

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета одржаној 23.1.2015. у Београду одређени смо у Комисију за преглед и оцену рукописа

Гребнерове базе за многострукости застава и примене

који је предат као докторска дисертација Марка Радовановића. Кандидат је предао текст, комисија је исти прегледала и подноси Већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографија кандидата

Марко Радовановић уписао је Математички факултет у Београду, смер Теоријска математика и примене, 2004. године. Дипломирао је 2008. године, са просечном оценом 10. Исте године уписао је Мастер студије на Математичком факултету у Београду, смер Теоријска математика и примене. Мастер рад под насловом „О тестовима прималности” одбранио је 2009. године, под менторством проф. др Жарка Мијајловића. Докторске студије на Математичком факултету у Београду, смер Математика, уписао је 2009. године. Положио је испите предвиђене планом и програмом докторских студија с просечном оценом 10.

2. Списак научних радова кандидата

Повезани са докторском дисертацијом

1. Z.Z. Petrović, M. Radovanović, *On the quantum cohomology of Grassmannians and quantum Kostka numbers*, на рецензији, 13 стр.
2. Z.Z. Petrović, B.I. Prvulović, M. Radovanović, *Multiplication in the cohomology of Grassmannians via Gröbner bases*, Journal of Algebra, прихваћен за објављивање, 21 стр., doi:10.1016/j.jalgebra.2015.04.031, ISSN: 0021-8693, IF 2013: 0.604, M22.
3. M. Radovanović, *On the \mathbb{Z}_2 -cohomology cup-length of some real flag manifolds*, Filomat, прихваћен за објављивање, 14 стр., ISSN: 0354-5180, IF 2013: 0.753, M21. (<http://journal.pmf.ni.ac.rs/filomat/filomat/article/view/1288>)
4. M. Radovanović, *Gröbner bases for some real flag manifolds and applications*, Mathematica Slovaca, прихваћен за објављивање, 21 стр., ISSN: 0139-9918, IF 2013: 0.451, M23.

Остали

5. Z. Pucanović, M. Radovanović, A. Erić, *On the genus of the intersection graph of ideals of a commutative ring*, Journal of Algebra and Its Applications, 13:5 (2014), 1–20, ISSN: 0219-4988, IF 2013: 0.373, M23.
6. P. Aboulker, M. Radovanović, N. Trotignon, T. Trunck, K. Vušković, *Linear balanceable and subcubic balanceable graphs*, Journal of Graph Theory, 75:2 (2014), 150–166, ISSN: 0364-9024, IF 2013: 0.671, M22.
7. M. Radovanović, K. Vušković, *A class of three-colorable triangle-free graphs*, Journal of Graph Theory, 72:4 (2013), 430–439, ISSN: 0364-9024, IF 2013: 0.671, M22.
8. P. Aboulker, M. Radovanović, N. Trotignon, K. Vušković, *Graphs that do not contain a cycle with a node that has at least two neighbors on it*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 26:4 (2012), 1510–1531, ISSN: 0895-4801, IF 2012: 0.662, M23.

3. Предмет докторске дисертације

Централни објекат који се изучава у овој докторској дисертацији је кохомолошка алгебра (са целим и модуло 2 коефицијентима) неких типова многострукости застава. По Бореловом опису, ова алгебра је (у општем случају) дата као количник полиномијалне алгебре и одређеног идеала I . Самим тим, да би се разумела кохомолошка алгебра многострукости застава потребно је што боље описати идеал I . Инспирисани резултатима Монкса, Фукаје, Првуловића и Петровића, у овом раду наведеном проблему приступа се конструкцијом Гребнелове базе за I .

Кохомолошка алгебра дате многострукости може се користити за испитивање многих њених тополошких особина. У овој докторској дисертацији разматране су реалне многострукости застава, чија је \mathbb{Z}_2 -кохомологија, по Бореловом опису, дата преко Штифел-Витнијевих класа. Један од значајних проблема, а о коме се и данас мало зна, је утврђивање постојања утапања и имерзија дате многострукости застава у еуклидски простор димензије d . Познато је да су опструкције за постојање имерзија и утапања дате многострукости у неки еуклидски простор најчешће неке карактеристичне класе. У случају који се разматра, овај проблем може се свести на испитивање да ли је одређена кохомолошка класа, која је задата преко Штифел-Витнијевих класа, нула или не, што се, имајући у виду Борелов опис, своди на проблем припадности идеалу. Друго питање које се разматра је одређивање кохомолошке дужине реалних многострукости застава. Познато је да кохомолошка дужина даје ограничења за Листерник-Шнирелманову категорију, која је важна тополошка инваријанта и коју је (у општем случају) веома тешко одредити.

Поред Бореловог, постоје и други описи кохомологије многострукости застава. Међу њима, од посебног значаја је опис целобројне кохомологије комплексних Грасманових многострукости преко Шубертових класа (Грасманове многострукости представљају специјалан случај многострукости застава). Са једне

стране, овај опис блиско је повезан са симетричним функцијама, па се у њему „виде” комбинаторни објекти као што су Косткини и Литлвуд-Ричардсонови бројеви, док, са друге стране, он (природно) броји пресеке одређених геометријских објеката. Природно је размотрити повезивање Бореловог описа кохомологије комплексних Грасманових многострукости са описом задатим коришћењем Шубертових класа. На овај начин добијене су значајне информације о комбинаторним објектима који описују ову кохомологију, пре свега о Косткиним бројевима.

4. Приказ дисертације

Ова дисертација се састоји од предговора на 4 стране, текста од 132 стране подељеног у 6 глава и списка литературе од 68 библиографских јединица.

