала)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_C} &= -\hat{\mathbf{k}} = \left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{l}\right)\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}_C\right)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}_C} &= \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{x}}_C^T = -\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{l}\right)\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}_C\right)^{-1}\hat{\mathbf{x}}_C^T. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Слично као у (3.26) на основу услова (3.61) добија се

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{A}^T\mathbf{l} - \mathbf{Z}_C^T\hat{\mathbf{k}}_C\left(1 + \hat{\mathbf{x}}^T\hat{\mathbf{x}}_C\right) &= -\left(\mathbf{A}^T\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{Z}_C^T\hat{\mathbf{k}}_C\right)\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}_C\right) = \\ &= \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}_C}^T\hat{\mathbf{k}}\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}_C\right) = -\hat{\mathbf{x}}_C\hat{\mathbf{k}}^T\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{l}\right) = \\ &= \hat{\mathbf{x}}_C\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{l}\right)^T\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{l}\right)\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}_C\right)^{-1} = \hat{\mathbf{x}}_C\hat{\zeta}_{u+1}^2, \end{aligned} \tag{3.68}$$

где је

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_{u+1}^2 = \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_C}^T\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_C} + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}_C}^T\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}_C} &= \left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{l}\right)^T\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{l}\right)\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}_C\right)^{-1} = \\ &= \left[-\mathbf{l}^T\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{l}\right) + \hat{\mathbf{x}}_C^T\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}_C - \mathbf{A}^T\mathbf{l}\right)\right]\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}_C\right)^{-1} = \\ &= \left(\mathbf{l}^T\mathbf{l} - \mathbf{l}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_C + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}\hat{\zeta}_{u+1}^2\right)\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}_C\right)^{-1} + \left(\mathbf{z}_C - \mathbf{Q}_C\mathbf{k}_C\right)^T\mathbf{k}_C = \\ &= \mathbf{l}^T\mathbf{l} - \mathbf{l}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_C + \left(\mathbf{z}_C - \mathbf{Q}_C\mathbf{k}_C\right)^T\mathbf{k}_C\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}_C\right). \end{aligned} \tag{3.69}$$

Имајући у виду $\mathbf{v}_{\mathbf{z}_C} = -\mathbf{Q}_C\mathbf{k}_C$ односно, на основу (3.65) може се писати

$$-\mathbf{Z}_C\hat{\mathbf{x}}_C + \left(\mathbf{z}_C - \mathbf{Q}_C\mathbf{k}_C\right) = \mathbf{0}. \tag{3.70}$$

Увођењем замене $\bar{\mathbf{k}}_C := \hat{\mathbf{k}}_C\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_C^T\hat{\mathbf{x}}_C\right)$ изрази (3.68)–(3.70) могу се представити у виду имплицитног проблема сингуларних вредности односно система нелинеарних нормалих једначина (Schaffrin и Felus, 2005, Schaffrin, 2006)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{A} & \mathbf{A}^T\mathbf{l} & -\mathbf{Z}_C^T \\ -\mathbf{l}^T\mathbf{A} & -\mathbf{l}^T\mathbf{l} & \left(\mathbf{z}_C - \mathbf{Q}_C\hat{\mathbf{k}}_C\right)^T \\ -\mathbf{Z}_C & \left(\mathbf{z}_C - \mathbf{Q}_C\hat{\mathbf{k}}_C\right) & \hat{\zeta}_{u+1}^2\mathbf{I}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_C \\ -1 \\ \bar{\mathbf{k}}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_C \\ -1 \\ \bar{\mathbf{k}}_C \end{bmatrix}\hat{\zeta}_{u+1}^2, \tag{3.71}$$

где је $\hat{\zeta}_{u+1}^2 = \zeta_{\min} \geq 0$ најмања сингуларна вредност проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$, које се могу решити у итеративном поступку. Усвајањем за почетне вредности ${\hat{\zeta}_{u+1}^2}^{(0)} = 0$ и $\hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}^{(0)} = \mathbf{0}$, систем једначина (3.71) трансформише се у

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} & -\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{Z}_{\mathrm{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}^{(1)} \\ \bar{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{l} \\ \mathbf{z}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix}, \tag{3.72}$$

одакле се може добити иницијално решење $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}^{(1)}$, $\bar{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}^{(1)}$. Итеративни процес се затим наставља по следећем алгоритму (Schaffrin и Felus, 2005, Schaffrin, 2006)

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}^{(i)} := \bar{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}^{(i)} \left(1 + \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}^{(i)\mathrm{T}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}^{(i)}\right)^{-1} \\ &{\hat{\zeta}_{u+1}^2}^{(i)} := \left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}^{(i)} - \mathbf{l}\right)^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}^{(i)} - \mathbf{l}\right) \left(1 + \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}^{(i)\mathrm{T}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}^{(i)}\right)^{-1} \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} & -\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \\ -\mathbf{Z}_{\mathrm{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}^{(i+1)} \\ \bar{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{l} + \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}^{(i)} {\hat{\zeta}_{u+1}^2}^{(i)} \\ \mathbf{z}_{\mathrm{C}} - \mathbf{Q}_{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}^{(i)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.73}$$

За случај фиксних константи услова може се применити се идентичан алгоритам при чему се у изразима (3.71) и (3.73) ставља $\mathbf{Q}_{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$.

Резидуали резултата мерења и коефицијената матрице дизајна могу се онда добити као

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}} &= \hat{\mathbf{k}} = \left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} - \mathbf{l}\right)\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}\right)^{-1}, \\ \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}} &= -\left(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{T}}\right) = -\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} - \mathbf{l}\right)\left(1 + \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}\right)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

За кофакторску матрицу оцена параметара модела $\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}$ и (уразмерених) Lagrange-ових мултипликатора $\bar{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}$ у Schaffrin, (2006) предложена је апроксимација првог реда

$$\mathbf{Q}_{\left[\begin{smallmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} \\ \bar{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} \end{smallmatrix}\right]} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \hat{\zeta}_{u+1}^2 \mathbf{I}_u & \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{C}} & \left(1 + \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}\right)^{-1} \mathbf{Q}_{\mathbf{C}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \hat{\zeta}_{u+1}^2 \mathbf{I}_u & \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{C}} & \left(1 + \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}{}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}\right)^{-1} \mathbf{Q}_{\mathbf{C}} \end{bmatrix}^{-1}, \tag{3.75}$$

где се поново, за случај фиксних константи услова ограничења, може ставити $\mathbf{Q}_{\mathbf{C}} = \mathbf{0}$.

Слично као у (3.34) за кофакторску матрицу параметара модела може се добити

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}} = \left(\hat{\mathbf{A}}^\mathrm{T} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}^\mathrm{T} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ -\hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} \right)^{-1} = \left[\hat{\mathbf{A}}^\mathrm{T} \left(\mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} \otimes \mathbf{I}_n \right)^{-1} \hat{\mathbf{A}} \right]^{-1}, \qquad (3.76)$$

док се за остале кофакторске матрице онда добија

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}} &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}} = \left(\mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} \otimes \mathbf{I}_n \right)^{-1} - \left(\mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} \otimes \mathbf{I}_n \right)^{-1} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{A}}^\mathrm{T} \left(\mathbf{I}_n + \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} \otimes \mathbf{I}_n \right)^{-1}, \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}} &= \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} \otimes \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}} \otimes \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}^\mathrm{T}. \end{aligned} \qquad (3.77)$$

Непомерена оцена референтне варијансе σ_0^2 може се добити из израза

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_\mathrm{C}}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}_\mathrm{C}} + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}_\mathrm{C}}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}_\mathrm{C}} + \hat{\mathbf{k}}_\mathrm{C}^\mathrm{T} \mathbf{Q}_\mathrm{C} \hat{\mathbf{k}}_\mathrm{C}}{n - \mathrm{rk}(\mathbf{A}) + \mathrm{rk}(\mathbf{Z}_\mathrm{C})} = \frac{\hat{\zeta}_{u+1}^2 - \mathbf{v}_{\mathbf{z}_\mathrm{C}}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{k}}_\mathrm{C}}{n - u + q} = \\ &= (n - u + q)^{-1} \left[\left(\mathbf{l}^\mathrm{T} \mathbf{l} - \mathbf{A}^\mathrm{T} \mathbf{l} \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} - \mathbf{z}_\mathrm{C}^\mathrm{T} \overline{\mathbf{k}}_\mathrm{C} \right) + \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} \hat{\zeta} \right] \left(1 + \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} \right)^{-1}. \end{aligned} \qquad (3.78)$$

За случај фиксних константи услова ограничења, односно $\mathbf{Q}_\mathrm{C} = \mathbf{0}$ биће

$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\zeta}_{u+1}^2 (n - u + q)^{-1} = \left(\mathbf{l}^\mathrm{T} \mathbf{l} - \mathbf{A}^\mathrm{T} \mathbf{l} \hat{\mathbf{x}}_\mathrm{C} - \mathbf{z}_\mathrm{C}^\mathrm{T} \overline{\mathbf{k}}_\mathrm{C} \right) (n - u + q)^{-1}. \qquad (3.79)$$

4. ТЕЖИНСКИ МОДЕЛИ ПОТПУНОГ МЕТОДА НАЈМАЊИХ КВАДРАТА

У претходном поглављу описани су модели класичног TLS који подразумева да су чланови проширене матрице модела међусобно независни и имају идентичне расподеле. Класични TLS има јединствено аналитичко решење у генеричком случају ($\zeta_u \neq \zeta_{u+1}$). Насупрот њему, условљени, структуирани и тежински TLS немају овакво решење него се морају решавати нумерички до конвергенција ка локалном минимуму.

Ситуација у којој би чланови проширене матрице модела били међусобно независни и идентично распосређени (хомоскедастичност) није превише честа у геодетским применама. Због тога је од стране више аутора уложен напор у циљу узимања у обзир различитих варијанси као и међусобне корелисаности чланова матрице модела $\mathbf{A}$ као и вектора резултата мерења $\mathbf{l}$ (Schaffrin и Wieser, 2008, Shen и др., 2011, Amiri-Simkooei A. и Jazaeri S., 2012, Mahboub, 2012). У својим истраживањима Fang, (2011) и Fang, (2014) чак урачунава и међусобну корелацију између чланова матрице модела $\mathbf{A}$ као и вектора резултата мерења $\mathbf{l}$. У радовима Snow (2012), Schaffrin и др. (2014) и Schaffrin, (2014) представљени су модели који дозвољавају сингуларну коваријациону матрицу чланова проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$.

Модели који узимају у обзир различите варијансе и међусобну корелацију чланова матрице модела односно кофакторску матрицу $\mathbf{Q_A}$, кофакторску матрицу вектора резултата мерења $\mathbf{Q_l}$ као и евентуалну међусобну корелацију $\mathbf{Q_{Al}}$ у литератури се називају тежински TLS модели (Weighted Total Least Squares, WTLS). Иако су учињени покушаји решавања WTLS модела применом декомпозиције проширене матрице модела на сингуларне вредности (SVD), велика већина решења заснована је на Euler-Lagrange-овом поступку минимизације функције циља.

4.1. Решење засновано на декомпозицији проширене матрице модела на сингуларне вредности (Generalized TLS, GTLS)

Решење засновано на декомпозицији проширене матрице модела $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{l}\end{bmatrix}$ на сингуларне вредности односи се на уопштени (генерализовани) TLS (GTLS) односно налажење решења за преодређени систем линеарних једначина

$$\mathbf{l} + \mathbf{v}_\mathbf{l} = (\mathbf{A} + \mathbf{V}_\mathbf{A})\mathbf{x}, \tag{4.1}$$

уз услов

$$\left\| \mathbf{D}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_2 & \mathbf{v}_\mathbf{l}\end{bmatrix}\mathbf{C} \right\|_\mathrm{F} \to \min, \tag{4.2}$$

где се, за разлику од решења описаном у претходном поглављу, уводи претпоставка (Fang, 2011) да матрице тежина $\mathbf{D} \in \Re^{n \times n}$ и $\mathbf{C} \in \Re^{(u+1)\times(u+1)}$ нису дијагоналне.

Функционални модел (4.1) може се преформулисати као

$$\mathbf{D}\begin{bmatrix}\mathbf{A} + \mathbf{V}_\mathbf{A} & \mathbf{l} + \mathbf{v}_\mathbf{l}\end{bmatrix}\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ -1\end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{4.3}$$

односно

$$\mathbf{D}\begin{bmatrix}\mathbf{A} + \mathbf{V}_\mathbf{A} & \mathbf{l} + \mathbf{v}_\mathbf{l}\end{bmatrix}\mathbf{C}\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{x}c_2 \\ -1\end{bmatrix}c_2^{-1} = \mathbf{0}, \tag{4.4}$$

где се подразумева да је $\mathbf{D}^2$ симетрична позитивно дефинитна матрица, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c_2\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}_1^{-1}$ постоји и $c_2 \neq 0$. $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{D}^2$ је онда такође симетрична позитивно дефинитна матрица.

Систем се може онда решити SVD приступом и решење се може добити (Fang, 2011) декомпозицијом на сингуларне вредности пондерисане проширене матрице модела

$$\mathbf{D}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{l}\end{bmatrix}\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\mathrm{T}, \tag{4.5}$$

одакле следи решење за оцену параметара модела

$$\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} v_{1,u+1} & \cdots & v_{u,u+1} \end{bmatrix} / \left(v_{u+1,u+1} c_2 \right). \tag{4.6}$$

где је $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_{u+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{ik} \end{bmatrix} \in \Re^{(u+1)\times(u+1)}$.

Вектор $\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{x} & -c_2^{-1} \end{bmatrix}$ је сингуларни вектор придружен најмањој сингуларној вредности $\mathbf{C}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix} \mathbf{C}$, дајући следећу једначину сингуларних вектора

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{x} & -c_2^{-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^2 \mathbf{A} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_1 \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^2 \mathbf{l} c_2 \\ c_2 \mathbf{l}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^2 \mathbf{A} \mathbf{C}_1 & c_2 \mathbf{l}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^2 \mathbf{l} c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{x} \\ -c_2^{-1} \end{bmatrix} = \\ &= \zeta_{u+1}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{x} \\ -c_2^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где је ζ_{u+1} најмања сингуларна вредност проширене матрице модела $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix}$. Преуређењем (4.7) добијају се нормалне једначине

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^2 \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \zeta_{u+1}^2 \mathbf{C}_1^{-2} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^2 \mathbf{l} \tag{4.8}$$

TLS оцена параметара модела, заснован на SVD са најопштијом матрицом тежина је

$$\hat{\mathbf{x}} := \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^2 \mathbf{A} - \sigma_{u+1}^2 \mathbf{C}_1^{-2} \hat{\mathbf{x}} \right)^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{D}^2 \mathbf{l}. \tag{4.9}$$

У овом случају матрица тежина за проширени вектор опажања $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix}$ треба да има структуру $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^2 \otimes \mathbf{D}^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & c_2 \mathbf{D}^2 \end{bmatrix}$. У поређењу са GTLS решењем (3.56), матрице $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{D}$ могу бити потпуно попуњене.

