ДРЖАВНИ УНИВЕРЗИТЕТ
У НОВОМ ПАЗАРУ
ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИЧКЕ НАУКЕ

Сњежана Максимовић

Секвенцијални приступ теорији ултрадистрибуција и таласни фронт

Докторска дисертација

Нови Пазар, 2016

Lazaru i Lani

Sadržaj

Zahvalnica

Želim da izrazim najveću zahvalnost svome mentoru akademiku prof. dr Stevanu Pilipoviću, koji me je vodio kroz master i doktorske studije. Veoma sam zahvalna na njegovom velikom strpljenju, pomoći koju mi je pružio, kao i znanju koje mi je preneo tokom poslednjih šest godina. Pored brojnih obaveza, uvek bi izdvojio vreme za mene i pomogao mi, uputio me i uvek našao rešenje. Velika mi je čast i zadovoljstvo što sam imala takvog mentora. Takođe, želim da se zahvalim komentoru prof. dr Diani Dolićanin-Đekić čiji su korisni saveti doprineli da ova doktorska disertacija bude što bolja.

Veliku zahvalnost dugujem svojim roditeljima i sestri koji su mi bili velika podrška kroz čitav život i koji su zaslužni za ovo. Želim da se posebno zahvalim suprugu i sinu, kao i baki Anki na njihovoj nesebičnoj podršci, ljubavi i pomoći. Posebno se zahvaljujem svom dedi Dragoljubu, koji na žalost nije više među nama, a čija je ljubav, pažnja i pomoć za mene bila od neprocenjive vrednosti.

Želim da izrazim zahvalnost svojoj prijateljici Smiljani Jakšić koja mi je mnogo pomogla tokom doktorskih studija. Zahvaljujem joj najpre što mi je bila velika podrška i prijatelj, što je sve vreme pratila moj rad, jer su njeni korisni saveti, sugestije, kao i velika podrška učinili ovu disertaciju boljom. Takođe joj zahvaljujem što je sa velikom pažnjom pročitala ovu disertaciju.

Na kraju, želim da se zahvalim kumi Dragani, kao i svim svojim prijateljima, posebno Nebojši, Slavici, Dini, Veliboru i Vanji koji su mi bili velika moralna podrška.

Uvod

Sekvencijalna teorija distribucija je razvijena sedamdesetih godina prošlog veka, a razvili su je poljski matematičari Antosik, Mikusinski i Sikorski (videti [1]). U isto vreme je H. Komatsu napisao čuveni rad [22] u kom je razvio teoriju ultradistribucija. Od tada se teorija ultradistribucija razvila u različitim pravcima. Posebnu primenu našla je u mikrolokalnoj analizi. Nametnuto je pitanje sekvencijalne teorije ultradistribucija koje do sada nije razmatrano. Ovde ćemo razviti sekvencijalnu teoriju ultradistribucija Berlingovog i Rumijeovog tipa (videti [29]).

U sekvencijalnoj teoriji distribucija (videti [1]) distribucije su definisane kao klase ekvivalencije fundamentalnih nizova pomoću nizova glatkih funkcija na koje deluju diferencijalni operatori reda k. Koristeći slične ideje definisaćemo s-ultradistribucije (sekvencijalne ultradistribucije) kao klase ekvivalencije fundamentalnih nizova definisanih pomoću nizova glatkih funkcija na koje sada deluju ultradiferencijalni operatori. Dakle, to je osnovna razlika između sekvencijalnih distribucija i ultradistribucija koja nam donosi dosta izazova, jer umesto polinoma (kod distribucija), moramo koristiti različita ograničenja funkcija eksponencijalnog rasta. Da bismo pokazali da je sekvencijalni pristup ekvivalentan klasičnoj teoriji ultradistribucija u [22], moramo znati strukturalne teoreme ultradistibucija i temperiranih ultradistribucija (videti [5]-[19], [27]-[35]), jer će veza između ova dva pristupa biti data pomoću razvoja temperiranih ultradistribucija u Ermitov red.

Prostori $\mathcal{D}^{(t)}(\Omega)$, $\mathcal{D}^{\{t\}}(\Omega)$ i njihovi duali (Ω je otvoren skup u $\mathbb{R}^d$) kao i Gelfand-Šilovi prostori $\mathcal{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$, i njihovi duali koji se nazivaju prostorima temperiranih ultradistribucija Berlingovog i Rumijeovog tipa su izučavani u mnogi knjigama i radovima, a navodimo neke od njih [5]-[19], [22]-[27], [33], [35]. Za prostore $\mathcal{A}^{(t)}_{per}$, $\mathcal{A}^{\{t\}}_{per}$, kao i njihove duale koji se nazivaju prostorima periodičnih ultradistribucija Berlingovog i Rumijeovog tipa navodimo radove [7, 8, 37, 44] i knjige [2, 20, 48]. Radi kraćeg zapisa, umesto gornjeg indeksa (t) i $\{t\}$ koristićemo *.

Naslov ove doktorske disertacije je ,,Sekvencijalni pristup teoriji ultradistribucija i talasni front", a disertacija se sastoji iz šest glava i dodatka podeljenih u nekoliko poglavlja.

U prvoj glavi su date već poznate definicije i tvrđenja iz teorije ultradistribucija. Definisani su Gelfand-Šilovi prostori $\mathcal{S}^{(t)}$ i $\mathcal{S}^{\{t\}}$, njihovi duali prostori temperiranih ultradistribucija $\mathcal{S}'^{(t)}$ i $\mathcal{S}'^{\{t\}}$, kao i prostori ultradistribucija $\mathcal{D}'^{(t)}$ i $\mathcal{D}'^{\{t\}}$. Date su osobine ovih prostora kroz određena tvrđenja koja će biti korištena u radu. Definisani su ultradiferencijalni operatori, date su njihove osobine i svojstva.

U drugoj glavi, koristeći ideje slične kao u [1], definišemo fundamentalne nizove i odgovarajuće klase ekvivalencije nazivamo s-ultradistribucije. Prostor s-ultradistribucija označavamo sa $\mathcal{U}'^*(\Omega)$. U tom prostoru analiziramo algebarske operacije, strukture konvergencije, kao i delovanje elemenata tog prostora na test funkcije iz $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

U trećoj glavi uvodimo i razmatramo prostore $\mathcal{T}'^*$ i $\widetilde{\mathcal{T}}'^*$ koje nazivamo prostorima s- i $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistribucija, respektivno. Opet analiziramo strukture konvergencije u tim prostorima, kao i delovanje funkcija iz tih prostora na test funkcije iz $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$.

U četvrtoj glavi pokazujemo sekvencijalni topološki izomorfizam između sekvencijalnog i standardnog pristupa teoriji ultradistribucija. Poznato je da (videti [12] i mnoge druge radove) postoji topološki izomorfizam između prostora $\mathbf{s}^*$ i $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, gde su $\mathbf{s}^*$ Kete-Ešelon prostori nizova sub-eksponencijalnog rasta. Koristeći taj rezultat pokazujemo da postoji sekvencijalni topološki izomorfizam između prostora $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ i $\mathcal{T}'^*$. Posle toga dokazujemo sekvencijalni topološki izomorfizam između prostora $\mathcal{T}'^*$ i $\widetilde{\mathcal{T}}'^*$. Pomoću tih rezultata dobijamo sekvencijalni topološki izomorfizam između $\mathcal{U}'^*(\Omega)$ i $\mathcal{D}'^*(\Omega)$, što je jedan od najznačajnijih rezultata ovog rada.

Na sličan način kao i u prethodne tri glave, u petoj glavi razvijamo sekvencijalnu teoriju periodičnih s-ultradistribucija. Definišemo prostor $\mathcal{U}'^*_{per}$ kao prostor klasa ekvivalencije s-p-fundamentalnih nizova, dajemo strukture konvergencije takvih prostora, kao i delovanje na odgovarajuće funkcije iz prostora ultradiferencijabilnih periodičnih funkcija $\mathcal{A}^*_{per}$. Koristeći odgovarajuće razvoje u Furijeove redove, kao i Kete-Ešelon prostore nizova $\mathbf{a}^*$ koji su topološki izomorfni sa $\mathcal{A}^*_{per}$ (videti [9]) uspostavljamo sekvencijalni topološki izomorfizam između $\mathcal{U}'^*_{per}$ i $\mathcal{A}'^*_{per}$.

U šestoj glavi analiziramo talasni front kroz analizu odgovarajućih prostora ultradistribucija. Korišćenjem osobina proizvoda periodičnih ultradistribucija opisujemo talasni front ultradistribucije pomoću odgovarajućih Furijeovih koeficijenata.

U dodatku na kraju je dat pregled sekvencijalne teorije Mikusinskog.

Ova doktorska disertacija, sem prve glave i dodatka, predstavlja orginalan doprinos nauci, jer je u njoj razvijena sekvencijalna teorija ultradistribucija. U drugoj, trećoj i četvtoj glavi su uvedeni osnovni pojmovi sekvencijalne teorije ultradistribucija i temperiranih ultradistribucija, dati primeri, tvrđenja i dokazi. Ove tri glave su, velikim delom, navedene u radu [29]. Kako i kod sekvencijalnog pristupa teoriji distribucija, vrlo komplikovane pojmove za čije razumevanje je u funkcionalnom pristupu potebno poznavanje teorije lokalno konveksnih prostora, projektivnih i induktivnih topologija, ovde razmatramo direktnije i što elementarnije. To je jedna od najvažnijih karakteristika sekvencijalnog pristupa. U petoj glavi, na sličan način kao i u prethodne tri glave, uvedeni su pojmovi sekvencijalne teorije periodičnih ultradistribucija, dati primeri, tvrđenja i dokazi, a sve ovo je velikim delom je navedeno u radu [30]. U radu [6] je data karakterizacija talasnog fronta ultradistribucija pomoću Furijeovih koeficijenata njenog periodičnog proširenja, što je opisano u Glavi 6. Na taj način možemo koristiti Furijeovu bazu u mikrolokalnoj analizi, što je razlika u odnosu na [17] gde je talasni front ultradistribucija opisan preko Gaborovih okvira i dualnih Gaborovih okvira (videti [16] i [17]).

Glava 1

Prostori ultradistribucija

1.1 Notacija

Skupove prirodnih, nenegativnih celih, realnih i kompleksnih brojeva označavamo sa $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, respektivno. Za multi-indekse $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ važi:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots \alpha_d; \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_d!$$

$$\beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_j \leq \alpha_j, \forall j = 1, \dots, d; \quad \binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^{d} \binom{\alpha_j}{\beta_j}.$$

Ako $x = (x_1, \dots, x_d), \ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, tada je

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i}; \quad \langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \xi_i; \quad |x| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_d|^2};$$

$$D^\alpha = D_x^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d} \text{ gde je } D_j^{\alpha_j} = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j}, \ j = 1, \dots, d,$$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

Sa Ω uvek označavamo otvoren skup u $\mathbb{R}^d$, dok je $K \subset\subset \Omega$ oznaka za kompaktan skup K u Ω. Sa $\mathcal{C}(K)$ označavamo Banahov prostor neprekidnih funkcija u K sa normom $\sup|\cdot|$ i $f_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} f, n \to \infty$ predstavlja konvergenciju u prostoru $\mathcal{C}(K)$. Radi lakšeg zapisa koristimo sledeću notaciju:

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d}; \quad \sum_{|\alpha|=-\infty}^{\infty} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d}; \quad \sum_{0 \le \alpha \le \beta} a_\alpha = \sum_{\alpha_1=0}^{\beta_1} \cdots \sum_{\alpha_d=0}^{\beta_d} a_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_d)}$$

$(f_n)_n$ umesto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $F(x)$ za preslikavanje $\Omega \ni x \mapsto F(x)$ i $\operatorname{supp} f$ je oznaka za nosač funkcije (ili distribucije ili ultradistribucije) f. Kažemo da je funkcija f kompaktno podržana ako postoji kompaktan skup $K \subset\subset \mathbb{R}^d$ za koji je $\operatorname{supp} f \subset K$. Induktivnu i projektivnu granicu označavamo sa $\varprojlim$ i $\varinjlim$. Furijeova transformacija funkcije $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ je definisana sa

$$\mathcal{F}(\varphi) = \widehat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-i\langle x,\cdot\rangle} dx,$$

dok je njena inverzna Furijeova transformacija definisana sa

$$\mathcal{F}^{-1}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{i\langle x,\cdot\rangle} dx.$$

Tada važi (videti [5])

$$\mathcal{F}(D^\alpha \varphi) = \xi^\alpha \widehat{\varphi}, \ \ \xi \in \mathbb{R}^d.$$

1.2 L^p prostori

Prostor svih lokalno integrabilnih funkcija na Ω označavamo sa $L^{1,loc}(\Omega)$. To je prostor merljivih funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ za koje je $\int_K |f(x)|dx < \infty$, za sve $K \subset\subset \Omega$. Prostor $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, je Banahov prostor merljivih funkcija $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ za koje vredi

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \ \text{ ako je } 1 \le p < \infty;$$
$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty \ \text{ ako je } p = \infty.$$

Skalarni proizvod u $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ označavamo sa $(\cdot,\cdot)_{L^2}$. Odgovarajući prostor nizova l^p, $1 \le p \le \infty$, je definisan sa:

$$l^p = \{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} |\ (\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} < \infty\}, \quad \text{ako je } 1 \le p < \infty;$$

$$l^\infty = \left\{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} |\ \sup_{k\in\mathbb{Z}^d}\{x_k\} < \infty\right\}, \quad \text{ako je } p = \infty.$$

Navodimo neke poznate nejednakosti koje koristimo u radu:

Lema 1.1. *(Joungova nejednakost) Neka su $p, q > 1$ takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tada za $a, b > 0$ važi*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lema 1.2. *(Helderova nejednakost) Neka su $1 \le p \le \infty$ i $1 \le q \le \infty$ takvi da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup. Ako $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, tada $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ i vredi*

$$\int_\Omega |fg| dx \le \|f\|_p \|g\|_q.$$

Lema 1.3. *(nejednakost Minkovskog) Ako je $1 \le p \le \infty$ i $f, g \in L^p(\Omega)$, tada vredi*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Lema 1.4. *(integralna nejednakost Minkovskog) Pretpostavimo da su (Ω_1, μ_1) i (Ω_2, μ_2) merljivi prostori i $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija. Tada važi*

$$\left(\int_{\Omega_2} \left|\int_{\Omega_1} F(x,y) d\mu_1(x)\right|^p d\mu_2(y)\right)^{1/p} \le \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |F(x,y)|^p d\mu_2(y)\right)^{1/p} d\mu_1(x).$$

Sledeće dobro poznato tvrđenje će nam biti korisno u nastavku:

Lema 1.5. *Neka su $p, q \in [1, \infty]$, $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in l^p$, $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in l^q$. Tada, za $c_k = \sum_{|j|=-\infty}^{\infty} a_j \cdot b_{k-j}, k \in \mathbb{Z}^d$, vredi $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in l^r$, gde je $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, ($r = \infty$ ako je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).*

1.3 Prostori distribucija i ultradistribucija

Sa $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ označavamo prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija u Ω. Definicije i svojstva prostora $\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ test funkcija, kao i njihovih duala $\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ se mogu naći u [43] (takođe videti i [45], [13], [41]).

Dajemo definicija i tvrđenja iz [22] koja ćemo koristiti u daljem radu. Označimo sa $(M_p)_p$ niz pozitivnih brojeva za koje je $M_0 = 1$ i koji ispunjava sledeće uslove:

$(M.1)$ (logaritamska konveksnost) $M_p^2 \leq M_{p-1}M_{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$;

$(M.2)$ (stabilnost pod diferencijalnim operatorima)

$$M_p \leq Ch^p \min_{0 \leq q \leq p}\{M_{p-q}M_q\},\ p, q \in \mathbb{Z}_+,\ \text{za neke } C, h > 0;$$

$(M.3)$ (stroga ne-kvazi-analitičnost) $\displaystyle\sum_{p=q+1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} \leq Cq\frac{M_q}{M_{q+1}}$, $q \in \mathbb{N}$;

$(M.2)'$ (stabilnost pod diferencijalnim operatorima)

$$M_{p+1} \leq Ch^p M_p,\ p \in \mathbb{Z}_+,\ \text{za neke } C, h > 0;$$

$(M.3)'$ (ne-kvazi-analitičnost) $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty.$

U radu ćemo posmatrati Gevre nizove $M_p = p!^t$, $t > 1$ koji ispunjavaju uslove $(M.1)$, $(M.2)$ i $(M.3)$. Funkcija pridružena ovom nizu (orginalno associated function) je

$$M(\rho) = \sup_{p \in \mathbb{Z}_+} \log_+(\rho^p/p!^t) = e^{k\rho^{1/t}}, \quad 0 < \rho < \infty,$$

gde je $k > 0$ odgovarajuća konstanta. Sa $\mathcal{R}$ označavamo pozitivne nizove $(r_p)_p$ koji (strogo) rastu ka beskonačno. Za $(r_p)_p \in \mathcal{R}$, niz $(N_p)_p$ je definisan sa

$$N_0 = 1, \quad N_p = p!^t \prod_{i=1}^{p} r_i,\ p \in \mathbb{N},$$

dok je funkcija pridružena nizu $(N_p)_p$ definisana sa

$$N_{(r_p)}(\rho) = \sup_{p \in \mathbb{Z}_+} \log_+(\rho^p/N_p),\ \ 0 < \rho < \infty.$$

Primetimo da za dati niz $(r_p)_p \in \mathcal{R}$ i za sve $k > 0$ postoji $\rho_0 > 0$ tako da važi (videti [22])

$$N_{(r_p)}(\rho) \leq e^{k\rho^{1/t}}, \qquad \rho > \rho_0.$$

Neka je $K \subset\subset \Omega$ i $h > 0$. Tada je $\mathcal{E}^{t,h}(K)$ prostor svih $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ za koje je $\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \sup_{x \in K} \frac{|D^\alpha \varphi(x)|}{h^{|\alpha|}\alpha!^t} < \infty$ i $\mathcal{D}_K^{t,h}$ je prostor svih $\varphi \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ sa nosačem u K, za koje je $P_{K,h}(\varphi) = \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \sup_{x \in K} \frac{|D^\alpha \varphi(x)|}{h^{|\alpha|}\alpha!^t} < \infty$. Može se proveriti da je to L^p prostor sa normom $P_{K,h}$. Definišimo lokalno konveksne prostore

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(t)}(\Omega) &= \varprojlim_{K \subset\subset \Omega} \varprojlim_{h \to 0} \mathcal{E}^{t,h}(K), & \mathcal{E}^{\{t\}}(\Omega) &= \varprojlim_{K \subset\subset \Omega} \varinjlim_{h \to \infty} \mathcal{E}^{t,h}(K),\\
\mathcal{D}_K^{(t)} &= \varprojlim_{h \to 0} \mathcal{D}_K^{t,h}, & \mathcal{D}^{(t)}(\Omega) &= \varinjlim_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{D}_K^{(t)};\\
\mathcal{D}_K^{\{t\}} &= \varinjlim_{h \to \infty} \mathcal{D}_K^{t,h}, & \mathcal{D}^{\{t\}}(\Omega) &= \varinjlim_{K \subset\subset \Omega} \mathcal{D}_K^{\{t\}}.
\end{aligned}$$

Elemente prostora $\mathcal{E}^{(t)}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}^{\{t\}}(U)$) nazivamo ultradiferencijabilnim funkcijama Berlingovog (resp. Rumijeovog) tipa, dok elemente prostora $\mathcal{D}^{(t)}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{D}^{\{t\}}(\Omega)$) nazivamo ultradiferencijabilnim funkcijama sa kompaktnim nosačima Berlingovog (resp. Rumijeovog) tipa. U nastavku ćemo prostore $\mathcal{D}^{(t)}(\Omega)$ i $\mathcal{D}^{\{t\}}(\Omega)$ označiti sa $\mathcal{D}^*(\Omega)$, gde je $* = (t)$ ili $* = \{t\}$. Duale prostora $\mathcal{D}^*(\Omega)$ nazivamo prostorima ultradistribucija i označavamo ih sa $\mathcal{D}'^*(\Omega)$.

Ako su Ω_1 i Ω_2 otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}^d$, takvi da je $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$, tada je inkluzija $\mathcal{D}^*(\Omega_1) \to \mathcal{D}^*(\Omega_2)$ neprekidna, odakle sledi da je dualno preslikavanje $\rho_{\Omega_1}^{\Omega_2} : \mathcal{D}'^*(\Omega_2) \to \mathcal{D}'^*(\Omega_1)$ neprekidno. Za $f \in \mathcal{D}'^*(\Omega_2)$ je $\rho_{\Omega_1}^{\Omega_2} f$ restrikcija od f na Ω_1 i označićemo je sa $f|_{\Omega_1}$. Jasno, ako su Ω_1, Ω_2 i Ω_3 otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}^d$ takvi da je $\Omega_3 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_1$ tada je $\rho_{\Omega_3}^{\Omega_1} = \rho_{\Omega_3}^{\Omega_2} \circ \rho_{\Omega_2}^{\Omega_1}$.

Teorema 1.1. *([22, Teorema 5.6]) Prostori $\mathcal{D}'^*(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, imaju sledeće osobine:*

(i) Neka je $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j$ otvoren pokrivač od Ω u $\mathbb{R}^d$. Ako je $f \in \mathcal{D}'^*(\Omega)$ i $f|_{\Omega_j} = 0$ za sve $j \in \mathbb{N}$ tada je $f = 0$.

(ii) Neka je $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j$ otvoren pokrivač od Ω u $\mathbb{R}^d$. Ako su $f_j \in \mathcal{D}'^*(\Omega_j)$ kompatibilni u smislu $f_i|_{\Omega_i \cap \Omega_j} = f_j|_{\Omega_i \cap \Omega_j}$ za sve $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, $i, j \in \mathbb{N}$, tada postoji $f \in \mathcal{D}'^*(\Omega)$ takav da je $f|_{\Omega_i} = f_i$.

(iii) *Neka je* F *relativno zatvoren skup u* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. *Ako je* $f \in \mathcal{D}'^*(\Omega_1)$ *u otvorenoj okolini* Ω_1 *od* F *u* Ω, *tada postoji* $g \in \mathcal{D}'^*(\Omega)$ *tako da je* $f|_{\Omega_2} = g|_{\Omega_2}$ *u otvorenoj okolini* Ω_2 *od* F *u* Ω.

Navodimo Pali Vinerovu teoremu za ultradiferencijabilne funkcije, kao i Pali Vinerovu teoremu za ultradistribucije.

Teorema 1.2. *[26, Teorema 2.22] Neka je* K *konveksan kompaktan skup u* $\mathbb{R}^d$. *Cela funkcija* $\tilde{\varphi}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}^d$ *je Furije-Laplasova transformacija funkcije* $\varphi \in \mathcal{D}_K^{(t)}$ *(resp.* $\varphi \in \mathcal{D}_K^{\{t\}}$*), tj.*

$$\tilde{\varphi}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-\langle x,\zeta\rangle} dx,$$

ako i samo ako za sve $h > 0$ *postoji konstanta* C *(postoje* $h > 0$ *i* $C > 0$*) tako da vredi*

$$|\tilde{\varphi}(\zeta)| \leq C e^{-h|x|^{1/t} + \sup_{x\in K} Im\langle x,\zeta\rangle}.$$

Teorema 1.3. *[26, Teorema 2.23] Neka je* K *konveksan kompaktan skup u* $\mathbb{R}^d$. *Tada, za celu funkciju* $\tilde{\varphi}(\zeta)$ *u* $\mathbb{C}^d$, *su sledeća tri uslova ekvivalentna:*

1. $\tilde{\varphi}(\zeta)$ *je Furije-Laplasova transformacija funkcije* $\varphi \in \mathcal{D}'^*_K$.
2. *Postoje* $h > 0$ *i* $C > 0$ *(resp. za sve* $h > 0$ *postoji* $C > 0$*) tako da*

$$|\tilde{\varphi}(\xi)| \leq C e^{h|\xi|^{1/t}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

U oba slučaja, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, *postoji konstanta* $C_\varepsilon > 0$ *tako da vredi*

$$|\tilde{\varphi}(\zeta)| \leq C_\varepsilon e^{\sup_{x\in K} Im\langle x,\zeta\rangle + \varepsilon|\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d.$$

3. *Postoje* $h > 0$ *i* $C > 0$ *(resp. za sve* $h > 0$ *postoji* $C > 0$*) tako da*

$$|\tilde{\varphi}(\zeta)| \leq C e^{h|\zeta|^{1/t} + \sup_{x\in K} Im\langle x,\zeta\rangle}, \quad \zeta \in \mathbb{C}^d.$$

U radu koristimo Gelfand-Šilovi prostore $\mathcal{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ i $\mathcal{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ koji su definisani na sledeći način:

$$\mathcal{S}_h^t(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) : (\exists C > 0)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d)\left(\frac{\|x^\alpha \partial^\beta f\|_2}{h^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!^t \beta!^t} \leq C\right) \right\},$$

$$\mathcal{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d) = \varprojlim_{h\to 0} \mathcal{S}_h^t(\mathbb{R}^d), \quad \mathcal{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d) = \varinjlim_{h\to\infty} \mathcal{S}_h^t(\mathbb{R}^d).$$

Primetimo da su Gelfand-Šilovi prostori protprostori Švarcovog prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ti prostori su invarijantni u odnosu na Furijeovu transformaciju. Prostor $\mathcal{S}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ netrivijalan ako je $t > 1/2$, dok je $\mathcal{S}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ netrivijalan ako je $t \geq 1/2$. Oba prostora označavamo sa $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, a njihove duale koji se nazivaju prostorima temperiranih ultradistribucija označavamo sa $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$. Ermitov polinom i odgovarajuće Ermitove funkcije su definisane sa

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n (e^{-x^2}),$$
$$h_n(x) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} e^{-x^2/2} H_n(x),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

d-Dimenzionalne Ermitove funkcije

$$h_n(x) = h_{n_1}(x_1)...h_{n_d}(x_d),\ x \in \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{Z}_+^d,$$

formiraju ortonormiranu bazu prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ i one su sopstvene funkcije proizvoda

$$H^\alpha = \prod_{i=1}^{d} \left(-\partial^2/\partial x_i^2 + x_i^2\right)^{\alpha_i}$$

jednodimenzionog Ermitovog harmonijskog oscilatora $H = \prod_{i=1}^d \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + x_i^2\right)$, tj.

$$H^\alpha h_k(x) = (2k + \mathbf{1})^\alpha h_k(x) = \prod_{i=1}^{d} (2k_i + 1)^{\alpha_i} h_k(x),$$

$x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha, k \in \mathbb{Z}_+^d,\ \mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$. Primetimo da je H samoadjungovan operator. Za $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, Ermitovi koeficijenti su

$$a_\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) h_\alpha(x) dx = (f, h_\alpha)_{L^2},\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Ako je $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i ako su a_α Ermitovi koeficijenti od f, tada važi

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 dx = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_\alpha|^2 \ \text{(Parsevalova jednakost).} \tag{1.1}$$

Definišimo prostore Ermitovih koeficijenata elemenata iz $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ sa

$$\mathbf{s}^* = \big\{(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \ \text{za sve (resp. postoji) } h > 0 : \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_\alpha|^2 e^{h|\alpha|^{1/(2t)}} < \infty\big\}.$$

Navodimo tvrđenja iz [5] koja koristimo u nastavku.

Lema 1.6. *Neka je $t > 1/2$ (resp. $t \geq 1/2$). Preslikavanje između $\mathcal{S}^{(t)}$ (resp. $\mathcal{S}^{\{t\}}$) i prostora Ermitovih koeficijenata $\mathbf{s}^{(t)}$ (resp. $\mathbf{s}^{\{t\}}$), $f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha \to (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d}$ je topološki izomorfizam.*

Teorema 1.4. *Ako za sve $f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha \in X$ postoje pozitivne konstante C_f, c_f i s_f za koje je*

$$|a_\alpha| \leq C_f e^{-h|\alpha|^{s_f}} \text{ za sve } h > 0 \text{ (resp. } |a_\alpha| \leq C_f e^{-c_f|\alpha|^{s_f}}), \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d,$$

tada važi

$$s_f = \frac{1}{2t}.$$

Odavde sledi $X = \mathcal{S}^{(t)}$ (resp. $X = \mathcal{S}^{\{t\}}$).

Teorema 1.5. *Pretpostavimo da je $t > 1/2$ (resp. $t \geq 1/2$).*

1. *Neka je $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ako za neko $h > 0$ i neko $C > 0$ (resp. za sve $h > 0$ postoji $C > 0$) važi*

$$\|x^\alpha \partial^\beta f\|_2 \leq C h^{-|\alpha|-|\beta|} \alpha!^t \beta!^t, \tag{1.2}$$

   tada je $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha$ i postoje $C > 0$ i $\delta > 0$ (resp. za sve $\delta > 0$ postoji $C > 0$) tako da

$$|a_\alpha| \leq C e^{\delta |\alpha|^{1/(2t)}}, \ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d. \tag{1.3}$$

2. *Ako $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha$ ispunjava uslov (1.3) za neke $C > 0$ i $\delta > 0$ (resp. za sve $\delta > 0$ postoji $C > 0$), tada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ i (1.2) vredi za neke $h > 0$ i $C > 0$ (resp. za sve $h > 0$ postoji $C > 0$).*

Važi

$$\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}^{'*}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}'^*(\mathbb{R}^d),$$

gde $\hookrightarrow$ znači da je identično preslikavanje neprekidno i gusto potapanje.

Niz oblika $\delta_n = n^d \varphi(n\cdot), n \in \mathbb{N}$, gde je $\varphi \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d)$, $\varphi = 1$ u $B(0, 1/2)$, $\varphi = 0$ izvan $B(0,1)$ ($B(x_0, r)$ je zatvorena lopta sa centrom x_0 poluprečnika r) nazivamo delta niz u $\mathcal{D}'^*(\mathbb{R}^d)$.

1.4 Ultradiferencijalni operatori

Izraz $P(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, predstavlja ultradiferencijalni operator Berlingove klase $(p!^t)$ (resp. Rumijeove klase $\{p!^t\}$) ako važi

$$(\exists h > 0,\ \exists C > 0)\,(\text{resp. } \forall h > 0,\ \exists C > 0)\,(\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^d)(|a_\alpha| \leq C\frac{h^{|\alpha|}}{\alpha!^t}).$$

U Rumijeovom slučaju imamo još jednu ekvivalentnu definiciju:

Postoje $(r_p)_p \in \mathcal{R}$ i $C > 0$ takvi da važi

$$|a_\alpha| \leq \frac{C}{\alpha!^t \prod_{i \leq |\alpha|} r_i},\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Tada, na osnovu [22, Propozicija 4.5], odgovarajući ultra-polinom $P(\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \xi^\alpha$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, ispunjava

$$(\exists h > 0,\ \exists C > 0)(\text{resp. } \forall h > 0,\ \exists C > 0)(\forall \xi \in \mathbb{R}^d)(|P(\xi)| \leq Ce^{h|\xi|^{1/t}}).$$

Takođe, u Rumijeovom slučaju imamo još jednu ekvivalentnu definiciju:

Postoje $(r_p)_p \in \mathcal{R}$ i $C > 0$ takvi da važi

$$|P(\xi)| \leq Ce^{c(|\xi|)^{1/t}},\ \xi \in \mathbb{R}^d,$$

gde je c funkcija koja zavisi od niza $(r_p)_p \in \mathcal{R}$ (orginalno subordinate function), tj. od niza $(N_p)_p = \left(p!^t \prod_{i=1}^{p} r_i\right)_p$ i koja je definisana sa

$$M(c(\rho)) = N_{(r_p)}(\rho), \rho > 0.$$

Prisetimo se da definicije funkcije $c(\rho), \rho > 0$, (videti [22]): To je rastuća funkcija za koju je $c(\rho)/\rho \to 0,\ \rho \to \infty$ i $c(0) = 0$.

Označimo sa $\mathcal{P}^{(t)}$ (resp. $\mathcal{P}^{\{t\}}$) klasu Berlingovih (resp. Rumijeovih) ultradiferencijalnih operatora oblika

$$P_r(D) = (1 + D_1^2 + \ldots + D_d^2)^l \prod_{p=1}^{\infty}\left(1 + \frac{D_1^2 + \ldots + D_d^2}{r^2 p^{2t}}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p D^p, \quad (1.4)$$

gde su $r > 0$, $l \geq 0$ (resp., oblika

$$P_{r_p}(D) = (1 + D_1^2 + \ldots + D_d^2)^l \prod_{p=1}^{\infty}\left(1 + \frac{D_1^2 + \ldots + D_d^2}{r_p^2 p^{2t}}\right) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p D^p, \quad (1.5)$$

gde su $(r_p)_p \in \mathcal{R}$ i $l \geq 0$). Tada za odgovarajuće ultra-polinome važi:

U Berlingovom slučaju postoje konstante $C, C_1, C_2 > 0$, $h, h_1, h_2 > 0$ tako da imamo sub-eksponencijalni rast:

$$\begin{aligned} Ce^{h|\xi|^{1/t}} \leq |P_r(\xi)| \leq C_1 e^{h_1|\xi|^{1/t}}, \xi \in \mathbb{R}^d \\ \text{i } |a_p| \leq C_2 h_2^p / p!^t, p \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \tag{1.6}$$

U Rumijeovom slučaju, uz isti dokaz kao za niz $(M_p)_p$, sledi da za niz $(r_p)_p \in \mathcal{R}$ i funkciju $c(|\xi|)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, koja zavisi od tog niza postoji $C > 0$ tako da je

$$Ce^{c(|\xi|)^{1/t}} \leq |P_{r_p}(\xi)|, \ \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{1.7}$$

Da bismo imali $(1+|\xi|^2)^l \leq Ce^{c(|\xi|)^{1/t}}, \xi \in \mathbb{R}^d$, moramo da uzmemo sporo rastući niz $(r_{0,p})_p \in \mathcal{R}$ koji je dovoljno spor i njegovu odgovarajuću funkciju c_0 tako da za sve $l \geq 0$ postoji $C > 0$ tako da važi

$$(1+|\xi|^2)^l |P_{r_p}(\xi)| \leq Ce^{c_0(|\xi|)^{1/t}}, \ \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{1.8}$$

Na primer, ako je $r_p = p^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, tada je $c(|\xi|) = h_0|\xi|^{t/(t+\varepsilon)}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ za odgovarajuće $h_0 > 0$. U opštem slučaju, koristićemo osobine funkcije c koje slede. Najvažnija osobina takve funkcije sledi iz [22, Lema 3.12] (videti takođe Lemu 3.10 u [22]):

Neka je $\widetilde{c} = 2c$. Tada postoji niz $(r_{0,p})_p \in \mathcal{R}$, $(N_{0,p})_p = (p!^t \prod_{i=1}^p r_{0,i})_p$ i funkcija c_0 koja zavisi od niza $(N_{0,p})_p$ ispunjava nejednakost

$$M(\widetilde{c}(\rho)) \leq N_{(r_{0,p})}(\rho) = M(c_0(\rho)), \ \rho > 0.$$

To znači da za funkciju c_0 koja zavisi od niza $(N_{0,p})_p$ važi

$$c_0(\rho) \geq \widetilde{c}(\rho) \geq 2c(\rho), \ \rho > 0.$$

Dakle, ovo razmatranje formulišemo na sledeći način.

Lema 1.7. *Za funkciju $c(\rho), \rho > 0$ (koja odgovara nizu $(r_p)_p \in \mathcal{R}$) i $h > 0$ postoje: niz $(r_{0,p})_p \in \mathcal{R}$, odgovarajući niz $(N_{0,p})_p = (p!^t \prod_{i=1}^p r_{0,i})_p$ i funkcija $c_0(\rho), \rho > 0$, koja zavisi od tog niza tako da važi*

$$c_0(\rho) \geq hc(\rho), \ \rho > 0.$$

U specijalnom slučaju, za datu funkciju c postoji funkcija c_0 (obe odgovaraju pogodno izabranim nizovima iz $\mathcal{R}$) takva da važi $c_0(\rho) \geq c(2\rho)$, $\rho > 0$.

U nastavku koristimo sledeće tvrđenje.

