

Univerzitet u Nišu  
Mašinski fakultet

**Oscilacije i stabilnost sistema elastično povezanih  
Timošenkovih greda**

-Doktorska disertacija-

Vladimir Stojanović, dipl. maš. inž.

mentor: dr Predrag Kozić, red. prof.

Niš, 2013. god.

## **Zahvalnost autora**

*Svoju iskrenu i neizmernu zahvalnost na savetima, podršci, svestranoj pomoći i dopustima naučne slobode dugujem mentoru rada, dr Predragu Koziću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta u Nišu.*

*Zahvaljujem se dr Pedru Ribeiru, vanrednom profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Portu i dr Stanislavu Stojkovom, naučnom saradniku Instituta Bugarske akademije nauka, na nesebičnoj pomoći u radu iz oblasti geometrijski nelinearnih oscilacija tokom usavršavanja na Mašinskom fakultetu Engenharia Univerziteta u Portu.*

*Dr Ratku Pavloviću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta u Nišu, dugujem veliku zahvalnost na korisnim savetima kako pri uvođenju u naučno-istraživački rad tako i na pružanju naučno-stručne pomoći tokom čitavih doktorskih studija.*

*Dr Zoranu Goluboviću, redovnom profesoru Mašinskog fakulteta u Beogradu i dr Goranu Janevskom, docentu Mašinskog fakulteta u Nišu, zahvaljujem se što su radnu verziju teze pročitali i korisnim savetima mi pomogli da tekst bude korektniji.*

*Najdublju zahvalnost dugujem svojim roditeljima i svojoj porodici koja me je sa puno razumevanja, emotivnog odricanja i moralnog ulaganja, podržavala tokom izrade doktorske disertacije.*

*U Nišu, septembra 2013.*

*Vladimir Stojanović*

*Roditeljima, mojoj Leni i Sonji*

## Sadržaj

<b>1 Uvodna razmatranja</b> .....	1
1.1 Uvod .....	1
1.2 Oscilacije nosača Euler-ovog, Rayleigh-jevog, Timoshenko-vog i Reddy-Bickford-ovog tipa .....	5
<b>2 Slobodne oscilacije i stabilnost sistema dva elastično povezana nosača</b> .....	17
2.1 Slobodne oscilacije dva elastično povezana nosača Rayleigh-jevog tipa.....	17
2.2 Slobodne oscilacije dva elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa .....	23
2.3 Slobodne oscilacije dva elastično povezana nosača Reddy-Bickford-ovog tipa .....	30
2.4 Kritična sila izvijanja dva elastično povezana nosača i numerička analiza .....	40
<b>3 Uticaji pritisnih aksijalnih sila, inercije rotacije i poprečnog smicanja na prinudne oscilacije sistema dva elastično povezana nosača.</b> .....	52
3.1 Prinudne oscilacije dva elastično povezana nosača Rayleigh-jevog tipa.....	52
3.2 Prinudne oscilacije dva elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa .....	56
3.3 Prinudne oscilacije dva elastično povezana nosača Reddy-Bickford-ovog tipa .....	62
3.4 Partikularna rešenja specijalnih slučajeva prinudnih oscilacija sistema dva elastično povezana nosača.....	68
3.4.1 Partikularna rešenja prinudnih oscilacija sistema dva elastično povezana nosača Rayleigh-jevog tipa .....	70
3.4.2 Partikularna rešenja prinudnih oscilacija sistema dva elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa .....	71
3.4.3 Partikularna rešenja prinudnih oscilacija sistema dva elastično povezana nosača Reddy-Bickford-ovog tipa .....	74
3.5 Numerička analiza .....	77
<b>4 Uticaji poprečnog smicanja na statičku stabilnost sistema elastično povezanih nosača na elastičnoj podlozi</b> .....	82
4.1 Kritična sila izvijanja tri elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa na elastičnoj podlozi .....	82
4.2 Kritična sila izvijanja dva elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa na elastičnoj podlozi .....	88
4.3 Kritična sila izvijanja nosača Timoshenko-vog tipa na elastičnoj podlozi .....	89
4.4 Numerička analiza.....	89
<b>5 Uticaji inercije rotacije i poprečnog smicanja na oscilacije i stabilnost sistema elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa na elastičnoj podlozi</b> .....	92
5.1 Slobodne oscilacije sistema elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa .....	92

5.2 Numerička analiza u frekventnom domenu sistema elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa .....	101
5.3 Numerička analiza u statičkom domenu stabilnosti sistema elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa .....	104
<b>6 Uticaji inercije rotacije i poprečnog smicanja na oscilacije i stabilnost sistema elastično povezanih nosača Reddy-Bickford-ovog tipa na elastičnoj podlozi .....</b>	<b>106</b>
6.1 Slobodne oscilacije sistema elastično povezanih nosača Reddy-Bickford-ovog tipa .....	106
6.2 Numerička analiza i rezultati u statičkom i frekventnom domenu sistema elastično povezanih nosača Reddy-Bickford-ovog tipa .....	113
<b>7 Geometrijski nelinearne oscilacije oštećenih nosača Timoshenko-vog tipa primenom nove <math>p</math> - verzije metode konačnih elemenata .....</b>	<b>123</b>
7.1 Razvoj nove $p$ – verzije metode konačnih elemenata.....	123
7.2 Osnovni oblici komponentnih longitudinalnih i transverzalnih oscilacija i osnovni oblici komponentnih oscilacija poprečnih preseka nosača .....	132
7.3 Geometrijski nelinearne oscilacije oštećenog nosača Timoshenko-vog tipa u vremenskom domenu .....	139
7.4 Slobodne geometrijski nelinearne oscilacije oštećenog nosača Timoshenko-vog tipa u frekventnom domenu .....	144
<b>8 Zaključak .....</b>	<b>150</b>
<b>Literatura .....</b>	<b>156</b>

# 1

## Uvodna razmatranja

### 1.1 Uvod

Veliki broj mehaničkih sistema su složene strukture sastavljene od dva ili više osnovnih mehaničkih sistema čije je dinamičko ponašanje uslovljeno njihovom međusobnom interakcijom. Sistemi povezani elastičnim slojem čine jednu grupu ovakvih mehaničkih struktura koje se veoma često sreću u mašinskoj i građevinskoj industriji. Mehanički sistemi nastali međusobnim elastičnim povezivanjem zbog prirode dinamičke interakcije uslovljene elastičnim vezama, imaju složeno oscilovanje i veći broj prirodnih frekvencija. Kako broj povezanih osnovnih elemenata određuje i broj osnovnih prirodnih frekvencija, time su ovakvi mehanički sistemi izloženi većoj mogućnosti za nastanak rezonancije koja može prouzrokovati lom ili oštećenje. U cilju primene teorijskog istraživanja u inženjerskoj praksi, najpre je razvijen veliki broj linearnih dinamičkih modela koji opisuju kretanje sistema. Ovakvi modeli su značajni jer daju prvu aproksimaciju rešenja i uopšten uvid u dinamičko ponašanje sistema pri malim pomeranjima. Ukoliko tehnička praksa zahteva detaljnije ispitivanje ponašanja sistema, ovakvi dinamički modeli pružaju dobru osnovu za nastavak istraživanja sa uticajima nelinearnosti.

Na delovima mašinskih konstrukcija koje obavljaju veliki broj cikličnih operacija, a izloženi su opterećenjima, vrlo često nastaju oštećenja. Po nastanku oštećenja, dinamičko ponašanje sistema se menja i treba ga poznavati kako bi se sprečila rezonancija i posledice koje ona može prouzrokovati. Ovakva dinamička ponašanja razlikuju se kod struktura bez oštećenja i određivanje rezonancije je od velike važnosti.

U prikazanom istraživanju, uticaji inercije rotacije i poprečnog smicanja uzeti su u obzir pri formiranju matematičkih modela kako elastično povezanih nosača, tako i oštećenih nosača. Oscilacije i stabilnost ovakvih sistema su višedecenijski predmet naučnog, akademskog i praktičnog proučavanja mnogih autora. Interesovanje naučne javnosti za problem oscilacija i stabilnosti sistema sa oštećenjem, povećava se iz razloga sprečavanja lomova u realnim uslovima tehničke prakse. To je dovelo do razvoja analitičkih i numeričkih metoda koje se koriste pri analizi oscilacija kako linearnih, tako i nelinearnih mehaničkih sistema.

Problem oscilacija nosača međusobno povezanih Winkler-ovim elastičnim slojem bili su predmet interesovanja velike grupe naučnika. Problem oscilovanja dva nosača elastično povezana Winkler-ovim slojem pojavio se sa ciljem utvrđivanja uslova za ponašanje sistema kao dinamičkog absorbera u tehničkoj praksi. Matematički model dali su Seelig i Hoppmann [1]. U svom radu su istraživali problem impulsivnog dejstva opterećenja na jedan od nosača i dali sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina koji opisuje njegovo oscilovanje. Dobijenim teorijskim i eksperimentalnim rezultatima su potvrdili dovoljno dobru aproksimaciju analitičkog rešenja dobijenog za tanke nosače pri malim transverzalnima pomeranjima korišćenjem Euler-Bernoulli-jeve teorije.

Oniszczyk [2, 3] je analizirao problem slobodnih i prinudnih oscilacija dva elastično povezana Euler-Bernoulli-jeva nosača. Odredio je analitička rešenja sopstvenih frekvencija, amplitudnih funkcija i oblika oscilovanja. Razmotrio je uticaj krutosti elastičnog međusloja na frekvencije i amplitude sistema. Odredio je uslove za nastanak rezonancije i ponašanje sistema kao dinamičkog absorbera.

Analizu sistema dva povezana nosača nastavili su Zhang i koautori [4,5] razmatrajući problem slobodnih i prinudnih oscilacija dva elastično povezana nosača Euler-Bernoulli-jevog tipa sa uticajima pritisnih aksijalnih sila. Prikazali su analitička rešenja prirodnih frekvencija sistema u funkciji uticaja pritisnih aksijalnih sila kao i njihovo dejstvo na amplitude oscilovanja. Odredili su zavisnost odnosa kritične sile sistema i Euler-ove kritične sile u funkciji aksijalne sile drugog nosača.

Vu i koautori [6] su izučavali problem prinudnih prigušenih oscilacija sistema dva elastično povezana Euler-Bernoulli-jeva nosača. Dali su analitička rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina u kojima figuriše faktor prigušenja. Odredili su uticaj prigušenja sistema na oscilacije i

amplitude pod prinudnom harmonijskom silom. Njihovi analitički rezultati su pokazali veliko slaganje sa eksperimentalnim rezultatima na dinamičkim absorberima koje su izveli Seelig i Hoppmann [1].

Li i Hua [7] su koristeći spektralni metod konačnih elemenata odredili numerička rešenja prirodnih frekvencija dva elastično povezana nosača Timoshenkovog tipa za različite slučajeve oslanjanja. Odredili su oblike oscilovanja i amplitudno-frekventnu zavisnost u slučaju prinudnih oscilacija sistema.

Izučavanje oscilacija sistema složenih struktura koji se u tehničkoj praksi sreću kao fizički modeli armatura, spregnutih nosećih konstrukcija u mašinstvu i višespratnih objekata u građevinarstvu, pronašli su značajno mesto u oblastima ispitivanja mnogih istraživača. Ovakve strukture, sačinjene od tri i više elastično povezanih elementarnih nosača bili su predmet i skorašnjih istraživanja. Razvoj računarskih resursa i primena numeričke matematike na ovakve modele doveli su do intenzivnijeg interesovanja grupe naučnika u dvadesetom veku.

Li i koautori [8] razmatrali su problem tri elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa. Numerički su odredili prirodne frekvencije za različite tipove oslanjanja, osnovne oblike oscilovanja i uticaj krutosti elastičnih međuslojeva na oscilacije sistema. Kelly i Srinivas [9] su razmatrali problem više elastično povezanih Euler-ovih tipova nosača. Odredili su prirodne frekvencije i osnovne oblike oscilovanja za slučaj nosača identičnih karakteristika koristeći Rayleigh-Ritz-ov numerički metod. Ariaei i koautori [10] su istraživali problem pokretnog tela po sistemu više elastično povezanih Timoshenko-vih nosača na elastičnoj podlozi koristeći Transfer-matrix metod. Zaključili su da se maksimalni ugib sistema nosača smanjuje u slučaju kretanja tela po nosačima bližih podlozi. Mao [11] je odredio osnovne oblike oscilovanja za prvih deset modova sistema više elastično povezanih Euler-ovih tipova nosača na elastičnoj podlozi koristeći Adomian metod dekompozicije.

Stojanović i koautori [12] analizirali su slobodne oscilacije i statičku stabilnost dva elastično povezana nosača sa uzetim u obzir uticajima inercije rotacije i poprečnog smicanja. Na primeru su prikazana analitička rešenja prirodnih frekvencija i određena je kritična sila sistema spregnutih nosača.



Stojanović i Kozić [13] su razmatrali slučaj prinudnih oscilacija dva elastično povezana nosača i uticaj pritisnih aksijalnih sila na odnose amplituda oscilacija sistema za tri tipa spoljašnje prinudne sile – harmonijska proizvoljno kontinuirana pobuda, harmonijska uniformna kontinuirana pobuda i harmonijska koncentrisana pobuda. Odredili su opšte uslove za nastanak rezonancije i ponašanja sistema kao dinamičkog absorbera. U radu [14] Stojanović i koautori su razmatrali analitičku analizu statičke stabilnost sistema tri elastično povezana nosača Timoshenkovog tipa na elastičnoj podlozi. Prikazali su izraze za kritičnu silu sistema pod uticajem elastičnih slojeva Winkler-ovog tipa. Stojanović i koautori [15] su na primeru više elastično povezanih nosača Timoshenko-vog i Reddy-Bickford-ovog tipa odredili analitičke oblike prirodnih frekvencija, njihovu promenu pod uticajem pritisnih aksijalnih sila i uslove statičke stabilnosti za različit broj povezanih nosača.

Problemi oscilovanja nosača sa oštećenjem zauzimaju značajno mesto u teorijsko-eksperimentalnom istraživanju ponašanja dinamičkih sistema. Pojava oštećenja različitih tipova u konstrukcijama dovodi do trajnih modifikacija na njima i povećan rizik od loma. Široka inženjerska praksa u ovoj oblasti pokrenula je veliki broj istraživača na izučavanje oscilacija dinamičkih sistema sa oštećenjem. Christides i Barr [16] eksperimentalno su odredili faktor uticaja na prirodne frekvencije slobodno oslonjenog nosača sa oštećenjem zatvorenog tipa. Dobijenim rezultatima su pokazali da pojava oštećenja snižava prirodne frekvencije sistema. Nekoliko istraživanja u oblasti analize nosača sa oštećenjem je sprovedeno na modelu promenljive krutosti nosača kao posledice oštećenja i njenim uticajem na prirodne frekvencije, osnovne oblike oscilovanja i faktor prigušenja u linearnom režimu. Tako su Sinha i koautori [17] razvili model prividne promene geometrije nosača na mestu oštećenja. Koristeći eksperimentalno određen faktor uticaja na prirodne frekvencije nosača sa oštećenjem koji su objavili Christides i Barr [16] za tip zatvorenog kreka, odredili su potrebnu promenu u geometriji nosača na mestu oštećenja modelom trougaonog tipa otvorenog oštećenja. Oscilacije ovako formulisanog matematičkog modela su ispitivali metodom konačnih elemenata i verifikovali rezultate eksperimentalnom proverom istih. Pandey i koautori [18] su u radu izučavali uticaj oštećenja na prirodne oblike oscilovanja.

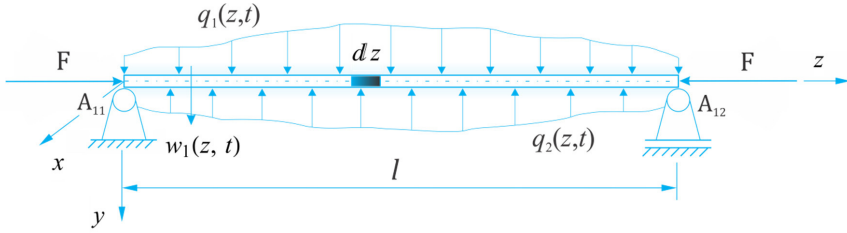
Jedna grupa istraživača je usmerila dinamičku analizu na detekciju i lokalizaciju oštećenja. Pojavu najvećih odstupanja od osnovnih oblika oscilovanja, kao jedan od načina, koristili su za pronalaženje oštećenja na nosaču. Panteliou i koautori [19] su koristili promenu faktora prigušenja za lokalizaciju oštećenja. Značajan broj radova iz oblasti nelinearnih oscilacija

oštećenih nosača je potvrdio zainteresovanost istraživača za ovu oblast. Tako su Bikri i koautori [20] razmatrali geometrijski nelinearne oscilacije obostrano uklještenog nosača sa prslinom i pokazali razliku u rezultatima osnovnih oblika oscilovanja između linearnog i nelinearnog modela. Andreaus i koautori [21] su istraživali geometrijski nelinearne oscilacije konzole pod uticajem harmonijske pobude. Matematički model je formiran kao bilinearni oscilator koji podrazumeva otvaranje i zatvaranje oštećenja pri oscilovanju. Stojanović i koautori [22, 50, 51] su na osnovu dotadašnjih istraživanja iz oblasti nelinearnih oscilacija nosača sa oštećenjem razvili novu  $p$ -verziju metode konačnih elemenata geometrijski nelinearnih oscilacija oštećenih nosača Timoshenko-vog tipa. Model oštećenja su za razliku od prethodnih tipova formirali tako da se pored promene u krutosti sistema uzima u obzir promena mase sistema. Prednost nove metode je određivanje prirodnih frekvencija sistema sa manjim brojem funkcija osnovnih oblika oscilovanja, odnosno manjim brojem stepeni sloboda oscilovanja. Prikazana je pojava longitudinalnih oscilacija obostrano uklještenog nosača koja se javlja isključivo kao posledica nastalog oštećenja. Izvedeni su numerički eksperimenti na modelu Timoshenkovog tipa nosača, tako da su uticaji inercije rotacije i poprečnog smicanja uzeti u obzir kao u slučaju elastično povezanih nosača. Pokazano je da sprezanje između transverzalnih oscilacija i komponentnih oscilacija poprečnih preseka dovodi do pojave asimetrije u nelinearnom vremenskom režimu oscilovanja. U nelinearnom domenu oscilovanja korišćena je Newmark metoda direktne integracije za rešavanje nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prinudnog oscilovanja oštećenog nosača Timoshenko-vog tipa. Na modelu slobodnih nelinearnih oscilacija korišćena je Continuation metoda za određivanje tačaka bifurkacija, Stojanović i Ribeiro [23]. Nova  $p$ -verzija metode konačnih elemenata je formirana u okviru matematičkog modela nosača Timoshenkovog tipa pa su time određeni uticaji zaokretanja poprečnih preseka (inercija rotacije i poprečno smicanje) na geometrijski nelinearne oscilacije nosača manjih i većih debljina.

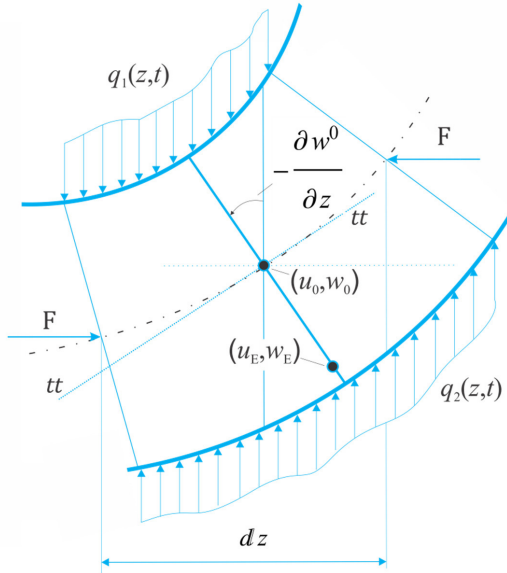
## 1.2 Oscilacije nosača Euler-ovog, Rayleigh-jevog, Timoshenko-vog i Reddy-Bickford-ovog tipa

Euler-Bernoulli-jeva teorija homogenih elastičnih tankih prizmatičnih nosača [2, 3] podrazumeva da se oscilovanje nosača odvija tako da su poprečni preseki nosača pri deformaciji uvek upravni na njegovu neutralnu liniju, pri čemu su uticaji inercije rotacije i poprečnog

smicanja zanemareni (slika 1.2.2). Teorija daje dobre aproksimacije rešenja pri malim transverzalnim pomeranjima u slučajevima tankih nosača.



**Slika 1.2.1** Slobodno oslonjeni nosač pod dejstvom aksijalnih pritisknih sila  $F$  i kontinualnih opterećenja  $q_1(z,t)$  i  $q_2(z,t)$



**Slika 1.2.2** Elementarni deo nosača Euler-ovog tipa

Ako funkcije pomeranja u longitudinalnom i transverzalnom pravcu označimo sa  $u(y, z, t)$  i  $w(y, z, t)$  onda će za prikazane uglove na slici 1.2.2 elementarnog dela nosača sa slike 1.2.1 važiti sledeće relacije

$$u_E(y, z, t) = u_E^0(z, t) - y \frac{\partial w_E^0(z, t)}{\partial z}, \quad w_E(y, z, t) = w_E^0(z, t), \quad (1.2.1)$$

gde  $u^0(z, t)$  i  $w^0(z, t)$  predstavljaju longitudinalna i transverzalna pomeranja tačke  $(0, z, t)$  nosača koja pripada osi  $z$ . Deformacija u pravcu  $z$  ose u funkciji pomeranja i veza između napona i deformacije po Hooke-ovom zakonu su

$$\varepsilon_z(y, z, t) = \frac{\partial u_E(y, z, t)}{\partial z} = \frac{\partial u_E^0(z, t)}{\partial z} - y \frac{\partial^2 w_E^0(z, t)}{\partial z^2}, \quad (1.2.2)$$

$$\sigma_z(y, z, t) = E \varepsilon_z(y, z, t), \quad (1.2.3)$$

gde je  $E$  Young-ov modul elastičnosti. Jednačine izvodimo na osnovu principa virtuelnog rada za koji važi

$$\delta W_{in} + \delta W_V + \delta W_{ex} = 0, \quad (1.2.4)$$

gde su  $\delta W_{in}$ ,  $\delta W_V$  i  $\delta W_{ex}$  virtuelni radovi inercijalnih, unutrašnjih i spoljašnjih sila redom. Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\delta W_{in} = -\rho b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_E(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_E(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_E(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_E(y, z, t) \right] dy dz. \quad (1.2.5)$$

Imajući u vidu relaciju longitudinalnog pomeranja  $u_E(y, z, t) = u_E^0(z, t) - y \frac{\partial w_E^0(z, t)}{\partial z}$ , član u podintegralnoj funkciji  $\frac{\partial^2 u_E(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_E(y, z, t)$  predstavlja uticaj inercije rotacije. Matematički model Euler-ovog tipa nosača ne uzima u obzir uticaj inercije rotacije pa ga možemo zanemariti u izvođenju talasne jednačine nosača Euler-ovog tipa. Virtuelni rad unutrašnjih sila je oblika

$$\delta W_V = -b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z(z, t) \delta \varepsilon_z(z, t) dy dz. \quad (1.2.6)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila u transverzalnom pravcu

$$\delta W_{ex} = \int_0^l \left[ q(z, t) \delta w_E^0(z, t) + F \frac{\partial w_E^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_E^0(z, t)}{\partial z} \right] dz,$$

$$q(z, t) = q_1(z, t) - q_2(z, t), \quad (1.2.7)$$

Zamenom jednačina (1.2.5-1.2.7) u jednačinu (1.2.4) dobijamo

$$-b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z(z, t) \delta \varepsilon_z(z, t) dy dz - \rho b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2 w_E(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_E(y, z, t) dy dz$$

$$+ \int_0^l \left[ q(z, t) \delta w_E^0(z, t) + F \frac{\partial w_E^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_E^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0. \quad (1.2.8)$$

Sukcesivnom primenom Green-ove teoreme na jednačinu (1.2.8) dobijamo parcijalnu diferencijalnu jednačinu transverzalnih oscilacija nosača Euler-ovog tipa u obliku

$$\rho A \frac{\partial^2 w_E^0(z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI_x \frac{\partial^2 w_E^0(z, t)}{\partial z^2} \right) + F \frac{\partial^2 w_E^0(z, t)}{\partial z^2} = q(z, t), \quad (1.2.9)$$

gde su:  $\rho$  gustina materijala,  $A$  površina poprečnog preseka,  $E$  Young-ov modul elastičnosti,  $I_x$  moment inercije površine poprečnog preseka nosača za osu  $x$  i  $F$  aksijalna pritisna sila.

Rayleigh-jeva teorija homogenih elastičnih tankih prizmatičnih nosača podrazumeva da se kretanja tačaka nosača odvijaju tako da su poprečni preseki nosača kao u slučaju Euler-ovog matematičkog modela uvek upravni na njegovu neutralnu liniju pri deformaciji pri čemu su uticaji inercije rotacije uzeti u obzir. Konstitutivne relacije su iste kao uslučaju Euler-ovog tipa nosača dok se dinamička jednačina menja i uzima se u obzir član  $\frac{\partial^2 u_E(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_E(y, z, t)$  u izrazu za virtuelni rad inercijalnih sila. Ako funkcije pomeranja u longitudinalnom i transverzalnom pravcu označimo sa  $u_R(y, z, t)$  i  $w_R(y, z, t)$  onda će na osnovu položaja tačke nosača  $u_R(y, z, t)$  važiti sledeće relacije longitudinalnog i transverzalnog pomeranja tačaka nosača Rayleigh-ovog tipa

$$u_R(y, z, t) = u_R^0(z, t) - y \frac{\partial w_R^0(z, t)}{\partial z}, \quad w_R(y, z, t) = w_R^0(z, t), \quad (1.2.10)$$

gde  $u_R^0(z, t)$  i  $w_R^0(z, t)$  predstavljaju redom longitudinalna i transverzalna pomeranja tačke  $(0, z, t)$  nosača koja pripada osi  $z$ . Deformacija u pravcu  $z$  ose u funkciji pomeranja i veza između napona i deformacije po Hooke-ovom zakonu su

$$\varepsilon_z(y, z, t) = \frac{\partial u_R^0(z, t)}{\partial z} - y \frac{\partial^2 w_R^0(z, t)}{\partial z^2}, \quad (1.2.11)$$

$$\sigma_z(y, z, t) = E \varepsilon_z(y, z, t). \quad (1.2.12)$$

Virtuelni rad inercijalnih sila je sada

$$\delta W_{in} = -\rho b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_R(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_R(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_R(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_R(y, z, t) \right] dy dz. \quad (1.2.13)$$

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\delta W_V = -b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z(z, t) \delta \varepsilon_z(z, t) dy dz. \quad (1.2.14)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila je oblika

$$\begin{aligned} \delta W_{ex} &= \int_0^l \left[ q(z, t) \delta w_R^0(z, t) + F \frac{\partial w_R^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_R^0(z, t)}{\partial z} \right] dz, \\ q(z, t) &= q_1(z, t) - q_2(z, t), \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Zamenom jednačina (1.2.13-1.2.15) u jednačinu (1.2.4) dobijamo

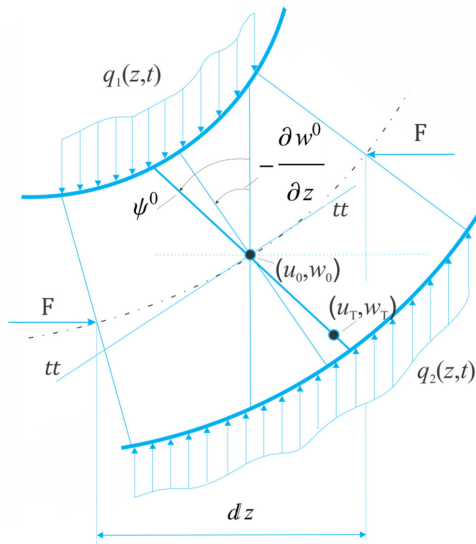
$$\begin{aligned} &-b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z(z, t) \delta \varepsilon_z(z, t) dy dz \\ &- \rho b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_R(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_R(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_R(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_R(y, z, t) \right] dy dz \\ &+ \int_0^l \left[ q(z, t) \delta w_R^0(z, t) + F \frac{\partial w_R^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_R^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Primenom Green-ove teoreme na jednačinu (1.2.16) izdvajamo jednačinu transverzalnih oscilacija nosača Rayleigh-jevog tipa u obliku

$$\rho A \frac{\partial^2 w_R^0(z, t)}{\partial t^2} - \rho I_x \frac{\partial^4 w_R^0(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( E I_x \frac{\partial^2 w_R^0(z, t)}{\partial z^2} \right) + F \frac{\partial^2 w_R^0(z, t)}{\partial z^2} = q(z, t). \quad (1.2.17)$$

Teorija homogenih elastičnih prizmatičnih nosača Timoshenko-vog tipa predstavlja matematički model koji pored uticaja inercije rotacije podrazumeva i uzimanje u obzir uticaje sila smicanja koje izazivaju zaokretanje poprečnih preseka nosača. Na osnovu ove pretpostavke uvodi se funkcija rotacije poprečnog preseka. Na osnovu elementarnog deformisanog dela nosača sa slike 1.2.3 slede funkcije pomeranja u sledećem obliku

$$u_T(y, z, t) = u_T^0(z, t) + y\psi_T^0(z, t), \quad w_T(y, z, t) = w_T^0(z, t), \quad (1.2.18)$$



**Slika 1.2.3** Elementarni deo nosača Timoshenko-vog tipa

gde  $u_T^0(z, t)$ ,  $w_T^0(z, t)$  i  $\psi_T^0(z, t)$  predstavljaju redom longitudinalna i transverzalna pomeranja tačke  $(0, z, t)$  nosača koja pripada osi  $z$  i ugao između poprečnog preseka deformisanog nosača i ose  $y$ , slika 1.2.3. Deformacije u pravcu  $z$  ose  $\varepsilon_z$  i tangencijalnom pravcu usled sila smicanja  $\gamma_{zy}$  su oblika

$$\varepsilon_z(y, z, t) = \frac{\partial u_T^0(z, t)}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_T^0(z, t)}{\partial z}, \quad (1.2.19)$$

$$\gamma_{zy}(y, z, t) = \frac{\partial w_T^0(z, t)}{\partial z} + \psi_T^0(z, t). \quad (1.2.20)$$

Pod pretpostavkom da je material izotropan i elastičan, važiće Hooke-ov zakon veze između napona i deformacija

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix}, \quad (1.2.21)$$

gde je  $G$  modul klizanja, a  $k$  smicajni faktor. Jednačine kretanja izvodimo na osnovu principa virtuelnog rada za koji važi

$$\delta W_{in} + \delta W_V + \delta W_{ex} = 0, \quad (1.2.22)$$

gde su  $\delta W_{in}$ ,  $\delta W_V$  i  $\delta W_{ex}$  virtuelni radovi inercijalnih, unutrašnjih i spoljašnjih sila redom. Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\delta W_{in} = -\rho b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_T(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_T(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_T(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_T(y, z, t) \right] dy dz. \quad (1.2.23)$$

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\delta W_V = -b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_z(z, t) \delta \varepsilon_z(z, t) + \tau_{zy}(z, t) \delta \gamma_{zy}(z, t)] dy dz. \quad (1.2.24)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila je

$$\begin{aligned} \delta W_{ex} &= \int_0^l \left[ q(z, t) \delta w_T^0(z, t) + F \frac{\partial w_T^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_T^0(z, t)}{\partial z} \right] dz, \\ q(z, t) &= q_1(z, t) - q_2(z, t). \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

Zamenom jednačina (1.2.23-1.2.25) u jednačinu (1.2.22) dobijamo



$$\begin{aligned}
& -b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_z(z, t) \delta \varepsilon_z(z, t) + \tau_{zy}(z, t) \delta \gamma_{zy}(z, t)] dy dz \\
& -\rho b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_T(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_T(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_T(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_T(y, z, t) \right] dy dz \\
& + \int_0^l \left[ q(z, t) \delta w_T^0(z, t) + F \frac{\partial w_T^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_T^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0. \tag{1.2.26}
\end{aligned}$$

Primenom Green-ove teoreme na jednačinu (1.2.26) dobijamo jednačine oscilovanja nosača Timoshenko-vog tipa u obliku

$$\rho A \frac{\partial^2 w_T^0(z, t)}{\partial t^2} - GAk \left( \frac{\partial^2 w_T^0(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_T^0(z, t)}{\partial x} \right) + F \frac{\partial^2 w_T^0(z, t)}{\partial z^2} = q(z, t), \tag{1.2.27}$$

$$\rho I_x \frac{\partial^2 \psi_T^0(z, t)}{\partial t^2} - EI_x \frac{\partial^2 \psi_T^0(z, t)}{\partial z^2} + kGA \left( \frac{\partial w_T^0(z, t)}{\partial z} + \psi_T^0(z, t) \right) = 0. \tag{1.2.28}$$

Na osnovu znanja o raspodeli smučućih napona, Timoshenko-vom teorijom nije uzeto u obzir da su naponi u krajnjim tačkama poprečnih preseka jednaki nuli pa je korišćen smicajni faktor  $k$ . Primena Reddy-Bickford-ovog matematičkog modela nosača, prikazanog u referencama Reddy-ja [29,30] i Wang-a i drugih [31], podrazumeva aproksimaciju deformacije poprečnog preseka nosača u  $yz$  ravni po liniji tačaka vrednosti smičućih napona. Time se omogućava tačnija naponsko-deformaciona matematička interpretacija u analizi kretanja tačaka nosača i nije neophodno korišćenje smicajnog faktora  $k$ . Funkcije pomeranja i deformacija su prema ref. [31], sledećeg oblika

$$\begin{aligned}
u_{RB}(y, z, t) &= u_{RB}^0(z, t) + y \psi_{RB}^0(z, t) - \alpha y^3 \left( \psi_{RB}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB}^0(z, t)}{\partial z} \right), \\
w_{RB}(y, z, t) &= w_{RB}^0(z, t), \tag{1.2.29}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_z(z, t) = \frac{\partial u_{RB}^0(z, t)}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_{RB}^0(z, t)}{\partial z} - \alpha y^3 \left( \frac{\partial \psi_{RB}^0(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_{RB}^0(z, t)}{\partial z^2} \right), \tag{1.2.30}$$

$$\gamma_{zy}(z, t) = \psi_{RB}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB}^0(z, t)}{\partial z} - \beta y^2 \left( \psi_{RB}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB}^0(z, t)}{\partial z} \right), \tag{1.2.31}$$

gde su  $\alpha = 4/3h^2$ ,  $\beta = 3\alpha$ ,  $u_{RB}^0(z, t)$  longitudinalno pomeranje tačke  $(0, z, t)$  nosača koja pripada osi  $z$ ,  $w_{RB}^0(z, t)$  transverzalno pomeranje tačke  $(0, z, t)$  nosača koja pripada osi  $z$  i  $\psi_{RB}^0(z, t)$  ugao poprečnog preseka nosača na mestu njegovog preseka sa neutralnom linijom u odnosu na osu  $y$  kao što je prikazano na slici 1.2.4. Pod pretpostavkom da je material izotropan i elastičan, važi Hooke-ov zakon

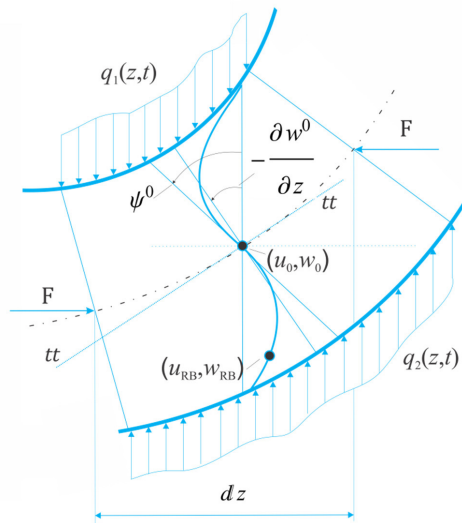
$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{zy} \end{Bmatrix}, \quad (1.2.32)$$

gde je  $G$  modul klizanja. Jednačine kretanja izvodimo na osnovu principa virtuelnog rada kao u prethodnim slučajevima za koji važi

$$\delta W_{in} + \delta W_V + \delta W_{ex} = 0, \quad (1.2.33)$$

gde su  $\delta W_{in}$ ,  $\delta W_V$  i  $\delta W_{ex}$  virtuelni radovi inercijalnih, unutrašnjih i spoljašnjih sila redom. Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\delta W_{in} = -\rho b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{RB}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{RB}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{RB}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{RB}(y, z, t) \right] dy dz. \quad (1.2.34)$$



Slika 1.2.4 Elementarni deo nosača Reddy-Bickford-ovog tipa

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\delta W_V = -b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_z(z, t) \delta \varepsilon_z(z, t) + \tau_{zy}(z, t) \delta \gamma_{zy}(z, t)] dy dz. \quad (1.2.35)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila je

$$\begin{aligned} \delta W_{ex} &= \int_0^l \left[ q(z, t) \delta w_{RB}^0(z, t) + F \frac{\partial w_{RB}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RB}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz, \\ q(z, t) &= q_1(z, t) - q_2(z, t). \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

gde  $\delta$  predstavlja operator varijacije. Zamenom jednačina (1.2.34-1.2.36) u jednačinu (1.2.33) dobijamo

$$\begin{aligned} &-b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_z(z, t) \delta \varepsilon_z(z, t) + \tau_{zy}(z, t) \delta \gamma_{zy}(z, t)] dy dz \\ &- \rho b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{RB}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{RB}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{RB}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{RB}(y, z, t) \right] dy dz \\ &+ \int_0^l \left[ q(z, t) \delta w_{RB}^0(z, t) + F \frac{\partial w_{RB}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RB}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0. \end{aligned} \quad (1.2.38)$$

Primenom Green-ove teoreme na jednačinu (1.2.38) dobijamo jednačine oscilovanja nosača Reddy-Bickford-ovog tipa u sledećem obliku

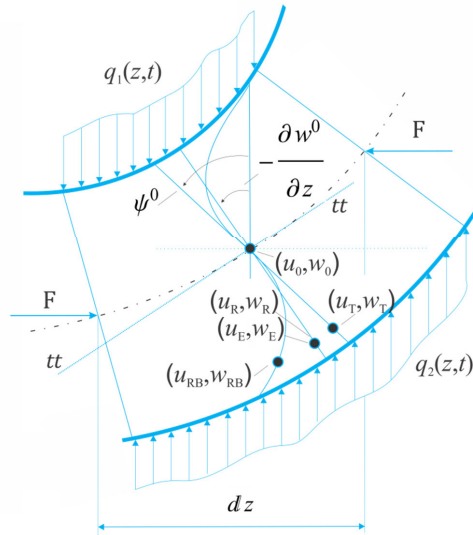
$$\begin{aligned} C_w^{4,0} \frac{\partial^4 w_{RB}^0(z, t)}{\partial z^4} + C_w^{2,2} \frac{\partial^4 w_{RB}^0(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + C_w^{2,0} \frac{\partial^2 w_{RB}^0(z, t)}{\partial z^2} + C_w^{0,2} \frac{\partial^2 w_{RB}^0(z, t)}{\partial t^2} + C_\psi^{1,2} \frac{\partial^3 \psi_{RB}^0(z, t)}{\partial z \partial t^2} \\ + C_\psi^{1,0} \frac{\partial \psi_{RB}^0(z, t)}{\partial z} + C_\psi^{3,0} \frac{\partial^3 \psi_{RB}^0(z, t)}{\partial z^3} = q(z, t), \end{aligned} \quad (1.2.39)$$

$$\begin{aligned} C_w^{3,0} \frac{\partial^3 w_{RB}^0(z, t)}{\partial z^3} + C_w^{1,2} \frac{\partial^3 w_{RB}^0(z, t)}{\partial z \partial t^2} + C_w^{1,0} \frac{\partial w_{RB}^0(z, t)}{\partial z} + C_\psi^{2,0} \frac{\partial^2 \psi_{RB}^0(z, t)}{\partial z^2} \\ + C_\psi^{0,2} \frac{\partial^2 \psi_{RB}^0(z, t)}{\partial t^2} + C_\psi^{0,0} \psi_{RB}^0(z, t) = 0, \end{aligned} \quad (1.2.40)$$

gde su

$$\begin{aligned}
 C_w^{4,0} &= \frac{1}{448}bh^7\alpha^2E, \quad C_w^{2,2} = -\frac{1}{448}bh^7\alpha^2\rho, \quad C_w^{2,0} = -\frac{1}{80}bG\beta^2h^5 + \frac{1}{6}bG\beta h^3 - bGh + F, \\
 C_w^{0,2} &= bh\rho, \quad C_\psi^{1,2} = \frac{1}{80}bh^5\alpha\rho - \frac{1}{448}bh^7\alpha^2\rho, \quad C_\psi^{1,0} = -\frac{1}{80}bG\beta^2h^5 + \frac{1}{6}bG\beta h^3 - bGh, \\
 C_\psi^{3,0} &= \frac{1}{448}bh^7\alpha^2E - \frac{1}{80}bh^5\alpha E, \quad C_w^{3,0} = \frac{1}{80}bh^5\alpha E - \frac{1}{448}bh^7\alpha^2E, \quad C_w^{1,2} = \frac{1}{448}bh^7\alpha^2\rho - \frac{1}{80}bh^5\alpha\rho, \\
 C_w^{1,0} &= \frac{1}{80}bG\beta^2h^5 - \frac{1}{6}bG\beta h^3 + bGh, \quad C_\psi^{2,0} = -\frac{1}{448}b\alpha^2Eh^7 + \frac{1}{40}b\alpha Eh^5 - \frac{1}{12}bEh^3, \\
 C_\psi^{0,2} &= \frac{1}{448}b\alpha^2\rho h^7 - \frac{1}{40}b\alpha\rho h^5 + \frac{1}{12}b\rho h^3. \quad C_\psi^{0,0} = \frac{1}{80}b\beta^2Gh^5 - \frac{1}{6}b\beta Gh^3 + bGh. \quad (1.2.41)
 \end{aligned}$$

Primena teorije nosača koja uzima u obzir uticaje inercije rotacije i poprečnog smicanja (Timoshenko-v i Reddy-Bickford-ov model) daje bolje aproksimacije rešenja što je pogodno u analizi nosača većih debljina kod kojih dolazi do zaokretanja poprečnih preseka.



**Slika 1.2.5** Elementarni deo nosača sa poprečnim presecima

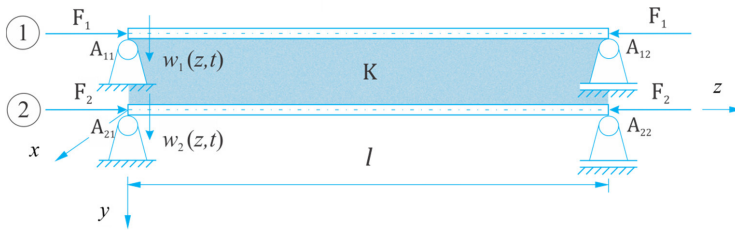
Euler-ovog, Rayleigh-jevog, Timoshenko-vog i Reddy-Bickford-ovog tipa

Matematički modeli nosača Euler-ovog i Rayleigh-jevog tipa zasnivaju se na pretpostavci da su poprečni preseki nosača uvek upravni na neutralnu liniju što nije slučaj kod nosača većih debljina. Pored inercije rotacije, modeli Timoshenko-vog i Reddy-Bickford-ovog tipa uzimaju u obzir i uticaje sila smicanja koje utiču na zaokretanje poprečnog preseka nosača. Za razliku od Timoshenko-vog tipa modela, Reddy-Bickford-ov model zadovoljava i uslove smicajnih napona na graničnim površinama. Na slici 1.2.5 mogu se videti deformacije vlakana poprečnih preseka nosača u zavisnosti od tipa korišćenih teorija.

## Slobodne oscilacije i stabilnost sistema dva elastično povezana nosača

### 2.1 Slobodne oscilacije dva elastično povezana nosača Rayleigh-jevog tipa

Analizirajmo uticaj inercije rotacije na slobodne transverzalne oscilacije sistema dva elastično povezana nosača slojem Winkler-ovog tipa, Stojanović i koautori [12]. Neka su dva nosača istih dužina  $l$ , povezana elastičnim slojem krutosti  $K$ . Nosači su na svojim krajevima izloženi dejstvu pritisnih aksijalnih sila  $F_1$  i  $F_2$  kao što je prikazano na slici 2.1.1.



Slika 2.1.1 Sistem dva elastično povezana nosača

Neka su funkcije pomeranja u longitudinalnom i transverzalnom pravcu sistema nosača Rayleigh-jevog tipa  $u_{R1}(y, z, t)$ ,  $w_{R1}(y, z, t)$ ,  $u_{R2}(y, z, t)$  i  $w_{R2}(y, z, t)$ . Analogno relaciji (1.2.10), za sistem dva nosača važi

$$u_{R1}(y, z, t) = u_{R1}^0(z, t) - y \frac{\partial w_{R1}^0(z, t)}{\partial z}, \quad w_{R1}(y, z, t) = w_{R1}^0(z, t), \quad (2.1.1)$$

$$u_{R2}(y, z, t) = u_{R2}^0(z, t) - y \frac{\partial w_{R2}^0(z, t)}{\partial z}, \quad w_{R2}(y, z, t) = w_{R2}^0(z, t). \quad (2.1.2)$$

Deformacije u pravcu z ose u funkciji pomeranja i veza između napona i deformacije po Hookeovom zakonu su

$$\varepsilon_{z1}(y, z, t) = \frac{\partial u_{R1}^0(z, t)}{\partial z} - y \frac{\partial^2 w_{R1}^0(z, t)}{\partial z^2}, \quad \varepsilon_{z2}(y, z, t) = \frac{\partial u_{R2}^0(z, t)}{\partial z} - y \frac{\partial^2 w_{R2}^0(z, t)}{\partial z^2}, \quad (2.1.3)$$

$$\sigma_{z1}(y, z, t) = E \varepsilon_{z1}(y, z, t), \quad \sigma_{z2}(y, z, t) = E \varepsilon_{z2}(y, z, t). \quad (2.1.4)$$

Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\delta W_{in1} = -\rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{R1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{R1}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{R1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{R1}(y, z, t) \right] dy dz, \quad (2.1.5)$$

$$\delta W_{in2} = -\rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{R2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{R2}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{R2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{R2}(y, z, t) \right] dy dz. \quad (2.1.6)$$

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\delta W_{V1} = -b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \sigma_{z1}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) dy dz, \quad \delta W_{V2} = -b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \sigma_{z2}(z, t) \delta \varepsilon_{z2}(z, t) dy dz. \quad (2.1.7)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila je

$$\delta W_{ex1} = \int_0^l \left[ \delta w_{R1}^0(z, t) K \left( w_{R2}^0(z, t) - w_{R1}^0(z, t) \right) + F_1 \frac{\partial w_{R1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{R1}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz, \quad (2.1.8)$$

$$\delta W_{ex2} = \int_0^l \left[ \delta w_{R2}^0(z, t) K \left( w_{R1}^0(z, t) - w_{R2}^0(z, t) \right) + F_2 \frac{\partial w_{R2}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{R2}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz, \quad (2.1.9)$$

Na osnovu principa virtuelnog rada  $\delta W_{ini} + \delta W_{Vi} + \delta W_{exi} = 0$ ,  $i = 1, 2$  i jednačina (2.1.5-2.1.9) dobijamo

$$\begin{aligned}
& -b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \sigma_{z1}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) dy dz - \\
& -\rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{R1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{R1}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{R1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{R1}(y, z, t) \right] dy dz \\
& + \int_0^l \left[ \delta w_{R1}^0(z, t) K \left( w_{R2}^0(z, t) - w_{R1}^0(z, t) \right) + F_1 \frac{\partial w_{R1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{R1}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0, \quad (2.1.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \sigma_{z2}(z, t) \delta \varepsilon_{z2}(z, t) dy dz - \\
& -\rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{R2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{R2}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{R2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{R2}(y, z, t) \right] dy dz \\
& + \int_0^l \left[ \delta w_{R2}^0(z, t) K \left( w_{R1}^0(z, t) - w_{R2}^0(z, t) \right) + F_2 \frac{\partial w_{R2}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{R2}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0. \quad (2.1.11)
\end{aligned}$$

Sukcesivnom primenom Green-ove teoreme na izraze (2.1.10-2.1.11) dobijamo jednačine transverzalnih oscilacija sistema elastično povezanih nosača Rayleigh-jevog tipa u obliku

$$\begin{aligned}
\rho A_1 \frac{\partial^2 w_{R1}^0(z, t)}{\partial t^2} - \rho I_{x1} \frac{\partial^4 w_{R1}^0(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + E I_{x1} \frac{\partial^4 w_{R1}^0(z, t)}{\partial z^4} + F_1 \frac{\partial^2 w_{R1}^0(z, t)}{\partial z^2} \\
+ K \left( w_{R1}^0(z, t) - w_{R2}^0(z, t) \right) = 0, \quad (2.1.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho A_2 \frac{\partial^2 w_{R2}^0(z, t)}{\partial t^2} - \rho I_{x2} \frac{\partial^4 w_{R2}^0(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + E I_{x2} \frac{\partial^4 w_{R2}^0(z, t)}{\partial z^4} + F_2 \frac{\partial^2 w_{R2}^0(z, t)}{\partial z^2} \\
+ K \left( w_{R2}^0(z, t) - w_{R1}^0(z, t) \right) = 0, \quad (2.1.13)
\end{aligned}$$

gde su  $\rho$  gustina materijala,  $A$  površina poprečnog preseka,  $E$  Young-ov modul elastičnosti,  $I_x$  moment inercije površine poprečnog preseka nosača za osu  $x$ . Početni i granični uslovi sistema dva elastično povezana slobodno oslonjena nosača Rayleigh-jevog tipa su

$$w_{Ri}^0(z, 0) = w_{i0}(z), \quad \frac{dw_{R1}^0(z, 0)}{dt} = v_{i0}(z), \quad (2.1.14)$$

$$w_{Ri}^0(0, t) = \frac{d^2 w_{R1}^0(0, t)}{dz^2} = \frac{d^2 w_{R1}^0(l, t)}{dz^2} = w_{Ri}^0(l, t) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.1.15)$$



Smatrajući da je kretanje tačaka nosača harmonijsko, rešenja jednačina (2.1.12) i (2.1.13) pretpostavljamo u obliku proizvoda funkcija

$$w_{Ri}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_{in}(t), \quad i = 1, 2, \quad (2.1.16)$$

gde je  $T_{in}(t)$  nepoznata vremenska funkcija a  $Z_n(z)$  funkcija osnovnih oblika oscilovanja

$$Z_n(z) = \sin(k_n z), \quad k_n = n\pi/l, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.17)$$

Zamenom pretpostavljenih rešenja (2.1.16) u jednačine transversalnih oscilacija sistema dva elastično povezana nosača Rayleigh-jevog tipa (2.1.12) i (2.1.13) dobijamo sistem dve diferencijalne jednačine u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ J_1 \frac{d^2 T_{1n}}{dt^2} + (N_1 - F_1 \eta_1) T_{1n} - H_1 T_{2n} \right\} Z_n = 0, \quad (2.1.18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ J_2 \frac{d^2 T_{2n}}{dt^2} + (N_2 - F_2 \eta_2) T_{2n} - H_2 T_{1n} \right\} Z_n = 0, \quad (2.1.19)$$

gde su uvedene sledeće smene

$$J_i = 1 + C_{ri}^2 k_n^2, \quad N_i = C_{bi}^2 k_n^4 + H_i, \quad H_i = \frac{K}{\rho A_i}, \quad \eta_i = \frac{k_n^2}{\rho A_i}, \quad C_{ri} = \sqrt{\frac{I_i}{A_i}}, \quad C_{bi} = \sqrt{\frac{EI_i}{\rho A_i}}, \quad i = 1, 2.$$

Rešenja diferencijalnih jednačina (2.1.18) i (2.1.19) možemo pretpostaviti u sledećem obliku

$$T_{1n} = C_n e^{j\omega_n t}, \quad T_{2n} = D_n e^{j\omega_n t}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (2.1.20)$$

gde je  $\omega_n$  prirodna frekvencija sistema. Ako zamenimo izraz (2.1.20) u jednačine (2.1.18) i (2.1.19) dobijamo sistem homogenih algebarskih jednačina

$$(N_1 - F_1 \eta_1 - J_1 \omega_n^2) C_n - H_1 D_n = 0, \quad (2.1.21)$$

$$(N_2 - F_2 \eta_2 - J_2 \omega_n^2) D_n - H_2 C_n = 0. \quad (2.1.22)$$

Sistem algebarskih jednačina (2.1.21) i (2.1.22) ima netrivialna rešenja kada je determinanta matrice sistema jednaka nuli. Iz tog uslova dobijamo karakterističnu jednačinu sistema u obliku polinoma četvrtog stepena

$$J_1 J_2 \omega_n^4 - (N_1 J_2 + N_2 J_1 - F_1 \eta_1 J_2 - F_2 \eta_2 J_1) \omega_n^2 + (N_1 - F_1 \eta_1)(N_2 - F_2 \eta_2) - H_1 H_2 = 0. \quad (2.1.23)$$

Karakteristična jednačina (2.1.23) ima dva različita pozitivna realna korena

$$\omega_{n1}^2 = \frac{J_2(N_1 - F_1 \eta_1) + J_1(N_2 - F_2 \eta_2)}{2J_1 J_2} - \frac{1}{2J_1 J_2} \sqrt{[J_2(N_1 - F_1 \eta_1) - J_1(N_2 - F_2 \eta_2)]^2 + 4J_1 J_2 H_1 H_2}, \quad (2.1.24)$$

$$\omega_{n2}^2 = \frac{J_2(N_1 - F_1 \eta_1) + J_1(N_2 - F_2 \eta_2)}{2J_1 J_2} + \frac{1}{2J_1 J_2} \sqrt{[J_2(N_1 - F_1 \eta_1) - J_1(N_2 - F_2 \eta_2)]^2 + 4J_1 J_2 H_1 H_2}. \quad (2.1.25)$$

Odnosi amplituda modova oscilovanja za svaku od frekvencija  $\omega_{n1}, \omega_{n2}$  su

$$\alpha_{ni} = \frac{C_n}{D_n} = \frac{H_1}{N_1 - F_1 \eta_1 - J_1 \omega_{ni}^2} = \frac{N_2 - F_2 \eta_2 - J_2 \omega_{ni}^2}{H_2}, \quad i = 1, 2. \quad (2.1.26)$$

Opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina (2.1.18) i (2.1.19) je oblika

$$T_{1n}(t) = C_{1n} e^{j\omega_{n1}t} + C_{2n} e^{-j\omega_{n1}t} + C_{3n} e^{j\omega_{n2}t} + C_{4n} e^{-j\omega_{n2}t}, \quad (2.1.27)$$

$$T_{2n}(t) = D_{1n} e^{j\omega_{n1}t} + D_{2n} e^{-j\omega_{n1}t} + D_{3n} e^{j\omega_{n2}t} + D_{4n} e^{-j\omega_{n2}t}, \quad (2.1.28)$$

odnosno

$$T_{1n}(t) = \sum_{i=1}^2 [A_{ni} \sin(\omega_{ni}t) + B_{ni} \cos(\omega_{ni}t)], \quad (2.1.29)$$

$$T_{2n}(t) = \sum_{i=1}^2 \alpha_{ni} [A_{ni} \sin(\omega_{ni}t) + B_{ni} \cos(\omega_{ni}t)], \quad (2.1.30)$$

gde su  $A_{ni}$  i  $B_{ni}$  ( $i = 1, 2$ ) nepoznate konstante. Rešenja sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina (2.1.12) i (2.1.13) slobodnih transversalnih oscilacija sistema dva elastično povezana slobodno oslonjena nosača pod uticajima inercije rotacije su oblika

$$w_{R1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_{1n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 [A_{ni} \sin(\omega_{ni} t) + B_{ni} \cos(\omega_{ni} t)], \quad (2.1.31)$$

$$w_{R2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_{2n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \alpha_{ni} [A_{ni} \sin(\omega_{ni} t) + B_{ni} \cos(\omega_{ni} t)]. \quad (2.1.32)$$

Nepoznate konstante  $A_{ni}$  i  $B_{ni}$  ( $i = 1, 2$ ) određujemo iz početnih uslova (2.1.14) korišćenjem uslova ortogonalnosti funkcija u obliku

$$\int_0^l Z_n Z_m dx = \int_0^l \sin(k_n z) \sin(k_m z) dz = c \delta_{nm}, \quad (2.1.33)$$

$$c = \int_0^l Z_n^2 dx = \int_0^l [\sin(k_n z)]^2 dz = \frac{l}{2}$$

gde je  $\delta_{nm}$  je Kronecker-ova delta funkcija. Ako početne uslove (2.1.14) unesemo u izraze (2.1.31) i (2.1.32) dobijamo

$$w_{R1}^0(z, 0) = w_{10}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 B_{ni},$$

$$w_{R2}^0(z, 0) = w_{20}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \alpha_{ni} B_{ni}, \quad (2.1.34)$$

$$\frac{dw_{R1}^0(z, 0)}{dt} = v_{10}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \omega_{ni} A_{ni},$$

$$\frac{dw_{R2}^0(z, 0)}{dt} = v_{20}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \alpha_{ni} \omega_{ni} A_{ni}. \quad (2.1.35)$$

Množenjem izraza (2.1.34) i (2.1.35) sopstvenom funkcijom  $Z_n$ , integracijom po promenljivoj  $z$  od 0 do  $l$  i korišćenjem uslova ortogonalnosti (2.1.33) dobijamo

$$\frac{2}{l} \int_0^l w_{10} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=1}^2 B_{ni}, \quad \frac{2}{l} \int_0^l w_{20} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=1}^2 \alpha_{ni} B_{ni}, \quad (2.1.36)$$

$$\frac{2}{l} \int_0^l v_{10} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=1}^2 \omega_{ni} A_{ni}, \quad \frac{2}{l} \int_0^l v_{20} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=1}^2 \alpha_{ni} \omega_{ni} A_{ni}. \quad (2.1.37)$$

Nakon rešavanja sistema jednačina (2.1.36) i (2.1.37) nepoznate konstante određujemo u obliku

$$A_{n1} = \frac{2}{\omega_{n1}(\alpha_{n2} - \alpha_{n1})l} \int_0^l (v_{10}\alpha_{n2} - v_{20}) \sin(k_n z) dz, \quad (2.1.38)$$

$$A_{n2} = \frac{2}{\omega_{n2}(\alpha_{n1} - \alpha_{n2})l} \int_0^l (v_{20}\alpha_{n1} - v_{10}) \sin(k_n z) dz, \quad (2.1.39)$$

$$B_{n1} = \frac{2}{(\alpha_{n2} - \alpha_{n1})l} \int_0^l (w_{10}\alpha_{n2} - w_{20}) \sin(k_n z) dz, \quad (2.1.40)$$

$$B_{n2} = \frac{2}{(\alpha_{n1} - \alpha_{n2})l} \int_0^l (w_{10}\alpha_{n1} - w_{20}) \sin(k_n z) dz. \quad (2.1.41)$$