4.2. WTLS Решења на основу Euler-Lagrange-овог поступка

Иако GTLS решење (van Huffel и Vandewalle, 1989, Fang, 2011) описано у претходном одељку подразумева најопштије решење, односно потпуно попуњене матрице тежина $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$, оно ипак не преставља "тежинско" решење у правом смислу те речи пошто се "тежине" у GTLS не односе у потпуности на коваријациону матрицу резултата мерења. GTLS се, због тога, још назива и “еквилибрисани TLS” да би се избегла конфузија (Schaffrin и Wieser, 2008). У радовима Markovsky и др., (2006) као и Schuermans и др., (2007), дискутован је приступ који подразумева различите тежине за сваки елеменат проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$ (Element-Wise Weighted Total Least Squares, EWTLS), где је закључено да проблем “нема решење које би се могло представити у затвореној форми и његово израчунавање изискује решавање неконвексног оптимизационог проблема”.

Приступ који се у геодетској традицији сматра у пуном смислу “тежинским” заснива се на варијансама које се односе на сваки елеменат посебно и коваријансама између свака два елемента проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$.

Модел са неконстантном матрицом дизајна и пуном коваријационом матрицом резултата мерења $\mathbf{l}$ као и матрице модела $\mathbf{A}$ (WTLS) може се написати у облику

$$\mathbf{l} + \mathbf{v}_\mathbf{l} = (\mathbf{A} + \mathbf{V}_\mathbf{A})\mathbf{x}, \tag{4.10}$$

са стохастичким особинама резудуала

$$\mathrm{E}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_\mathbf{l} \\ \mathbf{v}_\mathbf{A} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \mathbf{v}_\mathbf{l} \\ \operatorname{vec}\mathbf{V}_\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{D}\begin{bmatrix} \mathbf{v}_\mathbf{l} \\ \mathbf{v}_\mathbf{A} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_\mathbf{l} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_\mathbf{A} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

где су $\mathbf{Q}_\mathbf{l} \in \Re^{n \times n}$ и $\mathbf{Q}_\mathbf{A} \in \Re^{nu \times nu}$ коваријационе матрице вектора резултата мерења $\mathbf{l}$ и матрице модела $\mathbf{A}$, респективно. У хомоскедастичком случају (случају ејднаке тачности и некорелисаности резултата мерења) описаном у претходном поглављу подразумевано је $\mathbf{Q}_\mathbf{l} = \mathbf{I}_n$ и $\mathbf{Q}_\mathbf{A} = \mathbf{I}_{nu \times nu}$.

Коришћењем једнакости $\mathbf{V}_\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x}^\mathrm{T} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{v}_\mathbf{A}$ модел (4.11) може се преформулисати у

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -(\mathbf{x}^\mathrm{T} \otimes \mathbf{I}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_\mathbf{l} \\ \mathbf{v}_\mathbf{A} \end{bmatrix} - \mathbf{l} = \mathbf{0}. \tag{4.12}$$

4.2.1. Решење Schaffrin и Wieser, (2008)

У решењу представљеном у Schaffrin и Wieser, (2008) за кофакторску матрицу $\mathbf{Q}_\mathbf{A}$ претпостављено је да се може представити у (Kronecker–овом) облику

$$\mathbf{Q_A} = \mathbf{Q}_0 \otimes \mathbf{Q_y}, \tag{4.13}$$

где $\mathbf{Q}_0 \in \Re^{u\times u}$ и $\mathbf{Q_y} \in \Re^{n\times n}$. Оваква структура образложена је претпоставком да се разлика прецизности између две колоне матрице модела може изразити скаларним фактором.

WTLS решење за оцену параметара $\hat{\mathbf{x}}$ модела (4.12) израчунава се онда под условом

$$\mathbf{v_l}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q_l}^{-1}\mathbf{v_l} + \mathbf{v_A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Q}_0^{-1} \otimes \mathbf{Q_y}^{-1}\right)\mathbf{v_A} \to \min, \tag{4.14}$$

на основу којег се онда поставља се Lagrange-ова функција циља

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{v_l}, \mathbf{v_A}, \mathbf{k}, \mathbf{x}) = {} & \mathbf{v_l}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q_l}^{-1}\mathbf{v_l} + \mathbf{v_A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Q}_0^{-1} \otimes \mathbf{Q_y}^{-1}\right)\mathbf{v_A} \\ & - 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{Ax} + \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{v_A} - \mathbf{v_l} - \mathbf{l}\right] \to \min,\end{aligned} \tag{4.15}$$

са $\mathbf{k} \in \Re^n$ вектором Lagrange-ових мултипликатора. Неопходни услови минимума функције циља Euler-Lagrange-овог типа онда су

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v_l}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}, \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q_l}^{-1}\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l} + \hat{\mathbf{k}} := \mathbf{0}, \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v_A}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}, \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}}} & = \mathbf{Q_A}^{-1}\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A} - \left(\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{k}} = \\ & = \left(\mathbf{Q}_0^{-1} \otimes \mathbf{Q_y}^{-1}\right)\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A} - \left(\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0},\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{k}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}, \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{4.18}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}, \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{x}}} = -\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{V}}_\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}. \tag{4.19}$$

Једначине (4.16)–(4.19) представљају неопходне услове минимума функције циља Ω. Довољни услови минимума су испуњени пошто је Hessian матрица других извода функције циља по векторима резидуала

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\begin{bmatrix}\mathbf{v_l}\\ \mathbf{v_A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v_l}^{\mathrm{T}} & \mathbf{v_A}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q_l}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q_A}^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q_l}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_0^{-1}\otimes\mathbf{Q_y}^{-1}\end{bmatrix}, \tag{4.20}$$

позитивно дефинитна.

Из (4.16) и (4.17) могу се добити изрази за оцене вектора поправака $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}$ и $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}$

$$\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}=-\mathbf{Q_l}\hat{\mathbf{k}} \quad \text{и} \tag{4.21}$$

$$\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}=\mathbf{Q_A}\left(\hat{\mathbf{x}}\otimes\mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{k}}=\left(\mathbf{Q}_0\otimes\mathbf{Q_y}\right)\left(\hat{\mathbf{x}}\otimes\mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{k}}=\left(\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}\otimes\mathbf{Q_y}\right)\hat{\mathbf{k}}, \tag{4.22}$$

односно,

$$\hat{\mathbf{V}}_\mathbf{A}=\mathbf{Q_y}\,\hat{\mathbf{k}}\left(\mathbf{Q}_0\,\hat{\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4.23}$$

Када се изрази (4.21), (4.22) уврсте у (4.18) добија се релација

$$\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}=-\left[\mathbf{Q_l}+\left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}\otimes\mathbf{Q_y}\right)\right]\hat{\mathbf{k}}, \tag{4.24}$$

односно

$$\hat{\mathbf{k}}=-\left[\mathbf{Q_l}+\left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}\right)\mathbf{Q_y}\right]^{-1}\left(\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right). \tag{4.25}$$

Уврштавањем (4.25) у (4.21) и (4.23) сада се добија

$$\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}=\mathbf{Q_l}\left[\mathbf{Q_l}+\left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}\right)\mathbf{Q_y}\right]^{-1}\left(\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right) \quad \text{и} \tag{4.26}$$

$$\hat{\mathbf{V}}_\mathbf{A}=-\mathbf{Q_y}\left[\mathbf{Q_l}+\left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}\right)\mathbf{Q_y}\right]^{-1}\left(\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right)\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0. \tag{4.27}$$

На основу израза (4.19), коришћењем (4.25) и (4.27) може се онда писати

$$-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}=\hat{\mathbf{V}}_\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Q_l}+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}\mathbf{Q_y}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right)=\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}\hat{\zeta}_{u+1}^2, \tag{4.28}$$

где је скалар

$$\hat{\zeta}_{u+1}^2:=\left(\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Q_l}+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}\mathbf{Q_y}\right)^{-1}\mathbf{Q_y}\left(\mathbf{Q_l}+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}\mathbf{Q_y}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{l}\right). \tag{4.29}$$

На основу (4.28), (4.29) следи

$$\hat{\mathbf{x}}=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Q_l}+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}\mathbf{Q_y}\right)^{-1}\mathbf{A}-\hat{\zeta}_{u+1}^2\mathbf{Q}_0\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Q_l}+\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}\mathbf{Q_y}\right)^{-1}\mathbf{l}. \tag{4.30}$$

Оцена параметара модела $\hat{\mathbf{x}}$ може се сада извршити формирањем итеративног алгоритма:

1) $\hat{\zeta}_{u+1}^{2\ (0)} = 0$, $\quad \hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{l}$;

$$\hat{\mathbf{x}}^{(1)} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{x}}^{(0)\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\,\hat{\mathbf{x}}^{(0)}\,\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\right)^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{x}}^{(0)\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\hat{\mathbf{x}}^{(0)}\,\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\right)^{-1}\mathbf{l};$$

2) $\hat{\mathbf{k}}^{(i)} = -\left[\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{x}}^{(i)\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\,\hat{\mathbf{x}}^{(i)}\,\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\right]^{-1}\left(\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}^{(i)} - \mathbf{l}\right)$;

$$\hat{\zeta}_{u+1}^{2\ (i)} = \hat{\mathbf{k}}^{(i)\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{k}}^{(i)}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{x}}^{(i)\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\,\hat{\mathbf{x}}^{(i)}\,\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\right)^{-1}\mathbf{A} - \hat{\zeta}_{u+1}^{2\ (i)}\mathbf{Q}_0\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{x}}^{(i)\mathrm{T}}\mathbf{Q}_0\,\hat{\mathbf{x}}^{(i)}\,\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\right)^{-1}\mathbf{l}$$

3) Повратак на корак 2), све док се не испуни неједнакост $\left\|\hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} - \hat{\mathbf{x}}^{(i)}\right\| < \varepsilon$, где је ε усвојени критеријум конвергенције.

Оцена вектора поправака резултата мерења $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}$ као и матрице поправака за чланове матрице модела $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}$, по завршетку итеративног процеса могу се добити на основу (4.26)–(4.27).

4.2.2. Решење Shen и др. (2011)

Решење предложено у Shen и др. (2011) полази од облика функционалног модела (4.10) линеаризованог у позицији вредности параметара модела $\mathbf{x}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}^{(i)} - \underset{\sim}{\mathbf{0}}$ и мерених величина $\mathbf{l}^{(i)} = \hat{\mathbf{l}}^{(i)} - \underset{\sim}{\mathbf{0}}$ у i-тој итерацији, односно $\mathbf{A}^{(i)} = \left.\dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^{\mathrm{T}}}\right|_{\mathbf{l}^{(i)},\,\mathbf{x}^{(i)}}$

$$\mathbf{l} + \mathbf{v}_{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{A}^{(i)}\delta\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{V}_{\mathbf{A}}\mathbf{x}^{(i)}, \tag{4.31}$$

односно, тражи се решење линеарног EIV модела (4.31) уместо нелинеарног облика (4.10). Ако се модел овако представи, онда Lagrange-ова функција циља има облик

$$\begin{aligned}\Omega(\mathbf{v}_{\mathbf{l}}, \mathbf{v}_{\mathbf{A}}, \mathbf{k}, \mathbf{x}) = {} & \mathbf{v}_{\mathbf{l}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{v}_{\mathbf{l}} + \mathbf{v}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}^{-1}\mathbf{v}_{\mathbf{A}} \\ & - 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{A}^{(i)}\delta\mathbf{x} + \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{v}_{\mathbf{A}} - \mathbf{v}_{\mathbf{l}} - \mathbf{l}\right] \to \min.\end{aligned} \tag{4.32}$$

Неопходни услови минимума функције циља Euler-Lagrange-овог типа имају онда нешто измењен облик у поређењу са изразима (4.16)–(4.19), односно

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{v_l}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l},\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A},\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1}\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l} + \hat{\mathbf{k}} := \mathbf{0}\,, \tag{4.33}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{v_A}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l},\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A},\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{Q}_\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A} - \left(\hat{\mathbf{x}}^{(i)}\otimes\mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}\,, \tag{4.34}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{k}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l},\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A},\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{A}^{(i)}\delta\mathbf{x} - \left(\hat{\mathbf{x}}^{(i)\mathrm{T}}\otimes\mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A} = \mathbf{0}\,, \tag{4.35}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\,\delta\mathbf{x}}\bigg|_{\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l},\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A},\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{x}}} = -\mathbf{A}^{(i)\mathrm{T}}\,\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}\,, \tag{4.36}$$

док је довољан услов дефинисан изразом (4.20).

Изрази за оцене вектора поправака $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}$ и $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}$ имају онда облик (4.21)–(4.22), при чему се не захтева Kronecker–ов облик коваријационе матрице $\mathbf{Q}_\mathbf{A}$ (4.13), а такође у изразу (4.22) фигурише вектор параметара модела $\mathbf{x}^{(i)}$ из i-те итерације.