Lema 1.8. *(a) Neka je* $P_r \in \mathcal{P}^{(t)}$ *(resp.* $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$*). Tada postoje* $r_0 > 0$ *(resp.* $(r_{0,p})_p \in \mathcal{R}$*),* $C > 0$ *i* $\varepsilon > 0$ *takvi da važi*

$$|D^\alpha P_r(x)| \le C\frac{\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}e^{r_0|x|^{1/t}},\ x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathbb{Z}^d_+$$

$$(\textit{resp.}\quad |D^\alpha P_{r_p}(x)| \le C\frac{\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}e^{c_{r_{0,p}}(|x|)^{1/t}},\ x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathbb{Z}^d_+),$$

gde je $c_{r_{0,p}}(\rho)$*,* $\rho > 0$ *funkcija koja zavisi od niza* $(r_{0,p})_p \in \mathcal{R}$*.*
(b) Neka je $P_{\widetilde{r}} \in \mathcal{P}^{(t)}$ *(resp.* $P_{\widetilde{r}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$*). Tada postoje* $\widetilde{r}_0 > 0$ *(resp.* $(\widetilde{r}_{0,p})_p \in \mathcal{R}$*),* $C > 0$ *i* $\varepsilon > 0$ *takvi da*

$$|D^\alpha (1/P_r(x))| \le C\frac{\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}e^{-\widetilde{r}_0|x|^{1/t}},\ x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathbb{Z}^d_+$$

$$(\textit{resp.}\quad \left|D^\alpha \left(1/P_{\widetilde{r}_p}(x)\right)\right| \le C\frac{\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}e^{-c_{\widetilde{r}_{0,p}}(|x|)^{1/t}},\ x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathbb{Z}^d_+),$$

gde je $c_{\widetilde{r}_{0,p}}(\rho)$*,* $\rho > 0$ *funkcija koja zavisi od niza* $(\widetilde{r}_{0,p})_p \in \mathcal{R}$*.*

Dokaz. Za dokaz oba dela tvrđenja koristimo Lemu 1.7 i Košijevu integralnu formulu za ultra-polinome po krugu $K_\varepsilon = K(x,\varepsilon)$ oko svake tačke $x \in \mathbb{R}^d$

$$\partial^\gamma(1/P_{r_p})(x) = (2\pi i)^{-d}\prod_{i=1}^{d}\alpha_i!\int_{K_\varepsilon}\frac{(1/P_{r_p}(\zeta))}{(\zeta - x)^{\alpha+\mathbf{1}}}d\zeta.$$

Dokaz dela (b) je dat u [40, Lemma 2.1]. Zapravo, tu je dokazano

$$\left|D^\alpha \left(1/P_{\widetilde{r}_p}(x)\right)\right| \le C\frac{\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}}e^{-N_{(\widetilde{r}_p)}(|x|)},\ x \in \mathbb{R}^d,\ \alpha \in \mathbb{Z}^d_+,$$

ali na osnovu [22, Lema 3.10] je $N_{(\widetilde{r}_p)}(|x|) = M(c_{\widetilde{r}_p}(|x|)) = Cc_{\widetilde{r}_p}(|x|)^{1/t}$, $x \in \mathbb{R}^d$. Korištenjem Leme 1.7 možemo konstruisati niz $c_{\widetilde{r}_{0,p}}(|x|) = Cc_{\widetilde{r}_p}(|x|)$, $|x| > 0$ odakle sledi tvrđenje.

Dokaz dela (a) je Propozicija 4.5 iz [22] (videti i poslednji deo dokaza Teoreme 10.2 iz [22]). □

Sa $\mathcal{P}^*$ označavamo operatore iz $\mathcal{P}^{(t)}$ (resp. iz $\mathcal{P}^{\{t\}}$). Za s-temperirane ultradistribucije ćemo koristiti skupove $\mathcal{P}^{2*}$ (videti poglavlje 3.1) . Prostore odgovarajućih ultradiferencijabilnih funkcija označavamo sa $\mathcal{P}^*_u$ i $\mathcal{P}^{2*}_u$. Ova notacija nam omogućava da napravimo razliku između $P(D)$, $P(H)$ ili $P(x)$, $P(\xi)$. U nastavku ćemo uglavnom koristiti operatore oblika (1.4) i (1.5). Napisaćemo ukoliko budemo koristili opšti oblik. Ako su $P_1, P_2 \in \mathcal{P}^*$, tada važi (videti [22])

$$P_1(D)P_2(D) = P_2(D)P_1(D). \tag{1.9}$$

U nastavku takođe koristimo da za $q \in [1, \infty]$ i ultra-polinom $P_r \in \mathcal{P}_u^{(t)}$ (resp. $P_{r_p} \in \mathcal{P}_u^{\{t\}}$) postoje ultra-polinomi $P_{\widetilde{r}}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}} \in \mathcal{P}_u^{(t)}$ (resp. $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}_u^{\{t\}}$) takvi da važi:

$$\frac{P_r}{P_{\widetilde{r}}},\ \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_r}{P_{\widetilde{\widetilde{r}}}}\right) \in L^q(\mathbb{R}^d) \ \ (\text{resp. } \ \frac{P_{r_p}}{P_{\widetilde{r}_p}},\ \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_{r_p}}{P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}}\right) \in L^q(\mathbb{R}^d)). \tag{1.10}$$

Isto tako, za ultra-polinome iz $\mathcal{P}_u^{2*}$ važi:

$$\frac{P_r(2\alpha + \mathbf{1})}{P_{\widetilde{r}}(2\alpha + \mathbf{1})} \in l^q \ \ (\text{resp. } \frac{P_{r_p}(2\alpha + \mathbf{1})}{P_{\widetilde{r}_p}(2\alpha + \mathbf{1})} \in l^q) \tag{1.11}$$

gde je $P(2\alpha + \mathbf{1}) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \prod_{i=1}^{d} (2\alpha_i + 1)^{k_i},\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^d$.

Lema 1.9. *([5, 35]) (a) $\varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako za sve $P \in \mathcal{P}^*$, $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ važi*

$$\gamma_{P,P_1}(\varphi) = \|P_1 P(-D)\varphi\|_2 < \infty.$$

(b) Neka su $\varphi_n,\ \varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ takvi da $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} \varphi$, $n \to \infty$ i $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$. Tada

$$P_1 P(-D)\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} P_1 P(-D)\varphi,\ n \to \infty.$$

(c) Neka su $\varphi_n,\ \varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ takvi da $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} \varphi$, $n \to \infty$. Tada

$$P(H)\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} P(H)\varphi,\ n \to \infty.$$

Teorema 1.6. *([5, Teorema 2.6.1])(Teorema o reprezentaciji) $f \in \mathcal{S}'^*$ ako i samo ako je f oblika*

$$f = P(D)F$$

gde $P \in \mathcal{P}^*$ i F je neprekidna funkcija za koju važi (1.6) *u Berlingovom, (resp.* (1.8) *u Rumijeovom) slučaju.*

Glava 2

Sekvencijalne ultradistribucije

U ovoj glavi ćemo uvesti pojam fundamentalnih nizova, na osnovu kojih ćemo razviti sekvencijalnu teoriju ultradistribucija. s-Ultradistribucije će biti definisane pomoću nizova glatkih funkcija definisanih na otvorenom skupu Ω i ultradiferencijalih operatora $P_{r_p}(D)$ u Rumijeovom slučaju i $P_r(D)$ u Berlingovom slučaju. Tvrđenja ćemo dokazivati samo u Rumijeovom slučaju, jer se Berlingov slučaj dokazuje na isti način. Definisaćemo neke osnovne operacije sa s-ultradistribucijama, kao što su zbir, razlika, množenje skalarom, diferenciranje i množenje glatkom funkcijom iz $\mathcal{E}^*(\Omega)$. Uvešćemo i pojam konvergencije nizova u prostorima s-ultradistribucija, delovanje s-ultradistrubucija na elemente iz $\mathcal{D}'^*(\Omega)$ kao i pojam sekvencijalne neprekidnosti s-ultradistribucija.

2.1 Fundamentalni nizovi s-ultradistribucija

Ako je $P \in \mathcal{P}^*$ i ako je F lokalno integrabilna funkcija sa nosačem sadržanim u kompaktnom skupu $K \subset\subset \Omega$, tada je $P(\xi)\mathcal{F}(F)(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ funkcija sub-eksponencijalnog rasta u $\mathbb{R}^d$. Ako je inverzna Furijeova transformacija $\mathcal{F}^{-1}(P\widehat{F})$ lokalno integrabilna funkcija, onda definišemo

$$P(D)F(x) = \mathcal{F}^{-1}(P\widehat{F})(x),\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.1}$$

Jednakost (2.1) nam pokazuje dejstvo ultradiferencijalnog operatora $P(D)$ na glatku, kompaktno podržanu funkciju. Dakle, ako je F kompaktno podržana glatka funkcija tj, supp $F \subset K_1 \subset\subset \Omega$ i ako je $P \in \mathcal{P}^*$ oblika $P(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha D^\alpha$, onda možemo pretpostaviti da egzistencija leve strane od (2.1) znači

$$P(D)F(x) = \lim_{k\to\infty} P_k(D)F(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha F(x), \quad x \in K, \tag{2.2}$$

gde granična vrednost (2.2) postoji za svako $x \in K$ i takva granica je glatka funkcija u K. Prema tome, ovaj limes definiše $f(x) = P(D)F(x), x \in K$, i daje nam smisao izraza (2.3), datog u sledećoj definiciji.

Definicija 2.1. *Niz $(f_n)_n$ glatkih funkcija je fundamentalan u Ω ako za sve $K \subset\subset \Omega$ i K_1, $K_1 \subset\subset \Omega$, $K \subset \overset{\circ}{K_1}$ ($\overset{\circ}{K_1}$ je unutrašnjost od K_1), postoje: niz $(F_n)_n$ glatkih funkcija u Ω, neprekidna funkcija F u Ω i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da*

$$f_n = P(D)F_n \ u \ \ K, \ \operatorname{supp} F_n, \operatorname{supp} F \subset K_1 \ \ i \ F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F, \ n \to \infty. \tag{2.3}$$

Jednakost u (2.3) zapravo podrazumeva postojanje granične vrednosti u (2.2). Uvek ćemo uzimati kompaktan skup K_1 dovoljno blizu K, tj. $K \subset\subset \overset{\circ}{K_1} \subset \Omega$ i u nastavku to nećemo napominjati, jer korištenjem odgovarajuće funkcije sečenja (to je funkcija jednaka 1 na K, a ima vrednost 0 izvan K_1) može se pokazati da ova definicija ne zavisi od izbora K_1.

Direktno iz Definicije 2.1 dobijamo sledeće:

Napomena 2.1. 1° *U Definiciji 2.1 možemo posmatrati sve ultradiferencijalne operatore klase $*$, ne samo one u $\mathcal{P}^*$. Tada je definicija uopštena i ona je ekvivalentna sa datom koja je tehnički jednostavnija.*

2° *Neka su Ω_1, Ω otvoreni skupovi u $\mathbb{R}^d$ takvi da je $\Omega_1 \subset \Omega$. Ako je niz $(f_n)_n$ fundamentalan u Ω, onda je on fundamentalan i u Ω_1.*

3° *Neka je $(f_n)_n$ niz glatkih funkcija u Ω. Ako je za svaki otvoren skup $\Omega_0 \subset \Omega$ niz $(f_{n|\Omega_0})_n$ fundamentalan, tada je on fundamentalan i u Ω.*

Definicija 2.2. *Fundamentalni nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ su u relaciji $\sim$, i pišemo*

$$(f_n)_n \sim (g_n)_n,$$

ako za svaki kompaktan skup $K \subset\subset \Omega$ postoje: nizovi $(F_n)_n$, $(G_n)_n$ glatkih funkcija u Ω, neprekidna funkcija F u Ω i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da:

(*i*) $f_n = P(D)F_n, \quad g_n = P(D)G_n \ u \ K, \ \operatorname{supp} F_n, \operatorname{supp} G_n, \operatorname{supp} F \subset K_1,$

(*ii*) $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F, \ G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F, \ n \to \infty.$

Koristićemo oznaku

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)}\xleftarrow{\mathcal{C}(K)} G_n,\ n \to \infty,$$

ako nizovi $(F_n)_n$ i $(G_n)_n$ konvergiraju u $\mathcal{C}(K)$ ka istoj granici.

Iz prethodne definicije direktno sledi da su fundamentalni nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ u relaciji $\sim$ ako je niz

$$f_1,\ g_1,\ f_2,\ g_2,\ f_3,\ g_3,\dots \tag{2.4}$$

fundamentalan.

Kako bismo pokazali da je $\sim$ relacija ekvivalencije, koristićemo sledeće tri propozicije.

Propozicija 2.1. *Neka su $K_0 \subset\subset \overset{\circ}{K}, K \subset\subset \Omega$ takvi da niz $(f_n)_n$ zadovoljava uslove Definicije 2.1, tj.*

$$f_n = P_{r_p}(D)F_n \ \ u\ \ K,\ \operatorname{supp} F_n, \operatorname{supp} F \subset K_1 \ \ i\ \ F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F,\ n \to \infty.$$

Tada postoje: ultradiferencijalni operator $P_{\widetilde{r}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takav da $\mathcal{F}^{-1}\left(P_{r_p}/P_{\widetilde{r}_p}\right) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, niz $(\widetilde{F}_n)_n$ glatkih funkcija i neprekidna funkcija $\widetilde{F}$ u Ω tako da

$$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_n \ \ u\ \ K_0,\ \operatorname{supp} \widetilde{F}_n, \operatorname{supp} \widetilde{F} \subset K_1 \ \ i\ \ \widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} \widetilde{F},\ n \to \infty.$$

Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju (sa odgovarajućom notacijom).

Dokaz. Na osnovu (1.10) možemo izabrati niz $(\widetilde{r}_p)_p \in \mathcal{R}$ takav da je

$$\mathcal{F}^{-1}\left(P_{r_p}/P_{\widetilde{r}_p}\right) \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Izaberimo funkcije

$$\widetilde{F}_n = \kappa_K\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_{r_p}}{P_{\widetilde{r}_p}}\right) * (\kappa_{K_0}F_n)\right),\ n \in \mathbb{N},$$

i

$$\widetilde{F} = \kappa_K\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_{r_p}}{P_{\widetilde{r}_p}}\right) * (\kappa_{K_0}F)\right),$$

gde su κ_K i κ_{K_0} glatke funkcije u $\mathcal{D}^{\{t\}}(\Omega)$ takve da je

$$\kappa_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \in K \\ 0, & \text{ako } x \in K_1^C \end{cases} \ \text{ i }\ \kappa_{K_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \in K_0 \\ 0, & \text{ako } x \in K^C. \end{cases} \tag{2.5}$$

Tada važi

$$
\begin{aligned}
P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_n(x) &= P_{\widetilde{r}_p}(D)\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_{r_p}}{P_{\widetilde{r}_p}}\right) * (\kappa_{K_0}F_n)\right)(x) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(P_{r_p}) * (\kappa_{K_0}F_n)(x) \\
&= P_{r_p}(D)(\kappa_{K_0}F_n)(x) \\
&= P_{r_p}(D)F_n(x) = f_n(x), \quad x \in K_0
\end{aligned}
$$

i $\operatorname{supp}\widetilde{F}_n, \operatorname{supp}\widetilde{F} \subset K_1$. Kako $\mathcal{F}^{-1}\left(P_{r_p}/P_{\widetilde{r}_p}\right) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ i $(\kappa_{K_0}F_n) \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} (\kappa_{K_0}F)$, $n \to \infty$, sledi da $\widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} \widetilde{F}$, $n \to \infty$, što je i trebalo pokazati. $\square$

Propozicija 2.2. *Ako za svaki $K \subset\subset \Omega$ postoje: ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$, niz $(F_n)_n$ glatkih funkcija i neprekidna funkcija F u Ω, $\operatorname{supp}F_n, \operatorname{supp}F \subset K_1$, takvi da $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F$ kad $n \to \infty$ i $P(D)F_n \to 0$ tačkasto u K kad $n \to \infty$, tada je $F = 0$ u Ω.*

U specijalnom slučaju, ako je F glatka funkcija u Ω i ako je $P(D)F(x) = 0$, $x \in \Omega$, tada je $F = 0$ u Ω.

Dokaz. Neka je κ_K kao u (2.5), pri čemu je $K \subset\subset \overset{\circ}{K}_1, K_1 \subset\subset \Omega$. Tada važi

$$
\lim_{n\to\infty} P(D)(\kappa_K F_n)(x) = 0,\ x \in K, \quad (\kappa_K F_n) \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} (\kappa_K F),\ n \to \infty.
$$

Dalje, iz $P(D)(\kappa_K F_n) = \lim_{m\to\infty} P_m(D)(\kappa_K F_n)$ u $\mathbb{R}^d$ sledi

$$
P_m(\xi)\widehat{\kappa_K F_n} \to P(\xi)\widehat{\kappa_K F_n}, \quad m \to \infty, \quad \xi \in \mathbb{R}^d
$$

i

$$
\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} P_m(\xi)\widehat{\kappa_K F_n} = \lim_{n\to\infty} P(\xi)\widehat{\kappa_K F_n} = 0,\ \xi \in \mathbb{R}^d.
$$

Dakle,

$$
(\widehat{F_n\kappa_K})(\xi) - (\widehat{F\kappa_K})(\xi) \to 0,\ \xi \in \mathbb{R}^d,\ n \to \infty,
$$

tačkasto, odakle sledi da za svako $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$
P(\xi)((\widehat{F_n\kappa_K})(\xi) - (\widehat{F\kappa_K})(\xi)) \to 0 \ \text{ kad } n \to \infty,
$$

a odakle dobijamo

$$
P(\xi)(\widehat{F\kappa_K})(\xi) = 0 \ \text{ i } \ (\widehat{F\kappa_K})(\xi) = 0,\ \xi \in \mathbb{R}^d.
$$

Prema tome $F(x)\kappa_K(x) = 0$ za svaki $x \in K$. Kako je funkcija F neprekidna u K dobijamo da je $F = 0$ u K. Dakle, $F = 0$ u Ω jer je $K \subset\subset \Omega$ proizvoljan. Specijalni slučaj je jasan ako stavimo $F_n = F$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Propozicija 2.3. *Neka su* $K \subset\subset \Omega$, $K \subset\subset \overset{\circ}{\widetilde{\widetilde{K}}}$, $\widetilde{K} \subset\subset \widetilde{K}_1 \subset\subset \Omega$ *i neka je*

$$f_n(x) = P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_n(x),\ x \in \widetilde{K},\ \operatorname{supp}\widetilde{F}_n, \operatorname{supp}\widetilde{F} \subset \widetilde{K}_1,\ n \in \mathbb{N}$$

i $\widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\widetilde{K})} \widetilde{F}$, $n \to \infty$. *Štaviše, pretpostavimo da je* $f_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_n$ *u* $\widetilde{\widetilde{K}}$, $\operatorname{supp}\widetilde{\widetilde{F}}_n, \operatorname{supp}\widetilde{\widetilde{F}} \subset \widetilde{\widetilde{K}}_1$, $n \in \mathbb{N}$ *i* $\widetilde{\widetilde{F}}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\widetilde{\widetilde{K}})} \widetilde{\widetilde{F}}$, $n \to \infty$, *gde su* $K \subset\subset \overset{\circ}{\widetilde{\widetilde{K}}}$, $\widetilde{\widetilde{K}} \subset\subset \widetilde{\widetilde{K}}_1 \subset\subset \Omega$. *Tada postoje: ultradiferencijalni operator* $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ *takav da je*

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_{\widetilde{r}_p}}{P_{r_p}}\right), \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}}{P_{r_p}}\right) \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

nizovi $(F_{n,1})_n$, $(F_{n,2})_n$ *glatkih funkcija sa nosačem u* $K_1 \subset\subset \Omega$, $K \subset\subset \overset{\circ}{K}_1$ *i neprekidne funkcije* F_1, F_2 *u* Ω, $\operatorname{supp} F_1, \operatorname{supp} F_2 \subset K_1$, *tako da važi*

$$f_n = P_{r_p}(D)F_{n,1} \ \text{ u } K,\ \ F_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_1,\ n \to \infty, \tag{2.6}$$

$$f_n = P_{r_p}(D)F_{n,2} \ \text{ u } K,\ \ F_{n,2} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_2,\ n \to \infty. \tag{2.7}$$

Štaviše, $F_1 = F_2$ *u* Ω.

Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju (sa odgovarajućom notacijom).

Dokaz. Postojanje ultradiferencijalnog operatora $P_{r_p}(D)$ sledi iz (1.10). Izaberimo funkcije

$$F_{n,1} = \kappa_{\widetilde{K}\cap\widetilde{\widetilde{K}}}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_{\widetilde{r}_p}}{P_{r_p}}\right) * (\kappa_K \widetilde{F}_n)\right),\ n \in \mathbb{N},$$

i

$$F_1 = \kappa_{\widetilde{K}\cap\widetilde{\widetilde{K}}}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_{\widetilde{r}_p}}{P_{r_p}}\right) * (\kappa_K \widetilde{F})\right),$$

gde su $\kappa_{\widetilde{K}\cap\widetilde{\widetilde{K}}}$ i κ_K glatke funkcije iz $\mathcal{D}^{\{t\}}(\Omega)$ takve da je

$$\kappa_{\widetilde{K}\cap\widetilde{\widetilde{K}}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \in \widetilde{K} \cap \widetilde{\widetilde{K}} \\ 0, & \text{ako } x \in (\widetilde{K}_1 \cap \widetilde{\widetilde{K}}_1)^C \end{cases},\ \kappa_K(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \in K \\ 0, & \text{ako } x \in (\widetilde{K} \cap \widetilde{\widetilde{K}})^C. \end{cases}$$

Tada važi

$$
\begin{aligned}
P_{r_p}(D)F_{n,1}(x) &= P_{r_p}(D)\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_{\widetilde{r}_p}}{P_{r_p}}\right) * (\kappa_K \widetilde{F}_n)\right)(x) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(P_{\widetilde{r}_p}) * (\kappa_K \widetilde{F}_n)(x) \\
&= P_{\widetilde{r}_p}(D)(\kappa_K \widetilde{F}_n)(x) \\
&= P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_n(x) = f_n(x), \quad x \in K
\end{aligned}
$$

i $\operatorname{supp} F_{n,1}, \operatorname{supp} F_1 \subset K_1$. Dalje,

$$
|F_{n,1} - F_1| \leq \int_{\kappa_{\widetilde{K}\cap\widetilde{\widetilde{K}}}} |\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_{\widetilde{r}_p}}{P_{r_p}}\right)(x-t)| \sup_{x\in K} |\widetilde{F}(t) - \widetilde{F}(t)| dt.
$$

Iz (1.10) dobijamo da $F_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_1$, $n \to \infty$. Ovim smo dokazali (2.6). Na sličan način definišimo $F_{n,2}$ sa ultradiferencijalnim operatorom $P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)$ i glatkim funkcijama $\widetilde{\widetilde{F}}_n$ (umesto $P_{\widetilde{r}_p}(D)$ i $\widetilde{F}_n$), $n \in \mathbb{N}$. Dokaz (2.7) se izvodi na na isti način kao i (2.6) (sa odgovarajućom notacijom). Na osnovu Propozicije 2.2 je $F_1 = F_2$ u Ω. $\square$

Jasno je da je relacija $\sim$ refleksivna i simetrična. Ono što želimo pokazati je tranzitivnost relacije $\sim$.

Propozicija 2.4. *Relacija $\sim$ je tranzitivna.*

Dokaz. Tvrđenje ćemo dokazati samo u Rumijeovom slučaju, jer je dokaz u Berlingovom slučaju isti. Pretpostavimo da je $(f_n)_n \underset{\circ}{\sim} (g_n)_n$ i $(g_n)_n \underset{\circ}{\sim} (h_n)_n$. Neka je $K \subset\subset \Omega$ kompaktan skup sa osobinom $K \subset\subset (\widetilde{K} \cap \widetilde{\widetilde{K}})$, $\widetilde{K} \cap \widetilde{\widetilde{K}} \subset \Omega$. Po Definiciji 2.2, za date kompaktne skupove $\widetilde{K}$ i $\widetilde{\widetilde{K}}$ postoje nizovi $(F_n)_n$, $(G_n)_n$, $(\widetilde{G}_n)_n$, $(H_n)_n$ glatkih funkcija u Ω, neprekidne funkcije $\widetilde{F}, \widetilde{\widetilde{F}}$ u Ω i ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da:

$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)F_n$, $g_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)G_n$ u $\widetilde{K}$, $\operatorname{supp} F_n, \operatorname{supp} G_n, \operatorname{supp} \widetilde{F} \subset \widetilde{K}_1$, $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\widetilde{K})} \widetilde{F}, G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\widetilde{K})} \widetilde{F}$, $n \to \infty$,

$g_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)\widetilde{G}_n$, $h_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)H_n$ u $\widetilde{\widetilde{K}}$, $\operatorname{supp} \widetilde{G}_n, \operatorname{supp} H_n, \operatorname{supp} \widetilde{\widetilde{F}} \subset \widetilde{\widetilde{K}}_1$, $\widetilde{G}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\widetilde{\widetilde{K}})} \widetilde{\widetilde{F}}, H_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\widetilde{\widetilde{K}})} \widetilde{\widetilde{F}}$, $n \to \infty$.

Na osnovu Propozicije 2.3 postoje konvergentni nizovi $(F_{n,1})_n$, $(G_{n,1})_n$, $(\widetilde{G}_{n,1})_n$, $(H_{n,1})_n$ glatkih funkcija sa nosačem u $K_1 \subset\subset \Omega$ i ultradiferencijani operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da nizove $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ i $(h_n)_n$ možemo zapisati u obliku:

$$f_n = P_{r_p}(D)F_{n,1},\ g_n = P_{r_p}(D)G_{n,1},\ g_n = P_{r_p}(D)\widetilde{G}_{n,1},\ h_n = P_{r_p}(D)H_{n,1} \text{ u } K.$$

Ako stavimo $\widetilde{H}_{n,1}(x) = G_{n,1}(x) - \widetilde{G}_{n,1}(x) + H_{n,1}(x)$, $x \in K$, tada je $h_n = P_{r_p}(D)\widetilde{H}_{n,1}$ u K i

$$F_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)}\xleftarrow{\mathcal{C}(K)} G_{n,1},\ G_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)}\xleftarrow{\mathcal{C}(K)} \widetilde{H}_{n,1},\ n \to \infty.$$

Time je dokaz tranzitivnosti završen. □

Kako je $\sim$ relacija ekvivalencije, skup svih fundamentalni nizova $(f_n)_n$ je podeljen na klase ekvivalencije bez zajedničkog elementa, tako da su svaka dva fundamentalna niza u istoj klasi ekvivalencije ako i samo ako su ekvivalentna.

Definicija 2.3. *Klase ekvivalencije fundamentalnih nizova, u oznaci $f = [f_n] = [(f_n)_n]$, se nazivaju sekvencijalne ultradistribucije, s-ultradistribucije. Sa $\mathcal{U}'^*(\Omega)$ označavamo skup svih s-ultradistribucija.*

Napomena 2.2. 1° *Korištenjem (2.4) i Propozicije 2.2 imamo da je $f = [f_n] = 0$ ako za svaki unapred zadati kompaktan skup K, postoji niz $(F_n)_n$ glatkih funkcija i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da*

$$f_n = P(D)F_n \text{ u } K,\ \operatorname{supp} F_n \subset K_1 \text{ i } F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} 0,\ n \to \infty.$$

2° *Neka je $f = [f_n]$ tako da $f = 0$ u Ω_1 za svaki otvoren skup $\Omega_1 \subset \Omega$, tada je $f = 0$ u Ω.*

Definicija 2.4. *Nosač s- ultradistribucije $f = [f_n]$ je komplement unije svih otvorenih skupova gde je $f = 0$.*

Kažemo da je s-ultradistibucija $f = [f_n]$, ili niz $(f_n)_n$, kompaktno podržana ako postoji kompaktan skup $K \subset\subset \mathbb{R}^d$ takav da je $\operatorname{supp} f_n \subset K, n \in \mathbb{N}$. To označavamo sa

$$\operatorname{supp} f \subset K,\ \text{ili}\ \operatorname{supp}(f_n)_n \subset K.$$

U tom slučaju postoje: niz glatkih funkcija $(F_n)_n$, neprekidna funkcija F, ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ i $K_1 \subset\subset \Omega$ tako da

$$f_n(x) = P(D)F_n(x),\ x \in \mathbb{R}^d,\ \operatorname{supp} F_n, \operatorname{supp} F \subset K_1 \text{ i } F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} F,\ n \to \infty.$$

Daćemo primere nizova koji su fundamentalni.

Primer 1. *Neka je F kompaktno podržana neprekidna funkcija u $\mathbb{R}^d$, $(\delta_n)_n$ delta niz iz prostora $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d)$ i neka je $F_n = F * \delta_n,\ n \in \mathbb{N}$. Tada je niz $(F_n)_n$ fundamentalan u $\mathbb{R}^d$.*

Primer 2. *Neka je $(f_n)_n$ fundamentalan niz u $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ i pretpostavimo da je $(K_n)_n$ rastući niz kompaktnih skupova sa osobinom $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ i neka je $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Dalje, neka su $\Omega_n = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > 1/n\}$, $\Omega_{n,n} = \{x \in \Omega_n : d(x, \partial\Omega_n) > 1/n\}$ otvoreni skupovi i $\kappa_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ funkcija sečenja takva da je*

$$\kappa_n(x) = \begin{cases} 1, & \textit{ako je } \ x \in \Omega_{n,n}; \\ 0, & \textit{ako je } \ x \in \Omega_n^C,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tada je niz

$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} (f_n(x)\kappa_n(x)) * \delta_n(x), & \textit{ako je } \ x \in \Omega_n; \\ \quad 0, & \textit{ako je } \ x \in \Omega_n^C,\ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

fundamentalan u Ω i važi $(f_n)_n \sim (\widetilde{f}_n)_n$.

Primer 3. *Pretpostavimo da je $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, da su Ω_n i $\Omega_{n,n}$ kao u Primeru 2, neka je $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ i*

$$F_n(x) = \begin{cases} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{f\kappa_n}(\xi)\widehat{\delta}_n(\xi)}{P_{r_p}(\xi)}\right)(x), & \textit{ako je } \ x \in \Omega; \\ \quad 0, & \textit{ako je } \ x \in \Omega_n^C,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Kako su $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i κ_n kao u Primeru 2, $n \in \mathbb{N}$, tada je $\widehat{f\kappa_n}$ ograničena polinomom. Koristeći (1.8) se može lako pokazati (na isti način kao u dokazu Propozicije 2.1) da je niz $(f_n)_n = ((f\kappa_n) * \delta_n)_n = (P_{r_p}(D)F_n)_n$ fundamentalan u Ω, tj. $[f_n] \in \mathcal{U}'^{\{t\}}(\Omega)$. Na sličan način možemo predstaviti f kao element prostora $\mathcal{U}'^{(t)}(\Omega)$ korštenjem ultradiferencijalnog operatora $P_r(D)$ umesto $P_{r_p}(D)$.

Napomena 2.3. *Ako je $(f_n)_n$ fundamentalan niz u Definiciji 2.1, tada znamo da za svaki kompaktan skup K $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F$ kad $n \to \infty$. Primer 1 i Primer 3 pokazuju nam da se svaki fundamentalan niz $(f_n)_n$ za koji važi (2.3) može identifikovati sa formalnom reprezentacijom $f = P(D)F$ u K, jer iz klasične teorije ultradistribucija znamo:*

$$(\forall K \subset\subset \Omega)(\exists P \in \mathcal{P}^*)(\exists F \in \mathcal{C}(\Omega))(\operatorname{supp} F \subset K_1, K_1 \subset\subset \Omega, K \subset \overset{\circ}{K}_1)$$

$$f = P(D)F \text{ u } K.$$

Ovo će biti dokazano kasnije korištenjem (2.8).

2.2 Operacije sa s-ultradistribucijama

2.2.1 Algebarske operacije

Neka su $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ s-ultradistribucije. Definišimo sumu s-ultradistibucija sa $f + g = [f_n + g_n]$ i pokažimo da $f + g \in \mathcal{U}'^*(\Omega)$, tj. pokažimo da je niz $(f_n + g_n)_n$ fundamentalan u Ω i da s-ultradistribucija $[f_n + g_n]$ ne zavisi od izbora fundamentalnih nizova $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$, tj. ako je $(f_n)_n \sim (\widetilde{f_n})_n$ i $(g_n)_n \sim (\widetilde{g}_n)_n$, tada $(f_n + g_n)_n \sim (\widetilde{f_n} + \widetilde{g}_n)_n$. Pokažimo da vrede ove osobine u Rumijeovom slučaju (Berlingov slučaj je isti).

Neka je $K \subset\subset \Omega$ kompaktan skup sa osobinom $K \subset\subset \overset{\circ}{(\widetilde{K} \cap \widetilde{\widetilde{K}})}$, $\overset{\circ}{\widetilde{K} \cap \widetilde{\widetilde{K}}} \subset \Omega$. Kako su nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ fundamentalni u Ω na osnovu Definicije 2.1 za date kompaktne skupove $\widetilde{K}$ i $\widetilde{\widetilde{K}}$ postoje nizovi $(F_n)_n$, $(G_n)_n$ glatkih funkcija u Ω, neprekidne funkcije F, G u Ω i ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da:
$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)F_n$ u $\widetilde{K}$, $\operatorname{supp} F_n, \operatorname{supp} F \subset \widetilde{K}_1$ i $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\widetilde{K})} F$, $n \to \infty$,
$g_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)G_n$ u $\widetilde{\widetilde{K}}$, $\operatorname{supp} G_n, \operatorname{supp} G \subset \widetilde{\widetilde{K}}_1$ i $G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\widetilde{\widetilde{K}})} G$, $n \to \infty$.
Na osnovu Propozicije 2.3 postoje nizovi $(F_{n,1})_n$, $(G_{n,1})_n$, glatkih funkcija sa nosačem u $K_1 \subset\subset \Omega$, neprekidne funkcije F_1, G_1 u Ω, $\operatorname{supp} F_1, \operatorname{supp} G_1 \subset K_1$, i ultradiferencijani operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da nizove $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ možemo zapisati u obliku:

$$f_n = P_{r_p}(D)F_{n,1}, \; g_n = P_{r_p}(D)G_{n,1} \text{ u } K,$$

$$F_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_1,\ G_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} G_1,\ n \to \infty.$$

Odavde sledi

$$f_n + g_n = P_{r_p}(D)(F_{n,1} + G_{n,1}) \text{ u } K,\ \operatorname{supp}(F_{n,1} + G_{n,1}), \operatorname{supp}(F_1 + G_1) \subset K_1$$

$$\text{i } \ F_{n,1} + G_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_1 + G_1 \text{ kad } n \to \infty,$$

tj. niz $(f_n + g_n)_n$ je fundamentalan. Iz (2.4) i Propozicije 2.3 sledi da s-ultradistribucija $[f_n + g_n]$ ne zavisi od izbora fundamentalnih nizova $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$.

Razlika $f - g$, s-ultradistribucija $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ je s-ultradistibucija $f - g = [f_n - g_n]$. Sa $\lambda f = [\lambda f_n]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ je definisano množenje s-ultradistibucije skalarom iz $\mathbb{C}$. Konzistencija ovih definicija se može proveriti na isti način kao i za zbir. Dakle, $\mathcal{U}'^*(\Omega)$ je vektorski prostor.

2.2.2 Diferenciranje

Prisetimo se da su Švarcove distribucije klase ekvivalencije fundamentalnih nizova koje su definisane na sličan način kao fundamentalni nizovi s-ultradistribucija. U tom slučaju koristimo deferencijalne operatore konačnog reda umesto ultradiferencijalnih operatora $P_r(D)$ ili $P_{r_p}(D)$ koje koristimo u slučaju s-ultradistribucija.

Neka je u Rumijeovom slučaju $f = [f_n]$ s-ultradistribucija i neka $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$. Definišimo $f^{(\beta)} = [f_n^{(\beta)}]$ i pokažimo da je niz $(f_n^{(\beta)})_n$ fundamentalan. Po Definiciji 2.1, za dati kompaktan skup $K \subset\subset \Omega$, s-ultradistribucija f je određena pomoću niza $(F_n)_n$ i ultradiferencijalnog operatora $P_{r_p}(D)$. Kako je $f_n^{(\beta)} = P_{r_p}(D)F_n^{(\beta)}$ u K, koristeći istu notaciju kao u Propoziciji 2.1, postoje: ultradiferencijalni operator $P_{\widetilde{r}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, niz glatkih funkcija $(\widetilde{F}_n)_n$, neprekidna funkcija $\widetilde{F}$, $\operatorname{supp} F_n, \operatorname{supp} F \subset K_1 \subset\subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, oblika

$$\widetilde{F}_n = \kappa_K \left(\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{(i\xi)^\beta P_{r_p}(\xi)}{P_{\widetilde{r}_p}(\xi)} \right) * (\kappa_{K_0} F_n) \right),\ n \in \mathbb{N},$$

$$\widetilde{F} = \kappa_K \left(\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{(i\xi)^\beta P_{r_p}(\xi)}{P_{\widetilde{r}_p}(\xi)} \right) * (\kappa_{K_0} F) \right),$$

tako da je

$$P_{r_p}(D)F_n^{(\beta)}(x) = P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_n(x),\ x \in K_0 \subset\subset \overset{\circ}{K} \quad \text{i } \ \widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} \widetilde{F},\ n \to \infty.$$

Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju.

2.2.3 Množenje i konvolucija s-ultradistribucije sa funkcijom iz $\mathcal{E}^*(\Omega)$

Ako je $\omega \in \mathcal{E}^{\{t\}}(\Omega)$, pokažimo da $\omega f = [\omega f_n] \in \mathcal{U}'^{\{t\}}(\Omega)$, tj. da je niz $(\omega f_n)_n$ fundamentalan.