Прве три главе ове докторске дисертације су уводног карактера – у првој (стр. 5-29) је дат преглед резултата теорије Гребнерових база који ће бити од значаја у наставку текста, друга (стр. 30-38) је посвећена Бореловом опису кохомологије многострукости застава, док је у трећој (стр. 39-57) дат преглед (неопходних) резултата теорије симетричних функција, као и описи \mathbb{Z} -кохомологије и мале квантне кохомологије комплексних Грасманових многострукости преко Шубертових класа.

Четврта, пета и шеста глава већим делом посвећене су оригиналним резултатима кандидата.

У четвртој глави (стр. 58-78) конструисане су Гребнерове базе за идеале који по Бореловом опису одређују \mathbb{Z} -кохомологију комплексних Грасманових многострукости и \mathbb{Z}_2 -кохомологију реалних Грасманових многострукости, чиме је потврђена претпоставка 113 из докторске дисертације Б. Првуловића. Поред тога, конструисане су Гребнерове базе за идеале који по опису Сиберта и Тиана дају малу квантну кохомологију Грасманових многострукости.

Пета глава (стр. 79-95) посвећена је Косткиним бројевима и састоји се из два дела. Први део је уводног карактера – у њему је дат преглед метода за израчунавање Косткиних бројева, као и неки (значајни) отворени проблеми везани за њих. У другом делу дати су оригинални резултати. Прво, успостављањем везе између описа \mathbb{Z} -кохомологије комплексних Грасманових многострукости датог Шубертовим класама и Гребнерове базе за идеале који одређују ову кохомологију, добијене су рекурентне једначине којима се могу одредити (сви) Косткини бројеви. У наставку, применом сличног метода на малу квантну кохомологију, која је деформација класичне, ове једначине су побољшане.

Шеста глава (стр. 96-136) посвећена је реалним многострукостима застава облика $F(1, \dots, 1, 2, \dots, 2, k, n)$. У првом делу главе конструисане су Гребнерове базе за идеале који одређују њихову кохомологију. Ове базе су искоришћене за добијање резултата везаних за имерзије и утапања ових многострукости у

еуклидске просторе, који проширују раније резултате Шимкуса, Првуловића и Петровића. Базе су искоришћене и за одређивање кохомолошке дужине неких многострукости овог типа, чиме се проширују ранији резултати Хилера, Корбаша и Леринца.

5. Закључак

Резултати до којих је Марко Радовановић дошао у свом раду и које је представио у поднетом тексту обухватају неколико значајних области савремене математике: комутативну алгебру, алгебарску комбинаторику и алгебарску топологију, као и неке примене у диференцијалној топологији. Одређене су Гребнерове базе за све Грасманове многострукости, које представљају најзначајнији пример многострукости застава, чиме је тај проблем у потпуности решен и његово решење омогућава даље примене. Неке од њих су већ дате у тексту, попут примене у налажењу рекурентних формула за Косткине бројеве. Посебно је занимљиво како је овде искоришћен резултат за Гребнерове базе за квантну кохомологију, који омогућава боље рекурентне везе за класичне Косткине бројеве, а ова је тематика изузетно присутна у новијим истраживањима. Осим за Грасманове многострукости и за друге случајеве многострукости застава добијене су Гребнерове базе и дате примене, које проширују раније познате резултате.

Сама теза је одлично написана, са правим односом познатих и нових резултата и јасно истакнутим научним доприносом кандидата.

Због свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати приложени текст као докторску дисертацију Марка Радовановића и одреди комисију за њену јавну одбрану.

Београд, 15. мај 2015.

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

проф. др Зоран Петровић, ванредни професор (ментор)
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Александар Липковски, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Горан Банковић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Бранко Малешевић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Електротехнички факултет

др Бранислав Првуловић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Mathematica Slovaca

Mathematical Institute
Slovak Academy of Sciences
Štefánikova 49
SK-814 73 Bratislava
Slovakia

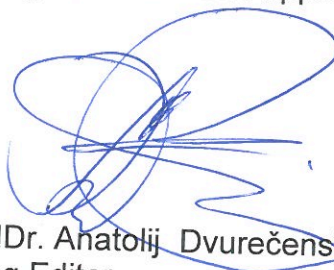
Professor
Marko Radovanović
University of Belgrade
Faculty of Mathematics
Studentski trg 16
Belgrade
Serbia

Bratislava, May 06, 2015.

Dear Professor Radovanović,

The Editorial Board of *Mathematica Slovaca* has accepted your paper
Marko Radovanović: Gröbner bases for some flag manifolds and applications.

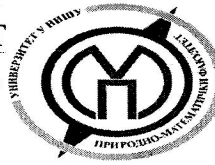
Sincerely yours,



Prof. RNDr. Anatolij Dvurečenskij, DrSc.
Managing Editor
Mathematica Slovaca

УНИВЕРЗИТЕТ У НИШУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

18000 Ниш • Вишеградска 33 • Пош. фах 224
Телефон - централа (018) 533-015; 226-310
Деканат (018) 224-492; 224-472
Факс (018) 533-014
E-mail pmfinfo@pmf.ni.ac.rs
www.pmf.ni.ac.rs



UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCES AND MATHEMATICS

18000 Niš • Višegradска 33 • P.O. Box 224
Phone +381 18 533-015; 226-310
Dean +381 18 224-492; 224-472
Fax +381 18 533-014
E-mail pmfinfo@pmf.ni.ac.rs
www.pmf.ni.ac.rs

Dear Professor Marko Radovanović,

I confirm that your paper

Marko Radovanović: On the Z_2 – cohomolgy cup-length of some flag manifolds

is accepted for publication in our mathematics journal **Filomat**.

Sincerely,

Professor Dragan S. Djordjević,
Editor