У поређењу са (4.25) израз за вектор Lagrange-ових мултипликатора $\hat{\mathbf{k}}$ сада гласи

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{k}} &= -\left[\mathbf{Q}_\mathbf{l} + \left(\mathbf{x}^{(i)^\mathrm{T}}\otimes\mathbf{I}_n\right)\mathbf{Q}_\mathbf{A}\left(\mathbf{x}^{(i)}\otimes\mathbf{I}_n\right)\right]^{-1}\left(\mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{A}^{(i)}\,\delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}\right) = \\ &= -\mathbf{Q}_\mathbf{y}^{(i)-1}\left(\mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{A}^{(i)}\,\delta\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}\right).\end{aligned} \tag{4.37}$$

На основу израза (4.36)–(4.37) као и (4.21)–(4.22) може се формирати итеративни процес за оцену параметара модела $\hat{\mathbf{x}}$ као и вектора поправака $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}$ и $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}$:

1) $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1}\,\mathbf{l}\,;$

2) $\mathbf{Q}_\mathbf{y}^{(i)} = \mathbf{Q}_\mathbf{l} + \left(\mathbf{x}^{(i)^\mathrm{T}}\otimes\mathbf{I}_n\right)\mathbf{Q}_\mathbf{A}\left(\mathbf{x}^{(i)}\otimes\mathbf{I}_n\right)$

3) $\delta\hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} = \left(\mathbf{A}^{(i)\mathrm{T}}\mathbf{Q}_\mathbf{y}^{(i)-1}\mathbf{A}^{(i)}\right)^{-1}\mathbf{A}^{(i)\mathrm{T}}\mathbf{Q}_\mathbf{y}^{(i)-1}\left(\mathbf{l} - \mathbf{A}^{(i)}\mathbf{x}^{(i)}\right);$

4) $\hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)} + \delta\hat{\mathbf{x}}^{(i)} =$

$$= \left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{y}^{(i)-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{y}^{(i)-1}\left(\mathbf{l} + \hat{\mathbf{V}}_\mathbf{A}^{(i)}\mathbf{x}^{(i)}\right);$$

5) $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}^{(i+1)} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} \mathbf{Q}_{\mathbf{y}}^{-1(i)} \left(\mathbf{A}\, \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{A}^{(i)}\, \delta\hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} - \mathbf{l} \right);$

$$\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{(i+1)} = -\mathbf{Q}_{\mathbf{A}} \left(\mathbf{x}^{(i)} \otimes \mathbf{I}_n \right) \mathbf{Q}_{\mathbf{y}}^{-1(i)} \left(\mathbf{A}\, \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{A}^{(i)}\, \delta\hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} - \mathbf{l} \right);$$

$$\hat{\mathbf{l}}^{(i+1)} = \mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}^{(i+1)}; \quad \hat{\mathbf{A}}^{(i+1)} = \mathbf{A} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{(i+1)}$$

6) Завршетак итеративног процеса ако је $\left\| \delta\hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} \right\| < \varepsilon$, где је ε усвојени критеријум конвергенције иначе $\mathbf{x}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} - \underset{\sim}{\mathbf{0}}$ и повратак на корак 2).

4.2.3. Решење Amiri-Simkooei и Jazaeri (2012)

У предлогу приказаном у Amiri-Simkooei и Jazaeri, (2012) тежи се аналогији са класичним Gauss-Markov-љевим моделом (GMM).

Полазни функционални и стохастички модел, па према томе и неопходни услови минимума функције циља, идентични су као у Schaffrin и Wieser, (2008), осим што се не претпоставља Kronecker–ов облик коваријационе матрице $\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}$.

Када се (4.21)–(4.22) уврсте у (4.18) може се такође добити

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}} &= -\left[\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} + \left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n \right) \mathbf{Q}_{\mathbf{A}} \left(\mathbf{x} \otimes \mathbf{I}_n \right) \right]^{-1} \left(\mathbf{A}\, \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \right) = \\ &= -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} \left(\mathbf{A}\, \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \right), \end{aligned} \tag{4.38}$$

Заменом (4.39) у (4.23) и преуређењем може се онда добити

$$\left(\mathbf{A} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} \left(\mathbf{A} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}} \right) \hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{A} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}} \right)^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} \left(\mathbf{l} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} \right) \tag{4.39}$$

односно

$$\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}\, \hat{\mathbf{l}}, \tag{4.40}$$

што представља облик аналоган нормалним једначинама Gauss-Markov-љевог модела.

Сада се може формирати итеративни процес:

1) $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1} \mathbf{l}$;

2) $i = 0$;

3) $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}^{(i)} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^{(i)} - \mathbf{l}$,

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}^{(i)} = \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} + \left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}(i)} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}\left(\mathbf{x}^{(i)} \otimes \mathbf{I}_n\right),$$

$$\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{(i)} = vec^{-1}\left[-\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}\left(\hat{\mathbf{x}}^{(i)} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}^{-1}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}^{(i)}\right],$$

$$\hat{\mathbf{A}}^{(i)} = \mathbf{A} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{(i)}, \quad \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l}^{(i)} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{(i)}\hat{\mathbf{x}}^{(i)},$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} = \left(\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}(i)}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}}^{-1(i)}\hat{\mathbf{A}}^{(i)}\right)^{-1}\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}(i)}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\hat{\mathbf{l}}^{(i)};$$

4) $i = i+1$ и повратак на корак 3), све док се не испуни неједнакост $\left\|\hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} - \hat{\mathbf{x}}^{(i)}\right\| < \varepsilon$, где је ε усвојени критеријум конвергенције.

4.2.4. Решење Mahboub (2012)

Решење проказано у Mahboub, (2012) има слична полазишта као и претходно. Карактеристично за овај приступ је преуређење услова (4.19), имајући у виду правила (3.17), у облик

$$-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{I}_u\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} = \mathrm{vec}\left(\mathbf{I}_u\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}\right) = \left(\mathbf{I}_u \otimes \hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}\right)\mathrm{vec}\left(\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}\right), \tag{4.41}$$

односно када се уврсти (4.22)

$$-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} = \left(\mathbf{I}_u \otimes \hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}\left(\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\hat{\mathbf{k}}. \tag{4.42}$$

На основу (4.38) и (4.42), увођењем ознаке

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{l}}} = \left[\mathbf{Q}_{\mathbf{l}} + \left(\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}\left(\mathbf{x} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right]^{-1}, \tag{4.43}$$

добија се

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_1\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}\right) = -\left(\mathbf{I}_u \otimes \hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}\left(\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{R}_1\left(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}\right). \tag{4.44}$$

Сада увођењем ознаке

$$\mathbf{R}_2 = \left(\mathbf{I}_u \otimes \hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}\left(\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{R}_1, \tag{4.45}$$

може се добити израз за оцену вектора параметара модела $\hat{\mathbf{x}}$

$$\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_1\mathbf{A} + \mathbf{R}_2\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2\right)\mathbf{l}$$

На основу (4.21)–(4.22), (4.38) и (4.43)–(4.45) формира се итеративни алгоритам:

1) $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{l}$;

2) $\mathbf{R}_1 = \left[\mathbf{Q}_\mathbf{l} + \left(\hat{\mathbf{x}}^{(i-1)\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{Q}_\mathbf{A}\left(\mathbf{x}^{(i-1)} \otimes \mathbf{I}_n\right)\right]^{-1}$,

$\hat{\mathbf{k}}^{(i)} = -\mathbf{R}_1^{(i)}\left(\mathbf{A}\,\hat{\mathbf{x}}^{(i-1)} - \mathbf{l}\right)$,

$\mathbf{R}_2^{(i)} = \left(\mathbf{I}_u \otimes \hat{\mathbf{k}}^{(i)\mathrm{T}}\right)\mathbf{Q}_\mathbf{A}\left(\hat{\mathbf{x}}^{(i-1)} \otimes \mathbf{I}_n\right)\mathbf{R}_1^{(i)}$

$\hat{\mathbf{x}}^{(i)} = \left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{R}_1^{(i)}\mathbf{A} + \mathbf{R}_2^{(i)}\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{R}_1^{(i)} + \mathbf{R}_2^{(i)}\right)\mathbf{l}$

3) Понављање корака 2) док се не задовољи критеријум конвергенције $\left\|\hat{\mathbf{x}}^{(i+1)} - \hat{\mathbf{x}}^{(i)}\right\| < \varepsilon$.

У Mahboub, (2012) показано је и да се структуирани TLS проблем (STLS) може решти коришћењем тежинског TLS модела (WTLS) ако се коректно одреде чланови коваријационе матрице модела $\mathbf{Q}_\mathbf{A}$. Наиме:

1. Ако се елеменат матрице $\mathbf{A}$ понавља, између понављајућих елемената коефицијент корелације мора бити 1, односно коваријанса између ова два елемената једнака је њиховој варијанси.
2. Ако се елеменат матрице $\mathbf{A}$ понавља са негативним предзнаком, између понављајућих елемената коефицијент корелације мора бити -1, односно коваријанса између ова два елемената једнака је негативној вредности њихове варијансе.
3. Ако је елеменат матрице $\mathbf{A}$ фиксан, његова варијанса једнака је 0.
4. За два различита елемента користи се њихова израчуната коваријанса, ако су корелисани, иначе је коваријанса једнака 0.
5. Чак и у хомоскедастичком случају некорелисаних мерења исте тачностиморају се применити наведена правила.

4.2.5. Оцена тачности

Без обзира на примењени алгоритам, оцена вредности функције циља $\hat{\Omega}$ може се добити на основу (4.21) и (4.22)

$$\hat{\Omega} = \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1}\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{l} + \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A}^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{A} = \left(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\right)^\mathrm{T}\mathbf{Q}_\mathbf{l}^{-1}\left(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\right) = \hat{\mathbf{k}}^\mathrm{T}\left(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}\right), \tag{4.46}$$

а оцена референтне варијансе, као

$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\Omega}(n-u)^{-1}. \tag{4.47}$$

Кофакторска матрица за оцену параметара модела $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ и вектора Lagrange-ових мултипликатора $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}}$ могу се добити на основу (4.11)–(4.12), аналогно изразима (2.37) и (2.44) нелинеарног Gauss-Helmert-овог модела, па се може писати

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \left(\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ -\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \hat{\mathbf{A}} \right)^{-1}. \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}} &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ -\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{A}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ -\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \right). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Кофакторске матрице поправака резултата мерења $\mathbf{l}$ и чланова матрице модела $\mathbf{A}$ могу се онда добити на основу (4.41)–(4.42) применом закона о распростирању коваријанси,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{l}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}} \mathbf{Q}_{\mathbf{l}}, \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{A}} (\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}} (\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n)^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{A}}, \end{aligned} \tag{4.50}$$

4.3. EIV модел са корелацијом између елемената матрице модела $\mathbf{A}$ и вектора резултата мерења $\mathbf{l}$

EIV модел са корелацијом између елемената матрице модела $\mathbf{A}$ и вектора резултата мерења $\mathbf{l}$ може се изразити у облику (4.10), односно (4.12).

Уколико се желе урачунати стохастичке особине свих грешака, опажања се морају написати као проширени вектор,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\mathbf{A}) \\ \mathbf{l} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\mathbf{V}_{\mathbf{A}}) \\ \mathbf{v}_{\mathbf{l}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\mathbf{A}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{l}} \end{bmatrix}. \tag{4.51}$$

Према томе, стохастичкие особине поправака могу се карактерисати проширеном коваријационом (дисперзионом) матрицом, односно

$$D(\mathbf{y}) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_\mathbf{y} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_\mathbf{AA} & \mathbf{Q}_\mathbf{Al} \\ \mathbf{Q}_\mathbf{lA} & \mathbf{Q}_\mathbf{ll} \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}, \tag{4.52}$$

где је

$$\mathbf{Q}_\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \cdots \\ \mathbf{Q}_k \\ \cdots \\ \mathbf{Q}_{u+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \cdots & \mathbf{Q}_{1j} & \cdots & \mathbf{Q}_{1(u+1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{Q}_{k1} & \cdots & \mathbf{Q}_{kj} & \cdots & \mathbf{Q}_{k(u+1)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{Q}_{(u+1)1} & \cdots & \mathbf{Q}_{(u+1)j} & \cdots & \mathbf{Q}_{(u+1)(u+1)} \end{bmatrix}. \tag{4.53}$$

Матрице $\mathbf{Q}_k \in \Re^{n \times n(u+1)}$ репрезентују варијансе и коваријансе између елемената k-те колоне проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$, а елементи $\mathbf{Q}_{kj} \in \Re^{n \times n}$ кореспондирају коваријационим матрицама k–те колоне ($k = j$) или коваријационе матрице између k–те и j–те колоне проширене матрицемодела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$. σ_0^2 је непозната компонета варијансе. $\mathbf{y}$ је проширени вектор опажања који укључује елементе матрице модела $\mathbf{A}$ и вектор резултата мерења $\mathbf{l}$. $\mathbf{v}$ је кореспондентни вектор поправака проширеног вектора опажања. $\mathbf{Q}_\mathbf{y}$ и $\mathbf{P}$ су симетрична и позитивно дефинитна кофакторске матрица и матрица тежина од $\mathbf{y}$, респективно. $\mathbf{Q}_\mathbf{A}$ је кофакторска матрица за $\mathbf{v}_\mathbf{A}$ а кофакторске матрице $\mathbf{Q}_\mathbf{Al}$ и $\mathbf{Q}_\mathbf{lA}$ репрезентују корелације између $\mathbf{v}_\mathbf{A}$ и $\mathbf{v}_\mathbf{l}$.

За налажење решења потпуно тежинског TLS, према традиционалном Euler-Lagrange-овом приступу тражи се минимум функција циља

$$\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{k}, \mathbf{x}) = \mathbf{v}^\mathrm{T} \mathbf{P} \mathbf{v} - 2\mathbf{k}^\mathrm{T} [\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l} + \mathbf{V}_\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{v}_\mathbf{l}], \tag{4.54}$$

где је $\mathbf{k}$ вектор Lagrange-ових мултипликатора.

Диференцирањем функције циља по $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{k}$ добијају се неопходни услови минимума функције циља

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{k}}} = -\mathbf{A}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_\mathbf{A}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}, \tag{4.55}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} \bigg|_{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{k}}} = \mathbf{Q}_\mathbf{y}^{-1} \hat{\mathbf{v}} - [\hat{\mathbf{x}}^\mathrm{T} \otimes \mathbf{I}_n \quad -\mathbf{I}_n]^\mathrm{T} \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{Q}_\mathbf{y}^{-1} \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{B}}^\mathrm{T} \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}, \tag{4.56}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{k}}\bigg|_{\hat{\mathbf{x}},\,\hat{\mathbf{v}},\,\hat{\mathbf{k}}} = \mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}, \tag{4.57}$$

где је $\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n & -\mathbf{I}_n\end{bmatrix}$.

Довољан услов минимума функције циља је ипуњен за вектор резидуала пошто је Hessian матрица других извода функције циља по проширеном вектору резидуала $\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{v}\mathbf{v}^{\mathrm{T}}} = \mathrm{Q}_{\mathrm{y}}^{-1}$**,** позитивно дефинитна матрица.