Po definiciji fundamentalnih nizova, za svaki kompaktan skup $K \subset\subset \Omega$ postoje: niz $(F_n)_n$ glatkih funkcija , sa nosačem u K_1, glatka funkcija F u Ω, $\operatorname{supp} F \subset K_1$, i $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da

$$\omega f_n = \omega P_{r_p}(D) F_n \text{ u } K \ \text{ i } F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F,\ n \to \infty.$$

Možemo pretpostaviti da je ω kompaktno podražana funkcija množeći je sa funkcijom sečenja koja je jednaka 1 na kompaktnom skupu K. Dalje, primetimo da je $|\widehat{\omega}(\xi)| \leq Ce^{-h|\xi|^{1/t}}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, za neke $C > 0$ i $h > 0$ kao i da (na osnovu (1.8)) važi $|P_{r_p}(\xi)\widehat{F_n}| \leq C_1 e^{c(|\xi|)^{1/t}}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, za neko $C_1 > 0$ i funkciju $c(|\xi|)$ koja zavisi od niza $(r_p)_p \in \mathcal{R}$. Tada, koristeći (1.10), postoji ultradiferencijalni operator $P_{\widetilde{r}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da važi

$$\frac{\widehat{\omega} * (P_{r_p}(\xi)\widehat{F_n})}{P_{\widetilde{r}_p}(\xi)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

za odgovarajući niz $(\widetilde{r}_p)_p \in \mathcal{R}$. Ako izaberemo funkcije

$$G_n = \kappa_K \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{\omega} * (P_{r_p}(\xi)\widehat{F_n})}{P_{\widetilde{r}_p}(\xi)}\right), n \in \mathbb{N}, \qquad G = \kappa_K \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{\omega} * (P_{r_p}(\xi)\widehat{F})}{P_{\widetilde{r}_p}(\xi)}\right)$$

tada važi

$$\begin{aligned} P_{\widetilde{r}_p}(D) G_n(x) &= P_{\widetilde{r}_p}(D)\kappa_K(x)\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{\omega} * (P_{r_p}(\xi)\widehat{F_n})}{P_{\widetilde{r}_p}(\xi)}\right)(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{\omega} * (P_{r_p}(\xi)\widehat{F_n})\right)(x) \\ &= \omega(x) P_{r_p}(D) F_n(x) \\ &= \omega(x) f_n(x),\ x \in K, \end{aligned}$$

$\operatorname{supp} G_n, \operatorname{supp} G \subset K_1$. Pokažimo da $G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} G$ kad $n \to \infty$. Imamo

$$|G_n(x) - G(x)| \leq \int_K |e^{ixs}| \frac{|\widehat{\omega}(s) * (P_{r_p}(s)(\widehat{F_n}(s) - \widehat{F}(s)))|}{|P_{\widetilde{r}_p}(s)|} ds.$$

Kako je

$$|\widehat{F_n}(x) - \widehat{F}(x)| \leq \int_K |e^{-ixs}| \sup_{s \in K} |F_n(s) - F(s)| ds \leq \varepsilon_n,$$

gde $\varepsilon_n \to 0$ kad $n \to \infty$ i za odgovarajuće $C, C_1 > 0$ i $h > 0$

$$|\widehat{\omega}(s) * (P_{r_p}(s)(\widehat{F_n}(s) - \widehat{F}(s)))| \leq \int_K |\widehat{\omega}(s-\xi)||P_{r_p}(\xi)(\widehat{F_n}(\xi) - \widehat{F}(\xi))| d\xi$$

$$\leq C\varepsilon_n \int_K e^{-h|s-\xi|^{1/t}} e^{c(|\xi|)^{1/t}} d\xi \leq C\varepsilon_n \int_K e^{-h|\xi|^{1/t} + h|s|^{1/t}} e^{c(|\xi|)^{1/t}} d\xi \leq \varepsilon_n C_1 e^{h|s|^{1/t}}$$

gde smo koristili nejednakost $|\xi|^{1/t} = |\xi - s + s|^{1/t} \leq |s-\xi|^{1/t} + |s|^{1/t},\ s, \xi \in \mathbb{R}^d$, $t > 1$. Sada imamo

$$|G_n(x) - G(x)| \leq C_1 \varepsilon_n \int_K e^{h|s|^{1/t}} e^{-\widetilde{c}(|s|)^{1/t}} ds,$$

gde za odgovarajuć izbor funkcije $\widetilde{c}$ koja zavisi od niza $(\widetilde{r}_p)_p \in \mathcal{R}$ imamo $G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} G$ kad $n \to \infty$. Dakle, niz $(\omega f_n)_n$ je fundamentalan u Ω. Berlingov slučaj je isti.

Posmatrajmo sada konvoluciju s-ultradistribucije sa funkcijom iz $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Ako je $f = [f_n] \in \mathcal{U}'^{\{t\}}$ i ako je $\omega \in \mathcal{D}^{\{t\}}(\Omega)$, tada je $\omega * f = [\omega * f_n] \in \mathcal{U}'^{\{t\}}$, jer za svaki kompaktan skup $K \subset \mathbb{R}^d$ važi $\omega * P(D)F_n = P(D)(\omega * F_n),\ n \in \mathbb{N}$. U opštem slučaju važi:

Propozicija 2.5. *Neka su nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ fundamentalni u $\mathbb{R}^d$ i neka je* $\operatorname{supp}(g_n)_n \subset K_0 \subset\subset \mathbb{R}^d$. *Tada je niz $(f_n * g_n)_n$ fundamentalan u $\mathbb{R}^d$.*

Dokaz. Neka su $K \subset\subset \mathbb{R}^d$ i $\widetilde{K}$ kompaktni skupovi takvi da je $x - t \in \widetilde{K}$ gde $x \in K, t \in K_0$. Dalje, znamo da za kompaktan skup $\widetilde{K}$ postoje: nizovi glatkih funkcija $(F_n)_n$, $(G_n)_n$ u $\mathbb{R}^d$, neprekidne funkcije F, G u $\mathbb{R}^d$ i ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da:

$$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)F_n \text{ u } \mathbb{R}^d,\ \operatorname{supp} F_n, \operatorname{supp} F \subset K_1,\ F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\widetilde{K})} F,\ n \to \infty;$$

$$g_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)G_n \text{ u } \mathbb{R}^d,\ \operatorname{supp} G_n, \operatorname{supp} G \subset K_0,\ G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} G,\ n \to \infty.$$

Tada je (videti [38])

$$(f_n * g_n) = P_{\widetilde{r}_p}(D)F_n(x) * P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)G_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)(F_n * G_n) \ \text{ u } \ \mathbb{R}^d.$$

i

$$
\begin{aligned}
&|(F_n * G_n)(x) - (F * G)(x)| \leq \int_K |F_n(t) - F(t)||G_n(x-t)|dt \\
&+ \int_K |F(t)||G_n(x-t) - G(x-t)|dt = \int_{\widetilde{K}} |F_n(x-t) - F(x-t)||G_n(t)|dt \\
&+ \int_{K_0} |F(x-t)||G_n(t) - G(t)|dt \leq \sup_{u \in \widetilde{K}} |F_n(u) - F(u)| \int_{\widetilde{K}} |G_n(t)|dt \\
&+ \sup_{u \in K_0} |G_n(u) - G(u)| \int_{K_0} |F(x-t)|dt.
\end{aligned}
$$

Kako $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\widetilde{K})} F$ i $G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} G$ kad $n \to \infty$ dobijamo $F_n * G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F * G$, $n \to \infty$ i $\operatorname{supp}(F_n * G_n), \operatorname{supp}(F * G) \subset K + K_0 = \widetilde{K}$. Ovim smo dokazali da je niz $(f_n * g_n)_n$ fundamentalan. $\square$

2.3 Nizovi s-ultradistribucija

Definicija 2.5. *Kažemo da niz s-ultradistribucija $(f^n)_n = ([f^n_m])_n$ konvergira ka s-ultradistribuciji $f = [f_m]$ u Ω, što označavamo sa*

$$f^n \xrightarrow{s} f, \ n \to \infty \quad \textit{ili} \quad \lim_{n \to \infty} f^n = f,$$

ako za svaki kompaktan skup $K \subset\subset \Omega$ postoje: nizovi $(F^n_m)_m$, $n \in \mathbb{N}$ i $(F_m)_m$ glatkih funkcija, niz $(F^n)_n$ neprekidnih funkcija, neprekidna funkcija F u Ω i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ takvi da:

$$
\begin{aligned}
&f^n_m = P(D)F^n_m, f_m = P(D)F_m \ \textit{u} \ K, \operatorname{supp} F^n_m, \operatorname{supp} F_m, \operatorname{supp} F^n, \operatorname{supp} F \subset K_1, \\
&F^n_m \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_m, \ n \to \infty, \ \textit{uniformno po} \ m \in \mathbb{N}, \ F_m \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F, \ m \to \infty, \\
&F^n_m \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F^n, \ m \to \infty, \ \textit{za svaki} \ n \in \mathbb{N} \ \textit{i} \ F^n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F, \ n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Iz definicije direktno sledi da je $\lim\limits_{m \to \infty} \lim\limits_{n \to \infty} F^n_m = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{m \to \infty} F^n_m$ u $\mathcal{C}(K)$.

Teorema 2.1. *Ako postoji $\lim\limits_{n \to \infty} f^n$, tada je jedinstven.*

Dokaz. Pretpostavimo da $f^n \xrightarrow{s} f$ i $f^n \xrightarrow{s} g$ kad $n \to \infty$ u Ω i pokažimo da je $f = g$ u Ω. Neka je $K \subset\subset \Omega$ kompaktan skup sa nepraznom unutrašnjosti

$\Omega_K = \overset{\circ}{K}$ i neka je K_0 kompaktan skup u Ω za koji je $K \subset \overset{\circ}{K_0}$. Prema Definiciji 2.5, postoje nizovi $(\widetilde{F}^n_m)_m$, $(\widetilde{\widetilde{F^n_m}})_m$, $n \in \mathbb{N}$, $(\widetilde{F}_m)_m$, $(\widetilde{\widetilde{F}}_m)_m$ glatkih funkcija, nizovi neprekidnih funkcija $(\widetilde{F}^n)_n$, $(\widetilde{\widetilde{F^n}})_n$, neprekidne funkcije $\widetilde{F}, \widetilde{\widetilde{F}}$ u Ω, sve sa nosačima u K_1, i ultradiferencijalni operatori $\widetilde{P}, \widetilde{\widetilde{P}} \in \mathcal{P}^*$ takvi da važi:

$$
\begin{aligned}
&f^n_m = \widetilde{P}(D)\widetilde{F}^n_m,\ f_m = \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_m \text{ u } K_0,\\
&\widetilde{F}^n_m \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} \widetilde{F}_m,\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N},\ \widetilde{F}_m \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} \widetilde{F},\ m \to \infty,\\
&\widetilde{F}^n_m \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} \widetilde{F}^n,\ m \to \infty,\ \text{za svaki } n \in \mathbb{N} \ \text{ i } \widetilde{F}^n \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} \widetilde{F},\ n \to \infty,
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
&f^n_m = \widetilde{\widetilde{P}}(D)\widetilde{\widetilde{F^n_m}},\ g_m = \widetilde{\widetilde{P}}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_m \text{ u } K_0,\\
&\widetilde{\widetilde{F^n_m}} \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} \widetilde{\widetilde{F}}_m,\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N},\ \widetilde{\widetilde{F}}_m \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} \widetilde{\widetilde{F}},\ m \to \infty,\\
&\widetilde{\widetilde{F^n_m}} \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} \widetilde{\widetilde{F^n}},\ m \to \infty,\ \ \text{za svaki } n \in \mathbb{N} \text{ i } \widetilde{\widetilde{F^n}} \xrightarrow{\mathcal{C}(K_0)} \widetilde{\widetilde{F}},\ n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Tada, na osnovu Propozicije 2.3 možemo konstruisati nizove $(F^n_{m,1})_m$, $(F^n_{m,2})_m$, $n \in \mathbb{N}$, $(F_{m,1})_m$, $(F_{m,2})_m$, glatkih funkcija, nizove $(F^n_1)_n, (F^n_2)_n$ neprekidnih funkcija, neprekidne funkcije F_1 i F_2 u Ω, sve sa nosačima u K_1, i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da važi:

$$
\begin{aligned}
&f^n_m = P(D)F^n_{m,1} = P(D)F^n_{m,2},\ f_m = P(D)F_{m,1},\ g_m = P(D)F_{m,2} \text{ u } K,\\
&F^n_{m,1} - F^n_{m,2} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_{m,1} - F_{m,2},\ n \to \infty,\ \ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N},\\
&\ F_{m,1} - F_{m,2} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_1 - F_2,\ m \to \infty,\ F^n_{m,1} - F^n_{m,2} \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F^n_1 - F^n_2,\ m \to \infty,\\
&\ \text{za sve } n \in \mathbb{N} \ \text{ i } \ F^n_1 - F^n_2 \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_1 - F_2,\ n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Kako je $P(D)(F^n_{m,2} - F^n_{m,1}) = 0$ u Ω_K, tada iz Propozicije 2.2 direktno sledi $F^n_{m,1} - F^n_{m,2} = 0,\ n, m \in \mathbb{N}$, u Ω_K, odakle dobijamo $F_1 = F_2$ u Ω_K. Kako tvrđenje važi za svaki otvoren ograničen skup Ω_K, na osnovu Napomene 2.1 (3°) je $f = g$ u Ω. $\square$

Propozicija 2.6. *Ako niz $(f^n)_n$ s-ultradistribucija konvergira ka s-ultradistribuciji f u $\mathbb{R}^d$ i ako je δ_n delta niz u $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d)$, tada $f^n * \delta_n \xrightarrow{s} f$ u $\mathbb{R}^d$ kad $n \to \infty$.*

Dokaz. Neka je $g^n = f^n * \delta_n$. Kako $f^n \xrightarrow{s} f$, kad $n \to \infty$, iz Definicije 2.5 imamo:

$$f_m^n = P(D)F_m^n, f_m = P(D)F_m \text{ u } K, \operatorname{supp} F_m^n, \operatorname{supp} F_m, \operatorname{supp} F^n, \operatorname{supp} F \subset K_1,$$

$$F_m^n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F_m,\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N},\ F_m \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F,\ m \to \infty,$$

$$F_m^n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F^n,\ m \to \infty,\ \text{za svaki } n \in \mathbb{N} \text{ i } F^n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F,\ n \to \infty.$$

Tada je $g_m^n = P(D)(F_m^n * \delta_n)$ na $\mathbb{R}^d$, $F_m^n * \delta_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} F_m$, $n \to \infty$, uniformno po $m \in \mathbb{N}$, $F_m \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} F$, $m \to \infty$, $F_m^n * \delta_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} F^n * \delta_n$, $m \to \infty$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $F^n * \delta_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} F$, $n \to \infty$. Odavde sledi da $g^n \xrightarrow{s} f$, $n \to \infty$. □

2.4 Delovanje s-ultradistibucija na funkcije iz $\mathcal{D}^*(\Omega)$

Neka je $K \subset\subset \Omega$, $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset K \subset\subset \Omega$ i neka je $f = [f_n]$ tako da (2.3) važi za fundamentalni niz $(f_n)_n$ u K. Tada definišemo delovanje s-ultradistribucije f na funkciju $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$,

$$\varphi \mapsto f(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)},$$

sa:

$$(f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)} = \lim_{n \to \infty} \int_K f_n \varphi dx = \int_K F P(-D) \varphi dx, \tag{2.8}$$

gde $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F$, $n \to \infty$.
Pokažimo konzistentnost ove definicije. Ako imamo sledeće reprezentacije

$$f_n = \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_n,\ f_n = \widetilde{\widetilde{P}}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_n,\ n \in \mathbb{N},\ \ \text{u } K,$$

gde $\widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} \widetilde{F}$, $\widetilde{\widetilde{F}}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} \widetilde{\widetilde{F}}$, $n \to \infty$, tada je

$$\lim_{n \to \infty} \int_K f_n \varphi dx = \int_K \widetilde{F}\widetilde{P}(-D)\varphi dx = \int_K \widetilde{\widetilde{F}}\widetilde{\widetilde{P}}(-D)\varphi dx,$$

jer mešoviti niz integrala

$$\int_K \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_1 \varphi dx,\ \int_K \widetilde{\widetilde{P}}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_1 \varphi dx,\ \int_K \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_2 \varphi dx,\ \int_K \widetilde{\widetilde{P}}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_2 \varphi dx, \ldots$$

konvergira. Jasno je da je $\varphi \mapsto (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)}$, $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ linearno preslikavanje. Prisetimo se da $\varphi_n \xrightarrow{D^*(\Omega)} \varphi$, $n \to \infty$, znači da su nosači funkcija φ_n i φ u nekom kompaktnom skupu $K \subset\subset \Omega$ i da $P_{h,K}(\varphi_n - \varphi) \to 0$, $n \to \infty$, za sve $h > 0$ (resp. za neko $h > 0$).

Da bismo dokazali sekvencijalnu neprekidnost, treba nam jedan poznati rezultat iz [22] :

Ako niz $(\varphi_n)_n$ u $\mathcal{D}^*(\Omega)$ konvergira ka $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ kad $n \to \infty$, tada $P(D)\varphi_n \xrightarrow{D^*(\Omega)} P(D)\varphi$ kad $n \to \infty$, za svaki ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$. Koristeći taj rezultat, dobijamo sledeće tvrđenje.

Teorema 2.2. (*a*) *Neka je $(\varphi_n)_n$ niz u $\mathcal{D}^*(\Omega)$ koji konvergira ka $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ kad $n \to \infty$. Tada $(f, \varphi_n)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)} \to (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)}$, $n \to \infty$, za svaki $f = [f_m] \in \mathcal{U}^*(\Omega)$.*
(*b*) *Ako je $(f^n)_n = ([f^n_m])_n$ niz s-ultradistribucija koji konvergira ka s-ultradistribuciji $f = [f_m]$. Tada $(f^n, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)} \to (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)}$, $n \to \infty$, za svaki $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$.*

Dokaz. (a) Pretpostavimo da (2.3) važi za s-ultradistribuciju $f = [f_m]$ u K i neka $F_m \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F$, $m \to \infty$. Tada na osnovu (2.8) i gore navedenih osobina konvergentnih nizova u $\mathcal{D}^*(\Omega)$, imamo

$$\lim_{n\to\infty} \Big((f, \varphi_n)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)} - (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)} \Big) = \lim_{n\to\infty} \int_K F P(-D)(\varphi_n - \varphi) dx = 0.$$

(b) Neka je $\varphi \in \mathcal{D}^*_K$. Koristeći notaciju Definicije 2.5 dobijamo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (f^n - f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)} &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (f^n_m - f_m, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int_K (F^n_m - F_m) P(-D)\varphi dx. \end{aligned}$$

Kako $F^n_m \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F^n$, $m \to \infty$, za sve $n \in \mathbb{N}$ i $F_m \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F$, $m \to \infty$ dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \int_K (F^n_m - F_m) P(-D)\varphi dx = \lim_{n\to\infty} \int_K (F^n - F) P(-D)\varphi dx = 0.$$

$\square$

Glava 3

s- i $\widetilde{s}$-temperirane ultradistribucije

U ovoj glavi ćemo uvodimo s-t-fundamentalnih i $\widetilde{s}$-t-fundamentalnih nizova pomoću kojih definišemo s-temperirane i $\widetilde{s}$-temperirane ultradistribucije, respektivno, kao klase ekvivalencije tih nizova. s-Temperirane ultradistribucije ćemo definisati pomoću nizova glatkih L^2 funkcija i ultradiferencijalnih operatora $P(H)$, dok ćemo $\widetilde{s}$-temperirane ultradistribucije definisati pomoću nizova glatkih L^2 funkcija, funkcija $P(x) \in \mathcal{P}_u^*$ i ultradiferencijalnih operatora $P(D)$. Kao i u Glavi 2, definisaćemo zbir, razliku, množenje skalarom, diferenciranje s- i $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistribucija. Daćemo i konvergenciju nizova u takvim prostorima, zatim delovanje s- i $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistribucija na funkcije iz test prostora $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i sekvencijalnu neprekidnost s- i $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistribucija.

3.1 s-Temperirane ultradistribucije

Prisetimo se da je $H^\alpha = \prod_{i=1}^d (-\partial^2/\partial {x_i}^2 + x_i^2)^{\alpha_i}$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ i da koristimo notaciju $\mathcal{P}^{2*}$ za $\mathcal{P}^{(2t)}$ ili $\mathcal{P}^{\{2t\}}$. Neka je $P \in \mathcal{P}^{2*}$. Koristićemo ultradiferencijalne operatore $P(H) = \sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha H^\alpha$ Berlinovog tipa $(p!^{2t})$ (resp. Rumijeovog tipa $\{p!^{2t}\}$) za koje važi

$$(\exists h > 0,\ \exists C > 0)(\text{resp. } \forall h > 0,\ \exists C > 0)(\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^d)(|a_\alpha| \leq C\frac{h^{|\alpha|}}{\alpha!^{2t}}).$$

U Rumijeovom slučaju je dati uslov ekvivalentan uslovu:

$$(\exists (r_p)_p \in \mathcal{R})(\exists C > 0)(\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^d)(|a_\alpha| \leq \frac{C}{\alpha!^{2t} \prod_{i \leq |\alpha|} r_i}).$$

Definicija 3.1. *Niz $(f_n)_n$ funkcija iz $L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je s-t-fundamentalan u $\mathbb{R}^d$ ako postoje: niz $(F_n)_n$ gde $F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} h_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, funkcija $F = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha h_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d)$, tako da $(c_{\alpha,n})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d}$, $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \in l^2$, $n \in \mathbb{N}$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^{2*}$ takvi da važi*

$$f_n = P(H) F_n \ \ u\ \mathbb{R}^d \quad i \quad F_n \to F \ \ u\ L^2(\mathbb{R}^d) \ \ kad\ n \to \infty. \tag{3.1}$$

Uvodimo novu notaciju: $F_n \xrightarrow{2} F$, $n \to \infty$ i time označavamo da $F_n \to F$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$ kad $n \to \infty$.

Ultradiferencijalni operator $P(H)$ deluje tako da je za svako fiksno $n \in \mathbb{N}$, granična vrednost

$$\lim_{k \to \infty} P_k(H) F_n = \lim_{k \to \infty} \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha H^\alpha F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} P(2\alpha + \mathbf{1}) h_\alpha = f_n$$

u $L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Sledeće tvrđenje biće korisno u nastavku jer nam omogućava da, u našoj reprezentaciji fundamentalnih nizova, zamenimo L^2 konvergentne nizove sa nizovima koji uniformno konvergiraju u $\mathbb{R}^d$ kao i u $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Lema 3.1. *Neka su $F_n, F \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, neka $F_n \xrightarrow{2} F$, $n \to \infty$ i $\widetilde{F}_n(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{F}_n(\xi)/(1 + |\xi|^2)^{d/2})(x)$, $\widetilde{F}(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{F}(\xi)/(1 + |\xi|^2)^{d/2})(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Tada je $(\widetilde{F}_n)_n$ niz ograničenih funkcija za koji važi $\widetilde{F}_n \xrightarrow{2} \widetilde{F}$, $n \to \infty$. Štaviše, $\widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} \widetilde{F}$ kad $n \to \infty$.*

Dokaz. Konvergencija u prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$ i uniformna ograničenost slede na osnovu Parsevalovog identiteta (1.1). Neka je $x \in \mathbb{R}^d$ i pokažimo uniformnu konvergenciju. Na osnovu Švarcove nejednakosti sledi

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{F}_n(x) - \widetilde{F}(x)\right| &= \left|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{d/2}}\left(\widehat{F}_n(\xi) - \widehat{F}(\xi)\right)\right)(x)\right| \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^d} d\xi\right)^{1/2} \|\widehat{F}_n - \widehat{F}\|_2 < \varepsilon,\end{aligned}$$

za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$, nezavisno od x. Time je dokaz uniformne konvergencije završen. □

Definicija 3.2. *s-t-fundamentalni nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ su u relaciji $\sim_1$, i pišemo*

$$(f_n)_n \sim_1 (g_n)_n,$$

ako postoje nizovi $(F_n)_n$, $(G_n)_n$, funkcija $F_n, G_n \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, oba konvergentna u $L^2(\mathbb{R}^d)$, i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^{2*}$ takvi da:

$$f_n = P(H)F_n,\ g_n = P(H)G_n \ u\ \mathbb{R}^d,\ F_n - G_n \xrightarrow{2} 0 \ kad\ n \to \infty.$$

Kao i kod s-ultradistibucija, želimo da pokažemo da je $\sim_1$ relacija ekvivalencije. Prilikom dokaza tranzitivnosti relalacije $\sim_1$ ćemo koristiti sledeća dva tvrđenja.

Propozicija 3.1. *Ako postoji ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^{2*}$ i funkcije $F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n}h_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, $F = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha h_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $(c_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}, (c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \in l^2$, $n \in \mathbb{N}$, za koje $F_n \xrightarrow{2} F$ i $P(H)F_n \xrightarrow{2} 0$ kad $n \to \infty$, tada je $F = 0$ u $\mathbb{R}^d$. U specijalnom slučaju, ako je $F \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ i ako važi $P(H)F = 0$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$, tada je $F = 0$ u $\mathbb{R}^d$.*

Dokaz. Iz $P(H)F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} P(2\alpha + \mathbf{1})c_{\alpha,n}h_\alpha \xrightarrow{2} 0$ sledi $(c_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \to 0$ u l^2 kad $n \to \infty$. Dalje, kako $(c_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \to (c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}$ u l^2, $n \to \infty$, dobijamo da je $F = 0$. Specijalni slučaj sledi ako stavimo $F_n = F$, $n \in \mathbb{N}$. □

Propozicija 3.2. *Pretpostavimo da su $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$, $(\widetilde{F}_n)_n, (\widetilde{\widetilde{F}}_n)_n$ nizovi funkcija iz $L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ i $\widetilde{F}, \widetilde{\widetilde{F}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ takvi da ispunjavaju uslove Definicije 3.1, tj:*

$$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(H)\widetilde{F}_n, \quad f_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(H)\widetilde{\widetilde{F}}_n \ u\ \mathbb{R}^d,$$
$$\widetilde{F}_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \widetilde{c}_{\alpha,n}h_\alpha,\quad \widetilde{\widetilde{F}}_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{c}}_{\alpha,n}h_\alpha,\quad \widetilde{F} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \widetilde{c}_\alpha h_\alpha,\quad \widetilde{\widetilde{F}} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \widetilde{\widetilde{c}}_\alpha h_\alpha,$$

gde $(\widetilde{c}_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}, (\widetilde{\widetilde{c}}_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}, (\widetilde{c}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}, (\widetilde{\widetilde{c}}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \in l^2$, $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji ultradiferencijalni operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$ za koji važi

$$\Big(\frac{P_{\widetilde{r}_p}(2\alpha + \mathbf{1})}{P_{r_p}(2\alpha + \mathbf{1})}\Big)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d},\ \Big(\frac{P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(2\alpha + \mathbf{1})}{P_{r_p}(2\alpha + \mathbf{1})}\Big)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \in l^\infty, \tag{3.2}$$

funkcije

$$F_{n,1}=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{\alpha,n}P_{\widetilde{r}_p}(2\alpha+\mathbf{1})}{P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}h_\alpha,\qquad F_{n,2}=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{\widetilde{\widetilde{c}}_{\alpha,n}P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(2\alpha+\mathbf{1})}{P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}h_\alpha,\ n\in\mathbb{N},$$

koje pripadaju $L^2(\mathbb{R}^d)\cap\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *i funkcije*

$$F_1=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{\alpha}P_{\widetilde{r}_p}(2\alpha+\mathbf{1})}{P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}h_\alpha,\qquad F_2=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{\widetilde{\widetilde{c}}_{\alpha}P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(2\alpha+\mathbf{1})}{P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}h_\alpha\in L^2(\mathbb{R}^d)$$

tako da je

$$f_n=P_{r_p}(H)F_{n,1}=P_{r_p}(H)F_{n,2}\ u\ \mathbb{R}^d,\ n\in\mathbb{N},\ F_{n,1}\xrightarrow{2}F_1,\ F_{n,2}\xrightarrow{2}F_2,\ n\to\infty.$$

Štaviše, važi i $F_{n,1}=F_{n,2},\ n\in\mathbb{N}$, *odakle je* $F_1=F_2$ *u* $\mathbb{R}^d$.
Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju sa odgovarajućom notacijom.

Dokaz. Egzistencija operatora $P_{r_p}(H)$ sledi iz (1.11). Primetimo da je

$$H^\beta h_\alpha=(2\alpha+\mathbf{1})^\beta h_\alpha,\ \alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^d.$$

Dalje, na osnovu (3.2), imamo

$$F_{n,1}=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\widetilde{c}_{\alpha,n}\frac{P_{\widetilde{r}_p}(2\alpha+\mathbf{1})}{P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}h_\alpha=P_{\widetilde{r}_p}(H)\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{\alpha,n}}{P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}h_\alpha,\ n\in\mathbb{N}$$

i

$$F_{n,2}=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\widetilde{\widetilde{c}}_{\alpha,n}\frac{P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(2\alpha+\mathbf{1})}{P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}h_\alpha=P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(H)\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{\widetilde{\widetilde{c}}_{\alpha,n}}{P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}h_\alpha,\ n\in\mathbb{N}.$$

Prema tome je

$$\begin{aligned}P_{r_p}(H)F_{n,1}&=P_{r_p}(H)P_{\widetilde{r}_p}(H)\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{\alpha,n}}{P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}h_\alpha\\&=P_{\widetilde{r}_p}(H)P_{r_p}(H)\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{\alpha,n}}{P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}h_\alpha\\&=P_{\widetilde{r}_p}(H)\widetilde{F}_n=f_n\ \text{u}\ \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Na sličan način dobijamo $f_n = P_{r_p}(H)F_{n,2},\ n \in \mathbb{N}$ u $\mathbb{R}^d$. Kako važi (3.2), zaključujemo da su $F_{n,i},\ n \in \mathbb{N},\ i = 1,2$ glatke L^2 funkcije. Iz $(\widetilde{c}_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+} \to (\widetilde{c}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+}$ i $(\widetilde{\widetilde{c}}_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+} \to (\widetilde{\widetilde{c}}_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}^d_+}$, $n \to \infty$, u l^2 sledi $F_{n,1} \xrightarrow{2} F_1$ i $F_{n,2} \xrightarrow{2} F_2$, $n \to \infty$. Iz Propozicije 3.1 sledi da je $F_{n,1} = F_{n,2},\ n \in \mathbb{N}$ i $F_1 = F_2$ u $\mathbb{R}^d$. $\square$

Jasno je da je relacija $\sim_1$ refleksivna i simetrična. Dokažimo da je relacija $\sim_1$ tranzitivna.

Propozicija 3.3. *Relacija $\sim_1$ je tranzitivna.*

Dokaz. Dokazaćemo tvrđenje samo u Rumijeovom slučaju. Neka su $(f_n)_n \sim_1 (g_n)_n$ i $(g_n)_n \sim_1 (h_n)_n$. Tada, na osnovu Definicije 3.2, postoje nizovi $(F_n)_n$, $(G_n)_n$, $(\widetilde{G}_n)_n$, $(H_n)_n$ funkcija iz $L^2(\mathbb{R}^d)\cap\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, svi konvergentni u $L^2(\mathbb{R}^d)$, i ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$ takvi da je

$$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(H)F_n,\ g_n = P_{\widetilde{r}_p}(H)G_n \ \text{ u } \mathbb{R}^d,\ F_n - G_n \xrightarrow{2} 0,\ n \to \infty,$$

$$g_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(H)\widetilde{G}_n,\ h_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(H)H_n \text{ u } \mathbb{R}^d,\ \widetilde{G}_n - H_n \xrightarrow{2} 0,\ n \to \infty.$$

Korištenjem Propozicije 3.2 nizove $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ i $(h_n)_n$ možemo izraziti, koristeći operator $P_{r_p}(H)$ umesto $P_{\widetilde{r}_p}(H)$ i $P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(H)$, na sledeći način:

$$f_n = P_{r_p}(H)F_{n,1},\ g_n = P_{r_p}(H)G_{n,1},\ g_n = P_{r_p}(H)\widetilde{G}_{n,1},\ h_n = P_{r_p}(H)H_{n,1} \text{ u } \mathbb{R}^d$$

tako da vredi $F_{n,1} - G_{n,1} \xrightarrow{2} 0$. Ako stavimo da je

$$\widetilde{H}_{n,1} = G_{n,1} - \widetilde{G}_{n,1} + H_{n,1},$$

tada $G_{n,1} - \widetilde{H}_{n,1} \xrightarrow{2} 0$ i $F_{n,1} - \widetilde{H}_{n,1} \xrightarrow{2} 0$, $n \to \infty$, čime je dokaz tranzitivnosti završen. $\square$

Definicija 3.3. *Klase ekvivalencije s-t-fundamentalnih nizova, u oznaci $f = [f_n] = [(f_n)_n]$, nazivaju se s-temperirane ultradistribucije. Prostore s-temperiranih ultradistribucija označavaćemo sa $\mathcal{T}'^* = \mathcal{T}'^*(\mathbb{R}^d)$.*

Primer 4. *Neka su $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $(\delta_n)_n$ delta-niz u $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d)$ i neka je $F_n = F * \delta_n, n \in \mathbb{N}$. Tada je niz $(F_n)_n$ glatkih L^2 funkcija s-t-fundamentalan u $\mathbb{R}^d$ u oba, Berlingovom i Rumijeovom slučaju.*

Primer 5. *Neka je $f = [f_n] \in \mathcal{T}'^*$ niz oblika $f_n = P(H)F_n$, gde $F_n \in L^2(\mathbb{R}^d)\cap\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $P \in \mathcal{P}^{2*}$ i $F_n \xrightarrow{2} F$, $n \to \infty$. Tada je niz $(\widetilde{f}_n)_n = (P(H)(F_n * \delta_n))_n$ s-t-fundamentalan u $\mathbb{R}^d$ i $(f_n)_n \sim_1 (\widetilde{f}_n)_n$.*

3.2 Operacije sa s-temperiranim ultradistribucijama

3.2.1 Algebarske operacije

Neka su $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ s-temperirane ultradistribucije. Definišimo sumu s-temperiranih ultradistibucija sa $f + g = [f_n + g_n]$ i pokažimo da $f+g \in \mathcal{T}'^*$, tj. pokažimo da je niz $(f_n+g_n)_n$ s-t- fundamentalan u $\mathbb{R}^d$ i da s-temperirana ultradistribucija $[f_n+g_n]$ ne zavisi od izbora s-t-fundamentalnih nizova $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$, tj. ako je $(f_n)_n \sim_1 (\widetilde{f}_n)_n$ i $(g_n)_n \sim_1 (\widetilde{g}_n)_n$, tada $(f_n + g_n)_n \sim_1 (\widetilde{f}_n + \widetilde{g}_n)_n$. Pokažimo da važe ove osobine u Rumijeovom slučaju (Berlingov slučaj je isti).

Kako su nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ s-t-fundamentalni u $\mathbb{R}^d$ na osnovu Definicije 3.1 postoje nizovi $(F_n)_n$, $(G_n)_n$ glatkih L^2 funkcija, funkcije $F, G \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$ tako da:

$$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(H)F_n \text{ u } \mathbb{R}^d \text{ i } F_n \xrightarrow{2} F,\ n \to \infty,$$

$$g_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(H)G_n \text{ u } \mathbb{R}^d \text{ i } G_n \xrightarrow{2} G,\ n \to \infty.$$

Na osnovu Propozicije 3.2 postoje nizovi $(F_{n,1})_n$, $(G_{n,1})_n$, glatkih L^2 funkcija, funkcije $F_1,\ G_1 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i ultradiferencijani operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$ tako da nizove $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ možemo zapisati na sledeći način:

$$f_n = P_{r_p}(H)F_{n,1},\ g_n = P_{r_p}(H)G_{n,1} \ \text{ u } \ \mathbb{R}^d,\ F_{n,1} \xrightarrow{2} F_1,\ G_{n,1} \xrightarrow{2} G_1,\ n \to \infty.$$

Odavde sledi

$$f_n + g_n = P_{r_p}(H)(F_{n,1} + G_{n,1}) \text{ u } \mathbb{R}^d \ \text{ i } \ F_{n,1} + G_{n,1} \xrightarrow{2} F_1 + G_1 \text{ kad } n \to \infty,$$

tj. niz $(f_n + g_n)_n$ je s-t-fundamentalan. Iz Propozicije 3.2 sledi da s-temperirana ultradistribucija $[f_n+g_n]$ ne zavisi od izbora s-t-fundamentalnih nizova $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$.

Razlika $f - g$, s-temperiranih ultradistribucija $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ je s-temperirana ultradistibucija $f - g = [f_n - g_n]$. Sa $\lambda f = [\lambda f_n]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ je definisano množenje s-temperirane ultradistribucije skalarom iz $\mathbb{C}$. Konzistencija ovih definicija se može proveriti na isti način kao i za zbir. Dakle, $\mathcal{T}'^*$ je vektorski prostor.