## 2.2 Slobodne oscilacije dva elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa

Razmotrimo uticaje inercije rotacije i poprečnog smicanja na slobodne transverzne oscilacije sistema dva elastično povezana nosača slojem Winkler-ovog tipa, Stojanović i koautori [12]. Neka su kao u slučaju Rayleigh-jevog modela nosači istih dužina  $l$ , povezani elastičnim slojem krutosti  $K$ . Nosači su na svojim krajevima izloženi dejstvu pritisnih aksijalnih sila  $F_1$  i  $F_2$ , slika 2.1.1. Neka su funkcije pomeranja u longitudinalnom i transverznom pravcu kao i ugao zaokretanja poprečnog preseka  $u_{T1}(y, z, t)$ ,  $w_{T1}(y, z, t)$ ,  $\psi^0_{T1}(z, t)$ ,  $u_{T2}(y, z, t)$ ,  $w_{T2}(y, z, t)$  i  $\psi^0_{T2}(z, t)$ . Analogno relaciji (1.2.18), sada za sistem dva nosača važe jednačine pomeranja

$$u_{T1}(y, z, t) = u^0_{T1}(z, t) + y\psi^0_{T1}(z, t), \quad w_{T1}(y, z, t) = w^0_{T1}(z, t), \quad (2.2.1)$$

$$u_{T2}(y, z, t) = u^0_{T2}(z, t) + y\psi^0_{T2}(z, t), \quad w_{T2}(y, z, t) = w^0_{T2}(z, t). \quad (2.2.2)$$

Deformacije u funkciji pomeranja i veze između napona i deformacije po Hooke-ovom zakonu su

$$\varepsilon_{z1}(z, t) = \frac{\partial u_{T1}^0(z, t)}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_{T1}^0(z, t)}{\partial z}, \quad \gamma_{zy1}(z, t) = \frac{\partial w_{T1}^0(z, t)}{\partial z} + \psi_{T1}^0(z, t), \quad (2.2.3)$$

$$\varepsilon_{z2}(z, t) = \frac{\partial u_{T2}^0(z, t)}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_{T2}^0(z, t)}{\partial z}, \quad \gamma_{zy2}(z, t) = \frac{\partial w_{T2}^0(z, t)}{\partial z} + \psi_{T2}^0(z, t), \quad (2.2.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{z1} \\ \tau_{zy1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z1} \\ \gamma_{zy1} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{z2} \\ \tau_{zy2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z2} \\ \gamma_{zy2} \end{Bmatrix}. \quad (2.2.5)$$

Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\delta W_{in1} = -\rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{T1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{T1}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{T1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{T1}(y, z, t) \right] dy dz, \quad (2.2.6)$$

$$\delta W_{in2} = -\rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{T2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{T2}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{T2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{T2}(y, z, t) \right] dy dz. \quad (2.2.7)$$

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\delta W_{V1} = -b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} [\sigma_{z1}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) + \tau_{zy1}(z, t) \delta \gamma_{zy1}(z, t)] dy dz, \quad (2.2.8)$$

$$\delta W_{V2} = -b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} [\sigma_{z2}(z, t) \delta \varepsilon_{z2}(z, t) + \tau_{zy2}(z, t) \delta \gamma_{zy2}(z, t)] dy dz. \quad (2.2.9)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila je oblika

$$\delta W_{ex1} = \int_0^l \left[ \delta w_{T1}^0(z, t) K (w_{T2}^0(z, t) - w_{T1}^0(z, t)) + F_1 \frac{\partial w_{T1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T1}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz, \quad (2.2.10)$$

$$\delta W_{ex2} = \int_0^l \left[ \delta w_{T2}^0(z, t) K (w_{T1}^0(z, t) - w_{T2}^0(z, t)) + F_2 \frac{\partial w_{T2}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T2}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz, \quad (2.2.11)$$

Zamenom jednačina (2.2.6-2.2.11) u opštu jednačinu principa virtuelnog rada  $\delta W_{ini} + \delta W_{Vi} + \delta W_{exi} = 0$ ,  $i = 1, 2$  dobijamo

$$\begin{aligned}
& -b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} [\sigma_{z1}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) + \tau_{zy1}(z, t) \delta \gamma_{zy1}(z, t)] dy dz - \\
& -\rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{T1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{T1}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{T1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{T1}(y, z, t) \right] dy dz + \\
& + \int_0^l \left[ \delta w_{T1}^0(z, t) K (w_{T2}^0(z, t) - w_{T1}^0(z, t)) + F_1 \frac{\partial w_{T1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T1}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0, \quad (2.2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} [\sigma_{z2}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) + \tau_{zy2}(z, t) \delta \gamma_{zy2}(z, t)] dy dz - \\
& -\rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{T2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{T2}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{T2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{T2}(y, z, t) \right] dy dz + \\
& + \int_0^l \left[ \delta w_{T2}^0(z, t) K (w_{T1}^0(z, t) - w_{T2}^0(z, t)) + F_2 \frac{\partial w_{T2}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T2}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0. \quad (2.2.13)
\end{aligned}$$

Sukcesivnom primenom Green-ove teoreme na izraze (2.2.12-2.2.13) dobijamo jednačine oscilovanja sistema elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa u obliku

$$\begin{aligned}
\rho A_1 \frac{\partial^2 w_{T1}^0(z, t)}{\partial t^2} \\
- G A_1 k \left( \frac{\partial^2 w_{T1}^0(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_{T1}^0(z, t)}{\partial x} \right) + F_1 \frac{\partial^2 w_{T1}^0(z, t)}{\partial z^2} + K (w_{T1}^0(z, t) - w_{T2}^0(z, t)) = 0, \quad (2.2.14)
\end{aligned}$$

$$\rho I_{x1} \frac{\partial^2 \psi_{T1}^0(z, t)}{\partial t^2} - E I_{x1} \frac{\partial^2 \psi_{T1}^0(z, t)}{\partial z^2} + G A_1 k \left( \frac{\partial w_{T1}^0(z, t)}{\partial z} + \psi_{T1}^0(z, t) \right) = 0, \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned}
\rho A_2 \frac{\partial^2 w_{T2}^0(z, t)}{\partial t^2} \\
- G A_2 k \left( \frac{\partial^2 w_{T2}^0(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_{T2}^0(z, t)}{\partial x} \right) + F_2 \frac{\partial^2 w_{T2}^0(z, t)}{\partial z^2} + K (w_{T2}^0(z, t) - w_{T1}^0(z, t)) = 0, \quad (2.2.16)
\end{aligned}$$

$$\rho I_{x2} \frac{\partial^2 \psi_{T2}^0(z, t)}{\partial t^2} - E I_{x2} \frac{\partial^2 \psi_{T2}^0(z, t)}{\partial z^2} + G A_2 k \left( \frac{\partial w_{T2}^0(z, t)}{\partial z} + \psi_{T2}^0(z, t) \right) = 0, \quad (2.2.17)$$

Početni i granični uslovi sistema dva elastično povezana slobodno oslonjena nosača Timoshenko-vog tipa su

$$w_{Ti}^0(z, 0) = \tilde{w}_{i0}(z), \quad \frac{dw_{Ti}^0(z, 0)}{dt} = \tilde{v}_{i0}(z), \quad \psi_{Ti}^0(z, 0) = \tilde{\psi}_{i0}(z), \quad \frac{d\psi_{Ti}^0(z, 0)}{dt} = \tilde{\Theta}_{i0}(z), \quad (2.2.18)$$

$$w_{Ti}^0(0, t) = \frac{d^2 w_{Ti}^0(0, t)}{dz^2} = \frac{d^2 w_{Ti}^0(l, t)}{dz^2} = w_{Ti}^0(l, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.19)$$

$$\frac{d\psi_{Ti}^0(0, t)}{dz} = \frac{d\psi_{Ti}^0(l, t)}{dz} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.2.20)$$

Smatrajući da je kretanje tačaka nosača harmonijsko, rešenja jednačina (2.2.14-2.2.17) pretpostavljamo u obliku proizvoda funkcija

$$w_{Ti}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \tilde{T}_{in}(t), \quad \psi_{Ti}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) \tilde{T}_{in(r)}(t), \quad i = 1, 2, \quad (2.2.21)$$

gde su  $\tilde{T}_{in}(t)$  i  $\tilde{T}_{in(r)}(t)$  nepoznate funkcije vremena, a funkcije  $Z_n(z)$  i  $\Psi_n(z)$  funkcije osnovnih oblika oscilovanja

$$Z_n(z) = \sin(k_n z), \quad \Psi_n(z) = \cos(k_n z), \quad k_n = n\pi/l, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.22)$$

Zamenom pretpostavljenih rešenja (2.2.21) u jednačine transversalnih oscilacija sistema dva elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa (2.2.14-2.2.17) dobijamo sistem četiri diferencijalne jednačine drugog reda u obliku

$$\begin{bmatrix} A_1 \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{T}}_{1n}(t) \\ \ddot{\tilde{T}}_{2n}(t) \\ \ddot{\tilde{T}}_{1n(r)}(t) \\ \ddot{\tilde{T}}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix} + \quad (2.2.23)$$

$$+ \begin{bmatrix} A_1 G k k_n^2 - F_1 k_n^2 + K & -K & A_1 G k k_n & 0 \\ -K & A_2 G k k_n^2 - F_2 k_n^2 + K & 0 & A_2 G k k_n \\ A_1 G k k_n & 0 & A_1 G k + E I_1 k_n^2 & 0 \\ 0 & A_2 G k k_n & 0 & A_2 G k + E I_2 k_n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{1n}(t) \\ \tilde{T}_{2n}(t) \\ \tilde{T}_{1n(r)}(t) \\ \tilde{T}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Rešenja sistema jednačina (2.2.23) pretpostavljamo u sledećem obliku

$$\tilde{T}_{1n} = \tilde{C}_n e^{j\tilde{\omega}_n t}, \quad \tilde{T}_{2n} = \tilde{D}_n e^{j\tilde{\omega}_n t}, \quad \tilde{T}_{1n(r)}(t) = \tilde{C}_{n(r)} e^{j\tilde{\omega}_n t}, \quad \tilde{T}_{2n(r)}(t) = \tilde{D}_{n(r)} e^{j\tilde{\omega}_n t}, \quad j = \sqrt{-1}. \quad (2.2.24)$$

Ako zamenimo pretpostavljena rešenja (2.2.24) u sistem jednačina (2.2.23) dobijamo sistem homogenih algebarskih jednačina koji ima netrivialnih rešenja kada je determinanta sistema jednaka nuli

$$\begin{bmatrix} A_1 G k k_n^2 - A_1 \rho \tilde{\omega}_n^2 - F_1 k_n^2 + K & -K & A_1 G k k_n & 0 \\ -K & A_2 G k k_n^2 - A_2 \rho \tilde{\omega}_n^2 - F_2 k_n^2 + K & 0 & A_2 G k k_n \\ A_1 G k k_n & 0 & A_1 G k + E I_1 k_n^2 - I_1 \rho \tilde{\omega}_n^2 & 0 \\ 0 & A_2 G k k_n & 0 & A_2 G k + E I_2 k_n^2 - I_2 \rho \tilde{\omega}_n^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_n \\ \tilde{D}_n \\ \tilde{C}_{n(r)} \\ \tilde{D}_{n(r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.25)$$

Karakterističnu jednačinu sistema (2.2.25) dobijamo iz uslova o egzistenciji netrivialnih rešenja u obliku polinoma osmog stepena. Ako uvedemo smenu  $\tilde{\lambda} = \tilde{\omega}_n^2$ , frekventna jednačina je

$$\tilde{\lambda}^4 + \tilde{c}_1 \tilde{\lambda}^3 + \tilde{c}_2 \tilde{\lambda}^2 + \tilde{c}_3 \tilde{\lambda} + \tilde{c}_4 = 0. \quad (2.2.26)$$

Konstante  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$  i  $\tilde{c}_4$  date su u prilogu 2.2.1 ([http://www.2shared.com/file/tcb0znSv/prilog\\_221.html](http://www.2shared.com/file/tcb0znSv/prilog_221.html)).

Polinom četvrtog stepena može se faktorizovati u sledećem obliku

$$(\tilde{\lambda}^2 + \tilde{p}_1 \tilde{\lambda} + \tilde{q}_1)(\tilde{\lambda}^2 + \tilde{p}_2 \tilde{\lambda} + \tilde{q}_2) = 0, \quad (2.2.27)$$

gde su

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \tilde{c}_1 \pm \sqrt{\tilde{c}_1^2 - 4\tilde{c}_2 + 4\tilde{\chi}_1} \right],$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\chi}_1 \pm \frac{\tilde{c}_1 \tilde{\chi}_1 - 2\tilde{c}_3}{\sqrt{\tilde{c}_1^2 - 4\tilde{c}_2 + 4\tilde{\chi}_1}} \right].$$

U izrazima  $\tilde{\chi}_1$  predstavlja jedan od korena jednačine trećeg stepena

$$\tilde{\chi}^3 - \tilde{c}_2 \tilde{\chi}^2 + (\tilde{c}_1 \tilde{c}_3 - 4\tilde{c}_4) \tilde{\chi} + (4\tilde{c}_2 \tilde{c}_4 - \tilde{c}_3^2 - \tilde{c}_1^2 \tilde{c}_4) = 0. \quad (2.2.28)$$

Posle faktorizacije jednačine (2.2.26) rešenja možemo napisati u obliku kvadrata prirodnih frekvencija



$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{n1}^2 = \tilde{\lambda}_1 &= -\frac{\tilde{p}_1}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{p}_1^2}{4} - \tilde{q}_1}, & \tilde{\omega}_{n2}^2 = \tilde{\lambda}_2 &= -\frac{\tilde{p}_2}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{p}_2^2}{4} - \tilde{q}_2}, \\
\tilde{\omega}_{n3}^2 = \tilde{\lambda}_3 &= -\frac{\tilde{p}_2}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{p}_2^2}{4} - \tilde{q}_2}, & \tilde{\omega}_{n4}^2 = \tilde{\lambda}_4 &= -\frac{\tilde{p}_1}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{p}_1^2}{4} - \tilde{q}_1}.
\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Tri korena jednačine (2.2.28) su

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_1 &= \tilde{c}_2/3 + 2\sqrt{-\tilde{Q}\cos(\tilde{\theta}/3)}, \\
\tilde{\chi}_2 &= \tilde{c}_2/3 + 2\sqrt{-\tilde{Q}\cos[(\tilde{\theta} + 2\pi)/3]}, \\
\tilde{\chi}_3 &= \tilde{c}_2/3 + 2\sqrt{-\tilde{Q}\cos[(\tilde{\theta} + 4\pi)/3]},
\end{aligned} \tag{2.2.30}$$

gde su

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta} &= \cos^{-1}\left(\tilde{S}/\sqrt{-\tilde{Q}^3}\right), & \tilde{Q} &= -\frac{1}{9}(\tilde{c}_2^2 - 3\tilde{c}_1\tilde{c}_3 + 12\tilde{c}_4), \\
\tilde{S} &= \frac{1}{54}(2\tilde{c}_2^3 - 9\tilde{c}_1\tilde{c}_2\tilde{c}_3 + 27\tilde{c}_3^2 + 27\tilde{c}_1^2\tilde{c}_4 - 72\tilde{c}_2\tilde{c}_4).
\end{aligned}$$

Izborom jednog od tri korena iz izraza (2.2.30) dobijamo jedinstvena rešenja jednačine (2.2.26).

Amplitude određujemo iz jednačine (2.2.25) za svaku od frekvencija, prilog 2.2.2 ([http://www.2shared.com/file/4\\_8DxOgf/prilog\\_222.html](http://www.2shared.com/file/4_8DxOgf/prilog_222.html)).

Opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina (2.2.23) je

oblika

$$\tilde{T}_{1n}(t) = \tilde{C}_{1n}e^{j\tilde{\omega}_{n1}t} + \tilde{C}_{2n}e^{-j\tilde{\omega}_{n1}t} + \tilde{C}_{3n}e^{j\tilde{\omega}_{n2}t} + \tilde{C}_{4n}e^{-j\tilde{\omega}_{n2}t}, \tag{2.2.31}$$

$$\tilde{T}_{2n}(t) = \tilde{D}_{1n}e^{j\tilde{\omega}_{n1}t} + \tilde{D}_{2n}e^{-j\tilde{\omega}_{n1}t} + \tilde{D}_{3n}e^{j\tilde{\omega}_{n2}t} + \tilde{D}_{4n}e^{-j\tilde{\omega}_{n2}t}, \tag{2.2.32}$$

$$\tilde{T}_{1n(r)}(t) = \tilde{C}_{1n(r)}e^{j\tilde{\omega}_{n3}t} + \tilde{C}_{2n(r)}e^{-j\tilde{\omega}_{n3}t} + \tilde{C}_{3n(r)}e^{j\tilde{\omega}_{n4}t} + \tilde{C}_{4n(r)}e^{-j\tilde{\omega}_{n4}t}, \tag{2.2.33}$$

$$\tilde{T}_{2n(r)}(t) = \tilde{D}_{1n(r)}e^{j\tilde{\omega}_{n3}t} + \tilde{D}_{2n(r)}e^{-j\tilde{\omega}_{n3}t} + \tilde{D}_{3n(r)}e^{j\tilde{\omega}_{n4}t} + \tilde{D}_{4n(r)}e^{-j\tilde{\omega}_{n4}t}, \tag{2.2.34}$$

odnosno

$$\tilde{T}_{1n}(t) = \sum_{i=1}^2 [\tilde{A}_{ni}\sin(\tilde{\omega}_{ni}t) + \tilde{B}_{ni}\cos(\tilde{\omega}_{ni}t)], \tag{2.2.35}$$

$$\tilde{T}_{2n}(t) = \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_{ni} [\tilde{A}_{ni} \sin(\tilde{\omega}_{ni} t) + \tilde{B}_{ni} \cos(\tilde{\omega}_{ni} t)], \quad (2.2.36)$$

$$\tilde{T}_{1n(r)}(t) = \sum_{g=3}^4 [\tilde{A}_{ng} \sin(\tilde{\omega}_{ng} t) + \tilde{B}_{ng} \cos(\tilde{\omega}_{ng} t)], \quad (2.2.37)$$

$$\tilde{T}_{2n(r)}(t) = \sum_{g=3}^4 \tilde{\alpha}_{ng} [\tilde{A}_{ng} \sin(\tilde{\omega}_{ng} t) + \tilde{B}_{ng} \cos(\tilde{\omega}_{ng} t)], \quad (2.2.38)$$

gde su  $\tilde{A}_{ni}$ ,  $\tilde{B}_{ni}$ ,  $\tilde{A}_{ng}$  i  $\tilde{B}_{ng}$  ( $i = 1, 2$ ;  $g=3, 4$ ) nepoznate konstante. Rešenja sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina slobodnih transversalnih oscilacija sistema dva elastično povezana slobodno oslonjena nosača uzimajući u obzir uticaje inercije rotacije i poprečnog smicanja su oblika

$$w_{T1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \tilde{T}_{1n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 [\tilde{A}_{ni} \sin(\tilde{\omega}_{ni} t) + \tilde{B}_{ni} \cos(\tilde{\omega}_{ni} t)], \quad (2.2.39)$$

$$w_{T2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \tilde{T}_{2n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_{ni} [\tilde{A}_{ni} \sin(\tilde{\omega}_{ni} t) + \tilde{B}_{ni} \cos(\tilde{\omega}_{ni} t)]. \quad (2.2.40)$$

$$\psi_{T1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) \tilde{T}_{1n(r)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 [\tilde{A}_{ng} \sin(\tilde{\omega}_{ng} t) + \tilde{B}_{ng} \cos(\tilde{\omega}_{ng} t)], \quad (2.2.41)$$

$$\psi_{T2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) \tilde{T}_{2n(r)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 \tilde{\alpha}_{ng} [\tilde{A}_{ng} \sin(\tilde{\omega}_{ng} t) + \tilde{B}_{ng} \cos(\tilde{\omega}_{ng} t)]. \quad (2.2.42)$$

Nepoznate konstante  $\tilde{A}_{ni}$ ,  $\tilde{B}_{ni}$ ,  $\tilde{A}_{ng}$  i  $\tilde{B}_{ng}$  ( $i = 1, 2$ ;  $g=3, 4$ ) određujemo na osnovu početnih uslova (2.2.18) korišćenjem uslova ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija

$$\int_0^l Z_n Z_m dx = \int_0^l \sin(k_n z) \sin(k_m z) dz = c \delta_{nm},$$

$$c = \int_0^l Z_n^2 dx = \int_0^l [\sin(k_n z)]^2 dz = \frac{l}{2}, \quad c = \int_0^l \Psi_n^2 dz = \int_0^l [\cos(k_n z)]^2 dz = \frac{l}{2}. \quad (2.2.43)$$

gde je  $\delta_{nm}$  Kronecker-ova delta funkcija. Ako zamenimo početne uslove (2.2.18) u izraze (2.2.39 – 2.2.42) dobijamo

$$\begin{aligned}
w_{T1}^0(z, 0) = \tilde{w}_{10}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \tilde{B}_{ni}, \quad w_{T2}^0(z, 0) = \tilde{w}_{20}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_{ni} \tilde{B}_{ni}, \\
\dot{w}_{T1}^0(z, 0) = \tilde{v}_{10}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \tilde{\omega}_{ni} \tilde{A}_{ni}, \quad \dot{w}_{T2}^0(z, 0) = \tilde{v}_{20}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_{ni} \tilde{\omega}_{ni} \tilde{A}_{ni}, \\
\psi_{T1}^0(z, 0) = \tilde{\psi}_{10}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 \tilde{B}_{ng}, \quad \psi_{T2}^0(z, 0) = \tilde{\psi}_{20}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 \tilde{\alpha}_{ng} \tilde{B}_{ng}, \\
\dot{\psi}_{T1}^0(z, 0) = \tilde{\theta}_{10}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 \tilde{\omega}_{ng} \tilde{A}_{ng}, \quad \dot{\psi}_{T2}^0(z, 0) = \tilde{\theta}_{20}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 \tilde{\alpha}_{ng} \tilde{\omega}_{ng} \tilde{A}_{ng}.
\end{aligned} \tag{2.2.44}$$

Množenjem izraza (2.2.44) odgovarajućim sopstvenim funkcijima  $Z_n$ , odnosno  $\Psi_n$  integracijom po promenljivoj  $z$  od 0 do  $l$  i korišćenjem uslova ortogonalnosti (2.2.43) dobijamo

$$\frac{2}{l} \int_0^l \tilde{w}_{10} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=1}^2 \tilde{B}_{ni}, \quad \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{w}_{20} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_{ni} \tilde{B}_{ni}, \tag{2.2.45}$$

$$\frac{2}{l} \int_0^l \tilde{v}_{10} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=1}^2 \tilde{\omega}_{ni} \tilde{A}_{ni}, \quad \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{v}_{20} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_{ni} \tilde{\omega}_{ni} \tilde{A}_{ni}, \tag{2.2.46}$$

$$\frac{2}{l} \int_0^l \tilde{\psi}_{10} \cos(k_n z) dz = \sum_{g=3}^4 \tilde{B}_{ng}, \quad \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{\psi}_{20} \cos(k_n z) dz = \sum_{g=3}^4 \tilde{\alpha}_{ng} \tilde{B}_{ng}, \tag{2.2.47}$$

$$\frac{2}{l} \int_0^l \tilde{\theta}_{10} \cos(k_n z) dz = \sum_{g=3}^4 \tilde{\omega}_{ng} \tilde{A}_{ng}, \quad \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{\theta}_{20} \cos(k_n z) dz = \sum_{g=3}^4 \tilde{\alpha}_{ng} \tilde{\omega}_{ng} \tilde{A}_{ng}. \tag{2.2.48}$$

Nakon rešavanja sistema jednačina (2.2.45-2.2.48) nepoznate konstante dobijamo u sledećem obliku

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{n1} &= \frac{2}{\tilde{\omega}_{n1}(\tilde{\alpha}_{n2} - \tilde{\alpha}_{n1})l} \int_0^l (\tilde{v}_{10} \tilde{\alpha}_{n2} - \tilde{v}_{20}) \sin(k_n z) dz, \quad \tilde{A}_{n2} = \frac{2}{\tilde{\omega}_{n2}(\tilde{\alpha}_{n1} - \tilde{\alpha}_{n2})l} \int_0^l (\tilde{v}_{20} \tilde{\alpha}_{n1} - \tilde{v}_{10}) \sin(k_n z) dz, \\
\tilde{B}_{n1} &= \frac{2}{(\tilde{\alpha}_{n2} - \tilde{\alpha}_{n1})l} \int_0^l (\tilde{w}_{10} \tilde{\alpha}_{n2} - \tilde{w}_{20}) \sin(k_n z) dz, \quad \tilde{B}_{n2} = \frac{2}{(\tilde{\alpha}_{n1} - \tilde{\alpha}_{n2})l} \int_0^l (\tilde{w}_{10} \tilde{\alpha}_{n1} - \tilde{w}_{20}) \sin(k_n z) dz, \\
\tilde{A}_{n3} &= \frac{2}{\tilde{\omega}_{n3}(\tilde{\alpha}_{n4} - \tilde{\alpha}_{n3})l} \int_0^l (\tilde{\theta}_{10} \tilde{\alpha}_{n4} - \tilde{\theta}_{20}) \cos(k_n z) dz, \quad \tilde{A}_{n4} = \frac{2}{\tilde{\omega}_{n4}(\tilde{\alpha}_{n3} - \tilde{\alpha}_{n4})l} \int_0^l (\tilde{\theta}_{20} \tilde{\alpha}_{n3} - \tilde{\theta}_{10}) \cos(k_n z) dz, \\
\tilde{B}_{n3} &= \frac{2}{(\tilde{\alpha}_{n4} - \tilde{\alpha}_{n3})l} \int_0^l (\tilde{\psi}_{10} \tilde{\alpha}_{n4} - \tilde{\psi}_{20}) \cos(k_n z) dz, \quad \tilde{B}_{n4} = \frac{2}{(\tilde{\alpha}_{n3} - \tilde{\alpha}_{n4})l} \int_0^l (\tilde{\psi}_{10} \tilde{\alpha}_{n3} - \tilde{\psi}_{20}) \cos(k_n z) dz.
\end{aligned} \tag{2.2.49}$$

### 2.3 Slobodne oscilacije dva elastično povezana nosača Reddy-Bickford-ovog tipa

Neka su kao u slučaju Timoshenko-vog modela nosači istih dužina  $l$ , povezani elastičnim slojem krutosti  $K$ . Nosači su na svojim krajevima izloženi dejstvu aksijalnih sila  $F_1$  i  $F_2$ , slika

2.1.1. Označimo funkcije pomeranja u longitudinalnom i transverzalnom pravcu kao i ugao zaokretanja poprečnog preseka nosača na neutralnoj liniji  $u_{RB1}(y, z, t)$ ,  $w_{RB1}(y, z, t)$ ,  $\psi_{RB1}^0(z, t)$ ,  $u_{RB2}(y, z, t)$ ,  $w_{RB2}(y, z, t)$  i  $\psi_{RB2}^0(z, t)$ . Analogno relaciji (1.2.29), za sistem dva nosača važe jednačine pomeranja

$$\begin{aligned} u_{RB1}(y, z, t) &= u_{RB1}^0(z, t) + y\psi_{RB1}^0(z, t) - \alpha y^3 \left( \psi_{RB1}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \right), \\ w_{RB1}(y, z, t) &= w_{RB1}^0(z, t), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} u_{RB2}(y, z, t) &= u_{RB2}^0(z, t) + y\psi_{RB2}^0(z, t) - \alpha y^3 \left( \psi_{RB2}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} \right), \\ w_{RB2}(y, z, t) &= w_{RB2}^0(z, t). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Deformacije u funkciji pomeranja i veze između napona i deformacije po Hooke-ovom zakonu su

$$\varepsilon_{z1}(z, t) = \frac{\partial u_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} - \alpha y^3 \left( \frac{\partial \psi_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z^2} \right), \quad (2.3.3)$$

$$\gamma_{zy1}(z, t) = \psi_{RB1}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} - \beta y^2 \left( \psi_{RB1}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \right), \quad (2.3.4)$$

$$\varepsilon_{z2}(z, t) = \frac{\partial u_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} - \alpha y^3 \left( \frac{\partial \psi_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z^2} \right), \quad (2.3.5)$$

$$\gamma_{zy2}(z, t) = \psi_{RB2}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} - \beta y^2 \left( \psi_{RB2}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} \right), \quad (2.3.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{z1} \\ \tau_{zy1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z1} \\ \gamma_{zy1} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{z2} \\ \tau_{zy2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z2} \\ \gamma_{zy2} \end{Bmatrix}. \quad (2.3.7)$$

Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\delta W_{in1} = -\rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{RB1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{T1}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{RB1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{T1}(y, z, t) \right] dy dz, \quad (2.3.8)$$

$$\delta W_{in2} = -\rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{RB2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{T2}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{RB2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{T2}(y, z, t) \right] dy dz. \quad (2.3.9)$$

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\delta W_{V1} = -b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} [\sigma_{z1}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) + \tau_{zy1}(z, t) \delta \gamma_{zy1}(z, t)] dy dz, \quad (2.3.10)$$

$$\delta W_{V2} = -b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} [\sigma_{z2}(z, t) \delta \varepsilon_{z2}(z, t) + \tau_{zy2}(z, t) \delta \gamma_{zy2}(z, t)] dy dz. \quad (2.3.11)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila je oblika

$$\delta W_{ex1} = \int_0^l \left[ \delta w_{RB1}^0(z, t) K(w_{T2}^0(z, t) - w_{T1}^0(z, t)) + F_1 \frac{\partial w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz, \quad (2.3.12)$$

$$\delta W_{ex2} = \int_0^l \left[ \delta w_{RB2}^0(z, t) K(w_{RB1}^0(z, t) - w_{RB2}^0(z, t)) + F_2 \frac{\partial w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz, \quad (2.3.13)$$

Zamenom jednačina (2.3.8-2.3.11) u opštu jednačinu principa virtuelnog rada  $\delta W_{ini} + \delta W_{Vi} + \delta W_{exi} = 0$ ,  $i = 1, 2$  dobijamo

$$\begin{aligned} & -b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} [\sigma_{z1}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) + \tau_{zy1}(z, t) \delta \gamma_{zy1}(z, t)] dy dz - \\ & -\rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{RB1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{RB1}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{RB1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{RB1}(y, z, t) \right] dy dz + \\ & + \int_0^l \left[ \delta w_{RB1}^0(z, t) K(w_{RB2}^0(z, t) - w_{RB1}^0(z, t)) + F_1 \frac{\partial w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0, \quad (2.3.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} [\sigma_{z2}(z, t) \delta \varepsilon_{z2}(z, t) + \tau_{zy2}(z, t) \delta \gamma_{zy2}(z, t)] dy dz - \\ & -\rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{RB2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{RB2}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{RB2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{RB2}(y, z, t) \right] dy dz + \\ & + \int_0^l \left[ \delta w_{RB2}^0(z, t) K(w_{RB1}^0(z, t) - w_{RB2}^0(z, t)) + F_2 \frac{\partial w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0. \quad (2.3.15) \end{aligned}$$

Sukcesivnom primenom Green-ove teoreme na izraze (2.3.14-2.3.15) dobijamo jednačine oscilovanja sistema elastično povezanih nosača Reddy-Bickford-ovog tipa u obliku

$$C_w^{4,0} \frac{\partial^4 w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z^4} + C_w^{2,2} \frac{\partial^4 w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + C_w^{2,0} \frac{\partial^2 w_{RB}^0(z, t)}{\partial z^2} + C_w^{0,2} \frac{\partial^2 w_{RB1}^0(z, t)}{\partial t^2} + C_\psi^{1,2} \frac{\partial^3 \psi_{RB1}^0(z, t)}{\partial z \partial t^2}$$

$$+C_{\psi}^{1,0} \frac{\partial \psi_{RB1}^0(z,t)}{\partial z} + C_{\psi}^{3,0} \frac{\partial^3 \psi_{RB1}^0(z,t)}{\partial z^3} + K(w_{RB1}^0(z,t) - w_{RB2}^0(z,t)) = 0, \quad (2.3.16)$$

$$C_w^{3,0} \frac{\partial^3 w_{RB1}^0(z,t)}{\partial z^3} + C_w^{1,2} \frac{\partial^3 w_{RB1}^0(z,t)}{\partial z \partial t^2} + C_w^{1,0} \frac{\partial w_{RB1}^0(z,t)}{\partial z} + C_{\psi}^{2,0} \frac{\partial^2 \psi_{RB1}^0(z,t)}{\partial z^2} \\ + C_{\psi}^{0,2} \frac{\partial^2 \psi_{RB1}^0(z,t)}{\partial t^2} + C_{\psi}^{0,0} \psi_{RB1}^0(z,t) = 0, \quad (2.3.17)$$

$$D_w^{4,0} \frac{\partial^4 w_{RB2}^0(z,t)}{\partial z^4} + D_w^{2,2} \frac{\partial^4 w_{RB2}^0(z,t)}{\partial z^2 \partial t^2} + D_w^{2,0} \frac{\partial^2 w_{RB2}^0(z,t)}{\partial z^2} + D_w^{0,2} \frac{\partial^2 w_{RB2}^0(z,t)}{\partial t^2} + D_{\psi}^{1,2} \frac{\partial^3 \psi_{RB2}^0(z,t)}{\partial z \partial t^2} \\ + D_{\psi}^{1,0} \frac{\partial \psi_{RB2}^0(z,t)}{\partial z} + D_{\psi}^{3,0} \frac{\partial^3 \psi_{RB2}^0(z,t)}{\partial z^3} + K(w_{RB2}^0(z,t) - w_{RB1}^0(z,t)) = 0, \quad (2.3.18)$$

$$D_w^{3,0} \frac{\partial^3 w_{RB2}^0(z,t)}{\partial z^3} + D_w^{1,2} \frac{\partial^3 w_{RB2}^0(z,t)}{\partial z \partial t^2} + D_w^{1,0} \frac{\partial w_{RB2}^0(z,t)}{\partial z} + D_{\psi}^{2,0} \frac{\partial^2 \psi_{RB2}^0(z,t)}{\partial z^2} \\ + D_{\psi}^{0,2} \frac{\partial^2 \psi_{RB2}^0(z,t)}{\partial t^2} + D_{\psi}^{0,0} \psi_{RB2}^0(z,t) = 0, \quad (2.3.19)$$

gde su

$$C_w^{4,0} = \frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 E, \quad C_w^{2,2} = -\frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 \rho, \quad C_w^{2,0} = -\frac{1}{80} b_1 G \beta^2 h_1^5 + \frac{1}{6} b G \beta h_1^3 - b_1 G h_1 + F_1,$$

$$C_w^{0,2} = b_1 h_1 \rho, \quad C_{\psi}^{1,2} = \frac{1}{80} b_1 h_1^5 \alpha \rho - \frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 \rho, \quad C_{\psi}^{1,0} = -\frac{1}{80} b_1 G \beta^2 h_1^5 + \frac{1}{6} b_1 G \beta h_1^3 - b_1 G h_1,$$

$$C_{\psi}^{3,0} = \frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 E - \frac{1}{80} b_1 h_1^5 \alpha E, \quad C_w^{3,0} = \frac{1}{80} b_1 h_1^5 \alpha E - \frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 E, \quad C_w^{1,2} = \frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 \rho - \\ - \frac{1}{80} b_1 h_1^5 \alpha \rho,$$

$$C_w^{1,0} = \frac{1}{80} b_1 G \beta^2 h_1^5 - \frac{1}{6} b_1 G \beta h_1^3 + b_1 G h_1, \quad C_{\psi}^{2,0} = -\frac{1}{448} b_1 \alpha^2 E h_1^7 + \frac{1}{40} b_1 \alpha E h_1^5 - \frac{1}{12} b_1 E h_1^3,$$

$$C_{\psi}^{0,2} = \frac{1}{448} b_1 \alpha^2 \rho h_1^7 - \frac{1}{40} b_1 \alpha \rho h_1^5 + \frac{1}{12} b_1 \rho h_1^3, \quad C_{\psi}^{0,0} = \frac{1}{80} b_1 \beta^2 G h_1^5 - \frac{1}{6} b_1 \beta G h_1^3 + b_1 G h_1,$$

(2.3.20)

$$\begin{aligned}
D_w^{4,0} &= \frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 E, \quad D_w^{2,2} = -\frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 \rho, \quad D_w^{2,0} = -\frac{1}{80} b_2 G \beta^2 h_2^5 + \frac{1}{6} b G \beta h_2^3 - b_2 G h_2 + F_2, \\
D_w^{0,2} &= b_2 h_2 \rho, \quad D_\psi^{1,2} = \frac{1}{80} b_2 h_2^5 \alpha \rho - \frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 \rho, \quad D_\psi^{1,0} = -\frac{1}{80} b_2 G \beta^2 h_2^5 + \frac{1}{6} b_2 G \beta h_2^3 - b_2 G h_2, \\
D_\psi^{3,0} &= \frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 E - \frac{1}{80} b_2 h_2^5 \alpha E, \quad D_w^{3,0} = \frac{1}{80} b_2 h_2^5 \alpha E - \frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 E, \quad D_w^{1,2} = \frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 \rho - \\
&\frac{1}{80} b_2 h_2^5 \alpha \rho, \\
D_w^{1,0} &= \frac{1}{80} b_2 G \beta^2 h_2^5 - \frac{1}{6} b_2 G \beta h_2^3 + b_2 G h_2, \quad D_\psi^{2,0} = -\frac{1}{448} b_2 \alpha^2 E h_2^7 + \frac{1}{40} b_2 \alpha E h_2^5 - \frac{1}{12} b_2 E h_2^3, \\
D_\psi^{0,2} &= \frac{1}{448} b_2 \alpha^2 \rho h_2^7 - \frac{1}{40} b_2 \alpha \rho h_2^5 + \frac{1}{12} b_2 \rho h_2^3, \quad D_\psi^{0,0} = \frac{1}{80} b_2 \beta^2 G h_2^5 - \frac{1}{6} b_2 \beta G h_2^3 + b_2 G h_2,
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Za razliku od Euler-ove i Timoshenko-ve teorije nosača koje pripadaju grupi teorija četvrtog reda, Reddy-Bickford-ova predstavlja teoriju grupe šestog reda, i potrebno nam je 6 graničnih uslova (po tri na svakom kraju nosača). Ako primenimo varijaciju na konstitutivne relacije (2.3.10-2.3.11) virtuelnih radova unutrašnjih sila dobijamo

$$\begin{aligned}
-\frac{dM_{zi}}{dz} + (Q_{zi} - \beta R_{zi}) &= 0, \\
-\alpha \frac{d^2 P_{zi}}{dz^2} - \frac{d}{dz} (Q_{zi} - \beta R_{zi}) &= 0, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

gde su

$$M_{zi} = \int_{A_i} y \sigma_{zi} dA - \alpha P_{zi}, \quad Q_{zi} = \int_{A_i} \tau_{zyi} dA, \quad P_{zi} = \int_{A_i} y^3 \sigma_{zi} dA, \quad R_{zi} = \int_{A_i} y^2 \tau_{zyi} dA, \tag{2.3.23}$$

redom moment savijanja, sila smicanja, rezultujući napon u normalnom i rezultujući napon u tangencijalnom pravcu. Zamenom relacija (2.3.3-2.3.7) u (2.3.23) dobijamo

$$\begin{aligned}
M_{zi} &= -\frac{1}{80} \alpha b_i E h_i^5 \frac{\partial^2 w_{RBi}}{\partial z^2} - \frac{1}{240} b_i E h_i^3 (3\alpha h_i^2 - 20) \frac{\partial \psi_{RBi}}{\partial z} - \alpha P_{zi}, \\
Q_{zi} &= -\frac{1}{12} b_i G h_i (\beta h_i^2 - 12) \left( \frac{\partial w_{RBi}}{\partial z} + \psi_{RBi} \right), \\
P_{zi} &= -\frac{1}{448} \alpha b_i E h_i^7 \frac{\partial^2 w_{RBi}}{\partial z^2} - \frac{b_i E h_i^5 (5\alpha h_i^2 - 28)}{2240} \frac{\partial \psi_{RBi}}{\partial z}, \\
R_{zi} &= -\frac{1}{240} b_i G h_i^3 (3\beta h_i^2 - 20) \left( \frac{\partial w_{RBi}}{\partial z} + \psi_{RBi} \right).
\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

U slučaju slobodno oslonjenih nosača, moment i ugib na krajevima nosača mora biti jednak nuli, pa na osnovu relacija (2.3.24) slede po tri uslova na svakom od krajeva nosača:  $w_{RBi} = 0$ ,  $M_{zi} =$

0,  $P_{zi} = 0$ . Na osnovu relacija (2.3.24) granični uslovi se svode na uslove kao u slučaju Timoshenko-vog tipa nosača i oblika su

$$w_{RBi}^0(0, t) = \frac{d^2 w_{RBi}^0(0, t)}{dz^2} = \frac{d^2 w_{RBi}^0(l, t)}{dz^2} = w_{RBi}^0(l, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (2.3.25)$$

$$\frac{dw_{RBi}^0(0, t)}{dz} = \frac{dw_{RBi}^0(l, t)}{dz} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.3.26)$$

Početne uslove definišemo u sledećem obliku

$$w_{RBi}^0(z, 0) = \tilde{w}_{i0}(z), \quad \frac{dw_{RBi}^0(z, 0)}{dt} = \tilde{v}_{i0}(z), \quad \psi_{RBi}^0(z, 0) = \tilde{\psi}_{i0}(z), \quad \frac{d\psi_{RBi}^0(z, 0)}{dt} = \tilde{\theta}_{i0}(z), \quad (2.3.27)$$

Smatrajući da je kretanje tačaka nosača harmonijsko, rešenja jednačina (2.3.16-2.3.19) pretpostavljamo u obliku proizvoda funkcija

$$w_{RBi}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \tilde{T}_{in}(t), \quad \psi_{RBi}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) \tilde{T}_{in(r)}(t), \quad i = 1, 2, \quad (2.3.28)$$

gde su  $\tilde{T}_{in}(t)$  i  $\tilde{T}_{in(r)}$  nepoznate funkcije vremena a funkcije  $Z_n(z)$  i  $\Psi_n(z)$  funkcije osnovnih oblika oscilovanja

$$Z_n(z) = \sin(k_n z), \quad \Psi_n(z) = \cos(k_n z), \quad k_n = n\pi/l, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3.29)$$

Zamenom pretpostavljenih rešenja (2.3.28) u jednačine (2.3.16-2.3.19) dobijamo sistem četiri diferencijalne jednačine drugog reda u obliku

$$\begin{bmatrix} u_{11} & 0 & u_{13} & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 & u_{24} \\ u_{31} & 0 & u_{33} & 0 \\ 0 & u_{42} & 0 & u_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{T}}_{1n}(t) \\ \ddot{\tilde{T}}_{2n}(t) \\ \ddot{\tilde{T}}_{1n(r)}(t) \\ \ddot{\tilde{T}}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & -K & v_{13} & 0 \\ -K & v_{22} & 0 & v_{24} \\ v_{31} & 0 & v_{33} & 0 \\ 0 & v_{42} & 0 & v_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{T}_{1n}(t) \\ \tilde{T}_{2n}(t) \\ \tilde{T}_{1n(r)}(t) \\ \tilde{T}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.3.30)$$

gde su

$$u_{11} = \frac{1}{448} \rho b_1 h_1 (\alpha^2 h_1^6 k_n^2 + 448), \quad u_{13} = u_{31} = \frac{\alpha \rho b_1 h_1^5 k_n (5\alpha h_1^2 - 28)}{2240},$$



$$\begin{aligned}
u_{33} &= \frac{\rho b_1 h_1^3 [3\alpha h_1^2 (5\alpha h_1^2 - 56) + 560]}{6720}, u_{22} = \frac{1}{448} \rho b_2 h_2 (\alpha^2 h_2^6 k_n^2 + 448), \\
u_{24} = u_{42} &= \frac{\alpha \rho b_2 h_2^5 k_n (5\alpha h_2^2 - 28)}{2240}, u_{44} = \frac{\rho b_2 h_2^3 (3\alpha h_2^2 (5\alpha h_2^2 - 56) + 560)}{6720}, \\
v_{11} &= \frac{b_1 h_1 k_n^2 \{15\alpha^2 E h_1^6 k_n^2 + 28G[\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]\}}{6720} - F_1 k_n^2 + K, \\
v_{31} = v_{13} &= \frac{b_1 h_1 k_n \{3\alpha E h_1^4 k_n^2 (5\alpha h_1^2 - 28) + 28G[\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]\}}{6720}, \\
v_{22} &= \frac{b_2 h_2 k_n^2 \{15\alpha^2 E h_2^6 k_n^2 + 28G[\beta h_2^2 (3\beta h_2^2 - 40) + 240]\}}{6720} - F_2 k_n^2 + K, \\
v_{42} = v_{24} &= \frac{b_2 h_2 k_n \{3\alpha E h_2^4 k_n^2 (5\alpha h_2^2 - 28) + 28G[\beta h_2^2 (3\beta h_2^2 - 40) + 240]\}}{6720}, \\
v_{44} &= \frac{b_2 h_2 \{E h_2^2 k_n^2 [3\alpha h_2^2 (5\alpha h_2^2 - 56) + 560] + 28G[\beta h_2^2 (3\beta h_2^2 - 40) + 240]\}}{6720}.
\end{aligned}$$

Rešenja sistema jednačina (2.3.30) pretpostavljamo u sledećem obliku

$$\tilde{T}_{1n} = \tilde{C}_n e^{j\tilde{\omega}_n t}, \tilde{T}_{2n} = \tilde{D}_n e^{j\tilde{\omega}_n t}, \tilde{T}_{1n(r)}(t) = \tilde{C}_{n(r)} e^{j\tilde{\omega}_n t}, \tilde{T}_{2n(r)}(t) = \tilde{D}_{n(r)} e^{j\tilde{\omega}_n t}, j = \sqrt{-1}. \quad (2.3.31)$$

Ako zamenimo pretpostavljena rešenja (2.3.28) u sistem jednačina (2.3.16 – 2.3.19) dobijamo homogeni sistem algebarskih jednačina koji ima netrivialnih rešenja kada je determinanta sistema jednaka nuli

$$[\mathbf{P}_p]\{\mathbf{C}_c\} = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p_{11} & -K & p_{13} & 0 \\ -K & p_{22} & 0 & p_{24} \\ p_{31} & 0 & p_{33} & 0 \\ 0 & p_{42} & 0 & p_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{C}_n \\ \tilde{D}_n \\ \tilde{C}_{n(r)} \\ \tilde{D}_{n(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.3.32)$$

gde su

$$\begin{aligned}
p_{11} &= \frac{b_1 h_1 \{k_n^2 [15\alpha^2 h_1^6 (E k_n^2 - \rho \tilde{\omega}_n^2) + 28G[\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]] - 6720 \rho \omega_n^2\}}{6720} \\
&\quad - F_1 k_n^2 + K, \\
p_{31} = p_{13} &= \frac{b_1 h_1 k_n \{3\alpha h_1^4 (5\alpha h_1^2 - 28)(E k_n^2 - \rho \tilde{\omega}_n^2) + 28G[\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]\}}{6720}, \\
p_{22} &= \frac{b_2 h_2 \{k_n^2 [15\alpha^2 h_2^6 (E k_n^2 - \rho \tilde{\omega}_n^2) + 28G[\beta h_2^2 (3\beta h_2^2 - 40) + 240]] - 6720 \rho \tilde{\omega}_n^2\}}{6720} \\
&\quad - F_2 k_n^2 + K, \\
p_{42} = p_{24} &= \frac{b_2 h_2 k_n \{3\alpha h_2^4 (5\alpha h_2^2 - 28)(E k_n^2 - \rho \tilde{\omega}_n^2) + 28G[\beta h_2^2 (3\beta h_2^2 - 40) + 240]\}}{6720}, \\
p_{44} &= \frac{b_2 h_2 \{h_2^2 [3\alpha h_2^2 (5\alpha h_2^2 - 56) + 560](E k_n^2 - \rho \tilde{\omega}_n^2) + 28G[\beta h_2^2 (3\beta h_2^2 - 40) + 240]\}}{6720}.
\end{aligned}$$

Frekventnu jednačinu sistema (2.3.32) dobijamo iz uslova o egzistenciji netrivialnih rešenja  $\text{Det}[\mathbf{P}_p] = 0$ , u obliku polinoma osmog stepena. Ako uvedemo smenu  $\tilde{\lambda} = \tilde{\omega}_n^2$ , polinom možemo svesti na sledeći oblik

$$\tilde{\lambda}^4 + \tilde{c}_1 \tilde{\lambda}^3 + \tilde{c}_2 \tilde{\lambda}^2 + \tilde{c}_3 \tilde{\lambda} + \tilde{c}_4 = 0. \quad (2.3.33)$$

Konstante  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$  i  $\tilde{c}_4$  date su u prilogu 2.3.1 ([http://www.2shared.com/file/OtPhChr2/prilog\\_231.html](http://www.2shared.com/file/OtPhChr2/prilog_231.html)).

Polinom četvrtog stepena može se faktorizovati u sledećem obliku

$$\left(\tilde{\lambda}^2 + \tilde{p}_1 \tilde{\lambda} + \tilde{q}_1\right) \left(\tilde{\lambda}^2 + \tilde{p}_2 \tilde{\lambda} + \tilde{q}_2\right) = 0, \quad (2.3.34)$$

gde su

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \tilde{c}_1 \pm \sqrt{\tilde{c}_1^2 - 4\tilde{c}_2 + 4\tilde{\chi}_1} \right],$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\chi}_1 \pm \frac{\tilde{c}_1 \tilde{\chi}_1 - 2\tilde{c}_3}{\sqrt{\tilde{c}_1^2 - 4\tilde{c}_2 + 4\tilde{\chi}_1}} \right].$$

U izrazima  $\tilde{\chi}_1$  predstavlja jedan od korena jednačine trećeg stepena

$$\tilde{\chi}^3 - c_2 \tilde{\chi}^2 + (\tilde{c}_1 \tilde{c}_3 - 4\tilde{c}_4) \tilde{\chi} + (4\tilde{c}_2 \tilde{c}_4 - \tilde{c}_3^2 - \tilde{c}_1^2 \tilde{c}_4) = 0. \quad (2.3.35)$$

Posle faktorizacije jednačine (2.3.33) rešenja možemo napisati u obliku kvadrata prirodnih frekvencija

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{n1}^2 = \tilde{\lambda}_1 &= -\frac{\tilde{p}_1}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{p}_1^2}{4} - \tilde{q}_1}, & \tilde{\omega}_{n2}^2 = \tilde{\lambda}_2 &= -\frac{\tilde{p}_2}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{p}_2^2}{4} - \tilde{q}_2}, \\ \tilde{\omega}_{n3}^2 = \tilde{\lambda}_3 &= -\frac{\tilde{p}_2}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{p}_2^2}{4} - \tilde{q}_2}, & \tilde{\omega}_{n4}^2 = \tilde{\lambda}_4 &= -\frac{\tilde{p}_1}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{p}_1^2}{4} - \tilde{q}_1}. \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

Tri korena jednačine (2.3.35) su

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}_1 &= \tilde{c}_2/3 + 2\sqrt{-\tilde{Q}}\cos(\tilde{\theta}/3), \\
\tilde{\chi}_2 &= \tilde{c}_2/3 + 2\sqrt{-\tilde{Q}}\cos[(\tilde{\theta} + 2\pi)/3], \\
\tilde{\chi}_3 &= \tilde{c}_2/3 + 2\sqrt{-\tilde{Q}}\cos[(\tilde{\theta} + 4\pi)/3],
\end{aligned} \tag{2.3.37}$$

gde su

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta} &= \cos^{-1}\left(\frac{\tilde{S}}{\sqrt{-\tilde{Q}^3}}\right), \quad Q = -\frac{1}{9}(\tilde{c}_2^2 - 3\tilde{c}_1\tilde{c}_3 + 12\tilde{c}_4), \\
S &= \frac{1}{54}(2\tilde{c}_2^3 - 9\tilde{c}_1\tilde{c}_2\tilde{c}_3 + 27\tilde{c}_3^2 + 27\tilde{c}_1^2\tilde{c}_4 - 72\tilde{c}_2\tilde{c}_4).
\end{aligned}$$

Izborom jednog od tri korena iz izraza (2.3.37) dobijamo jedinstvena rešenja jednačine (2.3.33)

gde su četiri prirodne frekvencije sistema realni pozitivni koreni  $\tilde{\omega}_{n1} = \sqrt{\tilde{\lambda}_1}$ ,  $\tilde{\omega}_{n2} = \sqrt{\tilde{\lambda}_2}$ ,  $\tilde{\omega}_{n3} =$

$\sqrt{\tilde{\lambda}_3}$ ,  $\tilde{\omega}_{n4} = \sqrt{\tilde{\lambda}_4}$ . Amplitudne odnose određujemo iz jednačine (2.3.31) za svaku od frekvencija

prilog 2.3.2 ([http://www.2shared.com/file/wGTiFubh/prilog\\_232.html](http://www.2shared.com/file/wGTiFubh/prilog_232.html)). Opšte rešenje diferencijalnih jednačina

(2.3.30) je oblika

$$\tilde{T}_{1n}(t) = \tilde{C}_{1n}e^{j\tilde{\omega}_{n1}t} + \tilde{C}_{2n}e^{-j\tilde{\omega}_{n1}t} + \tilde{C}_{3n}e^{j\tilde{\omega}_{n2}t} + \tilde{C}_{4n}e^{-j\tilde{\omega}_{n2}t}, \tag{2.3.38}$$

$$\tilde{T}_{2n}(t) = \tilde{D}_{1n}e^{j\tilde{\omega}_{n1}t} + \tilde{D}_{2n}e^{-j\tilde{\omega}_{n1}t} + \tilde{D}_{3n}e^{j\tilde{\omega}_{n2}t} + \tilde{D}_{4n}e^{-j\tilde{\omega}_{n2}t}, \tag{2.3.39}$$

$$\tilde{T}_{1n(r)}(t) = \tilde{C}_{1n(r)}e^{j\tilde{\omega}_{n3}t} + \tilde{C}_{2n(r)}e^{-j\tilde{\omega}_{n3}t} + \tilde{C}_{3n(r)}e^{j\tilde{\omega}_{n4}t} + \tilde{C}_{4n(r)}e^{-j\tilde{\omega}_{n4}t}, \tag{2.3.40}$$

$$\tilde{T}_{2n(r)}(t) = \tilde{D}_{1n(r)}e^{j\tilde{\omega}_{n3}t} + \tilde{D}_{2n(r)}e^{-j\tilde{\omega}_{n3}t} + \tilde{D}_{3n(r)}e^{j\tilde{\omega}_{n4}t} + \tilde{D}_{4n(r)}e^{-j\tilde{\omega}_{n4}t}, \tag{2.3.41}$$

odnosno

$$\tilde{T}_{1n}(t) = \sum_{i=1}^2 \left[ \tilde{A}_{ni}\sin(\tilde{\omega}_{ni}t) + \tilde{B}_{ni}\cos(\tilde{\omega}_{ni}t) \right], \tag{2.3.42}$$

$$\tilde{T}_{2n}(t) = \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_{ni} \left[ \tilde{A}_{ni}\sin(\tilde{\omega}_{ni}t) + \tilde{B}_{ni}\cos(\tilde{\omega}_{ni}t) \right], \tag{2.3.43}$$

$$\tilde{T}_{1n(r)}(t) = \sum_{g=3}^4 \left[ \tilde{A}_{ng}\sin(\tilde{\omega}_{ng}t) + \tilde{B}_{ng}\cos(\tilde{\omega}_{ng}t) \right], \tag{2.3.44}$$

$$\tilde{T}_{2n(r)}(t) = \sum_{g=3}^4 \tilde{\alpha}_{ng} \left[ \tilde{A}_{ng}\sin(\tilde{\omega}_{ng}t) + \tilde{B}_{ng}\cos(\tilde{\omega}_{ng}t) \right], \tag{2.3.45}$$

gde su  $\tilde{A}_{ni}, \tilde{B}_{ni}, \tilde{A}_{ng}$  i  $\tilde{B}_{ng}$  ( $i = 1, 2; g=3, 4;$ ) nepoznate konstante. Rešenja sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina slobodnih transverzalnih oscilacija sistema dva elastično povezana slobodno oslonjena nosača uzimajući u obzir uticaje inercije rotacije i poprečnog smicanja su oblika

$$w_{RB1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \tilde{T}_{1n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 [\tilde{A}_{ni} \sin(\tilde{\omega}_{ni} t) + \tilde{B}_{ni} \cos(\tilde{\omega}_{ni} t)], \quad (2.3.46)$$

$$w_{RB2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \tilde{T}_{2n}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_{ni} [\tilde{A}_{ni} \sin(\tilde{\omega}_{ni} t) + \tilde{B}_{ni} \cos(\tilde{\omega}_{ni} t)]. \quad (2.3.47)$$

$$\psi_{RB1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) \tilde{T}_{1n(r)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 [\tilde{A}_{ng} \sin(\tilde{\omega}_{ng} t) + \tilde{B}_{ng} \cos(\tilde{\omega}_{ng} t)], \quad (2.3.48)$$

$$\psi_{RB2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) \tilde{T}_{2n(r)}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 \tilde{\alpha}_{ng} [\tilde{A}_{ng} \sin(\tilde{\omega}_{ng} t) + \tilde{B}_{ng} \cos(\tilde{\omega}_{ng} t)]. \quad (2.3.49)$$

Nepoznate konstante  $\tilde{A}_{ni}, \tilde{B}_{ni}, \tilde{A}_{ng}$  i  $\tilde{B}_{ng}$  ( $i = 1, 2; g=3, 4$ ) određujemo na osnovu početnih uslova (2.3.27) korišćenjem uslova ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija

$$\int_0^l Z_n Z_m dx = \int_0^l \sin(k_n z) \sin(k_m z) dz = c \delta_{nm},$$

$$c = \int_0^l Z_n^2 dx = \int_0^l [\sin(k_n z)]^2 dz = \frac{l}{2}, \quad c = \int_0^l \Psi_n^2 dz = \int_0^l [\cos(k_n z)]^2 dz = \frac{l}{2}. \quad (2.3.50)$$

Ako zamenimo početne uslove (2.3.27) unesemo u izraze (2.3.46 – 2.3.49) dobijamo

$$w_{RB1}^0(z, 0) = \tilde{w}_{10}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \tilde{B}_{ni}, w_{RB2}^0(z, 0) = \tilde{w}_{20}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_{ni} \tilde{B}_{ni},$$

$$\dot{w}_{RB1}^0(z, 0) = \tilde{v}_{10}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \tilde{\omega}_{ni} \tilde{A}_{ni}, \dot{w}_{RB2}^0(z, 0) = \tilde{v}_{20}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \tilde{\alpha}_{ni} \tilde{\omega}_{ni} \tilde{A}_{ni},$$

$$\psi_{RB1}^0(z, 0) = \tilde{\psi}_{10}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 \tilde{B}_{ng}, \psi_{T2}^0(z, 0) = \tilde{\psi}_{20}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 \tilde{\alpha}_{ng} \tilde{B}_{ng},$$

$$\dot{\psi}_{RB1}^0(z, 0) = \tilde{\Theta}_{10}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 \tilde{\omega}_{ng} \tilde{A}_{ng}, \dot{\psi}_{RB2}^0(z, 0) = \tilde{\Theta}_{20}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \sum_{g=3}^4 \tilde{\alpha}_{ng} \tilde{\omega}_{ng} \tilde{A}_{ng}.$$

(2.3.51)

Množenjem izraza (2.3.51) odgovarajućim sopstvenim funkcijama  $Z_n$ , odnosno  $\Psi_n$  integracijom po promenljivoj  $z$  od 0 do  $l$  i korišćenjem uslova ortogonalnosti (2.3.50) dobijamo

$$\frac{2}{l} \int_0^l \tilde{w}_{10} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=I}^2 \tilde{B}_{ni}, \quad \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{w}_{20} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=I}^2 \tilde{\alpha}_{ni} \tilde{B}_{ni}, \quad (2.3.52)$$

$$\frac{2}{l} \int_0^l \tilde{v}_{10} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=I}^2 \tilde{\omega}_{ni} \tilde{A}_{ni}, \quad \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{v}_{20} \sin(k_n z) dz = \sum_{i=I}^2 \tilde{\alpha}_{ni} \tilde{\omega}_{ni} \tilde{A}_{ni}, \quad (2.3.53)$$

$$\frac{2}{l} \int_0^l \tilde{\psi}_{10} \cos(k_n z) dz = \sum_{g=III}^4 \tilde{B}_{ng}, \quad \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{\psi}_{20} \cos(k_n z) dz = \sum_{g=III}^4 \tilde{\alpha}_{ng} \tilde{B}_{ng}, \quad (2.3.54)$$

$$\frac{2}{l} \int_0^l \tilde{\theta}_{10} \cos(k_n z) dz = \sum_{g=III}^4 \tilde{\omega}_{ng} \tilde{A}_{ng}, \quad \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{\theta}_{20} \cos(k_n z) dz = \sum_{g=III}^4 \tilde{\alpha}_{ng} \tilde{\omega}_{ng} \tilde{A}_{ng}. \quad (2.3.55)$$

Nakon rešavanja sistema jednačina (2.3.52 -2.3.55) nepoznate konstante dobijamo u sledećem obliku

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{n1} &= \frac{2}{\tilde{\omega}_{n1}(\tilde{\alpha}_{n2} - \tilde{\alpha}_{n1})l} \int_0^l (\tilde{v}_{10} \tilde{\alpha}_{n2} - \tilde{v}_{20}) \sin(k_n z) dz, & \tilde{A}_{n2} &= \frac{2}{\tilde{\omega}_{n2}(\tilde{\alpha}_{n1} - \tilde{\alpha}_{n2})l} \int_0^l (\tilde{v}_{20} \tilde{\alpha}_{n1} - \tilde{v}_{10}) \sin(k_n z) dz, \\ \tilde{B}_{n1} &= \frac{2}{(\tilde{\alpha}_{n2} - \tilde{\alpha}_{n1})l} \int_0^l (\tilde{w}_{10} \tilde{\alpha}_{n2} - \tilde{w}_{20}) \sin(k_n z) dz, & \tilde{B}_{n2} &= \frac{2}{(\tilde{\alpha}_{n1} - \tilde{\alpha}_{n2})l} \int_0^l (\tilde{w}_{10} \tilde{\alpha}_{n1} - \tilde{w}_{20}) \sin(k_n z) dz, \\ \tilde{A}_{n3} &= \frac{2}{\tilde{\omega}_{n3}(\tilde{\alpha}_{n4} - \tilde{\alpha}_{n3})l} \int_0^l (\tilde{\theta}_{10} \tilde{\alpha}_{n4} - \tilde{\theta}_{20}) \cos(k_n z) dz, & \tilde{A}_{n4} &= \frac{2}{\tilde{\omega}_{n4}(\tilde{\alpha}_{n3} - \tilde{\alpha}_{n4})l} \int_0^l (\tilde{\theta}_{20} \tilde{\alpha}_{n3} - \tilde{\theta}_{10}) \cos(k_n z) dz, \\ \tilde{B}_{n3} &= \frac{2}{(\tilde{\alpha}_{n4} - \tilde{\alpha}_{n3})l} \int_0^l (\tilde{\psi}_{10} \tilde{\alpha}_{n4} - \tilde{\psi}_{20}) \cos(k_n z) dz, & \tilde{B}_{n4} &= \frac{2}{(\tilde{\alpha}_{n3} - \tilde{\alpha}_{n4})l} \int_0^l (\tilde{\psi}_{10} \tilde{\alpha}_{n3} - \tilde{\psi}_{20}) \cos(k_n z) dz. \end{aligned}$$

## 2.4 Kritična sila izvijanja dva elastično povezana nosača i numerička analiza

Uslove statičke stabilnosti sistema dva elastično povezana nosača (Timoshenkovog i Reddy-Bickford-ovog tipa) odredićemo za slučaj kada su materijalne karakteristike i poprečni preseki nosača identični.

$$A_1 = A_2 = A, \quad I_1 = I_2 = I, \quad h_1 = h_2 = h, \quad b_1 = b_2 = b. \quad (2.4.1)$$

Pri porastu intenziteta pritisnih sila, prirodna frekvencija oscilovanja se smanjuje. Kada su intenziteti pritisnih sila jednaki kritičnoj vrednosti, frekvencija oscilovanja je jednaka nuli i sistem nosača se nalazi u stanju indiferentne ravnoteže. Ako uvedemo novu oznaku  $\zeta$  kao odnos pritisne aksijalne sile na drugom nosaču prema pritisnoj sili na prvom ( $F_2 = \zeta F_1$ ,  $0 \leq \zeta \leq 1$ ), tada rešavanjem frekventnih jednačina (2.2.26) i (2.3.33) uz uslove  $\tilde{\omega}_n = 0, \tilde{\tilde{\omega}}_n = 0$ , dobijamo dva rešenja od kojih je manje kritična sila izvijanja sistema, ref. [12]

$$[F_b^{kr}]_{Timoshenko} = \frac{(1 + \zeta)(C_b^2 k_n^4 + HR) - \sqrt{(1 + \zeta)^2 (C_b^2 k_n^4 + HR)^2 - 4\zeta C_b^2 k_n^4 (C_b^2 k_n^4 + 2HR)}}{2\zeta\eta R}. \quad (2.4.2)$$

Kritična sila izvijanja sistema dva elastično povezana nosača Reddy-Bickford-ovog tipa data je u prilogu 2.4.1 ([http://www.2shared.com/document/uV4OsB5Z/prilog\\_241.html](http://www.2shared.com/document/uV4OsB5Z/prilog_241.html)).