Из (4.56) може се извести оцена вектора резидуала $\hat{\mathbf{v}}$,

$$\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}} \\ \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}\end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}, \tag{4.58}$$

а затим затим заменом у (4.57) оцена вектора Lagrange-ових мултипликатора $\hat{\mathbf{k}}$,

$$\hat{\mathbf{k}} = \left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \tag{4.59}$$

Заменом вектора $\hat{\mathbf{k}}$ у (4.58) добија се

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix}\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}} \\ \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}\end{bmatrix} &= \mathbf{Q}_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \begin{bmatrix}[\mathbf{Q}_{\mathbf{AA}} \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{Al}}]\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \\ [\mathbf{Q}_{\mathbf{lA}} \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{ll}}]\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{4.60}$$

Коришћењем правила (3.17) на производ $\mathbf{V}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}}$ може се писати

$$\mathbf{V}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} = \mathrm{vec}\left(\hat{\mathbf{k}}\,\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}\,\mathbf{I}_u\right) = \left(\mathbf{I}_u \otimes \hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}\right)\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}\,. \tag{4.61}$$

На основу (4.55), (4.59) и (4.61), онда се добија

$$-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} = \left(\mathbf{I}_u \otimes \hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}\right)\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}} = \mathbf{V}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}), \tag{4.62}$$

одакле следи један облик израза за оцену вектора параметара модела $\hat{\mathbf{x}}$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} &= \left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{A}\right]^{-1}\left[\mathbf{V}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{l}\right] = \\ &= \left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{B}}^{T}\right)^{-1}\mathbf{A}\right]^{-1}\left[\left(\mathbf{I}_u \otimes \hat{\mathbf{k}}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{v}_{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathrm{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{l}\right] =\end{aligned} \tag{4.63}$$

$$= \left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{A}\right]^{-1}\left\{\left[\mathbf{I}_{u}\otimes(\mathbf{l}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right]\mathbf{v}_{\mathbf{A}}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{l}\right\}.$$

На основу (4.62) могу се написати нелинеарне нормалне једначине

$$\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\right)\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\right)\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{l}, \tag{4.64}$$

што доводи до другачијег израза за оцену вектора параметара модела $\hat{\mathbf{x}}$ облика

$$\hat{\mathbf{x}}=\left[\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\right)\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}+\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}\right)\right]^{-1}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\right)\left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{l}. \tag{4.65}$$

За израчунавање решења потребно је формирати итеративни алгоритам (Fang, 2011, Snow, 2012):

1) $\hat{\mathbf{x}}^{(0)}=\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{l}}^{-1}\mathbf{l}$;

2) $\hat{\mathbf{B}}^{i+1}=\left[\hat{\mathbf{x}}^{i\,\mathrm{T}}\otimes\mathbf{I}_{n} \quad -\mathbf{I}_{n}\right]$

$$\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}^{i+1}=\left[\mathbf{Q}_{\mathbf{AA}} \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{Al}}\right]\left\{\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{x}}^{i}\\ -1\end{bmatrix}\otimes\left[\left(\hat{\mathbf{B}}^{i+1}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\mathbf{B}^{i+1\,\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathbf{l}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}^{i}\right)\right]\right\}$$

$$\mathbf{v}^{i+1}=\hat{\mathbf{v}}^{i+1}-\underset{\sim}{\mathbf{0}} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{V}_{\mathbf{A}}^{i+1}=\mathrm{vec}_{n\times u}^{-1}\,\mathbf{v}_{\mathbf{A}}^{i+1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^{i+1}=\left(\left(\mathbf{A}+\mathbf{V}_{\mathbf{A}}^{i+1}\right)^{T}\left(\mathbf{B}^{i+1}\mathbf{Q}_{\mathbf{yy}}\left(\mathbf{B}^{i+1}\right)^{T}\right)^{-1}\mathbf{A}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}+\mathbf{V}_{\mathbf{A}}^{i+1}\right)^{T}\left(\mathbf{B}^{i+1}\mathbf{Q}_{\mathbf{yy}}\left(\mathbf{B}^{i+1}\right)^{T}\right)^{-1}\mathbf{l}$$

$$\mathbf{x}^{i+1}=\hat{\mathbf{x}}^{i+1}-\underset{\sim}{\mathbf{0}}$$

3) Ако је $\left\|\mathbf{x}^{i+1}-\mathbf{x}^{i}\right\|<\varepsilon$, $\hat{\mathbf{x}}:=\mathbf{x}^{i+1}$ иначе понављање корака 2).

Оцена вредности функције циља $\hat{\Omega}$ може се добити на основу

$$\hat{\Omega}=\hat{\mathbf{v}}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}^{-1}\hat{\mathbf{v}}, \tag{4.66}$$

а оцена референтне варијансе према изразу (4.47).

Кофакторске матрице за оцену параметара модела $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ и вектора Lagrange-ових мултипликатора $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}}$ могу се добити аналогно изразима (4.48) и (4.49)

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}=\left(\hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\left(\left[\mathbf{I}_{n} \quad -\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\otimes\mathbf{I}_{n}\right]\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{n}\\ -\hat{\mathbf{x}}\otimes\mathbf{I}_{n}\end{bmatrix}\right)^{-1}\hat{\mathbf{A}}\right)^{-1}, \tag{4.67}$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{y}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ -\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left(\mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{A}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \hat{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & -\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{y}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ -\hat{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \right)^{-1} \right), \tag{4.68}$$

док се за кофакторску матрицу поправака, применом закона о распростирању коваријанси на (4.58) добија

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}}} & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}} \mathbf{v}_{\mathbf{A}}} & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{l}}} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{k}}} \hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{y}} \,. \tag{4.69}$$

4.4. WTLS проблем са условима ограничења

Дефиниција нетежинског TLS проблема са условима приказана је у Поглављу 3. WTLS проблем са (константним) условима ограничења може се дефинисати као

$$\begin{aligned} \mathbf{l} + \mathbf{v}_{\mathbf{l}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{V}_{\mathbf{A}})\mathbf{x} \\ \mathbf{z}_{\mathrm{C}} &= \mathbf{Z}_{\mathrm{C}} \mathbf{x}_{\mathrm{C}} , \end{aligned} \tag{4.70}$$

са стохастичким моделом

$$\mathrm{D}(\mathbf{y}) = \mathrm{D}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{vec}(\mathbf{A}) \\ \mathbf{l} \end{bmatrix} \right) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{y}} \,. \tag{4.71}$$

За налажење решења потпуно тежинског TLS са условима ограничења, према традиционалном Euler-Lagrange-овом приступу тражи се минимум функција циља

$$\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_{\mathrm{C}}, \mathbf{x}_{\mathrm{C}}) = \mathbf{v}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q}_{\mathbf{y}}^{-1} \mathbf{v}_{\mathrm{C}} + 2\mathbf{k}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{\mathrm{C}} - \mathbf{V}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}} \mathbf{x}_{\mathrm{C}} + \mathbf{v}_{\mathbf{l}_{\mathrm{C}}} \right) - 2\mathbf{k}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{z}_{\mathrm{C}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{C}} \mathbf{x}_{\mathrm{C}} \right). \tag{4.72}$$

Кореспондетни неопходни услови за стационарну тачку су тада

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}, \hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{k}} - \mathbf{V}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} = \mathbf{0} \,, \tag{4.73}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} \bigg|_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}, \hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}} = \mathbf{Q}_{\mathrm{y}}^{-1} \hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}} - \hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0} \,, \tag{4.74}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \bigg|_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}, \hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}}, \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}} = \mathbf{l} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} - \hat{\mathbf{B}} \hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}} = \mathbf{0} \,, \tag{4.75}$$

$$
\left.\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial\mathbf{k}_{\mathrm{C}}}\right|_{\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}},\hat{\mathbf{v}}_{\mathrm{C}},\hat{\mathbf{k}},\hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}}} = \mathbf{z}_{\mathrm{C}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} = \mathbf{0}, \tag{4.76}
$$

где је $\hat{\mathbf{B}} = \left[\hat{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{I}_n \quad -\mathbf{I}_n\right]$.

Вектор оцењених мултипликатора $\hat{\mathbf{k}}$ у добија се из

$$
\hat{\mathbf{k}} = \left(\hat{\mathbf{B}}\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}), \tag{4.77}
$$

што је исто као у неусловљеном случају. Уврштавањем мултипликатора $\hat{\mathbf{k}}$, у (4.73) нормалне једначине се добијају као

$$
\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}} & \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} \\ \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{z}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix}, \tag{4.78}
$$

где је $\hat{\mathbf{N}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}^{\mathrm{T}}\right)\left(\hat{\mathbf{B}}\,\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\,\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathbf{A} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}\right)$ и $\hat{\mathbf{n}} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}^{\mathrm{T}}\right)\left(\hat{\mathbf{B}}\,\mathbf{Q}_{\mathbf{y}}\,\hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathbf{l} + \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{A}_{\mathrm{C}}}\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}}\right)$.

Затим, уз помоћ матричних једначина (Koch, 1999), може се изразити оцењени вектор параметара за потпуно тежински WTLS са условима ограничења као

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} \\ \hat{\mathbf{k}}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}} & \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{Z}_{\mathrm{C}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{z}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}^{-1} + \hat{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\left(-\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{N}}^{-1} & -\hat{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\left(-\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \\ -\left(-\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{N}}^{-1} & \left(-\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{z}_{\mathrm{C}} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.79}
$$

$$
\Rightarrow \hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} := \hat{\mathbf{N}}^{-1}\left(\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathbf{z}_{\mathrm{C}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{N}}^{-1}\right)\hat{\mathbf{n}}\right).
$$

или алтернативно као

$$
\hat{\mathbf{x}}_{\mathrm{C}} := \hat{\mathbf{x}}\,\hat{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{N}}^{-1}\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}_{\mathrm{C}}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{z}_{\mathrm{C}}\right), \tag{4.80}
$$

где је $\hat{\mathbf{x}}$ решење неусловљеног потпуно тежинског WTLS.

На основу (4.79) или (4.80) решење за линеарни WTLS са условима ограничења може се наћи итеративним поступком.

5. НУМЕРИЧКИ ПРИМЕРИ ПРИМЕНЕ TLS У РЕШАВАЊУ ГЕОДЕТСКИХ ПРОБЛЕМА

У овом поглављу приказани су неки типични примери TLS у решавању геодетских задатака. Циљ ових примера је да се покаже применљивост приказаних решења као и да се изврши упоређење са постојећим поступцима.

На примеру добро познатог проблема ортогоналне регресије приказана је примена потпуно тежинског TLS, односно примена пуне коваријационе матрице проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{l}]$.

Решавање проблема оцене параметара емпиријске (датумске) трансформације сличности применом TLS када су познате стандардне девијације координата, како у изворном тако и у циљном координатном систему, приказано је на примеру дводимензионалне (датумске) трансформације сличности. Извршено је упоређење са уобичајеним поступцима заснованим на Gauss-Markov-љевом моделу.

Проблем фитовања површи на скуп тачака са одређеним (измереним) кординатама показан је на примеру фитовања површи цилиндра. Скуп тачака одређен је терестричким ласерским скенирањем и нису биле расположиви подаци о тачности позиција тачака, тако да је примењен класични (нетежински) TLS поступак.

У свим приказаним примерима оцена параметара модела и оцена тачности добијених резултата вршена је на два начина:

1) применом одговарајућег TLS алгоритма и
2) применом итеративног Gauss-Helmert-овог поступка описаног у Поглављу 2, који је послужио за тестирање добијених резултата.

За све израчунате примере постигнута је потпуна сагласност резултата добијених на оба наведена начина, како за оцене параметара модела и поправака резултата мерења, тако и за кореспондентне кофакторске матрице.

За случај ортогоналне регресије и дводимензионалне датумске (емпиријске) трансформације координата, такође су приказана и упоређена решења добијена Gaus-Markov-љевим моделом.

5.1. Ортогонална регресија

Пример ортогоналне регресије односи се на одређивање правости (припадности скупа карактеристичних тачака правој линији) кранске стазе (шине) у термоелектрани “Никола Тесла А”. Кранска стаза дискретизована је са 57 карактеристичних тачака (Слика 5.1).

За карактеристичне тачке објекта (шине) одређене су хоризонталне позиције (координате) применом терестричких геодетских техника и изравнањем по методи најмањих квадрата. На располагању су биле оцене координата (y, x) за n = 57 карактеристичних тачака приказаних на Слици 1, као и њихова (пуна) кофакторска матрица $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ димензија $2n \times 2n = 114 \times 114$.

Анализирани су случајеви занемаривања кофакторске матрице $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ као и њеног (делимичног или потпуног) урачунавања у поступак оцене параметара регресионе (изравнавајуће) праве. За оба случаја израчуната су три решења применом Gauss-Markov-љевог модела као и TLS односно WTLS решење. Решења која анализирана могу се описати на следећи начин:

1) *Решење када се координата* x *усваја као независно променљива величина (регресор) а координата* y *као зависно променљива (одговор), (LS_y, WLS_y).*

   Функционални модел изравнавајуће праве гласи

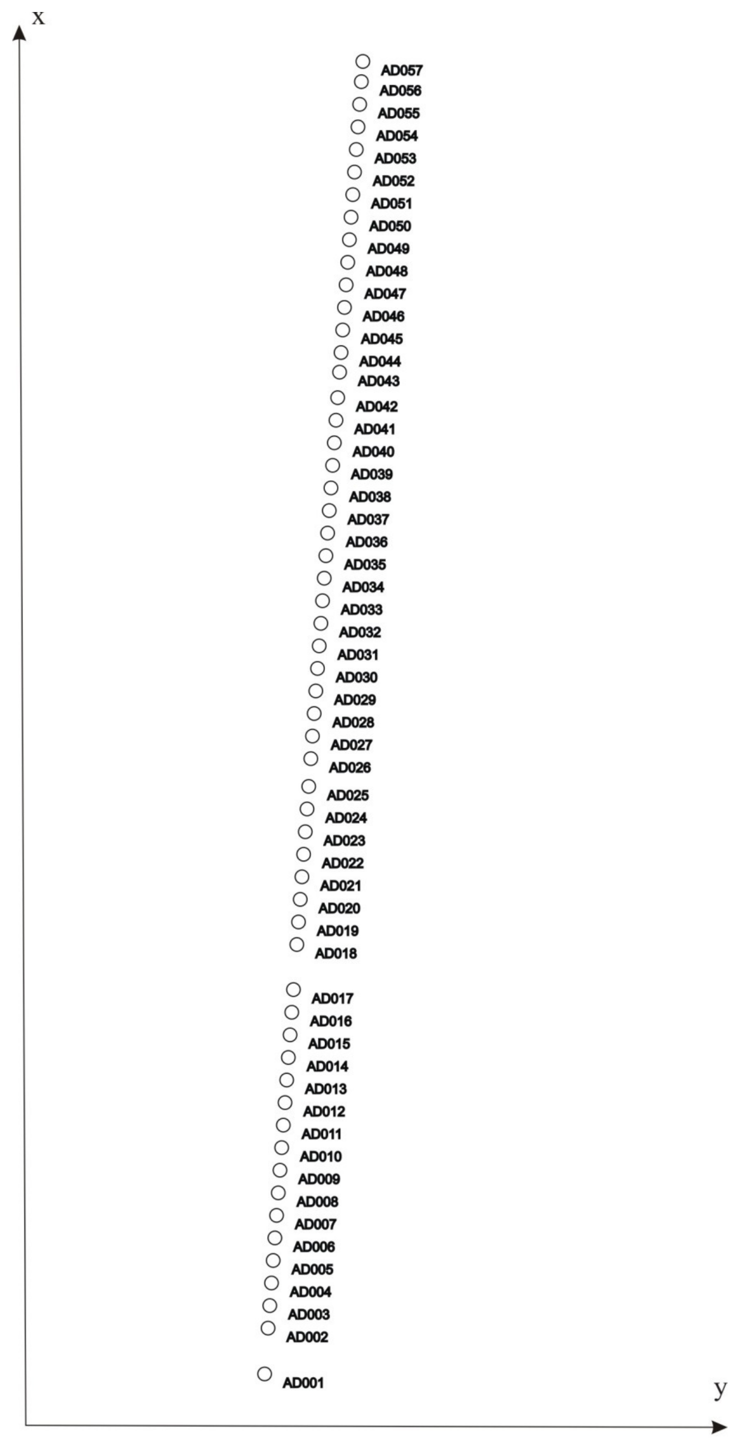
$$a_y + b\,x_i = y_i\,. \tag{5.1}$$

   Коваријациона матрица (уколико се узима у обзир) зависно променљивих величина тада садржи варијансе и коваријансе за y координату, док се коваријациона матрица x координата као и међусобне корелације занемарују.