3.2.2 Diferenciranje

Neka je u Rumijeovom slučaju $f = [f_n]$ s-temperirana ultradistribucija i neka je $\beta \in \mathbb{Z}^d_+$. Definišimo $f^{(\beta)} = [f_n^{(\beta)}]$ i pokažimo da je niz $(f_n^{(\beta)})_n$ s-t-fundamentalan. Po Definiciji 3.1 je s- temperirana ultradistribucija f određena pomoću niza $(F_n)_n$, $F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} h_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, funkcije $F = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha h_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i ultradiferencijalnog operatora $P_{r_p}(H)$. Kako je $f_n^{(\beta)} = P_{r_p}(H) F_n^{(\beta)}$ u $\mathbb{R}^d$, koristeći istu notaciju kao u Propoziciji 3.2, postoje: niz $(\widetilde{F}_n)_n$ glatkih L^2 funkcija i funkcija $\widetilde{F} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ oblika

$$\widetilde{F}_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} \frac{(2\alpha+\mathbf{1})^\beta P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}{P_{\widetilde{r}_p}(2\alpha+\mathbf{1})} h_\alpha, \ n \in \mathbb{N},$$

$$\widetilde{F} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha \frac{(2\alpha+\mathbf{1})^\beta P_{r_p}(2\alpha+\mathbf{1})}{P_{\widetilde{r}_p}(2\alpha+\mathbf{1})} h_\alpha,$$

kao i ultradiferencijalni operator $P_{\widetilde{r}_p} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$ tako da je

$$P_{r_p}(H) F_n^{(\beta)}(x) = P_{\widetilde{r}_p}(H) \widetilde{F}_n(x), \ x \in \mathbb{R}^d.$$

Kako $(c_{\alpha,n})_{\alpha \in \mathbb{Z}^d_+} \to (c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^d_+}$ u l^2 kad $n \to \infty$, korištenjem (1.11) dobijamo $\widetilde{F}_n \xrightarrow{2} \widetilde{F}$, $n \to \infty$. Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju.

3.2.3 Nizovi s-temperiranih ultradistribucija

Definicija 3.4. *Niz s-tempereiranih ultradistribucija $(f^n)_n = ([f_m^n])_n$ konvergira ka s-temperiranoj ultradistribuciji $f = [f_m]$, što označavamo sa*

$$f^n \xrightarrow{s\text{-}t} f, \ n \to \infty \quad \textit{ili} \quad s\text{-}t\text{-}\lim_{n\to\infty} f^n = f,$$

ako postoje nizovi $(F_m^n)_m, n \in \mathbb{N}$, $(F_m)_m$, $F_m^n, F_m \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d), m, n \in \mathbb{N}$, niz $(F^n)_n$ L^2 funkcija, funkcija $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^{2*}$ takvi da:

$$f_m^n = P(H) F_m^n, \ f_m = P(H) F_m \ \textit{u} \ \mathbb{R}^d,$$

$$F_m^n \xrightarrow{2} F_m, \ n \to \infty, \textit{uniformno po } m \in \mathbb{N}, \ F_m \xrightarrow{2} F, \ m \to \infty,$$

$$F_m^n \xrightarrow{2} F^n, \ m \to \infty, \ \textit{za svaki } n \in \mathbb{N} \ \textit{i} \ F^n \xrightarrow{2} F, \ n \to \infty.$$

Iz definicije sledi da je $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} F_m^n = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} F_m^n$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 3.1. *Ako postoji* s-t-$\lim\limits_{n\to\infty} f^n$*, tada je jedinstven.*

Dokaz. Tvrđenje ćemo dokazati samo u Rumijeovom slučaju, jer se Berlingov slučaj isto dokazuje. Pretpostavimo da $f^n \xrightarrow{s-t} f$ i $f^n \xrightarrow{s-t} g$ u $\mathbb{R}^d$ kad $n \to \infty$ i pokažimo da je $f = g$. Po Definiciji 3.4 postoje nizovi $(\widetilde{F}_m^n)_m$, $(\widetilde{\widetilde{F_m^n}})_m$, $n \in \mathbb{N}$, $(\widetilde{F}_m)_m$, $(\widetilde{\widetilde{F}}_m)_m$ u $L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, nizovi $(\widetilde{F}^n)_n$, $(\widetilde{\widetilde{F^n}})_n$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$, funkcije $\widetilde{F}, \widetilde{\widetilde{F}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$ takvi da važi:

$$
\begin{aligned}
& f_m^n = P_{\widetilde{r}_p}(H)\widetilde{F}_m^n,\ f_m = P_{\widetilde{r}_p}(H)\widetilde{F}_m \quad \text{u} \ \ \mathbb{R}^d, \\
& \widetilde{F}_m^n \xrightarrow{2} \widetilde{F}_m,\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N},\ \widetilde{F}_m \xrightarrow{2} \widetilde{F},\ m \to \infty, \\
& \widetilde{F}_m^n \xrightarrow{2} \widetilde{F}^n,\ m \to \infty,\ \text{za sve } n \in \mathbb{N} \ \text{ i } \widetilde{F}^n \xrightarrow{2} \widetilde{F},\ n \to \infty
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
& f_m^n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(H)\widetilde{\widetilde{F_m^n}},\ f_m = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(H)\widetilde{\widetilde{F}}_m \quad \text{u} \ \ \mathbb{R}^d, \\
& \widetilde{\widetilde{F_m^n}} \xrightarrow{2} \widetilde{\widetilde{F}}_m,\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N},\ \widetilde{\widetilde{F}}_m \xrightarrow{2} \widetilde{\widetilde{F}},\ m \to \infty, \\
& \widetilde{\widetilde{F_m^n}} \xrightarrow{2} \widetilde{\widetilde{F^n}},\ m \to \infty,\ \text{za svaki } n \in \mathbb{N} \text{ i } \ \widetilde{\widetilde{F^n}} \xrightarrow{2} \widetilde{\widetilde{F}},\ n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Koristeći Propoziciju 3.2 možemo konstruisati nizove $(F_{m,1}^n)_m$, $(F_{m,2}^n)_m$, $n \in \mathbb{N}$, $(F_{m,1})_m$, $(F_{m,2})_m$ funkcija u $L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, nizove $(F_1^n)_n, (F_2^n)_n$ L^2 funkcija, funkcije $F_1, F_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i ultradiferencijalni operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{2t\}}$ tako da:

$$
\begin{aligned}
& f_m^n = P_{r_p}(H)F_{m,1}^n = P_{r_p}(H)F_{m,2}^n,\ f_m = P_{r_p}(H)F_{m,1},\ g_m = P_{r_p}(H)F_{m,2} \ \text{ u } \mathbb{R}^d \\
& F_{m,1}^n - F_{m,2}^n \xrightarrow{2} F_{m,1} - F_{m,2},\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N}, \\
& F_{m,1} - F_{m,2} \xrightarrow{2} F_1 - F_2,\ m \to \infty,\ F_{m,1}^n - F_{m,2}^n \xrightarrow{2} F_1^n - F_2^n,\ m \to \infty, \\
& \text{za svaki } n \in \mathbb{N} \text{ i } F_1^n - F_2^n \xrightarrow{2} F_1 - F_2,\ n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Kako je $P_{r_p}(H)(F_{m,2}-F_{m,1}) = \lim_{n\to\infty} P_{r_p}(H)(F_{m,1}^n - F_{m,2}^n - F_{m,1} + F_{m,2}) = 0$ u $\mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{N}$, tada, kao u Propoziciji 3.1, sledi $F_1 = F_2$ u $\mathbb{R}^d$. Prema tome je $f = g$. □

U nastavku će nam trebati sledeća Lema.

Lema 3.2. *Neka je $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ funkcija za koju je $\varphi(x) = 1$, $x \in B(0, 1/2)$. Ako je $f = [f_m]$ s-temperirana ultradistribucija, tada $f(\cdot)\varphi(\cdot/n) \xrightarrow{s\text{-}t} f(\cdot)$, $n \to \infty$.*

Dokaz. Neka je $F_m^n(x) = \varphi(x/n)F_m(x),\ x \in \mathbb{R}^d,\ m, n \in \mathbb{N}$. Tada je $f^n(x) = [P(H)\varphi(x/n)F_m(x)] \in \mathcal{T}'^*$ za svako fiksno $n \in \mathbb{N}$, jer

$$\varphi(x/n)F_m(x) \xrightarrow{2} \varphi(x/n)F(x),\ x \in \mathbb{R}^d \text{ kad } m \to \infty$$

za svako fiksno n. Kako za sve m i n važi

$$\|F_m^n - F_m\|_2^2 \leq \int_{|x|>\frac{n}{2}} \left|\varphi^2\left(\frac{x}{n}\right) - 1\right| |F_m(x)|^2 dx,$$

dobijamo da $F_m^n \xrightarrow{2} F_m$ uniformno po $m \in \mathbb{N}$ kad $n \to \infty$. Ovim je dokaz završen. □

Napomena 3.1. *Uz notaciju Definicije 3.4 neka je*

$$F_m^n = \sum_{|\alpha| \leq n} a_{\alpha,m} h_\alpha,\ (a_{\alpha,m})_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \in l^2,\ m \in \mathbb{N} \quad i \quad f^n = [F_m^n],\ n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $(f^n)_n$ niz s-temperiranih ultradistribucija čiji se svaki predstavnik sastoji od glatkih L^2 funkcija takvih da $f^n \xrightarrow{s-t} f$, $n \to \infty$.

Iz Napomene 3.1 i Leme 3.2 direktno sledi:

Propozicija 3.4. *Za svaku s-temperiranu ultradistribucija f postoji niz $(f^n)_n$ s-temperiranih ultradistribucija takav da $f^n \xrightarrow{s\text{-}t} f$, $n \to \infty$.*

Napomena 3.2. *Kao u Napomeni 2.3 (jer u Definiciji 3.1 $F_n \xrightarrow{2} F$, $n \to \infty$) možemo identifikovati $f = [f_n]$ sa $f = P(H)F$, jer bilo koja druga reprezentacija $f = \widetilde{P}(H)\widetilde{F}$ daje isti element iz $\mathcal{T}'^*$ (videti* (3.6)*).*

3.3 $\widetilde{s}$- Temperirane ultradistribucije

Definicija 3.5. *Niz glatkih funkcija $(f_n)_n$ je $\widetilde{s}$-t-fundamentalan u $\mathbb{R}^d$ ako postoje: niz $(F_n)_n$ funkcija iz $L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, funkcija $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ i funkcija $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ za koje važi*

$$f_n = P(D)(P_1 F_n) \text{ u } \mathbb{R}^d \quad i \quad F_n \xrightarrow{2} F,\ n \to \infty. \tag{3.3}$$

Delovanje ultradiferencijalnog operatora $P(D)$ na P_1F_n je definisano kao u Glavi 2, tj.:

$$\lim_{m\to\infty} P_m(D)(P_1F_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha(P_1F_n) = f_n \text{ u } \mathbb{R}^d.$$

Sledeće tvrđenje nam omogućava da napravimo prelaz iz jednog oblika fundamentalnih nizova u drugi.

Lema 3.3. *Neka su P_1, $(F_n)_n$ i F kao u (3.3) i pretpostavimo da (1.6) (resp. (1.8)) važi za svaki P_1, tj. da važi $|P_1(x)| \le Ce^{h_1|x|^{1/t}}$ (resp. u Rumijeovom slučaju $|P_1(x)| \le Ce^{c_1(|x|)^{1/t}}$), $x \in \mathbb{R}^d$, gde je $h_1 > 0$ (resp. c_1 je funkcija koja zavisi od pogodno izabranog niza iz $\mathcal{R}$). Tada:*
(a) Za dato $h > 0$ (resp. za datu funkciju c) postoji $r > 0$ (resp. postoji $(r_p)_p \in \mathcal{R}$) tako da

$$\left| e^{h|x|^{1/t}} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_1}{P_r}\right)(x) \right| < \infty \quad (\textit{resp.} \ \left| e^{c(|x|)^{1/t}} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_1}{P_{r_p}}\right)(x) \right| < \infty), \ x \in \mathbb{R}^d.$$

(b) Postoji r (resp. postoji $(r_p)_p \in \mathcal{R}$) tako da

$$e^{-2h_1|x|^{1/t}} \left(P_1F_n * \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_1}{P_r}\right)(x) \right) \xrightarrow{2} e^{-2h_1|x|^{1/t}} \left(P_1F * \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_1}{P_r}\right)(x) \right)$$

$$(\textit{resp.} \ e^{-c(|x|)^{1/t}} \left((P_1F_n - P_1F) * \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_1}{P_{r_p}}\right)(x) \right) \xrightarrow{2} 0), \ n \to \infty,$$

gde funkcija c ispunjava uslov $2c_1^{1/t} \le c^{1/t}$.

Dokaz. Tvrđenje ćemo dokazati samo u Rumijeovom slučaju jer je Berlingov slučaj isti. Dokaz dela (a) sledi iz osobina (1.6)-(1.8). Izaberimo niz $(r_{0,p})_p \in \mathcal{R}$ za koji je $e^{c(|x|)^{1/t}} \le P_{r_{0,p}}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Dokaz će biti gotov ako pokažemo da postoji niz $(r_p)_p \in \mathcal{R}$ takav da

$$P_{r_{0,p}}(D)\left(P_1(\xi)/P_{r_p}(\xi)\right) \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

jer tada

$$P_{r_{0,p}}(x)\mathcal{F}^{-1}\left(P_1(\xi)/P_{r_p}(\xi)\right)(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Iz definicije ultradiferencijalnih operatora i Lajbnicove formule sledi

$$P_{r_{0,p}}(D)\left(\frac{P_1(\xi)}{P_{r_p}(\xi)}\right)=\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_\alpha\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^{\alpha-\gamma}P_1(\xi)D^\gamma\frac{1}{P_{r_p}(\xi)},\quad \xi\in\mathbb{R}^d,$$

gde za neko $C>0$ važi ocena

$$|a_\alpha|\leq\frac{C}{\alpha!^t\prod_{i\leq|\alpha|}r_{0,i}},\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^d.$$

Iz Leme 1.8 sledi:

$$\left|D^{\alpha-\gamma}P_1(x)\right|\leq C\frac{(\alpha-\gamma)!}{\varepsilon^{|\alpha-\gamma|}}e^{\widetilde{c}_1(|x|)^{1/t}},\ x\in\mathbb{R}^d,\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^d,$$

gde je $\widetilde{c}_1$ funkcija za koja zavisi od datog P_1 i

$$\left|D^\gamma\left(1/P_{r_p}(x)\right)\right|\leq C\frac{\gamma!}{\varepsilon^{|\gamma|}}e^{-\widetilde{c}_{r_p}(|x|)^{1/t}},\ x\in\mathbb{R}^d,\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^d,$$

gde za funkciju $\widetilde{c}_{r_p}$ (koja zavisi od niza $(r_p)_p$) važi

$$\widetilde{c}_1(|x|)\leq\widetilde{c}_{r_p}(|x|),\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Tada, za opogodno odabrane konstante $C,C_1>0$, dobijamo

$$\begin{aligned}\left|P_{r_{0,p}}(D)\ \left(\frac{P_1(\xi)}{P_{r_p}(\xi)}\right)\right|&=\left|\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}a_\alpha\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}D^{\alpha-\gamma}P_1(\xi)D^\gamma\frac{1}{P_{r_p}(\xi)}\right|\\&\leq\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}|a_\alpha|\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\left|D^{\alpha-\gamma}P_1(\xi)\right|\left|D^\gamma\frac{1}{P_{r_p}(\xi)}\right|\\&\leq C\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha!^t\prod_{i=1}^{|\alpha|}r_{0,i}}\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\frac{(\alpha-\gamma)!}{\varepsilon^{|\alpha-\gamma|}}e^{\widetilde{c}_1(|\xi|)^{1/t}}\frac{\gamma!}{\varepsilon^{|\gamma|}}e^{-\widetilde{c}_{r_p}(|\xi|)^{1/t}}\\&\leq C_1\left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}\frac{2^\alpha}{\varepsilon^{|\alpha|}\alpha!^{t-1}\prod_{i=1}^{|\alpha|}r_{0,i}}\right)e^{\widetilde{c}_1(|\xi|)^{1/t}-\widetilde{c}_{r_p}(|\xi|)^{1/t}},\quad\xi\in\mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Kako je suma u posljednjem izrazu konačna, dokaz je završen.

Dokažimo sada tvrđenje (b) u Rumijeovom slučaju. Na osnovu Leme 3.1, možemo pretpostaviti da je $(F_n)_n$ ograničen niz glatkih funkcija u $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Tada, na osnovu pretpostavke leme i (1.7), sa odgovarajućom funkcijom c_0 (koja zavisi od niza $(r_p)_p \in \mathcal{R}$), za koju važi

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{4c_1(|s|)^{1/t}-2c_0(|s|)^{1/t}} ds < \infty,$$

postoje konstante $C, C_1 > 0$ takve da

$$\begin{aligned}
&\left|(P_1 F_n - P_1 F) * \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{P_1}{P_{r_p}}\right)(x)\right| \\
&\leq C\|F_n - F\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{2c_1(|x-s|)^{1/t}} e^{-2c_0(|s|)^{1/t}} ds\right)^{1/2} \\
&\leq C\|F_n - F\|_2 \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{4c_1(|x|)^{1/t}+4c_1(|s|)^{1/t}-2c_0(|s|)^{1/t}} ds\right)^{1/2} \\
&\leq C_1\|F_n - F\|_2 e^{2c_1(|x|)^{1/t}} \leq C_1\|F_n - F\|_2 e^{c(|x|)^{1/t}}, \quad x \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}$$

Time je tvrđenje (b) dokazano. □

Definicija 3.6. *$\widetilde{s}$-t-fundamentalni nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ su u relaciji $\sim_2$, i pišemo*

$$(f_n)_n \sim_2 (g_n)_n,$$

ako postoje nizovi $(F_n)_n$, $(G_n)_n$ glatkih funkcija u $L^2(\mathbb{R}^d)$ koji konvergiraju u $L^2(\mathbb{R}^d)$, ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ i funkcija $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$ takvi da važi

$$f_n = P(D)(P_1 F_n), \quad g_n = P(D)(P_1 G_n) \ u \ \mathbb{R}^d, \ F_n - G_n \xrightarrow{2} 0, \ n \to \infty.$$

Propozicija 3.5. *Ako važe pretpostavke Definicije 3.6 za $\widetilde{s}$-t-fundamentalni niz $(f_n)_n$ i ako $P(D)(P_1 F_n) \xrightarrow{2} 0$, tada $F_n \xrightarrow{2} 0$, $n \to \infty$. U specijalnom slučaju, ako je $P(D)(P_1 F) = 0$ tada je $F = 0$.*

Dokaz. Primenom Furijeove transformacije dobijamo $P(\xi)\widehat{P_1 F_n}(\xi) \xrightarrow{2} 0$, $n \to \infty$. Na sličan način kao i u dokazu Propozicije 2.2 dobijamo $\widehat{P_1 F_n}(\xi) \xrightarrow{2} 0$, $n \to \infty$, odakle sledi $P_1 F_n(x) \xrightarrow{2} 0$ i konačno $F_n(x) \xrightarrow{2} 0$, $n \to \infty$, $x \in \mathbb{R}^d$. Specijalni slučaj je trivijalan. □

Ključno tvrđenje u ovom poglavlju se odnosi da mogućnost promene predstavnika $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistribucija (koje su definisane u Definiciji 3.7), tj. $\widetilde{s}$-t-fundamentalni nizovi ostaju isti, menjaju se niz $(F_n)_n$ glatkih L^2

funkcija, ultradiferencijalni operator $P(D)$ i funkcija $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$. Posmatrajmo samo Rumijeov slučaj.

Neka su $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, $P^1_{\widetilde{r}_p}, P^2_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}_u^{\{t\}}$ i $(\widetilde{F}_n)_n, (\widetilde{\widetilde{F}}_n)_n$ nizovi funkcija iz $L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ koji ispunjavaju uslove Definicije 3.5, tj:

$$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)(P^1_{\widetilde{r}_p}\widetilde{F}_n) = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)(P^2_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}\widetilde{\widetilde{F}}_n) \text{ u } \mathbb{R}^d, \tag{3.4}$$

tako da, uz odgovarajuću funkciju c, važi

$$\max\left\{|P_{\widetilde{r}_p}(x)|, |P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(x)|, |P^1_{\widetilde{r}_p}(x)|, |P^2_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(x)|\right\} \leq Ce^{c(|x|)^{1/t}},\ x \in \mathbb{R}^d. \tag{3.5}$$

Tada, bez gubitka opštosti, možemo pretpostaviti da $P^1_{\widetilde{r}_p} = P^2_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} = P_{r_p}$. Zapravo u (3.4) možemo koristiti (u zagradama) umesto $P^1_{\widetilde{r}_p}(x)\widetilde{F}_n(x)$ i $P^2_{\widetilde{r}_p}(x)\widetilde{\widetilde{F}}_n(x)$ sledeće

$$P_{r_p}(x)\frac{P^1_{\widetilde{r}_p}(x)\widetilde{F}_n(x)}{P_{r_p}(x)} \text{ i } P_{r_p}(x)\frac{P^2_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(x)\widetilde{\widetilde{F}}_n(x)}{P_{r_p}(x)},\ x \in \mathbb{R}^d,$$

gde smo izabrali dovoljno spor niz $(r_p)_p \in \mathcal{R}$ da bismo imali L^2- konvergenciju nizova

$$\left(\frac{P^1_{\widetilde{r}_p}(x)\widetilde{F}_n(x)}{P_{r_p}(x)}\right)_n \text{ i } \left(\frac{P^2_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(x)\widetilde{\widetilde{F}}_n(x)}{P_{r_p}(x)}\right)_n.$$

Sada možemo da formulišemo sledeće tvrđenje.

Propozicija 3.6. *Neka su $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$, $P_{r_p} \in \mathcal{P}_u^{\{t\}}$, $(\widetilde{F}_n)_n, (\widetilde{\widetilde{F}}_n)_n$ nizovi funkcija u $L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ i $\widetilde{F}, \widetilde{\widetilde{F}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ koji ispunjavaju uslove Definicije 3.5, tj.*

$$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)(P_{r_p}\widetilde{F}_n) = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)(P_{r_p}\widetilde{\widetilde{F}}_n) \text{ u } \mathbb{R}^d,\ \widetilde{F}_n \xrightarrow{2} \widetilde{F},\ \widetilde{\widetilde{F}}_n \xrightarrow{2} \widetilde{\widetilde{F}},\ n \to \infty,$$

tako da važi (3.5). Tada postoje: niz $(r_{0,p})_p \in \mathcal{R}$, nizovi $(F_{n,1})_n, (F_{n,2})_n$ funkcija u $L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$, funkcija $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i ultradiferencijalni operator $P_{r_{0,p}} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da

$$f_n = P_{r_{0,p}}(D)(P_{r_p}F_{n,1}) = P_{r_{0,p}}(D)(P_{r_p}F_{n,2}) \text{ u } \mathbb{R}^d,$$
$$F_{n,1} = F_{n,2} = F_n,\ n \in \mathbb{N} \text{ i } F_n \xrightarrow{2} F,\ n \to \infty.$$

Dokaz. Ako izaberemo funkcije

$$F_{n,1}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widetilde{F}_n(\xi)}{P_{r_{0,p}}(\xi)}\right)(x),\ F_{n,2}(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widetilde{\widetilde{F}}_n(\xi)}{P_{r_{0,p}}(\xi)}\right)(x),\ x \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N},$$

i

$$F_1(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widetilde{F}(\xi)}{P_{r_{0,p}}(\xi)}\right)(x), \qquad F_2(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widetilde{\widetilde{F}}(\xi)}{P_{r_{0,p}}(\xi)}\right)(x),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

tada je

$$f_n = P_{r_{0,p}}(D)(P_{r_p} F_{n,1}) = P_{r_{0,p}}(D)(P_{r_p} F_{n,2}) \text{ u } \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{N},$$

$$\text{i } \ F_{n,1} \xrightarrow{2} F_1, \quad F_{n,2} \xrightarrow{2} F_2,\ n \to \infty,$$

za pogodan izbor niza $(r_{0,p})_p \in \mathcal{R}$. Iz Propozicije 3.5 sledi da je $F_{n,1} = F_{n,2}, n \in \mathbb{N}$, u $\mathbb{R}^d$ odakle dobijamo tvrđenje. $\square$

Kako nam gore navedena tvrđena daju refleksivnost i simetričnost, pokažimo još tranzitivnost relacije $\sim_2$. Tvrđenje navodimo bez dokaza, jer se ono izvodi na isti način kao u Propoziciji 3.3.

Propozicija 3.7. *Relacija $\sim_2$ je tranzitivna.*

Definicija 3.7. *Klase ekivalencije $\widetilde{s}$-t-fundamentalnih nizova određuju prostor $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistribucija. Takav prostor označavamo sa $\widetilde{\mathcal{T}}'^* = \widetilde{\mathcal{T}}'^*(\mathbb{R}^d)$.*

3.4 Operacije sa $\widetilde{s}$-temperiranim ultradistribucijama

3.4.1 Algebarske operacije

Neka su $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ $\widetilde{s}$-temperirane ultradistribucije. Definišimo sumu $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistibucija sa $f + g = [f_n + g_n]$ i pokažimo da $f + g \in \widetilde{\mathcal{T}}'^*$, tj. pokažimo da je niz $(f_n + g_n)_n$ $\widetilde{s}$-t-fundamentalan u $\mathbb{R}^d$ i da $\widetilde{s}$-temperirana ultradistribucija $[f_n + g_n]$ ne zavisi od izbora $\widetilde{s}$-t-fundamentalnih nizova $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$, tj. ako je $(f_n)_n \sim_2 (\widetilde{f}_n)_n$ i $(g_n)_n \sim_2 (\widetilde{g}_n)_n$, tada je i $(f_n + g_n)_n \sim_2 (\widetilde{f_n + \widetilde{g}_n})_n$. Pokažimo da vrede ove osobine u Rumijeovom slučaju (dokaz za Berlingov slučaj je isti).

Kako su nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ $\widetilde{s}$-t-fundamentalni u $\mathbb{R}^d$ na osnovu Definicije 3.5 postoje nizovi $(F_n)_n$, $(G_n)_n$ glatkih L^2 funkcija, funkcije $F, G \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ i funkcije $P^1_{\widetilde{r}_p}, P^1_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^*_u$ tako da važi:

$$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)(P^1_{\widetilde{r}_p} F_n) \text{ u } \mathbb{R}^d \text{ i } F_n \xrightarrow{2} F,\ n \to \infty,$$

$$g_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)(P^2_{\widetilde{r}_p} G_n) \text{ u } \mathbb{R}^d \text{ i } G_n \xrightarrow{2} G,\ n \to \infty.$$

Na osnovu Propozicije 3.6 (i razmatranja iznad) postoje: niz $(r_{0,p})_p \in \mathcal{R}$, nizovi $(F_{n,1})_n, (G_{n,1})_n$ funkcija u $L^2(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$, funkcije $F_1, G_1 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ultradiferencijalni operator $P_{r_{0,p}} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ i $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}_u$ takvi da važi

$$f_n = P_{r_{0,p}}(D)(P_{r_p} F_{n,1}), \quad g_n = P_{r_{0,p}}(D)(P_{r_p} G_{n,1}) \text{ u } \mathbb{R}^d,$$

$$F_{n,1} \xrightarrow{2} F_1,\ G_{n,1} \xrightarrow{2} G_1,\ n \to \infty.$$

Odavde sledi

$$f_n + g_n = P_{r_{0,p}}(D)(P_{r_p}(F_{n,1} + G_{n,1})) \text{ u } \mathbb{R}^d \text{ i } F_{n,1} + G_{n,1} \xrightarrow{2} F_1 + G_1 \text{ kad } n \to \infty,$$

tj. niz $(f_n + g_n)_n$ je $\widetilde{s}$-t-fundamentalan. Iz Propozicije 3.6 sledi da s-temperirana ultradistribucija $[f_n + g_n]$ ne zavisi od izbora $\widetilde{s}$-t-fundamentalnih nizova $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$.

Razlika $f - g$, $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistribucija $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ je $\widetilde{s}$-temperirana ultradistibucija $f - g = [f_n - g_n]$. Sa $\lambda f = [\lambda f_n]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ je definisano množenje $\widetilde{s}$-temperirane ultradistribucije skalarom iz $\mathbb{C}$. Konzistencija ovih definicija se može proveriti na isti način kao i za zbir. Dakle, $\widetilde{\mathcal{T}}'^*$ je vektorski prostor.

3.4.2 Diferenciranje

Neka je u Rumijeovom slučaju $f = [f_n] \in \widetilde{\mathcal{T}}'^{\{t\}}$ i neka je $\beta \in \mathbb{Z}^d_+$. Definišimo $f^{(\beta)} = [f_n^{(\beta)}]$ i pokažimo da je niz $(f_n^{(\beta)})_n$ $\widetilde{s}$-t-fundamentalan. Po Definiciji 3.5 je $\widetilde{s}$-temperirana ultradistribucija f određena pomoću niza $(F_n)_n$, ultradiferencijalnog operatora $P_{r_p}(D)$ i funkcije $P^1_{r_p}(\xi)$. Kako je $f_n^{(\beta)} =$

$P_{r_p}(D)(P^1_{r_p}F_n)^{(\beta)}$ u $\mathbb{R}^d$, na osnovu Leme 3.3 i Propozicije 3.6 postoje: niz $(\widetilde{F}_n)_n$ funkcija u $L^2(\mathbb{R}^d)\cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ i funkcija $\widetilde{F}\in L^2(\mathbb{R}^d)$ oblika

$$\widetilde{F}_n = \frac{1}{P^1_{r_p}}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(i\xi)^\beta P_{r_p}(\xi)}{P_{\widetilde{r}_p}(\xi)}\right)*(P^1_{r_p}F_n)\right),\ n\in\mathbb{N},$$

$$\widetilde{F} = \frac{1}{P^1_{r_p}}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(i\xi)^\beta P_{r_p}(\xi)}{P_{\widetilde{r}_p}(\xi)}\right)*(P^1_{r_p}F)\right),$$

kao i niz $(\widetilde{r}_p)_p\in\mathcal{R}$ i ultradiferencijalni operator $P_{\widetilde{r}_p}\in\mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da je

$$P_{r_p}(D)(P^1_{r_p}F_n)^{(\beta)} = P_{\widetilde{r}_p}(D)(P^1_{r_p}\widetilde{F}_n)\text{ u }\mathbb{R}^d.$$

Iz (1.7), (1.8) i (1.10) sledi da $\widetilde{F}_n \xrightarrow{2} \widetilde{F},\ n\to\infty$. Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju.

3.4.3 Množenje s-temperirane ultradistribucije sa funkcijom iz $\mathcal{E}^*$

Ako je $(f_n)_n$ $\widetilde{s}$-t-fundamentalan niz i $\omega\in\mathcal{E}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$, dokažimo da je $\omega f=[\omega f_n]$ takođe $\widetilde{s}$-t-fundamentalan. U Rumijeovom slučaju postoje: niz $(F_n)_n$ glatkih L^2 funkcija, funkcija $F\in L^2(\mathbb{R}^d)$, $P^1_{r_p}\in\mathcal{P}^{\{t\}}_u$ i ultradiferencijalni operator $P_{r_p}\in\mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da važi

$$\omega f_n = \omega P_{r_p}(D)(P^1_{r_p}F_n)\text{ u }\mathbb{R}^d\ \text{ i } F_n\xrightarrow{2}F,\ n\to\infty.$$

Na osnovu Propozicije 3.6 postoje: niz $(\widetilde{F}_n)_n$ glatkih funkcija iz $L^2(\mathbb{R}^d)$ i funkcija $\widetilde{F}\in L^2(\mathbb{R}^d)$ oblika

$$\widetilde{F}_n = \frac{1}{P^1_{r_p}}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{\omega}*(P_{r_p}(\xi)\widehat{P^1_{r_p}F_n})}{P_{\widetilde{r}_p}(\xi)}\right), n\in\mathbb{N},$$

$$\widetilde{F} = \frac{1}{P^1_{r_p}}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{\omega}*(P_{r_p}(\xi)\widehat{P^1_{r_p}F})}{P_{\widetilde{r}_p}(\xi)}\right),$$

kao i ultradiferencijalni operator $P_{\widetilde{r}_p}\in\mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da važi

$$P_{r_p}(D)(P^1_{r_p}(x)F_n(x)) = P_{\widetilde{r}_p}(D)(P^1_{r_p}(x)\widetilde{F}_n(x)),\ x\in\mathbb{R}^d.$$

Iz (1.8), (1.10) i činjenice da $F_n\xrightarrow{2}F,\ n\to\infty$ sledi $\widetilde{F}_n\xrightarrow{2}\widetilde{F},\ n\to\infty$.

Dokaz u Berlingovom slučaju je isti. Dakle, niz $(\omega f_n)_n$ je fundamentalan u $\mathbb{R}^d$.

3.5 Konvergencija u prostoru $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistribucija

Definicija 3.8. *Niz $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistribucija $(f^n)_n = ([f^n_m])_n$ konvergira ka $\widetilde{s}$-temperiranoj ultradistribuciji $f = [f_m]$, i pišemo*

$$f^n \xrightarrow{\widetilde{s}-t} f,\ n \to \infty \quad \textit{ili} \quad \widetilde{s}\text{-}t\text{-}\lim_{n\to\infty} f^n = f,$$

ako postoje nizovi $(F^n_m)_m$, $n \in \mathbb{N}$, $(F_m)_m$ glatkih L^2 funkcija, niz $(F^n)_n$, $F_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$, funkcija $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ i funkcija $P_1 \in \mathcal{P}^*_u$ takvi da:

$$f^n_m = P(D)(P_1 F^n_m), \quad f_m = P(D)(P_1 F_m) \quad u\ \mathbb{R}^d,$$
$$F^n_m \xrightarrow{2} F_m,\ n \to \infty,\ \textit{uniformno po } m \in \mathbb{N},\ F_m \xrightarrow{2} F,\ m \to \infty,$$
$$F^n_m \xrightarrow{2} F^n,\ m \to \infty,\ \textit{za sve } n \in \mathbb{N}\ i\ F^n \xrightarrow{2} F,\ n \to \infty.$$

Sa ovim pretpostavkama je $\lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} F^n_m = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} F^n_m$.

Teorema 3.2. *Ako postoji $\widetilde{s}$-t-$\lim\limits_{n\to\infty} f^n$, onda je jedinstven.*

Dokaz. Tvrđenje ćemo dokazati samo u Rumijeovom slučaju, jer se Berlingov slučaj isto dokazuje. Pretpostavimo da $f^n \xrightarrow{\widetilde{s}\text{-}t} f$ i $f^n \xrightarrow{\widetilde{s}\text{-}t} g$ u $\mathbb{R}^d$ kad $n \to \infty$ i pokažimo da je $f = g$. Po Definiciji 3.8 postoje nizovi $(\widetilde{F}^n_m)_m$, $(\widetilde{\widetilde{F}}{}^n_m)_m$, $n \in \mathbb{N}$, $(\widetilde{F}_m)_m$, $(\widetilde{\widetilde{F}}_m)_m$ u $L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, nizovi $(\widetilde{F}^n)_n$, $(\widetilde{\widetilde{F}}{}^n)_n$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$, funkcije $\widetilde{F}, \widetilde{\widetilde{F}} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ i funkcije $P^1_{\widetilde{r}_p}, P^1_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}_u$ tako da:

$$f^n_m = P_{\widetilde{r}_p}(D)(P^1_{\widetilde{r}_p} \widetilde{F}^n_m),\ f_m = P_{\widetilde{r}_p}(D)(P^1_{\widetilde{r}_p} \widetilde{F}_m) \quad \text{u} \ \ \mathbb{R}^d,$$
$$\widetilde{F}^n_m \xrightarrow{2} \widetilde{F}_m,\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N},\ \widetilde{F}_m \xrightarrow{2} \widetilde{F},\ m \to \infty,$$
$$\widetilde{F}^n_m \xrightarrow{2} \widetilde{F}^n,\ m \to \infty,\ \text{za sve } n \in \mathbb{N} \ \text{ i } \widetilde{F}^n \xrightarrow{2} \widetilde{F},\ n \to \infty$$

i

$$f^n_m = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)(P^1_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \widetilde{\widetilde{F}}{}^n_m),\ f_m = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)(P^1_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \widetilde{\widetilde{F}}_m) \quad \text{u} \ \ \mathbb{R}^d,$$
$$\widetilde{\widetilde{F}}{}^n_m \xrightarrow{2} \widetilde{\widetilde{F}}_m,\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N},\ \widetilde{\widetilde{F}}_m \xrightarrow{2} \widetilde{\widetilde{F}},\ m \to \infty,$$
$$\widetilde{\widetilde{F}}{}^n_m \xrightarrow{2} \widetilde{\widetilde{F}}{}^n,\ m \to \infty,\ \text{za svaki } n \in \mathbb{N} \text{ i } \ \widetilde{\widetilde{F}}{}^n \xrightarrow{2} \widetilde{\widetilde{F}},\ n \to \infty.$$

Koristeći Propoziciju 3.6 možemo konstruisati nizove $(F^n_{m,1})_m$, $(F^n_{m,2})_m$, $n \in \mathbb{N}$, $(F_{m,1})_m$, $(F_{m,2})_m$ funkcija u $L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, nizove $(F^n_1)_n, (F^n_2)_n$ L^2 funkcija, funkcije $F_1, F_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ultradiferencijalni operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ i funkciju $P^1_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}_u$ tako da:

$$\begin{aligned} &f^n_m = P_{r_p}(D)(P^1_{r_p} F^n_{m,1}) = P_{r_p}(D)(P^1_{r_p} F^n_{m,2}), \\ &f_m = P_{r_p}(D) F_{m,1}, \ g_m = P_{r_p}(D) F_{m,2} \quad \text{u} \ \ \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F^n_{m,1} - F^n_{m,2} \xrightarrow{2} F_{m,1} - F_{m,2}, \ n \to \infty, \ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N}, \\ &F_{m,1} - F_{m,2} \xrightarrow{2} F_1 - F_2, \ m \to \infty, \ F^n_{m,1} - F^n_{m,2} \xrightarrow{2} F^n_1 - F^n_2, \ m \to \infty, \\ &\text{za svaki } n \in \mathbb{N} \text{ i } F^n_1 - F^n_2 \xrightarrow{2} F_1 - F_2, \ n \to \infty. \end{aligned}$$

Kako je $P_{r_p}(D)(P^1_{r_p}(F_{m,2} - F_{m,1})) = \lim_{n\to\infty} P_{r_p}(D)(P^1_{r_p}(F^n_{m,1} - F^n_{m,2} - F_{m,1} + F_{m,2})) = 0$ u $\mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{N}$, tada, kao u Propoziciji 3.5, dobijamo $F_1 = F_2$ u $\mathbb{R}^d$. Prema tome je $f = g$. □

Iz [35] znamo da se svaki $f \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ može identifikovati sa $f = P(D)(P_1 F)$, gde je $P \in \mathcal{P}^*$, $P_1 \in \mathcal{P}^*_u$ i funkcija $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ je oblika $F = \sum_{|\alpha|=0}^\infty c_\alpha h_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^d_+} \in l^2$.