Analizirajmo uticaje inercije rotacije i poprečnog smicanja za parametre sistema iz referenci [2- 5]

$$\begin{aligned} E &= 1 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}, & \nu &= 0.34, & K_0 &= 2 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}, \\ \rho &= 2 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}, & A &= 5 \times 10^{-2} \text{ m}^2, & I &= 4 \times 10^{-4} \text{ m}^4, \\ l &= 10 \text{ m}, & b &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ m}, & h_1 &= \frac{2}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ m}, \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Vrednosti prirodnih frekvencija uzimajući u obzir uticaje inercije rotacije i poprečnog smicanja sistema dva elastično povezana nosača prikazana su u Tabelama 2.4.1-2.4.3. U numeričkom eksperimentu su korišćena dva seta vrednosti za modul klizanja i smicajni faktor: ref. Kaneko [24] u obliku  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $k = \frac{5+5\nu}{6+5\nu}$ , koji daje najbolje slaganje sa eksperimentalnim rezultatima, i na osnovu materijalnih karakteristika nosača za primer korišćen u referenci [12]  $G = 0.417 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ ,  $k = \frac{5}{6}$ . Razlike u aproksimacijama rešenja u zavisnosti od tipa modela prikazane su u tabelama 2.4.1-2.4.3 i na serijama slika 2.4.1-2.4.7 gde su korišćene vrednosti smicajnog faktora, modula klizanja i krutosti Winkler-ovog sloja iz tabele 2.4.1.

Tabela 2.4.1

Uticaji inercije rotacije i poprečnog smicanja  
na prirodne frekvencije  $\omega_{ni}$  [ $s^{-1}$ ] sistema dva elastično povezana nosača

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{5+5\nu}{6+5\nu}, \quad K = K_0, \quad h = h_1$						
$\omega_{n1}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
<b>Euler Ref. [2]</b>	19.7392088	78.95683521	177.6528792	315.8273408	493.48022	710.6115169
<b>Rayleigh</b>	19.73142068	78.83244614	177.0250126	313.8511075	488.6807037	700.7224681
<b>Timoshenko</b>	19.70750988	78.45416481	175.1450850	308.0582167	474.9781982	673.3499488
<b>Reddy – Bickford</b>	19.70645683	78.43763349	175.0639586	307.8124549	474.4089419	672.2401494
$\omega_{n2}$						
<b>Euler</b>	66.25433091	101.1641331	188.5750394	322.0976703	497.5165601	713.4204426
<b>Rayleigh</b>	66.22819023	101.0047585	187.9085713	320.0822015	492.6777869	703.4923041
<b>Timoshenko</b>	66.22118522	100.7109845	186.1417643	314.4098382	479.0983084	676.2439654
<b>Reddy – Bickford</b>	66.22087688	100.6981586	186.0655667	314.1692786	478.5342958	675.1393769

$G = 0.417 * 10^{10} \text{Nm}^{-2}, \quad k = \frac{5}{6}, \quad K = K_0, \quad h = h_1$						
$\omega_{n1}$	1	2	3	4	5	6
<b>Euler Ref. [2]</b>	19.7392088	78.95683521	177.6528792	315.8273408	493.48022	710.6115169
<b>Rayleigh Ref. [12]</b>	19.73142068	78.83244614	177.0250126	313.8511075	488.6807037	700.7224681
<b>Timoshenko Ref. [12]</b>	19.70907774	78.47884506	175.2667468	308.4290616	475.8439077	675.0535094
<b>Reddy – Bickford</b>	19.70907834	78.47888294	175.2671655	308.4313202	475.8520989	675.076565
$\omega_{n2}$						
<b>Euler Ref. [2]</b>	66.25433091	101.1641331	188.5750394	322.0976703	497.5165601	713.4204426
<b>Rayleigh Ref. [12]</b>	66.22819023	101.0047585	187.9085713	320.0822015	492.6777869	703.4923041
<b>Timoshenko Ref. [12]</b>	66.22164431	100.7301345	186.2560413	314.7728451	479.9560596	677.9395464
<b>Reddy – Bickford</b>	66.22164449	100.7301639	186.2564343	314.7750549	479.964173	677.9624891

Tabela 2.4.2

Razlika u aproksimacijama rešenja za sistem nosača deljine  $h=5h_1$   
na prirodne frekvencije sistema  $\omega_{ni}$  [ $s^{-1}$ ]

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{5+5\nu}{6+5\nu}, \quad K = K_0, \quad h = 5h_1$						
$\omega_{n1}$	1	2	3	4	5	6
<b>Euler</b>	98.69604401	394.784176	888.2643961	1579.136704	2467.4011	3553.057584
<b>Rayleigh</b>	97.73614075	380.0648459	818.5281234	1376.639653	2019.017189	2716.605342
<b>Timoshenko</b>	94.99563965	345.2596898	688.0823255	1078.122727	1490.714755	1913.386112
<b>Reddy – Bickford</b>	94.88178838	344.0089987	684.15508	1070.713232	1480.196228	1901.278312

$\omega_{n1}$	1	2	3	4	5	6
<b>Euler</b>	102.6689295	395.796091	888.7145984	1579.389986	2467.563209	3553.170161
<b>Rayleigh</b>	101.6703866	381.0390321	818.942981	1376.860456	2019.149839	2716.691416
<b>Timoshenko</b>	99.04721409	346.3588862	688.6203052	1078.461698	1490.959154	1913.57705
<b>Reddy – Bickford</b>	98.9383564	345.1129821	684.6970415	1071.055235	1480.442691	1901.47038

Tabela 2.4.3

Razlika u aproksimacijama rešenja druge prirodne frekvencije sistema  $\omega_{n2}$  [ $s^{-1}$ ] za sistem nosača povezan slojem Winkler-ovog tipa različite krutosti  $K$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{5+5\nu}{6+5\nu}, \quad K = 2K_0, \quad h = h_1$$

$\omega_{n2}$	1	2	3	4	5	6
<b>Euler</b>	91.59495818	119.3070904	198.8983295	328.2482433	501.5204159	716.2183521
<b>Rayleigh</b>	91.55881934	119.1191333	198.1953765	326.1942884	496.6427018	706.2512772
<b>Timoshenko</b>	91.55383484	118.8711418	196.5240723	320.6356594	483.183285	679.1256472
<b>Reddy – Bickford</b>	91.55361544	118.8603191	196.4520286	320.4000033	482.6243859	678.0262049

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{5+5\nu}{6+5\nu}, \quad K = 3K_0, \quad h = h_1$$

$\omega_{n2}$	1	2	3	4	5	6
<b>Euler</b>	111.3087434	135.0340024	208.7116324	334.2856701	505.4925594	719.0053741
<b>Rayleigh</b>	111.2648265	134.8212691	207.9739969	332.193937	500.5762128	708.9995142
<b>Timoshenko</b>	111.2607921	134.6030973	206.3847488	326.7428715	487.2340118	681.9951506
<b>Reddy – Bickford</b>	111.2606144	134.5935781	206.3162691	326.5118478	486.6801011	680.9007912

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{5+5\nu}{6+5\nu}, \quad K = 4K_0, \quad h = h_1$$

$\omega_{n2}$	1	2	3	4	5	6
<b>Euler</b>	128.0220151	149.1113068	218.0838038	340.2159743	509.4337323	721.7816345
<b>Rayleigh</b>	127.9715040	148.8763959	217.3130449	338.0871335	504.4790544	711.7371396
<b>Timoshenko</b>	127.9680542	148.6796516	215.7953129	332.7380057	491.251336	684.8526286
<b>Reddy – Bickford</b>	127.9679024	148.6710684	215.7299358	332.5113677	490.7022939	683.7632902

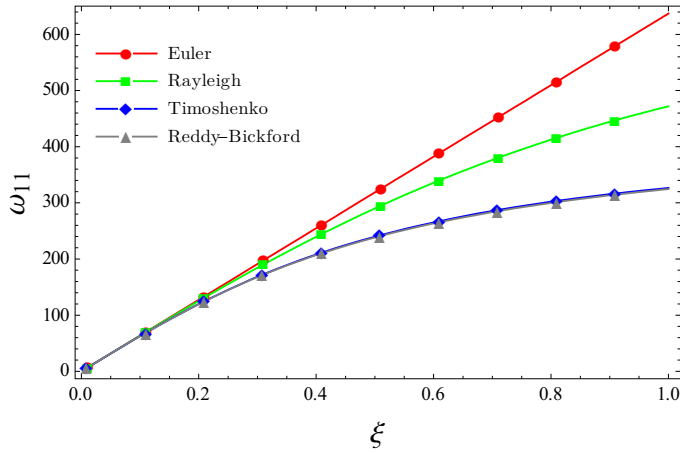
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{5+5\nu}{6+5\nu}, \quad K = 5K_0, \quad h = h_1$$

$\omega_{n2}$	1	2	3	4	5	6
<b>Euler</b>	142.7922839	161.9696941	227.0694728	346.0446636	513.3446479	724.5472572
<b>Rayleigh</b>	142.7359452	161.7145261	226.2669564	343.8793508	508.3519331	714.4642751
<b>Timoshenko</b>	142.7329038	161.5341552	224.8122963	338.6270146	495.2360704	687.6982311
<b>Reddy – Bickford</b>	142.7327699	161.526287	224.7496527	338.4045372	494.691782	686.6138531

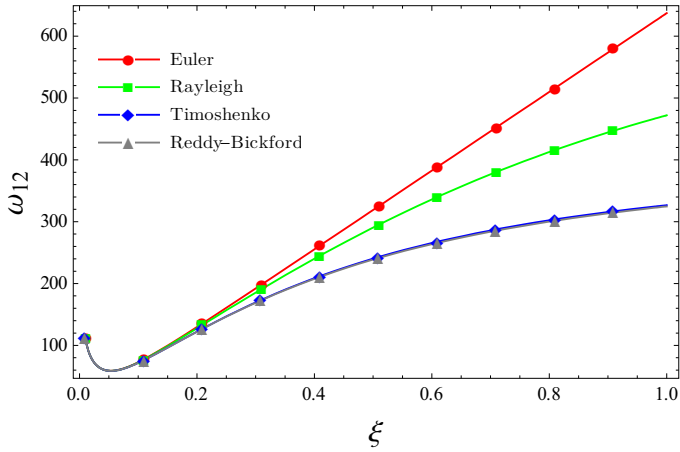
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad k = \frac{5+5\nu}{6+5\nu}, \quad K = 6K_0, \quad h = h_1$$

$\omega_{n2}$	1	2	3	4	5	6
<b>Euler</b>	156.1718168	173.8797913	235.7128454	351.7767889	517.2259927	727.3023635
<b>Rayleigh</b>	156.1101991	173.60586	234.8797813	349.5756083	512.1955285	717.1810407
<b>Timoshenko</b>	156.1074651	173.4385405	233.4813034	344.4153421	499.1889956	690.532105
<b>Reddy – Bickford</b>	156.1073447	173.431242	233.4210928	344.1968189	498.6493502	689.4526279





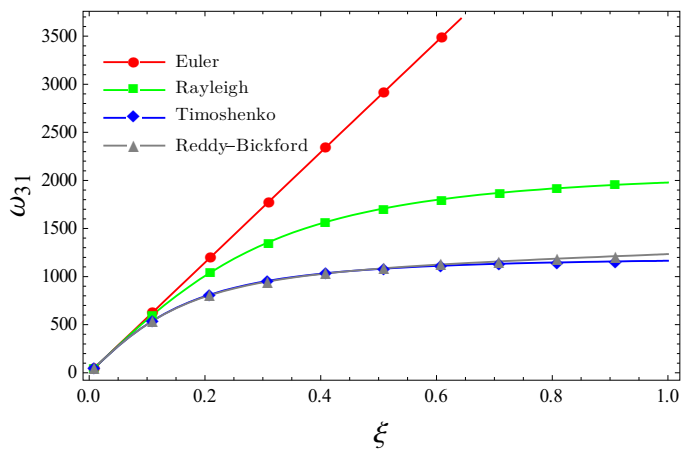
Slika 2.4.1 a) Uticaj debljine nosača  $\xi$  na prirodne frekvencije sistema  $\omega_{ni}$  [ $s^{-1}$ ] u prvom modu



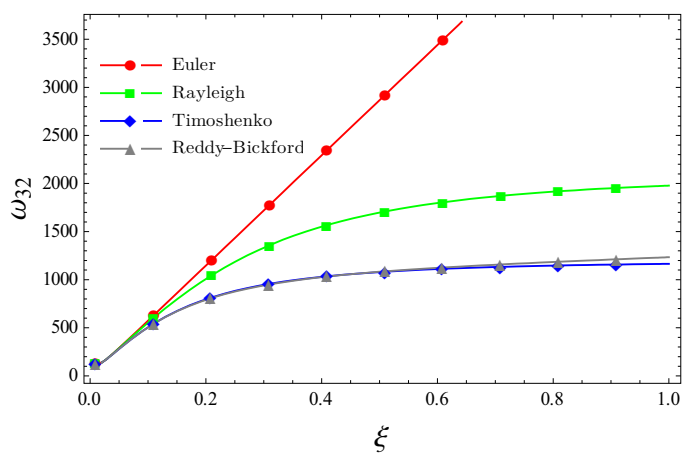
Slika 2.4.1 b) Uticaj debljine nosača  $\xi$  na prirodne frekvencije sistema  $\omega_{ni}$  [ $s^{-1}$ ] u prvom modu

U tabeli 2.4.1 može se primetiti mala razlika u aproksimacijama rešenja prirodnih frekvencija za različite vrednosti faktora smicanja kod Timoshenko-vog i Reddy-Bickford-ovog modela. Značajnija razlika je primetna kod debljih nosača (tabela 2.4.2) kod kojih Euler-ov i Rayleigh-jev

model ne daju dovoljno dobre aproksimacije. Razmatranim modelima dobijamo približno iste aproksimacije rešenja u nižim modovima ali se razlika značajno povećava kod nosača većih debljina. Na serijama slika 2.4.1-2.4.3 prikazane su promene prirodnih frekvencija u zavisnosti od

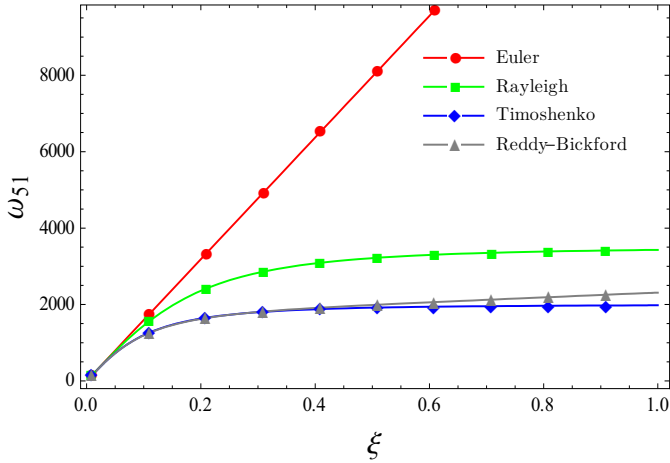


Slika 2.4.2 a) Uticaj faktora debljine nosača  $\xi$  na prirodne frekvencije sistema  $\omega_{ni}$  [ $s^{-1}$ ] u trećem modu

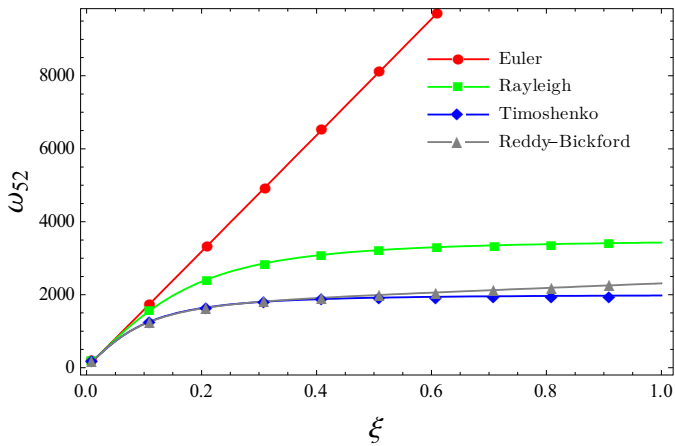


Slika 2.4.2 b) Uticaj faktora debljine nosača  $\xi$  na prirodne frekvencije sistema  $\omega_{ni}$  [ $s^{-1}$ ] u trećem modu

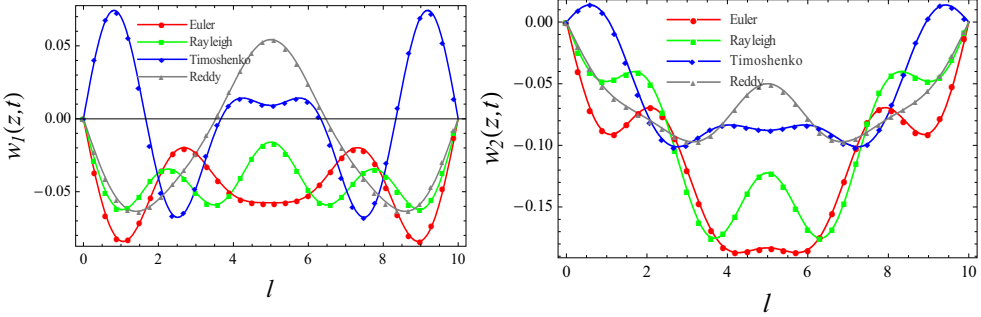
faktora debljine nosača  $\xi = h/l$  u različitim modovima. Može se zaključiti da se pri vrednostima  $\xi$  većim od 0.2 javlja značajna razlika izmedju dobijenih rezultata Euler-ovim i Rayleigh-jevim modelom na jednoj strani i prilično boljim aproksimacijama dobijenih Timoshenko-vim i Reddy-Bickford-ovim modelom na drugoj strani.



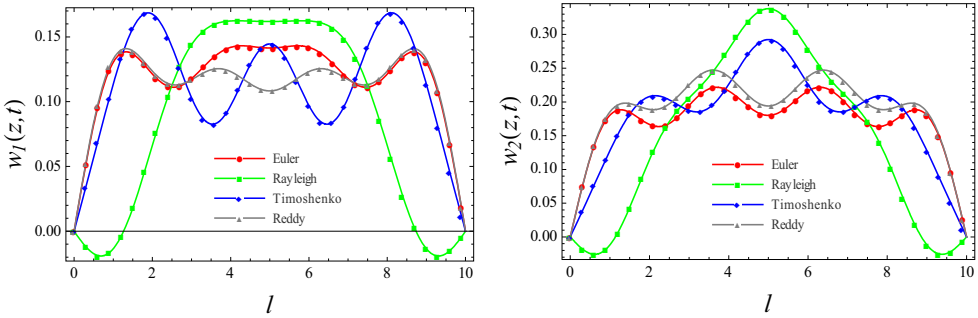
Slika 2.4.3 a) Uticaj debljine nosača  $\xi$  na prirodne frekvencije sistema  $\omega_{ni}$  [ $s^{-1}$ ] u petom modu



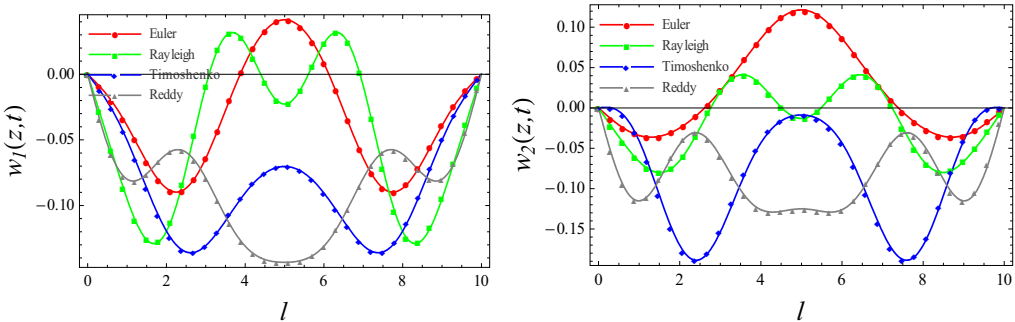
Slika 2.4.3 a) Uticaj debljine nosača  $\xi$  na prirodne frekvencije sistema  $\omega_{ni}$  [ $s^{-1}$ ] u petom modu



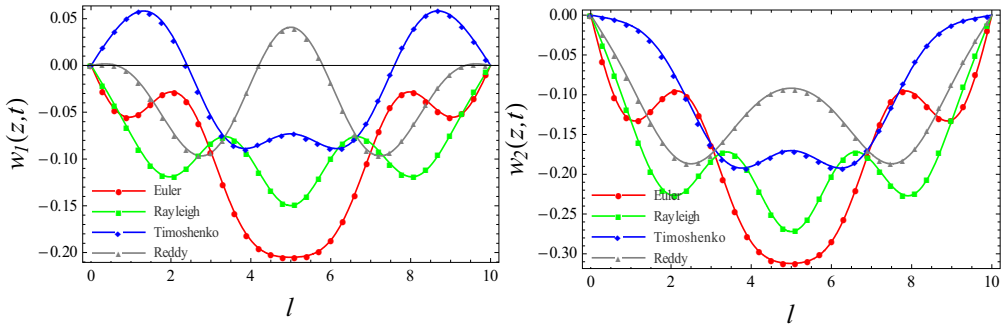
**Slika 2.4.4** Transverzalna pomeranja srednjih linija nosača za sumu prvih 7 članova reda sa zadatim početnim uslovima  $t = 10s, w_{10} = 0.1m, w_{20} = 0.2m, v_{10} = 1m/s, v_{20} = 2m/s$ .



**Slika 2.4.5** Transverzalna pomeranja srednjih linija nosača za sumu prvih 7 članova reda sa zadatim početnim uslovima  $t = 15s, w_{10} = 0.1m, w_{20} = 0.2m, v_{10} = 1m/s, v_{20} = 2m/s$ .

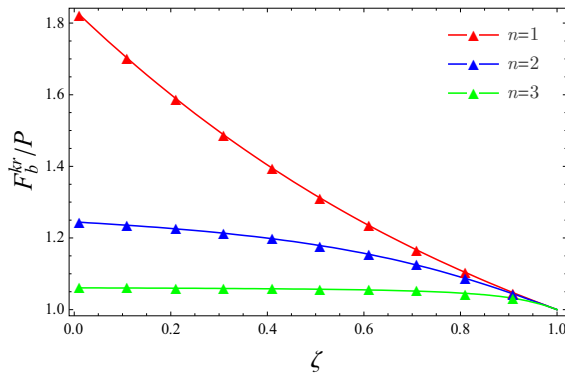


**Slika 2.4.6** Transverzalna pomeranja srednjih linija nosača za sumu prvih 7 članova reda sa zadatim početnim uslovima  $t = 20s, w_{10} = 0.1m, w_{20} = 0.2m, v_{10} = 1m/s, v_{20} = 2m/s$ .

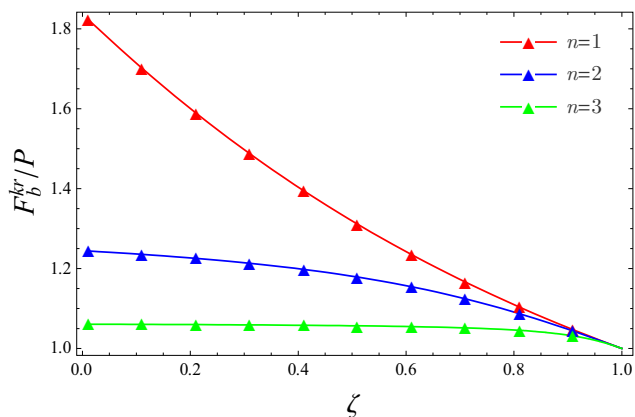


Slika 2.4.7 Transverzalna pomeranja srednjih linija nosača za sumu prvih 7 članova reda sa zadatim početnim uslovima  $t = 25s$ ,  $w_{10} = 0.1m$ ,  $w_{20} = 0.2m$ ,  $v_{10} = 1m/s$ ,  $v_{20} = 2m/s$ .

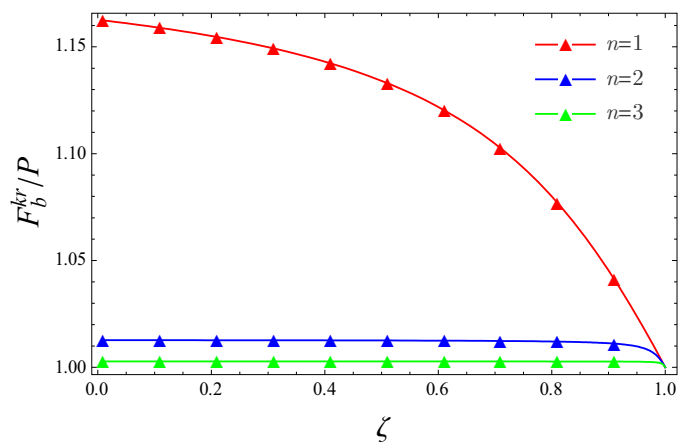
Na serijama slika 2.4.1-2.4.3 su prikazane promene frekvencija do vrednosti  $\xi = 1$  iz razloga što se u takvim slučajevima mogu analizirati fekvencije elastičnih tela čije su sve tri prostone dimenzije bliske. Ovakav slučaj odnosa dimenzija se može sresti kod višerasponih nosača [27] kada su rastojanja između oslonaca mala u poređenju sa debljinom nosača ili kod oscilacija brodskih korita kada su talasne dužine male. Na slikama 2.4.4-2.4.6 prikazana su transverzalna pomeranja srednjih linija nosača za različite modele u različitim vremenskim trenucima određenih za prvih 7 članova reda u sumi pri zadatim početnim uslovima. Može se zaključiti da pri različitim tipovima modela postoji razlika između transverzalnih pomeranja srednjih linija nosača koja se pri većem broju uzetih članova u sumi povećava.



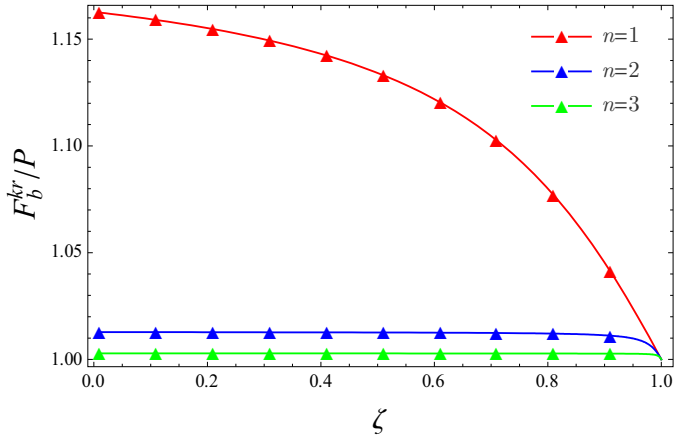
Slika 2.4.8 Uticaj pritiskih aksijalnih sila  $\zeta$  na odnos kritičnih sila  $F_b^{kr}/P_n$  u modovima 1, 2 i 3 ( $h = h_1$ , Timoshenko model)



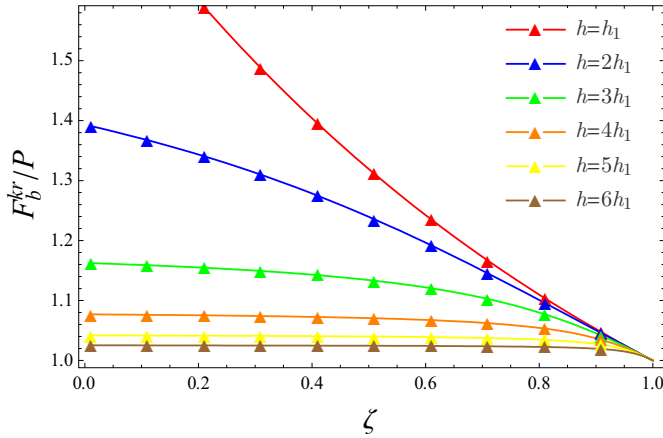
Slika 2.4.9 Uticaj pritisnih aksijalnih sila  $\zeta$  na odnos kritičnih sila  $F_b^{cr}/P_n$  u modovima 1, 2 i 3 ( $h = h_1$ , Reddy-Bickford-ov model)



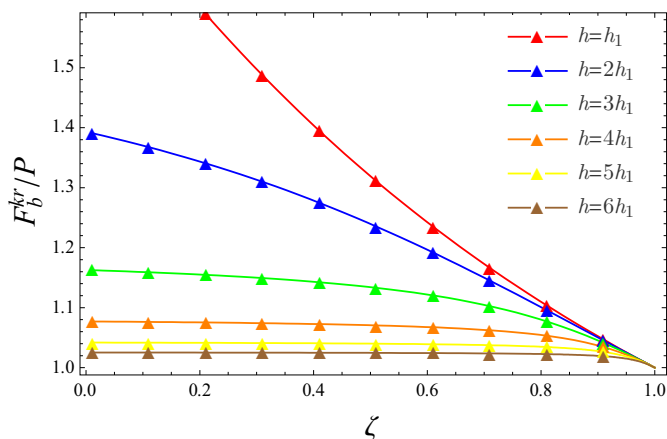
Slika 2.4.10 Uticaj pritisnih aksijalnih sila  $\zeta$  na odnos kritičnih sila  $F_b^{cr}/P_n$  u modovima 1, 2 i 3 ( $h = 3h_1$ , Timoshenko model)



Slika 2.4.11 Uticaj pritisnih aksijalnih sila  $\zeta$  na odnos kritičnih sila  $F_b^{cr}/P_n$  u modovima 1, 2 i 3 ( $h = 3h_1$ , Reddy-Bickford-ov model)



Slika 2.4.12 Uticaj pritisnih aksijalnih sila  $\zeta$  na odnos kritičnih sila  $F_b^{cr}/P_n$  Za različite vrednosti debljina nosača (Timoshenko model)



**Slika 2.4.13** Uticaj pritisnih aksijalnih sila  $\zeta$  na odnos kritičnih sila  $F_b^{kr}/P_n$  Za različite vrednosti debljina nosača (Reddy-Bickford-ov model)

Na serijama slika 2.4.8-2.4.13 dat je prikaz odnosa kritičnih sila u zavisnosti od faktora pritisne aksijalne sile na drugom nosaču  $\zeta$ . Može se zaključiti da u odnosima kritičnih sila postoji minorna razlika između Timoshenko-vog i Reddy-Bickford-ovog modela, te da se bez obzira na debljinu nosača i mod u kome se kritična sila razmatra mogu podjednako uspešno koristiti obe teorije. Opšti zaključak na osnovu prikazanih rezultata može biti da se samo Timoshenko-va i Reddy-Bickford-ova teorija mogu koristiti kod nosača većih debljina. Prednost Reddy-Bickford-ove teorije je u određivanju smičućih napona za koje nam nije potreban smicajni faktor. Pri povećanju moda oscilovanja najbolje aproksimacije rešenja daje Reddy-Bickford-ova teorija nosača. Na osnovu određenih razlika u aproksimacijama rešenja između korišćenih teorija, prikazani rezultati mogu poslužiti pri odabiru tipa matematičkog modela za dinamičko razmatranje dva elastično povezana nosača.

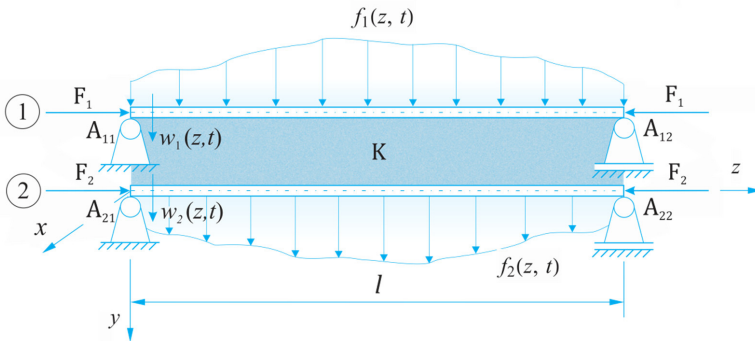


# 3

## Uticaji pritisnih aksijalnih sila, inercije rotacije i poprečnog smicanja na prinudne oscilacije sistema dva elastično povezana nosača

### 3.1 Prinudne oscilacije dva elastično povezana nosača Rayleigh-jevog tipa

Analizirajmo uticaje pritisnih aksijalnih sila i inercije rotacije na prinudne transverzalne oscilacije sistema dva elastično povezana nosača Rayleigh-jevog tipa, Stojanović i Kozić [13]. Neka su dva nosača istih dužina  $l$ , povezana elastičnim slojem krutosti  $K$ . Nosači su izloženi prinudnim opterećenjima  $f_1(z, t)$  i  $f_2(z, t)$  i pritisnim aksijalnim silama na krajevima kao što je prikazano na slici 3.1.1.



**Slika 3.1.1** Sistem dva elastično povezana nosača pod dejstvom prinudnih opterećenja

Neka su funkcije pomeranja u longitudinalnom i transverzalnom pravcu sistema nosača Rayleigh-jevog tipa  $u_{R1}(y, z, t)$ ,  $w_{R1}(y, z, t)$ ,  $u_{R2}(y, z, t)$  i  $w_{R2}(y, z, t)$  oblika

$$u_{R1}(y, z, t) = u_{R1}^0(z, t) - y \frac{\partial w_{R1}^0(z, t)}{\partial z}, \quad w_{R1}(y, z, t) = w_{R1}^0(z, t), \quad (3.1.1)$$

$$u_{R2}(y, z, t) = u_{R2}^0(z, t) - y \frac{\partial w_{R2}^0(z, t)}{\partial z}, \quad w_{R2}(y, z, t) = w_{R2}^0(z, t). \quad (3.1.2)$$

Deformacije u pravcu z ose u funkciji pomeranja i veza između napona i deformacije po Hookeovom zakonu su

$$\varepsilon_{z1}(y, z, t) = \frac{\partial u_{R1}^0(z, t)}{\partial z} - y \frac{\partial^2 w_{R1}^0(z, t)}{\partial z^2}, \quad \varepsilon_{z2}(y, z, t) = \frac{\partial u_{R2}^0(z, t)}{\partial z} - y \frac{\partial^2 w_{R2}^0(z, t)}{\partial z^2}. \quad (3.1.3)$$

$$\sigma_{z1}(y, z, t) = E \varepsilon_{z1}(y, z, t), \quad \sigma_{z2}(y, z, t) = E \varepsilon_{z2}(y, z, t), \quad (3.1.4)$$

Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\delta W_{in1} = -\rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{R1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{R1}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{R1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{R1}(y, z, t) \right] dy dz, \quad (3.1.5)$$

$$\delta W_{in2} = -\rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{R2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{R2}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{R2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{R2}(y, z, t) \right] dy dz. \quad (3.1.6)$$

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\delta W_{V1} = -b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \sigma_{z1}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) dy dz, \quad \delta W_{V2} = -b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \sigma_{z2}(z, t) \delta \varepsilon_{z2}(z, t) dy dz. \quad (3.1.7)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila je

$$\delta W_{ex1} = \int_0^l \left[ f_1(z, t) \delta w_{R1}^0(z, t) + \delta w_{R1}^0(z, t) K \left( w_{R2}^0(z, t) - w_{R1}^0(z, t) \right) + F_1 \frac{\partial w_{R1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{R1}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz, \quad (3.1.8)$$

$$\delta W_{ex2} = \int_0^l \left[ f_2(z, t) \delta w_{R2}^0(z, t) + \delta w_{R2}^0(z, t) K \left( w_{R1}^0(z, t) - w_{R2}^0(z, t) \right) + F_2 \frac{\partial w_{R2}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{R2}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz. \quad (3.1.9)$$

Na osnovu principa virtuelnog rada  $\delta W_{ini} + \delta W_{Vi} + \delta W_{exi} = 0$ ,  $i = 1, 2$  i jednačina (3.1.5-3.1.9) dobijamo

$$\begin{aligned}
& -b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \sigma_{z1}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) dy dz \\
& - \rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{R1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{R1}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{R1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{R1}(y, z, t) \right] dy dz \\
& + \int_0^l \left[ f_1(z, t) \delta w_{R1}^0(z, t) + \delta w_{R1}^0(z, t) K \left( w_{R2}^0(z, t) - w_{R1}^0(z, t) \right) + \right. \\
& \quad \left. F_1 \frac{\partial w_{R1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{R1}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0, \tag{3.1.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \sigma_{z2}(z, t) \delta \varepsilon_{z2}(z, t) dy dz \\
& - \rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{R2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{R2}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{R2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{R2}(y, z, t) \right] dy dz \\
& + \int_0^l \left[ f_2(z, t) \delta w_{R2}^0(z, t) + \delta w_{R2}^0(z, t) K \left( w_{R1}^0(z, t) - w_{R2}^0(z, t) \right) + F_2 \right. \\
& \quad \left. F_2 \frac{\partial w_{R2}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{R2}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0, \tag{3.1.11}
\end{aligned}$$

Sukcesivnom primenom Green-ove teoreme na izraze (3.1.10-3.1.11) dobijamo jednačine transversalnih oscilacija sistema elastično povezanih nosača Rayleigh-jevog tipa u obliku

$$\begin{aligned}
\rho A_1 \frac{\partial^2 w_{R1}^0(z, t)}{\partial t^2} - \rho I_{x1} \frac{\partial^4 w_{R1}^0(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + E I_{x1} \frac{\partial^4 w_{R1}^0(z, t)}{\partial z^4} + F_1 \frac{\partial^2 w_{R1}^0(z, t)}{\partial z^2} \\
+ K \left( w_{R1}^0(z, t) - w_{R2}^0(z, t) \right) = f_1(z, t), \tag{3.1.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho A_2 \frac{\partial^2 w_{R2}^0(z, t)}{\partial t^2} - \rho I_{x2} \frac{\partial^4 w_{R2}^0(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + E I_{x2} \frac{\partial^4 w_{R2}^0(z, t)}{\partial z^4} + F_2 \frac{\partial^2 w_{R2}^0(z, t)}{\partial z^2} \\
+ K \left( w_{R2}^0(z, t) - w_{R1}^0(z, t) \right) = f_2(z, t), \tag{3.1.13}
\end{aligned}$$

Početni i granični uslovi sistema dva elastično povezana slobodno oslonjena nosača Rayleigh-jevog tipa su

$$w_{Ri}^0(z, 0) = 0, \quad \frac{dw_{R1}^0(z, 0)}{dt} = 0, \tag{3.1.14}$$

$$w_{Ri}^0(0, t) = \frac{d^2 w_{R1}^0(0, t)}{dz^2} = \frac{d^2 w_{R1}^0(l, t)}{dz^2} = w_{Ri}^0(l, t) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.1.15}$$

Smatrajući da je kretanje tačaka nosača harmonijsko, rešenja jednačina (3.1.12) i (3.1.13) pretpostavljamo u obliku

$$w_{R1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \sum_{i=1}^2 S_{in}(t), \tag{3.1.16}$$

$$w_{R2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \sum_{i=1}^2 \alpha_{ni} S_{in}(t), \quad (3.1.17)$$

gde su  $S_{in}(t)$  ( $i = 1, 2$ ) nepoznate funkcije vremena kojima odgovaraju frekvencije  $\omega_{ni}$  Rayleighjevog modela. Ako zamenimo pretpostavljena rešenja (3.1.16) i (3.1.17) u sistem nehomogenih parcijalnih diferencijalnih jednačina (3.1.12) i (3.1.13) dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \sum_{i=1}^2 [J_1 \ddot{S}_{in} + (N_1 - F_1 \eta_1 - H_1 \alpha_{ni}) S_{in}] = m_1 f_1(z, t), \quad (3.1.18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \sum_{i=1}^2 [J_2 \ddot{S}_{in} + (N_2 - F_2 \eta_2 - H_2 \alpha_{ni}^{-1}) S_{in}] \alpha_{ni} = m_2 f_2(z, t), \quad (3.1.19)$$

gde su

$$m_1 = \frac{1}{\rho A_1}, \quad m_2 = \frac{1}{\rho A_2}, \quad H_1 = \frac{K}{\rho A_1}, \quad H_2 = \frac{K}{\rho A_2},$$

$$J_1 = 1 + C_{r1}^2 k_n^2, \quad J_2 = 1 + C_{r2}^2 k_n^2, \quad N_1 = C_{b1}^2 k_n^4 + H_1, \quad N_2 = C_{b2}^2 k_n^4 + H_2.$$

$$C_{bi} = \sqrt{\frac{E l_i}{\rho A_i}}, \quad C_{ri} = \sqrt{\frac{l_i}{A_i}}, \quad i = 1, 2.$$

Množenjem jednačina (3.1.18) i (3.1.19) sopstvenom funkcijom  $Z_n$ , integracijom po promenljivoj  $z$  na intervalu od 0 do  $l$  i primenom uslova ortogonalnosti funkcija dobijamo

$$\sum_{i=1}^2 [J_1 \ddot{S}_{in} + (N_1 - F_1 \eta_1 - H_1 \alpha_{ni}) S_{in}] = 2 \frac{m_1}{l} \int_0^l Z_n f_1(z, t) dz. \quad (3.1.20)$$

$$\sum_{i=1}^2 [J_2 \ddot{S}_{in} + (N_2 - F_2 \eta_2 - H_2 \alpha_{ni}^{-1}) S_{in}] \alpha_{ni} = 2 \frac{m_2}{l} \int_0^l Z_n f_2(z, t) dz. \quad (3.1.21)$$

Koristeći amplitude određene u prethodnom poglavlju (2.1.26) i jednačina (3.1.20) i (3.1.21) dobijamo

$$\sum_{i=1}^2 [\ddot{S}_{in} + \omega_{ni}^2 S_{in}] = 2 \frac{m_1}{J_1 l} \int_0^l Z_n f_1(z, t) dz, \quad (3.1.22)$$

$$\sum_{i=1}^2 [\ddot{S}_{in} + \omega_{ni}^2 S_{in}] \alpha_{ni} = 2 \frac{m_2}{J_2 l} \int_0^l Z_n f_2(z, t) dz. \quad (3.1.23)$$

odnosno

$$\ddot{S}_{in} + \omega_{ni}^2 S_{in} = Y_{in}(t), \quad i = 1, 2, \quad (3.1.24)$$

gde su

$$Y_{n1}(t) = \frac{2}{\alpha_{n2} - \alpha_{n1}} \int_0^l [M_1 \alpha_{n2} f_1(z, t) - M_2 f_2(z, t)] \sin(k_n z) dz, \quad (3.1.25)$$

$$Y_{n2}(t) = \frac{2}{\alpha_{n1} - \alpha_{n2}} \int_0^l [M_1 \alpha_{n1} f_1(z, t) - M_2 f_2(z, t)] \sin(k_n z) dz, \quad (3.1.26)$$

$$M_1 = \frac{m_1}{J_1 l}, \quad M_2 = \frac{m_2}{J_2 l}.$$

Iz jednačina (3.1.16), (3.1.17), (3.1.25) i (3.1.26) i rešenja jednačine (3.1.24), ref. [5], slede analitički oblici prinudnih oscilacija dva elastično povezana nosača Rayleigh-jevog tipa

$$w_{R1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\omega_{ni}} \int_0^t Y_{ni}(s) \sin[\omega_{ni}(t-s)] ds, \quad (3.1.27)$$

$$w_{R2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_{ni}}{\omega_{ni}} \int_0^t Y_{ni}(s) \sin[\omega_{ni}(t-s)] ds. \quad (3.1.28)$$

Opšta rešenja prinudnih oscilacija (3.1.27) i (3.1.28) mogu se primeniti u analizi sistema pod dejstvom različitih vrsta prinudnih opterećenja.

### 3.2 Prinudne oscilacije dva elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa

Analizirajmo uticaje pritisnih aksijalnih sila, inercije rotacije i poprečnog smicanja na prinudne transverzalne oscilacije sistema dva elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa, Stojanović i Kozić [13]. Uvedimo funkcije pomeranja tačaka nosača u longitudinalnom i transverzalnog pravcu kao i ugao zaokretanja poprečnog preseka nosača Timoshenko-vog tipa  $u_{T1}(y, z, t)$ ,  $w_{T1}(y, z, t)$ ,  $\psi_{T1}^0(z, t)$ ,  $u_{T2}(y, z, t)$ ,  $w_{T2}(y, z, t)$  i  $\psi_{T2}^0(z, t)$ . Funkcije pomeranja su

$$u_{T1}(y, z, t) = u_{T1}^0(z, t) + y\psi_{T1}^0(z, t), \quad w_{T1}(y, z, t) = w_{T1}^0(z, t), \quad (3.2.1)$$

$$u_{T2}(y, z, t) = u_{T2}^0(z, t) + y\psi_{T2}^0(z, t), \quad w_{T2}(y, z, t) = w_{T2}^0(z, t), \quad (3.2.2)$$

Deformacije u funkciji pomeranja i veze između napona i deformacije po Hooke-ovom zakonu su

$$\varepsilon_{z1}(y,z,t) = \frac{\partial u_{T1}^0(z,t)}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_{T1}^0(z,t)}{\partial z}, \quad \gamma_{zy1}(z,t) = \frac{\partial w_{T1}^0(z,t)}{\partial z} + \psi_{T1}^0(z,t), \quad (3.2.3)$$

$$\varepsilon_{z2}(y,z,t) = \frac{\partial u_{T2}^0(z,t)}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_{T2}^0(z,t)}{\partial z}, \quad \gamma_{zy2}(z,t) = \frac{\partial w_{T2}^0(z,t)}{\partial z} + \psi_{T2}^0(z,t), \quad (3.2.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{z1} \\ \tau_{zy1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z1} \\ \gamma_{zy1} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{z2} \\ \tau_{zy2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z2} \\ \gamma_{zy2} \end{Bmatrix}. \quad (3.2.5)$$

Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\delta W_{in1} = -\rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{T1}(y,z,t)}{\partial t^2} \delta w_{T1}(y,z,t) + \frac{\partial^2 u_{T1}(y,z,t)}{\partial t^2} \delta u_{T1}(y,z,t) \right] dydz, \quad (3.2.6)$$

$$\delta W_{in2} = -\rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{T2}(y,z,t)}{\partial t^2} \delta w_{T2}(y,z,t) + \frac{\partial^2 u_{T2}(y,z,t)}{\partial t^2} \delta u_{T2}(y,z,t) \right] dydz. \quad (3.2.7)$$

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\delta W_{V1} = -b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} [\sigma_{z1}(z,t) \delta \varepsilon_{z1}(z,t) + \tau_{zy1}(z,t) \delta \gamma_{zy1}(z,t)] dydz, \quad (3.2.8)$$

$$\delta W_{V2} = -b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} [\sigma_{z2}(z,t) \delta \varepsilon_{z2}(z,t) + \tau_{zy2}(z,t) \delta \gamma_{zy2}(z,t)] dydz. \quad (3.2.9)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila je

$$\delta W_{ex1} = \int_0^l \left[ f_1(z,t) \delta w_{T1}^0(z,t) + \delta w_{T1}^0(z,t) K(w_{T2}^0(z,t) - w_{T1}^0(z,t)) + F_1 \frac{\partial w_{T1}^0(z,t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T1}^0(z,t)}{\partial z} \right] dz, \quad (3.2.10)$$

$$\delta W_{ex2} = \int_0^l \left[ f_2(z,t) \delta w_{T2}^0(z,t) + \delta w_{T2}^0(z,t) K(w_{T1}^0(z,t) - w_{T2}^0(z,t)) + F_2 \frac{\partial w_{T2}^0(z,t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T2}^0(z,t)}{\partial z} \right] dz, \quad (3.2.11)$$

Zamenom jednačina (3.2.6-3.2.11) u opštu jednačinu principa virtuelnog rada

$$-b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} [\sigma_{z1}(z,t) \delta \varepsilon_{z1}(z,t) + \tau_{zy1}(z,t) \delta \gamma_{zy1}(z,t)] dydz -$$

$$\begin{aligned}
& -\rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{T1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{T1}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{T1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{T1}(y, z, t) \right] dy dz + \\
& + \int_0^l \left[ f_1(z, t) \delta w_{T1}^0(z, t) + \delta w_{T1}^0(z, t) K \left( w_{T2}^0(z, t) - w_{T1}^0(z, t) \right) + F_1 \frac{\partial w_{T1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T1}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0, \quad (3.2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \sigma_{z2}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) + \tau_{zy2}(z, t) \delta \gamma_{zy2}(z, t) \right] dy dz - \\
& -\rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{T2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{T2}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{T2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{T2}(y, z, t) \right] dy dz + \\
& + \int_0^l \left[ f_2(z, t) \delta w_{T2}^0(z, t) + \delta w_{T2}^0(z, t) K \left( w_{T1}^0(z, t) - w_{T2}^0(z, t) \right) + F_2 \frac{\partial w_{T2}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T2}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0. \quad (3.2.13)
\end{aligned}$$

Sukcesivnom primenom Green-ove teoreme na izraze (3.2.12-3.2.13) dobijamo jednačine prinudnih oscilacija sistema elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa u obliku

$$\begin{aligned}
& \rho A_1 \frac{\partial^2 w_{T1}^0(z, t)}{\partial t^2} - G A_1 k \left( \frac{\partial^2 w_{T1}^0(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_{T1}^0(z, t)}{\partial x} \right) + F_1 \frac{\partial^2 w_{T1}^0(z, t)}{\partial z^2} + \\
& + K \left( w_{T1}^0(z, t) - w_{T2}^0(z, t) \right) = f_1(z, t), \quad (3.2.14)
\end{aligned}$$

$$\rho I_{x1} \frac{\partial^2 \psi_{T1}^0(z, t)}{\partial t^2} - E I_{x1} \frac{\partial^2 \psi_{T1}^0(z, t)}{\partial z^2} + G A_1 k \left( \frac{\partial w_{T1}^0(z, t)}{\partial z} + \psi_{T1}^0(z, t) \right) = 0, \quad (3.2.15)$$

$$\begin{aligned}
& \rho A_2 \frac{\partial^2 w_{T2}^0(z, t)}{\partial t^2} - G A_2 k \left( \frac{\partial^2 w_{T2}^0(z, t)}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_{T2}^0(z, t)}{\partial x} \right) + F_2 \frac{\partial^2 w_{T2}^0(z, t)}{\partial z^2} + \\
& + K \left( w_{T2}^0(z, t) - w_{T1}^0(z, t) \right) = f_2(z, t), \quad (3.2.16)
\end{aligned}$$

$$\rho I_{x2} \frac{\partial^2 \psi_{T2}^0(z, t)}{\partial t^2} - E I_{x2} \frac{\partial^2 \psi_{T2}^0(z, t)}{\partial z^2} + G A_2 k \left( \frac{\partial w_{T2}^0(z, t)}{\partial z} + \psi_{T2}^0(z, t) \right) = 0. \quad (3.2.17)$$

gde su materijalne i geometrijske karakteristike nosača u oznakama iste kao u prethodnom poglavlju. Početni uslovi sistema dva elastično povezana nosača su dati glavnim koordinatama u daljem tekstu, dok su granični uslovi sistema

$$w_{Ti}^0(0, t) = w_{Ti}^0(l, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.2.18)$$

$$\frac{d^2 w_{r_i}^0(0, t)}{dz^2} = \frac{d^2 w_{r_i}^0(l, t)}{dz^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (3.2.19)$$

$$\frac{d\psi_{r_1}^0(0, t)}{dz} = \frac{d\psi_{r_1}^0(l, t)}{dz} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.2.20)$$

Smatrajući da je kretanje tačaka nosača harmonijsko, rešenja jednačina (3.2.14-3.2.17) pretpostavljamo u obliku proizvoda funkcija

$$w_{r_i}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \tilde{S}_{in}(t), \quad \psi_{r_i}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) \tilde{S}_{in(r)}(t), \quad i = 1, 2, \quad (3.2.21)$$

gde su  $\tilde{S}_{in}(t)$  i  $\tilde{S}_{in(r)}(t)$  nepoznate funkcije vremena a funkcije  $Z_n(z)$  i  $\Psi_n(z)$  funkcije osnovnih oblika oscilovanja

$$Z_n(z) = \sin(k_n z), \quad \Psi_n(z) = \cos(k_n z), \quad k_n = n\pi/l, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2.22)$$

Zamenom pretpostavljenih rešenja (3.2.21) u jednačine transversalnih oscilacija sistema (3.2.14-3.2.17), množenjem sopstvenim funkcijama, integracijom od 0 do  $l$  duž nosača i primenom uslova ortogonalnosti dobijamo

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_1 \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \rho \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{S}}_{1n}(t) \\ \ddot{\tilde{S}}_{2n}(t) \\ \ddot{\tilde{S}}_{1n(r)}(t) \\ \ddot{\tilde{S}}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} GkA_1 k_n^2 - F_1 k_n^2 + K & -K & GkA_1 k_n & 0 \\ -K & GkA_2 k_n^2 - F_2 k_n^2 + K & 0 & GkA_2 k_n \\ -GkA_1 k_n & 0 & -EI_1 k_n^2 - GkA_1 & 0 \\ 0 & -GkA_2 k_n & 0 & -EI_2 k_n^2 - GkA_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{S}_{1n}(t) \\ \tilde{S}_{2n}(t) \\ \tilde{S}_{1n(r)}(t) \\ \tilde{S}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix} \\ & = \begin{Bmatrix} \frac{2}{l} \int_0^l Z_n f_1(z, t) dz \\ \frac{2}{l} \int_0^l Z_n f_2(z, t) dz \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.2.23) \end{aligned}$$

Rešenja sistema nehomogenih diferencijalnih jednačina određujemo metodom modalne analize,

Kelly [25]. Sistem jednačina (3.2.23) može se zapisati u matricnom obliku



$$[\tilde{\mathbf{M}}]\{\ddot{\tilde{\mathbf{S}}}\} + [\tilde{\mathbf{K}}_s]\{\tilde{\mathbf{S}}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (3.2.24)$$

gde su

$$\{\ddot{\tilde{\mathbf{S}}}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{S}}_{1n}(t) \\ \ddot{\tilde{S}}_{2n}(t) \\ \ddot{\tilde{S}}_{1n(r)}(t) \\ \ddot{\tilde{S}}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix}, \{\tilde{\mathbf{S}}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{S}_{1n}(t) \\ \tilde{S}_{2n}(t) \\ \tilde{S}_{1n(r)}(t) \\ \tilde{S}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix}, \{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{l} \int_0^l Z_n f_1(z, t) dz \\ \frac{2}{l} \int_0^l Z_n f_2(z, t) dz \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, [\tilde{\mathbf{M}}] = \begin{bmatrix} A_1 \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 \rho \end{bmatrix},$$

$$[\tilde{\mathbf{K}}_s] = \begin{bmatrix} GkA_1 k_n^2 - F_1 k_n^2 + K & -K & GkA_1 k_n & 0 \\ -K & GkA_2 k_n^2 - F_2 k_n^2 + K & 0 & GkA_2 k_n \\ -GkA_1 k_n & 0 & -El_1 k_n^2 - GkA_1 & 0 \\ 0 & -GkA_2 k_n & 0 & -El_2 k_n^2 - GkA_2 \end{bmatrix}.$$

Kvadrati prirodnih frekvencija sistema  $\tilde{\omega}_{1n}, \tilde{\omega}_{2n}, \tilde{\omega}_{3n}$  i  $\tilde{\omega}_{4n}$  predstavljaju sopstvene vrednosti matrice  $[\tilde{\mathbf{M}}]^{-1}[\tilde{\mathbf{K}}_s]$ . Nehomogenisistemdiferencijalnih jednačina kome odgovaraju generalisane koordinate  $\{\tilde{\mathbf{S}}\}$  možemo prevesti na sistem glavnih koordinata  $\tilde{p}_{jn}(t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , uvođenjem modalne matrice sistema  $[\tilde{\mathbf{P}}] = [\tilde{\mathbf{X}}_1 \tilde{\mathbf{X}}_2 \tilde{\mathbf{X}}_3 \tilde{\mathbf{X}}_4]$  čije kolone predstavljaju normalizovane osnovne oblike oscilovanja (*normalized mode shapes*)

$$\{\tilde{\mathbf{S}}(t)\} = \sum_{j=1}^4 \tilde{p}_{jn}(t) \{\tilde{\mathbf{X}}_j\}. \quad (3.2.25)$$

Transformacija (3.2.25) ekvivalentna je linearnoj transformaciji između generalisanih i glavnih koordinata sistema

$$\{\tilde{\mathbf{S}}(t)\} = [\tilde{\mathbf{P}}]\{\tilde{\mathbf{p}}(t)\}. \quad (3.2.26)$$

Zamenom jednačine (3.2.26) u sistem (3.2.24) dobijamo

$$\sum_{j=1}^4 \ddot{\tilde{p}}_{jn}(t) [\tilde{\mathbf{M}}]\{\tilde{\mathbf{X}}_j\} + \sum_{j=1}^4 \tilde{p}_{jn}(t) [\tilde{\mathbf{K}}_s]\{\tilde{\mathbf{X}}_j\} = \{\mathbf{F}\}. \quad (3.2.27)$$

Ako obe strane izraza pomnožimo skalarno sa  $\{\mathbf{X}_r\}$  za proizvoljno  $r=1, 2, 3, 4$ , dobijamo

$$\sum_{j=1}^4 \ddot{\tilde{p}}_{jn}(t) (\{\tilde{\mathbf{X}}_r\}, [\tilde{\mathbf{M}}]\{\tilde{\mathbf{X}}_j\}) + \sum_{j=1}^4 \tilde{p}_{jn}(t) (\{\tilde{\mathbf{X}}_r\}, [\tilde{\mathbf{K}}_s]\{\tilde{\mathbf{X}}_j\}) = (\{\tilde{\mathbf{X}}_r\}, \{\mathbf{F}\}). \quad (3.2.28)$$

Primenom uslova ortogonalnosti osnovnih oblika oscilovanja (*mode-shape orthogonality condition*) dobijamo samo jedan član u svakoj od suma koji je različit od nule i to za  $r=j$ . Kako su osnovni oblici oscilovanja normalizovani, jednačina (3.2.28) dobija oblik

$$\ddot{\tilde{p}}_{rn}(t) + \tilde{\omega}_{nr}^2 \tilde{p}_{rn}(t) = \tilde{g}_{rn}(t), \quad r = 1, 2, 3, 4., \quad (3.2.29)$$

gde je  $\tilde{g}_{rn}(t) = (\{\tilde{\mathbf{X}}_r\}, \{\mathbf{F}\})$ . Ako su početni uslovi definisani glavnim koordinatama  $\tilde{p}_{rn}(0) = 0, \dot{\tilde{p}}_{rn}(0) = 0$ , rešenja možemo zapisati u obliku konvolucionog integrala

$$\tilde{p}_{rn}(t) = \frac{1}{\tilde{\omega}_{nr}} \int_0^t \tilde{g}_{rn}(s) \sin[\tilde{\omega}_{nr}(t-s)] ds, \quad r = 1, 2, 3, 4, \quad (3.2.30)$$

Zamenom dobijenih rešenja (3.2.30) u jednačinu transformacije koordinata (3.2.25) dobijamo

$$\{\tilde{\mathbf{S}}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{S}_{1n}(t) \\ \tilde{S}_{2n}(t) \\ \tilde{S}_{1n(r)}(t) \\ \tilde{S}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_{11}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{12}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{13}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{14}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t) \\ \tilde{X}_{21}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{22}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{23}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{24}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t) \\ \tilde{X}_{31}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{32}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{33}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{34}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t) \\ \tilde{X}_{41}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{42}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{43}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{44}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.2.31)$$

Ovako dobijene funkcije vremena se sada mogu zameniti u pretpostavljena rešenja (3.2.21) odakle slede opšta rešenja prinudnih transverzalnih oscilacija dva elastično povezana nosača Timoshenkovog tipa

$$w_{T1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) [\tilde{X}_{11}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{12}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{13}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{14}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t)], \quad (3.2.32)$$

$$w_{T2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) [\tilde{X}_{21}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{22}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{23}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{24}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t)], \quad (3.2.33)$$

$$\psi_{T1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) [\tilde{X}_{31}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{32}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{33}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{34}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t)], \quad (3.2.34)$$

$$\psi_{T2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) [\tilde{X}_{41}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{42}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{43}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{44}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t)]. \quad (3.2.35)$$

Opšta rešenja prinudnih oscilacija neophodna su za određivanje rezonancije i ponašanja sistema kao dinamičkog absorbera, ispitivanja amplituda sistema sa uticajima pritisnih aksijalnih sila

pri različitim vrstama prinuda. Modalna matrica sistema data je u prilogu 3.2.1 ([http://www.2shared.com/file/FY-dZiam/prilog\\_321.html](http://www.2shared.com/file/FY-dZiam/prilog_321.html)).