2) *Решење када се координата* y *усваја као независно променљива величина (регресор) а координата* x *као зависна променљива (одговор) , (LS_x, WLS_x).*

   Функционални модел изравнавајуће праве гласи

$$a_x + \frac{1}{b}\,y_i = x_i\,. \tag{5.2}$$



Слика 5.1. Карактеристичне тачке кранске шине у Термоелектрани "Никола Тесла А"

Коваријациона матрица (уколико се узима у обзир) зависно промењљивих величина тада садржи варијансе и коваријансе за x координату, док се занемарује коваријациона матрица y координата као и међусобне корелације.

3) *Решење на основу трансформисаних координата тачака* (y', x')*, (LS_transf, WLS_transf).*

Трансформација координата је извршена ротацијом координатног система за угао $\varphi_0 = \tan^{-1} b_0$, где је b_0 апроксимативна вредност коефицијента правца изравнавајуће праве, тако да се x оса приближно поклопи са очекиваним положајем изравнавајуће праве, односно

$$
\begin{aligned}
y_i' &= y_i \cos\varphi_0 + x_i \sin\varphi_0, \\
x_i' &= x_i \cos\varphi_0 - y_i \sin\varphi_0.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Функционални модел изравнавајуће праве тада има облик

$$
a_{y'} + b' x_i' = y_i' . \tag{5.4}
$$

Кофакторска матрица координата x_i' (зависно промењљивих) може се тада добити применом закона о распростирању коваријанси, односно

$$
\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}'} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \tag{5.4}
$$

где је $\mathbf{H}$, $n \times 2n$ матрица облика

$$
\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cos\varphi_0 & -\sin\varphi_0 \end{bmatrix}. \tag{5.5}
$$

За случај хомоскедастичности, односно под претпоставком $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{I}_{2n}$, биће $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{y}}'} = \mathbf{I}_n$. Кофакторска матрица координата y_i' (независно промењљивих) као међусобна корелација између координата x_i' и y_i' у овом случају су ирелевантне, односно имају (за све практичне примене) занемарљив утицај на оцену параметара изравнавајуће праве. На овај начин може се добити решење идентично примени потпуног метода најмањих квадрата, односно Gauss-Helmert-овог итеративног поступка.

4) *Ортогонална регресија - решење применом потпуног метода најмањих квадрата (TLS, WTLS).*

Функционални TLS модел облика (3.15), односно (4.10), за нетежински односно тежински случај, респективно, где је усвојено

$$\mathbf{l}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

При дефиницији коваријационе матрице проширене матрице модела $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{l} \end{bmatrix}$ коришћена су правила наведена у Поглављу 4 (Одељак 4.2.2) где су за фиксне елементе вредности варијанси једнаки 0 а коваријансе између фиксних чланова проширене матрице модела и свих осталих такође једнаки 0 (Mahboub, 2012).

При оцењивању параметара регресионе праве a и b, код свих примењених модела, координатни почетак је померен у центроид карактеристичних тачака шине.

Сумарни преглед резултата, за случај занемаривања коваријационе матрице координата карактеристичних тачака шине (нетежински), за сва четири решења (модела), приказан је Табели 5.1. Величине $\Delta d_{\max}$ и Δd_{sr} представљају максимално, односно просечно, удаљење оцењене позиције тачке од регресионе праве, мерено по нормали. Параметри који нису директно оцењени у моделу израчунати су коришћењем релација

$$\hat{a}_y = -\frac{\hat{a}_x}{\hat{b}_x}, \quad \hat{a}_x = -\frac{\hat{a}_y}{\hat{b}_y}, \quad \hat{b}_y = \frac{1}{\hat{b}_x}, \quad \hat{b}_x = \frac{1}{\hat{b}_y}. \tag{5.7}$$

а њихове стандардне девијације изведене су применом закона о распростирању коваријанси.

Табела 5.1. Оцене параметара и показатељи тачности регресионе праве занемаривањем коваријационе матрице координата тачака

Модел	$\hat{a}_y$ / $\sigma_{\hat{a}_y}$ [mm]	$\hat{a}_x$ / $\sigma_{\hat{a}_x}$ [mm]	$\hat{b}_y$ / $\sigma_{\hat{b}_y}$	$\hat{b}_x$ / $\sigma_{\hat{b}_x}$	$d_{\max}$ [mm]	d_{sr} [mm]
LS_y	–4E–10	3E–11	13.3801488	0.0747376	31.002	8.350
	19.902	1.487	0.0031513	0.0000176		
LS_x	–4E–10	3E–11	13.3801896	0.0747374	31.002	8.351
	19.902	1.487	0.0031514	0.0000176		
LS_x_transf	–4E-10	3E–11	13.3801894	0.0747374	31.002	8.351
	19.902	1.487	0.0031514	0.0000176		
TLS - GHM	–4E-10	3E–11	13.3801894	0.0747374	31.002	8.351
	19.902	1.487	0.0031514	0.0000176		

На основу резултата приказаних у Табели 5.1 може се закључити, да се за случај занемаривања варијанси и коваријанси карактеристичних тачака, сваки од наведених модела може применити подједнако успешно. Блага разлика у оцени коефицијената правца $\hat{b}_y$, $\hat{b}_x$ изравнавајуће (регресионе) праве последица је нешто слабије условљености модела LS_y обзиром да је правац регресионе праве близак правцу **y** осе. Ово је, такође, разлог зашто су стандардне девијације оцена $\sigma_{\hat{a}_y}$, $\sigma_{\hat{b}_y}$ значајно веће у односу на респективне вредности $\sigma_{\hat{a}_x}$, $\sigma_{\hat{b}_x}$. И поред тога показатељи квалитета фитовања $d_{\max}$ и d_{sr} имају практично идентичне вредности за све анализиране моделе (решења).

Оцена тачности, односно стандардних девијација оцењених параметара TLS модела извршена је применом формуле (3.34). У Табели 5.2 приказано је упоређење са оценама стандардних девијација на основу апроксимативних израза (3.14), (Kupferer, 2005) и (3.33), (Schaffrin, 2006) као и израза (2.44) односно нелинеарног Gauss-Helmert-овог модела.

Табела 5.2. Упоредна анализа оцене тачности параметара регресионе праве занемаривањем коваријационе матрице координата тачака

Стандардна девијација	Schaffrin, (2006)	Kupferer, (2005)	GHM	Израз (3.14)
$\sigma_{\hat{a}_y}$ [mm]	6.811	20.122	19.902	19.902
$\sigma_{\hat{b}_y}$	0.0034950	0.0031522	0.0031514	0.0031514

Из Табеле 5.2 може се приметити да се изразима (3.14) добијају оцене стандардних девијација параметара регресионе праве идентичне вредностима које следе из нелинеарног Gauss-Helmert-овог модела, односно израза (2.44).

На примеру скупа тачака са Слике 5.1 анализирана су решења (модели) који урачунавају (делимично или потпуно) варијансе и међусобне коваријансе координата тачака. Стандардне девијације скупа тачака са Слике 5.1 кретале су се у распону 0.471 mm – 1.676 mm по **y** оси и 0.697 mm – 4.344 mm по **x** оси.

Решења WLS_y и LS_x подразумевала су занемаривање варијанси и коваријанси за *x*, односно *y* координату, респективно, и примену Gauss-Markov-љевог модела. Решења WLS_x_transf подразумевало је такође примену Gauss-Markov-љевог модела али узимање у обзир варијанси и коваријанси за све координате, на претходно описан начин (Решење 3).

Решење WTLS – GHM подразумевало је примену тежинског потпуног метода најмањих квадрата са пуном коваријационом матрицом описаном у Поглављу 4, као и примену нелинеарног GHM, описаног у Поглављу 2. Обзиром да су резултати ова два поступка идентични приказани су као једно решење.

Сумарни преглед резултата приказан је у Табели 5.3, где су параметри који нису оцењени директо израчунати коришћењем релација (5.7), док су њихове стандардне девијације добијене применом закона о распростирању коваријанси.

На основу резултата приказаних у Табели 5.3 може се закључити да су решења WLS_x_transf и WTLS – GHM међусобно сагласна (до нивоа тачности рачунања) док се решења WLS_y и WLS_x значајно разликују.

Табела 5.3. Оцене параметара и показатељи тачности регресионе праве урачунавањем коваријационе матрице координата тачака

Модел	$\hat{a}_y$ $\sigma_{\hat{a}_y}$ [mm]	$\hat{a}_x$ $\sigma_{\hat{a}_x}$ [mm]	$\hat{b}_y$ $\sigma_{\hat{b}_y}$	$\hat{b}_x$ $\sigma_{\hat{b}_x}$	$d_{\max}$ [mm]	d_{sr} [mm]
WLS_y	−24.725	1.848	13.3818013	0.0747284	31.886	8.555
	82.517	6.166	0.0052591	0.0000294		
WLS_x	−93.766	7.013	13.3711590	0.0747878	43.370	9.973
	46.550	3.481	0.0040022	0.0000224		
WLS_x_transf	−91.766	6.863	13.3712655	0.0747872	43.683	10.078
	47.650	3.564	0.0041947	0.0000235		
WTLS - GHM	−91.766	6.863	13.3712660	0.0747872	43.683	10.078
	47.640	3.563	0.0042062	0.0000235		

"Бољи" показатељи квалитета фитовања $d_{\max}$ и d_{sr}, за ова решења, резултат су делимичног занемаривања података о тачности и корелисаности резултата мерења и, према томе, не могу се сматрати објективним.

Оцена тачности, односно стандардних девијација оцењених параметара WTLS модела извршена је применом формуле (4.67), при чему је добијена потпуна сагласност са кореспондентним оценама добијених на основу израза (2.44) односно нелинеарног Gauss-Helmert-овог модела.

5.2. Дводимензионална трансформација сличности

Моделске једначине дводимензионалне трансформације сличности гласе

$$y^{\mathrm{c}} = t_y + y^{\mathrm{o}}\, p - x^{\mathrm{o}}\, q,$$

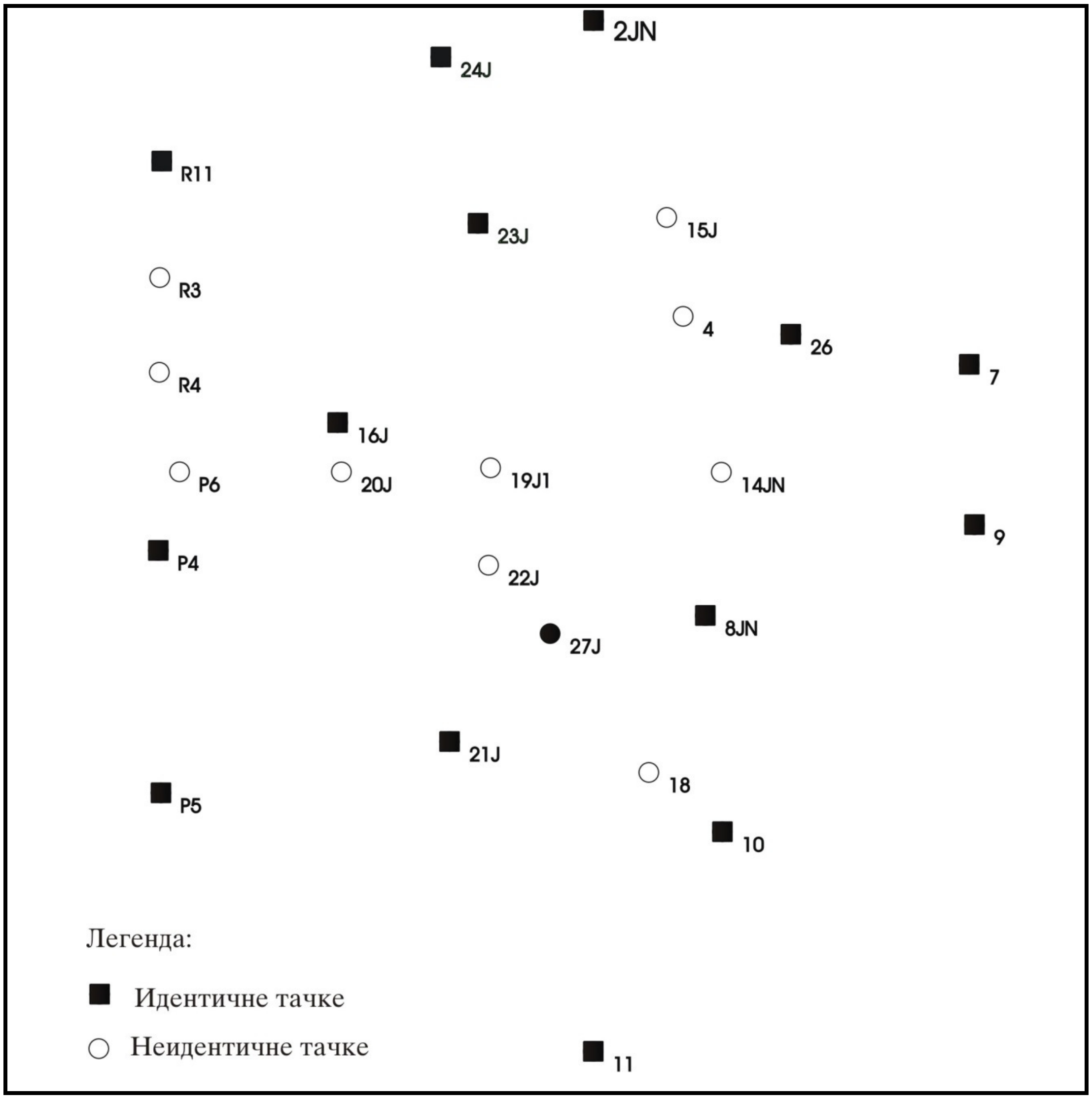
$$x^{\mathrm{c}} = t_x + x^{\mathrm{o}}\, p + y^{\mathrm{o}}\, q, \tag{5.8}$$

где су (y^o, x^o) координате у изворном координатном систему а (y^c, x^c) координате у циљном координатном систему. Параметри t_y, t_x, p и q оцењују се на основу скупа идентичних тачака односно тачака чије су координате познате у оба координатна система.