U nastavku ćemo koristiti poznato tvrđenje koje ćemo formulisati na sledeći način (videti Teoremu 1.6):

Lema 3.4. *$f \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako postoje $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $P \in \mathcal{P}^*$ i $P_1 \in \mathcal{P}^*_u$ takvi da važi $f = P(D)(P_1 F)$, tj.*

$$(f, \varphi)_{\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} F(x) P_1(x) P(-D) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d).$$

Dokaz Leme 3.4 je posledica poznate Teoreme o reprezentaciji koja se dokazuje pomoću Han-Banahove teoreme i tvrđenja (a) i (b) Leme 1.9.

Propozicija 3.8. *Neka je $f \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ oblika kao u prethodnoj lemi. Tada je*

$$(f_n)_n = (P(D)(P_1 F_n))_n, \ \text{gde } F_n = \sum_{|\alpha| \le n} c_\alpha h_\alpha, n \in \mathbb{N},$$

$\widetilde{s}$-t-fundamentalan i određuje $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{T}}'^*$.
Obratno, ako je $\widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{T}}'^*$ kao u Definiciji 3.5, tada je (odgovarajući) $f = P(D)(P_1 F)$, gde je F L^2 granica od F_n kad $n \to \infty$, element prostora $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$. Korespodencija između $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ i $\widetilde{\mathcal{T}}'^*$ definiše linearnu bijekciju između ovih prostora.

3.6 s- i $\widetilde{s}$-temperirane ultradistribucije kao funkcionali

Neka je φ element prostora $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i neka je $f = [f_m]$ element prostora $\mathcal{T}'^*$. Tada definišemo dejstvo s-temperirane ultradistribucije $f = [f_m]$, $f_m = P(H)F_m$ u $\mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{N}$, $(P \in \mathcal{P}^{2*})$, $F_m \xrightarrow{2} F$, $m \to \infty$ na elemente prostora $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$,

$$\varphi \mapsto f(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{T}'^*},$$

sa

$$(f, \varphi)_{\mathcal{T}'^*} = \lim_{m\to\infty} (f_m, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} FP(H)\varphi dx = (F, P(H)\varphi)_{L^2}. \tag{3.6}$$

Kao i u slučaju s-ultradistribucija, sa drugom reprezentacijom

$$f_m = \widetilde{P}(H)\widetilde{F}_m \text{ u } \mathbb{R}^d,\ m \in \mathbb{N},\ \widetilde{F}_m \xrightarrow{2} \widetilde{F},\ m \to \infty,$$

$(\widetilde{P} \in \mathcal{P}^{2*})$, imamo

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_m \varphi dx = \int_{\mathbb{R}^d} FP(H)\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{F}\widetilde{P}(H)\varphi dx,$$

jer mešoviti niz integrala

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{P}(H)\widetilde{F}_1\varphi dx,\ \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\widetilde{P}}(H)\widetilde{\widetilde{F}}_1\varphi dx,\ \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{P}(H)\widetilde{F}_2\varphi dx,\ \int_{\mathbb{R}^d} \widetilde{\widetilde{P}}(H)\widetilde{\widetilde{F}}_2\varphi dx, \dots$$

konvergira. Iz Leme 1.9 (b) sledi da je $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto (f, \varphi)_{\mathcal{T}'^*}$ linearno preslikavanje.

Neka je sada $f = [f_n] \in \widetilde{\mathcal{T}}'^*$. Koristeći tvrđenje (b) Leme 1.9 pokazujemo da isto važi za

$$\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d) \ni \varphi \mapsto (f, \varphi)_{\widetilde{\mathcal{T}}'^*}.$$

Delovanje $\widetilde{s}$-ultradistribucije $f = [f_m]$,

$$f_m = P(D)(P_1 F_m) \text{ u } \mathbb{R}^d,\ m \in \mathbb{N},\ F_m \xrightarrow{2} F,\ m \to \infty,$$

$(P \in \mathcal{P}^*,\ P_1 \in \mathcal{P}_u^*)$, na test funkcije $\varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ je dato sa

$$(f, \varphi)_{\widetilde{\mathcal{T}}'^*} = \lim_{m\to\infty} (F_m, P_1 P(-D)\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x)P_1(x)P(-D)\varphi(x)dx, \tag{3.7}$$

za sve $\varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Sa drugom reprezentacijom

$$f_m = \widetilde{P}(D)(\widetilde{P}_1 \widetilde{F}_m) \text{ u } \mathbb{R}^d,\ m \in \mathbb{N},\ \widetilde{F}_m \xrightarrow{2} \widetilde{F},\ m \to \infty,$$

$(\widetilde{P} \in \mathcal{P}^*,\ \widetilde{P}_1 \in \mathcal{P}_u^*)$, ponovo dobijamo istu granicu

$$\lim_{m\to\infty} (F_m, P_1 P(-D)\varphi) = \lim_{m\to\infty} (\widetilde{F}_m, \widetilde{P}_1 \widetilde{P}(-D)\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d).$$

Ovim smo u oba slučaja pokazali konzistentnost ovih definicija. Neprekidnost u oba slučaja sledi iz sledećeg tvrđenja.

Propozicija 3.9. *Neka je $f = [f_m] \in \mathcal{T}'^*$ (resp. $\widetilde{\mathcal{T}}'^*$) i neka su $\varphi_n,\ \varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ takvi da važi $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} \varphi,\ n \to \infty$. Tada $(f, \varphi_n)_{\mathcal{T}'^*} \to (f, \varphi)_{\mathcal{T}'^*}$ (resp. $(f, \varphi_n)_{\widetilde{\mathcal{T}}'^*} \to (f, \varphi)_{\widetilde{\mathcal{T}}'^*}$) kad $n \to \infty$.*

Dokaz. Na osnovu (3.1) i (3.6) imamo

$$(f, \varphi_n)_{\mathcal{T}'^*} = (F, P(H)\varphi_n)_{L^2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Tada iz Leme 1.9 (c) i

$$\begin{aligned} |(f, \varphi_n)_{\mathcal{T}'^*} - (f, \varphi)_{\mathcal{T}'^*}| &= |(F, P(H)(\varphi_n - \varphi))_{L^2}| \\ &\le \|F\|_2 \|P(H)(\varphi_n - \varphi)\|_2 \le C\|P(H)(\varphi_n - \varphi)\|_2, \end{aligned}$$

dobijamo tvrđenje u slučaju $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistribucija. Ako je $f \in \widetilde{\mathcal{T}}'^*$, tada je na osnovu (3.3) i (3.7)

$$(f, \varphi_n)_{\widetilde{\mathcal{T}}'^*} = (F, P_1 P(-D)\varphi_n)_{L^2},\ n \in \mathbb{N},$$

odakle iz Leme 1.9 (a) i (b) i

$$\begin{aligned} |(f, \varphi_n)_{\widetilde{\mathcal{T}}'^*} - (f, \varphi)_{\widetilde{\mathcal{T}}'^*}| &= |(F, P_1 P(-D)(\varphi_n - \varphi))_{L^2}| \\ &\le \|F\|_2 \|P_1 P(-D)(\varphi_n - \varphi)\|_2 \\ &\le C\|P_1 P(-D)(\varphi_n - \varphi)\|_2, \end{aligned}$$

dobijamo tvrđenje. □

Štaviše, imamo sledeći očekivani rezultat:

Propozicija 3.10. *Ako $f^n \xrightarrow{s-t} f$ (resp. $f^n \xrightarrow{\widetilde{s}-t} f$) i $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} \varphi,\ n \to \infty$, tada $(f^n, \varphi_n)_{\mathcal{T}'^*} \to (f, \varphi)_{\mathcal{T}'^*}$ (resp. $(f^n, \varphi_n)_{\widetilde{\mathcal{T}}'^*} \to (f, \varphi)_{\widetilde{\mathcal{T}}'^*}$) kad $n \to \infty$.*

Dokaz. Prvo izvodimo dokaz u slučaju $\mathcal{T}'^*$. Iz Definicije 3.4 imamo

$$\lim_{n\to\infty}(f^n,\varphi_n)_{\mathcal{T}'^*} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(F^n_m, P(H)\varphi_n)_{L^2},$$

gde $F^n_m \xrightarrow{2} F^n$, $m\to\infty$, za sve $n\in\mathbb{N}$ i $F^n \xrightarrow{2} F$ kad $n\to\infty$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned}|(F^n,\varphi_n)_{L^2} - (F,\varphi)_{L^2}| &\le |(F^n, P(H)(\varphi_n-\varphi))_{L^2}| + |(F^n - F, P(H)\varphi)_{L^2}|\\ &\le \|F^n\|_2\|P(H)(\varphi_n-\varphi)\|_2 + \|F^n - F\|_2\|P(H)\varphi\|_2.\end{aligned}$$

I na kraju, iz Leme 1.9 (c) sledi tvrđenje.

Neka je sada $f\in\widetilde{\mathcal{T}}'^*$. Na osnovu Definicije 3.8 je

$$\lim_{n\to\infty}(f^n,\varphi_n)_{\widetilde{\mathcal{T}}'^*} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(F^n_m, P_1P(-D)\varphi_n)_{L^2},$$

gde $F^n_m \xrightarrow{2} F^n$, $m\to\infty$, za sve $n\in\mathbb{N}$ i $F^n \xrightarrow{2} F$ kad $n\to\infty$, odakle je na osnovu Leme 1.9 (a) i (b)

$$\begin{aligned}|(F^n,\varphi_n)_{L^2} - (F,\varphi)_{L^2}| &\le |(F^n, P_1P(-D)(\varphi_n-\varphi))_{L^2}|\\ &\quad + |(F^n - F, P_1P(-D)\varphi)_{L^2}|\\ &\le \|F^n\|_2\|P_1P(-D)(\varphi_n-\varphi)\|_2 + \|F^n - F\|_2\|P_1P(-D)\varphi\|_2.\end{aligned}$$

□

Glava 4

Veza između standardnog i sekvencijalnog pristupa

U ovoj glavi ćemo dokazati da je svaka s-temperirana ultradistribicija linearan i sekvencijalno neprekidan funkcional u prostoru $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Motivacija za uvođenje s-t- i $\widetilde{s}$-t-fundamentalnih nizova je zapravo prelazak iz jedne forme fundamentalnog niza u drugu, zato ćemo u Teoremi 4.2 pokazati algebarski i topološki izomorfizam između prostora s- i $\widetilde{s}$-temperiranih ultradistribucija.

Ta teorema nam omogućava da predstavimo sekvencijalne temperirane ultradistribucije pomoću nizova $(F_n)_n$ glatkih funkcija, funkcija $P \in \mathcal{P}_u^*$ i ultradiferencijalnih operatora $P(D)$.

Korištenjem Teoreme 4.1 ćemo pokazati da je svaka s-temperirana ultradistribicija linearan i sekvencijalno neprekidan funkcional u prostoru $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, isto važi i za $\widetilde{s}$-temperirane ultradistribucije - Teorema 4.2. Koristeći te rezultate, dobijamo jedan od najznačajnijih rezultata ove doktorske disertacije, a to je:

Svaka s-ultradistribucija je linearan i sekvencijalno neprekidan funkcional na prostoru $\mathcal{D}^*(\Omega)$.

4.1 Veza između sekvencijalnih temperiranih ultradistribucija i temperiranih ultradistribucija

Iz teorije Kete-Ešelon i Kete ko-Ešelon prostora (videti [21, 12]) je poznato da prostori nizova

$$\mathbf{s}^* = \{(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \text{ za sve (resp. postoji) } h>0 : \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_\alpha|^2 e^{h|\alpha|^{1/(2t)}} < \infty\}$$

i

$$\mathbf{s}^{'*} = \{(b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \text{ postoji (resp. za sve) } k>0 : \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |b_\alpha|^2 e^{-k|\alpha|^{1/(2t)}} < \infty\} \tag{4.1}$$

(sa njihovim struktarama konvergencije) formiraju dualni par.

Takođe je poznato da između prostora $\mathbf{s}^*$ i $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ postoji bijektivni izomorfizam (videti Lemu 1.6 i Teoremu 1.4)

$$\mathbf{s}^* \ni (a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \to \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d). \tag{4.2}$$

Korištenjem (3.6) svakom elementu $f \in \mathcal{T}^{'*}$ možemo dodeliti niz $(b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}$ sa brzinom rasta koja odgovara (4.1). Pretpostavimo da važi (3.1). Tada iz (3.6) sledi

$$(f,\varphi)_{\mathcal{T}'^*} = \lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} P(2\alpha+\mathbf{1}) \int h_\alpha \varphi dx \tag{4.3}$$

gde su $\varphi = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} r_\alpha h_\alpha \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$, $F_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_{\alpha,n} h_\alpha$ i $F = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha h_\alpha$, $(c_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}$, $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \in l^2$, $n \in \mathbb{N}$. Kako $(c_{\alpha,n})_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \to (c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}$ u l^2 kad $n\to\infty$, imamo

$$(f,\varphi)_{\mathcal{T}'^*} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha P(2\alpha+\mathbf{1}) r_\alpha,$$

pri čemu je $(r_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \in \mathbf{s}^*$. Prema tome, s-temperiranoj ultradistribuciji f ćemo dodeliti niz

$$(b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} = (P(2\alpha+\mathbf{1})c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}. \tag{4.4}$$

Navodimo sledeće dobro poznato tvrđenje (videti Teoremu 1.5), a koje će nam biti od pomoći u nastavku.

Propozicija 4.1. *Bijektivni izomorfizam* (4.2) *daje izomorfizam prostora* $\mathbf{s}'^*$ *na prostor* $\mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$

$$\mathbf{s}'^* \ni (b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \to \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha h_\alpha \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$$

Ako je $f \in \mathcal{T}'^*$ oblika (3.1) i ako funkcija F u (3.1) ima oblik $F = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha h_\alpha$, $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d} \in l^2$, tada sa (4.4) definišemo

$$Bf := (b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}.$$

Primetimo da iz Propozicije 3.2 sledi da različite reprezentacije od f opet daju isti niz $(b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^d}$.

Prisetimo se da je sa (4.3) definisan neprekidan linealan funkcional na $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ jer iz $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}^*} \varphi$ sledi da $(f,\varphi_n)_{\mathcal{T}'^*} \to (f,\varphi)_{\mathcal{T}'^*}$, $n\to\infty$. Ako je $f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha h_\alpha \in \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$, tada funkcije

$$F_n = \sum_{|\alpha|\le n} \frac{b_\alpha}{P(2\alpha+\mathbf{1})} h_\alpha \ \text{ i } \ F = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{b_\alpha}{P(2\alpha+\mathbf{1})} h_\alpha$$

daju odgovarajući elemenat prostora $\mathcal{T}'^*$.

Napomena 4.1. *Poznato je da je sekvencijalna neprekidnost u prostoru temperiranih ultradistribucija ekvivalentna neprekidnosti u smislu jake topologije. Isto tvrđene važi i za (klasične) prostore ultradistribucija. To nam omogućava da napravimo ekvivalenciju (klasične) teorije ultradistribucija sa sekvencijalnom teorijom.*

Dakle, ovim smo pokazali sledeće tvrđenje.

Propozicija 4.2. $B : \mathcal{T}'^* \to \mathcal{S}'^*(\mathbb{R}^d)$ *je linearna i sekvencijalno neprekidna bijekcija.*

Sledeće tvrđenje nam daje ekvivalenciju između klasičnih temperiranih i s-temperiranih ultradistribucija.

Teorema 4.1. *(i) Za svaki neprekidan linearan funkcional T na $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ postoji jedinstvena s- temperirana ultradistribucija $f \in \mathcal{T}^{'*}$ takva da važi*

$$T(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{T}'^*} \quad \text{za sve} \quad \varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d). \tag{4.5}$$

Obratno, za svaku s-temperiranu ultradistribuciju f izraz (4.5) definiše sekvencijalno neprekidan i linearan funkcional u prostoru $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Korespodencija data sa (4.5) između neprekidnih linearnih funkcionala u $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$ i s-tempereiranih ultradistribucija $\mathcal{T}^{'*}$ je bijekcija.
(ii) Niz $(f^n)_n$ u $\mathcal{T}^{'*}$ konvergira ka $f \in \mathcal{T}^{'*}$ ako i samo ako za svaki $\varphi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (f^n_m, \varphi)_{\mathcal{T}'^*} = (f, \varphi)_{\mathcal{T}'^*}. \tag{4.6}$$

Dokaz. Kako je (i) već objašnjeno, ostalo nam je da dokažemo suprotan smer u (ii), tj. da iz (4.6) sledi $f^n \xrightarrow{s-t} f$, $n \to \infty$ (implikacija u (ii) je dokazana u Teoremi 3.9). Da bismo to pokazali, koristićemo notaciju Definicije 3.4 kao i $F^n_m = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} a^n_{\alpha,m} h_\alpha$, $F_m = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha,m} h_\alpha$, $m, n \in \mathbb{N}$ i $F = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha$. Iz dualnosti prostora $\mathbf{s}^*$ i $\mathbf{s}^{'*}$ sledi

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a^n_{\alpha,m} r_\alpha \to \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha,m} r_\alpha, \; n \to \infty, \text{ uniformno po } \; m \in \mathbb{N}.$$

Šta više, važi i

$$(a_{\alpha,m})_{\alpha \in \mathbb{Z}^d_+} \to (a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^d_+}, \; n \to \infty, \quad \text{u} \quad \mathbf{s}^{'*}.$$

Vraćajući se na prvobitne oblike funkcija F^n_m, F_m i F, dobijamo tvrđenje. □

Napomena 4.2. *U Lemi 3.4 smo pokazali da za sve $f \in \mathcal{S}^{'*}(\mathbb{R}^d)$ postoji $[f_n] \in \widetilde{\mathcal{T}}^{'*}$ takva da važi* (3.7).

Kako je $\mathcal{T}^{'*}$ identifikovan sa $\mathcal{S}^{'*}(\mathbb{R}^d)$, na osnovu Propozicija 3.8 i 3.10 znamo da se svaki $f \in \mathcal{S}^{'*}(\mathbb{R}^d)$ može identifikovati sa $f \in \widetilde{\mathcal{T}}^{'*}$. Time smo pokazali sledeće tvrđenje koje nam omogućava da pređemo iz jedne forme fundamentalnog niza za s-temperirane ultradistibucije u drugi.

Teorema 4.2. *$\widetilde{\mathcal{T}}^{'*} \equiv \mathcal{T}^{'*}$, tj., svaki $f \in \mathcal{T}^{'*}$ ima reprezentaciju u formi $\widetilde{s}$-t-fundamentalnog niza u Definiciji 3.5 i obratno, svaki $f \in \widetilde{\mathcal{T}}^{'*}$ ima reprezentaciju u formi s-t-fundamentalnog niza u Definiciji 3.1. Strukture konvergencije u Definiciji 3.4 i Definiciji 3.8 su ekvivalentne.*

4.2 s-Ultradistribucije kao neprekidni linearni funkcionali

Korištenjem sekvencijalnog pristupa za $\widetilde{s}$-temperirane ultradistribucije dokazujemo sledeće tvrđenje.

Teorema 4.3. *Ako je $f \in \mathcal{T}'^* \equiv \widetilde{\mathcal{T}}'^*$, tada je $f \in \mathcal{U}'^*(\Omega)$.*

Dokaz. Kako je $f \in \mathcal{T}'^* \equiv \widetilde{\mathcal{T}}'^*$ tada postoje: ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$, funkcija $P_1 \in \mathcal{P}_u^*$, niz $(F_n)_n$ funkcija u $L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$ i funkcija $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ takvi da važi

$$f_n(x) = P(D)(P_1(x)F_n(x)),\ x \in \mathbb{R}^d \ \text{ i } F_n \xrightarrow{2} F,\ n \to \infty.$$

Neka je $K \subset\subset \Omega$ kompaktan skup i neka je $\kappa_K \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ data sa (2.5). Tada je

$$P_1(x)F_n(x) = P_1(x)(F_n(x)\kappa_K(x)),\ x \in K.$$

Iz

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |P_1(x)\kappa_K(x)|^2 \, |F_n(x) - F(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \leq \sup_{x\in K} |P_1(x)| \cdot \|F_n - F\|_2,$$

dobijamo da $P_1F_n\kappa_K \xrightarrow{2} P_1F\kappa_K$, $n \to \infty$, odakle sledi

$$\widehat{P_1F_n\kappa_K} \xrightarrow{2} \widehat{P_1F\kappa_K},\ n \to \infty.$$

Tada na osnovu Leme 3.1 dobijamo

$$\widetilde{F}_n := \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{P_1F_n\kappa_K}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{d/2}}\right) \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} \widetilde{F} := \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{P_1F\kappa_K}(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{d/2}}\right),\ n \to \infty$$

i $\operatorname{supp} \widetilde{F}_n, \operatorname{supp} \widetilde{F} \subset K_1$. Ako izaberemo

$$\widetilde{P}(D) = (1 + D_1^2 + \ldots + D_d^2)^{d/2} P(D),$$

tada je $\widetilde{P} \in \mathcal{P}^*$ i

$$f_n = \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_n \ \text{ u } \ K.$$

Ovim smo pokazali da je niz $(f_n)_n$ fundamentalan u smislu Defincije 2.1. $\square$

Iz dokaza Teoreme 4.3 direktno sledi:

Posledica 4.1. *Neka* $f \in \mathcal{T}'^{*} \equiv \widetilde{\mathcal{T}}'^{*}$ *i* $\theta \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^d)$. *Tada* $f\theta = [f_n]$ *u smislu Definicija 2.1 i 2.3, tako da za sve* $K_0 \subset\subset \Omega$, $\operatorname{supp}\theta \subset \mathring{K}_0$ *postoje: niz glatkih funkcija* $(F_n)_n$, *neprekidna funkcija* F *i ultradiferencijalni operator* $P(D)$ *sa sledećim svojstvima:*
$(f_n)_n$ *je niz glatkih funkcija u* $\mathbb{R}^d$ *za koji je* $f_n = P(D)F_n, n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}^*$, $(F_n)_n$ *je niz glatkih funkcija sa nosačem u* K_0, $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} F$, $n \to \infty$, $\operatorname{supp} F \subset K_0$.

Sa (2.8) je definisan linearan funkcional u $\mathcal{D}^*(\Omega)$, a na osnovu Teoreme 2.2 je sekvencijalno neprekidan. Prisetimo se sledećeg:

Linearan funkcional U u $\mathcal{D}^*(\Omega)$ je neprekidan ako je

$$\lim_{n\to\infty} U(\varphi_n) = U(\varphi)$$

za svaki niz funkcija φ_n koji konvergira ka φ u prostoru $\mathcal{D}^*(\Omega)$ kad $n \to \infty$.

Sada možemo da dokažemo da je sekvencijalni pristup teoriji ultradistribucija ekvivalentan klasičnom pristupu.

Teorema 4.4. *Za svaki neprekidan linearan funkcional* U *u* $\mathcal{D}^*(\Omega)$ *postoji jedinstvena s-ultradistribucija* $f \in \mathcal{U}'^*(\Omega)$ *takva da važi*

$$U(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)} \qquad \text{za sve} \;\; \varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega), \tag{4.7}$$

gde je $(f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)}$ *definisano sa* (2.8).
Obratno, za sve $f \in \mathcal{U}'^*(\Omega)$ *izraz (4.7) definiše linearan i sekvencijalno neprekidan funkcional u* $\mathcal{D}^*(\Omega)$.
Štaviše, niz $(f^n)_n$ *u* $\mathcal{U}'^*(\Omega)$ *konvergira ka* $f \in \mathcal{U}'^*(\Omega)$ *ako i samo ako*

$$(f^n, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)} \to (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)}, \quad n \to \infty,$$

za sve $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$.

Dokaz. Neka su $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i $(\widetilde{\omega}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ lokalno konačni pokrivači od Ω, koji se sastoji od ograničenih otvorenih podskupova od Ω, takvi da je $\overline{\omega}_i \subset\subset \widetilde{\omega}_i$. Dalje, neka je $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ podela jedinice koja se sastoji od funkcija iz $\mathcal{D}^*(\Omega)$ takvih da je $\alpha_i = 1$ u ω_i i $\operatorname{supp}\alpha_i \subset \widetilde{\omega}_i$, $i \in \mathbb{N}$.
Ako je U neprekidan linearan funkcional u $\mathcal{D}^*(\Omega)$, tada je

$$T_i(\psi) = U(\alpha_i\psi), \quad \psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d),$$

neprekidan linearan funkcional u prostoru $\mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Na osnovu Leme 3.4 i Teoreme 4.1 postoji s-temperirana ultradistribucija $f_i \in \mathcal{T}'^* \equiv \widetilde{\mathcal{T}}'^*$ takva da je $T_i(\psi) = (f_i, \psi)_{\mathcal{T}'^*}$ u smislu (3.6) (ili $T_i(\psi) = (f_i, \psi)_{\widetilde{\mathcal{T}}'^*}$ u smislu (3.7)) za svako $\psi \in \mathcal{S}^*(\mathbb{R}^d)$. Štaviše, iz Posledice 4.1 sledi da je $f_i = [(f_{i,m})_m] \in \mathcal{U}'^*(\mathbb{R}^d)$ tako da

$$f_{i,m} = P_i(D)F_{i,m},\ F_{i,m} \xrightarrow{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} F_i,\ m \to \infty,\ \operatorname{supp} F_i \subset \widetilde{\omega}_i,\ i \in \mathbb{N}$$

(sa odgovarajućim osobinama datim u Posledici 4.1).

Dokažimo da je $f_i \in \mathcal{U}'^*(\mathbb{R}^d)$ jedinstvena. Neka je $\omega_i \cap \omega_j \neq \emptyset$. Tada je

$$U(\varphi) = (f_i, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)} = (f_j, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)}, \quad \varphi \in \mathcal{D}^*(\omega_i \cap \omega_j).$$

Dakle, s- ultradistribucija $f_i - f_j \in \mathcal{U}'^*(\mathbb{R}^d)$ je restrikcija na $\omega_i \cap \omega_j$. Prema tome, možemo konstruisati fundamentalan niz $(r_{i,j,m})_m$ za $f_i - f_j$, koji se sastoji od glatkih funkcija iz $\omega_i \cap \omega_j$ sa nosačima u $\widetilde{\omega}_i \cap \widetilde{\omega}_j$ tako da za odgovarajuće $P_{i,j} \in \mathcal{P}^*$ i $R_{i,j,m}$ važi

$$r_{i,j,m}(x) = P_{i,j}(D)R_{i,jm}(x) \to 0,\ x \in \omega_i \cap \omega_j,\ m \to \infty.$$

Iz Propozicije 2.2 je $r_{i,j,m} = 0$ u $\omega_i \cap \omega_j$. Dakle, $f_i = f_j$ u $\omega_i \cap \omega_j$. Kako su pokrivači ω_i i $\widetilde{\omega}_i,\ i \in \mathbb{N}$, lokalno konačni, imamo

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i \alpha_i \in \mathcal{U}'^*(\Omega) \quad \text{i} \quad f_{|\omega_i} = f_i \quad \text{u} \quad \omega_i,\ i \in \mathbb{N}.$$

Odavde sledi

$$U(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)}$$

za sve $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ (videti (2.8)).

Pokažimo jedinstvenost s-ultradistribucije f. Neka je $U(\varphi) = (f_1, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)}$ i $U(\varphi) = (f_2, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)}$ za sve $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ i neka je $(g_m)_m$ fundamentalan niz za $f_1 - f_2$. Iz (2.8) sledi

$$\lim_{m \to \infty} (g_m, \varphi)_{\mathcal{U}'^*(\Omega)} = 0$$

za sve $\varphi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Prema tome, za pogodne $P(D)$ i $(G_m)_m$, važi $g_m = P(D)(G_m) \to 0$, $m \to \infty$. Iz Propozicije 2.2 je $[g_m] = 0$. Prema tome, s-ultradistricija f je jedinstvena.

Obratno tvrđenje je jasno. Linearnost je pokazana u Poglavlju 3.6, dok je sekvencijalna neprekidnost dokazana u tvrđenju (a) Teoreme 2.2.
Poslednji deo tvrđenja sledi iz Teoreme 2.2. $\square$

Glava 5

Periodične s-ultradistribucije

U ovoj glavi ćemo definisati s-p-fundamentalne nizove, pomoću kojih ćemo definisati periodične s-ultradistribucije. Navešćemo osnovne operacije sa periodičnim s-ultradistribucijama kao što su sabiranje, oduzimanje, množenje brojem, diferenciranje i množenje glatkom funkcijom iz $\mathcal{E}^*$. Definisaćemo konvergenciju u ovakvim prostorima, kao i sekvencijalnu neprekidnost periodičnih s-ultradistribucija. Na kraju, u Teoremi 5.3 ćemo pokazati da je sekvencijalni pristup periodičnim ultradistribucijama ekvivalentan standardnom pristupu. Da bismo to pokazali, prisetimo se nekih poznatih definicija i tvrđenja.

Od sada, kada kažemo glatka periodična funkcija u $\mathbb{R}^d$, zapravo podrazumevamo glatke periodične funkcije na intervalu $I_0 = (0, 2\pi)^d$. Sa I ćemo označavati $[0, 2\pi]^d$. Prostor $\mathcal{A}_{per}$ se sastoji od elemenata iz prostora $L^2(I_0) \cap C^\infty(I_0)$ za koje je

$$\gamma_n(\varphi) := \sup_{|k|\leq n} \|D^k\varphi\|_2 < \infty,\ n \in \mathbb{N}, \quad (\|\varphi\|_2 = \left(\int_{I_0} |\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}).$$

Koristeći [37], prisetimo se definicije sledećih prostora:

$$\mathcal{A}_{per}^{t,h} = \{\varphi \in \mathcal{A}_{per} :\ \|\varphi\|_{h,2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+^d} \frac{\|\varphi^{(k)}\|_2}{h^{|k|}k!^t} < \infty\}$$

$$\mathcal{A}_{per}^{(t)} = \varprojlim_{h\to 0} \mathcal{A}_{per}^{t,h} \qquad \mathcal{A}_{per}^{\{t\}} = \varinjlim_{h\to\infty} \mathcal{A}_{per}^{t,h}.$$

Oba prostora, koja nazivamo prostorima ultradiferencijabilnih periodičnih funkcija, ćemo označavati sa $\mathcal{A}_{per}^*$, gde, kao i ranije, $*$ predstavlja (t) ako je u pitanju Berlingov slučaj, odnosno $\{t\}$ u Rumijeovom slučaju. Duale ovih prostora, koje nazivamo prostorima periodičnih ultradistribucija, označavamo sa $\mathcal{A}'^{*}_{per}$. Za $f \in \mathcal{A}^{*}_{per}$, njeni Furijeovi koeficijenti su definisani sa $c_n = \int_{I_0} f(x)e_{-n}(x)dx = (f, e_n)_{L^2(I_0)}, n \in \mathbb{Z}^d$, gde je $e_n(x) = e^{inx}$. U ovoj glavi ćemo sa $\delta_n = n^d \varphi(n\cdot), n \in \mathbb{N}$, označavati delta niz u $\mathcal{A}'^{*}_{per}$, gde $\varphi \in \mathcal{A}^{*}_{per}$ i $\varphi = 1$ na $B(0, \pi)$, $\varphi = 0$ izvan $B(0, 2\pi)$. Sledeće tvrđenje navodimo bez dokaza (dokaz sledi iz definicije, videti [7], [9], [37]).

Lema 5.1. *(a) $\varphi \in \mathcal{A}^{*}_{per}$ ako i samo ako za sve $P \in \mathcal{P}^*$ važi*

$$\gamma_P(\varphi) = \|P(-D)\varphi\|_2 < \infty.$$

(b) Ako $\varphi_n,\ \varphi \in \mathcal{A}^{*}_{per}$ i ako $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{A}^{*}_{per}} \varphi$, $n \to \infty$, tada

$$P(-D)\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{A}^{*}_{per}} P(-D)\varphi,\ n \to \infty.$$

5.1 Fundamentalni nizovi periodičnih s-ultradistribucija

Definicija 5.1. *Niz $(f_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija je s-p-fundamentalan u $\mathbb{R}^d$ ako postoji niz $(F_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija u $\mathbb{R}^d$, periodična funkcija $F \in L^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da važi:*

$$f_n = P(D)F_n \ u \ \mathbb{R}^d \ \ i \ F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F,\ n \to \infty \tag{5.1}$$

Delovanje operatora $P(D)$ u (5.1) podrazumeva postojanje granične vrednosti

$$\lim_{k\to\infty} P_k(D)F_n(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha F_n(x) = f_n(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{5.2}$$

Definicija 5.2. *s-p-fundamentalni nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ su u relaciji $\sim_p$, i pišemo*

$$(f_n)_n \sim_p (g_n)_n,$$

ako postoje nizovi $(F_n)_n$ i $(G_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija u $\mathbb{R}^d$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da važi:

$$f_n = P(D)F_n,\ \ g_n = P(D)G_n \ u \ \mathbb{R}^d,\ F_n - G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} 0,\ n \to \infty.$$

Iz Definicije 5.2 direktno sledi:

Propozicija 5.1. *s-p-fundamentalni nizovi* $(f_n)_n$ *i* $(g_n)_n$ *su u relaciji* $\sim_p$ *ako je niz*

$$f_1,\ g_1,\ f_2,\ g_2,\dots$$

fundamentalan u $\mathbb{R}^d$*.*

Lako se pokaže da je relacija $\sim_p$ refleksivna i simetrična. Dokažimo da je relacija tranzitivna.

Kako je svaka glatka periodična funkcija i L^2 funkcija na svom periodu, to se ona može razviti u Furijeov red. Sledeća propozicija će biti korištena u nastavku. Formulisaćemo i dokazati samo Rumijeov slučaj jer je Berlingov slučaj sličan.