### 3.3 Prinudne oscilacije dva elastično povezana nosača Reddy-Bickford-ovog tipa

Neka su kao u slučaju Timoshenko-vog modela nosači istih dužina  $l$ , povezani elastičnim slojem krutosti  $K$ . Nosači su na krajevima izloženi dejstvu aksijalnih sila  $F_1$  i  $F_2$  i prinudnim promenljivim kontinualnim opterećenjima  $f_1(z, t)$  i  $f_2(z, t)$ . Označimo redom funkcije pomeranja u longitudinalnom i transverzalnom pravcu kao i ugao tangente deformisanog poprečnog preseka nosača na neutralnoj liniji  $u_{RB1}(y, z, t)$ ,  $w_{RB1}(y, z, t)$ ,  $\psi^0_{RB1}(z, t)$ ,  $u_{RB2}(y, z, t)$ ,  $w_{RB2}(y, z, t)$  i  $\psi^0_{RB2}(z, t)$ . Za sistem dva nosača važe funkcije pomeranja

$$\begin{aligned} u_{RB1}(y, z, t) &= u^0_{RB1}(z, t) + y\psi^0_{RB1}(z, t) - \alpha y^3 \left( \psi^0_{RB1}(z, t) + \frac{\partial w^0_{RB1}(z, t)}{\partial z} \right), \\ w_{RB1}(y, z, t) &= w^0_{RB1}(z, t), \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

$$\begin{aligned} u_{RB2}(y, z, t) &= u^0_{RB2}(z, t) + y\psi^0_{RB2}(z, t) - \alpha y^3 \left( \psi^0_{RB2}(z, t) + \frac{\partial w^0_{RB2}(z, t)}{\partial z} \right), \\ w_{RB2}(y, z, t) &= w^0_{RB2}(z, t), \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Deformacije u funkciji pomeranja i veze između napona i deformacije po Hooke-ovom zakonu su

$$\varepsilon_{z1}(y, z, t) = \frac{\partial u^0_{RB1}(z, t)}{\partial z} + y \frac{\partial \psi^0_{RB1}(z, t)}{\partial z} - \alpha y^3 \left( \frac{\partial \psi^0_{RB1}(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 w^0_{RB1}(z, t)}{\partial z^2} \right), \quad (3.3.3)$$

$$\gamma_{zy1}(y, z, t) = \psi^0_{RB1}(z, t) + \frac{\partial w^0_{RB1}(z, t)}{\partial z} - \beta y^2 \left( \psi^0_{RB1}(z, t) + \frac{\partial w^0_{RB1}(z, t)}{\partial z} \right), \quad (3.3.4)$$

$$\varepsilon_{z2}(y, z, t) = \frac{\partial u^0_{RB2}(z, t)}{\partial z} + y \frac{\partial \psi^0_{RB2}(z, t)}{\partial z} - \alpha y^3 \left( \frac{\partial \psi^0_{RB2}(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 w^0_{RB2}(z, t)}{\partial z^2} \right), \quad (3.3.5)$$

$$\gamma_{zy2}(y, z, t) = \psi^0_{RB2}(z, t) + \frac{\partial w^0_{RB2}(z, t)}{\partial z} - \beta y^2 \left( \psi^0_{RB2}(z, t) + \frac{\partial w^0_{RB2}(z, t)}{\partial z} \right). \quad (3.3.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{z1} \\ \tau_{zy1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z1} \\ \gamma_{zy1} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{z2} \\ \tau_{zy2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z2} \\ \gamma_{zy2} \end{Bmatrix}. \quad (3.3.7)$$

Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\delta W_{in1} = -\rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{RB1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{T1}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{RB1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{T1}(y, z, t) \right] dy dz, \quad (3.3.8)$$

$$\delta W_{in2} = -\rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{RB2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{T2}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{RB2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{T2}(y, z, t) \right] dy dz. \quad (3.3.9)$$

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\delta W_{V1} = -b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} [\sigma_{z1}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) + \tau_{zy1} \delta \gamma_{zy1}] dy dz, \quad (3.3.10)$$

$$\delta W_{V2} = -b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} [\sigma_{z2}(z, t) \delta \varepsilon_{z2}(z, t) + \tau_{zy2} \delta \gamma_{zy2}] dy dz. \quad (3.3.11)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila je oblika

$$\delta W_{ex1} = \int_0^l \left[ f_1(z, t) \delta w_{RB1}^0(z, t) + \delta w_{RB1}^0(z, t) K(w_{T2}^0(z, t) - w_{T1}^0(z, t)) + F_1 \frac{\partial w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz, \quad (3.3.12)$$

$$\delta W_{ex2} = \int_0^l \left[ f_2(z, t) \delta w_{RB2}^0(z, t) + \delta w_{RB2}^0(z, t) K(w_{RB1}^0(z, t) - w_{RB2}^0(z, t)) + F_2 \frac{\partial w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz. \quad (3.3.13)$$

Zamenom jednačina (3.3.10-33.13) u opštu jednačinu principa virtuelnog rada dobijamo

$$\begin{aligned} & -b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} [\sigma_{z1}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) + \tau_{zy1}(z, t) \delta \gamma_{zy1}(z, t)] dy dz - \\ & -\rho b_1 \int_0^l \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{RB1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{RB1}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{RB1}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{RB1}(y, z, t) \right] dy dz + \\ & + \int_0^l \left[ f_1(z, t) \delta w_{RB1}^0(z, t) + \delta w_{RB1}^0(z, t) K(w_{RB2}^0(z, t) - w_{RB1}^0(z, t)) \right. \\ & \quad \left. + F_1 \frac{\partial w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0, \quad (3.3.14) \end{aligned}$$

$$-b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} [\sigma_{z2}(z, t) \delta \varepsilon_{z1}(z, t) + \tau_{zy2}(z, t) \delta \gamma_{zy2}(z, t)] dy dz -$$

$$\begin{aligned}
& -\rho b_2 \int_0^l \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{RB2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{RB2}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{RB2}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{RB2}(y, z, t) \right] dy dz + \\
& + \int_0^l \left[ f_2(z, t) \delta w_{RB2}^0(z, t) + \delta w_{RB2}^0(z, t) K \left( w_{RB1}^0(z, t) - w_{RB2}^0(z, t) \right) \right. \\
& \left. + F_2 \frac{\partial w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} \right] dz = 0. \tag{3.3.15}
\end{aligned}$$

Sukcesivnom primenom Green-ove teoreme na izraze (3.2.14-3.2.15) dobijamo jednačine oscilovanja sistema elastično povezana dva nosača Reddy-Bickford-ovog tipa u obliku

$$\begin{aligned}
& C_w^{4,0} \frac{\partial^4 w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z^4} + C_w^{2,2} \frac{\partial^4 w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + C_w^{2,0} \frac{\partial^2 w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z^2} + C_w^{0,2} \frac{\partial^2 w_{RB1}^0(z, t)}{\partial t^2} + C_\psi^{1,2} \frac{\partial^3 \psi_{RB1}^0(z, t)}{\partial z \partial t^2} \\
& + C_\psi^{1,0} \frac{\partial \psi_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} + C_\psi^{3,0} \frac{\partial^3 \psi_{RB1}^0(z, t)}{\partial z^3} + K \left( w_{RB1}^0(z, t) - w_{RB2}^0(z, t) \right) = f_1(z, t), \tag{3.3.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_w^{3,0} \frac{\partial^3 w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z^3} + C_w^{1,2} \frac{\partial^3 w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z \partial t^2} + C_w^{1,0} \frac{\partial w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} + C_\psi^{2,0} \frac{\partial^2 \psi_{RB1}^0(z, t)}{\partial z^2} \\
& + C_\psi^{0,2} \frac{\partial^2 \psi_{RB1}^0(z, t)}{\partial t^2} + C_\psi^{0,0} \psi_{RB1}^0(z, t) = 0, \tag{3.3.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_w^{4,0} \frac{\partial^4 w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z^4} + D_w^{2,2} \frac{\partial^4 w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z^2 \partial t^2} + D_w^{2,0} \frac{\partial^2 w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z^2} + D_w^{0,2} \frac{\partial^2 w_{RB2}^0(z, t)}{\partial t^2} + D_\psi^{1,2} \frac{\partial^3 \psi_{RB2}^0(z, t)}{\partial z \partial t^2} \\
& + D_\psi^{1,0} \frac{\partial \psi_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} + D_\psi^{3,0} \frac{\partial^3 \psi_{RB2}^0(z, t)}{\partial z^3} + K \left( w_{RB2}^0(z, t) - w_{RB1}^0(z, t) \right) = f_2(z, t), \tag{3.3.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_w^{3,0} \frac{\partial^3 w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z^3} + D_w^{1,2} \frac{\partial^3 w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z \partial t^2} + D_w^{1,0} \frac{\partial w_{RB2}^0(z, t)}{\partial z} + D_\psi^{2,0} \frac{\partial^2 \psi_{RB2}^0(z, t)}{\partial z^2} \\
& + D_\psi^{0,2} \frac{\partial^2 \psi_{RB2}^0(z, t)}{\partial t^2} + D_\psi^{0,0} \psi_{RB2}^0(z, t) = 0, \tag{3.3.19}
\end{aligned}$$

gde su

$$C_w^{4,0} = \frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 E, \quad C_w^{2,2} = -\frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 \rho, \quad C_w^{2,0} = -\frac{1}{80} b_1 G \beta^2 h_1^5 + \frac{1}{6} b G \beta h_1^3 - b_1 G h_1 + F_1,$$

$$\begin{aligned}
C_w^{0,2} &= b_1 h_1 \rho, C_\psi^{1,2} = \frac{1}{80} b_1 h_1^5 \alpha \rho - \frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 \rho, C_\psi^{1,0} = -\frac{1}{80} b_1 G \beta^2 h_1^5 + \frac{1}{6} b_1 G \beta h_1^3 - b_1 G h_1, \\
C_\psi^{3,0} &= \frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 E - \frac{1}{80} b_1 h_1^5 \alpha E, C_w^{3,0} = \frac{1}{80} b_1 h_1^5 \alpha E - \frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 E, C_w^{1,2} = \frac{1}{448} b_1 h_1^7 \alpha^2 \rho - \\
&\quad - \frac{1}{80} b_1 h_1^5 \alpha \rho, \\
C_w^{1,0} &= \frac{1}{80} b_1 G \beta^2 h_1^5 - \frac{1}{6} b_1 G \beta h_1^3 + b_1 G h_1, C_\psi^{2,0} = -\frac{1}{448} b_1 \alpha^2 E h_1^7 + \frac{1}{40} b_1 \alpha E h_1^5 - \frac{1}{12} b_1 E h_1^3, \\
C_\psi^{0,2} &= \frac{1}{448} b_1 \alpha^2 \rho h_1^7 - \frac{1}{40} b_1 \alpha \rho h_1^5 + \frac{1}{12} b_1 \rho h_1^3. \quad C_\psi^{0,0} = \frac{1}{80} b_1 \beta^2 G h_1^5 - \frac{1}{6} b_1 \beta G h_1^3 + b_1 G h_1,
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

$$\begin{aligned}
D_w^{4,0} &= \frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 E, \quad D_w^{2,2} = -\frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 \rho, \quad D_w^{2,0} = -\frac{1}{80} b_2 G \beta^2 h_2^5 + \frac{1}{6} b_2 G \beta h_2^3 - b_2 G h_2 + F_2, \\
D_w^{0,2} &= b_2 h_2 \rho, D_\psi^{1,2} = \frac{1}{80} b_2 h_2^5 \alpha \rho - \frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 \rho, D_\psi^{1,0} = -\frac{1}{80} b_2 G \beta^2 h_2^5 + \frac{1}{6} b_2 G \beta h_2^3 - b_2 G h_2, \\
D_\psi^{3,0} &= \frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 E - \frac{1}{80} b_2 h_2^5 \alpha E, D_w^{3,0} = \frac{1}{80} b_2 h_2^5 \alpha E - \frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 E, D_w^{1,2} = \frac{1}{448} b_2 h_2^7 \alpha^2 \rho - \\
&\quad - \frac{1}{80} b_2 h_2^5 \alpha \rho, \\
D_w^{1,0} &= \frac{1}{80} b_2 G \beta^2 h_2^5 - \frac{1}{6} b_2 G \beta h_2^3 + b_2 G h_2, D_\psi^{2,0} = -\frac{1}{448} b_2 \alpha^2 E h_2^7 + \frac{1}{40} b_2 \alpha E h_2^5 - \frac{1}{12} b_2 E h_2^3, \\
D_\psi^{0,2} &= \frac{1}{448} b_2 \alpha^2 \rho h_2^7 - \frac{1}{40} b_2 \alpha \rho h_2^5 + \frac{1}{12} b_2 \rho h_2^3, D_\psi^{0,0} = \frac{1}{80} b_2 \beta^2 G h_2^5 - \frac{1}{6} b_2 \beta G h_2^3 + b_2 G h_2.
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Granični uslovi sistema dva elastično povezana slobodno oslonjena nosača Reddy-Bickford-ovog tipa su na osnovu (2.3.22 – 2.3.24)

$$w_{RBi}^0(0, t) = 0, \quad w_{RBi}^0(l, t) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{3.3.22}$$

$$\frac{d^2 w_{RBi}^0(0, t)}{dz^2} = \frac{d^2 w_{RBi}^0(l, t)}{dz^2} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{3.3.23}$$

$$\frac{d\psi_{RBi}^0(0, t)}{dz} = \frac{d\psi_{RBi}^0(l, t)}{dz} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.3.24}$$

Smatrajući da je kretanje tačkaka nosača harmonijsko, rešenja jednačina (3.3.16-3.3.19) pretpostavljamo u obliku proizvoda funkcija

$$w_{RBi}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) \tilde{S}_{in}(t), \quad \psi_{RBi}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(z) \tilde{S}_{in(r)}(t), \quad i = 1, 2, \tag{3.3.25}$$

gde su funkcije  $Z_n(z)$  i  $\Psi_n(z)$  funkcije osnovnih oblika oscilovanja

$$Z_n(z) = \sin(k_n z), \quad \Psi_n(z) = \cos(k_n z), \quad k_n = n\pi/l, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3.26)$$

Zamenom pretpostavljenih rešenja (3.3.25) u jednačine transverzalnih oscilacija sistema (3.3.16-3.3.19), množenjem sopstvenim funkcijama, integracijom od 0 do  $l$  duž nosača i primenom uslova ortogonalnosti dobijamo

$$[\tilde{\mathbf{M}}] \{\ddot{\tilde{\mathbf{S}}}\} + [\tilde{\mathbf{K}}_s] \{\tilde{\mathbf{S}}\} = \{\mathbf{F}\}, \quad (3.3.27)$$

gde su

$$\{\ddot{\tilde{\mathbf{S}}}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{S}}_{1n}(t) \\ \ddot{\tilde{S}}_{2n}(t) \\ \ddot{\tilde{S}}_{1n(r)}(t) \\ \ddot{\tilde{S}}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{\mathbf{S}}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{S}_{1n}(t) \\ \tilde{S}_{2n}(t) \\ \tilde{S}_{1n(r)}(t) \\ \tilde{S}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{l} \int_0^l Z_n f_1(z, t) dz \\ \frac{2}{l} \int_0^l Z_n f_2(z, t) dz \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Matrice  $[\tilde{\mathbf{M}}]$  i  $[\tilde{\mathbf{K}}_s]$  date su u prilogu 3.3.1 - [http://www.2shared.com/file/SnRW6x79/prilog\\_331.html](http://www.2shared.com/file/SnRW6x79/prilog_331.html). Kvadrati prirodnih frekvencija sistema  $\tilde{\omega}_{1n}, \tilde{\omega}_{2n}, \tilde{\omega}_{3n}$  i  $\tilde{\omega}_{4n}$  predstavljaju sopstvene vrednosti matrice  $[\tilde{\mathbf{M}}]^{-1} [\tilde{\mathbf{K}}_s]$ . Nehomogeni sistem diferencijalnih jednačina kome odgovaraju generalisane koordinate  $\{\tilde{\mathbf{S}}\}$  možemo prevesti na sistem glavnih koordinata  $\tilde{p}_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , uvođenjem modalne matrice Sistema  $[\tilde{\mathbf{P}}] = [\tilde{\mathbf{X}}_1 \tilde{\mathbf{X}}_2 \tilde{\mathbf{X}}_3 \tilde{\mathbf{X}}_4]$  čije kolone predstavljaju normalizovane osnovne oblike oscilovanja (*normalized mode shapes*)

$$\{\tilde{\mathbf{S}}(t)\} = \sum_{j=1}^4 \tilde{p}_j(t) \{\tilde{\mathbf{X}}_j\}. \quad (3.3.28)$$

Transformacija (3.3.28) je ekvivalentna linearnoj transformaciji između generalisanih i glavnih koordinata sistema

$$\{\tilde{\mathbf{S}}(t)\} = [\tilde{\mathbf{P}}] \{\tilde{\mathbf{p}}(t)\}. \quad (3.3.29)$$

Zamenom jednačine (3.3.28) u sistem (3.3.27) dobijamo

$$\sum_{j=1}^4 \tilde{p}_j(t) [\tilde{\mathbf{M}}] \{\tilde{\mathbf{X}}_j\} + \sum_{j=1}^4 \tilde{p}_j(t) [\tilde{\mathbf{K}}_s] \{\tilde{\mathbf{X}}_j\} = \{\mathbf{F}\}. \quad (3.3.30)$$

Ako obe strane izraza pomnožimo skalarno sa  $\{\mathbf{X}_r\}$  za proizvoljno  $r=1, 2, 3, 4$ , dobijamo

$$\sum_{j=1}^4 \ddot{\tilde{p}}_{jn}(t) (\{\tilde{\mathbf{X}}_r\}, [\tilde{\mathbf{M}}] \{\tilde{\mathbf{X}}_j\}) + \sum_{j=1}^4 \tilde{p}_{jn}(t) (\{\tilde{\mathbf{X}}_r\}, [\tilde{\mathbf{K}}_s] \{\tilde{\mathbf{X}}_j\}) = (\{\tilde{\mathbf{X}}_r\}, \{\mathbf{F}\}). \quad (3.3.31)$$

Primenom uslova ortogonalnosti osnovnih oblika oscilovanja (*mode-shape orthogonality condition*) dobijamo samo jedan član u svakoj od suma koji je različit od nule i to za  $r=j$ . Kako su osnovni oblici oscilovanja normalizovani, jednačina (3.3.31) postaje

$$\ddot{\tilde{p}}_{rn}(t) + \tilde{\omega}_{nr}^2 \tilde{p}_{rn}(t) = \tilde{g}_{rn}(t), \quad r = 1, 2, 3, 4, \quad (3.3.32)$$

gde je  $\tilde{g}_{rn}(t) = (\{\tilde{\mathbf{X}}_r\}, \{\mathbf{F}\})$ . Ako su početni uslovi definisani glavnim koordinatama  $\tilde{p}_{rn}(0) = 0, \dot{\tilde{p}}_{rn}(0) = 0$ , rešenja možemo zapisati u obliku konvolucionog integrala

$$\tilde{p}_{rn}(t) = \frac{1}{\tilde{\omega}_{rn}} \int_0^t \tilde{g}_{rn}(s) \sin[\tilde{\omega}_{rn}(t-s)] ds. \quad (3.3.33)$$

Zamenom dobijenih rešenja (3.3.33) u jednačinu transformacije koordinata (3.3.29) dobijamo

$$\{\tilde{\mathbf{S}}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{S}_{1n}(t) \\ \tilde{S}_{2n}(t) \\ \tilde{S}_{1n(r)}(t) \\ \tilde{S}_{2n(r)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_{11}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{12}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{13}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{14}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t) \\ \tilde{X}_{21}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{22}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{23}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{24}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t) \\ \tilde{X}_{31}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{32}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{33}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{34}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t) \\ \tilde{X}_{41}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{42}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{43}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{44}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.3.34)$$

Ovakvo dobijene funkcije vremena se sada mogu zameniti u pretpostavljena rešenja (3.3.25) odakle slede opšta rešenja prinudnih transverzalnih oscilacija dva elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa

$$w_{RB1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) [\tilde{X}_{11}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{12}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{13}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{14}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t)], \quad (3.3.35)$$

$$w_{RB2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) [\tilde{X}_{21}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{22}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{23}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{24}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t)], \quad (3.3.36)$$

$$\psi_{RB1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) [\tilde{X}_{31}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{32}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{33}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{34}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t)], \quad (3.3.37)$$

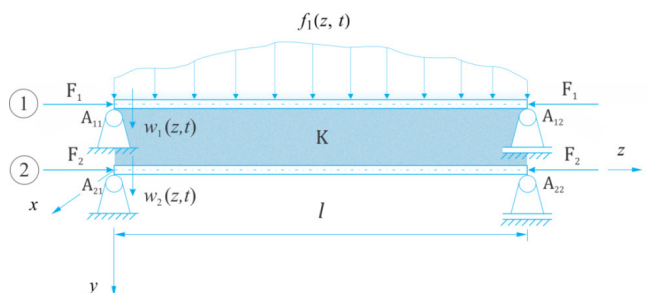
$$\psi_{RB2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) [\tilde{X}_{41}(\tilde{\omega}_{n1})\tilde{p}_{1n}(t) + \tilde{X}_{42}(\tilde{\omega}_{n2})\tilde{p}_{2n}(t) + \tilde{X}_{43}(\tilde{\omega}_{n3})\tilde{p}_{3n}(t) + \tilde{X}_{44}(\tilde{\omega}_{n4})\tilde{p}_{4n}(t)]. \quad (3.3.38)$$



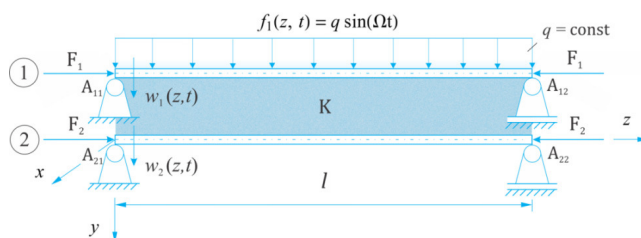
Opšta rešenja prinudnih oscilacija su neophodna za određivanje uslova ponašanja sistema kao dinamičkog absorbera i ispitivanja amplituda sistema pod uticajima pritisnih aksijalnih sila i različitih vrsta prinuda. Modalna matrica sistema  $[\tilde{\mathbf{P}}]$  prikazana je u analitičkom obliku takode u prilogu 3.3.1 ([http://www.2shared.com/file/SuRW6x79/prilog\\_331.html](http://www.2shared.com/file/SuRW6x79/prilog_331.html)).

### 3.4 Partikularna rešenja specijalnih slučajeva prinudnih oscilacija sistema dva elastično povezana nosača

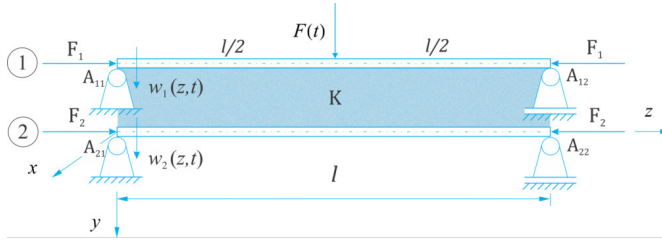
Određena opšta rešenja prinudnih oscilacija dva elastično povezana nosača mogu se primeniti za određivanje partikularnih rešenja prinudnih oscilacija sistema podvrgnutim harmonijskim kontinualnim (slika 3.4.1), harmonijski uniformnim (slika 3.4.2) i harmonijski koncentrisanim (slika 3.4.3) opterećenjima.



**Slika 3.4.1** Sistem nosača pod dejstvom proizvoljne harmonijske kontinuirane prinude



**Slika 3.4.2** Sistem nosača pod dejstvom harmonijske uniformne prinude



**Slika 3.4.3** Sistem nosača pod dejstvom harmonijske koncentrisane prinude

Prikazani fizički slučajevi harmonijskih prinuda sa slika 3.4.1-3.4.3 su oblika

1) Proizvoljna harmonijska kontinuirana pobuda

$$f_1(z, t) = q(z) \sin(\Omega t), \quad f_2(z, t) = 0, \quad (3.4.1)$$

2) Harmonijska uniformna kontinuirana pobuda

$$f_1(z, t) = q \sin(\Omega t), \quad f_2(z, t) = 0, \quad (3.4.2)$$

3) Harmonijska koncentrisana pobuda

$$f_1(z, t) = F \sin(\Omega t) \delta(z - 0.5l), \quad f_2(z, t) = 0, \quad (3.4.3)$$

gde su redom  $q(z)$ ,  $q$ ,  $F$ ,  $\Omega$  i  $\delta(z)$  proizvoljna funkcija po prostornoj koordinati  $z$ , amplituda uniformnog dejstva, frekvencija harmonijske koncentrisane sile i Dirac-ova delta funkcija. Zamenom jednačina (3.4.1), (3.4.2) i (3.4.3) u opšta rešenja prinudnih oscilacija sistema Reyleigh-jevog, Timoshenko-vog i Reddy-Bickford-ovog tipa dobijamo partikularna rešenja.

### 3.4.1 Partikularna rešenja prinudnih oscilacija sistema dva elastično povezana nosača Rayleigh-jevog tipa

Zamenom jednačina (3.4.1), (3.4.2) i (3.4.3) u opšta rešenja (3.1.25-3.1.26) dobijamo

$$Y_{n1}(t) = \frac{\alpha_{n2}}{(\alpha_{n2} - \alpha_{n1})} k_R \sin(\Omega t), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.4)$$

$$Y_{n2}(t) = \frac{\alpha_{n1}}{(\alpha_{n1} - \alpha_{n2})} k_R \sin(\Omega t), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.5)$$

Zamenom jednačina (3.4.4) i (3.4.5) u opšta rešenja jednačina (3.1.27) i (3.1.28) dobijamo

$$w_{R1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \left[ A_{n1} \sin(\Omega t) + \sum_{i=1}^2 B_{ni} \sin(\omega_{ni} t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.6)$$

$$w_{R2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \left[ A_{n2} \sin(\Omega t) + \sum_{i=1}^2 \alpha_{ni} B_{ni} \sin(\omega_{ni} t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.7)$$

gde su

$$A_{n1} = \frac{k_R}{\alpha_{n2} - \alpha_{n1}} \left[ \frac{\alpha_{n2}}{\omega_{n1}^2 - \Omega^2} - \frac{\alpha_{n1}}{\omega_{n2}^2 - \Omega^2} \right], \quad A_{n2} = \frac{k_R}{\alpha_{n2} - \alpha_{n1}} \left[ \frac{\alpha_{n1} \alpha_{n2}}{\omega_{n1}^2 - \Omega^2} - \frac{\alpha_{n1} \alpha_{n2}}{\omega_{n2}^2 - \Omega^2} \right],$$

$$B_{n1} = k_R \frac{\alpha_{n2}}{\alpha_{n2} - \alpha_{n1}} \left[ \frac{\Omega}{\omega_{n1}(\Omega^2 - \omega_{n1}^2)} \right], \quad B_{n2} = k_R \frac{\alpha_{n1}}{\alpha_{n2} - \alpha_{n1}} \left[ \frac{\Omega}{\omega_{n2}(\omega_{n2}^2 - \Omega^2)} \right].$$

U zavisnosti od tipa prinude u opštim rešenjima menjase samo parametar  $k_R$  za koji važi

$$\text{slučaj prinude 1) } k_R = 2M_1 \int_0^l q(z) \sin(k_n z) dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{slučaj prinude 2) } k_R = M_1 \frac{4lq}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{slučaj prinude 3) } k_R = 2FM_1 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Sada su prinudne oscilacije mehaničkog sistema oblika

$$w_{R1}^0(z, t) = \sin(\Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} A_{n1} \sin(k_n z), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.8)$$

$$w_{R2}^0(z, t) = \sin(\Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} A_{n2} \sin(k_n z), \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (3.4.9)$$

gde su  $A_{n1}, A_{n2}$  amplitude ustaljenog režima oscilovanja. Uslovi nastanka rezonancije i ponašanja sistema kao dinamičkog absorbera su

$$\text{a) Rezonancija: } \Omega = \omega_{ni}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$b) \text{ Dinamički absorber: } \Omega^2 = \frac{\alpha_{n2}\omega_{n2}^2 - \alpha_{n1}\omega_{n1}^2}{\alpha_{n2} - \alpha_{n1}}, \quad A_{n1} = 0,$$

$$A_{n2} = k_R \frac{\alpha_{n1} - \alpha_{n2}}{\omega_{n1}^2 - \omega_{n2}^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

### 3.4.2 Partikularna rešenja prinudnih oscilacija sistema dva elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa

Potražimo partikularna rešenja prinudnih oscilacija sistema spregnutih nosača Timoshenko-vog tipa pri delovanju različitih tipova prinuda. Zamenom jednačina (3.4.1), (3.4.2) i (3.4.3) u opšte jednačine prinudnog oscilovanja (3.2.32) i (3.2.35) dobijamo

$$w_{T1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \left[ \tilde{A}_{n1} \sin(\Omega t) + \sum_{r=1}^4 \tilde{B}_{nr} \sin(\tilde{\omega}_{nr} t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.10)$$

$$w_{T2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \left[ \tilde{A}_{n2} \sin(\Omega t) + \sum_{r=1}^4 \tilde{C}_{nr} \sin(\tilde{\omega}_{nr} t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.11)$$

$$\psi_{T1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \left[ \tilde{A}_{n3} \sin(\Omega t) + \sum_{r=1}^4 \tilde{D}_{nr} \sin(\tilde{\omega}_{nr} t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.12)$$

$$\psi_{T2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \left[ \tilde{A}_{n4} \sin(\Omega t) + \sum_{r=1}^4 \tilde{E}_{nr} \sin(\tilde{\omega}_{nr} t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.13)$$

gde su

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{n1} &= k_T \left( \frac{\tilde{X}_{11}^2}{\tilde{\omega}_{1n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{12}^2}{\tilde{\omega}_{2n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{13}^2}{\tilde{\omega}_{3n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{14}^2}{\tilde{\omega}_{4n}^2 - \Omega^2} \right), \\ \tilde{A}_{n2} &= k_T \left( \frac{\tilde{X}_{11}\tilde{X}_{21}}{\tilde{\omega}_{1n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{12}\tilde{X}_{22}}{\tilde{\omega}_{2n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{13}\tilde{X}_{23}}{\tilde{\omega}_{3n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{14}\tilde{X}_{24}}{\tilde{\omega}_{4n}^2 - \Omega^2} \right), \\ \tilde{A}_{n3} &= k_T \left( \frac{\tilde{X}_{11}\tilde{X}_{31}}{\tilde{\omega}_{1n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{12}\tilde{X}_{32}}{\tilde{\omega}_{2n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{13}\tilde{X}_{33}}{\tilde{\omega}_{3n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{14}\tilde{X}_{34}}{\tilde{\omega}_{4n}^2 - \Omega^2} \right), \\ \tilde{A}_{n4} &= k_T \left( \frac{\tilde{X}_{11}\tilde{X}_{41}}{\tilde{\omega}_{1n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{12}\tilde{X}_{42}}{\tilde{\omega}_{2n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{13}\tilde{X}_{43}}{\tilde{\omega}_{3n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{14}\tilde{X}_{44}}{\tilde{\omega}_{4n}^2 - \Omega^2} \right), \\ \tilde{B}_{1n} &= k_T \tilde{X}_{11}^2 \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{1n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{1n}^2)} \right], \quad \tilde{B}_{2n} = k_T \tilde{X}_{12}^2 \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{2n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{2n}^2)} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{3n} &= k_T \tilde{X}_{13}^2 \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{3n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{3n}^2)} \right], & \tilde{B}_{4n} &= k_T \tilde{X}_{14}^2 \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{4n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{4n}^2)} \right], \\
\tilde{C}_{1n} &= k_T \tilde{X}_{11} \tilde{X}_{21} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{1n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{1n}^2)} \right], & \tilde{C}_{2n} &= k_T \tilde{X}_{12} \tilde{X}_{22} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{2n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{2n}^2)} \right], \\
\tilde{C}_{3n} &= k_T \tilde{X}_{13} \tilde{X}_{23} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{3n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{3n}^2)} \right], & \tilde{C}_{4n} &= k_T \tilde{X}_{14} \tilde{X}_{24} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{4n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{4n}^2)} \right], \\
\tilde{D}_{1n} &= k_T \tilde{X}_{11} \tilde{X}_{31} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{1n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{1n}^2)} \right], & \tilde{D}_{2n} &= k_T \tilde{X}_{12} \tilde{X}_{32} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{2n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{2n}^2)} \right], \\
\tilde{D}_{3n} &= k_T \tilde{X}_{13} \tilde{X}_{33} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{3n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{3n}^2)} \right], & \tilde{D}_{4n} &= k_T \tilde{X}_{14} \tilde{X}_{34} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{4n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{4n}^2)} \right], \\
\tilde{E}_{1n} &= k_T \tilde{X}_{11} \tilde{X}_{41} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{1n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{1n}^2)} \right], & \tilde{E}_{2n} &= k_T \tilde{X}_{12} \tilde{X}_{42} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{2n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{2n}^2)} \right], \\
\tilde{E}_{3n} &= k_T \tilde{X}_{13} \tilde{X}_{43} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{3n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{3n}^2)} \right], & \tilde{E}_{4n} &= k_T \tilde{X}_{14} \tilde{X}_{44} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{4n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{4n}^2)} \right],
\end{aligned}$$

slučaj prinude 1)  $k_T = \frac{2}{l} \int_0^l q(z) \sin(k_n z) dz$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

slučaj prinude 2)  $k_T = \frac{4q}{n\pi}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

slučaj prinude 3)  $k_T = \frac{2}{l} F \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Partikularna rešenja prinudnih oscilacija mehaničkog sistema su oblika

$$w_{T1}^0(z, t) = \sin(\Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{n1} \sin(k_n z), \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.4.14)$$

$$w_{T2}^0(z, t) = \sin(\Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{n2} \sin(k_n z), \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.4.15)$$

$$\psi_{T1}^0(z, t) = \sin(\Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{n3} \cos(k_n z), \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.4.16)$$

$$\psi_{T2}^0(z, t) = \sin(\Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{n4} \cos(k_n z), \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (3.4.17)$$

gde su  $\tilde{A}_{nr}$  amplitude ustaljenog režima oscilovanja. Uslovi nastanka rezonancije i ponašanja sistema kao dinamičkog absorbera su

$$a) \text{ Rezonancija : } \Omega = \tilde{\omega}_{rn}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

b) Dinamički absorber

Određivanje prinudne frekvencije  $\Omega$  pri kojoj će se sistem ponašati kao dinamički absorber dobijamo iz uslova da je  $\tilde{A}_{n1} = 0$ . Posle faktorizacije jednačine  $k_T \left( \frac{\tilde{X}_{11}^2}{\tilde{\omega}_{1n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{12}^2}{\tilde{\omega}_{2n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{13}^2}{\tilde{\omega}_{3n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{14}^2}{\tilde{\omega}_{4n}^2 - \Omega^2} \right) = 0$ , dobijamo bikubnu polinomsku jednačinu po nepoznatim prinudnim frekvencijama

$$\Omega^6 + a_1 \Omega^4 + a_2 \Omega^2 + a_3 = 0, \quad (3.4.18)$$

gde su

$$\begin{aligned} a_1 &= - \frac{\tilde{X}_{11}^2 (\tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{\omega}_{n3}^2 + \tilde{\omega}_{n4}^2) + \tilde{X}_{12}^2 (\tilde{\omega}_{n1}^2 + \tilde{\omega}_{n3}^2 + \tilde{\omega}_{n4}^2)}{\tilde{X}_{11}^2 + \tilde{X}_{12}^2 + \tilde{X}_{13}^2 + \tilde{X}_{14}^2} - \\ &\quad - \frac{\tilde{X}_{13}^2 (\tilde{\omega}_{n1}^2 + \tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{\omega}_{n4}^2) + \tilde{X}_{14}^2 (\tilde{\omega}_{n1}^2 + \tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{\omega}_{n3}^2)}{\tilde{X}_{11}^2 + \tilde{X}_{12}^2 + \tilde{X}_{13}^2 + \tilde{X}_{14}^2}, \\ a_2 &= \frac{\tilde{\omega}_{n4}^2 [\tilde{X}_{11}^2 (\tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{\omega}_{n3}^2) + \tilde{X}_{12}^2 (\tilde{\omega}_{n1}^2 + \tilde{\omega}_{n3}^2)] + \tilde{\omega}_{n3}^2 (\tilde{X}_{11}^2 \tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{X}_{12}^2 \tilde{\omega}_{n1}^2)}{\tilde{X}_{11}^2 + \tilde{X}_{12}^2 + \tilde{X}_{13}^2 + \tilde{X}_{14}^2} + \\ &\quad + \frac{\tilde{X}_{13}^2 [\tilde{\omega}_{n1}^2 (\tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{\omega}_{n4}^2) + \tilde{\omega}_{n2}^2 \tilde{\omega}_{n4}^2] + \tilde{X}_{14}^2 [\tilde{\omega}_{n3}^2 (\tilde{\omega}_{n1}^2 + \tilde{\omega}_{n2}^2) + \tilde{\omega}_{n1}^2 \tilde{\omega}_{n2}^2]}{\tilde{X}_{11}^2 + \tilde{X}_{12}^2 + \tilde{X}_{13}^2 + \tilde{X}_{14}^2}, \\ a_3 &= - \frac{\tilde{\omega}_{n4}^2 [\tilde{\omega}_{n3}^2 (\tilde{X}_{11}^2 \tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{X}_{12}^2 \tilde{\omega}_{n1}^2) + \tilde{X}_{13}^2 \tilde{\omega}_{n1}^2 \tilde{\omega}_{n2}^2] + \tilde{X}_{14}^2 \tilde{\omega}_{n1}^2 \tilde{\omega}_{n2}^2 \tilde{\omega}_{n3}^2}{\tilde{X}_{11}^2 + \tilde{X}_{12}^2 + \tilde{X}_{13}^2 + \tilde{X}_{14}^2}. \end{aligned}$$

odakle slede trirešenja prinudnih frekvencija za koje je amplituda prvog nosača jednaka nuli.

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_1^2 \\ \tilde{\Omega}_2^2 \\ \tilde{\Omega}_3^2 \end{pmatrix} = -\frac{\tilde{a}_1}{3} + 2 \sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{\tilde{\theta} + 2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{\tilde{\theta} + 4\pi}{3}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.4.19)$$

uz uslov da je  $D = \frac{\tilde{q}^2}{4} + \frac{\tilde{p}^3}{27} < 0$  i gde su

$$\tilde{p} = \tilde{a}_2 - \frac{\tilde{a}_1^2}{3}, \quad \tilde{q} = \tilde{a}_3 - \frac{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2}{3} + \frac{2\tilde{a}_1^3}{27}, \quad \tilde{\theta} = \cos^{-1} \left[ -\frac{\tilde{q}}{2} \left( -\frac{\tilde{p}}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \right].$$

### 3.4.3 Partikularna rešenja prinudnih oscilacija sistema dva elastično povezana nosača Reddy-Bickford-ovog tipa

Partikularna rešenja prinudnih oscilacija sistema spregnutih nosača Reddy-Bickford-ovog tipa pri delovanju različitih tipova prinuda određujemo zamenom jednačina (3.4.1), (3.4.2) i (3.4.3) u opšte jednačine prinudnog oscilovanja (3.3.35-3.3.38)

$$w_{RB1}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \left[ \tilde{A}_{n1} \sin(\Omega t) + \sum_{r=1}^4 \tilde{B}_{nr} \sin(\tilde{\omega}_{nr} t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.20)$$

$$w_{RB2}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n z) \left[ \tilde{A}_{n2} \sin(\Omega t) + \sum_{r=1}^4 \tilde{C}_{nr} \sin(\tilde{\omega}_{nr} t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.21)$$

$$\psi_{RB}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \left[ \tilde{A}_{n3} \sin(\Omega t) + \sum_{r=1}^4 \tilde{D}_{nr} \sin(\tilde{\omega}_{nr} t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.22)$$

$$\psi_{RB}^0(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n z) \left[ \tilde{A}_{n4} \sin(\Omega t) + \sum_{r=1}^4 \tilde{E}_{nr} \sin(\tilde{\omega}_{nr} t) \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.23)$$

gde su

$$\tilde{A}_{n1} = k_{RB} \left( \frac{\tilde{X}_{11}^2}{\tilde{\omega}_{1n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{12}^2}{\tilde{\omega}_{2n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{13}^2}{\tilde{\omega}_{3n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{14}^2}{\tilde{\omega}_{4n}^2 - \Omega^2} \right),$$

$$\tilde{A}_{n2} = k_{RB} \left( \frac{\tilde{X}_{11}\tilde{X}_{21}}{\tilde{\omega}_{1n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{12}\tilde{X}_{22}}{\tilde{\omega}_{2n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{13}\tilde{X}_{23}}{\tilde{\omega}_{3n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{14}\tilde{X}_{24}}{\tilde{\omega}_{4n}^2 - \Omega^2} \right),$$

$$\tilde{A}_{n3} = k_{RB} \left( \frac{\tilde{X}_{11}\tilde{X}_{31}}{\tilde{\omega}_{1n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{12}\tilde{X}_{32}}{\tilde{\omega}_{2n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{13}\tilde{X}_{33}}{\tilde{\omega}_{3n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{14}\tilde{X}_{34}}{\tilde{\omega}_{4n}^2 - \Omega^2} \right),$$

$$\tilde{A}_{n4} = k_{RB} \left( \frac{\tilde{X}_{11}\tilde{X}_{41}}{\tilde{\omega}_{1n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{12}\tilde{X}_{42}}{\tilde{\omega}_{2n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{13}\tilde{X}_{43}}{\tilde{\omega}_{3n}^2 - \Omega^2} + \frac{\tilde{X}_{14}\tilde{X}_{44}}{\tilde{\omega}_{4n}^2 - \Omega^2} \right),$$

$$\tilde{B}_{1n} = k_T \tilde{X}_{11}^2 \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{1n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{1n}^2)} \right], \quad \tilde{B}_{2n} = k_{RB} \tilde{X}_{12}^2 \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{2n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{2n}^2)} \right],$$

$$\tilde{B}_{3n} = k_{RB} \tilde{X}_{13}^2 \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{3n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{3n}^2)} \right], \quad \tilde{B}_{4n} = k_{RB} \tilde{X}_{14}^2 \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{4n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{4n}^2)} \right],$$

$$\tilde{C}_{1n} = k_{RB} \tilde{X}_{11}\tilde{X}_{21} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{1n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{1n}^2)} \right], \quad \tilde{C}_{2n} = k_{RB} \tilde{X}_{12}\tilde{X}_{22} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{2n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{2n}^2)} \right],$$

$$\tilde{C}_{3n} = k_{RB} \tilde{X}_{13}\tilde{X}_{23} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{3n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{3n}^2)} \right], \quad \tilde{C}_{4n} = k_{RB} \tilde{X}_{14}\tilde{X}_{24} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{4n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{4n}^2)} \right],$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}_{1n} &= k_{RB} \tilde{X}_{11} \tilde{X}_{31} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{1n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{1n}^2)} \right], & \tilde{D}_{2n} &= k_{RB} \tilde{X}_{12} \tilde{X}_{32} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{2n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{2n}^2)} \right], \\ \tilde{D}_{3n} &= k_{RB} \tilde{X}_{13} \tilde{X}_{33} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{3n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{3n}^2)} \right], & \tilde{D}_{4n} &= k_{RB} \tilde{X}_{14} \tilde{X}_{34} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{4n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{4n}^2)} \right], \\ \tilde{E}_{1n} &= k_{RB} \tilde{X}_{11} \tilde{X}_{41} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{1n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{1n}^2)} \right], & \tilde{E}_{2n} &= k_{RB} \tilde{X}_{12} \tilde{X}_{42} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{2n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{2n}^2)} \right], \\ \tilde{E}_{3n} &= k_{RB} \tilde{X}_{13} \tilde{X}_{43} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{3n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{3n}^2)} \right], & \tilde{E}_{4n} &= k_{RB} \tilde{X}_{14} \tilde{X}_{44} \left[ \frac{\Omega}{\tilde{\omega}_{4n}(\Omega^2 - \tilde{\omega}_{4n}^2)} \right],\end{aligned}$$

slučaj prinude 1)  $k_{RB} = k_T = \frac{2}{l} \int_0^l q(z) \sin(k_n z) dz$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

slučaj prinude 2)  $k_{RB} = k_T = \frac{4q}{n\pi}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

slučaj prinude 3)  $k_{RB} = k_T = \frac{2}{l} F \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Partikularna rešenja prinudnih oscilacija mehaničkog sistema su oblika

$$w_{RB1}^0(z, t) = \sin(\Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{n1} \sin(k_n z), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.24)$$

$$w_{RB2}^0(z, t) = \sin(\Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{n2} \sin(k_n z), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.25)$$

$$\psi_{RB1}^0(z, t) = \sin(\Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{n3} \cos(k_n z), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.26)$$

$$\psi_{RB2}^0(z, t) = \sin(\Omega t) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_{n4} \cos(k_n z), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.4.27)$$

gde su  $\tilde{A}_{nr}$  amplitude ustaljenog režima oscilovanja. Rezonancija i dinamički absorber nastupaju kada je

$$a) \text{ Rezonancija : } \Omega = \tilde{\omega}_{rn}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

b) Dinamički absorber

Određivanje prinudne frekvencije  $\Omega$  pri kojoj će se sistem ponašati kao dinamički absorber dobijamo kao u slučaju Timoshenko-ovog sistemanosača odakle slede tri rešenja prinudnih frekvencija



$$\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_1^2 \\ \tilde{\Omega}_2^2 \\ \tilde{\Omega}_3^2 \end{pmatrix} = -\frac{\tilde{a}_1}{3} + 2\sqrt{-\frac{\tilde{p}}{3}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\tilde{\theta}}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{\tilde{\theta} + 2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{\tilde{\theta} + 4\pi}{3}\right) \end{pmatrix}, \quad (3.4.28)$$

gde su

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= -\frac{\tilde{X}_{11}^2(\tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{\omega}_{n3}^2 + \tilde{\omega}_{n4}^2) + \tilde{X}_{12}^2(\tilde{\omega}_{n1}^2 + \tilde{\omega}_{n3}^2 + \tilde{\omega}_{n4}^2)}{\tilde{X}_{11}^2 + \tilde{X}_{12}^2 + \tilde{X}_{13}^2 + \tilde{X}_{14}^2} - \\ &\quad - \frac{\tilde{X}_{13}^2(\tilde{\omega}_{n1}^2 + \tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{\omega}_{n4}^2) + \tilde{X}_{14}^2(\tilde{\omega}_{n1}^2 + \tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{\omega}_{n3}^2)}{\tilde{X}_{11}^2 + \tilde{X}_{12}^2 + \tilde{X}_{13}^2 + \tilde{X}_{14}^2}, \\ \tilde{a}_2 &= \frac{\tilde{\omega}_{n4}^2[\tilde{X}_{11}^2(\tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{\omega}_{n3}^2) + \tilde{X}_{12}^2(\tilde{\omega}_{n1}^2 + \tilde{\omega}_{n3}^2)] + \tilde{\omega}_{n3}^2(\tilde{X}_{11}^2\tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{X}_{12}^2\tilde{\omega}_{n1}^2)}{\tilde{X}_{11}^2 + \tilde{X}_{12}^2 + \tilde{X}_{13}^2 + \tilde{X}_{14}^2} + \\ &\quad + \frac{\tilde{X}_{13}^2[\tilde{\omega}_{n1}^2(\tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{\omega}_{n4}^2) + \tilde{\omega}_{n2}^2\tilde{\omega}_{n4}^2] + \tilde{X}_{14}^2[\tilde{\omega}_{n3}^2(\tilde{\omega}_{n1}^2 + \tilde{\omega}_{n2}^2) + \tilde{\omega}_{n1}^2\tilde{\omega}_{n2}^2]}{\tilde{X}_{11}^2 + \tilde{X}_{12}^2 + \tilde{X}_{13}^2 + \tilde{X}_{14}^2}, \\ \tilde{a}_3 &= -\frac{\tilde{\omega}_{n4}^2[\tilde{\omega}_{n3}^2(\tilde{X}_{11}^2\tilde{\omega}_{n2}^2 + \tilde{X}_{12}^2\tilde{\omega}_{n1}^2) + \tilde{X}_{13}^2\tilde{\omega}_{n1}^2\tilde{\omega}_{n2}^2] + \tilde{X}_{14}^2\tilde{\omega}_{n1}^2\tilde{\omega}_{n2}^2\tilde{\omega}_{n3}^2}{\tilde{X}_{11}^2 + \tilde{X}_{12}^2 + \tilde{X}_{13}^2 + \tilde{X}_{14}^2}. \end{aligned}$$

$$\tilde{p} = \tilde{a}_2 - \frac{\tilde{a}_1^2}{3}, \quad \tilde{q} = \tilde{a}_3 - \frac{\tilde{a}_1\tilde{a}_2}{3} + \frac{2\tilde{a}_1^3}{27}, \quad \tilde{\theta} = \cos^{-1} \left[ -\frac{\tilde{q}}{2} \left( -\frac{\tilde{p}}{3} \right)^{-\frac{3}{2}} \right].$$

### 3.5 Numerička analiza

Uzimanje u obzir uticaja inercije rotacije i poprečnog smicanja ima za cilj da prikaže razlike u amplitudama koje se javljaju pri dejstvu aksijalnih sila kod nosača većih debljina. Ovi uticaji povećavaju razliku u aproksimaciji rešenja i moraju se uzeti u obzir kada dolazi do zaokretanja poprečnih preseka nosača usled sila smicanja. U numeričkom eksperimentu je korišćen model dva nosača identičnih materijalnih i geometrijskih karakteristika

$$E = 1 \times 10^{10} \text{Nm}^{-2}, \quad \nu = 0.34, \quad G = 0.417 * 10^{10} \text{Nm}^{-2}, \quad k = \frac{5}{6}, \quad K = 2 \times 10^5 \text{Nm}^{-2}$$

$$\rho = 2 \times 10^3 \text{kgm}^{-3}, A = 5 \times 10^{-2} \text{m}^2, \quad I = \frac{bh^3}{12} = 4 \times 10^{-4} \text{m}^4,$$

$$l = 10 \text{ m}, \quad b = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ m}, \quad h = h_1 = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ m}. \quad (3.5.1)$$

Uvedimo veličinu  $\chi$  – faktor aksijalne sile na prvom nosaču u funkciji njene kritične vrednosti,  $\zeta$  – faktor aksijalne sile na drugom nosaču u funkciji aksijalne sile na prvom nosaču i odnose amplituda sa i bez dejstva aksijalnih sila  $\varphi_1, \varphi_2$  u obliku

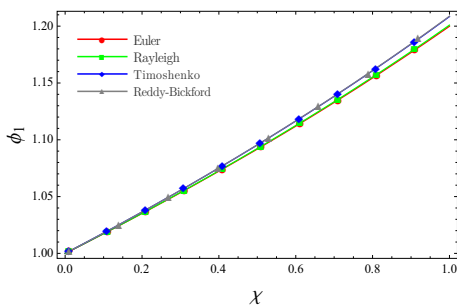
$$F_1 = \chi F^{kr}, \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad F_2 = \zeta F_1, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \varphi_1 = \frac{A_{n1}}{A_{0,n1}}, \quad \varphi_2 = \frac{A_{n2}}{A_{0,n2}},$$

$$\text{ref. [51] Euler, Rayleigh: } F^{kr} = \frac{EI\pi^2}{l^2}, \quad \text{ref. [52] Timoshenko: } F^{kr} = \frac{\frac{EI\pi^2}{l^2}}{1 + \frac{EI\pi^2}{GAKl^2}},$$

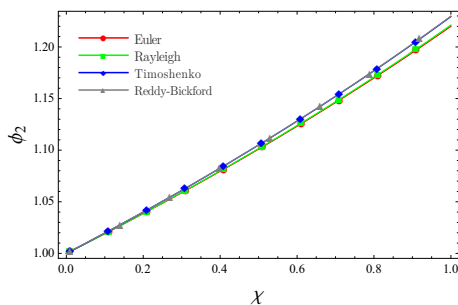
$$\text{ref. [31] Reddy – Bickford: } F^{kr} = \frac{EI\pi^2 \left( 840G + \frac{Eh^2\pi^2}{l^2} \right)}{l^2 \left( 840G + \frac{85Eh^2\pi^2}{l^2} \right)}. \quad (3.5.2)$$

U slučaju harmonijske uniformne kontinuirane pobude, amplitude ustaljenih prinudnih oscilacija sistema nosača se mogu odrediti za parametre sistema na osnovu određenih analitičkih izraza. Odnosi amplituda  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ , pri pobudi sledećih karakteristika  $\Omega = 0.6\omega_{nII}$ ,  $q = 1$  prikazani su na dijagramima 3.5.1 - 3.5.16. Dobijeni rezultati upoređeni su sa rezultatima prinudnih oscilacija sistema elastično povezanih nosača Euler-ovog tipa, Zhang i koautori [5]. Na svim dijagramima primetno je da je odnos amplituda drugog nosača veći u poređenju sa odnosima amplituda prvog. Upoređenjem dobijenih rezultata u istom režimu oscilovanja za različite vrednosti faktora ( $\zeta = 0.1; 0.9$ ) može se zaključiti da uticaj aksijalne sile na drugom nosaču neznatno utiče na razliku odnosa amplituda oscilovanja kako prvog tako i drugog nosača. Za slučaj nosača duplo veće debljine (3.5.9-3.5.16) vidimo da sa povećanjem moda oscilovanja raste brže razlika u odnosima amplitude među korišćenim modelima pri čemu Timoshenko-va i Reddy-Bickford-ova daju mnogo bolje aproksimacije, čime je za ovakav fizički model dva elastično povezana nosača veće debljine ispravno koristiti analitički određene rezultate iz ovog poglavlja. Na dijagramima 3.5.17-3.5.18 date su amplitudno-frekventne karakteristike oscilovanja dva elastično povezana nosača slojem Winkler-ovog tipa. Na njima se jasno vidi kada nastupa rezonancija i kada se sistem ponaša kao dinamički absorber. Razlika u dobijenim rešenjima pokazuje značaj korišćenja teorija koje uzimaju u obzir inerciju rotacije i poprečno smicanje čiji se uticaji povećavaju sa povećanjem moda u prinudnim oscilacijama sistema.