Иако су оба скупа координата резултат мерења и оцењивања, према томе случајне величине, уобичајен начин оцене параметара трансформације (примена Gauss-Markov-њевог модела) подразумева да се координате у циљном координатном систему (y^c, x^c) третирају као мерења (исте или различите тачности) док се координате у изворном координатном (y^o, x^o) систему обично третирају као константе, односно константни коефицијенти матрице модела $\mathbf{A}$.

У овом примеру на располагању су биле 25 тачака осматрачке геодетске мреже хидроелектране "Ђердап" (Слика 5.2.) за које су одређене координате у две мерне епохе и извршена оцена њихове тачности, тако да су биле расположиве стандардне девијације координате сваке тачке у обе мерне епохе. Тестирана је оцена параметара трансформације сличности између две мерне епохе Gauss-Markov-љевим моделом (LS, WLS) где су само координате у циљном координатном систему третитане као случајне величине и тежинским потпуним методом најмањих квадрата (TLS, WTLS), где су урачунате несигурности свих координата које учествују у потупку оцене параметара трансформације. При томе су 14 тачака усвојене као идентичне тачке (тачке за оцену параметара трансформације) док су 11 тачака третиране као неидентичне односно на њима је вршено упоређење резултата.

Обзиром да је реч о осматрачкој мрежи у којој су у свакој епохи координате тачака одређене на основу терестричих мерења, истом мерном технологијом и поступцима а такође и у истој геометрији, то су координате тачака у изворном и циљном координатном систему имале тачност истог реда величине. Тако су у изворном координатном систему, на идентичним тачкама, за y^o координату стандардне девијације биле у распону 1.395 mm – 2.776 mm, односно 1.247 mm – 2.893 mm за x^o координату. У циљном координатном систему кореспондентне вредности ових величина су биле 0.940 mm – 1.920 mm за y^c координату и 0.782 mm – 1.893 mm, за x^c координату.



Слика 5.2. Диспозиција тачака осматрачке геодетске мреже хидроелектране "Ђердап"

Обзиром да нема међусобне корелације између скупова тачака при TLS оцени параметара трансформације коришћен је поступак Shen и др., (2011). Матрица модела и вектор резултата мерења за дводимензионалну трансформацију сличности гласе

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & y_1^{\mathrm{o}} & -x_1^{\mathrm{o}} \\ 0 & 1 & x_1^{\mathrm{o}} & y_1^{\mathrm{o}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & y_n^{\mathrm{o}} & -x_n^{\mathrm{o}} \\ 0 & 1 & x_n^{\mathrm{o}} & y_n^{\mathrm{o}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{l}=\begin{bmatrix} y_1^{\mathrm{c}} \\ x_1^{\mathrm{c}} \\ \vdots \\ y_n^{\mathrm{c}} \\ x_n^{\mathrm{c}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix} t_y \\ t_x \\ p \\ q \end{bmatrix}. \tag{5.9}
$$

Слично као у примеру изравнавајуће (регресионе) праве анализирана су два случаја. Први случај (доста чест у геодетској пракси) подразумева занемаривање података о тачности и корелисаности оцена координата како у изворном (y^{o}, x^{o}) тако и у циљном координатном систему (y^{c}, x^{c}). Други случај подразумевао је делимично или потпуно урачунавање (узимање у обзир) података о тчности координата укључених у поступак оцене параметара трансформације.

Сумарни приказ оцена параметара трансформације као и вредности одступања, односно положајних разлика трансформисаних координата и њихових познатих вредности, у циљном координатном систему приказане су у Табелама 5.4 и 5.5.

Табела 5.4. Оцене параметри дводимензионлне трансформације сличности и оцена тачности за случај занемаривања варијанси координата тачака

Параметар	LS		TLS – GHM	
	Вредност	Стандардна девијација	Вредност	Стандардна девијација
t_y	0.0291 m	0.0489 mm	0.0291 m	0.0489 mm
t_x	0.0351 m	0.0489 mm	0.0351 m	0.0489 mm
p	−1.986E−06	2.208E−06	−1.986E−06	2.208E−06
q	4.429E−07	2.208E−06	4.429E−07	2.208E−06

Табела 5.5. Вредности несагласности на идентичним и неидентичним тачкама за случај занемаривања варијанси координата тачака

Модел	Идентичне тачке		Неидентичне тачке	
	d_{max} [mm]	d_{sr} [mm]	d_{max} [mm]	d_{sr} [mm]
LS	20.688	7.327	22.537	6.032
TLS – GHM	10.344	3.664	22.537	6.032

Из Табеле 5.4 може се видети да за случај занемаривања података о тачности и корелисаности координата примена LS односно TLS нема утицаја како на оцену параметара трансформације тако ни на оцену њихове тачности. Применом оба поступка добиће се идентичне вредности. Једини ефекат може се видети на вредностима одступања трансформисаних и познатих координата идентичних тачака (Табела 5.5). Применом TLS, ова одступања биће дупло мања, као последица чињенице да, у овом случају, поправке се рачунају како за координате у циљном координатном систему тако и за координате у изворном координатном систему, па ће њихове вредности бити два пута мање. Што се тиче неидентичних тачака, применом оба поступка добиће се идентичне вредности трансформисаних координата.

Оцене параметара трансформације урачунавањем података о тачности координата у циљном координатном систему (WLS) као и урачунавањем података о тачности у оба координатна система (WTLS) приказане су у Табели 5.6, док су положајна одступања на идентичним и неидентичним тачкама, применом ових поступака, приказана у Табели 5.7. Из Табеле 5.6 могу се уочити разлике оцена параметара трансформације добијене применом два наведена поступка. Јасно је да се применом WTLS добијају објективније оцене параметара трансформације обзиром да се урачунавају несигурности свих мерених величина које учествују у поступку оцена параметара трансформације.

Табела 5.6. Оцене параметри дводимензионлне трансформације сличности и оцена тачности за случај урачунавања варијанси координата тачака

Параметар	WLS		WTLS − GHM	
	Вредност	Стандардна девијација	Вредност	Стандардна девијација
t_y	0.0368 m	49.759 mm	0.0370 m	50.667 mm
t_x	0.0369 m	0.469 mm	0.0387 m	45.741 mm
p	−2.168E−06	2.046E−06	−2.256E−06	2.020E−06
q	7.396E−07	2.268E−06	7.325E−07	2.322E−06

Табела 5.7. Вредности несагласности на идентичним и неидентичним тачкама за случај урачунавања варијанси координата тачака

Модел	Идентичне тачке		Неидентичне тачке	
	$d_{\max}$ [mm]	d_{sr} [mm]	$d_{\max}$ [mm]	d_{sr} [mm]
WLS	0.0203	0.0074	0.0227	0.0061
WTLS − GHM	0.0065	0.0025	0.0223	0.0059

Из **Табеле 5.7.** може се приметити да су одступања на идентичним тачкама добијена на основу примене WTLS значајно мања у поређењу са истим добијеним на основу Gauss-Markov-љевог модела док су на неидентичним тачкама, за овај случај ефекти примене WTLS значајно мањи, што је последица практично исте тачности координата у изворном и циљном координатном систему.

5.3. Фитовање површи цилиндра на скуп тачака са тродимензионалним позицијама одређеним терестричким ласерским скенирањем

Примена Gauss-Markov-љевог модела (LS), у случају фитовања на скуп тачака у простору линија и површи другог реда, није могућа. У оваквим случајевима могућа је једино примена нелинеарног Gauss-Helmert-овог модела (GHM) или потпуног метода најмањих квадрата (TLS, WTLS). Овакав случај приказан је на примеру фитовања површи цилиндра на скуп тачака у простору чије су позиције (x, y, z) одређене терестричким ласерским скенирањем.

Једначине цилиндра са произвољним положајем осе у простору могу се представити једначином

$$A^2 + B^2 = R^2, \tag{5.10}$$

где су A, B ортогонални вектори који формирају базу цилиндра а R његов полупречник.

Уколико се одреди позиција тачке на површи цилиндра тродимензионалним (x, y, z) онда се вектори A и B могу добити као

$$A_i = -(x_i - x_0)\sin\theta + (y_i - y_0)\cos\theta, \tag{5.11}$$

$$B_i = -(x_i - x_0)\cos\theta\sin\phi - (y_i - y_0)\sin\theta\sin\phi + (z_i - z_0)\cos\phi, \tag{5.12}$$

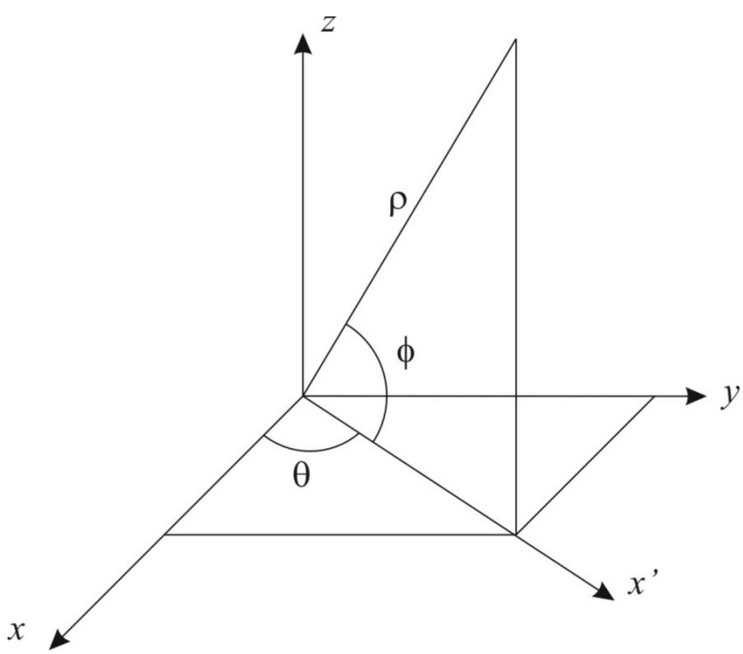
где су (x_0, y_0, z_0) координате центра базе цилиндра, ϕ угао његове нагнутости у односу x, y раван а θ угао ротације у односу на x осу (Слика 5.3).

Према томе, функционални модел потпуно тежинског TLS је облика

$$\mathbf{w} + \mathbf{v}_\mathbf{w} = (\mathbf{A} + \mathbf{V}_\mathbf{A})\mathbf{x}, \tag{5.13}$$

где је

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} R_0^2 - R_1^2 \\ \vdots \\ R_0^2 - R_n^2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \theta \\ \phi \\ R \end{bmatrix},$$



Слика 5.3. Положај осе цилиндра у (x, y, z) координатном систему

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x_0} + 2B_1 \frac{\partial B_1}{\partial x_0} & 2A_1 \frac{\partial A_1}{\partial y_0} + 2B_1 \frac{\partial B_1}{\partial y_0} & 2A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + 2B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \theta} & 2A_1 \frac{\partial A_1}{\partial \phi} + 2B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \phi} & 2R_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2A_n \frac{\partial A_n}{\partial x_0} + 2B_n \frac{\partial B_n}{\partial x_0} & 2A_n \frac{\partial A_1}{\partial y_0} + 2B_n \frac{\partial B_n}{\partial y_0} & 2A_n \frac{\partial A_n}{\partial \theta} + 2B_n \frac{\partial B_n}{\partial \theta} & 2A_n \frac{\partial A_n}{\partial \phi} + 2B_n \frac{\partial B_n}{\partial \phi} & 2R_0 \end{bmatrix},$$

Коваријациона матрица проширене матрице модела $[\mathbf{A} \quad \mathbf{w}]$ има изглед

$$
\mathbf{Q_y} = \begin{bmatrix} \mathbf{H_{A1}Q_1H_{A1}^T} & \mathbf{H_{A1}Q_1H_{A2}^T} & \mathbf{H_{A1}Q_1H_{A3}^T} & \mathbf{H_{A1}Q_1H_{A4}^T} & \mathbf{H_{A1}Q_1H_{A5}^T} & \mathbf{H_{A1}Q_1B^T} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{H_{A5}Q_1H_{A1}^T} & \mathbf{H_{A5}Q_1H_{A2}^T} & \mathbf{H_{A5}Q_1H_{A3}^T} & \mathbf{H_{A5}Q_1H_{A4}^T} & \mathbf{H_{A5}Q_1H_{A5}^T} & \mathbf{H_{A5}Q_1B^T} \\ \mathbf{BQ_1H_{A1}^T} & \mathbf{BQ_1H_{A2}^T} & \mathbf{BQ_1H_{A3}^T} & \mathbf{BQ_1H_{A4}^T} & \mathbf{BQ_1H_{A5}^T} & \mathbf{BQ_1B^T} \end{bmatrix}
$$

,

где су матрице $\mathbf{H_{Ai}}$ облика

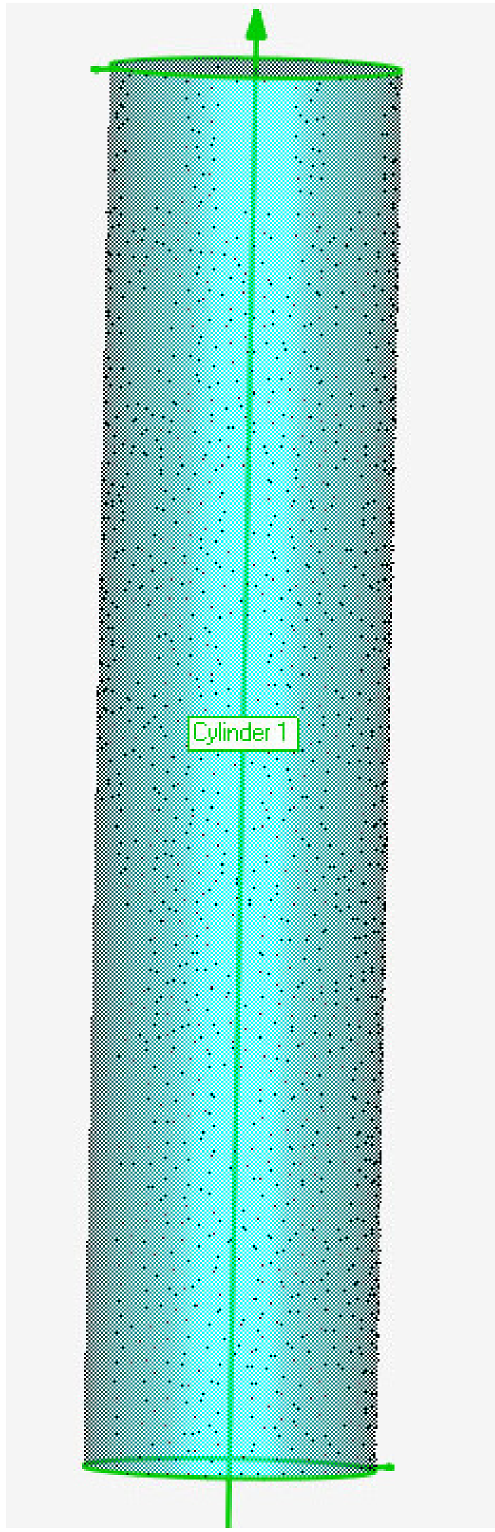
$$
\mathbf{H_{Ai}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}(1,i)}{\partial x_1} & \frac{\partial \mathbf{A}(1,i)}{\partial y_1} & \frac{\partial \mathbf{A}(1,i)}{\partial z_1} & & & & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & & & \\ & \mathbf{0} & & & \frac{\partial \mathbf{A}(n,i)}{\partial x_n} & \frac{\partial \mathbf{A}(n,i)}{\partial y_n} & \frac{\partial \mathbf{A}(n,i)}{\partial z_n} \end{bmatrix},
$$

док је Јакобијева матрица једначине цилиндра по координатама карактеристичних тачака $\mathbf{B}$ облика

$$
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2A_1\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + 2B_1\frac{\partial B_1}{\partial x_1} & 2A_1\frac{\partial A_1}{\partial y_1} + 2B_1\frac{\partial B_1}{\partial y_1} & 2B_1\frac{\partial B_1}{\partial z_1} & 0 & & & \mathbf{0} \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & & & & \\ & & & 0 & 2A_n\frac{\partial A_n}{\partial x_n} + 2B_n\frac{\partial B_n}{\partial x_n} & 2A_n\frac{\partial A_n}{\partial y_n} + 2B_n\frac{\partial B_n}{\partial y_n} & 2B_n\frac{\partial B_n}{\partial z_n} \end{bmatrix}.
$$

Фитовање површи цилиндра применом TLS извршено је на скупу од 2402 тачке чије су тродимензионалне позиције добијене терестричким ласерским скенирањем торња Цркве Светог Анте Падованског на Врачару у Београду, који има облик цилиндра. Циљ је био да се одреди угао нагнутости осе торња у односу на хоризонталну раван x, y. Диспозиција ових тачака приказана је на Слици 5.4.

Обзиром да нису биле расположиве информацији о варијансама и коваријансама за координате тачка, фитовање је извршено класичним (нетежинским) TLS.



Слика 5.4. Диспозиција тачака на фасади торња Цркве Светог Анте Падованског на Врачару

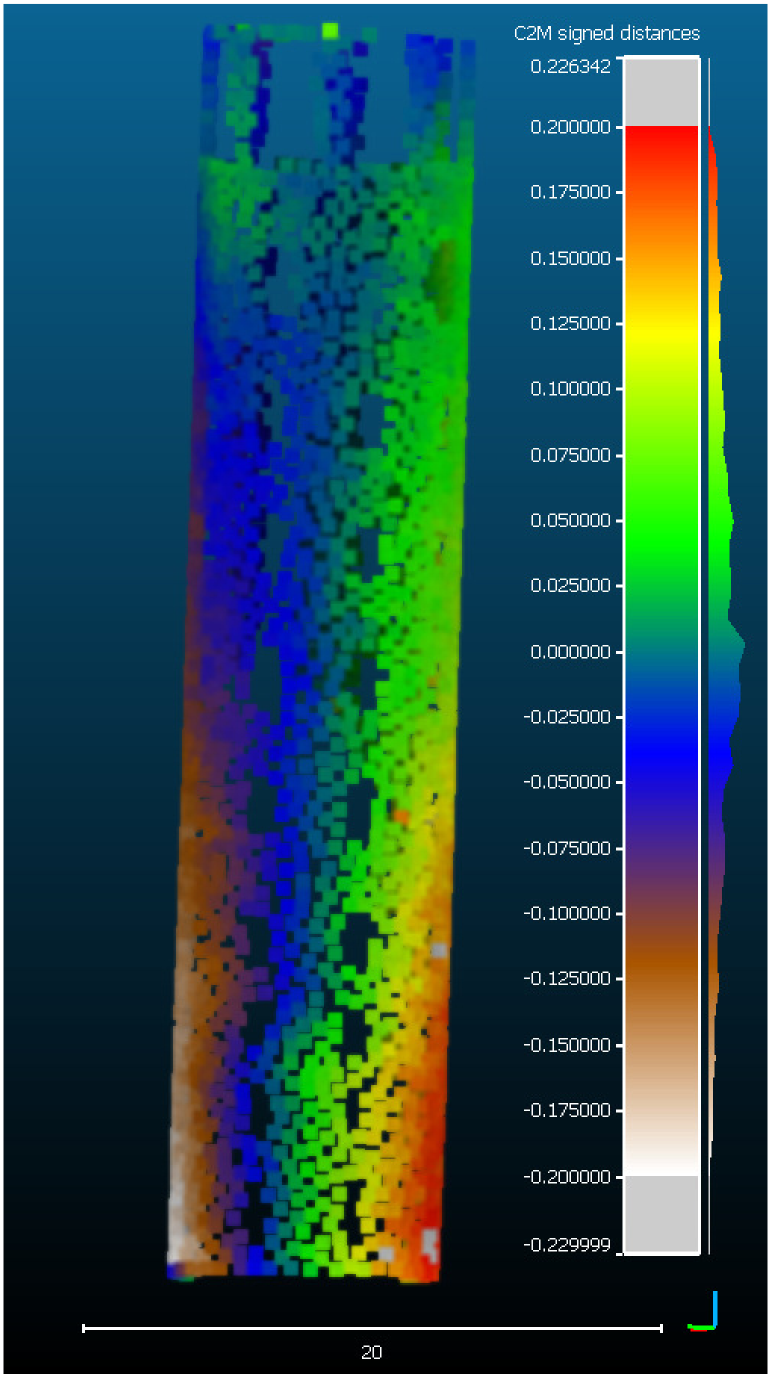
Координате сваке тачке на површи торња омогућавале су формирање једне једначине са 5 непознатих параметара x_0, y_0, θ, ϕ и R. Трећа координата базе цилиндра z_0 је фиксирана да би се избегла слаба условљеност система, обзиром да је торањ приближно вертикалан.

Оцењени параметри положаја цилиндра у простору на основу TLS модела у овом раду као и вредности добијене комерцијалним софтвером Leica Geomagic, приказани су у Табели 5.8.

Табела 5.8. Параметри изравнавајућег цилиндра торња Цркве Светог Анте Падованског

Модел	Координате базе цилиндра			θ $\hat{\sigma}_{\theta}$	ϕ $\hat{\sigma}_{\phi}$	R $\hat{\sigma}_R$ [m]
	x_0 $\hat{\sigma}_{x_0}$ [m]	y_0 $\hat{\sigma}_{y_0}$ [m]	z_0 [m]			
TLS – GHM	29.346	5.564	40.568	50º31’22”	88º33’59”	4.481
	0.0006	0.0005	–	175.2”	4.9”	0.0002
Geomagic	29.356	5.552	40.568	50º27’57”	88º35’45”	4.482

Просечна вредност деформације у односу на изравнавајући цилиндар износи 0.012 m, док је максимална вредност 0.104 m. На Слици 5.5. приказан је просторни распоред вредности деформација по нормали на изравнавајући цилиндар, где се види да су деформације веће по вредности заступљене у доњем делу што указује не само на нагињање него и деформацију облика.



Слика 5.5. Просторни распоред деформација торња Цркве Светог Анте Падованског на Врачару у односу на изравнавајући цилиндар

6. ЗАКЉУЧЦИ И ПРЕПОРУКЕ

У оквиру докторске тезе истражени су и приказани различити модели потпуног метода најмањих квадрата (TLS) и показани примери њиховог кришћења у решавању различитих геодетских задатака.

Иако је појам потпуног метода најмањих квадрата у математичким дисциплинама настао пре више од три деценије (Golub и Van Loan, 1980), његова примена и развој модела у решавању геодетских проблема релатвно је новијег датума, са великим бројем публикација на ову тему како у научним часописима тако и кроз израду докторских дисертација (Kupferer, 2005, Fang, 2011, Snow, 2012).

Основна идеја овог приступа је да се обухвате и на одроварајући начин пондеришу све мерне несигурности присутне у процесу математичког моделирања. У основи, реч је о решавању нелинеарних математичких модела, односно о ситуацији када мерене величине није могуће експлицитно изразити у функцији параметара модела већ је та веза дата имплицитно у нелинеарној форми.

Међутим, нелинеарни модели присутни су у геодетским применама још од почетка прошлог века (Helmert, 1907) кроз итеративни Gauss-Helmet-ов поступак. Због тога неки аутори (Neitzel и Petrovic, 2008, Neitzel, 2010) TLS не сматрају новим поступком оцене параметара модела већ специјалним случајем, односно другачијом формулацијом решавања нелинеарних математичких модела у односу на Gauss-Helmet-ов итеративни поступак.

Са друге стране, Gauss-Helmet-ов итеративни поступак може бити незгодан за руковање, односно носи у себи “замке” које могу водити конвергенцији ка погрешном решењу уколико се, између сукцесивних итарација, на одговарајући начин не изврши ажурирање матрица модела $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ као и вектора неконзистентности $\mathbf{w}$.

На ово је указао Pope, (1972) и дао препоруке како да се, у Gauss-Helmet-овом моделу, правилно спроведе итеративни поступак, односно како да се, између итерација, изврши адекватно ажурирање матрица модела $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, вектора неконзистентности $\mathbf{w}$, вектора оцена (предикција) параметара модела $\mathbf{x}$ и вектора мерених величина $\mathbf{l}$. У ствари, уколико се на одговарајући начин избегну “замке” на које је указао Pope, (1972) сваки TLS проблем може се решити Gauss-Helmet-овим итеративним поступком описаним у Поглављу 2, без икаквих ограничења у погледу коваријационе матрице резултата мерења. Према томе, Gauss-Helmet-ов поступак може се такође сматрати решењем за оцену параметара у EIV моделима.

Потпуни метод најмањих квадрата TLS (WTLS), са друге стране, сматра се директнијим приступом при оцењивању параметара у EIV моделима јер не захтева (осим у алгоритму Shen и др., 2010) израчунавање чланова матрице модела $\mathbf{A}$ у свакој од итерација. Међутим, код TLS (WTLS)приступа, неопходно је израчунавање коваријационе матрице $\mathbf{Q}_{\mathbf{A}}$, димензија $nu \times nu$ на основу коваријационе матрице резултата мерења, применом закона о распростирању коваријанси, која може бити прилично великих димензија и самим тим незгодна за руковање.

У својим почецима TLS проблем је решаван декомпозицијом проширене матрице модела на сингуларне вредности (SVD) али је он углавном примењив на хомоскедастички случај (случај једнаких тежина), односно не урачунава или не урачунава до краја коректно, различиту тачност као и корелацију између резултата мерењу у математичком моделу. Такође, не постоји решење применом SVD за TLS са условима између параметара модела.

Због тога су, у новије време, све присутнија решења методом Lagrange-ових мултипликатора којим се може узети у обзир чак и пуна коваријациона матрица проширене матрице модела, без увођења икаквих претпоставки о њеној структури.

Такође, недостајале су формуле за одговарајућу оцену тачности добијених резултата, односно кофакторских матрица вектора оцена параметара модела $\hat{\mathbf{x}}$ као и вектора оцена мерених величина $\hat{\mathbf{l}}$.

У оквиру ове докторске дисертације уложен је напор да се дају формуле за рачунање коваријационих (кофакторских) матрица како оцењених параметара $\hat{\mathbf{x}}$ модела тако и поправака резултата мерења $\mathbf{v}_{\mathbf{l}}$ као и чланова матрице модела $\mathbf{V}_{\mathbf{A}}$. За случај класичног (нетежинског) TLS, за рачунање кофакторске матрице $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$

оцена параметара модела $\hat{\mathbf{x}}$ предложене је формула (3.34), док су за рачунање кофакторске матрице $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_l}$ оцењеног вектора поправака резултата мерења $\hat{\mathbf{v}}$ и кофакторске матрице $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{V}}_A}$, чланова матрице модела $\mathbf{A}$ предложене формуле (3.35).

За случај познатих кофакторске матрице вектора резултата мерења $\mathbf{Q}_l$ као и кофакторске матрице чланова матрице модела $\mathbf{Q}_A$, али одсуства (или занемаривања) међусобне корелације предложене су формуле (4.48)–(4.50).

И на крају, за најопштији случај познатих кофакторских матрица $\mathbf{Q}_l$ и $\mathbf{Q}_A$ као и међусобне корелационе матрице $\mathbf{Q}_{lA}$, предложене су формуле (4.67)–(4.69).

Оцена тачности на основу предложених формула, за израчунавање кофакторских матрица $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}_l}$ и $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{V}}_A}$, у потпуној је сагласности са кореспондентним резултатима израчунавања кофакторских матрица кроз примену традиционалног Gauss-Helmet-овог итеративног поступка.

На нумеричким примерима, показано је да је за хомоскедастички случај (случај једнаких тежина) могуће подједнако успешно користити Gauss-Markov-љев модел (LS) где год природа проблема то дозвољава (пример изравнавајуће праве и дводимензионалне трансформације сличности). За све остале случајеве EIV модела, може се користити одноварајући TLS (WTLS) поступак или нелинеарни GHM модел. Уколико се коректно спроведу, оба поступка даће идентичне резултате, како за оцену параметара модела, тако и за оцену тачности.

Што се тиче препорука за даље истраживање, она ће се свакако одвијати у правцу истраживања нумеричке ефикасности као и могућности оптимизације алгоритама новоразвијених итеративних поступака, како би се лакше руковало великом количином података које нуде савремене мерне технике. Обзиром да је реч о релативно новим поступцима, широко разматраним у савременој литератури, може се свакако очекивати њихов даљи развој.

Такође, потребно је даље усавршавање поступака оцене тачности и поузданости као и тестова на грубе грешке.

7. ЛИТЕРАТУРА

Adcock R. (1877): Note on the method of least squares. Analyst 4: 183-184.