Propozicija 5.2. *Ako postoje: ultradiferencijalni operator* $P_{r_p}\in\mathcal{P}^{\{t\}}$*, glatke periodične funkcije* $F_n=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}b_{k,n}e_k$*,* $n\in\mathbb{N}$ *u* $\mathbb{R}^d$*, periodična funkcija* $F=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}b_ke_k\in L^2(I_0)$*, takvi da* $F_n\xrightarrow{\mathcal{C}(I)}F$ *i* $P_{r_p}(D)F_n\xrightarrow{\mathcal{C}(I)}0$ *kad* $n\to\infty$*, tada je* $F=0$ *u* $\mathbb{R}^d$*. U specijalnom slučaju, ako je* F *periodična glatka funcija i ako je* $P_{r_p}(D)F=0$*, tada je* $F=0$ *u* $\mathbb{R}^d$*.*

Dokaz. Iz $P_{r_p}(D)F_n=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}P_{r_p}(k)b_{k,n}e_k\xrightarrow{\mathcal{C}(I)}0$, $n\to\infty$, dobijamo da $(b_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d}\to 0$ u l^2 kad $n\to\infty$. Kako $(b_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d}\to(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ u l^2 kad $n\to\infty$ imamo $F=0$ nad svakim periodom I_0. Kako je F periodična funkcija , tada je $F=0$ na $\mathbb{R}^d$. $\square$

Lema 5.2. *Neka ultradiferencijalni operatori* $P_{\widetilde{r}_p},P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}\in\mathcal{P}^{\{t\}}$*, nizovi* $(\widetilde{F}_n)_n$*,* $(\widetilde{\widetilde{F}}_n)_n$*, glatkih periodičnih funkcija u* $\mathbb{R}^d$ *i periodične funkcije* $\widetilde{F},\widetilde{\widetilde{F}}\in L^2(I_0)$ *ispunjavaju uslove Definicije 5.1, tj.*

$$f_n=P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_n,\ f_n=P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_n\ u\ \mathbb{R}^d,\quad \widetilde{F}_n\xrightarrow{\mathcal{C}(I)}\widetilde{F},\ \widetilde{\widetilde{F}}_n\xrightarrow{\mathcal{C}(I)}\widetilde{\widetilde{F}},\ n\to\infty,$$

gde su

$$\widetilde{F}_n=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\widetilde{c}_{k,n}e_k,\ \widetilde{\widetilde{F}}_n=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widetilde{c}}_{k,n}e_k,\ \widetilde{F}=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\widetilde{c}_ke_k,\ \widetilde{\widetilde{F}}=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\widetilde{\widetilde{c}}_ke_k$$

$(\widetilde{c}_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $(\widetilde{\widetilde{c}}_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $(\widetilde{c}_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$, $(\widetilde{\widetilde{c}}_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in l^2$, $n\in\mathbb{N}$. *Tada postoji ultradiferencijalni operator* $P_{r_p}\in\mathcal{P}^{\{t\}}$ *za koji je*

$$\left(\frac{P_{\widetilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)}\right)_{k\in\mathbb{Z}^d},\ \left(\frac{P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(k)}{P_{r_p}(k)}\right)_{k\in\mathbb{Z}^d}\in l^\infty, \tag{5.3}$$

glatke periodične funkcije

$$F_{n,1}=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{k,n}P_{\widetilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)}e_k,\quad F_{n,2}=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{\widetilde{c}}_{k,n}P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p,2}(k)}{P_{r_p}(k)}e_k,\ n\in\mathbb{N},$$

i periodične funkcije

$$F_1=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_kP_{\widetilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)}e_k,\qquad F_2=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{\widetilde{c}}_kP_{\widetilde{\widetilde{r}}_p,2}(k)}{P_{r_p}(k)}e_k\in L^2(I_0)$$

takve da važi

$$f_n=P_{r_p}(D)F_{n,1}=P_{r_p}(D)F_{n,2}\ \text{u}\ \mathbb{R}^d,\quad F_{n,1}\xrightarrow{\mathcal{C}(I)}F_1,\ F_{n,2}\xrightarrow{\mathcal{C}(I)}F_2,\ n\to\infty.$$

Štaviše, $F_1=F_2$ *u* $\mathbb{R}^d$.
Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju, uz odgovarajuću notaciju.

Dokaz. Kako je

$$D^\alpha e_k=k^\alpha e_k,\ \alpha\in\mathbb{Z}^d_+,\ k\in\mathbb{Z}^d,$$

tada iz (5.3) sledi

$$F_{n,1}=\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\widetilde{c}_{k,n}\frac{P_{\widetilde{r}_p}(k)}{P_{r_p}(k)}e_k=P_{\widetilde{r}_p}(D)\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{k,n}}{P_{r_p}(k)}e_k,\ n\in\mathbb{N}.$$

Dalje,

$$\begin{aligned}P_{r_p}(D)F_{n,1}&=P_{r_p}(D)P_{\widetilde{r}_p}(D)\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{k,n}}{P_{r_p}(k)}e_k\\&=P_{\widetilde{r}_p}(D)P_{r_p}(D)\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\frac{\widetilde{c}_{k,n}}{P_{r_p}(k)}e_k\\&=P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_n=f_n\ \text{ u }\mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Na sličan način se može poikazati da je $f_n = P_{r_p}(D)F_{n,2}$.

Iz (5.3) sledi da su $F_{n,i}$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, glatke periodične funkcije u $\mathbb{R}^d$ i $F_i \in L^2(I_0)$, $i = 1, 2$. Kako $(\widetilde{c}_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d_+} \to (\widetilde{c}_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ i $(\widetilde{\widetilde{c}}_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d_+} \to (\widetilde{\widetilde{c}}_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ u l^2 kad $n \to \infty$, tada $F_{n,i} \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F_i$, $n \to \infty$, $i = 1, 2$. Iz Propozicije 5.2 sledi da je $F_1 = F_2$ u $\mathbb{R}^d$. □

Propozicija 5.3. *Relacija $\sim_p$ je tranzitivna.*

Dokaz. Tvrđenje ćemo pokazati samo u Rumijeovom slučaju. Neka je $(f_n)_n \sim_p (g_n)_n$ i $(g_n)_n \sim_p (h_n)_n$. Tada na osnovu Definicije 5.2 postoje nizovi $(F_n)_n$, $(G_n)_n$, $(\widetilde{G}_n)_n$, $(H_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija u $\mathbb{R}^d$ i ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da:

$$f_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)F_n,\ g_n = P_{\widetilde{r}_p}(D)G_n \quad \text{u } \mathbb{R}^d,\ F_n - G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} 0,\ n \to \infty,$$
$$g_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)\widetilde{G}_n,\ h_n = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)H_n \quad \text{u } \mathbb{R}^d,\ G_n - H_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} 0,\ n \to \infty.$$

Iz Leme 5.2 sledi da nizove $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ i $(h_n)_n$ možemo zapisati, korištenjem operatora $P_{r_p}(D)$ umesto $P_{\widetilde{r}_p}(D)$ i $P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)$, u obliku:

$$f_n = P_{r_p}(D)F_{n,1},\ g_n = P_{r_p}(D)G_{n,1},\ g_n = P_{r_p}(D)\widetilde{G}_{n,1},\ h_n = P_{r_p}(D)H_{n,1} \text{ u } \mathbb{R}^d$$

i važi

$$F_{n,1} - G_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} 0,\ \widetilde{H}_{n,1} = G_{n,1} - \widetilde{G}_{n,1} + H_{n,1},\ G_{n,1} - \widetilde{H}_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} 0$$

i $F_{n,1} - \widetilde{H}_{n,1} \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} 0,\ n \to \infty$. Ovim je dokazana tranzitivnost. □

Kako je relacija $\sim_p$ relacija ekvivalencije, skup svih s-p-fundamentalnih nizova $(f_n)_n$ možemo podeliti u klase ekvivalencije bez zajedničkog elementa, tako da su dva s-p-fundamentalna niza u istoj klasi ako i samo ako su ekvivalentna. Stoga dajemo sledeću definiciju:

Definicija 5.3. *Klase ekvivalencije s-p-fundamentalnih nizova, u oznaci $f = [(f_n)_n] = [f_n]$, nazivaju se periodične s-ultradistribucije. Prostor periodičnih s-ultradistribucija označavamo sa $\mathcal{U}'^*_{per} = \mathcal{U}'^*_{per}(\mathbb{R}^d)$.*

Prema tome, s-p-fundamentalni nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ određuju istu periodičnu s-ultradistribuciju ako i samo ako su ekvivalentni.

Napomena 5.1. *Korištenjem* (5.1) *i Propozicije 5.2 imamo da je* $f = [f_n] = 0$ *ako je* $f_n = P(D)F_n$ *i ako* $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} 0$, $n \to \infty$.

Primer 6. *Neka je* $f = [(f_n)_n] \in \mathcal{U}'^*_{per}$ *oblika* $f_n = P(D)F_n$ *u* $\mathbb{R}^d$ *gde* $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F$, $n \to \infty$. *Tada je niz* $(\widetilde{f}_n)_n = (P(D)(F_n * \delta_n))_n$ *s-p-fundamentalan u* $\mathbb{R}^d$ *i* $(f_n)_n \sim_p (\widetilde{f}_n)_n$.

5.2 Operacije sa periodičnim s-ultradistribucijama

5.2.1 Algebarske operacije

Neka su $f = [f_n]$, $g = [g_n] \in \mathcal{U}'^*_{per}$. Suma periodičnih s-ultradistribucija $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ je periodična s-ultradistribucija $f + g = [f_n + g_n]$. Koristeći Lemu 5.2, na sličan način kao kod s-ultradistribucija može se proveriti konzistentnost ove definicije. Slično važi i za razliku $f - g = [f_n - g_n]$, kao i za proizvod $\lambda f = [\lambda f_n]$ periodične s-ultradistribucije $f = [(f_n\}]$ sa $\lambda \in \mathbb{C}$. Prema tome, $\mathcal{U}'^*_{per}$ je vektorski prostor.

5.2.2 Diferenciranje

Neka je $f = [f_n] \in \mathcal{U}'^{\{t\}}_{per}$ i $\beta \in \mathbb{Z}^d_+$. Definišimo $f^{(\beta)} = [f_n^{(\beta)}]$ i pokažimo da je niz $(f^{(\beta)})_n$ s-p-fundamentalan. Neka je f određena sa $(F_n)_n$ i $P_{r_p}(D)$. Kako je $f_n^{(\beta)} = P_{r_p}(D)F_n^{(\beta)}$ u $\mathbb{R}^d$, gde je $F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n}e_k$, $n \in \mathbb{N}$, $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F$, $n \to \infty$, i $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k e_k$, iz Leme 5.2 sledi da postoje: niz $(\widetilde{F}_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija iz $\mathbb{R}^d$ i periodična funkcija $\widetilde{F}$ iz $L^2(I_0)$ oblika

$$\widetilde{F}_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^\beta P_{r_p}(k)c_{k,n}}{P_{\widetilde{r}_p}(k)} e_k, \ n \in \mathbb{N}, \qquad \widetilde{F} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{(ik)^\beta P_{r_p}(k)c_k}{P_{\widetilde{r}_p}(k)} e_k,$$

kao i ultradiferencijalni operator $P_{\widetilde{r}_p}(D) \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da važi

$$P_{r_p}(D)F_n^{(\beta)}(x) = P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_n(x), \ x \in \mathbb{R}^d, \quad \widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{F}, \ n \to \infty.$$

Isto tvrđenje važi i u Berlingovom slučaju.

5.2.3 Množenje periodične s-ultradistribucije sa funkcijom iz $\mathcal{E}^*$

Ako je $(f_n)_n$ s-p-fundamentalan niz i $\omega \in \mathcal{E}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$, dokažimo da je $\omega f = [\omega f_n]$ takođe s-p-fundamentalan. U Rumijeovom slučaju postoje: niz $(F_n)_n$, gde su $F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n} e_k$, $n \in \mathbb{N}$ glatke periodične funkcije, funkcija $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k e_k \in L^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da

$$\omega f_n = \omega P_{r_p}(D) F_n \text{ u } \mathbb{R}^d \text{ i } F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F,\ n \to \infty.$$

Dalje, možemo pretpostaviti da je $\omega = \omega\gamma$, gde je γ funkcija sečenja koja ima vrednost 1 na I i $\omega = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k$. Na osnovu Leme 5.2 postoje: niz $(\widetilde{F}_n)_n$ glatkih periodičnih funkcija iz $\mathbb{R}^d$ i periodična funkcija $\widetilde{F} \in L^2(I_0)$ oblika

$$\widetilde{F}_n(x) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{a_{k,n}}{P_{\widetilde{r}_p}(k)} e_k(x),\ x \in \mathbb{R}^d,\ n \in \mathbb{N},$$

$$\widetilde{F}(x) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{P_{\widetilde{r}_p}(k)} e_k(x),\ x \in \mathbb{R}^d,$$

gde su

$$a_{k,n} = \sum_{|j|=-\infty}^{\infty} P_{r_p}(i) c_{i,n} b_{k-i} \quad \text{i} \quad a_k = \sum_{|j|=-\infty}^{\infty} P_{r_p}(i) c_i b_{k-i}$$

i ultradiferencijalni operator $P_{\widetilde{r}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da važi

$$P_{r_p}(D) F_n(x) = P_{\widetilde{r}_p}(D) \widetilde{F}_n(x),\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Kako $(c_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d} \to (c_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ u l^2 kad $n \to \infty$, iz (5.3) sledi $\widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{F},\ n \to \infty$. Dokaz u Berlingovom slučaju je isti. Dakle, niz $(\omega f_n)_n$ je s-p-fundamentalan u $\mathbb{R}^d$.

5.3 Nizovi periodičnih s-ultradistribucija

Definicija 5.4. *Niz periodičnih s-ultradistribucija $(f^n)_n = ([f^n_m])_n$ konvergira ka periodičnoj s-ultradistribuciji $f = [f_m]$, $n \to \infty$, i koristimo oznaku*

$$f^n \xrightarrow{s\text{-}p} f,\ n \to \infty, \quad \textit{ili} \quad p\text{-}\lim_{n\to\infty} f^n = f,$$

ako postoje nizovi $(F^n_m)_m$, $n \in \mathbb{N}$, $(F_m)_m$ glatkih periodičnih funkcija u $\mathbb{R}^d$, niz $(F^n)_n$ periodičnih funkcija $F^n \in L^2(I_0)$, $n \in \mathbb{N}$, periodična funkcija $F \in L^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ takvi da:

$$\begin{aligned}
&f^n_m = P(D)F^n_m,\ f_m = P(D)F_m \ \textit{u}\ \mathbb{R}^d, m, n \in \mathbb{N},\\
&F^n_m \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F_m,\ n \to \infty,\ \textit{uniformno po}\ m \in \mathbb{N},\ F_m \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F,\ m \to \infty,\\
&F^n_m \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F^n,\ m \to \infty,\ \textit{za svako}\ n \in \mathbb{N}\ \textit{i}\ \ F^n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F,\ n \to \infty.
\end{aligned}$$

Zbog uniformne konvergencije možemo da promenimo redosled limesa, pa imamo $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} F^n_m = \lim\limits_{m\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} F^n_m \in L^2(I_0)$.

Teorema 5.1. *Ako postoji $p\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f^n$, tada je on jedinstven.*

Dokaz. Tvrđenje ćemo dokazati samo u Rumijeovom slučaju. Prepostavimo da $f^n \xrightarrow{s\text{-}p} f$ i $f^n \xrightarrow{s\text{-}p} g$ u $\mathbb{R}^d$, $n \to \infty$ i pokažimo da je $f = g$. Iz Definicije 5.4 sledi da postoje: nizovi $(F^n_m)_m$, $(\widetilde{F}^n_m)_m$, $n \in \mathbb{N}$, $(F_m)_m$, $(\widetilde{F}_m)_m$ glatkih periodičnih funkcija u $\mathbb{R}^d$, nizovi $(F^n)_n$, $(\widetilde{F}^n)_n$ periodičnih funkcija iz $L^2(I_0)$, periodične funkcije F, $\widetilde{F} \in L^2(I_0)$ i ultradiferencijalni operatori $P_{\widetilde{r}_p}, P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ takvi da:

$$\begin{aligned}
&f^n_m = P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}^n_m,\ f_m = P_{\widetilde{r}_p}(D)\widetilde{F}_m \ \text{u}\ \mathbb{R}^d,\\
&\widetilde{F}^n_m \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{F}_m,\ n \to \infty,\ \text{uniformno po}\ m \in \mathbb{N}\ \widetilde{F}_m \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{F},\ m \to \infty,\\
&\widetilde{F}^n_m \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{F}^n,\ m \to \infty,\ \text{za sve}\ n \in \mathbb{N}\ \ \text{i}\ \widetilde{F}^n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{F},\ n \to \infty,
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
&f^n_m = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)\widetilde{\widetilde{F}}^n_m,\ f_m = P_{\widetilde{\widetilde{r}}_p}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_m \ \text{u}\ \mathbb{R}^d,\\
&\widetilde{\widetilde{F}}^n_m \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{\widetilde{F}}_m,\ n \to \infty,\ \text{uniformno po}\ m \in \mathbb{N}\ ,\ \widetilde{\widetilde{F}}_m \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{\widetilde{F}},\ m \to \infty,\\
&\widetilde{\widetilde{F}}^n_m \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{\widetilde{F}}^n,\ m \to \infty,\ \text{za sve}\ n \in \mathbb{N}\ \ \text{i}\ \widetilde{\widetilde{F}}_m \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{\widetilde{F}},\ n \to \infty.
\end{aligned}$$

Na sličan način kao u Propoziciji 5.3, pomoću Leme 5.2, možemo konstruisati nizove $(F^n_{m,1})_m$, $(F^n_{m,2})_m$, $n \in \mathbb{N}$, $(F_{m,1})_m$, $(F_{m,2})_m$ glatkih periodičnih funkcija iz $\mathbb{R}^d$, nizove $(F^n_1)_n$, $(F^n_2)_n$ periodičnih funkcija iz $L^2(I_0)$, periodične funkcije

$F_1,\ F_2 \in L^2(I_0)$ i $P_{r_p} \in \mathcal{P}^{\{t\}}$ tako da:

$$f_m^n = P_{r_p}(D)F_{m,1}^n = P_{r_p}(D)F_{m,2}^n,\ f_m = P_{r_p}(D)F_{m,1},\ g_m = P_{r_p}(D)F_{m,2} \text{ u } \mathbb{R}^d,$$

$$F_{m,1}^n - F_{m,2}^n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F_{m,1} - F_{m,2},\ n \to \infty,\ \text{uniformno po } m \in \mathbb{N},$$

$$F_{m,1} - F_{m,2} \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F_1 - F_2,\ m \to \infty,\ F_{m,1}^n - F_{m,2}^n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F_1^n - F_2^n,\ m \to \infty,$$

$$\text{za sve } n \in \mathbb{N} \text{ i } F_1^n - F_2^n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F_1 - F_2,\ n \to \infty.$$

Kako je $P_{r_p}(D)(F_{m,2}-F_{m,1}) = \lim_{n\to\infty} P_{r_p}(D)(F_{m,1}^n - F_{m,2}^n - F_{m,1} + F_{m,2}) = 0$ u $\mathbb{R}^d$, $m \in \mathbb{N}$, iz Propozicije 5.2 dobijamo $F_1 = F_2$ u $\mathbb{R}^d$. Dakle, $f = g$ u $\mathbb{R}^d$.

□

5.4 Periodične s-ultradistribucije kao funkcionali

Neka je $\varphi \in \mathcal{A}_{per}^*$ i neka je $f = [f_n]$ takav da važi (5.1). Definišimo delovanje

$$\varphi \mapsto f(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}},$$

sa

$$(f,\varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}} = \lim_{n\to\infty} \int_{I_0} f_n \overline{\varphi} dx = \int_{I_0} FP(-D)\overline{\varphi} dx = (F, P(-D)\varphi)_{L^2(I_0)}, \quad (5.4)$$

gde $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F$, $n \to \infty$. Dakle, na osnovu (5.4) možemo identifikovati $f = [f_n]$ sa $f = P(D)F$. Pokažimo konzistentnost ove definicije.
Ako imamo sledeće reprezentacije

$$f_n = \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_n, \quad f_n = \widetilde{\widetilde{P}}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_n, \quad \text{u } \mathbb{R}^d,$$

$$\widetilde{F}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{F},\ \widetilde{\widetilde{F}}_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} \widetilde{\widetilde{F}},\ n \to \infty,$$

tada parcijalnom integracijom dobijamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{I_0} f_n \overline{\varphi} dx = \int_{I_0} \widetilde{F}\widetilde{P}(-D)\overline{\varphi} dx = \int_{I_0} \widetilde{\widetilde{F}}\widetilde{\widetilde{P}}(-D)\overline{\varphi} dx,$$

jer mešoviti niz integrala

$$\int_{I_0} \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_1\overline{\varphi} dx,\ \int_{I_0} \widetilde{\widetilde{P}}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_1\overline{\varphi} dx,\ \int_{I_0} \widetilde{P}(D)\widetilde{F}_2\overline{\varphi} dx,\ \int_{I_0} \widetilde{\widetilde{P}}(D)\widetilde{\widetilde{F}}_2\overline{\varphi} dx, \ldots$$

konvergira. Iz Leme 5.1 je $\varphi \mapsto f(\varphi) = (f,\varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}}$ linearno preslikavanje.

Sekvencijalna neprekidnost je data u sledećoj teoremi.

Teorema 5.2. *(a) Ako je $f = [f_m] \in \mathcal{U}'^*_{per}$ i ako su $\varphi_n,\ \varphi \in \mathcal{A}^*_{per}$ takvi da $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{A}^*_{per}} \varphi$, $n \to \infty$, tada $(f,\varphi_n)_{\mathcal{U}'^*_{per}} \to (f,\varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}},\ n \to \infty$.*
(b) Ako $(f^n = [f^n_m])_n \xrightarrow{s\text{-}p} f = [f_m]$ i ako $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{A}^*_{per}} \varphi$, kad $n \to \infty$, tada

$$(f^n,\varphi_n)_{\mathcal{U}'^*_{per}} \to (f,\varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}},\ n \to \infty.$$

Dokaz. (a) Na osnovu (5.1) i (5.4) imamo

$$(f,\varphi_n)_{\mathcal{U}'^*_{per}} = (F, P(-D)\varphi_n)_{L^2(I_0)},\ n \in \mathbb{N}.$$

Tada iz Leme 5.1 (b) i

$$\begin{aligned} |(f,\varphi_n)_{\mathcal{U}'^*_{per}} - (f,\varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}}| &= |(F, P(-D)(\varphi_n - \varphi))_{L^2(I_0)}| \\ &\le \|F\|_2 \|P(-D)(\varphi_n - \varphi)\|_2 \\ &\le C\|P(-D)(\varphi_n - \varphi)\|_2, \end{aligned}$$

dobijamo tvrđenje.
(b) Iz Definicije 5.4 imamo

$$\lim_{n\to\infty} (f^n,\varphi_n)_{\mathcal{U}'^*_{per}} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} (F^n_m, P(-D)\varphi_n)_{L^2(I_0)},$$

gde $F^n_m \xrightarrow{I} F^n$, $m \to \infty$, za sve $n \in \mathbb{N}$ i $F^n \xrightarrow{I} F$ kad $n \to \infty$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} |(F^n,\varphi_n)_{L^2} - (F,\varphi)_{L^2}| &\le |(F^n, P(-D)(\varphi_n - \varphi))_{L^2(I_0)}| \\ &\quad + |(F^n - F, P(-D)\varphi)_{L^2(I_0)}| \\ &\le \|F^n\|_2 \|P(-D)(\varphi_n - \varphi)\|_2 \\ &\quad + \|F^n - F\|_2 \|P(-D)\varphi\|_2. \end{aligned}$$

I na kraju,iz Leme 5.1 (b) sledi tvrđenje. □

Lema 5.3. *$f \in \mathcal{A}'^*_{per}$ ako i samo ako postoji $F \in L^2(I_0) \cap \mathcal{C}^\infty(I_0)$ i ultradiferencijalni operator $P \in \mathcal{P}^*$ tako da važi $f = P(D)F$, tj.*

$$(f,\varphi)_{\mathcal{A}'^*_{per}} = \int_{I_0} F(x)P(-D)\overline{\varphi}(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{A}^*_{per}. \tag{5.5}$$

Dokaz Leme 5.3 je posledica teoreme o reprezentaciji (videti [37]) i tvrđenja (a) i (b) Leme 5.1.

5.5 Veza između klasičnih i periodičnih s-ultradistribucija

Posmatrajmo funkcije oblika $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k e_k$ koje pripadaju $L^2(I_0)\cap\mathcal{C}^\infty(I_0)$ i označimo sa $\mathbf{u}^*$ prostor nizova oblika $(r_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ za koje važi

$$\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} P^2(k) r_k^2 < \infty \quad \text{za sve } P \in \mathcal{P}_u^*.$$

Jasno je da je ovaj uslov ekvivalentan sa

$$(\forall h>0)(\text{resp. } \exists h>0) \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k^2 e^{h|k|^{1/t}} < \infty. \tag{5.6}$$

U Rumijeovom slučaju imamo još jednu ekvivalentnu definiciju:

$$(\exists (r_p)_p \in \mathcal{R}) \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k^2 e^{c(|k|)^{1/t}} < \infty, \tag{5.7}$$

gde je c funkcija koja odgovara nizu $(r_p)_p \in \mathcal{R}$.

Pretpostavimo da važi (5.1). Tada, korištenjem (5.4) svakom elementu $f \in \mathcal{U}'^*_{per}$ ćemo dodeliti niz $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ sa odgovarajućim ograničenjem. Dakle, imamo

$$(f,\varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n} P(k) \int_{I_0} e_k \overline{\varphi} dx \tag{5.8}$$

gde je $F_n = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_{k,n} e_k$ i $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |c_{k,n}|^2 < \infty,\ n\in\mathbb{N}$. Kako $(c_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}^d} \to (c_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}$ u l^2 kad $n\to\infty$ i $\varphi = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k e_k$, tada je

$$(f,\varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}} = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k P(k) r_k, \tag{5.9}$$

gde znamo da uslovi (5.6) i (5.7) vrede za sve $(r_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbf{u}^*$. Ovim smo periodičnoj s-ultradistribuciji f dodelili niz oblika

$$(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} = (P(k)c_k)_{k\in\mathbb{Z}^d}.$$

Označimo sa $\mathbf{u}'^*$ prostor nizova definisan na sledeći način:

$$\mathbf{u}'^* = \{(b_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} : b_k = P(k)c_k \text{ za neko } P \in \mathcal{P}_u^* \text{ i } (c_k)_{k\in\mathbb{Z}^d} \in l^2\}.$$

Propozicija 5.4. *Postoji linearna bijekcija* $B : \mathcal{U}'^{*}_{per} \to \mathbf{u}'^{*}$.

Dokaz. Ako je $f \in \mathcal{U}'^{*}_{per}$ određena sa $(F_n)_n$ F i $P(D)$, $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(I)} F$, $n \to \infty$, gde je $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k e_k$ i $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, tada definišimo

$$Bf := (b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d}.$$

Iz Leme 5.2 sledi da različite reprezentacije od f opet daju isti niz. Lako se pokazuje da je B linearno i bijektivno preslikavanje. □

Sledeća propozicija direktno sledi iz (1.6) i (1.8).

Propozicija 5.5. (a) *Niz* $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \boldsymbol{u}'^{*}$ *ako i samo ako* $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 e^{-h|k|^{1/t}} < \infty$ *za neko (resp. za svako)* $h > 0$.
(b) *Niz* $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \in \boldsymbol{u}'^{*}$ *ako i samo ako za neko* $h > 0$ *postoji* $C > 0$ *(resp. za sve* $h > 0$ *postoji* $C > 0$*) tako da* $|b_k| \leq C e^{h|k|^{1/t}}$.

Napomena 5.2. *Primetimo da u Rumijeovom slučaju imamo ekvivalentno tvrđenje prethodnom, a to je: Uslovi Propozicije 5.5 važe i sa procenom* (5.7)*.*

Prisetimo se iz [9], da prostori nizova

$$\mathbf{a}^{*} = \{(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \text{ za sve (resp. postoji) } h > 0 : \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 e^{h|k|^{1/t}} < \infty\},$$

$$\mathbf{a}'^{*} = \{(b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \text{ postoji (resp. za sve) } h > 0 : \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 e^{-h|k|^{1/t}} < \infty\}$$

sa njihovim strukturama konvergencije formiraju dualni par. Kako je $\mathbf{a}^{*} \equiv \mathbf{u}^{*}$, iz Propozicije 5.5, imamo $\mathbf{a}'^{*} \equiv \mathbf{u}'^{*}$. U [9] je pokazano da se prostori $\mathbf{a}^{*}$ i $\mathcal{A}^{*}_{per}$ mogu identifikovati kroz bijektivni izomorfizam

$$\mathbf{a}^{*} \ni (a_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \to \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_k e_k \in \mathcal{A}^{*}_{per} \tag{5.10}$$

iz kog sledi izomorfizam

$$\mathbf{a}'^{*} \ni (b_k)_{k \in \mathbb{Z}^d} \to \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k \in \mathcal{A}'^{*}_{per},$$

pa, na osnovu Propozicije 5.4 sledi da se prostori $\mathbf{a}'^*$ i $\mathcal{U}'^*_{per}$ mogu identifikovati pomoću njihovih struktura konvergencije.

Pomoću (5.5) je definisan linearan funkcional na $\mathcal{A}^*_{per}$, dok je na osnovu Teoreme 5.2 sekvencijalno neprekidan. Dakle, sada možemo da pokažemo glavni rezultat u ovoj glavi.

Teorema 5.3. *(i) Za svaki neprekidan linearan funkcional A u prostoru $\mathcal{A}^*_{per}$ postoji jedinstvena periodična s-ultradistibucija $f \in \mathcal{U}'^*_{per}$ takva da važi*

$$A(\varphi) = (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}}, \qquad \textit{za sve} \;\; \varphi \in \mathcal{A}^*_{per}. \tag{5.11}$$

gde je $(f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}}$ definisan sa (5.4).
Obratno, za sve $f \in \mathcal{U}'^*_{per}$ izraz (5.11) definiše linearan i sekvencijalno neprekidan funkcional na $\mathcal{A}^*_{per}$.
(ii) Niz $(f^n)_n \in \mathcal{U}'^*_{per}$ konvergira ka $f \in \mathcal{U}'^*_{per}$ ako i samo ako za sve $\varphi \in \mathcal{A}^*_{per}$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (f^n_m, \varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}} = (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}}. \tag{5.12}$$

Dokaz. (i) Neka je $f = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k \in \mathcal{A}'^*_{per}$. Korištenjem Leme 5.3 zaključujemo da

$$F_n = \sum_{|k|\leq n} \frac{b_k}{P(k)} e_k, \; k \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{N}, \quad F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} \frac{b_k}{P(k)} e_k$$

daju odgovarajući element iz $\mathcal{U}'^*_{per}$. Jedinstvenost sledi iz Propozicija 5.2 i 5.4.

Obratno, neka $f \in \mathcal{U}'^*_{per}$. Tada je sa (5.8) definisan sekvencijalno neprekidan i linearan funkcional na $\mathcal{A}^*_{per}$ jer iz $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{A}^*_{per}} \varphi$ sledi $(f, \varphi_n)_{\mathcal{U}'^*_{per}} \to (f, \varphi)_{\mathcal{U}'^*_{per}}$, $n \to \infty$.

(ii) Dokažimo samo da iz (5.12) sledi $f^n \xrightarrow{s-p} f$, $n \to \infty$, jer je implikacija već dokazana u Teoremi 5.2 (b). Neka su $F^n_m = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a^n_{k,m} e_k$, $F_m = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_{k,m} e_k$, $m, n \in \mathbb{N}$ i $F = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_k e_k$ (kao u Definiciji 5.4). Iz dualnosti prostora $\mathbf{a}^*$ i $\mathbf{a}'^*$, sledi

$$\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a^n_{k,m} r_k \to \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_{k,m} r_k, \; n \to \infty, \quad \text{uniformno po } m \in \mathbb{N},$$

za sve $\varphi = \sum\limits_{|k|=-\infty}^{\infty} r_k e_k \in \mathcal{A}_{per}^*$. Takođe,

$$(a_{k,m})_{k\in\mathbb{Z}^d} \to (a_k)_{k\in\mathbb{Z}^d},\ m \to \infty, \quad \text{u} \ \ \mathbf{a}'^*.$$

Ako se vratimo na oblike funkcija F_m^n, F_m i F, dobijamo tvrđenje. $\square$

Glava 6

Talasni front ultradistribucije

U ovoj glavi ćemo posmatrati talasni front ultradistribucije kroz analizu odgovarajućih prostora periodičnih ultradistribucija sa periodom 1. Posmatraćemo periodično proširenje odgovarajuće lokalizacije ultradistribucije oko tačke $x_0 \in \mathbb{R}^d$, takvo da ako je nosač ultradistribucije f u $I_{\eta,x_0} := \prod_{j=1}^{d}(x_{0,j} - \eta/2, x_{0,j} + \eta/2)$, gde je $0 < \eta < 1$, tada je $f_p(x) := \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ njeno periodično proširenje. U prethodnoj glavi smo već definisali prostore $\mathcal{A}_{per}^{*}$ periodičnih ultradiferencijabilnih funkcija Berlingovog i Rumijeovog tipa (sa periodom 2π), kao i njihove duale prostore periodičnih ultradistribucija $\mathcal{A}_{per}^{\prime *}$ Berlingovog i Rumijeovog tipa. Sada ćemo posmatrati te iste prostore ali sa periodom 1 i koristiti oznaku $e_k(x) = e^{2k\pi x i}$. U [9] je dokazano sledeće:

(i) $\varphi \in \mathcal{A}_{per}^{(t)}$ (resp. $\varphi \in \mathcal{A}_{per}^{\{t\}}$) ako i samo ako je $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 e^{h|k|^{1/t}} < \infty$, za svako $h > 0$ (resp. za neko $h > 0$), gde je $a_k = \int_{(0,1)^d} \varphi(x) e^{-2k\pi x i} dx = (\varphi, e_k)_{L^2((0,1)^d)}, \ k \in \mathbb{Z}^d$.

(ii) $f = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k \in \mathcal{A}_{per}^{\prime (t)}$ (resp. $f = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k \in \mathcal{A}_{per}^{\prime \{t\}}$) ako i samo ako je $\sum_{|k|=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 e^{-h|k|^{1/t}} < \infty$, za neko $h > 0$ (resp. za svako $h > 0$).

(iii) Ako je $f = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k \in \mathcal{A}_{per}^{\prime *}$ i $\varphi = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_k e_k \in \mathcal{A}_{per}^{*}$, tada je
$$(f, \varphi) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k a_{-k}.$$

Neka su ω, ν pozitivne funkcije u $\mathbb{Z}^d$. Funkcija ν je sub-multikativna (polumultikativna) ako važi

$$\nu(m+n) \leq \nu(m)\nu(n), \ \ \forall m, n \in \mathbb{Z}^d. \tag{6.1}$$

Funkcija ω je ν-težinska funkcija ako postoji konstanta C tako da važi

$$\omega(m+n) \leq C\omega(m)\nu(n), \ \ \forall m,n \in \mathbb{Z}^d. \tag{6.2}$$

Za fiksiranu sub-multiplikativnu funkciju ν, skup svih ν-težinskih funkcija označavamo sa $\mathscr{M}_\nu$. Definišimo prostore (videti [17])

$$\mathscr{M}_{(t)}(\mathbb{Z}^d) = \{\omega \in \mathscr{M}_\nu : (\exists C>0)(\forall h>0)(\forall k \in \mathbb{Z}^d)(\nu(k) \leq Ce^{h|k|^{1/t}})\},$$

$$\mathscr{M}_{\{t\}}(\mathbb{Z}^d) = \{\omega \in \mathscr{M}_\nu : (\exists C>0)(\exists h>0)(\forall k \in \mathbb{Z}^d)(\nu(k) \leq Ce^{h|k|^{1/t}})\}.$$

Za $\omega \in \mathscr{M}_*(\mathbb{Z}^d)$ definišimo

$$\mathscr{A}l^q_\omega = \{f \in \mathcal{A}'^*_{per} : (b_k\omega(k))_{k\in\mathbb{Z}^d} \in l^q, \text{ gde je } b_k = (f,e_k)_{L^2((0,1)^d)}\}$$

sa normom $\|f\|_{\mathscr{A}l^q_\omega} = \|(b_k\omega(k))\|_{l^q}$, $q \geq 1$. Ako je $q_1 \leq q_2$ i $\omega_2 \leq C\omega_1$, tada je $\mathscr{A}l^{q_1}_{\omega_1} \subseteq \mathscr{A}l^{q_2}_{\omega_2}$.

Neka je $(\varphi f)_p$ periodično proširenje ultradistribucije $f \in \mathcal{D}'^*(\mathbb{R}^d)$. Posmatraćemo prostore $\mathscr{A}l^q_{\omega,loc}$ koji sadrže ultradistribucije $f \in \mathcal{D}'^*(\mathbb{R}^d)$ takve da je $(\varphi f)_p \in \mathscr{A}l^q_\omega$ za sve $x_0 \in \mathbb{R}^d$ i $\varphi \in \mathcal{D}^*(I_{1,x_0})$. Topologija ovog prostora je definisana familijom seminormi $\|f\|_{x_0,\varphi} = \|(\varphi f)_p\|_{\mathscr{A}l^q_\omega}$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $\varphi \in \mathcal{D}^*(I_{1,x_0})$.

Propozicija 6.1. $\mathscr{A}l^q_\omega \subset \mathscr{A}l^q_{\omega,loc}$.