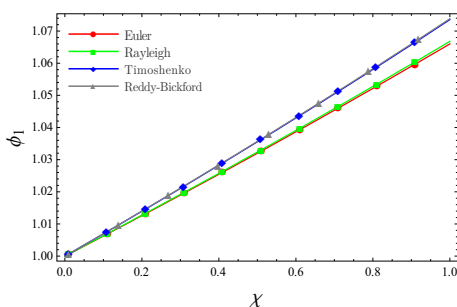
Slučaj nosača debljine  $h = h_1$



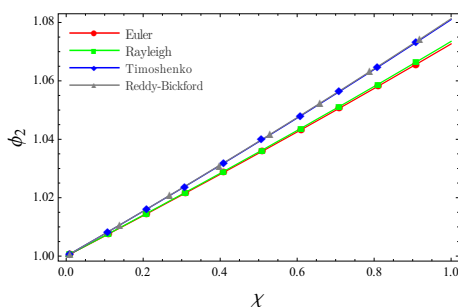
Slika 3.5.1 Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_1$ ; ( $n = 3, \zeta = 0.1$ )



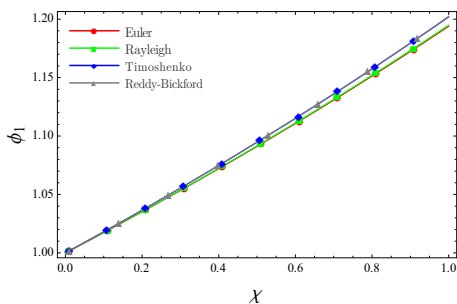
Slika 3.5.2 Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_2$ ; ( $n = 3, \zeta = 0.1$ )



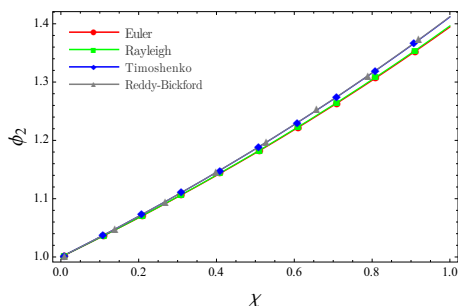
Slika 3.5.3 Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_1$ ; ( $n = 5, \zeta = 0.1$ )



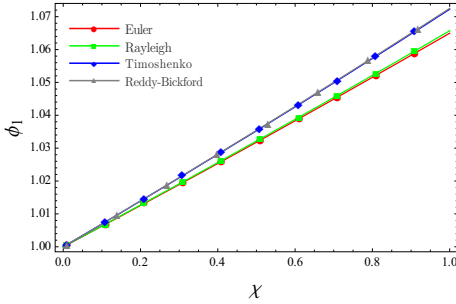
Slika 3.5.4 Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_2$ ; ( $n = 5, \zeta = 0.1$ )



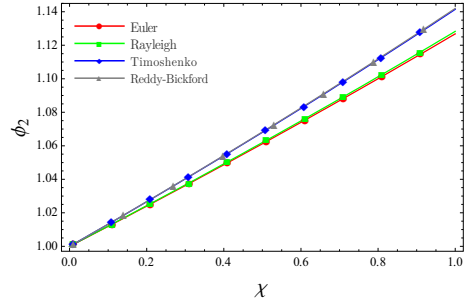
Slika 3.5.5 Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_1$ ; ( $n = 3, \zeta = 0.9$ )



Slika 3.5.6 Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_2$ ; ( $n = 3, \zeta = 0.9$ )

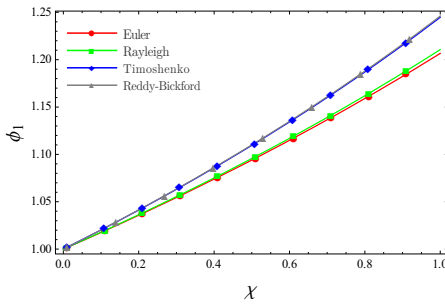


**Slika 3.5.7** Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_1$ ; ( $n = 5, \zeta = 0.9$ )

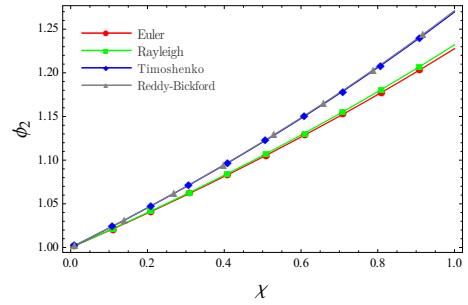


**Slika 3.5.8** Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_2$ ; ( $n = 5, \zeta = 0.9$ )

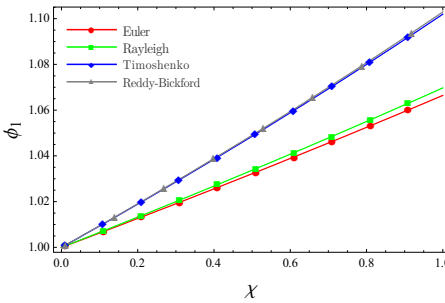
*Slučaj nosača debljine  $h = 2h_1$*



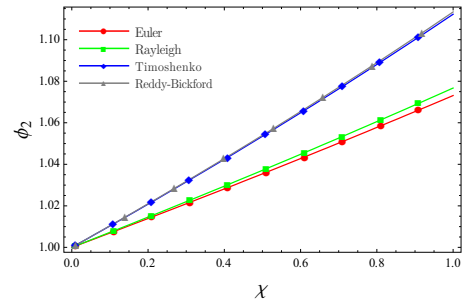
**Slika 3.5.9** Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_1$ ; ( $n = 3, \zeta = 0.1$ )



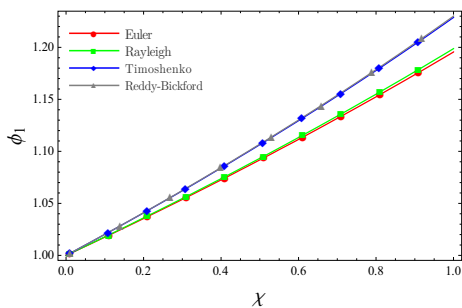
**Slika 3.5.10** Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_2$ ; ( $n = 3, \zeta = 0.1$ )



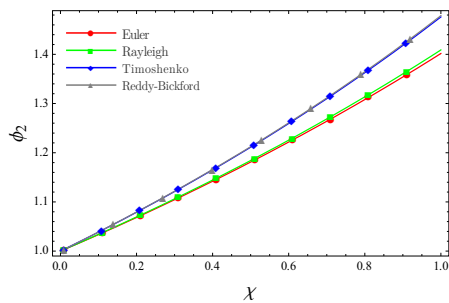
**Slika 3.5.11** Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_1$ ; ( $n = 5, \zeta = 0.1$ )



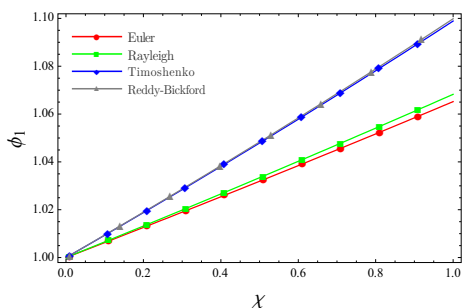
**Slika 3.5.12** Uticaj faktora pritise aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_2$ ; ( $n = 5, \zeta = 0.1$ )



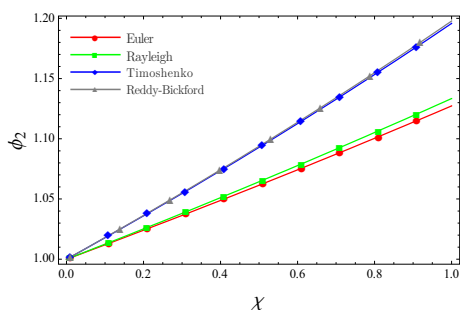
Slika 3.5.13 Uticaj faktora pritiskne aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_1$ ; ( $n = 3, \zeta = 0.9$ )



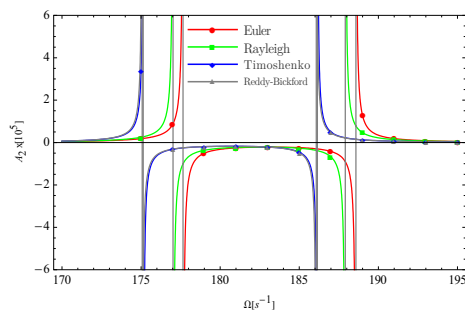
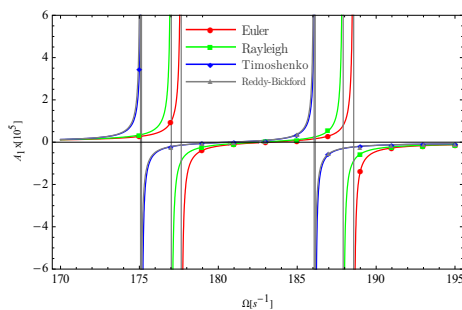
Slika 3.5.14 Uticaj faktora pritiskne aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_2$ ; ( $n = 3, \zeta = 0.9$ )



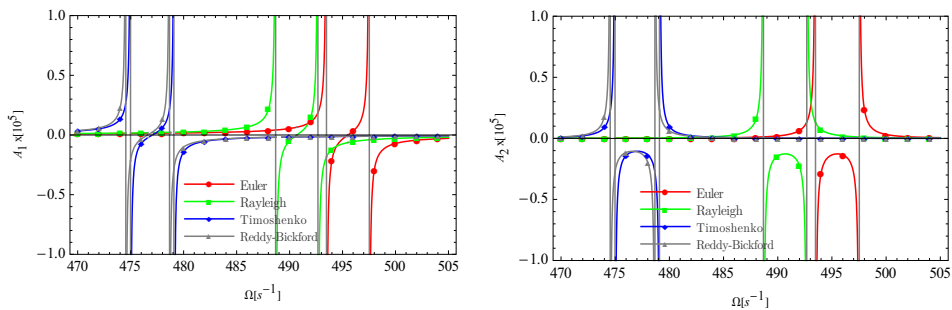
Slika 3.5.15 Uticaj faktora pritiskne aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_1$ ; ( $n = 5, \zeta = 0.9$ )



Slika 3.5.16 Uticaj faktora pritiskne aksijalne sile  $\chi$  na relativni odnos amplituda  $\phi_2$ ; ( $n = 5, \zeta = 0.9$ )



Slika 3.5.17 Amplitudno-frekventni dijagram prinudnih oscilacija sistema elastino povezanih nosaca pri dejstvu uniformne harmonijske kontinuirane pobude  $h=h_1, n=3$



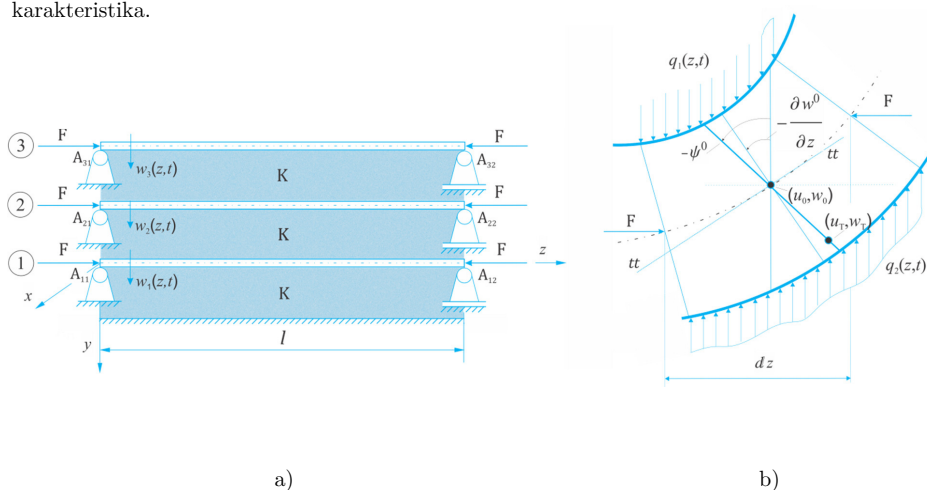
Slika 3.5.18 Amplitudno-frekventni dijagram prinudnih oscilacija sistema elastično povezanih nosača pri dejstvu uniformne harmonijske kontinuirane pobude  $h=h_1$ ,  $n=5$

# 4

## Uticaji poprečnog smicanja na statičku stabilnost sistema elastično povezanih nosača na elastičnoj podlozi

### 4.1 Kritična sile izvijanja tri elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa na elastičnoj podlozi

Analizirajmo primer tri povezana nosača Timoshenko-vog tipa istih dužina  $l$ , na elastičnoj podlozi Winkler-ovog tipa krutosti  $K$  sa uticajem pritisnih aksijalnih sila  $F$ , Stojanović i koautori [14]. Parcijalne diferencijalne jednačine pomeranja tačaka sistema prikazanog na slici 4.1.1 izvešćemo primenom principa virtuelnog rada kada su nosači istih geometrijskih i materijalnih karakteristika.



Slika 4.1.1 a) Sistem tri nosača na elastičnoj podlozi  
b) Elementarni deformisani deo nosača

Neka su funkcije pomeranja u longitudinalnom i transverzalnom pravcu kao i ugao između poprečnog preseka nosača i  $y$  ose redom,  $u_{Ti}(y, z, t)$ ,  $w_{T1}(y, z)$ ,  $\psi_{T1}^0(z)$ ,  $u_{T2}(y, z)$ ,  $w_{T2}(y, z)$ ,  $\psi_{T2}^0(z)$ ,  $u_{T3}(y, z)$ ,  $w_{T3}(y, z)$  i  $\psi_{T3}^0(z)$ . Za negativno orijentisan ugao poprečnog preseka  $\psi_T^0$  ref. [14, 26], pomeranja tačaka nosača su

$$u_{Ti}(y, z) = u_{Ti}^0(z) - y\psi_{Ti}^0(z), \quad w_{Ti}(y, z) = w_{Ti}^0(z), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1.1)$$

Deformacije u funkciji pomeranja i veze između napona i deformacije po Hooke-ovom zakonu su

$$\varepsilon_{zi}(y, z) = \frac{\partial u_{Ti}^0(z)}{\partial z} - y \frac{\partial \psi_{Ti}^0(z)}{\partial z}, \quad \gamma_{zyi}(z) = \frac{\partial w_{Ti}^0(z)}{\partial z} - \psi_{Ti}^0(z), \quad (4.1.2)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{zi} \\ \tau_{zyi} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zi} \\ \gamma_{zyi} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1.3)$$

Virtuelni radovi unutrašnjih i spoljašnjih sila su

$$\delta W_{Vi} = -b \int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_{zi}(z) \delta \varepsilon_{zi}(z) + \tau_{zyi} \delta \gamma_{zyi}(z)] dy dz, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1.4)$$

$$\delta W_{ex1} = \int_0^l \left[ \delta w_{T1}^0(z) K (w_{T2}^0(z) - 2w_{T1}^0(z)) + F \frac{\partial w_{T1}^0(z)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T1}^0(z)}{\partial z} \right] dz, \quad (4.1.5)$$

$$\delta W_{ex2} = \int_0^l \left[ \delta w_{T2}^0(z) K (w_{T1}^0(z) - 2w_{T2}^0(z) + w_{T3}^0(z)) + F \frac{\partial w_{T2}^0(z)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T2}^0(z)}{\partial z} \right] dz, \quad (4.1.6)$$

$$\delta W_{ex3} = \int_0^l \left[ \delta w_{T3}^0(z) K (w_{T2}^0(z) - w_{T3}^0(z)) + F \frac{\partial w_{T3}^0(z)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T3}^0(z)}{\partial z} \right] dz, \quad (4.1.7)$$

Zamenom jednačina (4.1.4-4.1.7) u opštu jednačinu principa virtuelnog rada i primenom Green-ove teoreme dobijamo parcijalne diferencijalne jednačine pomeranja tačaka nosača u statičkom domenu

$$-kGA \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) + F \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + 2Kw_1 - Kw_2 = 0, \quad -EI_x \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - kGA \left( \frac{\partial w_1}{\partial z} - \psi_1 \right) = 0, \quad (4.1.8)$$



$$-kGA \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right) + F \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} - Kw_1 + 2Kw_2 - Kw_3 = 0, \quad -EI_x \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} - kGA \left( \frac{\partial w_2}{\partial z} - \psi_2 \right) = 0, \quad (4.1.9)$$

$$-kGA \left( \frac{\partial^2 w_3}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \right) + F \frac{\partial^2 w_3}{\partial z^2} - Kw_2 + Kw_3 = 0, \quad -EI_x \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z^2} - kGA \left( \frac{\partial w_3}{\partial z} - \psi_3 \right) = 0, \quad (4.1.10)$$

Eliminacijom  $\psi_i$  iz jednačina (4.1.8 - 4.1.10) dobijamo sistem tri parcijalne diferencijalne jednačine četvrtog reda oblika

$$EI \left( 1 - \frac{F}{kAG} \right) \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \left( F - 2 \frac{KEI}{kAG} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{KEI}{kAG} \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} + 2Kw_1 - Kw_2 = 0, \quad (4.1.11)$$

$$EI \left( 1 - \frac{F}{kAG} \right) \frac{\partial^4 w_2}{\partial z^4} + \frac{KEI}{kAG} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \left( F - \frac{KEI}{kAG} \right) \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} + \frac{KEI}{kAG} \frac{\partial^2 w_3}{\partial z^2} - Kw_1 + 2Kw_2 - Kw_3 = 0, \quad (4.1.12)$$

$$EI \left( 1 - \frac{F}{kAG} \right) \frac{\partial^4 w_3}{\partial z^4} + \frac{KEI}{kAG} \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} + \left( F - \frac{KEI}{kAG} \right) \frac{\partial^2 w_3}{\partial z^2} - Kw_2 + Kw_3 = 0. \quad (4.1.13)$$

Kako su nosači slobodno oslonjeni, primenjujemo granične uslove za koje važi

$$w_i(0) = \frac{d^2 w_i(0)}{dz^2} = \frac{d^2 w_i(L)}{dz^2} = w_i(L) = 0. \quad (4.1.14)$$

Ugib nosača možemo pretpostaviti u obliku reda

$$w_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{ni} Z_n(z), \quad i = 1, 2. \quad (4.1.15)$$

gde funkcija  $Z_n(z)$  ima oblik

$$Z_n(z) = \sin(k_n z), \quad k_n = n\pi/L, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1.16)$$

Zamenom pretpostavljenih rešenja (4.1.15) u jednačine (4.1.11-4.1.13) dobijamo sistem homogenih algebrajskih jednačina koji možemo napisati u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} x + 2RK & -KR & 0 \\ -KR & x + 2RK & -KR \\ 0 & -KR & x + RK \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{n1} \\ A_{n2} \\ A_{n3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (4.1.17)$$

gde su

$$R = 1 + \frac{EI}{GAK} k_n^2, \quad x = k_n^2 (EI k_n^2 - FR). \quad (4.1.18)$$

Postojanje netrivialnih rešenja zahteva da determinanta matrice u jednačini (4.1.17) bude jednaka nuli, što daje karakterističnu jednačinu trećeg stepena u obliku

$$x^3 + 5RKx^2 + 6(RK)^2x + (RK)^3 = 0, \quad (4.1.19)$$

gde su

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 5RK, \quad a_2 = 6(RK)^2, \quad a_3 = (RK)^3.$$

Rešenja polinoma trećeg stepena jednačine (4.1.19) su

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{5}{3}RK + 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = -0,198062RK, \\ x_2 &= -\frac{5}{3}RK + 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+2\pi}{3}\right) = -1,55496RK, \\ x_3 &= -\frac{5}{3}RK + 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+4\pi}{3}\right) = -3,24698RK, \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

gde su

$$p = \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{3a_0^2}, \quad q = \frac{a_3}{a_0} - \frac{a_1a_2}{3a_0^2} + \frac{2a_1^3}{27a_0^3}, \quad D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0, \quad \theta = \cos^{-1}\left[-\frac{q}{2}\left(-\frac{p}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\right].$$

Ako zamenimo rešenja (4.1.20) u izraz (4.1.18) dobićemo tri vrednosti za silu  $F$  od kojih je najmanja vrednost kritična sila izvijanja i oblika je

$$F_b^{kr} = \frac{0.198062 Kl^2}{\pi^2 n^2} + \frac{EI \pi^2 n^2}{l^2 \left(1 + \frac{EI}{GAK} \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)}. \quad (4.1.21)$$

Za  $K = 0$  iz jednačine (4.1.21) dobijamo

$$P_n = \frac{EI\pi^2 n^2}{l^2 \left(1 + \frac{EI}{GAk} \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)}, \quad (4.1.22)$$

što predstavlja kritičnu silu izvijanja  $n$ -tog moda Timoshenko-vog nosača [27]. Za  $n = 1$  jednačina (4.1.22) svodi se na oblik

$$P = \frac{EI\pi^2}{l^2 \left(1 + \frac{EI}{GAk} \frac{\pi^2}{l^2}\right)}. \quad (4.1.23)$$

što je najmanja vrednost sile pod čijim uticajem se nosač nalazi u stabilnom području. Rešenja jednačine (4.1.19) proverićemo trigonometrijskom metodom [28]. Pretpostavimo da su rešenja sistema homogenih algebarskih jednačina (4.1.17) netrivialna

$$A_{nk} = N \sin k\varphi, \quad N \neq 0, \quad \sin k\varphi \neq 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.1.24)$$

Zamenom pretpostavljenih rešenja (4.1.24) u sistem jednačina (4.1.17) dobijamo

$$-KR \cdot N \sin \varphi + (x + 2RK) \cdot N \sin 2\varphi - KR \cdot N \sin 3\varphi = 0. \quad (4.1.25)$$

Rešavanjem jednačine (4.1.25) po nepoznatoj promenljivoj  $x$  dobijamo

$$x = 2KR(\cos \varphi - 1). \quad (4.1.26)$$

Zamenom pretpostavljenog rešenja (4.1.24) i  $x$  iz izraza (4.1.26) u prvu jednačinu sistema (4.1.17) dobijamo sledeći identitet

$$(x + 2RK) \cdot A_{n1} - KR \cdot A_{n2} \equiv 0, \quad \Rightarrow \quad (2KR \cos \varphi - 2KR + 2KR) \cdot N \sin \varphi - KR N \sin 2\varphi = 0, \quad (4.1.27)$$

dok se iz treće jednačine sistema (4.1.17) dobija

$$-KR \cdot A_{n2} + (x + RK) \cdot A_{n3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -KR \cdot N \sin 2\varphi + (2KR \cos \varphi - KR) \cdot N \sin 3\varphi = 0. \quad (4.1.28)$$

Razvijanjem i transformacijom jednačine (4.1.28) dobijamo

$$\sin 4\varphi - \sin 3\varphi = 0, \Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{4\varphi - 3\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{4\varphi + 3\varphi}{2}\right) = 0. \quad (4.1.29)$$

Rešenja trigonometrijske jednačine (4.1.29) su

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \vee \cos\left(\frac{7\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \varphi = 2n\pi \vee \frac{7\varphi}{2} = s\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_s = \frac{2s-1}{7}\pi, \quad s = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4.1.30)$$

Jednačina (4.1.17) za različite vrednosti  $\varphi_s$  može se napisati u sledećem obliku

$$x_s = 2KR(\cos\varphi_s - 1) = k_n^2(EIk_n^2 - FR), \quad s = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (4.1.31)$$

Sile izvijanja iz jednačine (4.1.32) određujemo u obliku

$$F_s = 2 \frac{Kl^2}{\pi^2 n^2} (1 - \cos\varphi_s) + \frac{EI\pi^2 n^2}{l^2 \left(1 + \frac{EI}{GAK} \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)}, \quad s = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (4.1.32)$$

odakle zamenom  $\varphi_s = \frac{2s-1}{7}\pi$  za  $s = 1, 2, 3$  u izraz za  $F_s$  (4.1.33) slede sile izvijanja redom

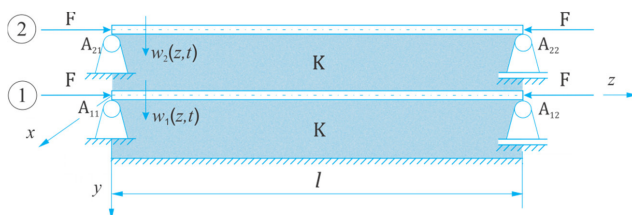
$$F_1 = 2 \frac{Kl^2}{\pi^2 n^2} \left(1 - \cos\frac{\pi}{7}\right) + \frac{EI\pi^2 n^2}{l^2 \left(1 + \frac{EI}{GAK} \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)} = 0.1980622 \frac{Kl^2}{\pi^2 n^2} + \frac{EI\pi^2 n^2}{l^2 \left(1 + \frac{EI}{GAK} \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)} \approx F_b^I,$$

$$F_2 = 2 \frac{Kl^2}{\pi^2 n^2} \left(1 - \cos\frac{3\pi}{7}\right) + \frac{EI\pi^2 n^2}{l^2 \left(1 + \frac{EI}{GAK} \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)} = 1.554958 \frac{Kl^2}{\pi^2 n^2} + \frac{EI\pi^2 n^2}{l^2 \left(1 + \frac{EI}{GAK} \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)} \approx F_b^{II},$$

$$F_3 = 2 \frac{Kl^2}{\pi^2 n^2} \left(1 - \cos\frac{5\pi}{7}\right) = 3.2469796 \frac{Kl^2}{\pi^2 n^2} + \frac{EI\pi^2 n^2}{l^2 \left(1 + \frac{EI}{GAK} \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)} \approx F_b^{III}. \quad (4.1.33)$$

## 4.2 Kritična sila izvijanja dva elastično povezana nosača Timoskenko-vog tipa na elastičnoj podlozi

Analizirajmo slučaj dva elastično povezana nosača Timoshenko-vog tipa na elastičnoj podlozi. Oba nosača su pod dejstvom jednakih aksijalnih pritisnih sila, ref. [14].



**Slika 4.2.1** Sistem dvanosaa na elastičnom sloju Winkler-ovog tipa

Jednačina (4.1.17) u matičnom zapisu se sada svodi na sledeći oblik

$$\begin{bmatrix} x + 2RK & -KR \\ -KR & x + RK \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{n1} \\ A_{n2} \end{Bmatrix} = 0. \quad (4.2.1)$$

Razvijanjem determinante (4.2.1) dobijamo jednačinu

$$x^2 + 3RKx + (RK)^2 = 0, \quad (4.2.2)$$

čija su rešenja

$$x_{1/2} = \frac{-3RK \pm RK\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-3RK + RK\sqrt{5}}{2} = -0.382RK,$$

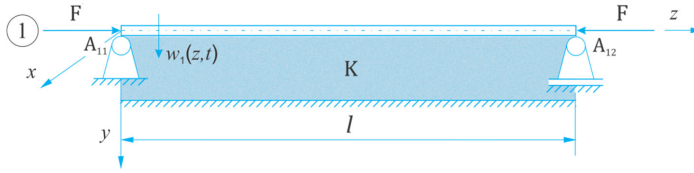
$$x_2 = \frac{-3RK - RK\sqrt{5}}{2} = -2.618RK.$$

Manja vrednost predstavlja kritičnu silu izvijanja za  $n$ -ti mod oscilovanja sistema i oblika je

$$F_b^{cr} = \frac{0.382 Kl^2}{\pi^2 n^2} + \frac{EI \pi^2 n^2}{l^2 \left( 1 + \frac{EI \pi^2 n^2}{GAk l^2} \right)}. \quad (4.2.3)$$

### 4.3 Kritična sila izvijanja nosača Timoskenko-vog tipa na elastičnoj podlozi

U slučaju jednog nosača na elastičnoj podlozi, jednačina (4.1.17) u matricnom zapisu svodi se na sledeći oblik



Slika 4.3.1 Nosač na elastičnoj podlozi Winkler-ovog tipa

$$(x + RK)A_{n1} = 0. \quad (4.3.1)$$

Rešavanjem jednačine (4.3.1) za  $n$ -ti mod oscilovanja dobijamo izraz za kritičnu silu izvijanja u obliku

$$F_b^{kr} = \frac{Kl^2}{\pi^2 n^2} + \frac{EI \pi^2 n^2}{l^2 \left(1 + \frac{EI}{GAk} \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\right)}. \quad (4.3.2)$$

### 4.4 Numerička analiza

Vrednosti fizičkih parametara sistema korišćenih u numeričkom eksperimentu

$$E = 1 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}, \quad G = 0.417 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}, \quad k = 5/6, \quad K_0 = 2 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}, \quad (4.3.1)$$

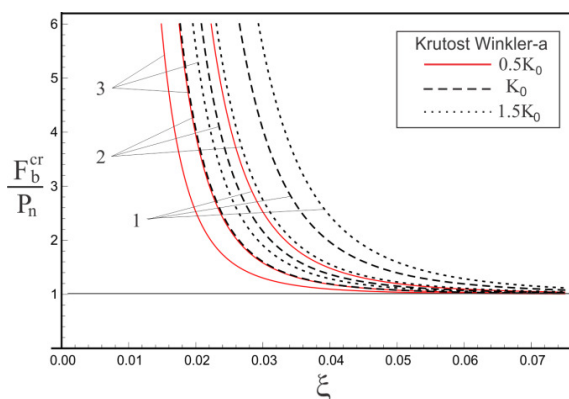
$$l = 10 \text{ m}, \quad A = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^2, \quad I = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^4, \quad \rho = 2 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}.$$

Uvođenjem bezdimenzionog parametra kao odnosa debljine poprečnog preseka i dužine nosača  $\xi = h/l$ , površinu poprečnog preseka i moment inercije možemo napisati u obliku

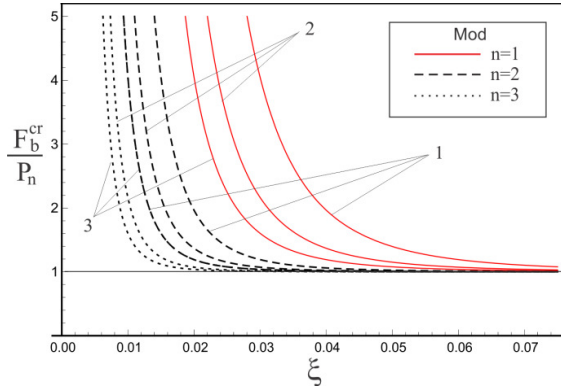
$$A = h^2 = (\xi l)^2, \quad I = I_x = \frac{h^4}{12} = \frac{(\xi l)^4}{12}. \quad (4.3.2)$$

Promena relativnog odnosa kritičnih sila i kritične sile u funkciji bezdimenzionog parametra  $\xi$  za različit broj nosača i različitu krutost, prikazana je na slici 4.4.1. Na slici 4.4.1 zaključujemo da se

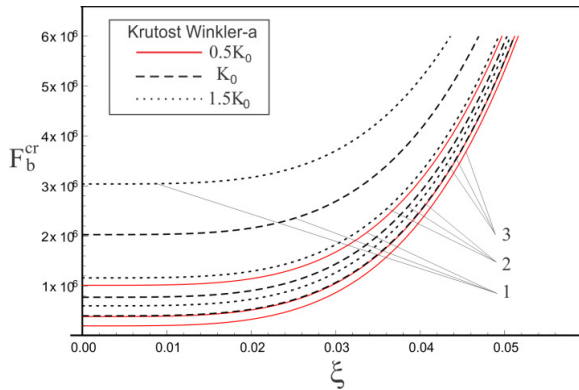
relativni odnos kritičnih sila smanjuje pri povećanju debljine nosača ali da se sa povećanjem broja nosača u slučaju najmanje krutosti Winklerov-og sloja odnos kritičnih sila smanjuje za male debljine nosača. Iz odnosa kritičnih sila zaključujemo da je sistem najstabilniji u slučaju jednog nosača na elastičnoj podlozi i da se sa povećanjem broja nosača stabilnost smanjuje. Na slici 4.4.2 se može uočiti ista tendencija odnosa relativnog odnosa kritičnih sila za različite modove. Promena oblasti statičke stabilnosti sistema u funkciji broja nosača i krutosti Winkler-ovih slojeva pri promeni debljine nosača prikazana je na slici 4.4.3. Označene tačke na dijagramu 4.4.4 pokazuju za koje vrednosti fizičkih parametara sistem ima istu vrednost kritične sile u različitim modovima. Tako tačka A12 na slici 4.4.4 predstavlja tačku razgraničenja sistema sa jednim nosačem, odnosno vrednost odnosa debljine i dužine nosača za koju sistem ima istu apsolutnu vrednost kritične sile u prvom i drugom modu. Sa povećanjem debljine nosača od A12, sistem postaje stabilniji u drugom modu. Tačka A13 predstavlja tačku za čiju vrednost odnosa debljine i dužine nosača, sistem ima istu apsolutnu vrednost kritične sile u prvom i trećem modu. Isti je slučaj i sa tačkama B12, B13 koje se odnose na sistem sa dva nosača i C12 i C13 koje se odnose na sistem sa tri nosača. Sa povećanjem broja nosača, može se zaključiti da sistem postaje osetljiviji na uticaj krutosti elastičnih slojeva jer su potrebne manje debljine nosača za koje sistemi imaju istu kritičnu silu u različitim modovima.



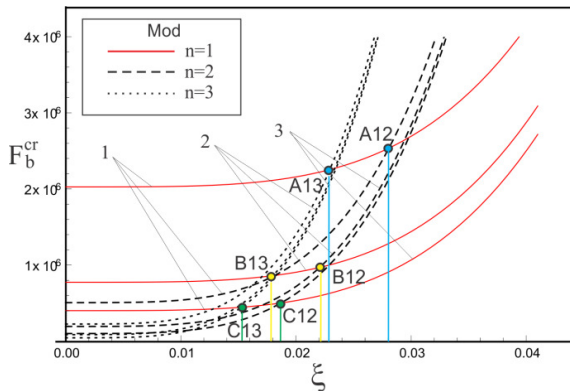
Slika 4.4.1 Uticaj debljine nosača na odnose kritičnih sila  $F_b^{kr}/P_n$  ( $K = 0.5K_0, K_0, 1.5K_0$ )



Slika 4.4.2 Uticaj debljine i broja nosača na odnose kritičnih sila  $F_b^{kr}/P_n$  ( $n=1,2,3$ )



Slika 4.4.3 Uticaj debljine i broja nosača na kritičnu silu  $F_b^{kr}$  ( $K = 0.5K_0, K_0, 1.5K_0$ )



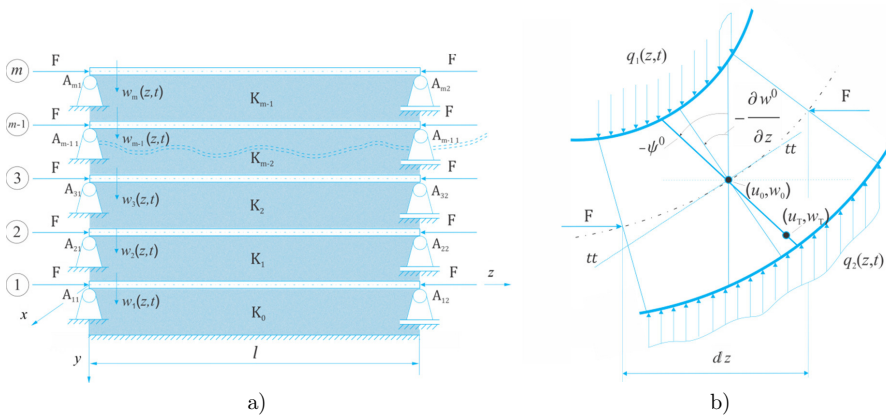
Slika 4.4.4 Uticaj debljine i broja nosača na kritičnu silu  $F_b^{kr}$  ( $n=1,2,3$ )



## Uticaji inercije rotacije i poprečnog smicanja na oscilacije i stabilnost sistema elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa na elastičnoj podlozi

### 5.1 Slobodne oscilacije elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa

Razmotrimo sistem  $m$  elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa istih dužina  $l$ , elastično povezanih slojevima Winkler-ovog tipa krutosti  $K_{ii}$ , ( $ii = 0, 1, \dots, m-1$ ) sa uticajima pritisnih aksijalnih sila intenziteta  $F$ , ref.[15].



**Slika 5.1.1** a) Sistem elastično povezanih nosača na elastičnoj podlozi  
b) Elementarni deformisani deo nosača

Neka su funkcije pomeranja u longitudinalnom i transverzalnom pravcu kao i ugao između poprečnog preseka nosača i  $y$  ose redom  $u_{T\tilde{i}}(y, z, t), w_{T\tilde{i}}(y, z), \psi_{T\tilde{i}}^0(z)$ ,  $\tilde{i} = 1, 2, \dots, m$ . Za negativno

orijentisan ugao poprečnog preseka  $\psi^0$  kao na slici 5.1.1 b) a u skladu sa izvedenim jednačinama u referenci [15] definišemo pomeranja tačaka nosača u obliku

$$u_{T\bar{i}}(y, z, t) = u_{T\bar{i}}^0(z, t) - y\psi_{T\bar{i}}^0(z, t), \quad w_{T\bar{i}}(y, z, t) = w_{T\bar{i}}^0(z, t), \quad \bar{i} = 1, 2, \dots, m. \quad (5.1.1)$$

Deformacije u funkciji pomeranja i veze između napona i deformacije po Hooke-ovom zakonu su

$$\varepsilon_{z\bar{i}}(y, z, t) = \frac{\partial u_{T\bar{i}}^0(z, t)}{\partial z} - y \frac{\partial \psi_{T\bar{i}}^0(z, t)}{\partial z}, \quad \gamma_{zy\bar{i}}(z, t) = \frac{\partial w_{T\bar{i}}^0(z, t)}{\partial z} - \psi_{T\bar{i}}^0(z, t), \quad (5.1.2)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{z\bar{i}} \\ \tau_{zy\bar{i}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\bar{i}} & 0 \\ 0 & kG_{\bar{i}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z\bar{i}} \\ \gamma_{zy\bar{i}} \end{Bmatrix}, \quad \bar{i} = 1, 2, \dots, m. \quad (5.1.3)$$

Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\delta W_{in\bar{i}} = -\rho_{\bar{i}} b_{\bar{i}} \int_0^l \int_{-\frac{h_{\bar{i}}}{2}}^{\frac{h_{\bar{i}}}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{T\bar{i}}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{T\bar{i}}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{T\bar{i}}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{T\bar{i}}(y, z, t) \right] dy dz. \quad (5.1.4)$$

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\delta W_{V\bar{i}} = -b_{\bar{i}} \int_0^l \int_{-\frac{h_{\bar{i}}}{2}}^{\frac{h_{\bar{i}}}{2}} [\sigma_{z\bar{i}}(z, t) \delta \varepsilon_{z\bar{i}}(z, t) + \tau_{zy\bar{i}}(z, t) \delta \gamma_{zy\bar{i}}(z, t)] dy dz. \quad (5.1.5)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila je oblika

$$\delta W_{ex1} = \int_0^l \left\{ \delta w_{T1}^0(z, t) \left[ -K_0 w_{T1}^0(z, t) + K_1 (w_{T2}^0(z, t) - w_{T1}^0(z, t)) \right] + F \frac{\partial w_{T1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{T1}^0(z, t)}{\partial z} \right\} dz, \quad (5.1.6)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{exi} = & \int_0^l \left\{ \delta w_{Ti}^0(z, t) \left[ -K_{i-1} (w_{Ti}^0(z, t) - w_{T_{i-1}}^0(z, t)) + K_i (w_{T_{i+1}}^0(z, t) - w_{Ti}^0(z, t)) \right] + \right. \\ & \left. + F \frac{\partial w_{Ti}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{Ti}^0(z, t)}{\partial z} \right\} dz, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

$$\delta W_{exm} = \int_0^l \left\{ \delta w_{Tm}^0(z, t) \left[ -K_{m-1} (w_{Tm}^0(z, t) - w_{T_{m-1}}^0(z, t)) \right] + F \frac{\partial w_{Tm}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{Tm}^0(z, t)}{\partial z} \right\} dz, \quad (5.1.8)$$

Zamenom jednačina (5.1.4-5.1.8) u opštu jednačinu principa virtuelnog rada  $\delta W_{im\bar{i}} + \delta W_{V\bar{i}} + \delta W_{ex\bar{i}} = 0$ ,  $\bar{i} = 1, 2, \dots, m$ , i primenom Green-ove teoreme dobijamo spregnuti sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina oscilovanja u sledećem obliku

$$\rho_1 A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - k G_1 A_1 \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right) + F \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + K_0 w_1 - K_1 (w_2 - w_1) = 0, \quad (5.1.9)$$

$$\rho_1 I_{x1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - E_1 I_{x1} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - k G_1 A_1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial z} - \psi_1 \right) = 0, \quad (5.1.10)$$

$$\rho_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - k G_i A_i \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) + F \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} + K_{i-1} (w_i - w_{i-1}) - K_i (w_{i+1} - w_i) = 0, \quad (5.1.11)$$

$$\rho_i I_{xi} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} - E_i I_{xi} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} - k G_i A_i \left( \frac{\partial w_i}{\partial z} - \psi_i \right) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \quad (5.1.12)$$

$$\rho_m A_m \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} - k G_m A_m \left( \frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2} - \frac{\partial \psi_m}{\partial z} \right) + F \frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2} + K_{m-1} (w_m - w_{m-1}) = 0, \quad (5.1.13)$$

$$\rho_m I_{xm} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2} - E_m I_{xm} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial z^2} - k G_m A_m \left( \frac{\partial w_m}{\partial z} - \psi_m \right) = 0, \quad (5.1.14)$$

Sistem spregnutih diferencijalnih jednačina (5.1.9-5.1.14) eliminacijom promenljive  $\psi_m$  svodi se na sledeći oblik

$$\begin{aligned} E_1 I_1 \left( 1 - \frac{F}{k A_1 G_1} \right) \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \left[ \rho_1 A_1 + (K_0 + K_1) \frac{\rho_1 I_1}{k A_1 G_1} \right] \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - \frac{K_1 \rho_1 I_1}{k A_1 G_1} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} \\ + \left[ F - (K_0 + K_1) \frac{E_1 I_1}{k A_1 G_1} \right] \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + K_1 \frac{E_1 I_1}{k A_1 G_1} \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} \\ - \rho_1 I_1 \left[ 1 + \frac{E_1}{k G_1} - \frac{F}{k A_1 G_1} \right] \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\rho_1^2 I_1}{k G_1} \frac{\partial^4 w_1}{\partial t^4} + (K_0 + K_1) w_1 - K_1 w_2 = 0, \end{aligned} \quad (5.1.15)$$

$$E_i I_i \left( 1 - \frac{F}{k A_i G_i} \right) \frac{\partial^4 w_i}{\partial z^4} - \frac{K_{i-1} \rho_i I_i}{k A_i G_i} \frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial t^2} + \left[ \rho_i A_i + (K_{i-1} + K_i) \frac{\rho_i I_i}{k A_i G_i} \right] \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - \frac{K_i \rho_i I_i}{k A_i G_i} \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial t^2}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{K_{i-1}E_iI_i}{kA_iG_i} \frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial z^2} + \left[ F - (K_{i-1} + K_i) \frac{E_iI_i}{kA_iG_i} \right] \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} + \frac{K_iE_iI_i}{kA_iG_i} \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial z^2} - \rho_i I_i \left[ 1 + \frac{E_i}{kG_i} - \frac{F}{kA_iG_i} \right] \frac{\partial^4 w_i}{\partial z^2 \partial t^2} \\
& + \frac{\rho_i^2 I_i}{kG_i} \frac{\partial^4 w_{i+1}}{\partial t^4} - K_{i-1} w_{i-1} + (K_{i-1} + K_i) w_i - K_i w_{i+1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \quad (5.1.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_m I_m \left( 1 - \frac{F}{kA_m G_m} \right) \frac{\partial^4 w_m}{\partial z^4} - \frac{K_{m-1} \rho_m I_m}{kA_m G_m} \frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial t^2} + \left[ \rho_m A_m + \frac{K_{m-1} \rho_m I_m}{kA_m G_m} \right] \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} \\
& + \frac{K_{m-1} E_m I_m}{kA_m G_m} \frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial z^2} + \left[ F - \frac{K_{m-1} E_m I_m}{kA_m G_m} \right] \frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2} - \rho_m I_m \left[ 1 + \frac{E_m}{kG_m} - \frac{F}{kA_m G_m} \right] \frac{\partial^4 w_m}{\partial z^2 \partial t^2} \\
& + \frac{\rho_m^2 I_m}{kG_m} \frac{\partial^4 w_m}{\partial t^4} - K_{m-1} w_{m-1} + K_m w_m = 0. \quad (5.1.17)
\end{aligned}$$

Početni i granični uslovi slobodno oslonjenih nosača su oblika

$$w_i(z, 0) = w_{i0}(z), \quad \dot{w}_i(z, 0) = v_{i0}(z), \quad \psi_i(z, 0) = \psi_{i0}(z), \quad \dot{\psi}_i(z, 0) = \omega_{i0}(z), \quad (5.1.18)$$

$$w_i(0, t) = w_i(l, t) = w''_i(0, t) = w''_i(l, t) = 0, \quad \tilde{i} = 1, 2, 3 \dots m. \quad (5.1.19)$$

Ako pretpostavimo da je kretanje nosača harmonijsko, transverzalna pomeranja nosača možemo napisati u obliku proizvoda funkcija

$$w_i(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_{in}(t), \quad \tilde{i} = 1, 2, \dots, m \quad (5.1.20)$$

gde su  $T_{in}(t)$ ,  $\tilde{i} = 1, 2, 3 \dots m$ , nepoznate funkcije vremena dok je  $Z_n(z)$  funkcija osnovnih oblika oscilovanja koja zadovoljava granične uslove slobodno oslonjenih nosača

$$Z_n(z) = \sin(k_n z), \quad k_n = n\pi/l, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.1.21)$$

Ako zamenimo pretpostavljena transverzalna pomeranja (5.1.20) u jednačine (5.1.15-5.1.17) dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{C_{s1}^2} \frac{d^4 T_{1n}}{dt^4} + \left[ 1 + C_{r1}^2 \left( 1 + \frac{C_{\delta 1}^2}{C_{s1}^2 C_{r1}^4} \right) k_n^2 + \frac{1}{C_{s1}^2} (H_0^* + H_1 - F \eta_{1n}) \right] \frac{d^2 T_{1n}}{dt^2} - \frac{H_1}{C_{s1}^2} \frac{d^2 T_{2n}}{dt^2} \right\}$$

$$+ \left[ C_{b1}^2 k_n^4 + (H_0^* + H_1 - F \eta_{1n}) \left( 1 + \frac{C_{b1}^2}{C_{s1}^2 C_{r1}^2} k_n^2 \right) \right] T_{1n} - H_1 \left( 1 + \frac{C_{b1}^2}{C_{s1}^2 C_{r1}^2} k_n^2 \right) T_{2n} \Big\} Z_n = 0, \quad (5.1.22)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{C_{si}^2} \frac{d^4 T_{in}}{dt^4} - \frac{H_{i-1}^*}{C_{si}^2} \frac{d^2 T_{(i-1)n}}{dt^2} + \left[ 1 + C_{ri}^2 \left( 1 + \frac{C_{bi}^2}{C_{si}^2 C_{ri}^2} \right) k_n^2 + \frac{1}{C_{si}^2} (H_{i-1}^* + H_i - F \eta_{in}) \right] \frac{d^2 T_{in}}{dt^2} \right. \\ & - \frac{H_i}{C_{si}^2} \frac{d^2 T_{(i+1)n}}{dt^2} - H_{(i-1)}^* \left( 1 + \frac{C_{bi}^2}{C_{si}^2 C_{ri}^2} k_n^2 \right) T_{(i-1)n} + \left[ C_{bi}^2 k_n^4 + (H_{i-1}^* + H_i - F \eta_{in}) \left( 1 + \frac{C_{bi}^2}{C_{si}^2 C_{ri}^2} k_n^2 \right) \right] T_{in} \\ & \left. - H_i \left( 1 + \frac{C_{bi}^2}{C_{si}^2 C_{ri}^2} k_n^2 \right) T_{(i+1)n} \right\} Z_n = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \quad (5.1.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{C_{sm}^2} \frac{d^4 T_{mn}}{dt^4} - \frac{H_{m-1}^*}{C_{sm}^2} \frac{d^2 T_{(m-1)n}}{dt^2} + \left[ 1 + C_{rm}^2 \left( 1 + \frac{C_{bm}^2}{C_{sm}^2 C_{rm}^2} \right) k_n^2 + \frac{1}{C_{sm}^2} (H_{m-1}^* - F \eta_{mn}) \right] \frac{d^2 T_{mn}}{dt^2} \right. \\ & \left. - H_{m-1}^* \left( 1 + \frac{C_{bm}^2}{C_{sm}^2 C_{rm}^2} k_n^2 \right) T_{(m-1)n} + \left[ C_{bm}^2 k_n^4 + (H_{m-1}^* - F \eta_{mn}) \left( 1 + \frac{C_{bm}^2}{C_{sm}^2 C_{rm}^2} k_n^2 \right) \right] T_{mn} \right\} Z_n = 0, \quad (5.1.24) \end{aligned}$$

gde su

$$\begin{aligned} H_{i-1}^* &= \frac{K_{i-1}}{\rho_i A_i}, & H_i &= \frac{K_i}{\rho_i A_i}, & \eta_{in} &= \frac{k_n^2}{\rho_i A_i}, \\ C_{bi} &= \sqrt{\frac{E_i I_i}{\rho_i A_i}}, & C_{si} &= \sqrt{\frac{G_i A_i k}{\rho_i I_i}}, & C_{ri} &= \sqrt{\frac{I_i}{A_i}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \end{aligned}$$

Rešenja jednačina (5.1.22 -5.1.24) pretposavljamo u obliku

$$T_{in} = A_{in} e^{j\omega_n t}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (5.1.25)$$

gde je  $\omega_n$  prirodna frekvencija sistema. Ako zamenimo rešenja (5.1.25) u diferencijalne jednačine (5.1.22-5.1.24) dobijamo homogeni sistem algebarskih jednačina po nepoznatim  $A_{n1}$ ,  $A_{n2}$ ,  $A_{n3}$ , ...  $A_{nm}$  u obliku

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\omega_n^4}{C_{s1}^2} - \left[ 1 + C_{r1}^2 \left( 1 + \frac{C_{b1}^2}{C_{s1}^2 C_{r1}^2} \right) k_n^2 + \frac{1}{C_{s1}^2} (H_0^* + H_1 - F \eta_{1n}) \right] \omega_n^2 \right. \\ & \left. + C_{b1}^2 k_n^4 + (H_0^* + H_1 - F \eta_{1n}) \left( 1 + \frac{C_{b1}^2}{C_{s1}^2 C_{r1}^2} k_n^2 \right) \right\} A_{1n} + H_1 \left[ \frac{\omega_n^2}{C_{s1}^2} - \left( 1 + \frac{C_{b1}^2}{C_{s1}^2 C_{r1}^2} k_n^2 \right) \right] A_{2n} = 0 \quad (5.1.26) \end{aligned}$$

$$H_{i-1}^* \left[ \frac{\omega_n^2}{C_{si}^2} - \left( 1 + \frac{C_{bi}^2}{C_{si}^2 C_{ri}^2} k_n^2 \right) \right] A_{(i-1)n} + \left\{ \frac{\omega_n^4}{C_{si}^2} - \left[ 1 + C_{ri}^2 \left( 1 + \frac{C_{bi}^2}{C_{si}^2 C_{ri}^2} \right) k_n^2 + \frac{1}{C_{si}^2} (H_{i-1}^* + H_i - F \eta_{in}) \right] \right\} \omega_n^2$$

$$+ \left[ C_{bi}^2 k_n^4 + (H_{i-1}^* + H_i - F \eta_{in}) \left( 1 + \frac{C_{bi}^2}{C_{si}^2 C_{ri}^2} k_n^2 \right) \right] A_{in} + H_i \left[ \frac{\omega_n^2}{C_{si}^2} - \left( 1 + \frac{C_{bi}^2}{C_{si}^2 C_{ri}^2} k_n^2 \right) \right] A_{(i+1)n} = 0, \quad (5.1.27)$$

$$H_{m-1}^* \left[ \frac{\omega_n^2}{C_{sm}^2} - \left( 1 + \frac{C_{bm}^2}{C_{sm}^2 C_{rm}^2} k_n^2 \right) \right] A_{(m-1)n} + \left\{ \frac{\omega_n^4}{C_{sm}^2} - \left[ 1 + C_{rm}^2 \left( 1 + \frac{C_{bm}^2}{C_{sm}^2 C_{rm}^2} \right) k_n^2 \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{C_{sm}^2} (H_{m-1}^* - F \eta_{mn}) \right] \right\} \omega_n^2 + \left[ C_{bm}^2 k_n^4 + (H_{m-1}^* - F \eta_{mn}) \left( 1 + \frac{C_{bm}^2}{C_{sm}^2 C_{rm}^2} k_n^2 \right) \right] A_{mn} = 0. \quad (5.1.28)$$

Radi određivanja analitičkih rešenja, pretpostavljamo da su nosači identičnih materijalnih i geometrijskih karakteristika. Tada se sistem homogenih algebarskih jednačina (5.1.26-5.1.28) može zapisati matričnom jednačinom oblika

$$\begin{bmatrix} S_n & -u_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -u_n & S_n & -u_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_n & -u_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -u_n & S_n & -u_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -u_n & S_n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -u_n & S_n & -u_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -u_n & S_n - u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{n1} \\ A_{n2} \\ A_{n3} \\ \cdots \\ A_{n(i-1)} \\ A_{ni} \\ A_{n(i+1)} \\ \cdots \\ A_{n(m-2)} \\ A_{n(m-1)} \\ A_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.1.29)$$

gde su

$$H_{i-1}^* = \frac{K_{i-1}}{\rho_i A_i} = H, \quad H_i = \frac{K_i}{\rho_i A_i} = H, \quad \eta_{in} = \frac{k_n^2}{\rho_i A_i} = \eta_n, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m,$$

$$C_{bi} = \sqrt{\frac{E_i I_i}{\rho_i A_i}} = C_b, \quad C_{si} = \sqrt{\frac{G_i A_i k}{\rho_i I_i}} = C_s, \quad C_{ri} = \sqrt{\frac{I_i}{A_i}} = C_r, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m,$$

$$S_n = \frac{\omega_n^4}{C_s^2} - \left[ 1 + C_r^2 \left( 1 + \frac{C_b^2}{C_s^2 C_r^2} \right) k_n^2 + \frac{1}{C_s^2} (2H - F \eta_n) \right] \omega_n^2 + \left[ C_b^2 k_n^4 + (2H - F \eta_n) \left( 1 + \frac{C_b^2}{C_s^2 C_r^2} k_n^2 \right) \right],$$

$$u_n = H \left[ -\frac{\omega_n^2}{C_s^2} + \left( 1 + \frac{C_b^2}{C_s^2 C_r^2} k_n^2 \right) \right].$$

Sistem homogenih algebarskih jednačina (5.1.26 -5.1.28) ima rešenja različita od trivijalnih, samo ako je determinanta matrice  $m \times m$  u jednačini (5.1.29) jednaka nuli. Tada kao rešenje dobijamo polinom  $4m$ -tog reda čija rešenja za konkretne podatke možemo odrediti samo numeričkim putem. Ako sistem povezanih nosača sadrži više od tri nosača moguće je dobiti rešenja trigonometrijskom metodom koju smo koristili za proveru analitičkih rešenja u poglavlju 4. Prema trigonometrijskoj metodi [28] nepoznate  $A_{ni}$  pretpostavljamo u obliku

$$A_{ni} = N \sin(i\varphi), \quad i = 1, 2, 3 \dots m. \quad (5.1.30)$$

Ako zamenimo (5.1.30) u  $\tilde{i}$ -tu jednačinu sistema (5.1.29) za  $\tilde{i} = 1, 2, 3 \dots m$  sledi

$$-u_n N \sin(\tilde{i} - 1)\varphi + S_n N \sin(\tilde{i}\varphi) - u_n N \sin(\tilde{i} + 1)\varphi = 0, \quad (5.1.31)$$

odnosno

$$(S_n - 2u_n \cos\varphi) N \sin(\tilde{i}\varphi) = 0, \quad (5.1.32)$$

jednačina (5.1.32) je zadovoljena kada je  $N \neq 0$  i  $\sin(i\varphi) \neq 0$  jer su nepoznate  $A_{in} \neq 0$ , pa prema tome mora biti

$$S_n - 2u_n \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n = 2u_n \cos\varphi. \quad (5.1.33)$$

Zamenom nepoznatih  $S_n$  i  $u_n$  u jednačinu (5.1.33) dobijamo frekventnu jednačinu koja je oblika polinoma četvrtog reda po nepoznatoj  $\omega_n$ . Ako zamenimo  $A_{n1} = N \sin\varphi$  i  $A_{n2} = N \sin 2\varphi$  u prvu jednačinu sistema (5.1.29) dobijamo

$$S_n N \sin\varphi - u_n N \sin 2\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad (S_n - 2u_n \cos\varphi) N \sin\varphi \equiv 0. \quad (5.1.34)$$

Nepoznatu promenljivu  $\varphi$  određujemo iz poslednje jednačine sistema (5.1.29). Zamenom  $A_{(m-1)n}$  i  $A_{mn}$  dobijamo

$$-u_n N \sin[(m-1)\varphi] + (S_n - u_n) N \sin(m\varphi) = 0, \quad (5.1.35)$$

odnosno

$$Nu_n \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{2m+1}{2}\varphi\right) = 0. \quad (5.1.36)$$

Rešenja jednačine (5.1.36) su

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \vee \cos\left(\frac{2m+1}{2}\varphi\right) = 0 \Rightarrow \varphi_s = \frac{2s-1}{2m+1}\pi, \quad s = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (5.1.37)$$

Jer su  $N \neq 0$ ,  $u_n \neq 0$  i  $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0$ . Zamenom rešenja (5.1.37) u (5.1.33) dobijamo frekventnu jednačinu u obliku

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{n,s}^4}{C_s^4} - \left[ 1 + C_r^2 \left( 1 + \frac{C_b^2}{C_s^2 C_r^4} \right) k_n^2 + \frac{1}{C_s^2} (2H - F \eta_n) \right] \omega_{n,s}^2 + \left[ C_b^2 k_n^4 + (2H - F \eta_n) \left( 1 + \frac{C_b^2}{C_s^2 C_r^2} k_n^2 \right) \right] \\ = 2H \left[ -\frac{\omega_{n,s}^2}{C_s^2} + \left( 1 + \frac{C_b^2}{C_s^2 C_r^2} k_n^2 \right) \right] \cos\left(\frac{2s-1}{2m+1}\pi\right), \end{aligned} \quad (5.1.38)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \omega_{n,s}^4 - \left\{ C_s^2 (R_n + C_r^2 k_n^2) + 4H \sin^2 \left[ \frac{2s-1}{2(2m+1)}\pi \right] - F \eta_n \right\} \omega_{n,s}^2 \\ + C_s^2 \left\{ C_b^2 k_n^4 + 4H R_n \sin^2 \left[ \frac{2s-1}{2(2m+1)}\pi \right] - F \eta_n R_n \right\} = 0, \quad s = 1, 2, 3 \dots m, \end{aligned} \quad (5.1.39)$$

gde je

$$R_n = 1 + \frac{C_b^2}{C_s^2 C_r^2} k_n^2.$$

Jednačine (5.1.39) je bikvadratna pa jednostavno slede kvadrati prirodnih frekvencija u obliku

$$\begin{aligned} [\omega_{n,s}^2]_l = \frac{1}{2} \left\{ \left[ C_s^2 (R_n + C_r^2 k_n^2) + 4H \sin^2 \left( \frac{2s-1}{2(2m+1)}\pi \right) - F \eta_n \right] \right. \\ \left. - \sqrt{\left[ C_s^2 (R_n + C_r^2 k_n^2) + 4H \sin^2 \left( \frac{2s-1}{2(2m+1)}\pi \right) - F \eta_n \right]^2 - 4C_s^2 \left[ C_b^2 k_n^4 + 4H R_n \sin^2 \left( \frac{2s-1}{2(2m+1)}\pi \right) - F \eta_n R_n \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (5.1.40)$$

$$\begin{aligned} [\omega_{n,s}^2]_h = \frac{1}{2} \left\{ \left[ C_s^2 (R_n + C_r^2 k_n^2) + 4H \sin^2 \left( \frac{2s-1}{2(2m+1)}\pi \right) - F \eta_n \right] \right. \\ \left. + \sqrt{\left[ C_s^2 (R_n + C_r^2 k_n^2) + 4H \sin^2 \left( \frac{2s-1}{2(2m+1)}\pi \right) - F \eta_n \right]^2 - 4C_s^2 \left[ C_b^2 k_n^4 + 4H R_n \sin^2 \left( \frac{2s-1}{2(2m+1)}\pi \right) - F \eta_n R_n \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (5.1.41)$$

$$s = 1, 2, 3 \dots m.$$



gde  $[\omega_{n,s}]_l$  predstavlja nižu a  $[\omega_{n,s}]_r$  višu prirodnu frekvenciju. Statičku stabilnost sistema u zavisnosti od krutosti elastičnih slojeva možemo ispitati na osnovu jednačine (5.1.39). Sistem će biti u stanju indiferentne ravnoteže kada na njega deluju aksijalne sile pod čijim uticajima će prirodna frekvencija sistema biti jednaka nuli. Ako primenimo ovaj uslov ( $\omega_{n,s} = 0$ ), iz jednačine (5.1.39) sledi

$$C_b^2 k_n^4 + 4HR_n \sin^2 \left[ \frac{2s-1}{2(2m+1)} \pi \right] - F \eta_n R_n = 0, \quad s = 1, 2, 3 \dots m. \quad (5.1.42)$$

Iz jednačine (5.1.42) sledi da je minimalna vrednost rešenja po nepoznatoj aksijalnoj sili  $F$ , kritična sila sistema  $m$  elastično povezanih nosača koja odgovara  $n$ -tom modu, Stojanović i koautori [15]

$$F_b^{kr} = \min_{\substack{n=1,2,3\dots \\ s=1,2,3\dots m}} \left\{ \frac{C_b^2 k_n^4}{R_n \eta_n} + 4 \frac{H}{\eta_n} \sin^2 \left[ \frac{2s-1}{2(2m+1)} \pi \right] \right\} \Leftrightarrow F_b^{kr} = \min_{\substack{n=1,2,3\dots \\ s=1,2,3\dots m}} \left\{ \frac{EI \pi^2 n^2}{l^2 \left( 1 + \frac{EI \pi^2 n^2}{GAK l^2} \right)} + 4 \frac{Kl^2}{\pi^2 n^2} \sin^2 \left[ \frac{2s-1}{2(2m+1)} \pi \right] \right\}, \quad (5.1.43)$$

Za  $K = 0$  iz jednačine (5.1.43) sledi

$$P_n = \frac{EI \pi^2 n^2}{l^2 \left( 1 + \frac{EI \pi^2 n^2}{GAK l^2} \right)}. \quad (5.1.44)$$

$P_n$  je kritična sila izvijanja jednog nosača Timoshenko-vog tipa koja odgovara  $n$ -tom modu. Njena minimalna vrednost pri kojoj nastupa izvijanje se dobija za  $n=1$

$$P = \frac{EI \pi^2}{\left( 1 + \frac{EI \pi^2}{GAK l^2} \right) l^2}. \quad (5.1.45)$$

## 5.2 Numerička analiza u frekventnom domenu sistema elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa

U numeričkoj analizi upoređeni su rezultati za slučaj sistema sa 3, 5, 7 i 9 elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa istih materijalnih karakteristika

$$E = 1 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}, \quad G = 0.417 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}, \quad k = 5/6, \quad K_0 = 2 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2},$$

$$\rho = 2 \times 10^3 \text{kgm}^{-3}, \quad l = 10 \text{ m}, \quad A = 5 \times 10^{-2} \text{m}^2, \quad I = 4 \times 10^{-4} \text{m}^4. \quad (5.2.1)$$

U tabeli 5.2.1 prikazane su prirodne frekvencije Sistema za slučajeve različitog broja elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa dobijenih trigonometrijskom metodom i numerički. Može se zaključiti da sa povećanjem broja nosača, najniža prirodna frekvencija teži vrednosti frekvencije jednog nosača bez elastičnih slojeva.

**Tabela 5.2.1**

Prirodne frekvencije [ $\text{s}^{-1}$ ] elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa za  $n = 1$ ,  $F = 0$  i  $m = 3, 5, 7$  i  $9$ .

ref.[15]	$[\omega_{n,s}]_l$	Trigonometrijska metoda (5.1.40)	Numeričko rešenje jednačine (5.1.29)
$m = 3$	$\omega_{1,1}$	28.0046632875	28.0046632873
	$\omega_{1,2}$	59.1263182936	59.1263182935
	$\omega_{1,3}$	82.9295278423	82.9295278423
$m = 5$	$\omega_{1,1}$	23.4595097487	23.4595097486
	$\omega_{1,2}$	42.0466472348	42.0466472347
	$\omega_{1,3}$	61.7777785430	61.7777785429
	$\omega_{1,4}$	77.7538496710	77.7538496709
	$\omega_{1,5}$	88.0208916175	88.0208916176
$m = 7$	$\omega_{1,1}$	21.8125810709	21.8125810709
	$\omega_{1,2}$	33.9378813493	33.9378813494
	$\omega_{1,3}$	48.8556749524	48.8556749523
	$\omega_{1,4}$	62.9882585212	62.9882585213
	$\omega_{1,5}$	74.9693492803	74.9693492802
	$\omega_{1,6}$	84.0221781219	84.0221781219
	$\omega_{1,7}$	89.6471858944	89.6471858945
$m = 9$	$\omega_{1,1}$	21.0466074643	21.0466074644
	$\omega_{1,2}$	29.4987136192	29.4987136191
	$\omega_{1,3}$	40.9671530516	40.9671530516
	$\omega_{1,4}$	52.7236801181	52.7236801181
	$\omega_{1,5}$	63.6808309227	63.6808309228
	$\omega_{1,6}$	73.2562413513	73.2562413513
	$\omega_{1,7}$	81.0640517350	81.0640517351
	$\omega_{1,8}$	86.8296550265	86.8296550263
	$\omega_{1,9}$	90.3637299233	90.3637299234

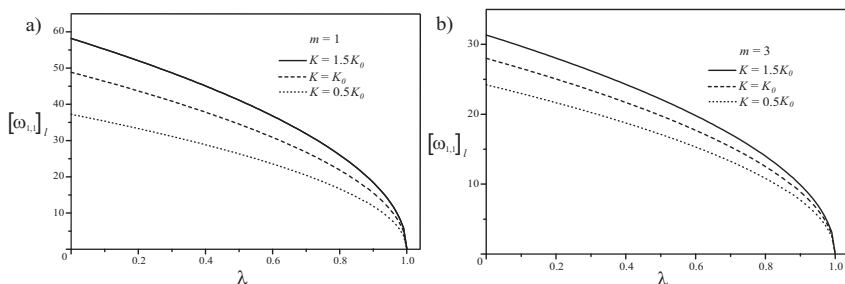
Na osnovu dobijenih rezultata koji su prikazani u tabeli 5.2.1 može se primetiti da je razlika između numeričkih i analitičkih rešenja dobijenih trigonometrijskom metodom zanemarljivo mala. Razmotrimo sada uticaj aksijalne sile pritiska  $\lambda = F/F_b^{kr}$  i krutost elastičnih

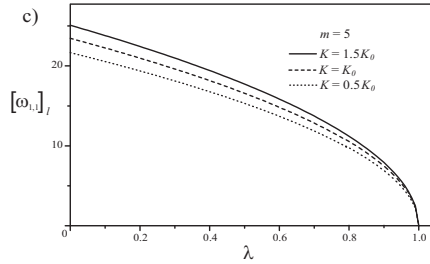
slojeva  $K = 0.5K_0, K_0, 1.5K_0$  na najnižu prirodnu frekvenciju sistema sa jednim, tri i pet elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa. Analitički oblici frekvencija na osnovu izraza (5.1.40) za  $m = 1, 3, 5$  nosača u prvom modu su

$$[\omega_{1,1}]_l = \frac{1}{2} \left\{ \left[ C_s^2 (R_1 + C_r^2 k_1^2) + 4H \sin^2 \frac{\pi}{6} - F \eta_1 \right] - \sqrt{\left[ C_s^2 (R_1 + C_r^2 k_1^2) + 4H \sin^2 \frac{\pi}{6} - F \eta_1 \right]^2 - 4C_s^2 \left[ C_b^2 k_1^4 + 4HR_1 \sin^2 \frac{\pi}{6} - F \eta_1 R_1 \right]} \right\}, \quad (5.2.2)$$

$$[\omega_{1,1}]_l = \frac{1}{2} \left\{ \left[ C_s^2 (R_1 + C_r^2 k_1^2) + 4H \sin^2 \frac{\pi}{14} - F \eta_1 \right] - \sqrt{\left[ C_s^2 (R_1 + C_r^2 k_1^2) + 4H \sin^2 \frac{\pi}{14} - F \eta_1 \right]^2 - 4C_s^2 \left[ C_b^2 k_1^4 + 4HR_1 \sin^2 \frac{\pi}{14} - F \eta_1 R_1 \right]} \right\}, \quad (5.2.3)$$

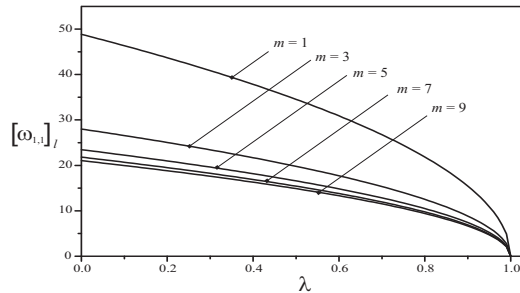
$$[\omega_{1,1}]_l = \frac{1}{2} \left\{ \left[ C_s^2 (R_1 + C_r^2 k_1^2) + 4H \sin^2 \frac{\pi}{22} - F \eta_1 \right] - \sqrt{\left[ C_s^2 (R_1 + C_r^2 k_1^2) + 4H \sin^2 \frac{\pi}{22} - F \eta_1 \right]^2 - 4C_s^2 \left[ C_b^2 k_1^4 + 4HR_1 \sin^2 \frac{\pi}{22} - F \eta_1 R_1 \right]} \right\}. \quad (5.2.4)$$





**Slika 5.2.1** Uticaj krutosti elastičnih slojeva na najnižu prirodnu frekvenciju  
a)  $m = 1$ ; b)  $m = 3$ ; c)  $m = 5$ .

Na osnovu prikazanih promena prirodnih frekvencija sa slike 5.2.1 možemo zaključiti da povećanje broja nosača dovodi do smanjenja prirodnih frekvencija. Za istekrutosti elastičnih slojeva kod Sistema savećim brojem nosača, prirodne frekvencije postaju bliske što može biti od značaja u analizi geometrijski nelinearnih oscilacija elastično povezanih nosača. Prednost izvedenih analitičkih izraza sistema elastično povezanih nosača može poslužiti kao polazna tačka za uvid u promene koje nastaju u oscilovanju pri promeni geometrijskih i materijalnih karakteristika nosača. Pri tome nije neophodno praviti svaki put matematički model, već se promenom fizičkih parametara i broja elastično povezanih nosača u izrazima lako dolazi do rezultata.



**Slika 5.2.3** Uticaj broja nosača na najnižu prirodnu frekvenciju u funkciji pritiskih aksijalnih sila za  $K=K_0$

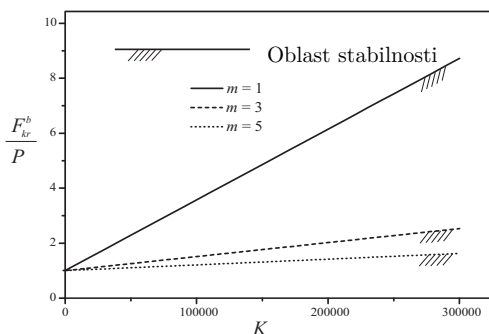
### 5.3 Numerička analiza u statičkom domenu stabilnosti sistema elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa

Ako u jednačinu (5.1.42) zamenimo  $m = 1, 3, 5$ , a za minimalne vrednosti  $s = 1$  i  $n = 1$  dobićemo redom analitičke izraze za kritične sile izvijanja sistema sa jednim, tri i pet elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa,

$$F_b^{cr} = \frac{C_b^2 k_1^4}{R_1 \eta_1} + 4 \frac{H}{\eta_1} \sin^2 \frac{\pi}{6}, \quad (5.3.1)$$

$$F_b^{cr} = \frac{C_b^2 k_1^4}{R_1 \eta_1} + 4 \frac{H}{\eta_1} \sin^2 \frac{\pi}{14}, \quad (5.3.2)$$

$$F_b^{cr} = \frac{C_b^2 k_1^4}{R_1 \eta_1} + 4 \frac{H}{\eta_1} \sin^2 \frac{\pi}{22}, \quad (5.3.3)$$



**Slika 5.3.1** Uticaj broja nosača na kritičnu silu izvijanja  $F_b^{kr}$  u funkciji krutosti elastičnih slojeva Winkler-ovog tipa

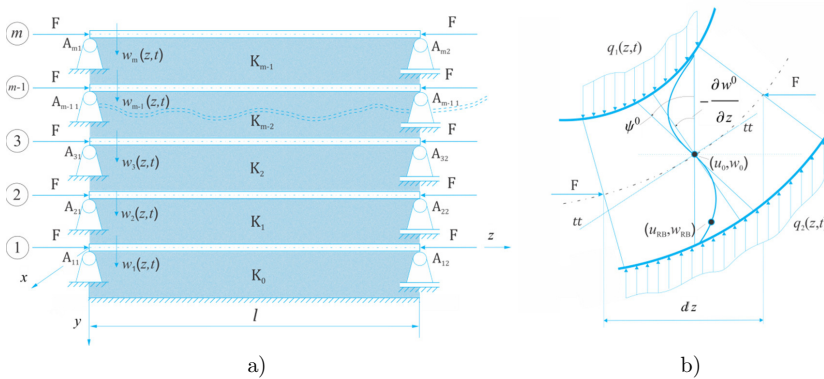
Na slici 5.3.1 prikazane su oblasti statičke stabilnosti sistema sa jednim, tri i pet elastično povezanih nosača Timoshenko-vog tipa. Na osnovu podataka prikazanih na slici 5.3.1 može se zaključiti da je sistem najstabilniji u slučaju jednog nosača na elastičnoj podlozi pri čemu se taj region smanjuje sa povećanjem broja elastično povezanih nosača.

# 6

## Uticaji inercije rotacije i poprečnog smicanja na oscilacije i stabilnost sistema elastično povezanih nosača Reddy-Bickford-ovog tipa na elastičnoj podlozi

### 6.1 Slobodne oscilacije sistema elastično povezanih nosača Reddy-Bickford-ovog tipa

Razmotrimo sistem  $m$  elastično povezanih nosača Reddy-Bickford-ovog tipa istih dužina  $l$ , sa uticajem pritisnih aksijalnih sila istih intenziteta  $F$ , [15].



**Slika 6.1.1** a) Sistem elastično povezanih nosača na elastičnoj podlozi  
b) Elementarni deformisani deo nosača

Neka su funkcije pomeranja u longitudinalnom i transverzalnom pravcu kao i ugao između tangente deformisanog poprečnog preseka nosača na neutralnoj liniji i  $y$  ose redom  $u_{RB\tilde{i}}(y, z, t)$ ,  $w_{RB\tilde{i}}(y, z)$ ,  $\psi_{RB\tilde{i}}^0(z)$ ,  $\tilde{i} = 1, 2, \dots, m$ . Za ugao  $\psi_{RB}^0$  sa slike 6.1.1 b) a u skladu sa izvedenim jednačinama u referencama [15], [29-31] definišemo funkcije pomeranja

$$\begin{aligned} u_{RB\bar{i}}(y, z, t) &= u_{RB\bar{i}}^0(z, t) + y\psi_{RB\bar{i}}^0(z, t) - \alpha y^3 \left( \psi_{RB\bar{i}}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB\bar{i}}^0(z, t)}{\partial z} \right), \\ w_{RB\bar{i}}(y, z, t) &= w_{RB\bar{i}}^0(z, t), \quad \bar{i} = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Deformacije u funkciji pomeranja i veze između napona i deformacije po Hooke-ovom zakonu su

$$\varepsilon_{z\bar{i}}(y, z, t) = \frac{\partial u_{RB\bar{i}}^0(z, t)}{\partial z} + y \frac{\partial \psi_{RB\bar{i}}^0(z, t)}{\partial z} - \alpha y^3 \left( \frac{\partial \psi_{RB\bar{i}}^0(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_{RB\bar{i}}^0(z, t)}{\partial z^2} \right), \quad (6.1.2)$$

$$\gamma_{zy\bar{i}}(y, z, t) = \psi_{RB\bar{i}}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB\bar{i}}^0(z, t)}{\partial z} - \beta y^2 \left( \psi_{RB\bar{i}}^0(z, t) + \frac{\partial w_{RB\bar{i}}^0(z, t)}{\partial z} \right), \quad (6.1.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{z\bar{i}} \\ \tau_{zy\bar{i}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\bar{i}} & 0 \\ 0 & G_{\bar{i}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z\bar{i}} \\ \gamma_{zy\bar{i}} \end{Bmatrix}, \quad \bar{i} = 1, 2, \dots, m. \quad (6.1.4)$$

Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\delta W_{in\bar{i}} = -\rho_{\bar{i}} b_{\bar{i}} \int_0^l \int_{-\frac{h_{\bar{i}}}{2}}^{\frac{h_{\bar{i}}}{2}} \left[ \frac{\partial^2 w_{RB\bar{i}}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta w_{RB\bar{i}}(y, z, t) + \frac{\partial^2 u_{RB\bar{i}}(y, z, t)}{\partial t^2} \delta u_{RB\bar{i}}(y, z, t) \right] dy dz. \quad (6.1.5)$$

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\delta W_{V\bar{i}} = -b_{\bar{i}} \int_0^l \int_{-\frac{h_{\bar{i}}}{2}}^{\frac{h_{\bar{i}}}{2}} [\sigma_{z\bar{i}}(z, t) \delta \varepsilon_{z\bar{i}}(z, t) + \tau_{zy\bar{i}}(z, t) \delta \gamma_{zy\bar{i}}(z, t)] dy dz. \quad (6.1.6)$$

Virtuelni rad spoljašnjih sila je oblika

$$\begin{aligned} \delta W_{ex1} &= \int_0^l \left\{ \delta w_{RB1}^0(z, t) \left[ -K_0 w_{RB1}^0(z, t) + K_1 (w_{RB2}^0(z, t) - w_{RB1}^0(z, t)) \right] + \right. \\ &\quad \left. + F \frac{\partial w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RB1}^0(z, t)}{\partial z} \right\} dz, \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{exi} &= \int_0^l \left\{ \delta w_{RBi}^0(z, t) \left[ -K_{i-1} (w_{RBi}^0(z, t) - w_{RBi-1}^0(z, t)) + K_i (w_{RBi+1}^0(z, t) - w_{RBi}^0(z, t)) \right] + \right. \\ &\quad \left. + F \frac{\partial w_{RBi}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RBi}^0(z, t)}{\partial z} \right\} dz, \quad i = 2, 3, \dots, m-1. \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{exm} = \int_0^l \left\{ \delta w_{RBm}^0(z, t) \left[ -K_{m-1} \left( w_{RBm}^0(z, t) - w_{RBm-1}^0(z, t) \right) \right] + F \right. \\ \left. + \frac{\partial w_{RBm}^0(z, t)}{\partial z} \frac{\partial \delta w_{RBm}^0(z, t)}{\partial z} \right\} dz, \end{aligned} \quad (6.1.9)$$

Zamenom jednačina (6.1.5-6.1.9) u opštu jednačinu principa virtuelnog rada  $\delta W_{ini} + \delta W_{Vi} + \delta W_{exi} = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , i primenom Green-ove teoreme dobijamo spregnut sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina oscilovanja u sledećem obliku

$$\begin{aligned} C_{w1}^{4,0} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + C_{w1}^{2,2} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial t^2} + C_{w1}^{2,0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + C_{w1}^{0,2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + C_{\psi 1}^{1,2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z \partial t^2} + C_{\psi 1}^{1,0} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + C_{\psi 1}^{3,0} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} \\ + K_0 w_1 - K_1 (w_2 - w_1) = 0, \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

$$C_{w1}^{3,0} \frac{\partial^3 w_1}{\partial z^3} + C_{w1}^{1,2} \frac{\partial^3 w_1}{\partial z \partial t^2} + C_{w1}^{1,0} \frac{\partial w_1}{\partial z} + C_{\psi 1}^{2,0} \frac{\partial^2 \psi_1(z, t)}{\partial z^2} + C_{\psi 1}^{0,2} \frac{\partial^2 \psi_1(z, t)}{\partial t^2} + C_{\psi 1}^{0,0} \psi_1 = 0, \quad (6.1.11)$$

$$\begin{aligned} C_{wi}^{4,0} \frac{\partial^4 w_i}{\partial z^4} + C_{wi}^{2,2} \frac{\partial^4 w_i}{\partial z^2 \partial t^2} + C_{wi}^{2,0} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} + C_{wi}^{0,2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + C_{\psi i}^{1,2} \frac{\partial^3 \psi_i}{\partial z \partial t^2} + C_{\psi i}^{1,0} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} + C_{\psi i}^{3,0} \frac{\partial^3 \psi_i}{\partial z^3} \\ + K_{i-1} (w_i - w_{i-1}) - K_i (w_{i+1} - w_i) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

$$C_{wi}^{3,0} \frac{\partial^3 w_i}{\partial z^3} + C_{wi}^{1,2} \frac{\partial^3 w_i}{\partial z \partial t^2} + C_{wi}^{1,0} \frac{\partial w_i}{\partial z} + C_{\psi i}^{2,0} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} + C_{\psi i}^{0,2} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + C_{\psi i}^{0,0} \psi_i = 0, \quad (6.1.13)$$

$$\begin{aligned} C_{wm}^{4,0} \frac{\partial^4 w_m}{\partial z^4} + C_{wm}^{2,2} \frac{\partial^4 w_m}{\partial z^2 \partial t^2} + C_{wm}^{2,0} \frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2} + C_{wm}^{0,2} \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + C_{\psi m}^{1,2} \frac{\partial^3 \psi_m}{\partial z \partial t^2} + C_{\psi m}^{1,0} \frac{\partial \psi_m}{\partial z} + C_{\psi m}^{3,0} \frac{\partial^3 \psi_m}{\partial z^3} \\ + K_{m-1} (w_m - w_{m-1}) = 0, \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

$$C_{wm}^{3,0} \frac{\partial^3 w_m}{\partial z^3} + C_{wm}^{1,2} \frac{\partial^3 w_m}{\partial z \partial t^2} + C_{wm}^{1,0} \frac{\partial w_m}{\partial z} + C_{\psi m}^{2,0} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial z^2} + C_{\psi m}^{0,2} \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial t^2} + C_{\psi m}^{0,0} \psi_m = 0, \quad (6.1.15)$$

gde su za  $i = 1, 2, \dots, m$

$$C_{wi}^{4,0} = \frac{1}{448} b_i h_i^7 \alpha^2 E_i, \quad C_{wi}^{2,2} = -\frac{1}{448} b_i h_i^7 \alpha^2 \rho_i, \quad C_w^{2,0} = -\frac{1}{80} b_i G_i \beta^2 h_i^5 + \frac{1}{6} b_i G_i \beta h_i^3 - b_i G_i h_i + F,$$

$$C_{wi}^{0,2} = b_i h_i \rho_i, \quad C_{\psi i}^{1,2} = \frac{1}{80} b_i h_i^5 \alpha \rho_i - \frac{1}{448} b_i h_i^7 \alpha^2 \rho_i, \quad C_{\psi i}^{1,0} = -\frac{1}{80} b_i G_i \beta^2 h_i^5 + \frac{1}{6} b_i G_i \beta h_i^3 - b_i G_i h_i,$$

$$C_{\psi i}^{3,0} = \frac{1}{448} b_i h_i^7 \alpha^2 E_i - \frac{1}{80} b_i h_i^5 \alpha E_i, \quad C_{wi}^{3,0} = \frac{1}{80} b_i h_i^5 \alpha E_i - \frac{1}{448} b_i h_i^7 \alpha^2 E_i, \quad C_{wi}^{1,2} = \frac{1}{448} b_i h_i^7 \alpha^2 \rho_i -$$

$$-\frac{1}{80} b_i h_i^5 \alpha \rho_i,$$



$$\begin{aligned}
C_{w\bar{i}}^{1,0} &= \frac{1}{80} b_i G_i \beta^2 h_i^5 - \frac{1}{6} b_i G_i \beta h_i^3 + b_i G_i h_i, C_{\psi\bar{i}}^{2,0} = -\frac{1}{448} b_i \alpha^2 E_i h_i^7 + \frac{1}{40} b_i \alpha E_i h_i^5 - \frac{1}{12} b_i E_i h_i^3, \\
C_{\psi\bar{i}}^{0,2} &= \frac{1}{448} b_i \alpha^2 \rho_i h_i^7 - \frac{1}{40} b_i \alpha \rho_i h_i^5 + \frac{1}{12} b_i \rho_i h_i^3, C_{\psi\bar{i}}^{0,0} = \frac{1}{80} b_i \beta^2 G_i h_i^5 - \frac{1}{6} b_i \beta G_i h_i^3 + b_i G_i h_i,
\end{aligned} \tag{6.1.16}$$

Za eliminaciju promenljive  $\psi_m$  koristimo program izrađen u softveru *Mathematica 9* - prilog 6.1.1 ([http://www.2shared.com/file/ZTF0-q8o/Prilog\\_611.html](http://www.2shared.com/file/ZTF0-q8o/Prilog_611.html)). Nakon primene programa i eliminacije promenljive  $\psi_m$ , sistem  $2m$  parcijalnih diferencijalnih jednačina (6.1.10-6.1.15) svodimo na sistem  $m$  parcijalnih diferencijalnih jednačina oblika

$$\begin{aligned}
&C(1)_{w_1}^{6,0} \frac{\partial^6 w_1}{\partial z^6} + C(1)_{w_1}^{4,2} \frac{\partial^6 w_1}{\partial z^4 \partial t^2} + C(1)_{w_1}^{4,0} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + C(1)_{w_1}^{2,4} \frac{\partial^6 w_1}{\partial z^2 \partial t^4} + C(1)_{w_1}^{2,2} \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^2 \partial t^2} + C(1)_{w_2}^{2,0} \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} \\
&+ C(1)_{w_1}^{2,0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + C(1)_{w_1}^{0,4} \frac{\partial^4 w_1}{\partial t^4} + C(1)_{w_2}^{0,2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + C(1)_{w_1}^{0,2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + (K_0 + K_1)w_1 - K_1 w_2 = 0, \tag{6.1.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&C(i)_{w_i}^{6,0} \frac{\partial^6 w_i}{\partial z^6} + C(i)_{w_i}^{4,2} \frac{\partial^6 w_i}{\partial z^4 \partial t^2} + C(i)_{w_{i+1}}^{4,0} \frac{\partial^4 w_{i+1}}{\partial z^4} + C(i)_{w_{i+1}}^{2,4} \frac{\partial^6 w_i}{\partial z^2 \partial t^4} + C(i)_{w_i}^{2,2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2 \partial t^2} + C(i)_{w_i}^{4,0} \frac{\partial^4 w_i}{\partial z^4} \\
&+ C(i)_{w_{i+1}}^{2,0} \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial z^2} + C(i)_{w_i}^{2,0} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} + C(i)_{w_{i-1}}^{2,0} \frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial z^2} + C(i)_{w_i}^{0,4} \frac{\partial^4 w_i}{\partial t^4} + C(i)_{w_{i+1}}^{0,2} \frac{\partial^2 w_{i+1}}{\partial t^2} \\
&+ C(i)_{w_i}^{0,2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + C(i)_{w_{i-1}}^{0,2} \frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial t^2} - K_{i-1} w_{i-1} + (K_{i-1} + K_i)w_i - K_i w_{i+1} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m-1, \tag{6.1.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&C(m)_{w_m}^{6,0} \frac{\partial^6 w_m}{\partial z^6} + C(m)_{w_m}^{4,2} \frac{\partial^6 w_m}{\partial z^4 \partial t^2} + C(m)_{w_m}^{4,0} \frac{\partial^4 w_m}{\partial z^4} + C(m)_{w_m}^{2,4} \frac{\partial^6 w_1}{\partial z^2 \partial t^4} + C(m)_{w_m}^{2,2} \frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2 \partial t^2} \\
&+ C(m)_{w_m}^{2,0} \frac{\partial^2 w_m}{\partial z^2} + C(m)_{w_{m-1}}^{2,0} \frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial z^2} + C(m)_{w_m}^{0,4} \frac{\partial^4 w_m}{\partial t^4} + C(m)_{w_m}^{0,2} \frac{\partial^2 w_m}{\partial t^2} + C(m)_{w_{m-1}}^{0,2} \frac{\partial^2 w_{m-1}}{\partial t^2} \\
&- K_{m-1} w_{m-1} + K_{m-1} w_m = 0. \tag{6.1.19}
\end{aligned}$$

Uprošćeni oblici koeficijenata  $C(\bar{i})_{w\bar{i}}^{*,*}$ ,  $\bar{i} = 1, 2, \dots, m$  dati su u prilogu 6.1.2

([http://www.2shared.com/file/NcyTdJkW/Prilog\\_612.html](http://www.2shared.com/file/NcyTdJkW/Prilog_612.html))

Pretpostavljamo kao u prethodnom poglavlju u slučaju sistema povezanih nosača Timoshenko-vog tipa, da su nosači identičnih materijalnih i geometrijskih karakteristika

$$A_i = A, \quad E_i = E, \quad G_i = G, \quad K_{i-1} = K, \quad K_m = 0, \quad \rho_i = \rho, \quad \bar{i} = 1, 2, 3, \dots, m. \tag{6.1.20}$$

Početni i granični uslovi slobodno oslonjenih nosača su na osnovu (2.3.22 – 2.3.24) oblika

$$\begin{aligned} w_{\bar{i}}(z, 0) &= w_{i0}(z), & \dot{w}_{\bar{i}}(z, 0) &= v_{i0}(z), & \psi_{\bar{i}}(z, 0) &= \psi_{i0}(z), & \dot{\psi}_{\bar{i}}(z, 0) &= \omega_{i0}(z), \\ w_{\bar{i}}(0, t) &= w_{\bar{i}}(l, t) = w''_{\bar{i}}(0, t) = w''_{\bar{i}}(l, t) = 0, & \bar{i} &= 1, 2, 3 \dots m. \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

Ako pretpostavimo da je kretanje nosača harmonijsko, transverzalna pomeranja nosača možemo napisati u obliku proizvoda funkcija osnovnih oblika oscilovanja i nepoznatih funkcija vremena u sledećem obliku

$$w_{\bar{i}}(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(z) T_{in}(t), \quad T_{in} = A_{in} e^{j\omega_n t}, \quad \bar{i} = 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = \sqrt{-1}. \quad (6.1.22)$$

Funkcija  $Z_n$  zadovoljava granične uslove slobodno oslonjenih nosača ako je oblika

$$Z_n(z) = \sin(k_n z), \quad k_n = n\pi/l, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.1.23)$$

Ako zamenimo pretpostavljena transverzalna pomeranja (6.1.22) u jednačine (6.1.17-6.1.19) dobijamo homogeni sistem algebarskih jednačina po nepoznatim  $A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, \dots, A_{nm}$  u obliku

$$\begin{bmatrix} S_n & -u_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -u_n & S_n & -u_n & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & S_n & -u_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -u_n & S_n & -u_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -u_n & S_n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -u_n & S_n & -u_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -u_n & S_n - u_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{n1} \\ A_{n2} \\ A_{n3} \\ \dots \\ A_{n(i-1)} \\ A_{n\bar{i}} \\ A_{n(i+1)} \\ \dots \\ A_{n(m-2)} \\ A_{n(m-1)} \\ A_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (6.1.24)$$

gde su

$$S_n = (C_{(4)S}\omega_n^4 + C_{(2)S}\omega_n^2 + C_{(0)S}), \quad u_n = C_{(2)u}\omega_n^2 + C_{(0)u}, \quad (6.1.25)$$

$$C_{(4)S} = -3bh^3\rho^2\{ah^2[ah^2(h^2k_n^2 + 75) - 840] + 2800\},$$

$$\begin{aligned} C_{(2)S} &= h\rho\{b[3Eh^2k_n^2[ah^2(2ah^4k_n^2 + 75ah^2 - 840) + 2800] + 35G[\beta h^2(3\beta h^2 - 40) \\ &\quad + 240](h^2k_n^2 + 12)] - 15h[3ah^2(5ah^2 - 56) + 560](Fk_n^2 - 2K)\}, \end{aligned}$$

$$C_{(0)S} = -3\alpha^2 b E^2 h^9 k_n^6 + 5Eh^2 k_n^4 \{3F[3ah^2(5ah^2 - 56) + 560] - 7bGh[\beta h^2(3\beta h^2 - 40) + 240]\}$$

$$-30K\{Eh^2k_n^2[3\alpha h^2(5\alpha h^2 - 56) + 560] + 28G[\beta h^2(3\beta h^2 - 40) + 240]\} \\ + 420FGk_n^2[\beta h^2(3\beta h^2 - 40) + 240],$$

$$C_{(2)u} = 15h^2K\rho[3\alpha h^2(5\alpha h^2 - 56) + 560],$$

$$C_{(0)u} = -15K\{Eh^2k_n^2[3\alpha h^2(5\alpha h^2 - 56) + 560] + 28G[\beta h^2(3\beta h^2 - 40) + 240]\}.$$

Sistem (6.1.24) ima rešenja razliĉita od trivijalnih, samo ako je determinanta matrice  $m \times m$  u jednaĉini (6.1.24) jednaka nuli. Tada kao rešenje dobijamo polinom  $4m$ -tog reda ĉija rešenja za konkretne podatke moŹemo odrediti samo numerikim putem. Rešenje koje smo dobili u sluĉaju  $m$  elastiĉno povezanih nosaĉa Timoshenko-vog tipa ĉemo iskoristiti da formiramo trigonometrijsku frekventnu jednaĉinu iz sledeĉih relacija

$$S_n - 2u_n \cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad S_n = 2u_n \cos \varphi, \quad \varphi(s, m) = \frac{2s-1}{2m+1}\pi, \quad s = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (6.1.26)$$

gde je  $m$  broj elastiĉno povezanih nosaĉa a  $s$  redni broj frekvencije. Iz relacija (6.1.25) i (6.1.26) sledi

$$(C_{(4)S}\omega_n^4 + C_{(2)S}\omega_n^2 + C_{(0)S}) = -2(C_{(2)u}\omega_n^2 + C_{(0)u}) \cos\left(\frac{2s-1}{2m+1}\pi\right), \quad (6.1.27)$$

odnosno bikvadratna jednaĉina oblika

$$C_{(4)S}\omega_n^4 + \left[C_{(2)S} + 2C_{(2)u} \cos\left(\frac{2s-1}{2m+1}\pi\right)\right]\omega_n^2 + C_{(0)S} + 2C_{(0)u} \cos\left(\frac{2s-1}{2m+1}\pi\right) = 0. \quad (6.1.28)$$

Iz izraza (6.1.27) slede rešenja u obliku kvadrata prirodnih frekvencija

$$[\omega_{n,s}^2]_l = \frac{-[C_{(2)S} + 2C_{(2)u} \cos(\frac{2s-1}{2m+1}\pi)]}{2C_{(4)S}} \\ - \frac{\sqrt{[C_{(2)S} + 2C_{(2)u} \cos(\frac{2s-1}{2m+1}\pi)]^2 - 4C_{(4)S}[C_{(0)S} + 2C_{(0)u} \cos(\frac{2s-1}{2m+1}\pi)]}}{2C_{(4)S}}, \quad (6.1.29)$$

$$\begin{aligned}
 [\omega_{n,s}^2]_h &= \frac{-[C_{(2)S} + 2C_{(2)u} \cos(\frac{2s-1}{2m+1}\pi)]}{2C_{(4)S}} \\
 &+ \sqrt{\frac{[C_{(2)S} + 2C_{(2)u} \cos(\frac{2s-1}{2m+1}\pi)]^2 - 4C_{(4)S}[C_{(0)S} + 2C_{(0)u} \cos(\frac{2s-1}{2m+1}\pi)]}{2C_{(4)S}}}, \\
 s &= 1, 2, 3 \dots m.
 \end{aligned} \tag{6.1.30}$$

gde  $[\omega_{n,s}]_l$  predstavlja nižu a  $[\omega_{n,s}]_h$  višu prirodnu frekvenciju. Statičku stabilnost sistema u zavisnosti od krutosti elastičnih slojeva možemo ispitati na osnovu jednačine (6.1.27). Sistem će biti u stanju indiferentne ravnoteže kada na njega deluju aksijalne sile pod čijim uticajem će prirodna frekvencija sistema biti jednaka nuli. Ako primenimo ovaj uslov ( $\omega_n = 0$ ), iz jednačine (6.1.27) sledi da je minimalna vrednost rešenja po nepoznatoj aksijalnoj sili  $F$  kritična sila sistema  $m$  elastično povezanih nosača koja odgovara  $n$ -tom modu i oblika je

$$F_b^{kr} = \min_{\substack{n=1,2,3\dots \\ s=1,2,3\dots m}} \frac{EI_x k_n^2 (Eh^2 k_n^2 + 840G)}{85Eh^2 k_n^2 + 840G} + \frac{2K}{k_n^2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2s-1}{2m+1}\pi\right) \right], s = 1, 2, 3 \dots m. \tag{6.1.31}$$

Za  $K = 0$  iz jednačine (6.1.30) sledi

$$P_n = \frac{EI_x k_n^2 (Eh^2 k_n^2 + 840G)}{85Eh^2 k_n^2 + 840G}, \tag{6.1.32}$$

Minimalna vrednost sile date izrazom (6.1.32) dobija se za  $n=1$ , ref. [32] i predstavlja kritičnu vrednost sile pri kojoj nastupa izvijanje

$$P = \frac{EI \pi^2 \left( 840G + \frac{Eh^2 \pi^2}{l^2} \right)}{l^2 \left( 840G + \frac{85Eh^2 \pi^2}{l^2} \right)}. \tag{6.1.33}$$

## 6.2 Numerička analiza i rezultati u statičkom i frekventnom domenu sistema elastično povezanih nosača Reddy-Bickford-ovog tipa

U numeričkoj analizi sistema upoređeni su rezultati za slučajeve sa 3, 5, 7 i 9 elastično povezanih nosača istih materijalnih karakteristika kako bi se videla neophodnost uzimanja u obzir uticaja inercije rotacije i poprečnog smicanja naročito kod nosača većih debljina.

$$E = 1 \times 10^{10} \text{ Nm}^{-2}, \nu = 0.34, G = \frac{E}{2(1+\nu)}, k = \frac{5+5\nu}{6+5\nu}, \text{ref. [24]}, K = K_0 = K_1 = 2 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$$

$$\rho = 2 \times 10^3 \text{ kgm}^{-3}, A = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^2, I = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \quad (6.2.1)$$

$$l = 10 \text{ m}, \quad b = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{5}{3}} \text{ m}, \quad h_1 = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ m}.$$

U tabelama 6.2.1-6.2.3 prikazane su vrednosti prirodnih frekvencija sistema u funkciji broja elastično povezanih nosača, njihove debljine, krutosti Winkler-ovih slojeva i moda oscilovanja. Eliminacijom uticaja poprečnog smicanja i inercije rotacije sa poprečnim smicanjem iz jednačina iz sistema (5.1.29) uz uslov da su nosači istih materijalnih karakteristika i povezani elastičnim slojevima Winkler-ovog tipa istih krutosti, dobijamo izraze za prirodne frekvencije elastično povezanih nosača Rayleigh-jevog i Euler-ovog tipa redom u obliku

$$\text{Rayleigh} \quad [\omega_{n,s}^2]_l = \sqrt{\frac{C_b^2 k_n^4 - F\eta^2 + 2H \left[ 1 - \cos\left(\frac{2s-1}{2(2m+1)}\pi\right) \right]}{1 + C_r^2 k_n^2}}, \quad (6.2.2)$$

$$\text{Euler} \quad [\omega_{n,s}^2]_l = \sqrt{\frac{EIk_n^4 - Fk_n^2 + 2K \left[ 1 - \cos\left(\frac{2s-1}{2(2m+1)}\pi\right) \right]}{\rho A}}. \quad (6.2.3)$$

Na osnovu analitičkih izraza (5.1.40) za frekvencije nosača Timoshenko-vog tipa i (6.1.28) nosače Reddy-Bickford-ovog tipa kao i izraza (6.2.2) i (6.2.3) dobijamo vrednosti prirodnih frekvencija prikazane u tabelama (6.2.1-6.2.3).

Tabela 6.2.1

Prirodne frekvencije  $[s^{-1}]$  elastično povezanih nosača  $n = 1$ ,  $h = h_1$ ,  $K = K_0$ ,  $F = 0$ 

	$\omega$	Euler	Rayleigh	Timoshenko	Reddy – Bickford
$m = 3$	$\omega_{1,1}$	28.031426872	28.020367058	28.003561651	28.002821765
	$\omega_{1,2}$	59.157016729	59.133676296	59.125802235	59.125455645
	$\omega_{1,3}$	82.967436814	82.934701967	82.929164958	82.928921239
$m = 5$	$\omega_{1,1}$	23.487538604	23.478271583	23.458193420	23.457309327
	$\omega_{1,2}$	42.073666685	42.057066497	42.045916431	42.045425613
	$\omega_{1,3}$	61.809198434	61.784811580	61.777285278	61.776953996
	$\omega_{1,4}$	77.790079162	77.759387044	77.753461310	77.753200481
	$\omega_{1,5}$	88.060493386	88.025749070	88.020550942	88.020322140
$m = 7$	$\omega_{1,1}$	21.841381852	21.832764322	21.811164921	21.810213778
	$\omega_{1,2}$	33.964222155	33.950821553	33.936973666	33.936364049
	$\omega_{1,3}$	48.883907005	48.864619833	48.855047581	48.854626231
	$\omega_{1,4}$	63.020016749	62.995152167	62.987775034	62.987450318
	$\omega_{1,5}$	75.004695464	74.975102320	74.968945793	74.968674806
	$\omega_{1,6}$	84.060447236	84.027281140	84.021820224	84.021579855
	$\omega_{1,7}$	89.687335754	89.651949566	89.646851796	89.646627411
$m = 9$	$\omega_{1,1}$	21.075842819	21.067527333	21.045139576	21.044153681
	$\omega_{1,2}$	29.525266456	29.513617246	29.497668145	29.496965979
	$\omega_{1,3}$	40.994024901	40.977850686	40.966402718	40.965898783
	$\omega_{1,4}$	52.752769268	52.731955634	52.723099701	52.722709887
	$\omega_{1,5}$	63.712785077	63.687647162	63.680352865	63.680031795
	$\omega_{1,6}$	73.291052064	73.262135039	73.255828000	73.255550387
	$\omega_{1,7}$	81.101350153	81.069351570	81.063680034	81.063430394
	$\omega_{1,8}$	86.868857490	86.834583335	86.829309382	86.829077242
	$\omega_{1,9}$	90.404122311	90.368453315	90.363398650	90.363176162

Tabela 6.2.2

Prirodne frekvencije  $[s^{-1}]$  elastično povezanih nosača  $n = 1$ ,  $h = 5h_1$ ,  $K = K_0$ ,  $F = 0$ 

	$\omega$	Euler	Rayleigh	Timoshenko	Reddy – Bickford
$m = 3$	$\omega_{1,1}$	99.096589290	98.132790386	95.40454845252	95.29121980836
	$\omega_{1,2}$	101.798292501	100.808217227	98.16012190987	98.05020502668
	$\omega_{1,3}$	105.069981178	104.048085939	101.49149714614	101.3854652178
$m = 5$	$\omega_{1,1}$	98.860076494	97.898577878	95.16310932326	95.04947262192
	$\omega_{1,2}$	100.085066399	99.111653711	96.41324130255	96.30118348187
	$\omega_{1,3}$	102.112963098	101.119827384	98.48078910939	98.37125723554
	$\omega_{1,4}$	104.274834518	103.260672759	100.68237420869	100.57542156451
	$\omega_{1,5}$	105.895759734	104.865833094	102.33144489069	102.22635387173

$m = 7$	$\omega_{1,1}$	98.784568748	97.823804509	95.08602145955	94.97228608059
	$\omega_{1,2}$	99.467057400	98.499655377	95.78266327808	95.66981405117
	$\omega_{1,3}$	100.702080928	99.722667247	97.04257516993	96.93129725168
	$\omega_{1,4}$	102.260873909	101.266299636	98.63149925523	98.52214749443
	$\omega_{1,5}$	103.865888042	102.855703637	100.26610997272	100.15867806020
	$\omega_{1,6}$	105.243591674	104.220007925	101.66811549425	101.56228266034
	$\omega_{1,7}$	106.168476816	105.135897770	102.60876553273	102.50398190177
$m = 9$	$\omega_{1,1}$	98.751304096	97.790863384	95.05205955721	94.93828065546
	$\omega_{1,2}$	99.183315645	98.218673253	95.49307250817	95.37985643507
	$\omega_{1,3}$	99.995419125	99.022878333	96.32178515768	96.20961317796
	$\omega_{1,4}$	101.091803642	100.108599575	97.43996296681	97.32917248273
	$\omega_{1,5}$	102.346693288	101.351284348	98.71893719109	98.60968968300
	$\omega_{1,6}$	103.620931732	102.613129736	100.01672755385	99.90900666616
	$\omega_{1,7}$	104.778182986	103.759125733	101.19460836013	101.08824024895
	$\omega_{1,8}$	105.698729940	104.670719582	102.13106586866	102.02575174257
	$\omega_{1,9}$	106.289994339	105.256233431	102.73232232681	102.62767513291

Tabela 6.2.3

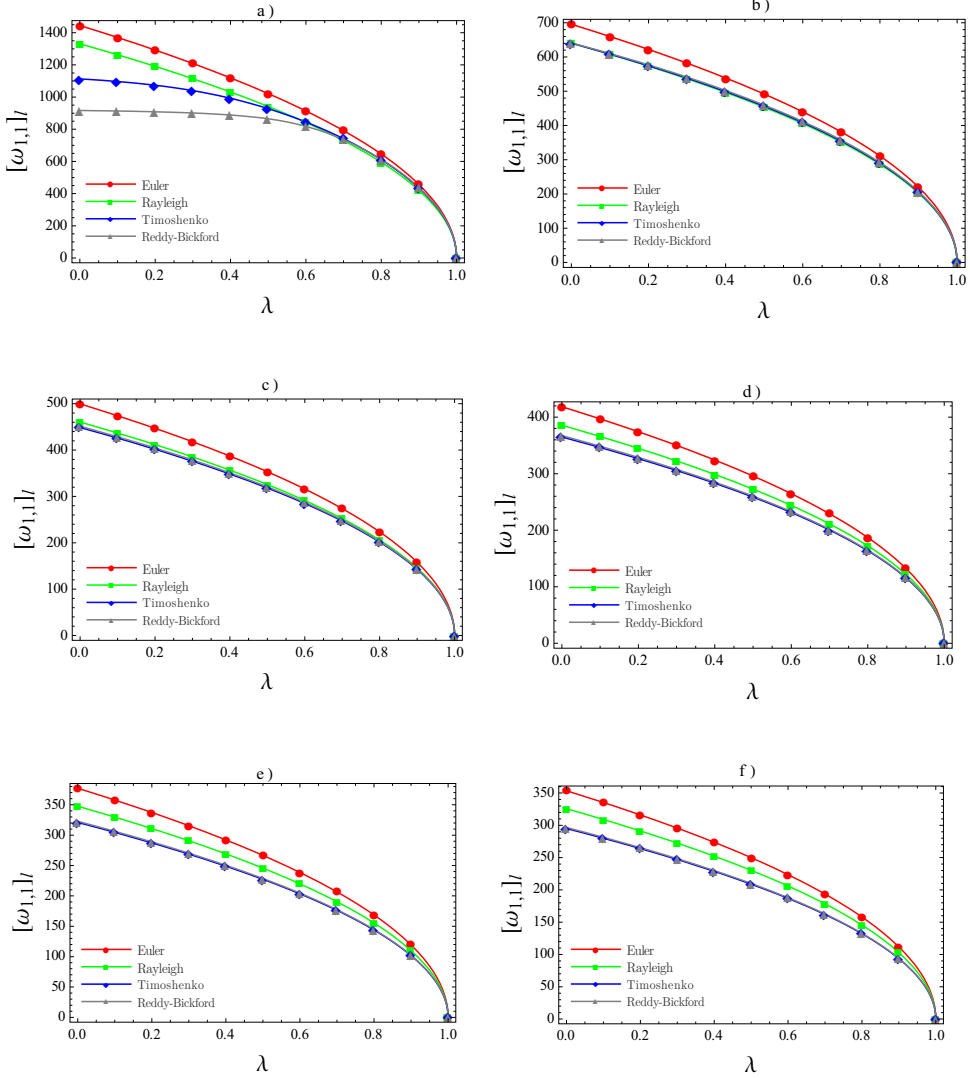
Prirodne frekvencije  $[s^{-1}]$  elastično povezanih nosača  $n = 1$ ,  $h = h_1$ ,  $K = 2K_0$ ,  $F = 0$ 

	$\omega$	Euler	Rayleigh	Timoshenko	Reddy – Bickford
$m = 3$	$\omega_{1,1}$	34.378560483	34.364996403	34.351317052	34.350714857
	$\omega_{1,2}$	81.298640164	81.266563741	81.260906711	81.260657710
	$\omega_{1,3}$	115.661379807	115.615745547	115.611878846	115.611708644
$m = 5$	$\omega_{1,1}$	26.715025271	26.704484843	26.686845653	26.686069033
	$\omega_{1,2}$	56.131546322	56.109399590	56.101089263	56.100723467
	$\omega_{1,3}$	85.153494690	85.119897332	85.114510608	85.114273505
	$\omega_{1,4}$	108.226412987	108.183712197	108.179551202	108.179368048
	$\omega_{1,5}$	122.962045472	122.913530730	122.909919911	122.909760970
$m = 7$	$\omega_{1,1}$	23.758273470	23.748899630	23.729051486	23.728177531
	$\omega_{1,2}$	43.789272763	43.771995681	43.761288976	43.760817679
	$\omega_{1,3}$	66.254330908	66.228190226	66.221185217	66.220876882
	$\omega_{1,4}$	86.910348394	86.876057868	86.870786589	86.870554567
	$\omega_{1,5}$	104.219826900	104.178706910	104.174370694	104.174179828
	$\omega_{1,6}$	117.229182437	117.182929599	117.179120402	117.178952731
	$\omega_{1,7}$	125.291659839	125.242225946	125.238690813	125.2385352044
$m = 9$	$\omega_{1,1}$	22.332620467	22.323809119	22.302687139	22.301757041
	$\omega_{1,2}$	36.794651167	36.780133817	36.767361943	36.766799711
	$\omega_{1,3}$	54.510400761	54.488893652	54.480329887	54.479952934
	$\omega_{1,4}$	71.944930098	71.916544187	71.910113991	71.909830958
	$\omega_{1,5}$	87.914740518	87.880053709	87.874846414	87.874617208
	$\omega_{1,6}$	101.752249416	101.71210301	101.707652291	101.7074563850
	$\omega_{1,7}$	112.983280308	112.938702692	112.934734250	112.9345595710
	$\omega_{1,8}$	121.254939855	121.207098652	121.203430623	121.2032691656
	$\omega_{1,9}$	126.317751317	126.267912579	126.264409944	126.2642557652

Na slici 6.2.1 prikazana je promena prirodnih frekvencija sistema u zavisnosti od uticaja aksijalnih sila pritiska definisane bezdimenzionim parametrom  $\lambda = F / F_b^{kr}$  i broja elastično povezanih nosača različitih tipova: Euler, Rayleigh, Timoshenko i Reddy-Bickford. Može se zaključiti da sa povećanjem broja nosača, prirodna frekvencija sistema opada. Takođe se može primetiti da postoji značajna razlika u aproksimacijama rešenja u zavisnosti od tipa, odnosno teorije nosača koja se koristi. U numeričkom eksperimentu čiji su rezultati prikazani na serijama slika 6.2.7a-f, uzet je u razmatranje deblji nosač pri čemu su uticaji inercije rotacije i poprečnog smicanja veći, pa se shodno tome javlja razlika u aproksimaciji rešenja prve po redu prirodne frekvencije. Na slici 6.2.1 b) u slučaju tri elastično povezana nosača se može videti da su uticaji poprečnog smicanja mali u odnosu na uticaje poprečnog smicanja i inercije rotacije odnosno da Rayleigh-jev model daje dobre aproksimacije rešenja, što nije slučaj za više od 3 elastično povezana nosača gde se uticaji poprečnog smicanja povećavaju pa Timoshenkov i Reddy-Bickford-ov model daju bolje aproksimacije rešenja. Primetno je da sa povećanjem aksijalnih pritisnih sila, razlike u aproksimacijama rešenja postaju manje. Tako u slučaju jednog nosača na elastičnoj podlozi pri uticaju aksijalnih sila većim od 70% od kritične vrednosti, uticaji poprečnog smicanja na prirodne frekvencije nestaju, pa je u ovakvim slučajevima moguće koristiti Rayleigh-jev model za deblje

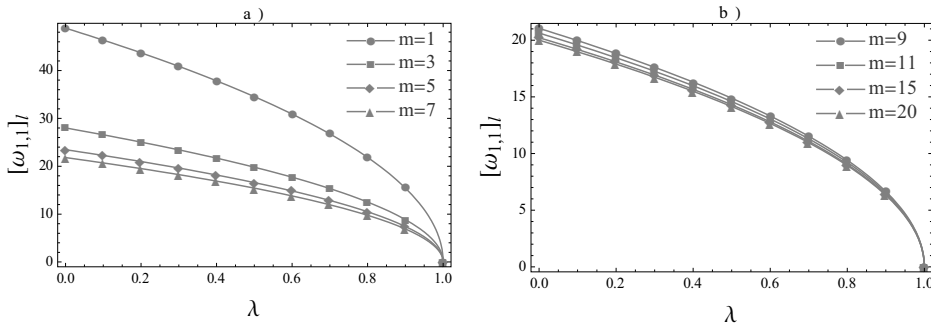
Na slikama 6.2.2 a-b prikazana je promena prirodnih frekvencija sistema u zavisnosti od uticaja pritisnih aksijalnih sila tankih nosača Reddy-Bickford-ovog tipa u zavisnosti od njihovog broja. Na slikama 6.2.3 i 6.2.4 prikazane su promene prirodnih frekvencija sistema u zavisnosti od debljine nosača definisane bezdimenzionim parametrom  $\xi = h / l$ . Na slici 6.2.3 a) se može primetiti da sve teorije daju približno iste vrednosti za aproksimacije rezultata do vrednosti  $\xi = 0.2$  ali da kod poprečnih preseka većih debljina raste razlika u aproksimacijama rešenja. Sa povećanjem broja nosača, Timoshenko-v i Reddy-Bickford-ov model sistema daju veoma približne rezultate. U slučaju jednog nosača na elastičnoj podlozi, slika 6.2.3 a), Reddy-Bickford-ov model daje najbolje aproksimacije rešenja.





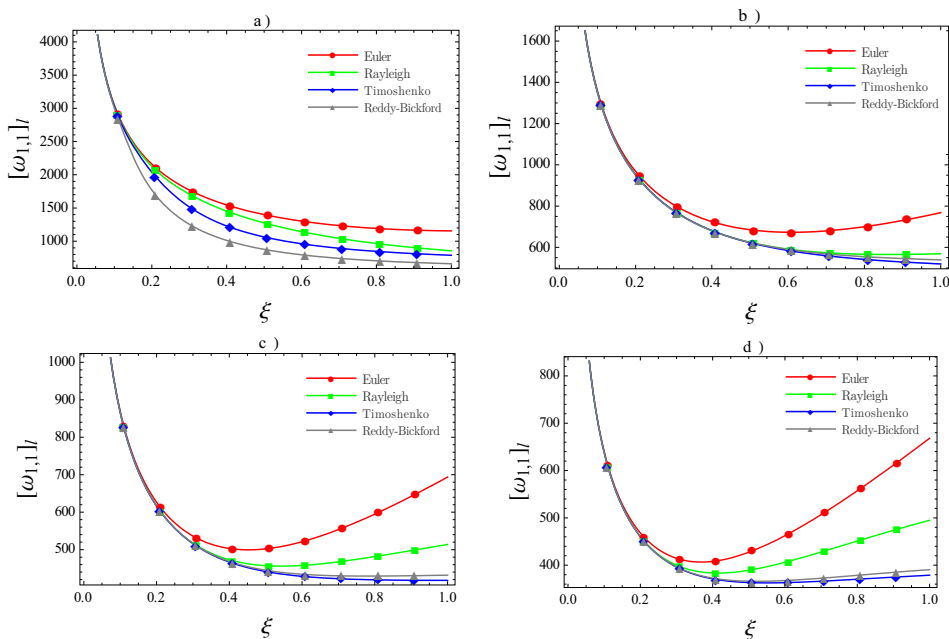
Slika 6.2.1 Uticaj promene faktora aksijalne kompresije  $\lambda$  na najnižu prirodnu frekvenciju nosača  $h=15h_1$ ,  $K=15 \times 10^3 K_0$

a)  $m = 1$ ; b)  $m = 3$ ; c)  $m = 5$  d)  $m = 7$ ; e)  $m = 9$ ; f)  $m = 11$ .



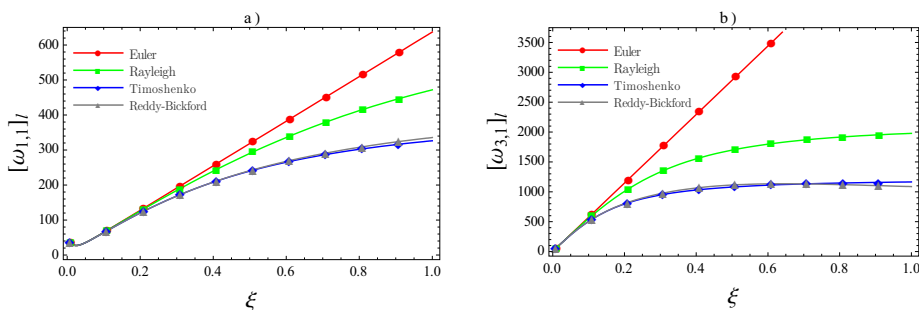
Slika 6.2.2 Uticaj pritiskih aksijalnih sila  $\lambda$  na najnižu prirodnu frekvenciju nosača debljine  $h=h_1$

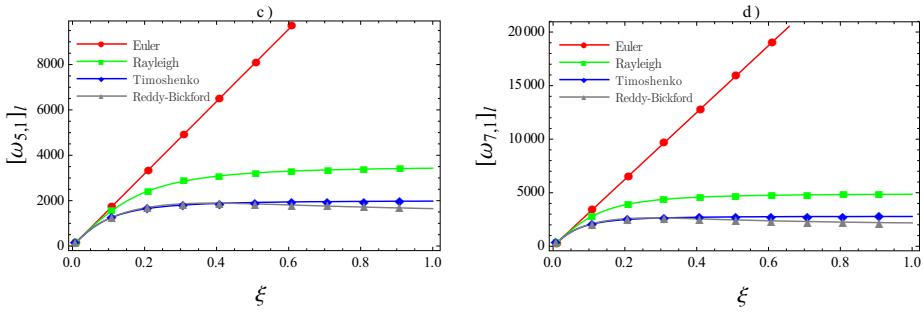
a)  $m = 1, 3, 5, 7$ ; b)  $m = 9, 11, 15, 20$ .



Slika 6.2.3 Uticaj parametra  $\xi$  na najnižu prirodnu frekvenciju nosača  $K=15 \times 10^3 K_0$

a)  $m = 1$ ; b)  $m = 3$ ; c)  $m = 5$ ; d)  $m = 7$ .

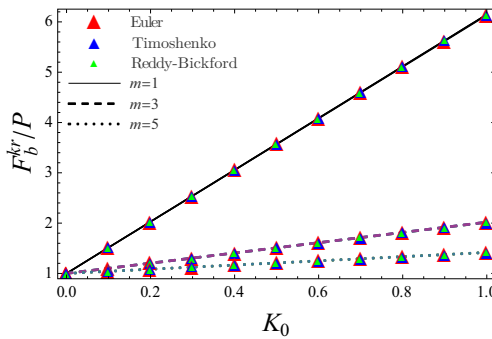




Slika 6.2.4 Uticaj parametra  $\xi$  na najnižu prirodnu frekvenciju nosača za različite modove  $n$  i  $K=K_0$   
 a)  $n=1$ ; b)  $n=3$ ; c)  $n=5$ ; d)  $n=7$ .

Na slikama 6.2.4 a-d može se uočiti zona debljine nosača u kojoj sve teorije daju dobre aproksimacije u zavisnosti od moda oscilovanja za slučaj tri elastično povezana nosača. Takođe se može primetiti da sa povećanjem moda oscilovanja, razlike u aproksimacijama frekvencija postaju veće, a zona debljine nosača za koju sve teorije daju dobre rezultate se smanjuje. Ova pojava je najznačajnija između Euler-ovog i Reddy-Bickford-ovog modela.

Na slici 6.3.1 prikazane su oblasti statičke stabilnosti sistema sa jednim, tri i pet elastično povezanih nosača različitih tipova. Razlika u aproksimacijama rešenja između korišćenih tipova modela je mala, ali je važno istaći da je sistem najstabilniji u slučaju jednog nosača na elastičnoj podlozi.



Slika 6.3.1 Uticaj broja nosača na kritičnu silu izvijanja  $F_b^{kr}/P$   
 u funkciji krutosti elastičnih slojeva Winkler-ovog tipa

Prilog 6.1.1 – Program eliminacije promenljive  $\psi_m$  u jednačinama (6.1.10-6.1.15)

In[13] =

$$\begin{aligned} \text{prva} = & \text{b h } \rho \text{ w1}^{(0,2)} [z, t] - \text{b G h } \psi^{(1,0)} [z, t] + \frac{1}{6} \text{b G h}^3 \beta \psi^{(1,0)} [z, t] - \frac{1}{80} \text{b G h}^5 \beta^2 \psi^{(1,0)} [z, t] + \\ & \frac{1}{80} \text{b h}^5 \alpha \rho \psi^{(1,2)} [z, t] - \frac{1}{448} \text{b h}^7 \alpha^2 \rho \psi^{(1,2)} [z, t] + \text{F w1}^{(2,0)} [z, t] - \text{b G h w1}^{(2,0)} [z, t] + \\ & \frac{1}{6} \text{b G h}^3 \beta \text{w1}^{(2,0)} [z, t] - \frac{1}{80} \text{b G h}^5 \beta^2 \text{w1}^{(2,0)} [z, t] - \frac{1}{448} \text{b h}^7 \alpha^2 \rho \text{w1}^{(2,2)} [z, t] - \\ & \frac{1}{80} \text{b E0 h}^5 \alpha \psi^{(3,0)} [z, t] + \frac{1}{448} \text{b E0 h}^7 \alpha^2 \psi^{(3,0)} [z, t] + \frac{1}{448} \text{b E0 h}^7 \alpha^2 \text{w1}^{(4,0)} [z, t]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{druga} = & \text{b G h } \psi [z, t] - \frac{1}{6} \text{b G h}^3 \beta \psi [z, t] + \frac{1}{80} \text{b G h}^5 \beta^2 \psi [z, t] + \frac{1}{12} \text{b h}^3 \rho \psi^{(0,2)} [z, t] - \\ & \frac{1}{40} \text{b h}^5 \alpha \rho \psi^{(0,2)} [z, t] + \frac{1}{448} \text{b h}^7 \alpha^2 \rho \psi^{(0,2)} [z, t] + \text{b G h w1}^{(1,0)} [z, t] - \\ & \frac{1}{6} \text{b G h}^3 \beta \text{w1}^{(1,0)} [z, t] + \frac{1}{80} \text{b G h}^5 \beta^2 \text{w1}^{(1,0)} [z, t] - \frac{1}{80} \text{b h}^5 \alpha \rho \text{w1}^{(1,2)} [z, t] + \\ & \frac{1}{448} \text{b h}^7 \alpha^2 \rho \text{w1}^{(1,2)} [z, t] - \frac{1}{12} \text{b E0 h}^3 \psi^{(2,0)} [z, t] + \frac{1}{40} \text{b E0 h}^5 \alpha \psi^{(2,0)} [z, t] - \\ & \frac{1}{448} \text{b E0 h}^7 \alpha^2 \psi^{(2,0)} [z, t] + \frac{1}{80} \text{b E0 h}^5 \alpha \text{w1}^{(3,0)} [z, t] - \frac{1}{448} \text{b E0 h}^7 \alpha^2 \text{w1}^{(3,0)} [z, t]; \end{aligned}$$

`diffpolys = {prva, druga};`

`vars = {z, t};`

`d2 = Join[diffpolys, Flatten[Outer[D, diffpolys, vars]]];`

`d3 = Union[Join[d2, Flatten[Outer[D, d2, vars]]]];`

`d4 = Union[Join[d3, Flatten[Outer[D, d3, vars]]]];`

`pvars = Cases[Variables[d4], Derivative[_][w1][_]];`

`qvars = Cases[Variables[d4], Derivative[_][psi][_]];`

`Timing[gb = GroebnerBasis[d4, pvars, qvars,`

`MonomialOrder -> EliminationOrder, CoefficientDomain -> RationalFunctions];`

`gb][[1]]`

Out[22]= {0.795605, Null}

$$\begin{aligned} \text{Out[23]} = & (-100800 \text{b G h } \rho + 16800 \text{b G h}^3 \beta \rho - 1260 \text{b G h}^5 \beta^2 \rho) \text{w1}^{(0,2)} [z, t] + \\ & (-8400 \text{b h}^3 \rho^2 + 2520 \text{b h}^5 \alpha \rho^2 - 225 \text{b h}^7 \alpha^2 \rho^2) \text{w1}^{(0,4)} [z, t] + \\ & (-100800 \text{F G} + 16800 \text{F G h}^2 \beta - 1260 \text{F G h}^4 \beta^2) \text{w1}^{(2,0)} [z, t] + \\ & (-8400 \text{F h}^2 \rho + 8400 \text{b E0 h}^3 \rho + 8400 \text{b G h}^3 \rho + 2520 \text{F h}^4 \alpha \rho - 2520 \text{b E0 h}^5 \alpha \rho - \\ & 225 \text{F h}^6 \alpha^2 \rho + 225 \text{b E0 h}^7 \alpha^2 \rho - 1400 \text{b G h}^5 \beta \rho + 105 \text{b G h}^7 \beta^2 \rho) \text{w1}^{(2,2)} [z, t] + \\ & 3 \text{b h}^3 \alpha^2 \rho^2 \text{w1}^{(2,4)} [z, t] + (8400 \text{E0 F h}^2 - 8400 \text{b E0 G h}^3 - 2520 \text{E0 F h}^4 \alpha + \\ & 225 \text{E0 F h}^6 \alpha^2 + 1400 \text{b E0 G h}^5 \beta - 105 \text{b E0 G h}^7 \beta^2) \text{w1}^{(4,0)} [z, t] - \\ & 6 \text{b E0 h}^9 \alpha^2 \rho \text{w1}^{(4,2)} [z, t] + 3 \text{b E0}^2 \text{h}^9 \alpha^2 \text{w1}^{(6,0)} [z, t] \end{aligned}$$

## Prilog 6.1.2 - Koeficijenti u parcijalnim diferencijalnim jednačinama (6.1.17-6.1.19)

$$\begin{aligned}
C(1)_{w1}^{0,2} & \frac{h_1 \rho_1 \{28b_1 G_1 [\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240] + h_1 [3\alpha h_1^2 (5\alpha h_1^2 - 56) + 560] (K_0 + K_1)\}}{28G_1 [\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]} \\
C(1)_{w2}^{0,2} & \frac{h_1^2 K_1 \rho_1 [3\alpha h_1^2 (56 - 5\alpha h_1^2) - 560]}{28G_1 [\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]} \\
C(1)_{w1}^{0,4} & \frac{b_1 h_1^3 \rho_1^2 [3\alpha h_1^2 (5\alpha h_1^2 - 56) + 560]}{28G_1 [\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]} \\
C(1)_{w1}^{2,0} & F + \frac{E_1 h_1^2 [3\alpha h_1^2 (56 - 5\alpha h_1^2) - 560] (K_0 + K_1)}{28G_1 [\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]} \\
C(1)_{w2}^{2,0} & \frac{E_1 h_1^2 K_1 [3\alpha h_1^2 (5\alpha h_1^2 - 56) + 560]}{28G_1 [\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]} \\
C(1)_{w1}^{2,2} & \frac{h_1^2 \rho_1 \{3F [3\alpha h_1^2 (5\alpha h_1^2 - 56) + 560] + b_1 h_1^3 [9\alpha E_1 (56 - 5\alpha h_1^2) + 7\beta G_1 (40 - 3\beta h_1^2)] - 1680b_1 h_1 (E_1 + G_1)\}}{84G_1 [\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]} \\
C(1)_{w1}^{2,4} & - \frac{\alpha^2 b_1 h_1^9 \rho_1^2}{140G_1 [\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]} \\
C(1)_{w1}^{3,0} & \frac{1}{84} E_1 h_1^2 \{7b_1 h_1 - \frac{3F [3\alpha h_1^2 (5\alpha h_1^2 - 56) + 560]}{G_1 [\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]}\} \\
C(1)_{w1}^{3,2} & \frac{\alpha^2 b_1 E_1 h_1^9 \rho_1}{70G_1 [\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]} \\
C(1)_{w1}^{5,0} & - \frac{\alpha^2 b_1 E_1^2 h_1^9}{140G_1 [\beta h_1^2 (3\beta h_1^2 - 40) + 240]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(i)_{wi}^{0,2} & \frac{h_i \rho_i \{28b_i G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240] + h_i [3\alpha h_i^2 (5\alpha h_i^2 - 56) + 560] (K_i + K_{i-1})\}}{28G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]} \\
C(i)_{wi-1}^{0,2} & \frac{h_i^2 K_{i-1} \rho_i [3\alpha h_i^2 (56 - 5\alpha h_i^2) - 560]}{28G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]} \\
C(i)_{wi+1}^{0,2} & \frac{h_i^2 K_i \rho_i [3\alpha h_i^2 (56 - 5\alpha h_i^2) - 560]}{28G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]} \\
C(i)_{wi}^{0,4} & \frac{b_i h_i^3 \rho_i^2 [3\alpha h_i^2 (5\alpha h_i^2 - 56) + 560]}{28G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]} \\
C(i)_{wi}^{2,0} & F + \frac{E_i h_i^2 [3\alpha h_i^2 (56 - 5\alpha h_i^2) - 560] (K_i + K_{i-1})}{28G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]} \\
C(i)_{wi-1}^{2,0} & \frac{E_i h_i^2 K_{i-1} [3\alpha h_i^2 (5\alpha h_i^2 - 56) + 560]}{28G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]} \\
C(i)_{wi+1}^{2,0} & \frac{E_i h_i^2 K_i [3\alpha h_i^2 (5\alpha h_i^2 - 56) + 560]}{28G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]} \\
C(i)_{wi}^{2,2} & \frac{h_i^2 \rho_i \{3F [3\alpha h_i^2 (5\alpha h_i^2 - 56) + 560] + b_i h_i^3 [9\alpha E_i (56 - 5\alpha h_i^2) + 7\beta G_i (40 - 3\beta h_i^2)] - 1680b_i h_i (E_i + G_i)\}}{84G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]} \\
C(i)_{wi}^{2,4} & - \frac{\alpha^2 b_i h_i^9 \rho_i^2}{140G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]} \\
C(i)_{wi}^{4,0} & \frac{1}{84} E_i h_i^2 \{7b_i h_i - \frac{3F [3\alpha h_i^2 (5\alpha h_i^2 - 56) + 560]}{G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]}\} \\
C(i)_{wi}^{4,2} & \frac{\alpha^2 b_i E_i h_i^9 \rho_i}{70G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]} \\
C(i)_{wi}^{6,0} & - \frac{\alpha^2 b_i E_i^2 h_i^9}{140G_i [\beta h_i^2 (3\beta h_i^2 - 40) + 240]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(m)_w^{0,2} & \frac{h_m \rho_m \{28b_m G_m [\beta h_m^2 (3\beta h_m^2 - 40) + 240] + h_m K_0 [3\alpha h_m^2 (5\alpha h_m^2 - 56) + 560]\}}{28G_m [\beta h_m^2 (3\beta h_m^2 - 40) + 240]} \\
C(m)_{wm-1}^{0,2} & \frac{h_m^2 K_0 \rho_m [3\alpha h_m^2 (56 - 5\alpha h_m^2) - 560]}{28G_m [\beta h_m^2 (3\beta h_m^2 - 40) + 240]} \\
C(m)_w^{0,4} & \frac{b_m h_m^3 \rho_m^2 [3\alpha h_m^2 (5\alpha h_m^2 - 56) + 560]}{28G_m [\beta h_m^2 (3\beta h_m^2 - 40) + 240]} \\
C(m)_w^{2,0} & F + \frac{E_m h_m^2 K_0 [3\alpha h_m^2 (56 - 5\alpha h_m^2) - 560]}{28G_m [\beta h_m^2 (3\beta h_m^2 - 40) + 240]} \\
C(m)_{wm-1}^{2,0} & \frac{E_m h_m^2 K_0 [3\alpha h_m^2 (5\alpha h_m^2 - 56) + 560]}{28G_m [\beta h_m^2 (3\beta h_m^2 - 40) + 240]} \\
C(m)_w^{2,2} & \frac{h_m^2 \rho_m \{3F [3\alpha h_m^2 (5\alpha h_m^2 - 56) + 560] + b_m h_m^3 [9\alpha E_m (56 - 5\alpha h_m^2) + 7\beta G_m (40 - 3\beta h_m^2)] - 1680b_m h_m (E_m + G_m)\}}{84G_m [\beta h_m^2 (3\beta h_m^2 - 40) + 240]} \\
C(m)_w^{2,4} & - \frac{\alpha^2 b_m h_m^9 \rho_m^2}{140G_m [\beta h_m^2 (3\beta h_m^2 - 40) + 240]} \\
C(m)_w^{4,0} & \frac{1}{84} E_m h_m^2 \left\{ 7b_m h_m - \frac{3F [3\alpha h_m^2 (5\alpha h_m^2 - 56) + 560]}{G_m (\beta h_m^2 (3\beta h_m^2 - 40) + 240)} \right\} \\
C(m)_w^{4,2} & \frac{\alpha^2 b_m E_m h_m^9 \rho_m}{70G_m [\beta h_m^2 (3\beta h_m^2 - 40) + 240]} \\
C(m)_w^{6,0} & - \frac{\alpha^2 b_m E_m^2 h_m^9}{140G_m [\beta h_m^2 (3\beta h_m^2 - 40) + 240]}
\end{aligned}$$

# 7

## Geometrijski nelinearne oscilacije nosača Timoshenko-vog tipa sa oštećenjem primenom nove $p$ - verzije metode konačnih elemenata

### 7.1 Razvoj nove $p$ – verzije metode konačnih elemenata

Razvoj moćnih računara i numeričkih metoda omogućio je istraživačima da preciznije ispituju nelinearne matematičke modele. Konkretno, metoda konačnih elemenata se intenzivno primenjuje za pravljenje nelinearne diskretizovane strukture nosača i ploča. Metoda konačnih elemenata se zasniva na određivanju približnog rešenja korišćenjem odgovarajućih polinomskih funkcija, ref. Petyt [32]. U opštem slučaju, struktura je podeljena na manje elemente i lokalni oblik funkcija je definisan preko njih. Funkcije oblika predstavljaju jednostavni polinomi sa fiksnim, nižim stepenom  $p$  a tačnost aproksimacije rešenja se povećava povećanjem broja elemenata u modelu. Povećanje broja elemenata dovodi do smanjenja njihove širine  $h$ . Drugi način za poboljšanje preciznosti aproksimacije je da mreža ostane ista a da se poveća broj oblika funkcija što podrazumeva povećanje njihovog stepena  $p$  i po tome je nazvana  $p$  – verzija metode konačnih elemenata ref. Ribeiro [32]. Razlog za njeno korišćenje jesu glavne prednosti u odnosu na klasične metode a to su:

- a) ne zahteva promenu formirane mreže kako bi se povećala tačnost rešenja,
- b) matrica nelinearnih članova nižeg reda polinoma može biti iskorišćena u izvodima matrica nelinearnih članova poboljšane nove aproksimacije,
- c) matrice linearnih članova u  $p$  – verziji metode su dijagonalne i lakše su za primenu nego matrice već uslovljenih članova klasične metode konačnih elemenata,

d) spajanje elemenata različitog reda polinoma je jednostavno i omogućava lako uvođenje dodatnih stepeni slobode gde je to neophodno,

e) jednostavne strukture mogu biti modelirane samo jednim elementom što otklanja probleme kontinuiteta internih elemenata kao i njihovu potrebu povezivanja,

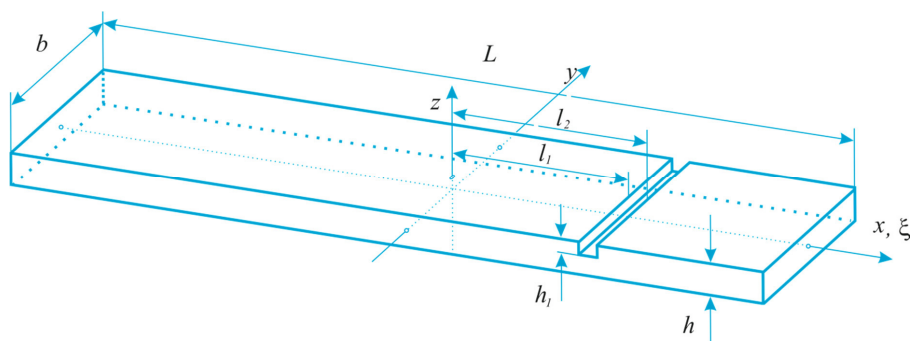
f) mogućnost izbora broja i vrste funkcija oblika za različita pomeranja omogućava bolje sagledavanje interakcije među pojedinačnim komponentnim oscilacijama (komponentno longitudinalne oscilacije, komponentno transverzne oscilacije i komponentne oscilacije zaokretanja poprečnih preseka),

g)  $p$  – verzijom metode konačnih elemenata moguće je dobiti veću tačnost rešenja bez povećanja broja elemenata u strukturi već samo povećanjem reda polinoma koji čine osnovni oblik oscilovanja.

Kao posledica ovih osobina,  $p$  – verzija metode konačnih elemenata zahteva manje vremena da se struktura modelira i ispita nego u slučaju klasičnih metoda konačnih elemenata. Ovo je velika prednost u nelinearnoj analizi gde iterativni proces računanja zahteva određivanje matrice nelinearnih članova pri svakom koraku. Brža konvergencija tačnom rešenju korišćenjem  $p$  – verzije metode konačnih elemenata potvrđena je u statičkoj linearnoj analizi nosača, ploča i ljuski u radu, Szabó i Sahrman[34], nelinearnoj geometrijskoj statičkoj analizi kompozitnih ploča, Han i koautori [35], kao i u analizi slobodnih i prinudnih oscilacija različitih struktura [36-43].

Nova  $p$  – verzija metode konačnih elemenata nastala je kao posledica istraživanja geometrijski nelinearnih oscilacija nosača sa oštećenjem. Klasičnom  $p$  - verzijom konačnih elemenata nije bilo moguće prepoznati dovoljno mali diskontinuitet u poprečnom preseku nosača bez obzira na povećanje stepena polinoma funkcija oblika pomeranja u okviru konačnog elementa. Da bi se ovo omogućilo, bilo je neophodno uvesti nove funkcije oblika pomeranja koje zadovoljavaju i granične uslove i zavise od lokacije i veličine oštećenja na nosaču. Na slici 7.1.1 prikazan je model homogenog, elastičnog i izotropnog nosača dužine  $L$ , širine  $b$  i debljine  $h$ . Prisutno oštećenje predstavlja usek pravougaonog poprečnog preseka duž čitave širine nosača dubine  $h_1$ . Veličina oštećenja u pravcu lokalne koordinatne ose  $\xi$  definisana je početkom  $l_1$  i završetkom  $l_2$  diskontinuiteta poprečnog preseka.





**Slika 7.1.1** Model oštećenog nosača sa lokalnim i globalnim koordinatnim sistemom

Za razliku od klasičnih metoda konačnih elemenata, u  $p$  - verziji broj elemenata koji se koristi zavisi pre svega od geometrije strukture koja se analizira. Tako su naprimera ramovskog nosačaref. Ribeiro [44] korišćena tri elementa. Povećanje tačnosti rezultata klasičnim metodama konačnih elemenata na mestima promenjene geometrije strukture se postiže povećanjem broja elemenata u njenoj okolini. Međutim, bez obzira nanavedene osnovne karakteristike klasične i  $p$  - verzije metode konačnih elemenata, prikazaće se da je bez obzira na promenu geometrije nosača usled oštećenja, moguće dobiti tačan model uvođenjem novih funkcija oblika pomeranja ref. Stojanović i koautori [22]. Odnos između lokalnih i globalnih koordinata je dat izrazom

$$\xi = \frac{2x}{L}. \quad (7.1.1)$$

Ako funkcije pomeranja u longitudinalnom i transverzalnom pravcu koje odgovaraju globalnom koordinatnom sistemu označimo sa  $u(x, z, t)$  i  $w(x, z, t)$  onda će važiti sledeće relacije

$$u(x, z, t) = u^0(x, t) + z\theta^0(x, t), \quad w(x, z, t) = w^0(x, t), \quad (7.1.2)$$

gde  $u^0(x, t)$  i  $w^0(x, t)$  predstavljaju redom longitudinalana i transverzalna pomeranja tačke  $(x, z = 0, t)$  nosača koja pripada osi  $x$ . Rotacija poprečnog preseka  $\theta^0(x, t)$  je definisana promenom ugla između ose  $z$  i poprečnog preseka nosača u ravni  $xz$  oko  $y$  ose. Uzimajući u obzir

von Kármán-ov model geometrijske nelinearnosti, deformacije u pravcu  $x$  ose  $\varepsilon_x(x, t)$  i deformacije usled poprečnog smicanja  $\gamma_{xz}(x, t)$  su oblika

$$\varepsilon_x(x, z, t) = \frac{\partial u^0(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w^0(x, t)}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \theta^0(x, t)}{\partial x}, \quad (7.1.3)$$

$$\gamma_{xz}(x, t) = \frac{\partial w^0(x, t)}{\partial x} + \theta^0(x, t). \quad (7.1.4)$$

U svakom elementu, vektor  $\mathbf{d}_0(\xi, t)$ , koga čine komponentna pomeranja može biti izražen kao kombinacija hijerarhijskih funkcija oblika

$$\mathbf{d}_0(\xi, t) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{q}(t) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} u^0(\xi, t) \\ w^0(\xi, t) \\ \theta^0(\xi, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^u(\xi)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^w(\xi)^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^\theta(\xi)^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u(t) \\ \mathbf{q}_w(t) \\ \mathbf{q}_\theta(t) \end{Bmatrix} \quad (7.1.5)$$

gde su  $\mathbf{q}_u(t)$  - vektor longitudinalnih generalisanih pomeranja,  $\mathbf{q}_w(t)$  - vektor transverzalnih generalisanih pomeranja i  $\mathbf{q}_\theta(t)$  - vektor generalisanih rotacija poprečnog preseka oko  $y$  ose.  $\mathbf{N}(\xi)$  je matrica funkcija oblika sastavljena od vektora redova longitudinalnih, transverzalnih i rotacionih funkcija oblika. Povećanje broja ovih funkcija oblika u modelu povećava tačnost u diskretizaciji modela. Ukupan broj funkcija oblika implementiranih u model jednog elementa ujedno predstavlja i broj stepeni slobode sistema.

Uvođenjem dve nove funkcije u  $p$  - verziju metode konačnih elemenata dobijamo novi sistem funkcija oblika koje će omogućiti da se prepozna očekivana povećana fleksibilnost nosača u uskom domenu gde se nalazi oštećenje. Dve nove funkcije oblika uvedene u model označene su sa "d" u indeksu i zavise od lokacije sredine oštećenja  $L_1 = \frac{l_1+l_2}{2}$ , slika 7.1.1. Sada su redovi vektora longitudinalnih, transverzalnih i rotacionih pomeranja poprečnih preseka nosača sa diskontinuitetom oblika

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^u(\xi)^T &= [f_1^d(L, L_1, \xi) f_2^d(L, L_1, \xi) \mid f_1(\xi) f_2(\xi) f_3(\xi) \dots f_{pu}(\xi)], \\ \mathbf{N}^w(\xi)^T &= [f_1^d(L, L_1, \xi) f_2^d(L, L_1, \xi) \mid f_1(\xi) f_2(\xi) f_3(\xi) \dots f_{pw}(\xi)], \\ \mathbf{N}^\theta(\xi)^T &= [f_1^d(L, L_1, \xi) f_2^d(L, L_1, \xi) \mid f_1(\xi) f_2(\xi) f_3(\xi) \dots f_{p\theta}(\xi)], \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

gde su  $pu$ ,  $pw$  i  $p\theta$  broj longitudinalnih, transverzalnih i rotacionih funkcija oblika kojima su dodate i funkcije  $f_1^d(L, L_1, \xi)$  i  $f_2^d(L, L_1, \xi)$ . Prve četiri funkcije oblika su

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3, & f_2(\xi) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3, \\ f_3(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3, & f_4(\xi) &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^2 + \frac{1}{4}\xi^3. \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

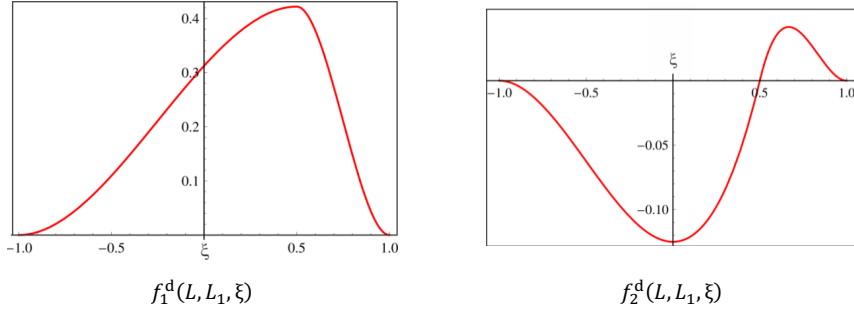
Preostale funkcije oblika se dobijaju po formuli, ref. Petyt [32] str. 298

$$f_r(\xi) = \sum_{n=0}^{\text{INT}(\frac{r}{2})} \frac{(-1)^n (2r - 2n - 7)!!}{2^n n! (r - 2n - 1)!} \xi^{r-2n-1}, r > 4, \quad (7.1.8)$$

gde su  $r!! = r(r-2) \dots (2 \text{ or } 1)$ ,  $0!! = (-1)!! = 1$  i  $\text{INT}(r/2)$  ceo deo od  $r/2$ . Funkcije oblika  $f_r(\xi)$  zadovoljavaju granične uslove obostrano uklještenih nosača (funkcije i njihovi prvi izvodi su na granicama elementa nule). Funkcije  $f_1 - f_4$  polinoma trećeg stepena, poznate kao Hermite-ovi polinomi [33], obično se uključuju kada treba promeniti granične uslove kod ostalih slučajeva oslanjanja nosača i primenjuju se za konstrukciju i sastavljanje funkcija. Nove implementirane funkcije  $f_1^d(L, L_1, \xi)$  i  $f_2^d(L, L_1, \xi)$  u analitičkom obliku su

$$f_1^d(L, L_1, \xi) = \begin{cases} \frac{(1 + \xi)^2 [6L_1 + L(1 - 2\xi)]}{8L}, & -1 \leq \xi \leq \frac{2L_1}{L}, \\ \frac{(L + 2L_1)^3 (\xi - 1)^2 (L - 6L_1 + 2L\xi)}{8L(L - 2L_1)^3}, & 2L_1/L \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad (7.1.9)$$

$$f_2^d(L, L_1, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + \xi)^2 \left( \xi - \frac{2L_1}{L} \right), & -1 \leq \xi \leq 2L_1/L \\ \frac{(L + 2L_1)^2 (\xi - 1)^2 \left( \xi - \frac{2L_1}{L} \right)}{4(L - 2L_1)^2}, & 2L_1/L \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (7.1.10)$$



Slika 7.1.2 Funkcije oblika pomeranja

Za primer bezdimenzionane lokacije oštećenja, date u odnosu globalnog prema lokalnom koordinatnom sistemu ( $L = \frac{2x}{\xi}$ ),  $L_1 = 0.5$ , uvedene nove funkcije osnovnih oblika pomeranja prikazane su na slici 7.1.2. Funkcija  $f_1^d(L, L_1, \xi)$  je uvedena tako da ima maksimum na mestu gde je sredina oštećenja, dok je funkcija  $f_2^d(L, L_1, \xi)$  uvedena tako da je njena nula na mestu sredine oštećenja. Uključivanjem ove dve funkcije u element, uslov kontinuiteta i dalje važi.

Pretpostavljamo da je materijal nosača elastičan i izotropan tako da važi Hooke-ov zakon

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & kG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (7.1.11)$$

gde je  $\mathbf{D}$  matrica elastičnih koeficijenata,  $\boldsymbol{\sigma}$  i  $\boldsymbol{\varepsilon}$  su vektori napona i deformacije,  $E$  - Young-ov modul elastičnosti,  $G$  modul klizanja dat kao  $E/[2(1 + \nu)]$ , gde je  $\nu$  Poisson-ov koeficijent. U numeričkom eksperimentu korišćen je smicajni faktor koji je dao najbolje slaganje sa eksperimentalnim rezultatima, ref. [24] u obliku  $k=(5+5\nu)/(6+5\nu)$ . Longitudinalna deformacija se može napisati u obliku

$$\varepsilon_x = [1 \quad z] \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^p \\ \varepsilon_0^b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_L^p \\ 0 \end{Bmatrix} \right). \quad (7.1.12)$$

U jednačini (7.1.12) deformacija ima linearni i nelinearni deo, gde  $\varepsilon_0^p$  i  $z\varepsilon_0^b$  predstavljaju respektivno linearnu longitudinalnu i linearnu deformaciju usled savijanja, dok  $\varepsilon_L^p$  predstavlja geometrijsku nelinearnu longitudinalnu deformaciju. U prikazanom modelu one mogu biti napisane u obliku

$$\varepsilon_0^p = \mathbf{N}_{,\xi}^u \mathbf{q}_u \frac{2}{L}, \quad \varepsilon_0^b = \mathbf{N}_{,\xi}^\theta \mathbf{q}_\theta \frac{2}{L}, \quad \varepsilon_L^p = \frac{2}{L^2} \mathbf{q}_w \mathbf{T} \mathbf{N}_{,\xi}^w \mathbf{N}_{,\xi}^{wT} \mathbf{q}_w, \quad \gamma_{xz} = \left[ \frac{2}{L} \mathbf{N}_{,\xi}^{wT} \quad \mathbf{N}^{\theta T} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix}, \quad (7.1.13)$$

gde je sa " $\xi$ " označen prvi izvod promenljive po  $\xi$ . Integracijom normalnog i smičućeg napona kao i momenta normalnog napona u izrazima (7.1.11) dobijamo redom sile u normalnom i tangencijalnom pravcu kao i moment u obliku

$$T_x = \begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, & x \in \left[-\frac{L}{2}, l_1\right] \cup \left[l_2, \frac{L}{2}\right] \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \sigma_x dz, & x \in [l_1, l_2] \end{cases}, \quad (7.1.14)$$

$$Q_x = \begin{cases} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz, & x \in \left[-\frac{L}{2}, l_1\right] \cup \left[l_2, \frac{L}{2}\right] \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \tau_{xz} dz, & x \in [l_1, l_2] \end{cases}, \quad (7.1.15)$$

$$M_x = \begin{cases} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, & x \in \left[-\frac{L}{2}, l_1\right] \cup \left[l_2, \frac{L}{2}\right] \\ \int_{-h/2}^{\frac{h}{2}-h_1} \sigma_x z dz, & x \in [l_1, l_2] \end{cases}. \quad (7.1.16)$$

Zamenom veličina označenih u izrazima (7.1.13) u jednačine (7.1.14-7.1.16) određujemo relaciju između sila i momenta sa jedne strane i deformacija sa druge strane

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} T \\ M \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^p \\ \varepsilon_0^b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_L^p \\ 0 \end{Bmatrix} \right), \\ Q_x &= \begin{cases} \frac{Eh\lambda}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}, & x \in \left[-\frac{L}{2}, l_1\right] \cup \left[l_2, \frac{L}{2}\right] \\ \frac{E(h-h_1)\lambda}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}, & x \in [l_1, l_2] \end{cases}, \\ A, B, D &= \int_z (1, z, z^2) E dz, \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

gde su:  $A$  koeficijent istezanja,  $B$  koeficijent sprezanja između deformacije savijanja i istezanja (javlja se kao posledica oštećenja na nosaču, u ostalim slučajevim aklaasičnih nosača je nula) i  $D$  koeficijent savijanja koji imaju sledeće oblike

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{cases} Eh, & x \in \left[-\frac{L}{2}, l_1\right] \cup \left[l_2, \frac{L}{2}\right], \\ E(h - h_1), & x \in [l_1, l_2] \end{cases} \\
 B &= \begin{cases} 0, & x \in \left[-\frac{L}{2}, l_1\right] \cup \left[l_2, \frac{L}{2}\right], \\ \frac{Eh_1(h_1 - h)}{2}, & x \in [l_1, l_2] \end{cases}, \\
 D &= \begin{cases} \frac{Eh^3}{12}, & x \in \left[-\frac{L}{2}, l_1\right] \cup \left[l_2, \frac{L}{2}\right], \\ \frac{E[h^3 + (h - 2h_1)^3]}{24}, & x \in [l_1, l_2] \end{cases},
 \end{aligned} \tag{7.1.18}$$

Možemo primetiti da je  $B$  različito od nule na delu nosača gde postoji promena oblika u vidu oštećenja kao geometrijska promena na nosaču. Jednačine kretanja izvodimo na osnovu principa virtuelnog rada za koji važi

$$\delta W_{in} + \delta W_V + \delta W_{ex} = 0, \tag{7.1.19}$$

gde su  $\delta W_{in}, \delta W_V$  i  $\delta W_{ex}$  virtuelni radovi inercijalnih, unutrašnjih i spoljašnjih sila na virtuelnom pomeranju  $\delta \mathbf{d}$  u obliku

$$\delta \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{w} \\ \delta \theta \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \delta \mathbf{q}. \tag{7.1.20}$$

Virtuelni rad unutrašnjih sila je

$$\begin{aligned}
 \delta W_V &= - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \\
 &= -b \int_L^z \left( \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_0^p \\ \delta \varepsilon_0^b \end{Bmatrix}^T + \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_L^p \\ 0 \end{Bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^p \\ \varepsilon_L^p \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_0^b \\ 0 \end{Bmatrix} dx - b \int_{-\frac{L}{2}}^{l_1} \delta \gamma_{xz} \frac{Eh\lambda}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} dx - \\
 &\quad - b \int_{l_1}^{l_2} \delta \gamma_{xz} \frac{E(h-h_1)\lambda}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} dx - \int_{l_2}^{L/2} \delta \gamma_{xz} \frac{Eh\lambda}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} dx = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q},
 \end{aligned} \tag{7.1.21}$$

gde je  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  vektor virtuelne deformacije. Virtuelni rad inercijalnih sila je

$$\begin{aligned}
\delta W_{in} &= - \int_V \rho \delta \mathbf{d}^T \ddot{\mathbf{d}} dV = \\
&= -b \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-L/2}^{L_1} \rho (\delta u \ddot{u} + \delta w \ddot{w}) dx dz - b \int_{-h/2}^{(h/2)-h_1} \int_{L_1}^{L_2} \rho (\delta u \ddot{u} + \delta w \ddot{w}) dx dz - \\
&\quad -b \int_{-h/2}^{h/2} \int_{L_2}^{L/2} \rho (\delta u \ddot{u} + \delta w \ddot{w}) dx dz = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}},
\end{aligned} \tag{7.1.22}$$

gde je  $\ddot{\mathbf{d}}$  komponentno ubrzanje tačke nosača. Virtualni rad spoljašnjih sila je

$$\begin{aligned}
\delta W_{ex} &= \int_L \left( [P_u^j(t) \delta(x-x_j) + P_u^d(x,t)] \delta u(x,t) + [P_w^j(t) \delta(x-x_j) + P_w^d(x,t)] \delta w(x,t) \right) dx + \\
&\quad + \int_L \left[ M^j(t) \delta(x-x_j) + M^d(x,t) \right] \delta \theta(x,t) dx = \left[ \delta \mathbf{q}_u^T \quad \delta \mathbf{q}_w^T \quad \delta \mathbf{q}_\theta^T \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u^E(t) \\ \mathbf{F}_w^E(t) \\ \mathbf{M}^E(t) \end{Bmatrix}.
\end{aligned} \tag{7.1.23}$$

Ako zamenimo jednačine (7.1.21-7.1.23) u jednačinu (7.1.19) dobijamo nelinearni sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina prinudnih oscilacija oštećenog nosača Timoshenko-vog tipa u sledećem obliku

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \mathbf{M}^l & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u \\ \ddot{\mathbf{q}}_w \\ \ddot{\mathbf{q}}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{lr} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{lr^T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u \\ \ddot{\mathbf{q}}_w \\ \ddot{\mathbf{q}}_\theta \end{Bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\ell^l & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\ell^{\gamma 11} & \mathbf{K}_\ell^{\gamma 12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\ell^{\gamma 21} & \mathbf{K}_\ell^b + \mathbf{K}_\ell^{\gamma 22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_\ell^{lr} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_\ell^{lr^T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n_\ell}^2(\mathbf{q}_w) & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{n_\ell}^3(\mathbf{q}_w) & \mathbf{K}_{n_\ell}^4(\mathbf{q}_w) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n_\ell}^{br}(\mathbf{q}_w) \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n_\ell}^{br^T}(\mathbf{q}_w) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u^E \\ \mathbf{F}_w^E \\ \mathbf{M}^E \end{Bmatrix},
\end{aligned} \tag{7.1.24}$$

gde je  $\{\mathbf{F}_u^E(t), \mathbf{F}_w^E(t), \mathbf{M}^E(t)\}$  vektor generalisanih spoljašnjih sila. Matrice  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}_\ell$  čine članovi koji su konstante, članovi matrica  $\mathbf{K}_{n_\ell}^2$ ,  $\mathbf{K}_{n_\ell}^3$  i  $\mathbf{K}_{n_\ell}^{br}$  zavise linearno od rešenja dok članovi matrice  $\mathbf{K}_{n_\ell}^4$  zavise kvadratno od rešenja (odnosno u opštem obliku predstavljaju članove kubnih nelinearnosti). Oznake u indeksima  $l, b, r$  i  $\gamma$  predstavljaju uticaje longitudinalnog pomeranja, savijanja, komponentnog rotacionog pomeranja poprečnih preseka nosača i smicanja redom. Oznaka  $lr$  u indeksu predstavlja sprezanje između longitudinalnog i rotacionog pomeranja koje se javlja u matricama masa i krutosti kao posledica oštećenja na nosaču. Oznaka  $br$  predstavlja sprezanje

između transverzalnog pomeranja i rotacionog pomeranja poprečnih preseka koje se javlja i u matrici nelinearnih članova. Ako uvedemo Rayleigh-jev tip prigušenja definisan koeficijentima  $\alpha$  i  $\beta$ , dobijamo

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}^c)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \alpha(\mathbf{K}_\ell + \mathbf{K}_\ell^c)\dot{\mathbf{q}}(t) + \beta(\mathbf{M} + \mathbf{M}^c)\dot{\mathbf{q}}(t) + \{\mathbf{K}_\ell + \mathbf{K}_\ell^c + \mathbf{K}_{n\ell}[\mathbf{q}(t)] + \mathbf{K}_{n\ell}^c[\mathbf{q}(t)]\}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t). \quad (7.1.25)$$

Matrice  $\mathbf{M}^c$ ,  $\mathbf{K}_\ell^c$  i  $\mathbf{K}_{n\ell}^c(\mathbf{q}(t))$  predstavljaju sprezanja u kretanju između nezavisnih pomeranja koja se javljaju zbog diskontinuiteta u poprečnom preseku. Matrice masa i krutosti linearnih i nelinearnih članova date su u Prilogu 7.1.1.

## 7.2 Osnovni oblici komponentnih longitudinalnih i transverzalnih oscilacija i osnovni oblici komponentih oscilacija poprečnih preseka nosača

Model  $p$ -verzije metode konačnih elemenata primenjen je na obostrano uklješteni nosač karakteristika datih u radovima [17], [45], [46]. U zavisnosti od dubine oštećenja u numeričkom eksperimentu su razmatrani sledeći slučajevi

---

Slučaj 1.1. Ref. [13]

$$L = 1330 \text{ mm}, b = 25.3 \text{ mm}, h = 25.3 \text{ mm}, E = 203.91 \text{ GNm}^{-2}, \rho = 7800 \text{ kgm}^{-3}.$$

Pozicija oštećenja:  $l_1 = 222.5 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 247.5 \text{ mm}$ ,  $w_d = 1.87\%$ .

Dubina oštećenja: a) 4 mm b) 8 mm c) 12 mm.

---

Slučaj 2.1 Ref. [35],[36]

$$L = 406 \text{ mm}, b = 20 \text{ mm}, h = 2 \text{ mm}, E = 7.172 \text{ GNm}^{-2}, \rho = 2800 \text{ kg m}^{-3}.$$

2.1.1. Pozicija oštećenja:  $l_1 = 68 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 75.5 \text{ mm}$ ,  $w_d = 1.7\%$ .

Dubina oštećenja: a) 0.3 mm b) 0.6 mm c) 0.9 mm.

2.1.2. Pozicija oštećenja:  $l_1 = -5 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 5 \text{ mm}$ ,  $w_d = 2.4\%$ .

Dubina oštećenja: a) 0.9 mm

---



---

Slučaj 2.2. Ref [35]

$$L = 406 \text{ mm}, b = 20 \text{ mm}, h = 20.3 \text{ mm}, E = 7.172 \text{ GNm}^{-2}, \rho = 2800 \text{ kg m}^{-3}.$$

$$\text{Pozicija oštećenja: } l_1 = 68 \text{ mm}, l_2 = 75.5 \text{ mm}, w_d = 1.7\%.$$

Dubina oštećenja: a) 5mm b) 9 mm

---

U numeričkom eksperimentu  $w_d$  predstavlja relativnu dužinu oštećenja u procentima. Nosači baš ovih geometrijskih i materijalnih karakteristika su izabrani kako bi se izvršila verifikacija dobijenih rezultata sa već postojećim eksperimentalnim u literaturi. Eksperimentalni rezultati dobijeni u radu Sinha [17] su upoređeni sa dobijenim rezultatima za slučaj lokacije oštećenja na istom mestu. Eksperimentalni rezultati dobijeni na neoštećenom nosaču, ref. Wolf [47], numerički su upoređeni sa rezultatima istog nosača u nelinearnom režimu oscilovanja ref. Ribeiro [45]. Poznate numeričke i eksperimentalne rezultate verifikovali smo novom  $p$ -verzijom metode konačnih elemenata na istom modelu nosača stavljajući da je dubina oštećenja u modelu nula. U radu [45] je analiziran neoštećeni nosač veće debljine ( $L/h=20$ ) čije su karakteristike iskorišćene u razmatranju oscilacija debljih nosača sa oštećenjem. Za komparaciju modela u pogledu stepena slobode oscilovanja iskorišćen je programski paket Ansys [48].

Rezultati u tabelama 7.2.1, 7.2.2 i 7.2.3 pokazuju transverzalne prirodne frekvencije nosača za različite dubine oštećenja. U komparaciji rezultata sa programskim paketom Ansys korišćena je  $h$ -verzija elementa "BEAM189" koji je baziran na Timoshenko-voj teoriji i ima tri tačke vezivanja sa po šest stepeni sloboda oscilovanja na svakoj od njih. Rezultati prikazani u tabelama Ansys programskog paketa dobijeni su korišćenjem na modelu od 300 elemenata. Ovako gusta mreža je iskorišćena kako bi se verifikovala  $p$ -verzija metode konačnih elemenata, iako se konvergencija postiže sa korišćenjem samo trideset elemenata. U tabelama su prikazani i rezultati dobijeni tradicionalnom  $p$  - verzijom metode konačnih elemenata koje koriste funkcije oblika prikazane u radu [49] bez implementiranih funkcija  $f_1^d$  i  $f_2^d$ .

Tabela 7.2.1

Prirodne frekvencije [Hz] obostrano uklještenog nosača za slučaj 1.1

Mod	Nosač bez oštećenja				4mm dubina oštećenja			
	ANSYS BEAM189	Klasična <i>p</i> -FEM (15 sf)	Nova <i>p</i> -FEM (15 sf)	Experimental.[17]	ANSYS BEAM189	Klasična <i>p</i> -FEM (25 sf)	Nova <i>p</i> - FEM (25 sf)	Eksperimental.[17]
1	74.979	74.986	74.986	75.313	74.923	75.012	74.924	74.688
2	206.01	206.05	206.05	207.188	204.52	205.37	204.50	205.625
3	402.04	402.21	402.21	406.250	401.65	402.00	401.79	405.625
4	660.88	661.35	661.35	667.813	658.66	660.12	658.94	666.250

Mod	8mm dubina oštećenja				12mm dubina oštećenja			
	ANSYS BEAM189	Klasična <i>p</i> -FEM (26 sf)	Nova <i>p</i> -FEM (26sf)	Eksperimental. [17]	ANSYS BEAM189	Klasična <i>p</i> -FEM (28 sf)	Nova <i>p</i> -FEM (28 sf)	Eksperimental. [17]
1	74.666	75.094	74.648	74.063	73.973	75.230	73.957	72.813
2	201.21	205.258	201.00	202.500	194.50	205.679	194.30	197.188
3	400.80	401.977	400.90	404.688	399.11	402.084	399.29	403.125
4	654.02	659.781	654.043	662.813	644.90	660.167	644.79	655.938

Tabela 7.2.2

Prirodne frekvencije [Hz] obostrano uklještenog nosača za slučaj 2.1

Mod	Nosač bez oštećenja			0.3 mm dubina oštećenja 2.1.1.		
	ANSYS BEAM189	Klasična <i>p</i> -FEM (15 sf)	Nova <i>p</i> -FEM (15sf)	ANSYS BEAM189	Klasična <i>p</i> -FEM (28 sf)	Nova <i>p</i> -FEM (28 sf)
1	63.111	63.111	63.111	63.070	63.131	63.045
2	173.93	173.93	173.93	172.85	173.39	172.53
3	340.87	340.87	340.87	340.62	340.73	340.51
4	563.25	563.28	563.28	561.71	562.37	561.22

Mod	0.6 mm dubina oštećenja 2.1.1.			0.9 mm dubina oštećenja 2.1.1.		
	ANSYS BEAM189	Klasična <i>p</i> -FEM (28sf)	Nova <i>p</i> -FEM (28sf)	ANSYS BEAM189	Klasična <i>p</i> -FEM (28sf)	Nova <i>p</i> -FEM (28sf)
1	62.893	63.197	62.769	62.419	63.306	62.387
2	170.51	173.31	169.22	165.77	173.66	165.27
3	340.03	340.71	339.67	338.86	340.81	338.72
4	558.33	562.14	556.64	551.76	562.49	551.39

0.9 mm dubina oštećenja 2.1.2.			
Mod	ANSYS BEAM189	Klasična <i>p</i> -FEM (23 sf)	Nova <i>p</i> -FEM (23 sf)
1	59.832	63.255	60.300
2	173.88	173.93	173.92
3	318.24	339.40	321.00
4	562.61	563.26	563.25

Tabela 7.2.3

Prirodne frekvencije [Hz] obostrano uklještenog nosača za slučaj 2.2

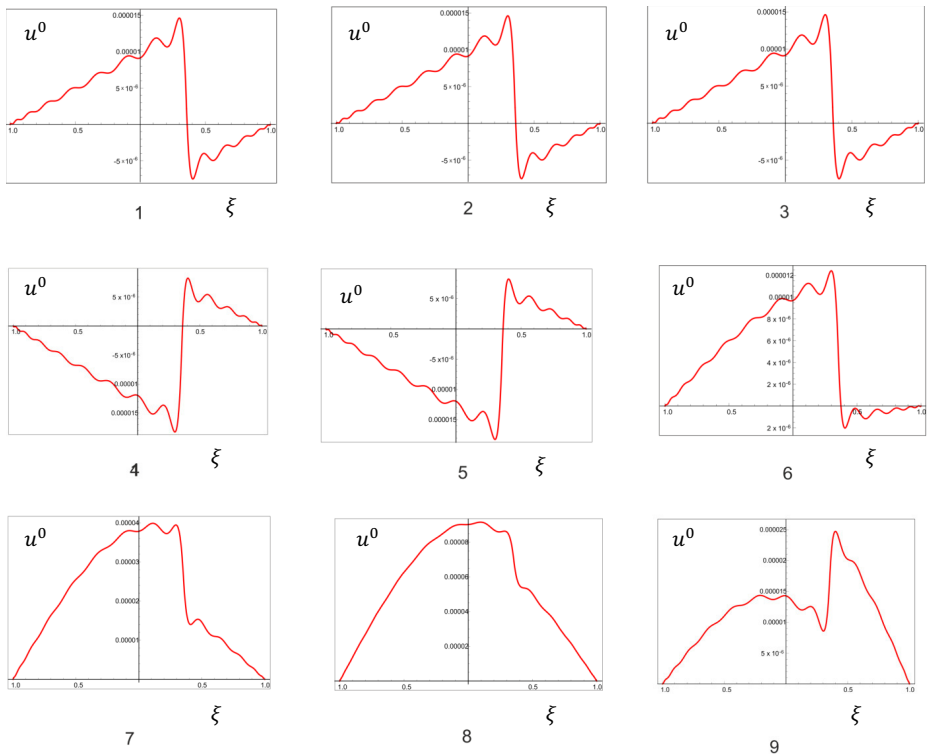
Mod	Nosač bez oštećenja			9 mmdubina oštećenja		
	ANSYS BEAM189	Klasična <i>p</i> -FEM (15 sf)	Nova <i>p</i> -FEM (15sf)	ANSYS BEAM189	Klasična <i>p</i> -FEM (28sf)	Nova <i>p</i> -FEM (28sf)
1	629.74	629.74	629.74	623.36	631.97	623.15
2	1698.7	1698.7	1698.7	1671.3	1698.6	1620.5
3	3240.1	3240.1	3240.1	3222.9	3245.0	3227.2
4	5121.8	5121.8	5121.8	5103.6	5190.2	5047.8

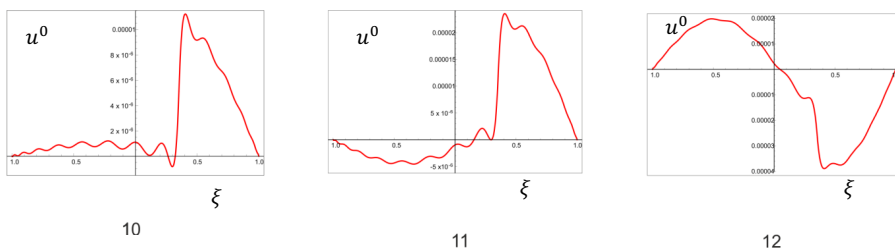
Rezultati u tabelama 7.2.1-7.2.3 pokazuju da nova *p*-verzija metode konačnih elemenata dovodi do tačnih rezultata i to sa manjim brojem korišćenih stepeni sloboda oscilovanja u poređenju sa *h*-verzijom komercijalnog softvera Ansys. Slaganje sa eksperimentalnim rezultatima potvrđuje ispravnost i vrednost nove metode. Treba napomenuti da tradicionalna *p*-verzija metode konačnih elemenata ne omogućava dobijanje dobrih rezultata kod nosača sa oštećenjem jer se njome dobijaju veće frekvencije od frekvencija neoštećenog nosača.

Promena u prirodnim frekvencijama ne daje kompletnu sliku o uticaju oštećenja na oscilacije strukture. Prirodna frekvencija može biti ista u slučajevima različite lokacije oštećenja pa je neophodno da se utvrdi i promena drugih karakteristika koje opisuju oscilovanje. Jedna od ovih karakteristika je promena u nezavisnim komponentama osnovnih oblika oscilovanja. Kod neoštećenih obostrano uklještenih nosača isključivo su moguća dva komponentna oblika oscilovanja, transversalna pomeranja srednjih linija nosača i rotacija poprečnih preseka. U slučaju modela sa oštećenjem javlja se antisimetrija u geometriji nosača što dovodi do sprezanja između transversalne rotacije i longitudinalnog pomeranja ( $B$  je različito od nule – druga jednačina 7.1.18) i manifestuje se promenama u submatricama masa i krutosti linearnih članova. Ovakav model nosača sa oštećenjem nam omogućava da odredimo longitudinalne komponente osnovnih oblika

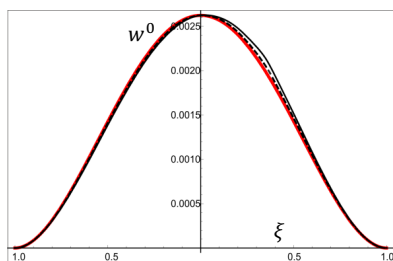
oscilovanja. Na slici 7.2.1 su prikazani osnovni oblici longitudinalnih oscilacija za karakteristične modove slučaja 1.1 c) nosača. Sa dijagrama se može videti da nagle promene u pravcima longitudinalnih oscilacija nastaju na geometrijskom mestu oštećenja. U prvom i šestom modu se javlja maksimalno longitudinalno pomeranje nosača na mestu početka oštećenja sa strane nosača koja je dalje uklještenju. U višim modovima maksimalno longitudinalno pomeranje nosača je na mestu početka oštećenja sa strane nosača koja je bliža uklještenju. Opisana pojava longitudinalnih oscilacija je bitna dinamička karakteristika modela jer se javlja isključivo kao posledica oštećenja na nosaču.

Slika 7.2.1 Longitudinalne komponente osnovnih oblika oscilovanja



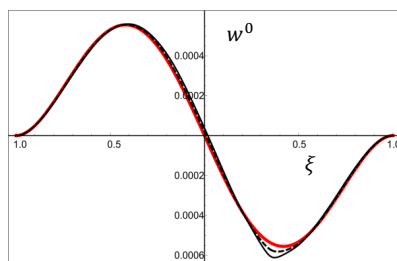


Transverzalne i rotacione komponente osnovnih oblika oscilovanja nosača (slučaj 1.1) prikazane su na dijagramima 7.2.2-7.2.3. Da bi se olakšalo upoređivanje, komponentni oblici oscilovanja su normalizovani tako da amplitude budu jednake u tački pojave prvog lokalnog ekstremuma sa leve strane na neoštećenom nosaču. Komponentnim oblicima oscilovanja sa dijagrama (7.2.2-7.2.3) odgovaraju prirodne frekvencije prikazane u tabeli 7.1.1. Na dijagramima se vidi jasna devijacija u oblicima oscilovanja na mestu lokacije oštećenja koja postaje značajnija u višim modovima.



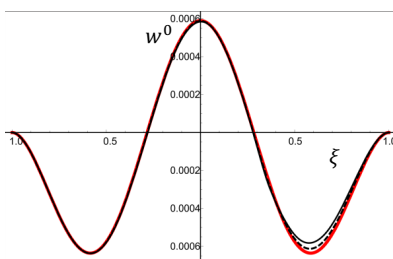
Transverzalna komponenta – mod 1

(a)



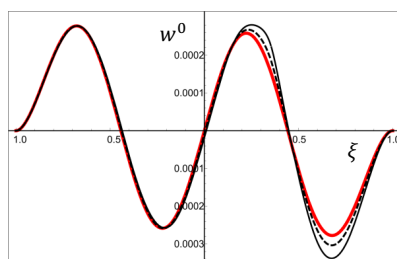
Transverzalna komponenta – mod 2

(b)



Transverzalna komponenta – mod 3

(c)

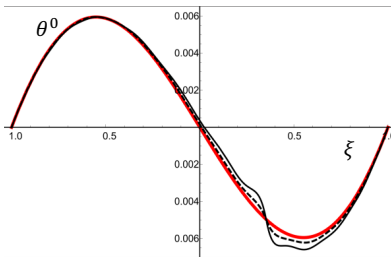


Transverzalna komponenta – mod 4

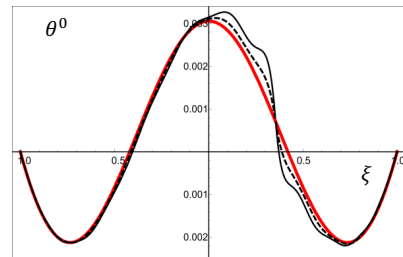
(d)

**Slika 7.2.2** Transverzalne komponente osnovnih oblika oscilovanja:  
Slučaj 1.1 — neoštećeni nosač; ---- 8mm oštećenje; — 12mm oštećenje

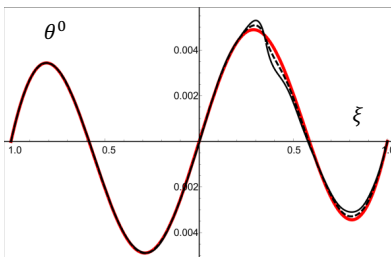
Međusobno sprezanje između longitudinalnih oscilacija sarotacionim komponentama oscilacija poprečnih preseka dovodi do novih oblika u oscilovanju kao što je to prikazano na slici 7.2.3. Najpre možemo primetiti da se sa povećanjem dubine oštećenja povećava i amplituda transverzalnog oscilovanja u zoni gde je oštećenje prisutno. Interesantno je primetiti da je ugao rotacije poprečnog preseka kod komponentogrotacionog oscilovanja poprečnih preseka na mestu sredine oštećenja isti bez obzira na dubinu oštećenja, ali da se u zoni od sredine oštećenja do njihovih krajeva ugao rotacije poprečnih preseka povećava a zatim teži vrednostima uglova poprečnih preseka neoštećenog nosača. Ova pojava je karakteristična i javlja se bez obzira na mod u kome se oscilovanje vrši. Karakteristiku promene ugla poprečnog preseka nije lako eksperimentalno potvrditi. Ukoliko bi to bilo moguće, onda bi se za detekciju oštećenja na nosaču mogli koristiti osnovni oblici komponentnih rotacionih oscilacija poprečnih preseka nosača sa velikom tačnošću.



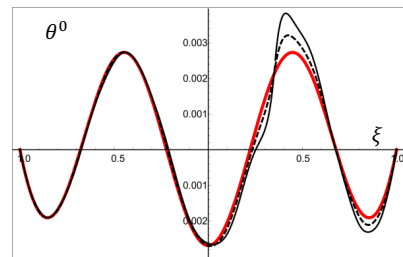
Rotaciona komponenta poprečnog preseka -  
mod 1  
(a)



Rotaciona komponenta poprečnog preseka -  
mod 2  
(b)



Rotaciona komponenta poprečnog preseka -  
mod 3  
(c)

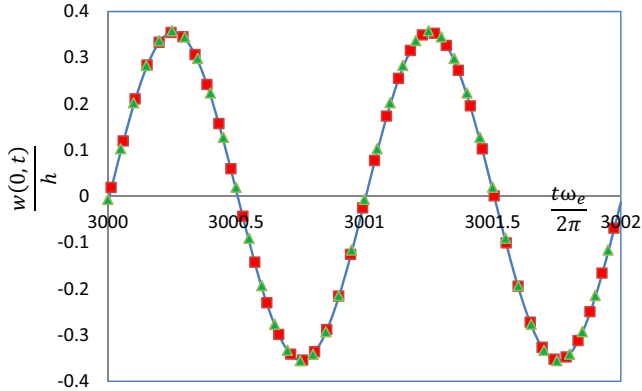


Rotaciona komponenta poprečnog preseka -  
mod 4  
(d)

**Slika 7.2.3** Rotacione komponente poprečnih preseka nosača osnovnih oblika oscilovanja:  
Slučaj 1.1 — neoštećeni nosač; ---- 8mm oštećenje; — 12mm oštećenje

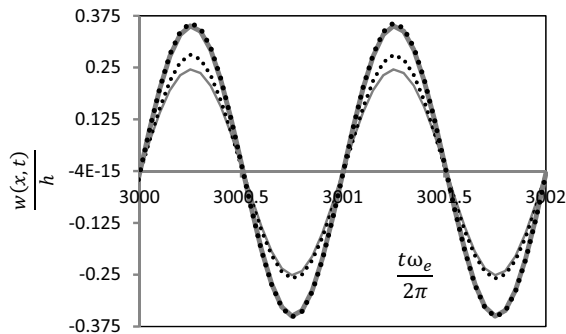
### 7.3 Geometrijski nelinearne oscilacije oštećenog nosača Timoshenko-vog tipa u vremenskom domenu

Značaj razmatranja prinudnih geometrijski nelinearnih oscilacija oštećenog nosača može imati primenu u tehničkoj praksi. Pored numeričkih alata za detekciju oštećenja, značajnu ulogu ima dinamičko ponašanje oštećene strukture u vremenskom domenu. Ovo podrazumeva odeđivanje pomeranja srednje linije nosača sa oštećenjem u funkciji od lokacije i dubine oštećenja. Sistem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina 7.1.24 je rešen primenom Newmark metode [32]. U numeričkom eksperimentu transverzalno prinudno dejstvo na nosač je uzetokao harmonijski koncentrisana spoljašnja pobudaoblika  $f(t) = F \cos(\omega_e t)$ , gde su  $\omega_e$  i  $F$  frekvencija i amplituda pobude redom. Nova  $p$  – verzija metode konačnih elemenata je testirana prvo za slučaj 2.1 neoštećenog nosača koji je razmatran eksperimentalno [46] i numerički [45]. Model neoštećenog nosača sa novim implementiranim funkcijama oblika izveden je i testiran u nelinearnom domenu kada je dubina oštećenja jednaka nuli. Na slici 7.3.1 prikazano je transverzalno pomeranje tačke na sredini neoštećenog i nosača sa različitim dubinama oštećenja za slučaj kada je amplitude spoljašnje koncentrisane harmonijske pobude jednaka 0.134 N, a frekvencija  $\omega_e = \omega_{11}$ . Za određivanje amplituda u vremenskom domenu neoštećenog nosača korišćeno je 15 funkcija oblika u novom  $p$  modelu. Na vertikalnoj osi su prikazane vrednosti transverzalnog pomeranja nosača podeljene sa njegovom debljinom  $h$  dok je na horizontalnoj osi prikazana bezdimenziona frekvencija. Amplituda neoštećenog nosača se dobro slažu sa rezultatima dobijenim shooting metodom kao i tradicionalnom  $p$  - verzijom metode konačnih elemenata [45]. Za primer maksimalne amplitude transverzalnog pomeranja srednje tačke neoštećenog nosača računata pri frekvenciji pobude od  $\omega_e = 1.02 \omega_{11}$  dobijena novom  $p$ - verzijom metode konačnih elemenata iznosi 0.425, vrednost koja je veoma bliska eksperimentalnom rezultatu dobijenom pri istim uslovima 0.43 datim u referenci [47].



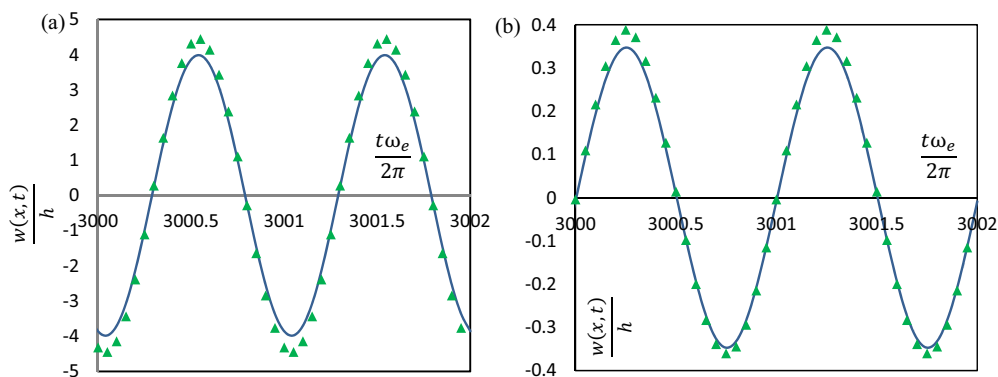
**Slika 7.3.1** Amplitudno-vremenski dijagram,  $x = 0$ , Slučaj - 2.1.1, spoljašnja pobuda - 0.134 N,  $\omega_e = \omega_{11}$ , — neoštećen nosač; ■■ 2.1.1. b); ▲▲ 2.1.1. c).

Na dijagramu 7.3.1 možemo uočiti jedva приметnu razliku u veličini amplitude srednjih linija nosača pri spoljašnjoj pobudi srednje tačke nosača. Međutim u tačkama srednje linije nosača bližim oštećenju dolazi do njegovog većeg uticaja i vidljivih razlika u amplitudama oscilovanja nosača. Slika 7.3.2 nam ilustruje amplitude dve simetrično izabrane tačke nosača u odnosu na vertikalnu osu  $z$ . Možemo zaključiti da se javlja asimetrija u oscilovanju koja je posledica promenjene geometrije nosača usled oštećenja i vidljiva je upoređenjem dobijenih rezultata za tačku bližu sredini oštećenja  $x = 71.75$  mm. Uticaj konstantnog člana na ugib nosača vidi se na dijagramu Fourier-ovog spektra 7.3.5 c) koji spregnut sa nelinearnim članovima povećava efekat kvadratnih nelinearnosti i ne dozvoljava zanemarivanje drugog harmonika pri oscilovanju.



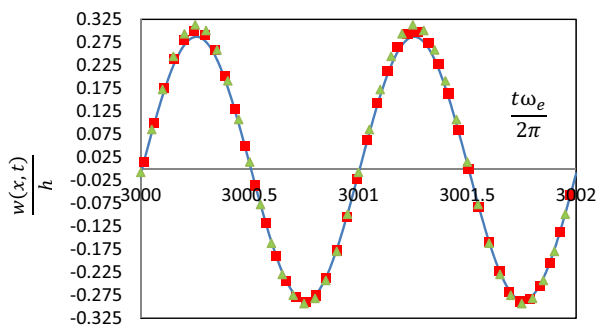
**Slika 7.3.2** Amplitudno-vremenski dijagram simetričnih tačaka nosača slučaj 2.1.1 c), spoljašnja konc. pobudana sredini nosača amplitude 0.134 N,  $\omega_e = \omega_{11}$ ; —  $x = -78$  mm; •••  $x = 78$  mm; —  $x = -15$  mm; ●●●  $x = 15$  mm





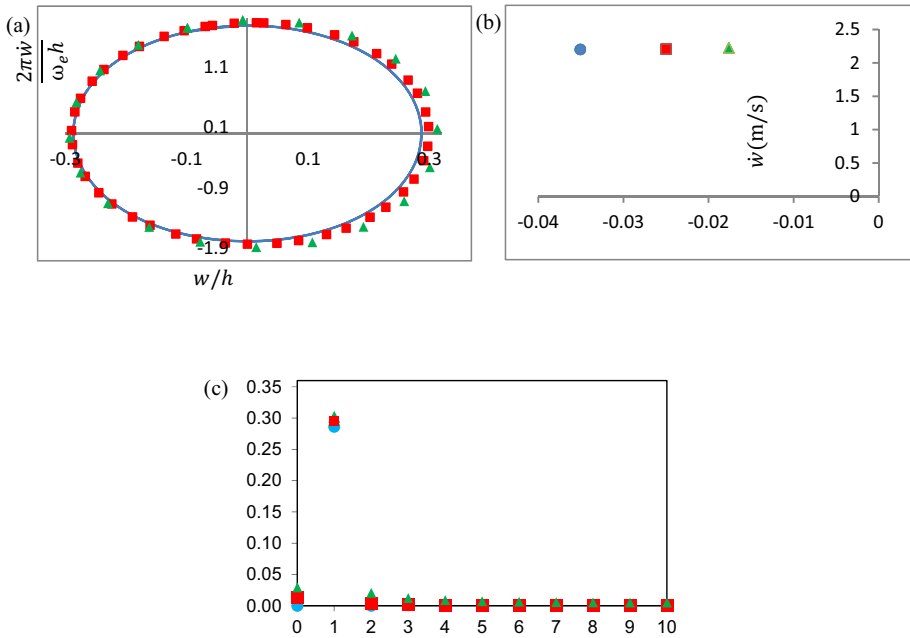
**Slika 7.3.3** Amplitudno-vremenski dijagram  $x = 62.4$  mm za slučaj 2.1.1 c) spoljašnja konc. pobuda  $x = 62.4$  mm,  $0.134$  N,  $\omega_e = \omega_{l1}$ , (a) linearni režim (b) nelinearni režim  
— neoštećen nosač; ▲▲▲ 2.1.1 c)

Na dijagramima 7.3.3 a) i b) prikazane su amplitude pri spoljašnjoj koncentrisanoj pobudi za linearni i nelinearni model redom. Bitno je istaći da se nelinearni uticaj manifestuje pojavom asimetrije u oscilovanju u odnosu na horizontalnu osu  $x$  što se ne može zaključiti na osnovu linearnog modela. Veće amplitude u oscilovanju se tako javljaju na strani na kojoj se nalazi oštećenje (u ovom modelu sa gornje strane nosača). Ovakav fenomen se javlja kao posledica sprezanja između transverzalnih i rotacionih pomeranja poprečnih preseka u matrici krutosti nelinearnih članova (jednačina 7.1.24).



**Slika 7.3.4** Amplitudno-vremenski dijagram  $x = 62.4$  mm, slučaj 2.1.1, amplituda prinudne sile  $0.134$  N,  $\omega_e = \omega_{l1}$ , — neoštećeni nosač; ■ 2.1.1. b); ▲▲▲ 2.1.1. c).

Uticaj geometrijskih nelinearnosti za različite vrednosti dubine oštećenja prikazan je na slikama 7.3.4-7.3.5. Povećanje dubine oštećenja dovodi do povećanja amplituda transverzalnih pomeranja srednje linije nosača što je izraženije u tačkama bližim oštećenju. Na faznom dijagramu 7.3.5 a) može se takode uočiti asimetrija u oscilovanju kao posledica oštećenja i geometrijske nelinearnosti. Tačke na Poincaré-ovom dijagramu 7.3.5 b) pokazuju razliku između oscilacija neoštećenog i nosača sa različitim dubinama oštećenja.

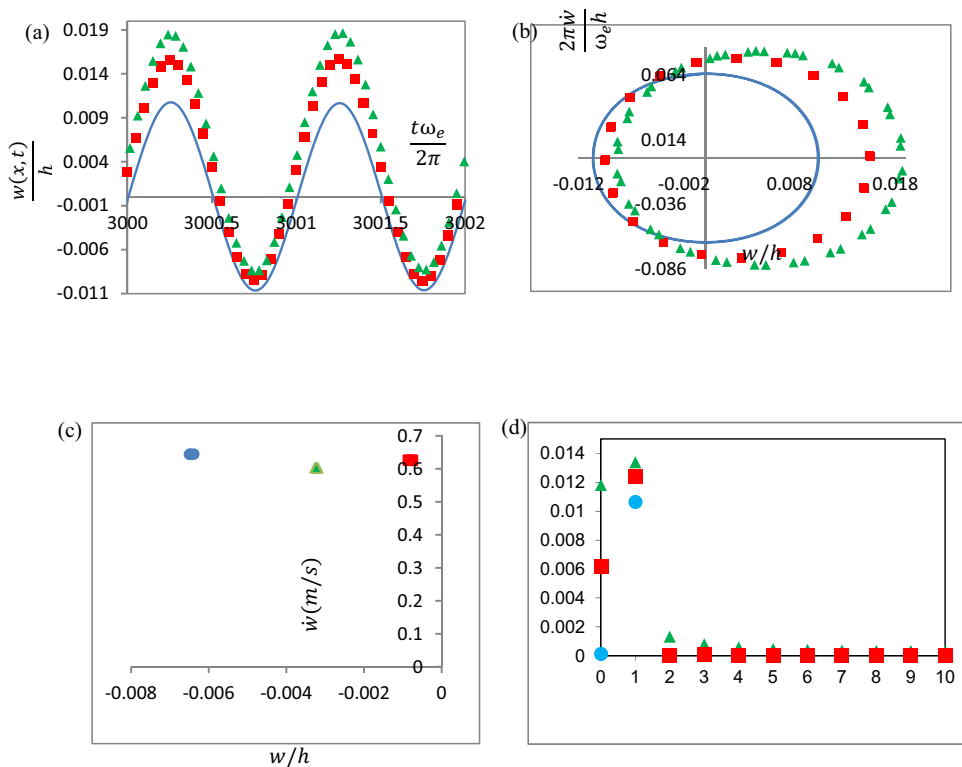


**Slika 7.3.5** Slučaj 2.1.1 amplituda prinudne sile  $x = 0, 0.134\text{N}$ ,  $\omega_e = \omega_{r1}$

(a) Fazni dijagram  $x = 62.4$  mm; (b) Poincaré dijagram  $x = 62.4$  mm; (c) Fourier spektar  $x = 62.4$  mm.

—, ● neoštećeni nosač; ■ 2.1.1. b); ▲▲ 2.1.1. c)

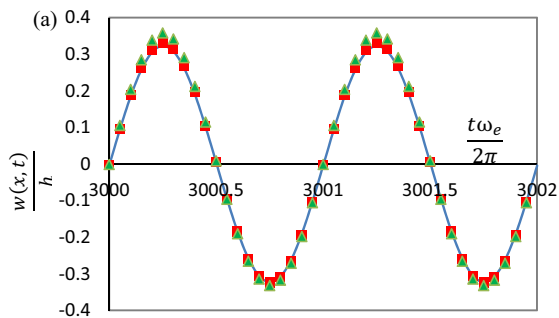
Razlika između amplitude nosača sa oštećenjima različitih dubina povećava se pri višim modovima prinudnog dejstva. Na slici 7.3.6 je prikazan amplitudno-vremenski dijagram pri frekvenciji spoljašnje pobude jednake linearnoj frekvenciji u trećem modu. Možemo primetiti da pri parametrima ovakve prinude nastaje izraženija asimetrija oscilovanja i pomeranje nosača prema strani sa koje je oštećenje locirano. Sa povećanjem dubine oštećenja pri višim modovima oscilovanja povećava se i asimetrija u oscilovanju nosača.

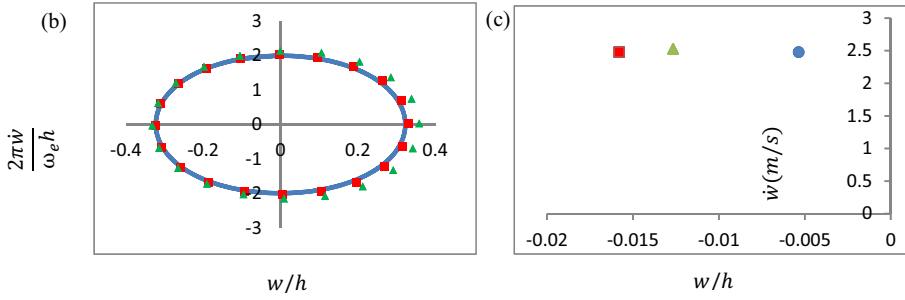


Slika 7.3.6 Slučaj 2.1.1 amplituda prinudne sile 0.4N,  $x = 101.5\text{mm}$ ,  $\omega_e = \omega_{13}$

(a) Amplitudno-vremenski dijagram; (b) Fazni dijagram; (c) Poincaré dijagram; (d) Fourier spektar; ( $x = 62.4\text{ mm}$ ) —, • neoštećeni nosač; ■ 2.1.1. b); ▲ 2.1.1. c)

Nova  $p$ - verzija metode konačnih elemenata može se primeniti i kod razmatranja nosača većih debljina. Rezultati koji su dobijeni za deblji nosač (slika 7.3.7) pokazuju isti kvalitativni učinak geometrijske nelinearnosti i oštećenja kao u slučaju tankih nosača.





Slika 7.3.7 Slučaj 2.2 amplituda prinudne sile 2000N,  $x = 0$ ,  $\omega_e = \omega_{11}$

(a) Amplitudno-vremenski dijagram; (b) Fazni dijagram; (c) Poincaré dijagram; ( $x = 62.4$  mm)  
 —, •, neoštećeni nosač; ■, ▲ 2.2 a); ▲▲ 2.2 b)

#### 7.4 Slobodne geometrijski nelinearne oscilacije oštećenog nosača Timoshenko-vog tipa u frekventnom domenu

Primenom metode harmonijskog balansa i Continuation metode [49] možemo odrediti tačke bifurkacija koje su u nelinearnoj mehanici veoma česta pojava. Ako posmatramo sistem oštećenog nosača na koga ne deluju spoljašnje sile  $\delta W_{ex} = 0$ , primenom principa virtuelnog rada dobijamo

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{M}^l & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_u \\ \ddot{\mathbf{q}}_w \\ \ddot{\mathbf{q}}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{lr} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{lr^T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_u \\ \dot{\mathbf{q}}_w \\ \dot{\mathbf{q}}_\theta \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^l & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\ell}^{Y11} & \mathbf{K}_{\ell}^{Y12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\ell}^{Y21} & \mathbf{K}_{\ell}^b + \mathbf{K}_{\ell}^{Y22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\ell}^{br} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{\ell}^{br^T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} + \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n\ell}^2(\mathbf{q}_w) & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{n\ell}^3(\mathbf{q}_w) & \mathbf{K}_{n\ell}^4(\mathbf{q}_w) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n\ell}^{br}(\mathbf{q}_w) \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n\ell}^{br^T}(\mathbf{q}_w) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (7.4.1)
 \end{aligned}$$

Proizvodi  $[\mathbf{M}^l]\{\ddot{\mathbf{q}}_u\}$ ,  $[\mathbf{M}^{lr}]\{\dot{\mathbf{q}}_\theta\}$  i  $[\mathbf{M}^{lr^T}]\{\dot{\mathbf{q}}_u\}$  predstavljaju male veličine i ne utiču na rešenja u nelinearnom režimu što je pokazano u ref. [44] i mogu se zamenariti

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_w \\ \ddot{\mathbf{q}}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\ell}^{Y11} & \mathbf{K}_{\ell}^{Y12} \\ \mathbf{K}_{\ell}^{Y12^T} & \mathbf{K}_{\ell}^{Y22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{KNL1} & \mathbf{KNL2} \\ \mathbf{KNL3} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_w \\ \mathbf{q}_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (7.4.2)$$

gde su

$$\overline{\mathbf{K}}_{L55} = \mathbf{K}_\ell^b + \mathbf{K}_\ell^{Y22} - \mathbf{K}_\ell^{lrT} \mathbf{K}_\ell^{l-1} \mathbf{K}_\ell^{lr}, \mathbf{K}_{NL1} = \mathbf{K}_{n_\ell}^4(\mathbf{q}_w) - \mathbf{K}_{n_\ell}^3(\mathbf{q}_w) \mathbf{K}_{L11}^{-1} \mathbf{K}_{L13},$$

$$\mathbf{K}_{NL2} = \mathbf{K}_{n_\ell}^{br} - 2\mathbf{K}_{L13}^T \mathbf{K}_\ell^{l-1} \mathbf{K}_\ell^{lr}, \mathbf{K}_{NL3} = \mathbf{K}_{n_\ell}^{brT} - \mathbf{K}_\ell^{lrT} \mathbf{K}_\ell^{l-1} \mathbf{K}_{n_\ell}^2(\mathbf{q}_w).$$

Sada vektor generalisanih koordinata i njihovih drugih izvoda (ubrzanja) možemo predstaviti kao sumu prva tri člana trigonometrijskog reda (prva tri člana su dovoljna na osnovu rezultata Fourier-ovog spektra) u obliku

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_w(t) \\ \mathbf{q}_\theta(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} Q_{w_{c0}} \\ Q_{\theta_{c0}} \end{Bmatrix} + \cos(\omega t) \begin{Bmatrix} Q_{w_{c1}} \\ Q_{\theta_{c1}} \end{Bmatrix} + \cos(2\omega t) \begin{Bmatrix} Q_{w_{c2}} \\ Q_{\theta_{c2}} \end{Bmatrix} + \cos(3\omega t) \begin{Bmatrix} Q_{w_{c3}} \\ Q_{\theta_{c3}} \end{Bmatrix}, \quad (7.4.3)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_w(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_\theta(t) \end{Bmatrix} = -\omega^2 \cos(\omega t) \begin{Bmatrix} Q_{w_{c1}} \\ Q_{\theta_{c1}} \end{Bmatrix} - 4\omega^2 \cos(2\omega t) \begin{Bmatrix} Q_{w_{c2}} \\ Q_{\theta_{c2}} \end{Bmatrix} - 9\omega^2 \cos(3\omega t) \begin{Bmatrix} Q_{w_{c3}} \\ Q_{\theta_{c3}} \end{Bmatrix}. \quad (7.4.4)$$

gde  $\omega$  predstavlja prirodnu frekvenciju sistema. Vektor novih nepoznatih je sada

$$\{Q^{HBM}\} = \begin{Bmatrix} Q_{w_{c0}} \\ Q_{w_{c1}} \\ Q_{w_{c2}} \\ Q_{w_{c3}} \\ Q_{\theta_{c0}} \\ Q_{\theta_{c1}} \\ Q_{\theta_{c2}} \\ Q_{\theta_{c3}} \end{Bmatrix}. \quad (7.4.5)$$

Ako zamenimo izraze (7.4.3) i (7.4.4) u početni sistem jednačina kretanja (7.4.2) dobijamo

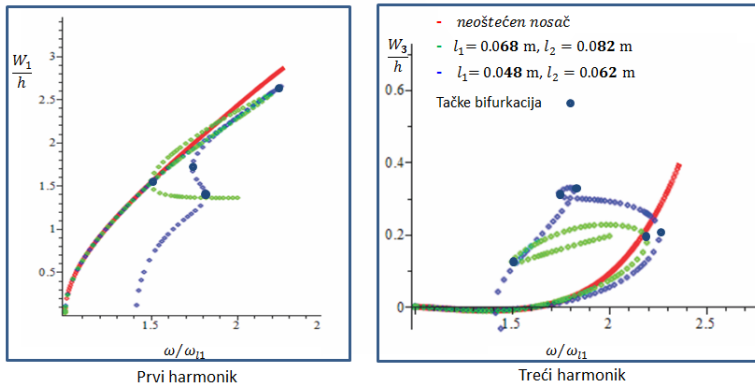
$$(-\omega^2 \mathbf{M}^{HBM} + \mathbf{K}L^{HBM} + \mathbf{K}NL^{HBM})\{Q^{HBM}\} = \{0\}, \quad (7.4.6)$$

gde su

$$\mathbf{M}^{HBM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\mathbf{M}^b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9\mathbf{M}^b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}^r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\mathbf{M}^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9\mathbf{M}^r \end{bmatrix}, \quad (7.4.7)$$

$$\mathbf{KL}^{\text{HBM}} = \begin{bmatrix} (1/2)\mathbf{K}_{\ell}^{Y_{11}} & 0 & 0 & 0 & (1/2)\mathbf{K}_{\ell}^{Y_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\ell}^{Y_{11}} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\ell}^{Y_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{\ell}^{Y_{11}} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\ell}^{Y_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\ell}^{Y_{11}} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\ell}^{Y_{12}} \\ (1/2)\mathbf{K}_{\ell}^{Y_{12}^T} & 0 & 0 & 0 & (1/2)\overline{\mathbf{KL}}_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{\ell}^{Y_{12}^T} & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{KL}}_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{\ell}^{Y_{12}^T} & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{KL}}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{\ell}^{Y_{12}^T} & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathbf{KL}}_{55} \end{bmatrix}. \quad (7.4.8)$$

Amplitudno frekventna karakteristika prvog i trećeg harmonika modela prikazana je na slici 7.4.1.



Slika 7.4.1 Amplitudno-frekventni dijagram za slučaj 2.1.1

Sa slike 7.4.1 možemo zaključiti da interakcija između viših modova pri oscilovanju za različito locirano oštećenje na nosaču dovodi do pojave bifurkacija koje su naznačene na dijagramu, Stojanović i Ribeiro [23]. Njihovo pojavljivanje dovodi nosač u stanje interne rezonancije pa je neophodno znati u kom amplitudno-frekventnom odnosu ona nastupa. Na dijagramu 7.4.1 su prikazana mesta mogućih dvojnih rešenja za prvi i treći harmonik oscilovanja nosača sa oštećenjem.

Na osnovu prikazanih rezultata, Stojanović i koautori [50], zaključujemo da promena geometrije nosača nastala usled pojave oštećenja unosi nova spreznjenja između komponentnih oblika oscilovanja kako u linearnom tako i u nelinearnom režimu oscilovanja. Određene devijacije u komponentnim oblicima oscilovanja mogu biti iskorišćene u formiranju modela za detekciju oštećenja. Rezultati dobijeni na osnovu pojave longitudinalnih oscilacija i asimetrije u transverzalnim oscilacijama predstavljaju novine u dinamici kretanja tačaka nosača sa oštećenjem i mogu biti iskorišćeni pri analizi realnih konstrukcija.

Prilog 7.1.1 - Matrice masa i krutosti linearnih i nelinearnih članova u izrazu (7.1.24)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^l & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{lr} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{lr^T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

gde su

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^l &= \frac{\rho h b l}{2} \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \mathbf{N}^{u1^T} \mathbf{N}^{u1} d\xi + \frac{\rho b l}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \mathbf{N}^{u1^T} \mathbf{N}^{u1} d\xi \\ &\quad + \frac{\rho b l}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \mathbf{N}^{u2^T} \mathbf{N}^{u2} d\xi + \frac{\rho h b l}{2} \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \mathbf{N}^{u2^T} \mathbf{N}^{u2} d\xi, \\ \mathbf{M}^b &= \frac{\rho h b l}{2} \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \mathbf{N}^{w1^T} \mathbf{N}^{w1} d\xi + \frac{\rho b l}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \mathbf{N}^{w1^T} \mathbf{N}^{w1} d\xi dz \\ &\quad + \frac{\rho b l}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \mathbf{N}^{w2^T} \mathbf{N}^{w2} d\xi dz + \frac{\rho h b l}{2} \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \mathbf{N}^{w2^T} \mathbf{N}^{w2} d\xi, \\ \mathbf{M}^r &= \frac{\rho h b l}{2} \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \mathbf{N}^{\theta 1^T} \mathbf{N}^{\theta 1} d\xi + \frac{\rho b l}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \mathbf{N}^{\theta 1^T} \mathbf{N}^{\theta 1} z^2 d\xi dz \\ &\quad + \frac{\rho b l}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \mathbf{N}^{\theta 2^T} \mathbf{N}^{\theta 2} z^2 d\xi dz + \frac{\rho h b l}{2} \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \mathbf{N}^{\theta 2^T} \mathbf{N}^{\theta 2} d\xi, \\ \mathbf{M}^{lr} &= \frac{\rho b l}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \mathbf{N}^{u1^T} \mathbf{N}^{\theta 1} z d\xi dz + \frac{\rho b l}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \mathbf{N}^{u2^T} \mathbf{N}^{\theta 2} z d\xi dz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_\ell + \mathbf{K}_\ell^c + \mathbf{K}_{n\ell}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_{n\ell}^c(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\ell^l & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\ell^{\gamma_{11}} & \mathbf{K}_\ell^{\gamma_{12}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_\ell^{\gamma_{21}} & \mathbf{K}_\ell^b + \mathbf{K}_\ell^{\gamma_{22}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_\ell^{lr} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_\ell^{lr^T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n\ell}^2(\mathbf{q}_w) & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{n\ell}^3(\mathbf{q}_w) & \mathbf{K}_{n\ell}^4(\mathbf{q}_w) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n\ell}^{br}(\mathbf{q}_w) \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{n\ell}^{br^T}(\mathbf{q}_w) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\ell^l &= \frac{2Ehb}{L} \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{u1^T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{u1}}{d\xi} d\xi + \frac{2Eb}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{u1^T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{u1}}{d\xi} z^2 d\xi dz + \\ &+ \frac{2Eb}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{u2^T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{u2}}{d\xi} z^2 d\xi dz + \frac{2Ehb}{L} \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \frac{d\mathbf{N}^{u2^T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{u2}}{d\xi} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\ell}^{Y_{11}} &= \frac{2kGhb}{L} \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{w1T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{w1}}{d\xi} d\xi + \frac{2\lambda Gb}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{w1T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{w1}}{d\xi} d\xi dz + \\
&+ \frac{2kGb}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{w2T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{w2}}{d\xi} d\xi dz + \frac{2\lambda Ghb}{L} \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \frac{d\mathbf{N}^{w2T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{w2}}{d\xi} d\xi \\
\mathbf{K}_{\ell}^{Y_{12}} &= kGhb \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{w1T}}{d\xi} \mathbf{N}^{\theta 1} d\xi + kGb \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{w1T}}{d\xi} \mathbf{N}^{\theta 1} d\xi dz + \\
&kGb \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{w2T}}{d\xi} \mathbf{N}^{\theta 2} d\xi dz + kGhb \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \frac{d\mathbf{N}^{w2T}}{d\xi} \mathbf{N}^{\theta 2} d\xi, \\
\mathbf{K}_{\ell}^{Y_{21}} &= kGhb \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \mathbf{N}^{\theta 1T} \frac{d\mathbf{N}^{w1}}{d\xi} d\xi + kGb \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \mathbf{N}^{\theta 1T} \frac{d\mathbf{N}^{w1}}{d\xi} d\xi dz + \\
&+ kGb \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \mathbf{N}^{\theta 2T} \frac{d\mathbf{N}^{w2}}{d\xi} d\xi dz + kGhb \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \mathbf{N}^{\theta 2T} \frac{d\mathbf{N}^{w2}}{d\xi} d\xi, \\
\mathbf{K}_{\ell}^{Y_{22}} &= \frac{2kGhb}{L} \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \mathbf{N}^{\theta 1T} \mathbf{N}^{\theta 1} d\xi + \frac{2kGb}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \mathbf{N}^{\theta 1T} \mathbf{N}^{\theta 1} d\xi dz \\
&+ \frac{2kGb}{L} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \mathbf{N}^{\theta 2T} \mathbf{N}^{\theta 2} d\xi dz + \frac{2kGhb}{L} \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \mathbf{N}^{\theta 2T} \mathbf{N}^{\theta 2} d\xi, \\
\mathbf{K}_{\ell}^{lr} &= \frac{2Eb}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{u1T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{\theta 1}}{d\xi} z d\xi dz + \frac{2Eb}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{u2T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{\theta 2}}{d\xi} z d\xi dz, \\
\mathbf{K}_{\ell}^b &= \frac{2Ebh^3}{L} \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{\theta 1T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{\theta 1}}{d\xi} d\xi + \frac{2Eb}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{\theta 1T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{\theta 1}}{d\xi} z^2 d\xi dz + \\
&+ \frac{2Eb}{L} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{d\mathbf{N}^{\theta 2T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{\theta 2}}{d\xi} z^2 d\xi dz + \frac{2Ebh^3}{L} \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \frac{d\mathbf{N}^{\theta 2T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{\theta 2}}{d\xi} d\xi, \\
\mathbf{K}_{n\ell}^2(\mathbf{q}_w) &= \frac{2Ebh}{L^2} \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \frac{dw_0}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{u1T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{w1}}{d\xi} d\xi + \frac{2Eb}{L^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{dw_0}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{u1T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{w1}}{d\xi} d\xi dz \\
&+ \frac{2Eb}{L^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{dw_0}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{u2T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{w2}}{d\xi} d\xi dz + \frac{2Ebh}{L^2} \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \frac{dw_0}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{u2T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{w2}}{d\xi} d\xi, \\
\mathbf{K}_{n\ell}^3(\mathbf{q}_w) &= 2\mathbf{K}_{n\ell}^2{}^T(\mathbf{q}_w), \\
\mathbf{K}_{n\ell}^4(\mathbf{q}_w) &= \frac{4Ebh}{L^3} \int_{-1}^{\frac{2l_1}{L}} \left(\frac{dw_0}{d\xi}\right)^2 \frac{d\mathbf{N}^{w1T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{w1}}{d\xi} d\xi + \\
&+ \frac{4Eb}{L^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \left(\frac{dw_0}{d\xi}\right)^2 \frac{d\mathbf{N}^{w1T}}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}^{w1}}{d\xi} d\xi dz +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{4Eb}{L^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \left( \frac{dw_0}{d\xi} \right)^2 \frac{dN^{w2^T}}{d\xi} \frac{dN^{w2}}{d\xi} d\xi dz + \frac{4Ebh}{L^3} \int_{\frac{2l_2}{L}}^1 \left( \frac{dw_0}{d\xi} \right)^2 \frac{dN^{w2^T}}{d\xi} \frac{dN^{w2}}{d\xi} d\xi, \\
\mathbf{K}_{n'}^{br}(\mathbf{q}_w) & = \frac{4Eb}{L^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1}{L}}^{\frac{2l_1+x_c}{L}} \frac{dw_0}{d\xi} \frac{dN^{w1^T}}{d\xi} \frac{dN^{\theta 1}}{d\xi} z d\xi dz + \\
& + \frac{4Eb}{L^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}-h_1} \int_{\frac{2l_1+x_c}{L}}^{\frac{2l_2}{L}} \frac{dw_0}{d\xi} \frac{dN^{w2^T}}{d\xi} \frac{dN^{\theta 2}}{d\xi} z d\xi dz
\end{aligned}$$

## Zaključak

Problemi oscilacija nosača predstavljaju osnovni mehanički sistem prisutan u mašinstvu, građevini i saobraćajnoj industriji. Značajnost određivanja tačnijih rešenja povećava se u realnim uslovima tehničke prakse kada je potrebno analizirati kretanje složenih sistema kao deformabilnih tela sa beskonačnim brojem stepeni sloboda oscilovanja. Egzistencija tačnijih aproksimacija rešenja na pojedinim elementima omogućuje otklanjanje kumulativnog efekta greške u određivanju rešenja složenih dinamičkih sistema. Jedan tip složenih sistema predstavljaju elastično povezani nosači. Uzimanjem u obzir uticaja inercije rotacije i poprečnog smicanja, čiji su efekti poznati u literaturi, u okviru prikazanog istraživanja analiziran je problem određivanja analitičkih rešenja linearnih oscilacija dva i više elastično povezanih nosača većih debljina sa beskonačnim brojem stepeni sloboda oscilovanja. Veliku pažnju istraživača zauzeli su problemi dva elastično povezana nosača iz praktičnih razloga određivanja uslova pod kojima će se sistem ponašati kao dinamički absorber. Akcenat u istraživanju slučajeva više elastično povezanih nosača bačen je na stabilnost i određivanje analitičkih oblika prirodnih frekvencija sistema čiji se broj povećava sa brojem povezanih elemenata što dovodi do povećanja verovatnoće ulaska sistema u rezonantno stanje. Široka zastupljenost ovakvih mehaničkih sistema u građevini, modeli višespratnih zgrada ili povezanih armaturnih mreža, dovela je istraživače u poziciju uzimanja u obzir što većeg broja fizičkih uticaja pri formulaciji matematičkih modela koji će obezbediti bolje aproksimacije rešenja.

Pored dinamičkih sistema koji su po svojoj prirodi složeni, u realnim tehničkim uslovima, građevini, mašinstvu, avio i saobraćajnoj industriji pojavljuju se dinamički problemi elastičnih tela koji ne moraju biti složeni po strukturi, ali čija su kretanja veoma složena (*pod složenim se podrazumeva izražena devijacija u kretanju u odnosu na klasične modele mehaničkih sistema*),

naročito u nelinearnom režimu oscilovanja. Jednu takvu grupu, praktično važnih mehaničkih sistema, predstavljaju nosači sa oštećenjem. U većini slučajeva oscilatorno kretanje ovakvih sistema moguće je odrediti samo eksperimentalno. Razvoj dovoljno dobrih matematičkih modela, numeričkih metoda i softverskih alata, omogućio je kompletniju analizu nosača sa oštećenjem. Time je određivanje tačnijih rešenja oscilovanja sistema olakšano u pogledu uštede vremena pri računanju u nelinearnim uslovima kretanja mehaničkih sistema. U priloženom istraživanju nelinearnog oscilatornog kretanja oštećenih nosača određena su numerička rešenja pod uticajima inercije rotacije i poprečnog smicanja novom razvijenom metodom konačnih elemenata.

U analizi elastično povezanih nosača kao složenih struktura i oštećenih nosača sa devijacijama u kretanju uključeni su uticaji inercije rotacije i poprečnog smicanja koji omogućavaju ispitivanje dinamike nosača većih debljina i određivanje još tačnijih aproksimacija rešenja tankih nosača.

Izloženi rad čini sedam delova koji su zasebno formirani po poglavljima. Prvo poglavlje se odnosi na uvodna razmatranja i pregled dosadašnjih istraživanja u teoriji elastično povezanih i oštećenih struktura. U njemu je prikazan jedan od načina za izvođenje parcijalnih diferencijalnih jednačina koje opisuju kretanje mehaničkih sistema i dat osnovni pregled korišćenih metoda. Poglavlja 2-6 posvećena su analizi linearnih oscilacija elastično povezanih nosača dok je sedmo poglavlje posvećeno geometrijski nelinearnim oscilacijama oštećenih nosača primenom nove metode konačnih elemenata.

Slobodne oscilacije i statička stabilnost dva elastično povezana nosača razmatrana je u poglavlju 2, ref. Stojanović i koautori [12]. Na različitim primerima prikazani su analitički dobijeni rezultati i uticaji pojedinih mehaničkih parametara sistema na prirodne frekvencije i amplitude oscilovanja. Verifikacija dobijenih analitičkih rezultata je prikazana upoređivanjem sa rezultatima modela istih geometrijskih i materijalnih karakteristika dobijenih klasičnom Euler-Bernoulli-jevom teorijom nosača. U poglavlju su date formulacije jednačina slobodnog oscilovanja dva elastično povezana nosača slojem Winkler-ovog tipa sa uticajima inercije rotacije (Rayleigh-jev model) i uticajima inercije rotacije sa poprečnim smicanjem (Timoshenko-v model, Reddy-Bickford-ov model). U poslednjem delu poglavlja razmatrana je statička stabilnost dva elastično povezana nosača različitih tipova i dati su analitički izrazi za vrednosti kritičnih sila. Numerički eksperiment je potvrdio validnost analitički dobijenih rezultata upoređivanjem sa rezultatima modela koji postoje u literaturi. Iz celog poglavlja 2 se može zaključiti da se uticaji

inercije rotacije i poprečnog smicanja moraju uzeti u obzir kod nosača većih debljina jer se greške koje se javljaju njihovim zanemarivanjem povećavaju sa povećanjem moda oscilovanja. Za različite vrednosti parametara mehaničkog sistema prikazane su promene prirodnih frekvencija kao i oblasti stabilnosti pri čemu se može zaključiti da deformaciona teorija višeg reda daje najtačnije aproksimacije rešenja.

U poglavlju 3 su analizirane prinudne oscilacije dva elastično povezana nosača Rayleigh-jevog, Timoshenko-vog i Reddy-Bickford-ovog tipa pod uticajem aksijalnih sila. Prikazani su analitički oblici rešenja za tri tipa spoljašnje pobude – harmonijska proizvoljno kontinuirana pobuda, harmonijska uniformna kontinuirana pobuda i harmonijska koncentrisana pobuda. Analitička rešenja dobijena su pomoću metode modalne analize, ref. Kelly [25]. U poglavlju su izvedene parcijalne diferencijalne jednačine oscilovanja prinudnog sistema za tri tipa modela nosača pod uticajem pritisnih aksijalnih sila. Prikazana su opšta rešenja prinudnih oscilacija sistema dva elastično povezana nosača pod uticajem pritisnih aksijalnih sila sa uzetim u obzir uticajima inercije rotacije i poprečnog smicanja. U poglavlju prinudnih oscilacija za slučaj proizvoljne harmonijske kontinuirane spoljašnje pobude koja deluje na jedan od nosača pod dejstvom pritisnih aksijalnih sila, izvedena su analitička rešenja i dati uslovi nastanka rezonancije i ponašanja sistema kao dinamičkog absorbera. Određena su analitička rešenja prinudnog oscilovanja za slučaj uniformne kontinuirane harmonijske pobude na jednom od nosača pod dejstvom aksijalnih sila. U poglavlju su takođe prikazana i analitička rešenja prinudnog oscilovanja za slučaj dejstva koncentrisane harmonijske pobude na jednom od nosača pod dejstvom pritisnih aksijalnih sila. Na osnovu izloženih rezultata u poglavlju, može se izvesti zaključak da se sa povećanjem pritisnih aksijalnih sila do njihove kritične vrednosti pod dejstvom spoljašnje harmonijske kontinuirane uniformne pobude, povećava odnos između amplituda oscilovanja nosača. Prikazane su razlike u aproksimacijama ovih rešenja u zavisnosti od korišćenog modela tipa nosača. Reddy-Bickford-ov i Timoshenko-v model, Stojanović i Kozić ref. [13], dali su tačnija rešenja u odnosu na Rayleigh-jev, ref. [13] i Euler-ov, Zhang i koautori ref. [5]. Povećanje moda oscilovanja dovodi do povećanih razlika u rešenjima pa je u tim slučajevima obavezno uzimanje u obzir uticaja inercije rotacije i poprečnog smicanja.

U poglavlju 4 je razmatrana statička stabilnost sistema elastično povezana dva i tri nosača kao i slučaj jednog nosača Timoshenko-vog tipa na elastičnoj podlozi. Izvedene su parcijalne diferencijalne jednačine pomeranja tačaka srednjih linija nosača pri deformaciji i

analitički je određena kritična sila izvijanja svakog od sistema ponaosob. Izveden je zaključak da je sistem najstabilniji u slučaju jednog nosača na elastičnoj podlozi.

U poglavljima 5 i 6 analizirane su slobodne oscilacije  $m$  elastično povezanih nosača Timoshenko-vog i Reddy-Bickford-ovog tipa na elastičnoj podlozi pod dejstvom pritisknih aksijalnih sila. Analitička rešenja prirodnih frekvencija i kritičnih sila, ref. Stojanović i koautori [15], određena su trigonometrijskom metodom, ref. Rašković [28] i verifikovana numeričkim putem. Zaključno razmatranje na osnovu numeričkog eksperimenta datim u ovom poglavlju izvodi se na osnovu rezultata u kojima najtačnije aproksimacije daje Reddy-Bickford-ov model nosača čije su vrednosti prirodnih frekvencija najniže. Reddy-Bickford-ovim modelom dobijene su niže vrednosti u odnosu na Timoshenko-v model što može biti od značaja kod nosača velikih poprečnih preseka pri čemu je najispravnije koristiti deformacionu teoriju višeg reda.

U poglavlju 7 su razmatrane prinudne geometrijski nelinearne oscilacije obostrano uklještenog nosača Timoshenko-vog tipa sa oštećenjem. U analizi je korišćena nova razvijena p-verzija metoda konačnih elemenata koja je omogućila rešavanje problema male širine oštećenja. Prednost nove metode je da u poređenju sa tradicionalnom metodom omogućava bolje aproksimacije rešenja sa manjim brojem korišćenih stepeni sloboda u numeričkoj analizi. Pored toga, tradicionalnom metodom nije moguće dobiti dobre aproksimacije rešenja u slučaju veoma malih širina oštećenja bez obzira na povećanje stepena polinoma. Ova prednost je pokazana i u poređenju sa rezultatima komercijalnog softvera Ansys. Nove formirane funkcije oblika koje zavise od lokacije oštećenja mogu se takođe koristiti u nelinearnoj analizi neoštećenih nosača. Model nosača sa otvorenim tipom oštećenja je načinjen geometrijskom promenom na nosaču koja podrazumeva otvoreni tip krika pravougaonog poprečnog preseka. Promenjena geometrija nosača je dovela do otkrivanja sprezanja između longitudinalnih i rotacionih pomeranja poprečnih preseka nosača u matricama masa i krutosti linearnih članova kao i između transverzalnih i rotacionih pomeranja u matricama krutosti nelinearnih članova. U poglavlju 7.1 izvedene su nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine prinudnog oscilovanja nosača Timoshenko-vog tipa sa oštećenjem. Kao posledica oštećenja otkrivena je pojava longitudinalnih oscilacija obostrano uklještenog nosača i njihovi osnovni komponentni oblici su grafički prikazani (u slučaju obostrano uklještenog nosača bez oštećenja, longitudinalnih pomeranja nema). Zaključeno je se pojava longitudinalnih oscilacija može lakše iskoristi za detekciju i lokalizaciju oštećenja nego promene u osnovnim komponentnim oblicima oscilovanja (rotacione oscilacije poprečnih preseka je veoma teško iskoristiti u eksperimentalne svrhe). Najveća longitudinalna pomeranja nosača ne zavise od moda u kome sistem osciluje i javljaju se na mestima graničnim površinama oštećenja. U

zavisnosti od dubine i lokacije oštećenja određeni su i osnovni oblici transversalnih i rotacionih pomeranja nosača. Zaključeno je da se devijacija u obliku oscilovanja u odnosu na neoštećeni nosač povećava sa povećanjem dubine oštećenja i moda oscilovanja. U tabelarnom prikazu prirodnih frekvencija primetno je da su one kod nosača sa oštećenjem nižih vrednosti. Numeričkim eksperimentom je obuhvaćen i eksperimentalno obrađen primer oštećenog nosača gde je prikazano veoma dobro slaganje sa dobijenim rezultatima. U poglavlju 7.2 su *Newmark* metodom dobijena rešenja sistema nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina koje opisuju kretanje sistema u vremenskom domenu. Zaključeno je da se amplitude nosača sa oštećenjem povećavaju sa povećanjem dubine oštećenja. Ova pojava je veća u regionu oštećenja. Pored promene amplituda kao posledice promenjene geometrije, javlja se i pojava asimetrije u oscilovanju koja je naročito izražena pri višim modovima prinudnog oscilovanja. Pri višim modovima prinudnog dejstva dolazi i do pomeranja nosača u vertikalnoj ravni prema strani na kojoj je oštećenje orijentisano. Pri analizi sistema u frekventnom domenu određene su tačke bifurkacija i amplitudno-frekventna karakteristika za prvi i treći harmonik. Na osnovu prikazanih rezultata se može zaključiti da za slučajeve oštećenih nosača dolazi do pojave interne rezonancije na mestima koje zavise od lokacije oštećenja. Izvodimo opšti zaključak da je zbog interakcije frekvencija između viših modova neophodno izvršiti amplitudno-frekventnu analizu nosača i to za svaki pojedinačni slučaj oštećenja.

Formulisani matematički modeli u priloženom istraživanju mogu se iskoristiti za formiranje novih koji bi uzimali u obzir geometrijski tip nelinearnosti i promenu krutosti elastičnih međuslojeva sa komponentim pomeranjima pod prigušenjem. Priloženim istraživanjem je formirana celina za sveobuhvatnu dalju analizu nelinearnog oscilovanja dinamičkih sistema sa oštećenjem sa mogućnošću određivanja uslova ponašanja takvog sistema kao neoštećenog uvrštavanjem elastične podloge promenljive krutosti čije bi istraživanje moglo imati široku primenu u tehničkoj praksi. Određeni uslovi ponašanja nosača većih debljina kao dinamičkog absorbera mogu biti od širokog značaja u primeni mehaničkih sistema podvrgnutim aero-elastičnom podrhtavanju. Priloženo istraživanje može poslužiti i kao osnova za dalju analizu nelinearnih slobodnih i prinudnih oscilacija elastičnih tela u mehanici kontinuuma (formulacija matematičkog modela koji uzima u obzir sprezanje longitudinalnih, transversalnih, torzijskih i rotacionih oscilacija poprečnih preseka elastično povezanih nosača i nosača sa oštećenjem u tri

dimenzije).

Priloženi rezultati otvaraju nova pitanja koja će biti dalji autorov naučno-istraživački rad usmeren na razvoj novih teorija u nelinearnoj mehanici deformabilnih tela, razvoj numeričkih metoda koja će omogućiti njihovo rešavanje i razvoj softvera za određivanje naponsko-deformacionog stanja mehaničkih sistema sa oštećenjem gde je načinjen prvi korak novom metodom konačnih elemenata.

## Literatura

- [1] J. M. Seelig, W.H. Hoppmann II, Impact on an elastically connected double-beam system, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, *Journal of Applied Mechanics* 31 (1964) 621–626.
- [2] Z. Oniszczuk, Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system, *Journal of Sound and Vibration* 232 (2000) 387–403.
- [3] Z. Oniszczuk, Forced transverse vibrations of an elastically connected complex simply supported double-beam system, *Journal of Sound and Vibration* 264 (2003) 273–86.
- [4] Y. Q. Zhang, Y. Lu, S.L. Wang, X. Liu, Vibration and buckling of a double-beam system under compressive axial loading, *Journal of Sound and Vibration* 318 (2008) 341–352.
- [5] Y. Q. Zhang, Y. Lu, G.W. Ma, Effect of compressive axial load on forced transverse vibrations of a double-beam system, *International Journal of Mechanical Sciences* 50 (2008) 299–305.
- [6] H. V. Vu, A.M. Ordonez, B.H. Karnopp, Vibration of a double-beam system, *Journal of Sound and Vibration* 229 (2000) 807–822.
- [7] J. Li, H. Hua, Spectral finite element analysis of elastically connected double-beam systems, *Finite Elements in Analysis and Design* 15 (2007) 1155–1168.
- [8] J. Li, Y. Chen, H. Hua, Exact dynamic stiffness matrix of a Timoshenko three-beam system, *International Journal of Mechanical Sciences* 50 (2008) 1023–1034.
- [9] S. G. Kelly, S. Srinivas, Free vibrations of elastically connected stretched beams, *Journal of Sound and Vibration* 326 (2009) 883–893.
- [10] A. Ariaei, S. Ziaei-Rad, M. Ghayour, Transverse vibration of a multiple-Timoshenko beam system with intermediate elastic connections due to a moving load, *Archive of Applied Mechanics* 81(3) (2011) 263–281.
- [11] Q. Mao, Free vibration analysis of elastically connected multiple-beams by using the Adomian modified decomposition method, *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012) 2532–2542.
- [12] V. Stojanović, P. Kozić, R. Pavlović, and G. Janevski, Effect of rotary inertia and shear on vibration and buckling of a double beam system under compressive axial loading, *Archive of Applied Mechanics*, 81 (2011) 1993–2005.



- [13] V. Stojanović, P. Kozić, Forced transverse vibration of Rayleigh and Timoshenko double-beam system with effect of compressive axial load, *International Journal of Mechanical Sciences* 60 (2013) 59-71.
- [14] V. Stojanović, P. Kozić, and G. Janevski, Buckling instabilities of elastically connected Timoshenko beams on an elastic layer subjected to axial forces, *Journal of Mechanics of Materials and Structures* 7 (2012) 363-374.
- [15] V. Stojanović, P. Kozić, and G. Janevski, Exact closed-form solutions for the natural frequencies and stability of elastically connected multiple beam system using Timoshenko and high-order shear deformation theory, *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013) 563-576.
- [16] S. Christides, A. D. S. Barr, One dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams, *International Journal of Mechanical Sciences* 26 (1984) 639-648.
- [17] J. K. Sinha, M. I. Friswell, S. Edwards, Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data, *Journal of Sound and Vibration* 251 (2002) 13-38.
- [18] A. K. Pandey, M. Biswas and M. M. Samman, Damage detection from change in curvature mode shapes, *Journal of Sound and Vibration* 145 (1991) 321-332.
- [19] S. D. Panteliou, T. G. Chondros, V. C. Argyrakis, A. D. Dimarogonas, Damping factors as an indicator of crack severity, *Journal of Sound and Vibration* 241 (2001) 235-245.
- [20] K. El Bikri, R. Benamar, M. M. Bennouna, Geometrically non-linear free vibrations of clamped-clamped beams with an edge crack, *Computers and Structures* 84 (2006) 485-502.
- [21] U. Andreaus, P. Casini, F. Vestroni, Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation, *International Journal of Non-Linear Mechanics* 42 (2007) 566 – 575.
- [22] V. Stojanović, P. Ribeiro, S. Stoykov, Non-linear vibration of Timoshenko damaged beams by a new p-version finite element method, *Computers and Structures* 120 (2013) 107-119.
- [23] V. Stojanović, P. Ribeiro, Modes of vibration of damaged beams by a new p-version finite element, *The 23rd International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM2012)*, Beijing, China, 19 to 24 August, 2012. ISBN 978-988-16022-3-7.
- [24] T. Kaneko, On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams, *Journal of Physics D* 8 (1975) 1927-1936.
- [25] S. G. Kelly, *Mechanical Vibrations: Theory and Applications*, Cengage Learning, ISBN-13: 978-1-4390-6212-8, USA, (2012).
- [26] M. A De Rosa, Free vibrations of Timoshenko-beams on two-parameter elastic foundation, *Computers and Structures* 57 (1995) 151-156.

- [27] P. S. Timoshenko, M. J. Gere, Theory of Elastic Stability. *2<sup>nd</sup> ed. International student edition* (McGraw-Hill; 1964).
- [28] D. Rašković, *Teorija Oscilacija, (Theory of Oscillations)*, (Naučna knjiga, 1965, in Serbian).
- [29] J. N. Reddy, *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*, John Wiley, New York, (1984).
- [30] J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*, (1997a), CRC Press, Boca Raton, Florida
- [31] C. M. Wang, J. N. Reddy and K. H. Lee, *Shear deformable beams and plates*, Elsevier, (2000) Relationships with Classical Solutions.
- [32] M. Petyt, *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [33] P. Ribeiro, A  $p$ -version, first order shear deformation, finite element for geometrically nonlinear vibration of curved beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004) 2696-2715.
- [34] B. A. Szabó, G. J. Sahrman, Hierarchic plate and shell models based on  $p$ -extension. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, 26, 1855-1881.
- [35] Han, W., Petyt, M. and Hsiao, K.M. An investigation into geometrically nonlinear analysis of rectangular laminated plates using the hierarchical finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1994, 18, 273-288.
- [36] Meirovitch, L., Baruh, H. On the inclusion principle for the hierarchical finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, 19, 281-291.
- [37] Meirovitch, L. *Elements of Vibration Analysis*. Singapore: McGraw-Hill, 1986.
- [38] Zhu, D.C. Development of hierarchical finite element methods at BIAA. *In Proceedings of International Conference on Computational Mechanics*, May 1986, Tokyo. Tokyo: Springer-erlag, 1986.
- [39] Houmat, A. Hierarchical finite element analysis of the vibration of membranes. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 201(4), 465-472.
- [40] Houmat, A. An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 206(2), 201-215.
- [41] Bardell, N. S. Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method, *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 151(2), 263-289.

- [42] Han, W. and Petyt, M. Linear vibration analysis of laminated rectangular plates using the hierarchical finite element method - I: Free vibration analysis. *Computers and Structures*, 1996, 61(4), 705-712.
- [43] Han, W. and Petyt, M. Linear vibration analysis of laminated rectangular plates using the hierarchical finite element method - II: Forced vibration analysis. *Computers and Structures*, 1996, 61(4), 713-724.
- [44] P. Ribeiro, Hierarchical finite element analyses of geometrically non-linear vibration of beams and plane frames. *Journal of Sound and Vibration* 246 (2001) 225-244.
- [45] P. Ribeiro, Non-linear forced vibrations of thin/thick beams and plates by the finite element and shooting methods. *Computers & Structures* 82 (2004) 1413-1423.
- [46] H. Wolfe, *An experimental investigation of nonlinear behaviour of beams and plates excited to high levels of dynamic response*, PhD thesis, University of Southampton, 1995.
- [47] ANSYS Workbench User's Guide, 2009.
- [48] P. Ribeiro, A p-version, first order shear deformation, finite element for geometrically non-linear vibration of curved beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004) 2696-2715.
- [49] R. Lewandowski, Non-linear free vibration of beams by the finite element and continuation methods, *Journal of Sound and Vibration* 170 (1994) 539-593.
- [50] V. Stojanović, P. Ribeiro, S. Stoykov, A new p-version finite element method for nonlinear vibrations of damaged Timoshenko beams, *6th European congress on computational methods in applied sciences and engineering (eccomas 2012)*, University of Vienna, Austria, September 10-14, 2012. ISBN 978-3-9502481-8-0.
- [51] P. S. Timoshenko, *Strength of Materials*, Advanced theory and problems-part I, (New York; 1930).
- [52] P. S. Timoshenko, *Strength of Materials*, Advanced theory and problems-part II, (New York; 1942).