Aleksić R. I., Perin Dj. N., Popović M. J. (2011): On Computational Aspects of Data Processing of Geodetic Networks with Large Number of Unknown Parameters, Geodetski list, Vol.65 (88) No.4, pp. 323-334, ISSN 0016-710X, UDC 528, Croatian Geodetic Society, Zagreb.

Akyilmaz O. (2007): Total least squares solution of coordinate transformation. Survey Review, 39 (303): 68-80.

Amiri-Simkooei A., Jazaeri S. (2012): Weighted total least squares formulated by standard least squares theory, Journal of Geodetic Science, 2 (2): 113-124.

Björck A. (1996): Numerical Methods for Least Squares Problems. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.

Björck A., Heggernes P., Matstoms P. (2000): Methods for large scale Total Least-Squares problems, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 22 (2000) 413–429.

Cadzow J. A. (1988): Signal Enhancement - A Composite Property Mapping Algorithm. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 36(1): 49-62.

Caspary W. F. (1988): Concepts of Network and Deformation Analysis. Monograph 11, School of Surveying, The University of New South Wales, Kensinton, N. S. W., Australia.

Cothren J. (2005): Reliability in Constrained Gauss-Markov Models: An Analytical and Differential Approach with Applications in Photogrammetry. Report No. 473. Geodetic and GeoInformation Science. Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science. The Ohio State University. Columbus, Ohio 43210-1275, USA.

De Moor B. (1994): Total least squares for affinely structured matrices and the noisy realization problem. IEEE Transactions on Signal Processing, 42(11): 3104-3113.

Gleser L. (1981): Estimation in a multivariate ‘errors in variables’ regression model: large sample results. Annals of Statistics 9 (1): 24-44.

Golub G. H., van Loan C. F. (1980): An analysis of the total least squares problem. In: Journal on Numerical Analysis 17 (1980), S. 883–893

Golub G. H., van Loan C. F. (1989): Matrix computations. 2nd ed. Baltimore, Usa: John Hopkins University Press.

Grafarend E. W., Awange J. L. (2012): Applications of Linear and Nonlinear Models, Fixed Effects, Random Effects, and Total Least Squares. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012, ISBN 978-3-642-22240-5

Eckart G., Young G. (1936): The approximation of one matrix by another of lower rank. In: Psychometrica 1, Nr. 3, S. 211-218

Fang X. (2011): Weighted Total Least Squares Solutions for Applications in Geodesy. PhD dissertation, Publ. No. 294, Dept. of Geodesy and Geoinformatics, Leibniz University Hannover, Germany.

Fang X. (2014): A total least squares solution for geodetic datum transformations. Acta Geodeatica and Geophysica (2014) 49:189–207, DOI 10.1007/s40328-014-0046-8

Felus F. (2004): Application of Total Least Squares for Spatial Point Process Analysis. Journal of Surveying Engineering, 130 (3):126-133.

Felus F., Burtch R. (2009): On symmetrical three-dimensional datum conversion. GPS Solutions, 13 (1):65-74.

Felus Y., Schaffrin B. (2003): Fitting Variogram Models using Total Least-Squares. Journal of Computers and Geosciences.

Felus Y., Schaffrin B. (2005): Performing Similarity Transformations Using the Error-In-Variables Model. ASPRS 2005 Annual Conference Baltimore, Maryland, March 7-11, 2005.

Harville D. (1977): Maximum Likelihood approaches to variance component estimation and to related problems. J. Amer. Statist. Assoc. , 358, S. 320-338.

Helmert F. R. (1907): Adjustment Computations with the Least-Squares Method, second ed., Teubner, Leipzig/Berlin.

Heiker A. (2013): Mutual validation of Earth orientation parameters, geophysical excitation functions and second degree gravity field coefficients. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Reihe C, Dissertationen, Heft Nr. 697. München. ISSN 0065-5325. ISBN 978-3-7696-5109-6.

Koch K. (1999): Parameter estimation and hypothesis testing in linear models. 2nd edn. Springer.

Koch K. (2014): Robust estimations for the nonlinear Gauss Helmert model by the expectation maximization algorithm, Journal of Geodesy (2014) 88:263–271, DOI 10.1007/s00190-013-0681-9.

Kupferer S. (2005): Anwendung der Total-Least-Squares-Technik bei geodätischen Problemstellungen. Dissertation, Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Universität Karlsruhe (TH). ISSN 1612-9733, ISBN 3-937300-67-8.

Lampe J. (2010): Solving Regularized Total Least Squares Problems Based on Eigenproblems. Dissertation, Technischen Universität Hamburg - Harburg.

Lemmerling P. (1999): Structured total least squares: analysis, algorithms and applications, Katholieke Universiteit, Leuven, Belgium, 218 pp.

Mahboub V. (2012): On weighted total least-squares for geodetic transformations. Journal of Geodesy, 86(5):359–367.

Markovsky I., Rastello M., Premoli A., Kukush A., & van Huffel S. (2006): The element-wise weighted total least-squares problem. Computational Statistics & Data Analysis, 50: 181-209.

Markovsky I., Van Huffel S. (2005): High-performance numerical algorithms and software for structured total least squares. Journal of Computational and Applied Mathematics 180 (2005) 311–331

Markovsky I., Van Huffel S. (2007): Overview of total least-squares methods. Signal Processing, 87 (10): 2283-2302.

Михаиловић К., Алексић И. (2008): Концепти мрежа у геодетском премеру. Универзитет у Београду, Грађевински факултет, Београд.

Mirsky L. (1960): Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms. In: The Quarterly Journal of Mathematics 11, S. 50-59.

Neitzel F. (2010): Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2D similarity transformation. Journal of Geodesy 84:751-762.

Neitzel F., Petrovic S. (2008): Total Least Squares (TLS) im Kontext der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten am Beispiel der Ausgleichenden Geraden. ZfV 133: 141-148.

Neitzel F., Schaffrin B. (2012): On the Gauss-Helmert Model with a singular dispersion matrix: where rk BQ is smaller than rkB. Studia Geophysica et Geodaetica, 2012.

Perović G. (2005): Least Squares (Monograph). Faculty of Civil Engineering, University of Belgrade, ISBN 86-907409-0-2.

Pope A. (1972): Two approaches to nonlinear least squares adjustments. Canadien Surveyer 28(5): 663-669.

Schaffrin B. (1995): A generalized Lagrange function approach to include fiducial constraints, Z. Vermessungswesen 120, 325–333.

Schaffrin B. (1997): Reliability measures for correlated observations. Journal of Surveying Engineering, 123 (3):126-137.

Schaffrin B. (2006): A note on Constrained Total Least-Squares estimation. Linear Algebra and its Applications, 417: 245-258.

Schaffrin B. (2014): On a New Family of Weighted TLS Algorithms for EIV-Models with Arbitrary Dispersion Matrices. 23rd Intl. Workshop on Matrices and Statistics Ljubljana, Slovenia, 8–12 June 2014.

Schaffrin B., Felus Y. (2008): On the multivariate total least-squares approach to empirical coordinate transformations. Three algorithms. Journal of Geodesy, 82: 373-383.

Schaffrin B., Neitzel F., Uzun S., Mahboub B. (2012): Modifying Cadzow's algorithm to generate the optimal TLS-solution for the structured EIV-Model of a similarity transformation. Journal of Geodetic Science, 2(2), 2012, 98-106, DOI: 10.2478/v10156-011-0028-5.

Schaffrin B., Snow K. (2010): Total Least-Squares regularization of Tykhonov type and an ancient racetrack in Corinth. Linear Algebra and its Applications, 432: 2061-2076.

Schaffrin B., Snow K., Neitzel F. (2014): On the Errors-In-Variables model with singular dispersion matrices. Journal of Geodtic Science, 4:28–36, DOI 10.2478/jogs-2014-0004.

Schaffrin B., Wieser A. (2008): On weighted total least-squares adjustment for linear regression. Journal of Geodesy, 82: 415-421.transformations. Three algorithms. Journal of Geodesy, 82: 373-383.

Schaffrin B., Wieser A. (2009): Empirical Affine Reference Frame Transformations by Weighted Multivariate TLS Adjustment. In: Drewes H (Ed) Geodetic Reference Frames, IAG Symposium Munich, Germany , 9-14 October 2006; Series: International Association of Geodesy Symposia , Vol. 134, Springer .

Schuermans M., Markovsky I., van Huffel S. (2007): An adapted version of the element-wise weighted total least-squares method for applications in cheomometrics. Chemometrics Intell Lab Syst 85:40–46

Shan J. (1989): A fast recursive method for repeated computation of the reliability matrix QvvP. Photogrammetria, 43: 337-346.

Shen Y., Li B., Chen Y., (2011): An iterative solution of weighted total least-squares adjustment, J Geod., 85, 229-238.

Snow K. (2012): Topics in Total Least-Squares Adjustment within the Errors-In-Variables Model: Singular Cofactor Matrices and Prior Information. PhD thesis, Report. No. 502, Div. of Geodetic Science, School of Earth Sciences, The Ohio State University, Columbus, Ohio, USA.

Teunissen P. J. G. (1988): The non-linear 2D symmetric Helmert transformation: an exact non-linear least-squares solution. Manuscripta Geodetica, 62 (1):1-16.

Teunissen P. J. G. (2000): Adjustment theory: an introduction. Delft University Press, Delft University of Technology, Series on Mathematical Geodesy and Positioning.

Van Huffel S., Vandewalle J. (1989): Analysis and properties of the generalized total least-squares problem $AX \approx B$ when some or all columns of A are subject to error. SIAM J Matrix Anal Appl 10:294–315.

Van Huffel S., Vandervalle J. (1991): The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis. In: Frontiers in Applied Mathematics 9.

Wolf H. (1968): Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrat. Dümmler

Xu G. (2007): GPS: theory, algorithms, and applications. Berlin: Springer.

Zhengyou Z. (1997): Parameter Estimation Techniques: A Tutorial with Application to Conic Fitting. Image and Vision Computing, Vol.15, No.1, pages 59-76, January 1997. Elsevier Limited, ISSN: 02628856, United Kingdom.

Биографија аутора

Јован, Милорад, Поповић рођен је у Брдарици, општина Коцељева. Завршио је основну школу 1977. године у Драгињу, а средњу Геодетско-техничку школу у Београду 1981. године. Школску годину 1981./82. провео је на одслужењу војног рока.

Дипломирао је 1988. године на Одсеку за геодезију, Грађевинског факултета у Београду са просечном оценом 8.50. Дипломски рад под насловом "Нивелманске мреже Београда као основа за основни оперативни полигон аутопута "Братство и јединство" око Београда" одбранио је са оценом 10, чиме је стекао звање дипломирани инжењер геодезије.

Последипломске студије на Грађевинском факултету Универзитета у Београду, смер Премер и уређење земљишне територије, уписао је 1988. године и прописане испите положио са просечном оценом 9.33. Магистарски рад под називом "Примена Активне геодетске референтне основе Србије у премеру непокретности" одбранио је 2010. године, чиме је стекао звање магистра техничких наука.

Од Јуна 1988. године запослен је на Институту за геодезију, Грађевинског факултета, Универзитета у Београду. Првих шест месеци рада провео је на раду у Ираку, на Пројекту 1103 Нуманија.

У периоду 1988-96 радио је у звању асистента-приправника на предметима Геодезија 1, 2, 3 и 4, на Одсеку за геодезију, Грађевинског факултета, Универзитета у Београду. По истеку изборног периода радио је на Институту за геодезију у звању инжењера сарадника а од 2006. године распоређен је на дужност техничког руководиоца Лабораторије за картографију.

Дана 14.05.2010. године изабран је у звање асистента на Одсеку за геодезију и геоинформатику, ужа научна област Премер и уређење земљишне територије. У настави, ангажован је на извођењу вежбања из предмета Геодетски премер 1, 2 и 3, Технике геодетских мерења, Оптимизација у геодетском премеру и Практична настава из геодетског премера.

Коаутор је (са проф. др Иваном Алексићем дипл. геод. инж. и в. проф. др Јеленом Гучевић дипл. геод. инж.) збирке решених задатака која обухвата наставну материју из предмета Технике геодетских мерења као и Геодетски премер 1, 2 и 3.

Заједно са проф. др Иваном Алексићем дипл. геод. инж. и мр Николом Перином дипл. мат., коаутор је програмског система за анализу дизајна, оптимизацију плана мерења као и анализу и изравнање резултата мерења у геодетским мрежама који је низ година заступљен у геодетској пракси геодетских организација у Србији и Републици Српској (Босни и Херцеговини).

Објављени радови, научна активност као и област интересовања, усмерени су на проблеме прикупљања, обраде и анализе података мерења и примене савремених технологија у геодетском премеру. У свакодневном раду користи комерцијалне програме и рутине сопствене израде везане за геодетску проблематику.

Учествовао је у три научно-истраживачка пројеката реализована у сарадњи са Министарством за науку и технолошки развој и Републичким геодетским заводом Републике Србије.

Објавио је 5 научних радова у периодичним публикацијама и 13 радова у зборницима са домаћих и међународних научних скупова.

Чита, пише и говори енглески језик.

ПРИЛОЗИ

Прилог 1

Изјава о ауторству

Потписани: мр Јован М. Поповић дипл.инж.геод

број индекса:______________________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

"ПОТПУНИ МЕТОД НАЈМАЊИХ КВАДРАТА У ФУНКЦИЈИ РЕШАВАЊА ГЕОДЕТСКИХ ПРОБЛЕМА"

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена докторска дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које диплома према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Београду 10.07.2016. године. **Потпис докторанда**

____

Прилог 2

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора: мр Јован М. Поповић дипл.инж.геод

број индекса:______________________________________

Студијски програм: Геодезија и геоинформатика__________

Наслов рада: "ПОТПУНИ МЕТОД НАЈМАЊИХ КВАДРАТА У ФУНКЦИЈИ РЕШАВАЊА ГЕОДЕТСКИХ ПРОБЛЕМА"

Ментори: Проф. др. Иван Р. Алексић дипл. инж. геод.

Проф. др. Бранко С. Божић дипл. инж. геод.

Потписани: _______________________

____

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и публикацијама Универзитета у Београду.

У Београду 10.07.2016. године.

Потпис докторанда

____

Прилог 3

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку "Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом

"ПОТПУНИ МЕТОД НАЈМАЊИХ КВАДРАТА У ФУНКЦИЈИ РЕШАВАЊА ГЕОДЕТСКИХ ПРОБЛЕМА"

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују обредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио:

1. Ауторство,
2. Ауторство - некомерцијално,
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде,**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима,
5. Ауторство – без прераде,
6. Ауторство – делити под истим условима,

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Београду 10.07.2016. године. **Потпис докторанда**

____