Dokaz. Tvrđenje dokazujemo samo u Rumijeovom slučaju. Ako $f \in \mathscr{A}l^q_\omega$ i $\varphi \in \mathcal{D}^{\{s\}}(I_{1,x_0})$, tada je $(\varphi f)_p = \varphi_p f$, gde su $f = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k$ i $\varphi_p = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} a_k e_k \in \mathcal{A}^{\{s\}}_{per}$. Iz (6.2) i uopštene nejednakosti Minkovskog imamo

$$\begin{aligned}
\|\varphi_p f\|_{\mathscr{A}l^q_\omega} &\leq C\left(\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{|j|=-\infty}^{\infty}|a_j|\nu(j)|b_{k-j}|\omega(k-j)\right)^q\right)^{1/q}\\
&\leq C\sum_{|j|=-\infty}^{\infty}\left(\left(\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}|a_j|\nu(j)|b_{k-j}|\omega(k-j)\right)^q\right)^{1/q}\\
&\leq C\sum_{|j|=-\infty}^{\infty}|a_j|\nu(j)\left(\left(\sum_{|k|=-\infty}^{\infty}|b_{k-j}|\omega(k-j)\right)^q\right)^{1/q}\\
&\leq C\|\varphi_p\|_{\mathscr{A}l^1_\nu}\|f\|_{\mathscr{A}l^q_\omega} < \infty.
\end{aligned}$$

$\square$

Neka je $\omega_h(k) = e^{h|k|^{1/t}}$, $h > 0$, $t > 1$. Radi lakšeg zapisa ćemo koristiti sledeće oznake $\mathscr{A}l^q_h := \mathscr{A}l^q_{\omega_h}$ i $\mathscr{A}l^q_{h,loc} := \mathscr{A}l^q_{\omega_h,loc}$. Jasno je da važi

$$\mathcal{A}^{(s)}_{per} = \bigcap_{h\geq 0} \mathscr{A}l^q_h = \bigcap_{\omega\in\mathscr{M}_{(s)}(\mathbb{Z}^d)} \mathscr{A}l^q_\omega; \qquad \mathcal{A}^{\{s\}}_{per} = \bigcap_{h\geq 0} \mathscr{A}l^q_h = \bigcap_{\omega\in\mathscr{M}_{\{s\}}(\mathbb{Z}^d)} \mathscr{A}l^q_\omega$$

i

$$\mathcal{A}'^{(s)}_{per} = \bigcup_{h\leq 0} \mathscr{A}l^q_h = \bigcup_{\omega\in\mathscr{M}_{(s)}(\mathbb{Z}^d)} \mathscr{A}l^q_\omega; \qquad \mathcal{A}'^{\{s\}}_{per} = \bigcup_{h\leq 0} \mathscr{A}l^q_h = \bigcup_{\omega\in\mathscr{M}_{\{s\}}(\mathbb{Z}^d)} \mathscr{A}l^q_\omega.$$

6.1 Množenje u periodičnim test prostorima

Fiksirajmo dve težinske funkcije $\omega \in \mathscr{M}_\nu, \nu \in \mathscr{M}_*(\mathbb{Z}^d)$ (videti (6.2)). Neka su $f_1 = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_{1,k}e_k \in \mathscr{A}l^{q_1}_\omega$ i $f_2 = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_{2,k}e_k \in \mathscr{A}l^{q_2}_\nu$ i definišimo njihov proizvod sa

$$f := f_1 f_2 := \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} b_k e_k,$$

gde je

$$b_k = \sum_{|j|=-\infty}^{\infty} b_{1,k-j}b_{2,j}, \;\; k \in \mathbb{Z}^d.$$

Pomoću ove definicije uvodimo množenje u $\mathscr{A}l^q_{\omega,loc}$, ali moramo da posmatramo lokalno ponašanje funkcija (ultradistribucija). Neka su $f_1 \in \mathscr{A}l^{q_1}_{\omega,loc}$ i $f_2 \in \mathscr{A}l^{q_2}_{\nu,loc}$, tada je proizvod $f := f_1 f_2$ definisan na sledeći način:

Neka su $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $0 < \eta < 1$ i $\psi \in \mathcal{D}^*(I_{1,x_0})$ takvi da je $\psi(x) = 1$ za $x \in I_{\eta,x_0}$. Definišimo $f_{I_{\eta,x_0}} \in \mathcal{D}'^*(I_{\eta,x_0})$ kao restrikciju od $(\psi f_1)_p(\psi f_2)_p$ na I_{η,x_0}. Primetimo da za različite ψ dobijamo različite Furijeove koeficijente, ali iz Propozicije 6.1 sledi da je $f_{I_{\eta,x_0}} = f_{I_{\eta',x'_0}}$ na $I_{\eta,x_0} \cap I_{\eta',x'_0}$. Dakle, $(f_{I_{\eta,x_0}})$ je ultradistribucija $f \in \mathscr{A}l^q_{\omega,loc}$ i definišemo proizvod $f_1 f_2 := f$.

Propozicija 6.2. *Neka su $q, q_1, q_2 \in [1, \infty]$ takvi da je $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q} + 1$. Tada su preslikavanja*

$$\mathscr{A}l^{q_1}_\omega \times \mathscr{A}l^{q_2}_\nu \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{A}l^q_\omega \tag{6.3}$$

i

$$\mathscr{A}l^{q_1}_{\omega,loc} \times \mathscr{A}l^{q_2}_{\nu,loc} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{A}l^q_{\omega,loc} \tag{6.4}$$

neprekidna.

Dokaz. Neprekidnost preslikavanja (6.4) sledi iz (6.3). Iz Joungove nejednakosti i (6.2) sledi

$$\|f_1 f_2\|_{\mathscr{A}l^q_\omega} \leq C\|f_1\|_{\mathscr{A}l^{q_1}_\omega}\|f_2\|_{\mathscr{A}l^{q_2}_\nu},$$

odakle dobijamo neprekidnost preslikavanja (6.3). □

Kao direktnu posledicu ovog tvrđenja imamo:

Posledica 6.1. *Neka su $h, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ takvi da je*

$$h_1 + h_2 \geq 0, \qquad h \leq \min\{h_1, h_2\}. \tag{6.5}$$

Tada su preslikavanja $\mathscr{A}l^{q_1}_{h_1} \times \mathscr{A}l^{q_2}_{h_2} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{A}l^q_h$ i $\mathscr{A}l^{q_1}_{h_1,loc} \times \mathscr{A}l^{q_2}_{h_2,loc} \ni (f_1, f_2) \mapsto f_1 f_2 \in \mathscr{A}l^q_{h,loc}$ neprekidna.

Dokaz. Pretpostavimo da je $h_1 \geq 0$ i $h = h_2$. Da bi $h_1 + h_2 \geq 0$ treba da $h_1 \geq |h_2|$. Tada neprekidnost preslikavanja sledi iz Propozicije 6.2 gde je $\omega(k) = e^{h_2|k|^{1/t}}$ i $\nu(k) = e^{h_1|k|^{1/t}}$ jer u ovom slučaju važi (6.2). □

6.2 Talasni front ultradistribucije

U ovom poglavlju cilj nam je da opišemo talasni front ultradistribucije $f \in \mathcal{D}'^*(\mathbb{R}^d)$ pomoću Furijeovih koeficijenata periodičnog proširenja odgovarajuće lokalizacije f oko $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Neka je $t > 1$. Ultradistribucija $f \in \mathcal{D}'^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ je (t)-mikroregularna (resp. $f \in \mathcal{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ je $\{t\}$-mikroregularna) u (x_0, ξ_0) ako postoji $\psi \in \mathcal{D}^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\psi \in \mathcal{D}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$) takva da je $\psi \equiv 1$ u otvorenoj okolini tačke x_0 i otvoreni konus $\Gamma \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ koji sadrži ξ_0 tako da za svako $h > 0$ (resp. postoji $h > 0$) postoji $C_h > 0$ tako da važi

$$|\widehat{\psi f}(\xi)| \leq C_h e^{-h|\xi|^{1/t}}, \quad \forall \xi \in \Gamma. \tag{6.6}$$

Skup $WF_{(t)}(f)$ (resp. $(WF_{\{t\}})$ je (t)-talasni front (resp. $\{t\}$-talasni front) ultradistribucije f i definišemo ga kao komplement skupa svih tačaka $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ gde je f (t)-mikroregularna (resp. $\{t\}$-mikroregularna) (videti [17] i [42, Definicija 1.7.1]).

Teorema 6.1. *Neka $f \in \mathcal{D}'^{(t)}(\mathbb{R}^d)$ (resp. $f \in \mathcal{D}'^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$) i $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) Postoje $\psi \in \mathcal{D}^{(t)}(I_{\varepsilon,x_0})$ (resp. $\psi \in \mathcal{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon,x_0})$), gde $\varepsilon \in (0,1)$ i $\psi \equiv 1$ u okolini x_0 i otvoren konus Γ koji sadrži ξ_0 tako da za za sve $h > 0$ (resp. postoji $h > 0$) postoji $C_h > 0$ važi

$$|\widehat{\psi f}(k)| \leq C_h e^{-h|k|^{1/t}}, \quad \forall k \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^d. \tag{6.7}$$

(ii) $(x_0, \xi_0) \notin WF_{(t)}(f)$ (resp. $(x_0, \xi_0) \notin WF_{\{t\}}(f)$).

Dokaz. Tvrđenje ćemo dokazati samo u Rumijeovom slučaju. Skupljanjem konusne okoline ξ_0, možemo izabrati ψ u (6.6) koje ima proizvoljno mali nosač oko x_0. Time je dokazano da iz (ii) sledi (i). Dokažimo da iz (i) sledi (ii). Pretpostavimo da važi (i). Dokažimo da postoji ε' i otvoren konus koji sadrži tačku $\xi_0 \in \Gamma_1$ tako da

$$\begin{gathered}(\forall B \text{ ograničen skup u } \mathcal{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon',x_0}))(\exists h > 0)(\exists C'_h > 0)\\ (\forall k \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) \quad \sup_{\varphi \in B} |\widehat{\varphi f}(k)| \leq C'_h e^{-h|k|^{1/t}}.\end{gathered} \tag{6.8}$$

Neka je ε' takav da je $\psi(x) = 1$ za sve $x \in I_{\varepsilon',x_0}$ i neka je Γ_1 otvoren konus koji sadrži ξ_0 tako da $\overline{\Gamma}_1 \subset \Gamma \cup \{0\}$. Pretpostavimo da je $0 < c < 1$ konstanta koja je manja od rastojanja između $\partial\Gamma$ i preseka konusa $\overline{\Gamma}_1$ sa jediničnom sferom. Tada je $\left\{y \in \mathbb{R}^d : (\exists \xi \in \Gamma_1)(|\xi - y| \leq c|\xi|)\right\} \subset \Gamma$. Neka je $B \subset \mathcal{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon',x_0})$ ograničen skup. Kako je $\psi\varphi = \varphi, \forall \varphi \in B$ tada su $\widehat{f\varphi}(k)$ Furijeovi koeficijenti periodične ultradistribucije $(\psi f)_p(\varphi)_p$. Prema tome, za $\varphi \in B$ i $k \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d$ imamo

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\varphi f}(k)\right| = \left|\sum_{|j|=-\infty}^{\infty} \widehat{\psi f}(k-j)\widehat{\varphi}(j)\right| &\leq \Big(\sum_{|j|\leq c|k|} + \sum_{|j|\geq c|k|}\Big)|\widehat{\psi f}(k-j)\widehat{\varphi}(j)|\\ &=: I_1(k) + I_2(k)\end{aligned}$$

Odredimo sada ograničenje za $I_1(k)$: Imamo

$$I_1(k) = \sum_{|k-j|\leq c|k|} |\widehat{\psi f}(j)||\widehat{\varphi}(k-j)| \leq C \sup_{|k-j|\leq c|k|} |\widehat{\psi f}(j)|,$$

gde konstanta C zavisi samo od B. Kako iz $|k-j| \leq c|k|$ sledi $|j| \geq (1-c)|k|$, imamo

$$\begin{aligned}\sup_{\varphi \in B,\, k \in \Gamma_1} e^{h|k|^{1/t}} I_1(k) &\leq C \sup_{k \in \Gamma_1} e^{h|k|^{1/t}} \sup_{|k-j|\leq c|k|} |\widehat{\psi f}(j)|\\ &\leq C \sup_{j \in \Gamma_{\xi_0}} (1-c)^{-h} e^{h|j|^{1/t}} |\widehat{\psi f}(j)| = C(1-c)^{-h} C_h.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Sada, odredimo ograničenje za $I_2(k)$. Da bismo to pokazali koristićemo da iz $|j| \geq c|k|$ sledi $|k-j| \leq (1+c^{-1})|j|$. Na osnovu Pali-Vinerove teoreme za svako $h_1 > 0$ postoji $C_1 > 0$ tako da je

$$|\widehat{\psi f}(k-j)| \leq C_1 e^{h_1|k-j|^{1/t}}, \quad k, j \in \mathbb{Z}^d.$$

Iz ograničenosti skupa $B \subset \mathcal{D}^{\{t\}}(\mathbb{R}^d)$ sledi

$$\sup_{\varphi \in B} \sum_{|j|=-\infty}^{\infty} e^{(h_1+h)|j|^{1/t}} |\widehat{\varphi}(j)| =: K_h < \infty,$$

odakle dobijamo

$$\begin{aligned} \sup_{k \in \Gamma_1} e^{h|k|^{1/t}} I_2(k) &\leq C_1 \sup_{k \in \Gamma_1} e^{h|k|^{1/t}} \sum_{|j| \geq c|k|} e^{h_1|k-j|^{1/t}} |\widehat{\varphi}(j)| \\ &\leq C_1 C^{-h} (1+c^{-1})^{h_1} K_h, \quad \forall \varphi \in B. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Iz (6.9) i (6.10) sledi (6.8).

Koristeći (6.8), pokažimo da $(x_0, \xi_0) \notin WF_{\{t\}}(f)$. Neka je $\psi \in \mathcal{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon', x_0})$ jednaka 1 u okolini tačke x_0. Tada je skup $B = \{\varphi_s := \psi e_{-s} : \ s \in [0,1)^d\}$ ograničen podskup od $\mathcal{D}^{\{t\}}(I_{\varepsilon', x_0})$. Odatle sledi

$$\sup_{s \in [0,1)^d} |\widehat{\psi f}(k+s)| = \sup_{s \in [0,1)^d} |\widehat{\varphi_s f}(k)| \leq \frac{C'_h}{e^{h|k|^{1/t}}}, \quad \forall k \in \Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d,$$

$$\sup_{\xi \in (\Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) + [0,1)^d} e^{h|\xi|^{1/t}} |\widehat{\psi f}(\xi)| \leq (1+4d)^{h/2} C'_h. \tag{6.11}$$

Dalje, neka je Γ_2 otvoren konus oko tačke ξ_0 takav da je $\overline{\Gamma}_2 \subset \Gamma_1 \cup \{0\}$ i neka je c' tako da važi $\big\{y \in \mathbb{R}^d : (\exists \xi \in \Gamma_2)(|\xi - y| \leq c'|\xi|)\big\} \subset \Gamma_1$. Tada je $\Gamma_2 \cap \{\xi \in \mathbb{R}^d : \ |\xi| c' \geq 1\} \subset (\Gamma_1 \cap \mathbb{Z}^d) + [0,1)^d$. Odatle je

$$\sup_{\xi \in \Gamma_2} e^{h|\xi|^{1/t}} |\widehat{\psi f}(\xi)| \leq \max\{C''_h, (1+4d)^{h/2} C'_h\} = C_h < \infty,$$

gde je $C''_h = \sup_{\xi \in \Gamma_2, \, |\xi| < 1/c'} e^{h|\xi|^{1/t}} |\widehat{\psi f}(\xi)|$. Dakle, $(x_0, \xi_0) \notin WF_{\{t\}}(f)$ čime je tvrđenje dokazano. $\square$

Dodatak A

Sekvencijalna teorija distribucija

A.1 Fundamentalni nizovi distribucija

U ovoj glavi dajemo sekvencijalni pristup teoriji distribucija koji je razvijen u [1]. Navodimo definicije, tvrđenja i neke dokaze iz [1], da bismo mogli da uporedimo sa rezultatima do kojih smo došli u [29].

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ proizvoljan otvoren skup. Neka su $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d)$, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Sa $\alpha < x < \beta$ ćemo označavati d-dimenzioni otvoren interval ako $\alpha_i < x_i < \beta_i$, $i = 1, \ldots d$. Ako su α_i i β_i, $i = 1, \ldots, d$ konačni, tada sa $\alpha \leq x \leq \beta$ ćemo označavati d-dimenzioni zatvoren interval ako $\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$, $i = 1, \ldots d$.

Definicija A.1. *Niz $(f_n)_n$ glatkih funkcija je fundamentalan na Ω ako za svaki zatvoren i ograničen interval K sadržan u Ω postoji niz glatkih funkcija $(F_n)_n$ i $k \in \mathbb{Z}^d_+$ tako da važi:*

$$(F) \qquad f_n = F_n^{(k)} \text{ u } K \quad i \quad F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)}, \ n \to \infty.$$

Koristićemo oznaku $F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)}$ da bismo označili da niz $(F_n)_n$ konvergira ka neprekidnoj funkciji F u $\mathcal{C}(K)$.

Definicija A.2. *Dva fundamentalna niza $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ u Ω su u relaciji $\sim_d$, u oznaci $(f_n)_n \sim_d (g_n)_n$, ako za svaki zatvoren i ograničen interval K sadržan u Ω postoje nizovi glatkih funkcija $(F_n)_n$, $(G_n)_n$ i $k \in \mathbb{Z}^d_+$ takvi da:*

$$(E) \qquad f_n = F_n^{(k)}, \ g_n = G_n^{(k)} \text{ u } K \quad i \quad F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)}\xleftarrow{\mathcal{C}(K)} G_n, \ n \to \infty.$$

Direktno iz definicije sledi:

Propozicija A.1. *Dva fundamentalna niza* $(f_n)_n$ *i* $(g_n)_n$ *u* Ω *su u relaciji* $\sim_d$ *ako i samo ako je niz* $f_1,\ g_1,\ f_2,\ g_2,\ \ldots$ *fundamentalan.*

Lako se proverava da je relacija $\sim_d$ refleksivna i simetrična. Pokažimo tranzitivnost ove relacije.

Propozicija A.2. *Relacija* $\sim_d$ *je tranzitivna.*

Dokaz. Ako je $(f_n)_n \sim_d (g_n)_n$ i $(g_n)_n \sim_d (h_n)_n$, tada postoje nizovi glatkih funkcija $(F_n)_n$, $(G_n)_n$, $(\overline{G}_n)_n$, $(H_n)_n$ i $k, l \in \mathbb{Z}_+^d$ takvi da:

$$f_n = F_n^{(k)},\ g_n = G_n^{(k)} \text{ u } K, \quad F_n \overset{\mathcal{C}(K)}{\longrightarrow}\overset{\mathcal{C}(K)}{\longleftarrow} G_n,\ n \to \infty,$$

i

$$g_n = \overline{G}_n^{(l)},\ h_n = H_n^{(l)} \text{ u } K,\ \ \overline{G}_n \overset{\mathcal{C}(K)}{\longrightarrow}\overset{\mathcal{C}(K)}{\longleftarrow} H_n,\ n \to \infty.$$

Bez smanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $k = l$. Uzimajući $\overline{H}_n = G_n - \overline{G}_n + H_n$ dobijamo

$$f_n = F_n^{(k)},\ \ h_n = \overline{H}_n^{(k)} \text{ u } K, \quad F_n \overset{\mathcal{C}(K)}{\longrightarrow}\overset{\mathcal{C}(K)}{\longleftarrow} \overline{H}_n,\ n \to \infty,$$

odakle sledi da je $(f_n)_n \sim_d (h_n)_n$. □

Kako je $\sim_d$ relacija elvivalencije, to se skup svih fundamentalnih nizova u Ω može podeliti u disjunktne klase ekvivalencije tako da su dva fundamentalna niza u istoj klasi ako i samo ako su ekvivalentni. Te klase ekvivalencije se nazivaju *distribucije*. Distribucija određena fundamentalnim nizom $(f_n)_n$, tj., klasa svih fundamentalnih nizova ekvivalentnih sa $(f_n)_n$ se označava sa $f = [f_n] = [(f_n)_n]$.

A.2 Operacije sa distribucijama

Množenje distribucije brojem

Operacija množenja distribucije $[f_n]$ sa brojem λ ima sledeća svojstva:

(i) Ako je niz $(f_n)_n$ fundamentalan, tada je i niz $(\lambda f_n)_n$ fundamentalan.

(ii) Ako $(f_n)_n \sim_d (\overline{f}_n)_n$ tada i $(\lambda f_n)_n \sim_d (\lambda \overline{f}_n)_n$.

Sabiranje distribucija
Operacija sabiranja distribucija $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ ima sledeća svojstva:

(i) Ako su nizovi $(f_n)_n$ i $(g_n)_n$ fundamentalni, tada je i niz $(f_n + g_n)_n$ fundamentalan.

(ii) Ako $(f_n)_n \sim_d (\overline{f}_n)_n$ i $(g_n)_n \sim_d (\overline{g}_n)_n$, tada $(f_n + g_n)_n \sim_d (\overline{f}_n + \overline{g}_n)_n$.

Množenje distribucije glatkom funkcijom
Ako su nizovi $f = [f_n]$ i $g = [g_n]$ fundamentalni, njihov proizvod fg ne mora da bude fundamentalan. Zato pretpostavimo da je ω glatka funkcija. Pokažimo da ako je niz $(f_n)_n$ fundamentalan u Ω, tada je i niz $(\omega f_n)_n$ fundamentalan u Ω.
Ako je niz $(f_n)_n$ fundamentalan, tada za svaki zatvoren i ograničen interval K u Ω postoji niz glatkih funkcija $(F_n)_n$ i $k \in \mathbb{Z}_+^d$ tako da važi

$$f_n = F_n^{(k)} \text{ u } K \quad \text{i} \quad F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)}, \ n \to \infty.$$

Pokažimo da je za svaki $m \in \mathbb{Z}_+^d$ i za svaku glatku funkciju ω niz $(\omega F_n^{(m)})_n$ fundamentalan. Dokaz ćemo izvesti indukcijom.
Slučaj $m = 0$ je jasan. Dalje, ako je niz $(\omega F_n^{(m)})_n$ fundamentalan za neko m, tada je on fundamentalan za $m + e_j$, gde je $e_j = (0, 0, ..., 1, ..., 0)$ (na j-toj poziciji je 1) jer je

$$\omega F_n^{(m+e_j)} = (\omega F_n^{(m)})^{e_j} - \omega^{e_j} F_n^{(m)} \quad \text{u} \quad K$$

i desna strana prethodne jednakosti je razlika dva fundamentalna niza. Dakle, za $m = k$ je niz $(\omega f_n)_n$ fundamentalan u Ω. Na taj način možemo definisati proizvod distribucije $f = [f_n]$ i glatke funkcije ω i to označavamo sa $\omega f = [\omega f_n]$.

A.3 Nizovi distribucija

Definicija A.3. *Delta niz u $\mathbb{R}^d$ je niz $(\delta_n)_n$ glatkih funkcija sa sledećim osobinama:*

(i) Postoji niz pozitivnih brojeva α_n koji konvergira ka 0 takav da je $\delta_n(x) = 0$ za $|x| \geq \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $\int_{\mathbb{R}^d} \delta_n(x)dx = 1$ *za* $n \in \mathbb{N}$,

(iii) Za svaki $k \in \mathbb{Z}_+^d$ *postoji pozitivan ceo broj* M_k *takav da je*

$$\alpha_n^k \int_{\mathbb{R}^d} |\delta_n^{(k)}(x)|dx \leq M_k \quad za \quad n \in \mathbb{N}.$$

Propozicija A.3. *Svaki delta niz je fundamentalan.*

Delta niz određen distribucijom $\delta = [\delta_n]$ se naziva d-dimenziona *Dirakova delta distribucija.*

Propozicija A.4. *(i) Ako je* $(\delta_n)_n$ *delta niz i* f *neprekidna funkcija na* Ω, *tada* $f * \delta_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} f$, $n \to \infty$.
(ii) Ako je $(\delta_n)_n$ *delta niz i* f_n *niz neprekidnih funkcija takvih da* $f_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} f$, $n \to \infty$ *tada* $f_n * \delta_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} f$, $n \to \infty$.

Na osnovu Propozicije A.4, za svaku neprekidnu funkciju f u Ω i za svaki delta niz $(\delta_n)_n$ možemo pisati

$$f = [f * \delta_n]. \tag{A.1}$$

Definicija A.4. *Kažemo da niz distribucija* $(f_n)_n$ *konvergira u* Ω *ka distribuciji* f, *i pišemo* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, *akko za svaku distribuciju* f *definisanu na* Ω *i za svaki zatvoren i ograničen interval* K *u* Ω *postoji* $k \in \mathbb{Z}_+^d$, *niz neprekidnih funkcija* $(F_n)_n$ *i neprekidna funkcija* F *u* Ω *tako da*

$$f_n = F_n^{(k)}, \; n > n_0, \; f = F^{(k)} \; u \; K \quad i \quad F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F, \; n \to \infty.$$

Propozicija A.5. *Ako navedena granična vrednost postoji, tada je ona jedinstvena.*

Da bismo ovo pokazali koristićemo sedeće tvrđenje:

Ako je $(f_n)_n$ niz neprekidnih funkcija takav da $f_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} f$, $n \to \infty$ i ako je $f_n^{(m)} = 0$ za $n = 1, 2, ...$, tada je $f^{(m)} = 0$ u Ω.

Dokaz. Ako $f_n \to f$ i $f_n \to g$, $n \to \infty$, tada postoje nizovi neprekidnih funkcija $(F_n)_n$, $(G_n)_n$ i $k, l \in \mathbb{Z}_+^d$ takvi da

$$f_n = F_n^{(k)}, \; f = F^{(k)}; \quad f_n = G_n^{(l)}, \; g = G^{(l)}, \; n > n_0, \; \text{ u } K$$

i

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F, \quad G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} G, \ n \to \infty.$$

Pretpostavimo da je $k = l$, jer u suprotnom možemo k i l zameniti većim brojevima. Kako je

$$(F_n - G_n)^{(k)} = 0 \ \text{ i } \ F_n - G_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F - G, \ n \to \infty,$$

imamo $(F - G)^{(k)} = 0$, odakle dobijamo da je $f = g$ na K. Kako je K proizvoljan podskup od Ω, tada je $f = g$ u Ω. □

Propozicija A.6. *Ako niz distribucija $(f_n)_n$ konvergira u Ω i ako je $(\delta_n)_n$ delta niz, tada niz $(f_n)_n$ konvergira ka distribuciji $[f_n * \delta_n]$ u Ω.*

Dokaz. Pokazaćemo da je niz $(\varphi_n)_n = (f_n * \delta_n)_n$ fundamentalan na Ω i da niz f_n konvergira ka $[\varphi_n]$ kad $n \to \infty$.

Neka je K proizvoljan zatvoren i ograničen interval unutar Ω i neka je $\widetilde{K}$ zatvoren i ograničen interval unutar Ω takav da je $K \subset \widetilde{K}$. Tada postoji $k \in \mathbb{Z}_+^d$, niz neprekidnih funkcija $(F_n)_n$ i neprekidna funkcija F u Ω tako da važi

$$f_n = F_n^{(k)} \ \text{ i } \ F_n \xrightarrow{\mathcal{C}(\widetilde{K})} F, \ n \to \infty.$$

Na osnovu Propozicije A.4 sledi

$$F_n * \delta_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F, \ n \to \infty. \tag{A.2}$$

Kako je $(F_n * \delta_n)^{(k)} = \varphi_n$, to je niz $(\varphi_n)_n$ fundamentalan u Ω. Prema tome, on predstavlja distribuciju f u Ω. Na osnovu (A.2)

$$F = [F_n * \delta_n] \ \text{ u } \ K \ \text{ i } \ F_n * \delta_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F, \ n \to \infty.$$

Diferencirajući k puta prethodni izraz dobijamo

$$[\varphi_n] = F^{(k)} \ \text{ u } \ K \ \text{ i } \ \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} F^{(k)}, \ n \to \infty.$$

Prema tome, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} f$, $n \to \infty$. Kako $(F_n - F_n * \delta_n) \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} 0$, $n \to \infty$, diferencirajući k puta dobijamo $f_n - \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{C}(K)} 0$, $n \to \infty$, odakle sledi $f_n \to f$, $n \to \infty$. Kako je K proizvoljan zatvoren i ograničen interval u Ω, tada $f_n \to f$ u Ω kad $n \to \infty$. □

A.4 Temperirane distribucije

Prvo navodimo definicije i tvrđenja koja se odnose na L^2 prostore.

Definicija A.5. *Neka su* c_α *kompleksni brojevi. Kažemo da red* $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha h_\alpha$ *konvergira bezuslovno u* $L^2(\mathbb{R}^d)$ *ka funkciji* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *i pišemo*

$$f \stackrel{2}{=} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha h_\alpha$$

akko za dato $\varepsilon > 0$ *postoji konačan skup* $\mathcal{N}_0 \subset \mathbb{Z}_+^d$ *takav da važi*

$$\|f - \sum_{\alpha \in \mathcal{N}} c_\alpha h_\alpha\| < \varepsilon,$$

za svaki konačan skup $\mathcal{N}$ *takav da je* $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N} \subset \mathbb{Z}_+^d$.

Teorema A.1. *Red* $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha h_\alpha$ *bezuslovno konvergira u* L^2 *ako i samo ako je* $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |c_\alpha|^2 < \infty$.

Teorema A.2. *Red* $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha h_\alpha$ *bezuslovno konvergira u* L^2 *ka* f *ako i samo ako* $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *i* $c_\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) h_\alpha(x) dx$.

Definišemo k- ti temperirani izvod distribucije f na $\mathbb{R}^d$ sa

$$D^k f = E^{-1}(Ef)^{(k)},\ k \in \mathbb{Z}_+^d,$$

gde je $E = E(x) = e^{x^2/4} = e^{(x_1^2 + \ldots + x_d^2)/4}$. U nastavku koristimo oznaku

$$d^k f = E(E^{-1} f)^{(k)}.$$

Ako je F neprekidna funkcija na $\mathbb{R}^d$, tada definišimo operaciju S^k na sledeći način

$$S^k F = E^{-1} \int_0^x E(t) F(t) dt^k. \tag{A.3}$$

Jasno je

$$D^k S^k F = F,$$

pa je S^k inverzna operacija od D^k. Ona ne može biti definisana za proizvoljne distribucije jer integral (A.3) ne postoji za sve distibucije. Sledeća teorema se koristi u daljim tvrđenjima i navodimo je bez dokaza.

Teorema A.3. *Za date $r, m, s \in \mathbb{Z}_+^d$ postoji $\beta = \beta(r, m, s)$ sa sledećim svojstvom: Ako je G neprekidna funkcija takva da je $|G(x)| < \widehat{x}^r$, gde je $\widehat{x}^r = (1+|x_1|)^{r_1} \cdots (1+|x_d|)^{r_d}$, za sve $x \in \mathbb{R}^d$, tada postoji neprekidna funkcija F takva da je $D^{m+s}F = G^{(m)}$ i $|F(x)| < \beta \widehat{x}^{r-s}$.*

Definicija A.6. *Kažemo da je distribucija f definisana na $\mathbb{R}^d$ temperirana akko postoji funkcija $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ takva da je $D^k F = f$ za neko $k \in \mathbb{Z}_+^d$. Drugim rečima, distribucija je temperirana akko je temperirani izvod nekog reda funkcije iz $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Teorema A.4. *Distribucija f je temperirana ako i samo ako postoje $m, r \in \mathbb{Z}_+^d$ i neprekidna funkcija G tako da važi*

$$G^{(m)} = f \quad i \quad \widehat{x}^{-r} G \quad \textit{je ograničena u} \quad \mathbb{R}^d. \tag{A.4}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je f temperirana distribucija, tj., da je $f = D^k F$ gde je $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Neka je $G(x) = \int_0^x F(t)dt$. Tada, za pozitivnu konstantu M, imamo

$$|G(x)| \le \left| \int_0^x dt \cdot \int_0^x |F(t)|^2 dt \right|^{1/2} \le \sqrt{|x_1 \cdots x_d|} \cdot M \le M \widehat{x}^1.$$

Ako je $k = 0$, tada je $f = G'$ i uslov (A.4) je ispunjen za $m = r = (1, ..., 1)$.

Pretpostavimo da je za neki $k \in \mathbb{Z}_+^d$ uslov (A.4) ispunjen, za pogodno izabrane m i r. Neka $f = D^{k+e_j} F, F \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Tada

$$\begin{aligned} f = D^{e_j} D^k F = D^{e_j} G^{(m)} &= G^{(m+e_j)} + \frac{1}{2} x_j G^{(m)} \\ &= G^{(m+e_j)} + \frac{1}{2} (x_j G)^{(m)} - \frac{1}{2} m_j G^{(m-e_j)}, \end{aligned} \tag{A.5}$$

gdje je m_j $j-$ ta koordinata od m i ako je $m_j = 0$, tada je $m_j G^{(m-e_j)} = 0$. Odatle je

$$f = H^{(m+e_j)},$$

gde je

$$H(x) = G(x) + \frac{1}{2} \int_0^x r_j G(t) dt^{e_j} - \frac{1}{2} m_j \int_0^x G(t) dt^{2e_j}. \tag{A.6}$$

Po induktivnoj pretpostavci je $\widehat{x}^{-r} G$ ograničena, pa je $\widehat{x}^{-r-2e_j} H$ takođe ograničena. Tvrđenje sledi korištenjem indukcije.

Obratno, pretpostavimo da je $f = G^{(m)}$, gde je G neprekidna funkcija takva da je $\widehat{x}^{-r}G$ ograničena. Na osnovu teoreme A.3, postoji neprekidna funkcija F takva da je $D^{m+r+1}F = G^{(m)}$ i $|F(x)| < M\widehat{x}^{-1}$, odakle sledi da je $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Definicija A.7. *Kažemo da temperirana distribucija f pripada klasi T^k akko je oblika $f = D^kF$, $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$.*

A.5 Temperirana konvergencija nizova

Definicija A.8. *Kažemo da niz temperiranih distribucija f_n konvergira temperirano ka distribuciji f, u oznaci $f_n \xrightarrow{t} f$, akko postoje funkcije F_n, $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ takve da je $f_n = D^kF_n$, $f = D^kF$ za neko fiksno $k \in \mathbb{Z}^d_+$ i $F_n \xrightarrow{2} F$, $n \to \infty$, tj.,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F_n - F|^2 dx \to 0 \quad kad \quad n \to \infty.$$

Teorema A.5. *Niz temperiranih distribucija f_n konvergira temperirano ka distribuciji f ako i samo ako postoje $m, r \in \mathbb{Z}^d_+$ i neprekidne funkcije G_n i G takve da važi*

$$f_n = G_n^{(m)}, \quad f = G^{(m)} \tag{A.7}$$

i niz $(\widehat{x}^{-r}G_n)_n$ koji je ograničen i konvergira uniformno na $\mathbb{R}^d$ ka $\widehat{x}^{-r}G$, $n \to \infty$.

Dokaz. Pretpostavimo da f_n temperirano konvergira ka f i neka je $G_n(x) = \int_0^x F_n(t)dt$ i $G(x) = \int_0^x F(t)dt$. Tada je

$$|G_n(x) - G(x)| \le \left| \int_0^x dt \cdot \int_0^x |F_n(t) - F(t)|^2 dt \right|^{1/2} \le \widehat{x}^1 \varepsilon_n,\ \varepsilon_n^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |F_n - F|^2.$$

Odavde sledi da $\widehat{x}^{-1}G_n$ konvergira uniformno na $\mathbb{R}^d$ ka $\widehat{x}^{-r}G$ kad $n \to \infty$. Ako je $k = 0$, tada je $f_n = G'_n$ i $f = G'$. Uslov (A.7) je ispunjen za $m = r = (1, ..., 1)$.

Pretpostavimo da je za neko $k \in \mathbb{Z}^d_+$ uslov (A.7) ispunjen, za pogodno izabrane m i r. Neka je $f_n = D^{k+e_j}F_n$ i $f = D^{k+e_j}F$. Tada iz (A.5) dobijamo

$$f_n = G_n^{(m+e_j)} + \frac{1}{2}(x_jG_n)^{(m)} - \frac{1}{2}m_jG_n^{(m-e_j)}.$$

Neka je H definisano u (A.6). Stavljajući da je

$$H_n(x) = G_n(x) + \frac{1}{2}\int_0^x r_j G_n(t) dt^{e_j} - \frac{1}{2} m_j \int_0^x G_n(t) dt^{2e_j},$$

dobijamo

$$H_n^{(m+e_j)} = f_n \quad \text{i} \quad H^{(m+e_j)} = f.$$

Po induktivnoj pretpostavci $\widehat{x}^{-r} G_n$ konvergira uniformno ka $\widehat{x}^{-r} G$ kad $n \to \infty$ i niz je ograničen za neko $r \in \mathbb{Z}_+^d$, tj., postoji niz $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ tako da $|G_n - G| \le \varepsilon_n \widehat{x}^r$. Odatle je $\widehat{x}^{-r-2e_j} H_n$ takođe ograničen i važi

$$|H_n - H| \le \varepsilon_n M_j \widehat{x}^{r+2e_j},$$

što znači da niz $\widehat{x}^{-r-2e_j} H_n$ konvergira uniformno ka $\widehat{x}^{-r-2e_j} H$ kad $n \to \infty$. Korištenjem indukcije, dobijamo tvrđenje.

Obratno, pretpostavimo da važi (A.7) i da $\widehat{x}^{-r} G_n$ konvergira uniformno ka $\widehat{x}^{-r} G$ kad $n \to \infty$ i da je ograničen. Tada postoje pozitivni brojevi M i ε_n takvi da $\varepsilon_n \to 0$ i

$$|G_n - G| < \varepsilon_n \widehat{x}^r, \quad |G| \le M \widehat{x}^r.$$

Na osnovu Teoreme A.3, postoje neprekidne funkcije H_n, F i $\beta \in \mathbb{Z}_+^d$ tako da je

$$D^{m+r+1} H_n = (G_n - G)^{(m)}, \quad D^{m+r+1} F = G^{(m)},$$
$$|H_n| \le \varepsilon_n \beta \widehat{x}^{-1}, \quad |F| \le M \beta \widehat{x}^{-1}.$$

Odavde vidimo da H_n, $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i da $H_n \xrightarrow{2} 0$, $n \to \infty$. Odatle je funkcija $F_n = H_n + F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $F_n \xrightarrow{2} F$, $n \to \infty$. Jasno je da $D^{m+r+1} F_n = f_n$ i $D^{m+r+1} F = f$, pa niz f_n temperirano konvergira ka f, $n \to \infty$. □

A.6 Unutrašnji proizvod

Definicija A.9. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup i pretpostavimo da je nosač funkcije $\psi \in \mathcal{D}$ u Ω. Tada je*

$$(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi \psi dx$$

definisan za svaku glatku funkciju $\varphi \in \Omega$.

Sa $\mathcal{D}$ označavamo prostor svih glatkih funkcija sa ograničenim nosačem (to je najmanji zatvoren skup ivan koga je ona jednaka nuli). Prisetimo se da je glatka funkcija $\psi \in \mathbb{R}^d$ brzo opadajuća ako je za proizvoljan polinom p i $k \in \mathbb{Z}_+^d$ proizvod $p\psi^{(k)}$ ograničen. Klasu brzo opadajućih glatkih funkcija ćemo označiti sa $\mathcal{S}$. Jasno je da je $\mathcal{S}$ linearan prostor. Ako $\psi \in \mathcal{S}$, tada za svaki polinom p i za svaki $k \in \mathbb{Z}_+^d$, $p\psi^{(k)} \in \mathcal{S}$ i $(p\psi)^{(k)} \in \mathcal{S}$. Jasno je da je $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ i $\mathcal{D}$ je gust u $\mathcal{S}$.

Teorema A.6. *Neka $\psi_n,\ \psi \in \mathcal{S}$ i $k \in \mathbb{Z}_+^d$. Ako $D^k\psi_n \xrightarrow{2} D^k\psi$, $n \to \infty$, tada $d^k\psi_n \xrightarrow{2} d^k\psi$, $n \to \infty$ i obratno.*

Definicija A.10. *Kažemo da niz $\psi_n \in \mathcal{S}$ konvergira u $\mathcal{S}$ ka $\psi \in \mathcal{S}$ i pišemo $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, $n \to \infty$, ako za svaki $k \in \mathbb{Z}_+^d$ važi $D^k\psi_n \xrightarrow{2} D^k\psi$ ($d^k\psi_n \xrightarrow{2} d^k\psi$), $n \to \infty$.*

Neka je φ fiksan elemenat iz $\mathcal{S}$ i neka je f temperirana distribucija. Pokazaćemo da svi nizovi (f, φ_n), gde $\varphi_n \in \mathcal{D}$ i $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, $n \to \infty$, konvergiraju ka istoj graničnoj vrednosti. Tu graničnu vrednost ćemo označiti sa (f, ψ) i nazivamo je *unutrašnji proizvod.*

Kako je f temperirana distribucija, tada postoji funkcija $F \in L^2$ takva da $D^kF = f$. Parcijalnom integracijom dobijamo $(D^kf, \psi) = (-1)^k(f, d^k\psi)$, odakle sledi

$$(f, \varphi_n) = (D^kF, \varphi_n) = (-1)^k(F, d^k\varphi_n). \tag{A.8}$$

Iz Teoreme A.6 dobijamo da $d^k\varphi_n \xrightarrow{2} d^k\psi$, $n \to \infty$. Odavde sledi da $(F, d^k\varphi_n) \to (F, d^k\psi)$, $n \to \infty$, i da granična vrednost (f, φ_n) postoji. Pokažimo da je nezavisan od izbora φ_n. Pretpostavimo da sem niza φ_n postoji niz $\psi_n \in \mathcal{D}$ takav da $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, $n \to \infty$. Tada niz

$$\varphi_1,\ \psi_1,\ \varphi_1,\ \psi_2, ...$$

takođe konvergira u $\mathcal{S}$ ka ψ i niz $(f, \varphi_1), (f, \psi_1), (f, \varphi_2), (f, \psi_2), ...$ je konvergentan, odakle sledi da nizovi (f, φ_n) i (f, ψ_n) konvergiraju ka istoj graničnoj vrednosti. Puštajući $n \to \infty$ u formuli (A.8) dobijamo

$$(D^kF, \psi) = (-1)^k(F, d^k\psi), \quad F \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{A.9}$$

koja će nam koristiti u nastavku.

Teorema A.7. *Ako je f temperirana distribucija, $\psi_n, \psi \in \mathcal{S}$ i $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, $n \to \infty$, tada $(f, \psi_n) \to (f, \psi)$, $n \to \infty$.*

Dokaz. Kako je f temperirana distribucija, tada postoji funkcija $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $k \in \mathbb{Z}_+^d$ tako da je $D^k F = f$. Na osnovu (A.9) sledi

$$|(f, \psi_n) - (f, \psi)| = |(F, d^k(\psi_n - \psi))| \leq \|F\|_2 \|d^k(\psi_n - \psi)\|_2 \to 0,$$

kad $n \to \infty$ i time završavamo dokaz. □

Teorema A.8. *Ako je $f_n \xrightarrow{t} f$ i $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, $n \to \infty$, tada $(f_n, \psi_n) \to (f, \psi)$, $n \to \infty$.*

Dokaz. Kako $f_n \xrightarrow{t} f$, $n \to \infty$, tada postoje funkcije $F_n, F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $k \in \mathbb{Z}_+^d$ tako da je $D^k F_n = f_n$, $D^k F = f$ i $F_n \xrightarrow{2} F$, $n \to \infty$. Odatle je

$$\begin{aligned} |(f_n, \psi_n) - (f, \psi)| &= |(f_n, \psi_n - \psi)| + |(f_n - f, \psi)| \\ &\leq |(F_n, d^k(\psi_n - \psi))| + |(F_n - F, d^k \psi)| \\ &\leq \|F_n\|_2 \|d^k(\psi_n - \psi)\|_2 + \|F_n - F\|_2 \cdot \|d^k \psi\|_2 \to 0, \end{aligned}$$

kad $n \to \infty$ odakle sledi tvrđenje. □

A.7 Temperirani Ermitovi redovi

Pišemo

$$f \stackrel{t}{=} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha,$$

ako i samo ako za svaki niz A_n konačnih podskupova od $\mathbb{Z}_+^d$ takav da $A_n \subset A_{n+1}$ i $\lim_{n\to\infty} A_n = \mathbb{Z}_+^d$, niz suma $f_n = \sum_{\alpha \in A_n} a_\alpha h_\alpha$ temperirano konvergira ka f.

Neka $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Tada je na osnovu Teoreme A.2 $F = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha h_\alpha$, gde je $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |c_\alpha|^2 < \infty$ jer iz L^2 konvergencije sledi t-konvergencija. Iz $d^k \sqrt{\alpha!} h_\alpha = (-1)^k \sqrt{(\alpha+k)!} h_{\alpha+k}$, $D^k(h_\alpha / \sqrt{\alpha!}) = 1/\sqrt{(\alpha-k)!} h_{\alpha-k}$, za $k \leq \alpha$; $D^k h_\alpha = 0$ za $k > \alpha$ $(k, \alpha \in \mathbb{Z}_+^d)$ sledi

$$D^k F = \sum_{\alpha \geq k} \sqrt{\frac{\alpha!}{(\alpha-k)!}} c_\alpha h_{\alpha-k}, \tag{A.10}$$

$$d^k F = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^k \sqrt{\frac{(\alpha+k)!}{\alpha!}} c_\alpha h_{\alpha+k}.$$

Neka je $a_\alpha = \sqrt{((\alpha+k)!/\alpha!)} c_{\alpha+k}$, tada (A.10) postaje

$$D^k F = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha. \tag{A.11}$$

Kako je $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |c_\alpha|^2 < \infty$, to možemo napraviti i procenu za $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |a_\alpha|^2$. Uvedimo oznaku $\widetilde{\alpha} = \max_{j=1,\dots,d}\{1, \alpha_j\}$. Koristići nejednakost

$$\widetilde{\alpha}^k \leq \frac{(\alpha+k)!}{\alpha!} \leq K \widetilde{\alpha}^k, \tag{A.12}$$

koja važi za pogodno izabrano K, dobijamo

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \widetilde{\alpha}^{-k} |a_\alpha|^2 < \infty. \tag{A.13}$$

Obratno, ako važi (A.13) tada red $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha$ t-konvergira ka distribuciji f koja je u klasi T^k. Kako red $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha!}{(\alpha+k)!}} a_\alpha h_{\alpha+k}$, $k \in \mathbb{Z}_+^d$, konvergira u L^2 ka integrabilnoj funkciji G. Kako je $D^k G = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha$, sledi da je $f = D^k G$. Ovim smo dokazali:

Teorema A.9. *Ako za neko $k \in \mathbb{Z}_+^d$ važi* (A.13)*, tada postoji temperirana distribucija f klase T^k takva da*

$$f \stackrel{t}{=} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha. \tag{A.14}$$

Obratno, ako je f temperirana distribucija klase T^k, tada postoje brojevi a_α koji ispunjavaju (A.13) i (A.14). Važi i

$$a_\alpha = (f, h_\alpha) \tag{A.15}$$

otatle sledi da je razvoj date distribucije u Ermitov red jedinstven.

Dokaz. Još nam je preostalo da pokažemo da važi (A.15). Primenimo unutrašnji proizvod na levu i desnu stranu (A.15) sa h_β. Kako je $(h_\alpha, h_\beta) = 0$ za $\alpha \neq \beta$ i $(h_\alpha, h_\beta) = 1$ za $\alpha = \beta$, po Teoremi A.8 dobijamo $(f, h_\alpha) = a_\alpha$ $\square$

Posledica A.1. *Ako za neki* $k \in \mathbb{Z}_+^d$ *i pozitivan broj* M *važi*

$$|a_\alpha| < M\widetilde{\alpha}^k \quad za \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d, \tag{A.16}$$

tada postoji temperirana distribucija f *takva da važi (A.14). Obratno, svaka temperirana distribucija* f *se može razviti u Ermitov red oblika (A.14) tako za važi (A.16) za neki* $k \in \mathbb{Z}_+^d$ *i pozitivan broj* M*. Ovaj razvoj je jedinstven i njegovi koeficijenti dati formulom (A.15) su jedinstveni.*

A.8 Prostori nizova i matrica

U prethodnom poglavlju je pokazano da se svaka temperirana distribucija može na jedinstven način razviti u Ermitov red. Dakle, postoji "1-1"korespodencija između takve distribucije i odgovarajuće matrice (matrice koeficijenata). Na primer, ako diferenciramo neku distribuciju, odgovarajuća matrica je u stvari pomnožena odgovarajućim koeficijentima. Prema tome, možemo neku klasu distribucija posmatramo kao klasu odgovarajućih matrica.

Kete-Ešelon i Kete-ko-Ešelon prostori

Sa $\mathcal{H}$ ćemo označiti skup svih nizova $A = (a_1, a_2, ...)$ čiji elementi a_j pripadaju normiranom prostoru X nad poljem $\mathbb{C}$. Normu elementa $x \in X$ ćemo označiti sa $|x|$. U nastavku, nizove A ćemo nazvati *vektorima*, a elemente a_j njhovim koordinatama. Vektor A je realan (kompleksan) akko su sve njegove koordinate realne (kompleksne). Koristićemo oznake $\lambda A = (\lambda a_1, \lambda a_2, ...)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Ako $B = (b_1, b_2, ...) \in \mathcal{H}$ tada je

$$A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...); \qquad AB = (a_1 b_1, a_2 b_2, ...).$$

Ako su sve koordinate vektora A realne i različite od nule, tada je $A^{-1} = \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ...\right)$. Koristićemo oznake:

$$|A| = \sup_j |a_j| \quad \text{i} \quad \|A\| = |a_1| + |a_2| + ...$$

Jasno $|A| \leq \|A\|$. Važi i

$$|\lambda A| = |\lambda| \cdot |A|, \quad |A + B| \leq |A| + |B|, \quad |AB| \leq |A| \cdot |B|, \quad \|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\|,$$

$$\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, \ \|AB\| \leq |A| \cdot \|B\|.$$

Unutrašnji proizvod (A,B), gde je jedan od faktora kompleksan vektor, je red $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i b_i$. Unutrašnji proizvod postoji ako i samo ako ovaj red konvergira. Primetimo da je $\|AB\| = \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i b_i|$. Prema tome, (A,B) postoji ako je $\|AB\| < \infty$ i važi $|(A,B)| \leq \|AB\|$.

Pretpostavimo da je dat niz vektora $T_1,\ T_2,\ ...$ čije su koordinate pozitivne i koji ima sledeće svojstvo:

$$|T_k T_{k+1}^{-1}| < \infty.$$

Vektor A takav da je $|T_k^{-1} A| < \infty$ za neko k se naziva *temperirani vektor*. Realan vektor A za koji važi da je $\|T_k A\| < \infty$, za $k = 1, 2, ...$ se naziva *brzo opadajući* vektor. U tom slučaju, ako su koordinate vektora A brojevi, skup svih temperiranih vektora se naziva Kete ko-Ešelon prostor i skup svih brzo opadajućih vektora se naziva Kete Ešelon prostor.

Ako je vektor A brzo opadajući i B temperiran, tada unutrašnji proizvod (A,B) postoji. To sledi iz nejednakosti $\|AB\| \leq \|T_k A\| \cdot |T_k^{-1} B|$.

Ako je dat niz $T_1,\ T_2,\ ...$, tada su prostori $\mathcal{T}$ (prostor svih temperiranih vektora) i $\mathfrak{R}$ (prostor realnih brzo opadajućih vektora) jedinstveno određeni. Obrat nije tačan, tj niz $T_1, T_2, ...$ nije jedinstven.

Prostor matrica

U nastavku ćemo vektor $A = (a_1, a_2, ...)$ posmatrati kao matricu. Neka je M neki prebrojiv skup indeksa p i posmatrajmo funkcije $A = \{a_p\}$ definisane na M koje imaju vrednosti u datom normiranom prostoru X nad poljem $\mathbb{C}$. Funkcije u M se nazivaju matricama i skup svih takvih funkcija ćemo označiti sa X. Koristimo oznake:

$$\lambda A = \{\lambda a_p\}, \qquad A+B = \{a_p + b_p\} \ \text{ ako } \ A,\ B \in X.$$

Ako je jedna od matrica kompleksna ili realna, tada $AB = \{a_p b_p\}$. Dalje je,

$$|A| = \sup_{p\in M} |a_p|, \quad \|A\| = \sum_{p\in M} |a_p|.$$

Unutrašnji proizvod (A,B) je $\sum_{p\in M} a_p b_p$ i jedan od faktora je kompleksna ili realna matrica. Jasno je da (A,B) postoji ako je $\|AB\| < \infty$.

Pretpostavimo da je dat niz pozitivnih matrica $T_1,\ T_2,\ ...$ definisan na M i da ima sledeće svojstvo

$$|T_k T_{k+1}^{-1}| < \infty.$$

Svaka matrica A za koju je $|T_k^{-1}A| < \infty$ za neko k se naziva *temperirana matrica.* Svaka realna matrica A takva da je $\|T_k A\| < \infty$ za $k = 1, 2, ...$ je *brzo opadajuća matrica.* Ako je A brzo opadajuća matrica, a B temperirana, tada njihov unutrašnji proizvod uvek postoji.

Definicija A.11. *Kažemo da je $U(R)$ funkcional na prostoru $\mathfrak{R}$ brzo opadajućih matrica ako za svako $R \in \mathfrak{R}$ je vrednost od $U(R)$ broj.*

Funkcional $U(R)$ je linearan ako za sve brojeve λ, μ i $R, S \in \mathfrak{R}$ je

$$U(\lambda R + \mu S) = \lambda U(R) + \mu U(S).$$

Definicija A.12. *Funkcional $U(R)$ je neprekidan ako je $\lim_{n\to\infty} U(R_n) = U(R)$ za svaki niz matrica $R_n \in \mathfrak{R}$ takav da $R_n \xrightarrow{\mathfrak{R}} R$, $n \to \infty$, tj., $\|T_k(R_n - R)\| \to 0$ kad $n \to \infty$, za svaki fiksan $k \in \mathbb{N}$.*

Teorema A.10. *Za svaki neprekidan linearan funkcional U na $\mathfrak{R}$ postoji jedinstvena temperirana matrica A takva da je*

$$U(R) = (A, R) \text{ za sve } R \in \mathfrak{R}. \tag{A.17}$$

Obratno, za svaku temperiranu matricu A izraz (A.17) *predstavlja neprekidan linearan funkcional. Odnos u* (A.17) *između neprekidnog linearnog funkcionala na $\mathfrak{R}$ i temperirane matrice A je "1-1".*

Definicija A.13. *Kažemo da niz temperiranih distribucija $(f_n)_n$ $t-$ konvergira ka temperiranoj distribuciji f ako postoje funkcije F_n, $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i $k \in \mathbb{Z}_+^d$ tako da važi*

$$D^k F_n = f,\ D^k F = f \quad i \quad F_n \xrightarrow{2} F,\ n \to \infty. \tag{A.18}$$

Teorema A.11. *Niz temperiranih distribucija $f_n = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha,n} h_\alpha$ $t-$ konvergira ka ultradistribuciji $f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha$ ako i samo ako*

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \widetilde{\alpha}^{-k} |a_{\alpha,n} - a_\alpha|^2 \to 0,\ n \to \infty. \tag{A.19}$$

Dokaz. Pretpostavimo da $F_n, F \in L^2(\mathbb{R}^d)$ i da važi (A.18). Iz Parsevalove jednakosti je $\int_{\mathbb{R}^d} |F_n - F|^2 dx = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} |c_{\alpha,n} - c_\alpha|^2$, gde su $c_{\alpha,n}$ i c_α Ermitovi koeficijenti od F_n i F respektivno. Kako je

$$a_{\alpha,n} - a_\alpha = \sqrt{\frac{(\alpha+k)!}{\alpha!}}(c_{\alpha+k,n} - c_{\alpha+k}),$$

tada je na osnovu (A.12) $|c_{\alpha+k,n} - c_{\alpha+k}|^2 \leq \widetilde{\alpha}^{-k} |a_{\alpha,n} - a_\alpha|^2 \leq K |c_{\alpha+k,n} - c_{\alpha+k}|^2$, gde K zavisi samo od k. $\square$

Neka je $T_k = \{\widetilde{\alpha}^k\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, $k \in \mathbb{N}$. Označimo sa $\mathcal{T}$ klasu svih kompleksnih matrica $A = \{a_\alpha\}, \alpha \in \mathbb{Z}_+^d$ tako da $|AT_k^{-1}| < \infty$ za neko $k \in \mathbb{N}$. Elementi prostora $\mathcal{T}$ su temperirane matrice.

Definicija A.14. *Kažemo da je $\{a_\alpha\}$ koeficijent matrice temperirane distribucije f ako je $f = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha$.*

Iz Posledice A.1 sledi da je korespodencija između $\mathcal{S}'$ i $\mathcal{T}$ "$1-1$".

A.9 Temperirane distribucije kao funkcionali

Kažemo da je $T(\psi)$ funkcional na $\mathcal{S}$ ako je vrednost od $T(\psi)$ broj, za sve $\psi \in \mathcal{S}$. Funkcional $T(\psi)$ je neprekidan ako je $\lim_{n\to\infty} T(\psi_n) = T(\psi)$ za svaki niz funkcija $\psi_n \in \mathcal{S}$ koji konvergira ka $\psi \in \mathcal{S}$ kad $n \to \infty$. Sa Mf ćemo označiti matricu koja odgovara temperiranoj distribuciji f, a sa mA distribuciju koja odgovara kompleksnoj (ili realnoj) matrici A tako da je $mMA = A$ i $Mmf = f$. Jasno je da je $M(\lambda f + \mu g) = \lambda Mf + \mu Mg$, $m(\lambda A + \mu B) = \lambda mA + \mu mB$. Odatle sledi da ako je $T(\psi)$ linearan funkcional na $\mathcal{S}$, tada je $U(R) = T(mR)$ linearan funkcional na prostoru $\mathfrak{R}$ brzo opadajućih matrica. Obratno, ako je U linearan funkcional na $\mathfrak{R}$, tada je $T(\psi) = U(M\psi)$ linearan funkcional na $\mathcal{S}$. Ova korespodencijaje "1-1"jer iz $U(R) = T(mR)$ sledi $U(M\psi) = T(mM\psi) = T(\psi)$. Štaviše, ako je U neprekidan, tada je T neprekidan i obratno. Pokazali smo da postoji "1-1"korespodencija između neprekidnih linearnih funkcionala na $\mathcal{S}$ i $\mathfrak{R}$ pa se Teorema A.10 može formulisati i na sledeći način:

Teorema A.12. *Za svaki neprekidan linearan funkcional T na $\mathcal{S}$ postoji jedinstvena temperirana distribucija f takva da je*

$$T(\psi) = (f, \psi) \quad \text{za sve} \quad \psi \in \mathcal{S}. \tag{A.20}$$

Obratno, za svaku temperiranu distribuciju f jednakost (A.20) predstavlja neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{S}$. Korespodencija (A.20) između neprekidnih linearnih funkcionala na $\mathcal{S}$ i temperiranih distribucija je "1-1".

Dokaz. Ako je $T(\psi)$ neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{S}$, tada je $T(mR)$ neprekidan linearan funkcional na $\mathfrak{R}$. Po Teoremi A.10 postoji temperirana matrica A takva da je $T(mR) = (A, R)$ za sve $R \in \mathfrak{R}$ i $(A, R) = (mA, mR)$. Neka je $f = mA$. Tada je $T(mR) = (f, mR)$. Sada je svako $\psi \in \mathcal{S}$ oblika mR, za neko $R \in \mathfrak{R}$, pa je $T(\psi) = (f, \psi)$. Distribucija f je jedinstveno određena sa T, jer ako je $(f, \psi) = (g, \psi)$ za svako $\psi \in \mathcal{S}$, tada je $(Mf, M\psi) = (Mg, M\psi)$. Kako je svaka matrica $R \in \mathfrak{R}$ oblika $R = M\psi$, $\psi \in \mathcal{S}$, tada je $(Mf, R) = (Mg, R)$ za sve $R \in \mathfrak{R}$. Odavde sledi da je $Mf = Mg$, pa je $f = g$. $\square$

A.10 Distribucije kao funkcionali

L. Švarc je definisao distribucije na nekom otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kao funkcionale na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ glatkih funkcija čiji su nosači ograničeni i sadržani u Ω. Kažemo da je $T(\varphi)$ funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$ ako je vrednost $T(\varphi)$ broj za sve $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Funkcional T je:

- linearan ako je $T(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T(\varphi) + \mu T(\psi)$ za sve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

- neprekidan ako je $\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$ za svaki niz φ_n koji konvergira ka $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ kad $n \to \infty$, tj. za svaki niz funkcija $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K \subset \Omega$, za koji $\varphi_n^{(k)} \xrightarrow{\mathcal{C}(\Omega)} \varphi^{(k)}$, $n \to \infty$.

Sledeću teoremu navodimo bez dokaza.

Teorema A.13. *Ako je f distribucija na Ω i ako je $(f, \varphi) = 0$ za sve $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tada je $f = 0$ na Ω.*

Sledeća teorema nam daje vezu između klasičnog i sekvencijalnog pristupa distribucijama.

Teorema A.14. *Za svaki neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$ postoji jedinstvena distribucija u Ω takva da je*

$$T(\varphi) = (f, \varphi) \quad \textit{za sve} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{A.21}$$

Obratno, za svaku distribuciju f u Ω, izraz (A.21) *predstavlja neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$. Korepodencija između neprekidnih linearnih funkcionala u $\mathcal{D}(\Omega)$ i distribucija u Ω je "1-1".*

Dokaz. Neka je K proizvoljan ograničen otvoren skup u Ω i neka je κ funkcija sečenja na $\mathbb{R}^d$ takva da je $\kappa \equiv 1$ u K i $\kappa \equiv 0$ izvan K_1, gde je K_1 ograničen i zatvoren skup u Ω takav da je $K \subset K_1$. Ako je T neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{D}(\Omega)$, tada je

$$T_K(\psi) = T(\kappa\psi)$$

neprekidan linearan funkcional na $\mathcal{S}$ takav da je $T_K(\varphi) = T(\varphi)$ za sve $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$. Na osnovu Teoreme A.12 postoji temperirana distribucija f_K takva da je $T_K(\psi) = (f_K, \psi)$ za $\psi \in \mathcal{S}$. Prema tome, $T(\varphi) = (f_K, \varphi)$ za sve $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.

Ako pretpostavimo da su $\widetilde{K}$ i $\widetilde{\widetilde{K}}$ ograničeni otvoreni skupovi u Ω, tada postoje temperirane distribucije $f_{\widetilde{K}}$ i $f_{\widetilde{\widetilde{K}}}$ sa nosačima u $\widetilde{K}$ i $\widetilde{\widetilde{K}}$ respektivno, tako da je $T(\varphi) = (f_{\widetilde{K}}, \varphi)$ i $T(\varphi) = (f_{\widetilde{\widetilde{K}}}, \varphi)$. Odatle je $(f_{\widetilde{K}} - f_{\widetilde{\widetilde{K}}}, \varphi) = 0$ za sve $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \widetilde{K} \cap \widetilde{\widetilde{K}}$, pa iz Teoreme A.13 sledi da je $f_{\widetilde{K}} = f_{\widetilde{\widetilde{K}}}$ na $\widetilde{K} \cap \widetilde{\widetilde{K}}$.

Dakle, pokazali smo da postoji familija (temperiranih) distribucija f_K koja odgovara familiji $\mathscr{F}$ ograničenih otvorenih skupova u Ω tako da je $f_{\widetilde{K}} = f_{\widetilde{\widetilde{K}}}$ na $\widetilde{K} \cap \widetilde{\widetilde{K}}$. Tada postoji distribucija f u Ω takva da je $f = f_K$ za sve $K \in \mathscr{F}$. Ovim smo dokazali da je $T(\varphi) = (f_K, \varphi) = (f, \varphi)$ jer je $f = f_K$ na K. Iz Teoreme A.13 sledi jedinstvenost distribucije f.
Obratan deo tvrđenja se lako proverava. $\square$

Bibliografija

[1] P. Antosik, A. Mikusiński, R. Sikorski, *Theory of distributions the sequential aproach*, Elsevies Scientific Publishing Company, Warshzava, 1973.

[2] R. Beals, *Advanced mathematical analysis. Periodic functions and distributions, complex analysis, Laplace transform and applications.* Graduate Texts in Mathematics, No. 12, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[3] J. Bonet and P. Domaski, *Köthe coechelon spaces as locally convex algebras*, Studia Math. 199 (2010), 241-265.

[4] R. W. Braun, R. Meise and B. A. Taylor, *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Results Math. 17 (1990), 206-237.

[5] R. Carmichael, A. Kamiński, S. Pilipović, *Boundary Values and Convolution in Ultradistribution Spaces*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.

[6] D. Dolićanin-Đekić, S. Maksimović, P. Sokoloski, *Wave Fronts of Ultradistributions Via Fourier Series Coefficients*, Bulletin mathématique de la société des mathématiciens de la République de Macédoine, (2) 39 (2015), 53-59.

[7] V. I. Gorbačuk, M. L. Gorbačuk, *Trigonometric series and generalized functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (4) 257 (1981), 799-804, (Russian).

[8] V. I. Gorbačuk, *On Fourier series of periodic ultradistributions*,Ukranian Math. J. (2) 34 (1982), 144-150. (Russian).

[9] V. I. Gorbačuk, M. L. Gorbačuk, *Boundary value problems for operator differential equations*, (Mathematics and its Applications) -Kluwer, 1991.

[10] T. Gramchev, S. Pilipović, L. Rodino, *Classes of degenerate elliptic operators in Gelfand-Shilov spaces*, New developments in pseudo-differential operators, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser, Basel, 189 (2009), 15-31.

[11] T. Gramchev, S. Pilipović, L. Rodino, *Global regularity and stability in S-spaces for classes of degenerate Shubin operators*, Pseudo-differential operators: complex analysis and partial differential equations, Oper. Theory Adv. Appl., Birkhäuser Verlag, Basel, 205 (2010), 81-90.

[12] T. Gramchev, A. Lecke, S. Pilipović, L. Rodino, *Gelfand-Shilov type space through Hermite expansions*, Pseudo-Differential Operators and Generalized Functions, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 245 (2015), 95-105.

[13] G. Grubb, *Distributions and operators* Vol. 252 Springer, 2009.

[14] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer-Verlag, 1983, ISBN 978-3-540-00662-6.

[15] L. Hörmander, *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, Springer-Verlag, 1997.

[16] K. Johansson, S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Gabor pairs, and a discrete approach to wave-front sets*, Monatsh. Math. 166 (2012), 181-199.

[17] K. Johansson, S. Pilipović, N. Teofanov, J. Toft, *Micro-local analysis in some spaces of ultradistributions*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) (106) 92 (2012), 1-24.

[18] A. Kamiński, M. Oberguggenberger, S. Pilipović (editors), *Linear and Non- Linear Theory of Generalized Functions and its Applications*, Banach Center Publications 88, 2010.

[19] A. Kamiński, D. Perišić, S. Pilipović, *On various integral transformations of tempered ultradistributions*, Demonstratio Math. 33 (2000), 641-655.

[20] R. P. Kanwal, *Generalized functions. Theory and applications*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[21] G. Köthe, *Topological vector spaces II*, Vol. II, Springer-verlag, New York Inc., 1979.

[22] H. Komatsu, *Ultradistributions, I: Structure theorems and a characterization*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 20 (1973), 25-105.

[23] H. Komatsu, *Ultradistributions, II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 24 (1977), 607 - 628.

[24] H. Komatsu, *Ultradistributions, III*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA 29 (1982), 653 - 717.

[25] H. Komatsu, *Microlocal Analysis in Gevrey Classes and in Complex Domains*, Lecture Notes in Math. 1726, Springer, Berlin (1989) , 426-493.

[26] H. Komatsu, *An introduction to the theory of generalized functions*, Lecture Notes, Tokyo, 1999.

[27] D. Kovačević, S. Pilipović, *Structural properties of the space of tempered ultradistributions*, Proc. Conf. on Complex Analysis and Generalized Functions, Varna 1991, Publ. House of the Bulgar. Acad. Sci., Sofia, (1993), 169-184.

[28] M. Langenbruch, *Hermite functions and weighted spaces of generalized functions*, Manuscripta Math. 119 (2006), 269-285.

[29] S. Maksimović, S. Pilipović, P. Sokoloski, *Sequential approach to ultradistribution spaces*, to appear.

[30] S. Maksimović, P. Sokoloski, *Sequential approach to periodic ultradistributions*, to appear in Proceedings of the fifth Mathematical Conference of the Republic of Srpska.

[31] S. Maksimović, S. Pilipović, P. Sokoloski and J. Vindas, *Wave Fronts Via Fourier Series Coefficients*, Publ. Inst. Math. Beograd, (111) 97 (2015), 1-10.

[32] H. J. Petzsche and D. Vogt, *Almost analytic extension of ultradifferentiable functions and the boundary values of holomorphic functions*, Math. Ann. 267 (1984), 17-35.

[33] S. Pilipović, *Tempered ultradistributions*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 2-B (1988), 235-251.

[34] S. Pilipović, *Microlocal analysis of ultradistributions*, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 105-113.

[35] S. Pilipović, *Characterization of bounded sets in spaces of ultradistributions*, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), 1191-1206.

[36] S. Pilipović, *Some operations in* $\sum_\alpha$, $\alpha > 1/2$, Radovi Mat. 5 (1989), 53-62.

[37] S. Pilipović, *Structural theorems for periodic ultradistributions*, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 261-266.

[38] S. Pilipović, *On the convolution in the space of Beurling ultradistributions*, Comm. Math. Univ. St. Pauli 40 (1991), 15-27.

[39] S. Pilipović, B. Prangoski, *Anti-Wick and Weyl quantization on ultradistribution spaces*, J. Math. Pures App, (9) 103 (2015), 472-503.

[40] S. Pilipović, B. Prangoski, J. Vindas, *On Quasianalytic Classes of Gelfand-Shilov Type. Parametrix and Convolution*, preprint (http://arxiv.org/pdf/1507.08331.pdf).

[41] S. Pilipović, B. Stanković, *Prostori Distribucija*, Novi Sad, 2000.

[42] L. Rodino, *Linear Partial Differential Operators in Gevrey Spaces*, World Scientic, 1993.

[43] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[44] A. Száz, *Periodic generalized functions*, Publ. Math. (Debrecen) 25 (1978), 227-235.

[45] F. Tréves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic press, New York-London, 1967.

[46] V. S. Vladimirov, *Generalized Functions in Mathematical Physics*, Marcel Dekker, New York, 1971.

[47] D. Vogt, *Sequence space representations of spaces of test functions and distributions. Functional analysis, holomorphy, and approximation theory* (Rio de Janeiro, 1979), pp. 405-443, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 83, Dekker, New York, 1983.

[48] A. H. Zemanian , *Geneneralized integral transforms*, Interscience, New York, 1968.

Kratka Biografija

Snježana Maksimović

Adresa:	,, Braće Jugovića 59", Banja Luka, Republika Srpska, BiH
Broj telefona:	+387 65 585 744
e-mail:	snjezana.maksimovic@etfbl.net
Datum i mesto rođenja:	24.10.1986., Banja Luka, Republika Srpska, BiH
Državljanstvo:	Republika Srpska, BiH

Obrazovanje: 2011

Master matematičar,

sa prosekom 9.75,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Novom Sadu,
Master rad:
,,*Laplasova transformacija*"

2009

Diplomirani matematičar i informatičar,
sa prosekom 9.12,
Prirodno-matematički fakultet,
Univerzitet u Banjoj Luci

Radno iskustvo: 2014-danas

viši asistent,
Elektrotehnički fakultet,
Univerzitet u Banjoj Luci

2010-2014

asistent,
Elektrotehnički fakultet,
Univerzitet u Banjoj Luci

Bibliografija-radovi:

D. Dolićanin-Đekić, S. Maksimović, P. Sokoloski, *Wave Fronts of Ultradistributions Via Fourier Series Coefficients*, Bulletin mathématique de la société des mathématiciens de la République de Macédoine, (2) 39 (2015), 53-59.

S. Maksimović, S. Pilipović and P. Sokoloski, *Sequental approach to ultradistribution spaces*, to appear.

S. Maksimović, P. Sokoloski, *Sequential approach to periodic ultradistributions*, to appear in Proceedings of the fifth Mathematical Conference of the Republic of Srpska

S. Maksimović, S. Pilipović, P. Sokoloski and J. Vindas, *Wave Fronts Via Fourier Series Coefficients*, Publ. Inst. Math. Beograd, 97 (111) (2015), 1-10.

Novi Pazar, 2016 Snježana Maksimović

Identifikaciona strana doktorske disertacije

I. Autor

Ime i prezime: Snježana Maksimović

Datum i mesto rođenja: 24.10.1986. Banja Luka, Republika Srpska, BiH

Sadašnje zaposlenje: asistent na Elektrotehničkom fakultetu u Banjaluci

II. Doktorska disertacija

Naslov: Sekvencijalni pristup teoriji ultradistribucija i talasni front

Broj stranica: 113

Broj slika: 0

Broj bibliografskih podataka: 48

Ustanova i mesto gde je rad izrađen: Državni Univerzitet u Novom Pazaru, Departman za matematičke nauke, Vuka Karadžića bb

Naučna oblast (UDK): Matematika (Funkcionalna analiza)

III. Ocena i odbrana

Datum prijave teme:

Broj odluke i datum prihvatanja doktorske disertacije:

Komisija za ocenu podobnosti teme i kandidata:

Predsednik:

Član:

Član:

Komisija za ocenu doktorske disertacije:

Predsednik:

Član:

Član:

Datum odbrane doktorske disertacije: