



**УНИВЕРЗИТЕТ
У НИШУ**

**Универзитетска
Библиотека
"Никола Тесла"**

**UNIVERSITY
OF NIŠ**

**University
Library
"Nikola Tesla"**



**ДИГИТАЛНИ
РЕПОЗИТОРИЈУМ
УНИВЕРЗИТЕТА
У НИШУ**

**Библиотека
Дисертације**

**DIGITAL
REPOSITORY
OF THE UNIVERSITY
OF NIŠ**

Ph.D. Theses

**UNIVERZITET U NIŠU
ELEKTRONSKI FAKULTET**

mr Nenad N. Cvetković

**PRILOG MODELOVANJU UZEMLJIVAČKIH
SISTEMA U PRISUSTVU POLUSFERIČNE I
CILINDRIČNE NEHOMOGENOSTI TLA**

Doktorska disertacija

Niš, 2008.

Mojim roditeljima

PREDGOVOR

Doktorske disertacije uglavnom u celini pročitaju ili pregledaju samo osobe blisko upućene u oblast kojom se takav rad bavi. Sa druge strane, predgovor bez izuzetka pročitaju svi kojima ovakav tekst dođe do ruku. Zato ću iskoristiti ovaj prostor da opišem tok izrade moje doktorske disertacije (bez ulaženja u uskostručne analize), iznesem deo svojih ličnih razmišljanja i zahvalim se pojedininim osobama.

Najpre nešto o tome kako je sve krenulo ...

Moj mentor profesor Predrag Rančić i ja, saradnju smo započeli januara 2005. godine. Profesor Rančić je na osnovu svog istraživačkog i praktičnog iskustva, kao i uvida u moj prethodni rad i sklonosti, definisao prve probleme kojima je naše zajedničko istraživanje trebalo da se bavi. U periodu koji je usledio nakon toga, proistekli su konkretni rezultati i publikovano dvanaest radova baziranih na njima. Na osnovu svega nabrojanog, u jesen 2007. godine iskristalisana je i zvanično određena tema moje doktorske disertacije.

Činjenica da smo i profesor Rančić i ja (svako u svom rangu, naravno) imali iskustva u poslu kojim se bavimo, bila je u najvećoj meri olakšavajuća okolnost. Sa druge strane, oksimoronska priroda odnosa mentor-kandidat koja podrazumeva saradnju uz istovremeno uspostavljenju hijerarhiju, zahteva kompromis čiji teret po logici stvari pada više na stranu kandidata. Snažno sam se trudio da svoje postupke uskladim sa navedenom činjenicom. Ako nekada i nisam u potpunosti uspeo u tome, bila je to posledica mog temperamenta i ambicioznog pristupa problemu. Dokaz da to nije bilo fatalno po krajnji cilj jeste ono što je izloženo u narednih gotovo sto četrdeset stranica. U svakom slučaju, profesor Rančić je svojom spremnošću da uloži svoje vreme i podeli znanje sa mnom zaslužio svu moju zahvalnost i poštovanje. Priznaću da nekada nije bilo jednostavno ispratiti toliki entuzijazam na pravi način.

Svom profesoru Dragutinu Mitiću, zahvaljujem se na strpljenju i brojnim korisnim savetima izloženim tokom razgovora koje smo vodili tokom poslednje tri i po godine, za vreme izrade disertacije.

Zahvalnost dugujem i šefu Katedre za teorijsku elektrotehniku, profesoru Slavoljubu Aleksiću, za neprestanu, neskrivenu i iskrenu podršku.

Pomoć pri pribavljanju literature, zatim saveti u vezi izbora publikacija u koje treba poslati radove na objavljivanje, kao i katkad samo usputne diskusije o stručnim pitanjima često u krajnjem ishodu utiču na kvalitet rada više nego što se to čini na prvi pogled. Zato sa zadovoljstvom hoću da nabrojim ljude koji su na neki od nabrojanih načina dali doprinos kvalitetu disertacije (redosled nije važan): akademik Gradimir Milovanović, dopisni član SANU; prof. dr Marek Ziolkowski i prof. dr Hartmut Brauer (obojuca Tehnički Univerzitet Ilmenau-Nemačka); prof. dr Ivan Yatchev i prof. dr Kostadin Brandisky (obojuca Tehnički Univerzitet Sofija-Bugarska); Dušan Milošević, prof. dr Dragan Kostić i dr Nenad Mihajlović (niški đaci, moji višedecenijski drugovi, svi sa Tehničkog Univerziteta Ajndhoven-Holandija); prof. dr Dragan Tasić (Elektronski fakultet u Nišu); prof. dr Dragoljub Pokrajac (moj drugar iz Voždove škole, sada na Državnom Univerzitetu Delaver-SAD); prof. dr Dragan Poljak (Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu-Hrvatska); i prof. dr Dragoljub Drenić (Građevinsko-arhitektonski fakultet u Nišu).

Kažem hvala i svojim kolegama: Nebojši Raičeviću, čije mi je poznavanje bazične literature iz više matematike uštedelo puno vremena; Vesni Javor, a zatim i Milici Rančić za finalno redigovanje engleskih tekstova; Dragani Živaljević za pomoć tokom pripreme radova u TEX-u; i Mirjani Perić zato što je pročitala prvu verziju rada i ispravila lapsuse i previde u kucanju. Ne zaboravljam da je u jednom od radova korekturu engleskog jezika uradila Tamara Simonović, moja prva profesorka engleskog jezika.

Pomenuću i kolegice i kolege iz Laboratorije za telekomunikacije i lepši deo moje Katedre za teorijsku elektrotehniku uz čije društvo su pauze u radu imale svoj pravi smisao, kao i prijatelje iz Laboratorije za električne instalacije i osvetljenje Dragana Vučkovića, Miodraga Stojanovića i

Bojana Dorđevića, sa kojima sam proveo puno vremena u prethodnih nekoliko godina, a da se ni jednog trenutka nisam osetio kao gost ili pridošlica.

Moj brat blizanac Pepi (dr Predrag Cvetković, docent Pravnog fakulteta u Nišu), iščekivao je završetak ove disertacije isto kao i ja. Njegova podrška je uvek bila polisa koju je nemoguće kupiti i privilegija je posedovati je.

Konačno, prisećam se svog pokojnog Profesora, dugogodišnjeg šefa Katedre za teorijsku elektrotehniku Dragutina M. Veličkovića, pod čijim sam mentorstvom uradio svoj diplomski rad i magistarsku tezu. Profesor Veličković je čovek od kog sam mnogo naučio, sa kojim sam saradivao preko devet godina i osoba koja je na mene ostavila snažan pečat kako u stručnom, tako i u onom običnom, ljudskom smislu. Voleo bih da je nemerljivo iskustvo koje rad i druženje sa takvom ličnošću nose, bar delimično ugrađeno u sadržaj teksta ponuđenog između ovih korica.

Na kraju želim da istaknem da završetak ovog posla i ispunjenje važnog cilja, za mene lično predstavljaju kraj jednog i početak drugog puta u okviru lepog zanimanja kojim se bavim. U odnosu na onaj kojim sam se do sada kretao, na tom novom pravcu očekujem više izazova, zahteva i odgovornosti. Shodno toj činjenici i svojoj prirodi, radoznalo i sa radošću stupam na njega.

N. Cvetković

APSTRAKT

Razmatranje uticaja nehomogenosti polusferičnog i cilindričnog tipa na karakteristike uzemljivačkih sistema u kvazistacionarnom režimu predmet je istraživanja ove doktorske disertacije. Ovakvi tipovi nehomogenosti nisu retkost u praksi i od interesa je bilo proučiti njihov uticaj na karakteristike uzemljivačkih sistema koji već sami po sebi predstavljaju bitan deo brojnih tehničko-tehnoloških sistema, elektroenergetskih postrojenja, telekomunikacionih sistema ili sistema za zaštitu od atmosferskih pražnjenja.

Iako je u prethodnim decenijama objavljen znatan broj radova koji se bavi analizom uzemljivačkih sistema, radova koji su se bavili cilindričnim ili polusferičnim tipovima nehomogenosti, posebno na način kao što je to učinjeno u ovoj disertaciji, nije bilo previše u publikacijama dostupnim kandidatu.

Primenom različitih numeričkih metoda određen je uticaj opisanih nehomogenosti na raspodelu potencijala i impedansu uzemljivačkih sistema. Razmatrani su uzemljivački sistemi različitih geometrija, pri čemu je akcenat na analizi realnih uzemljivačkih struktura. Pokazano je da uticaj analiziranih tipova nehomogenosti postoji ali da se njegov stepen menja zavisno od strukture uzemljivača. Takođe, ovaj uticaj nije isti na sve parametre koji karakterišu uzemljivački sistem.

Kao doprinos primenljiv u praksi, valjalo bi istaći i karakterizaciju uticaja zemljovodnog provodnika na uzemljivačke sisteme, koji nije bio uključen u analize i istraživanja autora radova koji su bili dostupni kandidatu. Pokazalo se da ovaj uticaj nije beznačajan, kako na impedansu, tako i na raspodelu potencijala u okolini uzemljenja.

Tokom izrade disertacije koja se bavi istraživanjem praktičnog problema izrodili su se određeni doprinosi i na teorijskom polju.

Tako je u radu primenjen novi približni model Grinove funkcije tačkastog izvora unutar/izvan poluprovodne sfere predložen od strane profesora Rančića, pri čemu je potreba za ovim modelom rezultat prvih rezultata koje je kandidat ostvario na početku svojih istraživanja vezanih za disertaciju.

Približan model za analizu vertikalne elektrode smeštene u cilindričnu nehomogenost za određivanje uticaja betonskog temelja na karakteristike elektrode prvi put je korišćen u ovom radu.

Konačno, takođe kao teorijski doprinos, u disertaciji je pokazana i veza između varijacionog metoda i metoda srednjih potencijala i dokazana činjenica da je ovaj potonji samo poseban slučaj varijacionog metoda.

Ključne reči: Uzemljivački sistem, nehomogenost, elektromagnetno polje, numerički metodi, Grinova funkcija

ABSTRACT

The influence of the semi-spherically and cylindrically shaped inhomogeneity on grounding systems in quasi-stationary regime is analyzed in this Ph.D. Thesis. Such inhomogeneities are present in practice and that is the reason for importance of estimating their influence on grounding systems. These systems are a significant part of many technical-technology systems, power facilities, telecommunications systems or lightning protection systems.

According to the author's best knowledge, not too many of papers had semi-spherical or cylindrical inhomogeneities as an object of research, especially with the approach applied in this paper, although there have been plenty of works published in previous decades dealing with grounding systems' analysis.

Applying various numerical methods, the influence of analysed inhomogeneities on potential distribution in the grounding system vicinity and grounding impedance have been determined. Grounding systems of different geometries, especially the ones realized in the practice have been researched. It has been shown that there is a significant influence of analyzed inhomogeneities. Its level depends on grounding system type and it is also different for different grounding parameters.

The analysis of the earthing conductor influence on groundings can be emphasized as a practically applicable contribution of the Thesis. As far as the author is aware, this matter has been usually neglected in previously published papers. It has been shown that this influence can be significant on both grounding impedance and potential distribution in the vicinity of the grounding.

During the preparation of the Thesis, some theoretical contributions have also been achieved.

The Green's function for a point source inside/outside the semi-conducting semi-sphere proposed by professor Rančić is applied in this paper. The necessity for generating this model is the outcome of the early results obtained by Thesis's author at the beginning of the Thesis's preparation.

An approximate model for analysing a vertical electrode in a cylindrically shaped inhomogeneity used for determining the concrete foundation approximated by a cylinder is for the first time applied in the paper.

Finally, also as a theoretical contribution, a relationship between the variational and the average potential method is explained in the paper and it has been shown that the second one is only a special case of the variational method.

Keywords: Grounding system, inhomogeneity, electromagnetic field, numerical methods, Green's function

SADRŽAJ

1. UVOD	1
1.1 Literatura	3
2. KVAZISTACIONARNO ELEKTROMAGNETNO POLJE	5
2.1 Makselove jednačine kvazistacionarnog elektromagnetnog polja	5
2.2 Izvođenje Grinovih funkcija	7
2.2.1 Hercov dipol u homogenoj zemlji	7
2.2.1.1 <i>Vertikalni Hercov dipol</i>	11
2.2.1.2 <i>Horizontalni Hercov dipol</i>	13
2.2.1.3 <i>Proizvoljno orijentisani Hercov dipol</i>	14
2.2.2 Tačkasti strujni izvor u prisustvu sferične nehomogenosti	14
2.2.2.1 <i>Opis problema</i>	16
2.2.2.2 <i>Tačno rešenje-Model "Straton"</i>	17
2.2.2.3 <i>Približno rešenje-Model "Veličković"</i>	20
2.2.2.4 <i>Približno rešenje -Model "Rančić"</i>	25
2.2.2.5 <i>Analiza opisanih rešenja</i>	28
2.2.2.6 <i>Poređenje modela</i>	28
2.2.3 Tačkasti strujni izvor u prisustvu polusferične nehomogenosti	33
2.2.3.1 <i>Tačkasti izvor izvan polusferične nehomogenosti</i>	33
2.2.3.2 <i>Tačkasti izvor unutar polusferične nehomogenosti</i>	34
2.3 Struktura EM polja i potencijala	36
2.3.1 Lineični provodnik u homogenoj zemlji	36
2.3.1.1 <i>Električni skalar potencijal</i>	37
2.3.1.2 <i>Električno polje</i>	37
2.3.1.3 <i>Magnetno polje</i>	38
2.3.2 Lineični provodnik u prisustvu polusferične nehomogenosti	39
2.3.2.1 <i>Električni skalar-potencijal</i>	39
2.3.2.2 <i>Električno polje</i>	40
2.3.2.3 <i>Magnetno polje</i>	41
2.3.3 Masivna pločasta elektroda u prisustvu polusferične nehomogenosti	41
2.3.3.1 <i>Električni skalar-potencijal</i>	41
2.4 Literatura	41
3. PREGLED KORIŠĆENIH NUMERIČKIH METODA	43
3.1 Metod momenata	43
3.1.1 Galerkinov metod	43
3.1.2 Metod podešavanja u tačkama	45
3.1.3 Metod odsečaka	45
3.1.4 Metod celodomske aproksimacije	46
3.2 Varijacioni metod	46
3.2.1 Metod srednjih potencijala	47
3.3 Metod ekvivalentne elektrode	48
3.4 Literatura	49
4. UZEMLJIVAČKI SISTEMI U HOMOGENOJ ZEMLJI	51
4.1 Usamljena prava lineična elektroda	51

4.1.1	Konstantna struja oticanja- Metod podešavanja u tačkama	52
4.1.2	Konstantna struja oticanja- Metod srednjih potencijala	53
4.1.3	Metod odsečaka	53
4.1.4	Polinomska aproksimacija struje	54
4.1.5	Numerički rezultati	54
4.2	Prstenasta uzemljivačka elektroda-uzemljivački sistem stuba	56
4.2.1	Numerički rezultati	57
4.3	Uzemljivački sistem načinjen od trakastih elektroda-zrakasti uzemljivač	57
4.3.1	Varijaciona formula	59
4.3.1.1	<i>Formiranje funkcionala</i>	60
4.3.2	Metod podešavanja u tačkama	61
4.3.3	Numerički rezultati	62
4.4	Provodna sfera i lineični obruč	63
4.4.1	Numerički rezultati	66
4.5	Literatura	67
5.	UZEMLJIVAČKI SISTEMI U PRISUSTVU CILINDRIČNE POLUPROVODNE NEHOMOGENOSTI TLA	69
5.1	Procedura za definisanje ekvivalentnih parametara za slučaj cilindrične poluprovodne nehomogenosti	69
5.1.1	Numerički rezultati	72
5.2	Uzemljivački sistem stuba izveden sa jednom prstenastom elektrodom	73
5.2.1	Električni skalar potencijal	74
5.2.2	Sistem integralnih jednačina	74
5.2.3	Sopstvene i međusobne impedanse	75
5.2.4	Numerički rezultati	76
5.3	Uzemljivački sistem stuba izveden sa dve prstenaste elektrode	80
5.3.1	Električni skalar potencijal	81
5.3.2	Sistem integralnih jednačina	81
5.3.3	Numerički rezultati	82
5.4	Sistem lineičnih provodnika	86
5.4.1	Numerički rezultati	86
5.5	Literatura	90
6.	UZEMLJIVAČKI SISTEMI U PRISUSTVU POLUSFERIČNE POLUPROVODNE NEHOMOGENOSTI TLA	91
6.1	Usamljeni lineični provodnik	91
6.1.1	Određivanje impedanse i karakterizacija usamljene lineične elektrode	94
6.1.1.1	<i>Električni skalar potencijal</i>	94
6.1.1.2	<i>Polinomska raspodela longitudinalne struje-Metod podešavanja u tačkama</i>	95
6.1.2	Numerički rezultati	95
6.1.2.1	<i>Lineična elektroda izvan poluprovodne nehomogenosti</i>	95
6.1.2.2	<i>Lineična elektroda unutar poluprovodne nehomogenosti</i>	98
6.1.2.3	<i>Lineična elektroda koja prodire polusferičnu poluprovodnu nehomogenost</i>	98
6.2	Uzemljivački sistem načinjen od po jedne lineične elektrode unutar i izvan polusferične nehomogenosti	98

6.2.1 Numerički rezultati	99
6.3 Usamljeni lineični obruč u okolini nehomogenosti	101
6.3.1 Numerički rezultati	102
6.4 Uzemljivački sistem načinjen od lineične elektrode unutar polusferične nehomogenosti i obruča izvan polusferične nehomogenosti	103
6.4.1 Numerički rezultati	106
6.5 Usamljena pločasta elektroda u okolini polusferične nehomogenosti	108
6.5.1 Određivanje električnog skalar potencijala i impedanse pločaste elektrode	109
6.5.2 Numerički rezultati	109
6.6 Uzemljivački sistem načinjen od prave lineične elektrode unutar i pločaste elektrode izvan polusferične nehomogenosti	111
6.6.1 Numerički rezultati	112
6.7 Sistem lineičnih provodnika izvan polusferične nehomogenosti	114
6.7.1 Numerički rezultati	114
6.8 Sistem lineičnih provodnika unutar polusferične nehomogenosti	115
6.8.1 Numerički rezultati	116
6.9 Literatura	116
7. ZAKLJUČAK	119
7.1 Literatura	120
8. PRILOZI	123
PRILOG 1-Određivanje integrala $\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha b }}{\alpha} J_0(\alpha\rho) d\alpha, b \in R$	123
PRILOG 2 - Ležandrovi polinomi	123
PRILOG 3 - Uticaj relativne dielektrične konstante tla na kvazistacionarno EM polje	124
PRILOG 4 - Ekvivalentni poluprečnik ravnog trakastog provodnika	125
PRILOG 5 - Ekvivalentni poluprečnik tanke cilindrične trake	125
PRILOG 6 - Određivanje integrala $\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}}$	126
PRILOG 7 - Precizniji izraz za određivanje struje oticanja na kraju lineičnog provodnika	127
PRILOG 8 - Potencijal u okolini lineičnog obruča opticanog stacionarnom strujom	128
PRILOG 9 - Određivanje ekvivalentnog poluprečnika provodnika pravougaonog poprečnog preseka	129
PRILOG 10 - Određivanje ekvivalentnog poluprečnika sistema žičanih provodnika	130
PRILOG 11 - Lineični provodnik u prisustvu nehomogenosti sektoralnog tipa	131
8.1 Literatura	131
9. LITERATURA	133

1. UVOD

Uzemljivački sistemi predstavljaju neizostavni deo različitih tehničko-tehnoloških sistema, uključujući između ostalih elektroenergetska postrojenja, telekomunikacione sisteme, kao i sisteme za zaštitu od atmosferskih pražnjenja. Zato nije čudno da analiza i modelovanje ovih sistema predstavljaju oblast interesovanja velikog broja istraživača u periodu dužem od jednog veka. Istraživanja čiji su tok i rezultati izloženi u ovom radu imala su za cilj da daju doprinos u rešavanju jedne grupe problema ove vrste.

Dugi niz godina analiza uzemljivačkih sistema je u najvećem broju radova imala kvazistacionaran karakter. Tokom prethodne dve decenije publikovan je veliki broj radova u kojima se analiza lineičnih uzemljivačkih sistema zasniva na tzv. antenskom modelu i Zomerfeldovoj (Sommerfeld) formulaciji strukture elektromagnetnog (EM) polja. Matematički modeli korišćeni u ovim istraživanjima formirani su uz pretpostavku da se nehomogena zemlja aproksimira kao homogena i izotropna sredina poznatih električnih parametara, ili se nehomogenost tla modeluje sa više homogenih i izotropnih horizontalnih ili vertikalno složenih slojeva ([1.1]-[1.13]).

Jedan deo rada posvećen je analizi uzemljivačkih sistema formiranih od jedne ili više elektroda različitih oblika (lineični, pločasti, polusferični), smeštenih u nehomogenoj zemlji aproksimiranoj pomoću homogene i izotropne sredine. Pri tome su za rešavanje pomenutih problema korišćeni različiti metodi i njihove kombinacije. Na prvom mestu to je metod momenata (Moments method-MoM, ([1.13])) i metod odsečaka kao njegov specijalan slučaj kao i metod podešavanja u tačkama (Point Matching Method-PMM) ([1.14]-[1.18]). U radu je korišćen i varijacioni metod ([1.17]-[1.18]), metod srednjih potencijala (metod Hove (Howe) ili Average Potential Method-APM) ([1.1], [1.19]-[1.22]), kao i metod ekvivalentne elektrode (MEE) ([1.23]-[1.25]).

Pored uticaja nehomogenosti tla standardnog slojevitog ili sektoralnog tipa, u radu su primenom odgovarajućih modela analizirani uzemljivački sistemi koji uključuju i uticaj poluprovodne nehomogenosti polusferičnog tipa. Razmatrani su slučajevi kada se uzemljivački sistem ili jedan njegov deo nalaze unutar polusferične nehomogenosti tla, kao i problemi kod kojih se uzemljivački sistem nalazi u njenoj okolini. Karakterizacija ovakvih sistema ima praktičan značaj za analizu temeljnog uzemljivača stuba čiji se temelj tretira kao polusferična nehomogenost tla, kao i za modelovanje uzemljivačkih sistema u okolini velikih bara ili jezera u čijoj se okolini uzemljivački sistem nalazi. U graničnom slučaju kada se polusfera smatra idealno provodnom, model se može primeniti i na analizu uzemljivačkih sistema u okolini silosa ili rezervoara čije dno ima polusferični oblik.

Od značaja je naglasiti da su analiza i modelovanje EM polja različitih žičanih struktura (lineične antene, žičani rasejači, lineični uzemljivači, prenosni vodovi i dr.) u prisustvu nehomogenih poluprovodnih sredina bili i još uvek su predmet interesovanja i istraživanja autora sa Elektronskog fakulteta u Nišu (Katedra za teorijsku elektrotehniku i Katedra za industrijsku energetiku). Na ovaj način posmatrano, rešavanje problema čija analiza čini sadržaj ovog rada predstavlja nastavak pomenutih istraživanja, koja u širem okviru pripadaju nečemu što pojedini od iskusnih i priznatih kolega nazivaju "srpskom školom elektromagnetike".

Pri formiranju strukture rada težilo se tome da se u najvećoj mogućoj meri obezbedi njegovo praćenje na što lakši i jednostavniji način. Sam tekst je podeljen na ukupno 9 poglavlja, uključujući za strukturu teksta ove vrste standardne elemente Uvod (Poglavljje 1), Zaključak (Poglavljje 7) Priloze (Poglavljje 8) i Literaturu (Poglavljje 9), dok su osnovna teorijska razmatranja i rezultati izloženi

u poglavljima 2-6. Pojedina poglavlja podeljena su prema potrebi na više odgovarajuće označenih pododeljaka. Pri tome se pojedina razmatranja i analize ponavljaju u više navrata u različitim delovima teksta, što omogućava praćenje teksta u svakom poglavlju ponaosob sa nevelikim brojem pozivanja na sadržaj prethodnih poglavlja. Razlog za to je činjenica da je u radu primenom više različitih metoda analiziran ne mali broj problema, pa bi previše pozivanja na prethodni tekst od čitaoca, po mišljenju kandidata, zahtevalo i previše napora. Naravno, uz sve to, kandidat se trudio da očuva jedinstvenu strukturu teksta.

Sadržaj Poglavlja 2 čine osnovne jednačine kvazistacionarnog magnetnog polja i izvođenje Grinovih (Green) funkcija za Hercov (Hertz) dipol u homogenoj izotropnoj poluprovodnoj zemlji ([1.26]), odnosno tačkasti izvor u okolini sferične nehomogenosti. Od značaja je naglasiti da je u slučaju drugopomenute Grinove funkcije pored tačnog rešenja preuzetog iz [1.27] i približnog rešenja iz referenci [1.22] i [1.28], predloženo takođe približno rešenje ([1.29]), koje je prateći rezultat inicijalnih istraživanja vezanih za ovaj rad. Korišćenjem pomenute dve Grinove funkcije određena je i Grinova funkcija za tačkasti strujni izvor u prisustvu polusferične nehomogenosti tla. Konačno, na osnovu prethodno određenih Grinovih funkcija opisana je generalna struktura EM polja lineičnog provodnika u homogenoj zemlji i u prisustvu polusferične nehomogenosti, odnosno pločaste elektrode u smeštene u okolini polusferične nehomogenosti.

Pregled i opis metoda korišćenih za modelovanje i karakterizaciju uzemljivačkih sistema analiziranih u radu prezentovani su u Poglavlju 3.

Rezultati dobijeni analizom konkretnih uzemljivačkih sistema smeštenih u homogenoj zemlji predstavljaju sadržaj Poglavlja 4. Određene su impedanse uzemljivačkih sistema, raspodela struje oticanja kao i raspodela električnog skalar potencijala na površini tla. Analizirani su uzemljivački sistemi formirani od jednog ili više lineičnih provodnika napajanih izolovanim i/ili neizolovanim provodnikom. Pored lineičnih provodnika (uključujući i konturne elektrode), posmatrani su i uzemljivački sistemi koji kao sastavni deo uključuju i provodnu polusferu. Na osnovu izloženih rezultata verifikovani su metodi primenjeni u kasnijem tekstu na analizu uzemljivačkih sistema u prisustvu cilindrične, odnosno polusferične nehomogenosti tla.

Naredno, peto poglavlje posvećeno je rezultatima analize uzemljivačkih sistema u prisustvu cilindrične poluprovodne nehomogenosti. Pri tome su opisani i praktični problemi za čije se rešavanje mogu iskoristiti ostvareni rezultati.

Na sličan način, u šestoj glavi izloženi su rezultati dobijeni modelovanjem uticaja polusferične poluprovodne nehomogenosti tla na konkretne uzemljivačke sisteme. Kao i u prethodnoj glavi, određene su impedanse uzemljivačkih sistema, raspodela struje oticanja i potencijala na površini tla.

Konačno, pored zaključka (Poglavlje 7) i kompletne literature navedene po azbučnom redosledu (Poglavlje 9), u rad su uključeni i prilozi (Poglavlje 8) čiji sadržaj po uverenju kandidata omogućava jednostavnije i lakše razumevanje i praćenje osnovnog teksta, bez neophodnosti da bude uključen u njegovu osnovnu strukturu. Iz istog razloga, na kraju svakog poglavlja po redosledu citiranja navedena je literatura korišćena pri njegovoj izradi.

Rad se sastoji od 160 slika, 419 formula i 8 tabela. Slike i tabele numerisane su za svako poglavlje posebno, dok su jednačine, kao i neveliki broj fusnota numerisane za svaki pododeljak (drugi nivo) posebno. Formule su numerisane i navođene u malim, a reference u srednjim (uglastim) zagradama.

Svi neophodni proračuni urađeni su pomoću programa napisanih u FORTRAN-u. Konačna vizuelna forma rada rezultat je primene različitih verzija programa i programskih paketa Microsoft Word, CorelDRAW, Adobe Acrobat, Mathematica i Microcal Origin.

1.1 LITERATURA

- [1.1] В. В. Бургсдорф, А. И. Якобс, *Заземляющие устройства-Электроустановок*, Энергоатомиздат, Москва 1987.
- [1.2] R. J. Heppe, "Step potential and body currents near grounds in two-layer earth", IEEE Trans. of PAS, Vol. 98, No. 1, 1979, pp 45-59.
- [1.3] J. Nahman, "Digital calculation of earthing systems in non-uniform soil", Archiv für Elektrotechnik, Vol. 62, 1980, pp 19-24.
- [1.4] P. D. Rančić, L. V. Stefanović, Đ. R. Đorđević, "A new model of the vertical ground rod in two-layer earth", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 28, No. 2, 1992, pp 1497-1500.
- [1.5] P. D. Rančić, L. V. Stefanović, Đ. R. Đorđević, D. J. Gobović, "A new model of the horizontal line ground wire in two-layer earth", *9th Conf. on the Computation of EM Fields, COMPUMAG'93*, Miami, Florida, USA, Oct. 30 - Nov. 4. 1993, Proc., pp 202-203.
- [1.6] P. D. Rančić, S. Z. Đokić, Z. P. Stajić, "Vertical ground rod (VGR) in inhomogeneous earth of sectoral type", El. Letters, Vol. 30, No. 19, 1994, pp 1562-1564.
- [1.7] P. D. Rančić, L. V. Stefanović, Đ. R. Đorđević, "An improved linear grounding system analysis in two-layer earth", IEEE Trans. on Mag., Vol. 32, No. 5, 1995, pp 5179-5187.
- [1.8] P. D. Rančić, "A new concept for linear grounding system analysis", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, ПЕС '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp 103-116.
- [1.9] P. D. Rančić, Z. P. Stajić, "Pločasta uzemljivačka elektroda u nehomogenoj zemlji sektoralnog tipa", *XXII Simpozijum JUKO - CIGRE '95*, Sekcija II-Vodovi i Postrojenja, Vrnjačka Banja, Jugoslavija, 22-27. Maj 1995, Zbornik radova, str. R23-13/1-8.
- [1.10] P. D. Rančić, Z. P. Stajić, Đ. R. Đorđević, B. S. Tošić, "Analysis of linear ground electrodes placed in vertical three-layer earth", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 32, No. 3, 1996, pp 1505-1508.
- [1.11] P. D. Rančić, M. O. Veselinović, Z. P. Stajić, Đ. R. Đorđević, "Analysis of two coupled grounding systems: linear grounding system and plate ground electrode", *II Int. Symp. on Electromagnetics Compatibility EMC '96*, Roma, Italy, Sept. 17-20, 1996, Proc., pp T-5 856-861.
- [1.12] M. Niegl, "Erdungsanlagen in Schichtböden", Electrical Engineering, Vol. 81, No. 5, 1998, pp 333-341.
- [1.13] J. Haenninen, K. I. Nikoskinen, I. V. Lindell, "Electrostatic image theory for two anisotropic half-spaces", Electrical Engineering Volume 88, 2005, pp 1-12.
- [1.14] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, The Macmillan Company, New York, 1969.
- [1.15] R. Mitra (Ed.), *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sidney-Braunschweig, 1973, pp 15-31.
- [1.16] C. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1989, pp 671-740.
- [1.17] R. C. Botton, Jr., *Computational Methods for Electromagnetics and Microwaves*, John Wiley & Sons Inc., New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1992, pp 113-129.
- [1.18] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton-London-New York-Washington D.C., 2001, Chapter 5.
- [1.19] V. A. Govorkov, *Электрические и Магнитные поля*, Energia 68, Moskva.
- [1.20] T. N. Giao, M. P. Sarma, "Effect of two layer earth on the electric field near HVDC electrodes", Vol. PAS 91, No. 6, 1972, 2356-2365.

- [1.21] D. M. Veličković, "Numerički i približni metodi za rešavanje problema elektrostatičke", *III Jugoslovensko savetovanje o statičkom elektricitetu, ELEKTROSTATIKA 78*, oktobar 1978, Beograd, Zbornik radova, str. 22-42.
- [1.22] H. Uhlmann (Ed.), D. M. Veličković, K. Brandisky, R. D. Stantcheva, H. Brauer, *Fundamentals of Modern Electromagnetics for Engineering-Textbook for Graduate Students, Part I: Static and Stationary Electrical and Magnetic Field*, Technical University Ilmenau/Germany, 2005, pp78-79, 97-98.
- [1.23] D. M. Veličković, "Equivalent electrodes method", *Scientific Review*, Belgrade, 1996, pp 207-248.
- [1.24] D. M. Veličković, "The equivalent electrode method", *34. Int. Symposium Theoretische Elektrotechnik*, 26-31. Oct. 1981, Ilmenau, DDR, Proc., Vol. 2, pp 125-128.
- [1.25] D. M. Veličković, "Equivalent electrodes method application in nonrotational fields theory", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, IIEC '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp 5-30.
- [1.26] P. D. Rančić, "Osnovni izrazi za izračunavanje strukture EM polja proizvoljno postavljenog Hercovog dipola u nehomogenoj zemlji koja je aproksimirana sa N homogenih i izotropnih slojeva-kvazistacionarna analiza", Tehnički izveštaj, TEH-RP-EM-11b, Laboratorija za Električne instalacije i Osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Januar 1998.
- [1.27] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*, Mc Grow-Hill Book Company, New York /London, 1941, pp 201-205.
- [1.28] D. M. Veličković, "Green's function of spherical body," *Euro Electromagnetics, EUROEM '94*, May 30 – June 4, 1994, Bordeaux, France, Conf. Proc., THp-09-04.
- [1.29] P. D. Rančić, "A point ground electrode in the presence of spherical ground inhomogeneity: analysis of two approximate closed form solutions for electrical scalar potential", *International PhD Seminar Computational Electromagnetics and Technical Applications*, Banja Luka, Bosnia and Herzegovina, August 28-September 01, 2006, Proc. of Papers, pp 213-223, dostupno na: http://www.phd.etfbl.net/files/Works_PDF/Rancic%20Predrag.pdf.

2. KVAZISTACIONARNO ELEKTROMAGNETNO POLJE

2.1 MAKSVELOVE JEDNAČINE KVAZISTACIONARNOG ELEKTROMAGNETNOG POLJA

Elektromagnetno (EM) polje je posebno fizičko stanje sredine u okolini naelektrisanih tela, provodnika optičanih strujom i stalnih magneta, koje se manifestuje u pojavi mehaničke sile na naelektrisana tela, provodnike optičane strujom i stalne magnete unete u polje, kao i u pojavi indukovano-og elektromagnetnog polja u telima koja se nalaze u polju promenljivom u vremenu, odnosno koja se kreću kroz prostor u kome postoji polje ([2.1])¹.

Da bi se u potpunosti opisalo elektromagnetno polje, neophodno je odrediti ukupno šest vektorskih veličina ([2.2]). To su:

- vektor jačine električnog polja \vec{E} ;
- vektor električne indukcije \vec{D} ;
- vektor jačine polarizacije \vec{P} ;
- vektor jačine magnetnog polja \vec{H} ;
- vektor magnetne indukcije \vec{B} ; i
- vektor gustine magnetnog momenta \vec{M} .

Prethodno nabrojane veličine povezuju dve konstitutivne veze,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.1.1)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}), \quad (2.1.2)$$

gde su $\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi \cong 8.85 \times 10^{-12}$ F/m i $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m dielektrična konstanta, odnosno magnetna propustljivost slobodnog prostora.

Kako je ukupan broj nepoznatih veličina šest, pored dve gore navedene konstitutivne veze postuliran je i, u teorijskoj fizici dobro poznat sistem od četiri Maksvelove (Maxwell) jednačine, čiji je lokalni (diferencijalni) oblik

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_t = \vec{J}_g + \vec{J}_{\text{kond}} + \vec{J}_{\text{konv}} + \vec{J}_{\text{dp}} + \vec{J}_{\text{dp0}} \quad (\text{prva Maksvelova jednačina}); \quad (2.1.3)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \quad (\text{druga Maksvelova jednačina}); \quad (2.1.4)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{treća Maksvelova jednačina}); \quad (2.1.5)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_s. \quad (\text{četvrta Maksvelova jednačina}) \quad (2.1.6)$$

Redosled navođenja nije uopšteno usvojen, tako da se u literaturi sreću i drugačije pobrojane Maksvelove jednačine.

U izrazima (2.1.3-2.1.6) pored u prethodnom tekstu definisanih veličina, figurišu i oznake za

- vektor gustine totalne struje, \vec{J}_t ;
- vektor gustine struje spoljašnje pobude \vec{J}_g ;

¹ Ovo je, po znanju kandidata, najčešće korišćena definicija EM polja, mada neki autori, možda i opravdano, izostavljaju deo "u okolini naelektrisanih tela, provodnika optičanih strujom i stalnih magneta, ..."

- vektor gustine kondukcione struje \vec{J}_{kond} ;
- vektor gustine konvekcione struje \vec{J}_{konv} ;
- vektor gustine struje dielektričnog pomeraja u slobodnom prostoru $\vec{J}_{\text{dp}0} = -\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$;
- vektor gustine struje polarizacije $\vec{J}_{\text{dp}} = -\partial \vec{P} / \partial t$; i
- zapreminsku gustinu slobodnih naelektrisanja ρ_s .

Izrazima (2.1.1-2.1.6) treba pridružiti i jednačinu kontinuiteta (Prvi Kirhofov (Kirchoff) zakon), u lokalnom obliku

$$\text{div } \vec{J}_t = 0, \text{ odnosno } \text{div } \vec{J}_{\text{kond}} = -\partial \rho_s / \partial t, \quad (2.1.7)$$

kao i lokalnu formu Omovog (Ohm) zakona

$$\vec{J}_{\text{kond}} = \sigma \vec{E}, \quad (2.1.8)$$

gde je σ oznaka za specifičnu provodnost.

U uslovima vremenski promenljive prostoperiodične pobude kružne učestanosti ω mogu se uvesti odgovarajuće kompleksne predstavnike, pa jednačine (2.1.1-2.1.8) za homogenu, izotropnu i linearnu sredinu dobijaju oblik

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.1.9)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}, \quad (2.1.10)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_t = \vec{J}_g + \vec{J}_{\text{kond}} + \vec{J}_{\text{konv}} + \vec{J}_{\text{dp}}, \quad \vec{J}_{\text{dp}} = j\omega \vec{D} = j\omega \varepsilon \vec{E}; \quad (2.1.11)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \mu \vec{H}; \quad (2.1.12)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0; \quad (2.1.13)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_s; \quad (2.1.14)$$

$$\text{div } \vec{J}_t = 0; \quad (2.1.15)$$

$$\vec{J}_{\text{kond}} = \sigma \vec{E}. \quad (2.1.16)$$

U prethodnim izrazima ε i μ su oznake za električnu, odnosno magnetnu propustljivost sredine.

Ukoliko se radi o poluprovodnoj sredini kroz koju istovremeno protiču kondukcione struje, struje polarizacije i struje dielektričnog pomeraja u slobodnom prostoru, može se pisati

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{kond}} + \vec{J}_{\text{dp}} + \vec{J}_{\text{dp}0} = \sigma \vec{E} + j\omega(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \sigma \vec{E} + j\omega \vec{D} = \sigma \vec{E} + j\omega \varepsilon \vec{E} = (\sigma + j\omega \varepsilon) \vec{E} = \underline{\sigma} \vec{E}, \quad (2.1.17)$$

gde je $\underline{\sigma} = \sigma + j\omega \varepsilon$ kompleksna specifična provodnost. Tako je u uslovima prostoperiodične pobude moguće tretirati poluprovodnu sredinu kao idealno provodnu, pri čemu se umesto specifične provodnosti σ , koristi kompleksna specifična provodnost $\underline{\sigma}$.²

Pri rešavanju problema elektromagnetnog polja u izotropnim, linearnim i homogenim sredinama, uvode se funkcije električnog skalar potencijala ϕ i magnetnog vektor potencijala \vec{A} . Pri tome se vektor električnog polja i magnetne indukcije u kompleksnom domenu za prostoperiodičnu pobudu određuju na osnovu naredna dva izraza,

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - j\omega \vec{A} \quad (2.1.18)$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}. \quad (2.1.19)$$

² U daljem tekstu kompleksne veličine osim oznaka za parametre sredine neće biti podvlačene.

Često se umesto magnetnog vektor potencijala \vec{A} koristi Hercov (Hertz) vektor $\vec{\Pi}$ ([2.3], str. 547), definisan kao

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu\sigma} \vec{A}. \quad (2.1.20)$$

Na osnovu prethodnog izraza i jednačine (2.1.18) može se izvesti jednačina

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - j\omega\mu\sigma\vec{\Pi} = -\text{grad } \varphi - \underline{\gamma}^2\vec{\Pi}, \quad (2.1.21)$$

gde je $\underline{\gamma}^2 = j\omega\mu\sigma$ kompleksna konstanta prostiranja. Iz izraza (2.1.10), (2.1.19) i (2.1.20) formira se izraz za određivanje vektora jačine magnetnog polja

$$\vec{H} = \sigma \text{rot } \vec{\Pi}. \quad (2.1.22)$$

Smenom izraza (2.1.21-22) u prvu Maksvelovu jednačinu (2.1.11), pri čemu se uzima u obzir da je $\Delta\vec{\Pi} = \text{grad div } \vec{\Pi} - \text{rot rot } \vec{\Pi}$, dobija se

$$\Delta\vec{\Pi} - \underline{\gamma}^2\vec{\Pi} = -\frac{\vec{J}_t}{\sigma} + \text{grad}(\varphi + \text{div } \vec{\Pi}). \quad (2.1.23)$$

Kada se iskoristi Lorencov (Lorentz) uslov neprekidnosti potencijala

$$\varphi = -\text{div } \vec{\Pi}, \quad (2.1.24)$$

jednačina (2.1.23) dobija oblik poznat kao Helmholtzova (Helmholtz) diferencijalna jednačina za Hercov vektor

$$\Delta\vec{\Pi} - \underline{\gamma}^2\vec{\Pi} = -\frac{\vec{J}_t}{\sigma}. \quad (2.1.25)$$

U domenu industrijskih frekvencija je $|\underline{\gamma}^2| \ll 1$, pa se problemi kojima se ovaj rad bavi u najvećem broju slučajeva mogu tretirati kao kvazistacionarni. Napred navedena Helmholtzova diferencijalna jednačina (2.1.25) tada dobija formu

$$\Delta\vec{\Pi} \cong -\frac{\vec{J}_t}{\sigma}, \quad (2.1.26)$$

dok izraz za električno polje (2.1.21) postaje

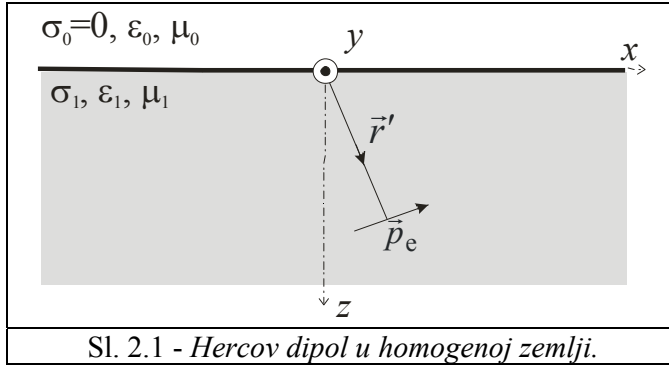
$$\vec{E} \cong -\text{grad } \varphi. \quad (2.1.27)$$

2.2 IZVOĐENJE GRINOVIH FUNKCIJA

Za analizu uzemljivačkih sistema koji su razmatrani u ovom radu, neophodno je poznavati Grinove funkcije za konkretne elektrodne sisteme, uključujući i geometriju i parametre okolne sredine. U tekstu koji sledi opisano je izvođenje i dati su izrazi za Grinove funkcije Hercovog dipola u homogenoj zemlji, odnosno tačkasti strujni izvor smešten unutar/izvan poluprovodne sferične nehomogenosti. Kombinacijom prethodno pomenutih izraza i kvazistacionarne teorije likova u ravnom ogledalu, izveden je i izraz za Grinovu funkciju tačkastog izvora smeštenog unutar, odnosno izvan poluprovodne polusferične nehomogenosti.

2.2.1 Hercov dipol u homogenoj zemlji

Da bi se izvela Grinova funkcija za potencijal Hercovog dipola smeštenog u homogenoj zemlji posmatra se strujni element proizvoljno orijentisanog momenta $\vec{p}_e(\vec{r}')$, $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$, napajan strujom industrijskih frekvencija ([2.4], [2.5]).



Sl. 2.1 - Hertzov dipol u homogenoj zemlji.

Strujni element smešten je u proizvoljnoj tački u zemlji (Sl. 2.1). Ravan $z = 0$ deli prostor na dva poluprostora. Poluprostor definisan sa $z \leq 0$ je vazduh, dok je zemlja zapravo poluprostor definisan sa $z \geq 0$. Zemlja je u opštem slučaju nehomogena i izotropna sredina, dok je tokom ove analize tretirana kao homogena izotropna sredina parametara $\sigma_1, \epsilon_1, \mu_1$, $\underline{\sigma}_1 = \sigma_1 + j\omega\epsilon_1$, $\underline{\gamma}_1 = (j\omega\mu_1\underline{\sigma}_1)^{1/2}$ (specifi-

čna provodnost, dielektrična konstanta, magnetna propustljivost, kompleksna specifična provodnost i kompleksna konstanta prostiranja, respektivno)³. Indeks "0" pridružen je sredini koja se nalazi iznad tla (vazduh), tako da su njene karakteristike opisane pomoću parametara $\sigma_0 = 0, \epsilon_0$ i μ_0 .

Integracijom sistema Maksimalovih jednačina moguće je odrediti električno \vec{E}_{i1} , i magnetno polje \vec{H}_{ij} koje u sredini označenoj indeksom $i = 0, 1$ (0-vazduh, 1-zemlja) stvara strujni element smešten u homogenoj zemlji (sredina 1)⁴. Struktura vektora električnog i magnetnog polja uključujući i električni skalar potencijal φ_{i1} , $i = 0, 1$, može se odrediti i preko Hertzovog vektora, primenom definicionih izraza (2.1.21), (2.1.22) i (2.1.24) koji u konkretnom slučaju dobijaju formu

$$\vec{E}_{i1} = -\text{grad}\varphi_{i1} - j\omega\mu_i\underline{\sigma}_i\vec{\Pi}_{i1} = \text{graddiv}\vec{\Pi}_{i1} - \underline{\gamma}_i^2\vec{\Pi}_{i1}, \quad (2.2.1)$$

$$\vec{H}_{i1} = \underline{\sigma}_i \text{rot}\vec{\Pi}_{i1} \quad (2.2.2)$$

$$\varphi_{i1} = -\text{div}\vec{\Pi}_{i1}, \quad i = 0, 1. \quad (2.2.3)$$

Da bi se primenili prethodni izrazi, očigledno je neophodno najpre odrediti Hertzov vektor $\vec{\Pi}_{i1}$. Ovo je moguće učiniti integracijom sistema Helmholtzovih diferencijalnih jednačina

$$\Delta\vec{\Pi}_{i1} - \underline{\gamma}_i^2\vec{\Pi}_{i1} = -\frac{\vec{J}_e}{\underline{\sigma}_i}\delta_{i1}. \quad (2.2.4)$$

U prethodnom izrazu je: $\vec{J}_e = \vec{p}_e(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}')$, $\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$ -Dirakova (Dirac) prostorna funkcija (često nazvana i "delta" prostorna funkcija), i δ_{i1} -Kronekerov (Kronecker) simbol ("Kronekerova delta"). Nepoznate konstante, koje se javljaju pri integraciji jednačina (2.2.4), određuju se iz opštih graničnih uslova koje komponente Hertzovog vektora moraju da zadovolje na površini diskontinuiteta (u ovom slučaju tla). Ovi uslovi, shodno pridruženom koordinatnom sistemu sa Sl. 2.1, imaju oblik

$$\underline{\gamma}_0^2\Pi_{\eta 01} = \underline{\gamma}_1^2\Pi_{\eta 11}, \quad \eta = x, y, \quad (2.2.5)$$

$$\underline{\sigma}_0 \frac{\partial \Pi_{\eta 01}}{\partial z} = \underline{\sigma}_1 \frac{\partial \Pi_{\eta 11}}{\partial z}, \quad \eta = x, y, \quad (2.2.6)$$

$$\underline{\sigma}_0 \Pi_{z 01} = \underline{\sigma}_1 \Pi_{z 11} \quad (2.2.7)$$

$$\text{div}\vec{\Pi}_{01} = \text{div}\vec{\Pi}_{11}. \quad (2.2.8)$$

³ U referencama [2.4] i [2.5] detaljnije je opisano izvođenje za slučaj nehomogene zemlje aproksimirane sa ukupno N homogenih slojeva, pri čemu je iskorišćena činjenica da se karakteristike zemlje uglavnom menjaju po dubini, odnosno da je njena nehomogenost funkcija samo z -koordinate koordinatnog sistema sa Sl. 2.1.

⁴ Ovaj način obeležavanja indeksa biće i nadalje korišćen u tekstu i ponekada će se bez eksplicitnog označavanja podrazumevati da je vrednost indeksa $i = 0, 1$.

U domenu industrijskih frekvencija koji je od interesa za oblast kojom se ovaj rad bavi je $\left| \gamma_i^2 \right| \approx 0$, $i = 0, 1$, pa se sistem Helmholtzovih diferencijalnih jednačina (2.2.4) svodi na sistem Puasonovih (Poisson), odnosno Laplasovih (Laplace) diferencijalnih jednačina

$$\Delta \Pi_{\xi i 1} = -\frac{p_{e\xi}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta_{i1}, \quad \xi = x, y, z, \quad (2.2.9)$$

gde je $p_{e\xi}(\vec{r}') = I_e(s'_k)(\hat{s}'_k \hat{\xi}) ds'_k$ - projekcija strujnog elementa (čiji je smer definisan ortom \vec{s}'_k) na ξ - osu, $\xi = x, y, z$.

Diferencijalne jednačine date izrazom (2.2.9) rešavaju se uz pomoć para Furijeovih (Fourier) transformacija

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\alpha_x, \alpha_y, z) e^{j(\alpha_x x + \alpha_y y)} d\alpha_x d\alpha_y, \quad (2.2.10)$$

$$\tilde{f}(\alpha_x, \alpha_y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) e^{-j(\alpha_x x + \alpha_y y)} dx dy, \quad (2.2.11)$$

gde je $\tilde{f}(\alpha_x, \alpha_y, z)$ inverzna funkcija funkcije $f(x, y, z)$ u Henkelovom (Hankel) domenu. Kada se (2.2.11) primeni na prostornu δ - funkciju dobija se

$$\tilde{\delta}(\alpha_x, \alpha_y, z) = \frac{1}{2\pi} e^{-j(\alpha_x x' + \alpha_y y')} \delta(z - z'), \quad (2.2.12)$$

pa je na osnovu (2.2.10)

$$\delta(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \delta(z - z') e^{j(\alpha_x(x-x') + \alpha_y(y-y'))} d\alpha_x d\alpha_y. \quad (2.2.13)$$

Takođe, na osnovu (2.2.11), komponente Hercovog vektora mogu se izraziti kao

$$\Pi_{\xi i 1}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Pi}_{\xi i 1}(\alpha_x, \alpha_y, z) e^{j(\alpha_x x + \alpha_y y)} d\alpha_x d\alpha_y, \quad \xi = x, y, z, \quad i = 0, 1. \quad (2.2.14)$$

Smenom (2.2.13) i (2.2.14) u sistem diferencijalnih jednačina (2.2.9), dobija se sistem nehomogenih, odnosno homogenih diferencijalnih jednačina drugog reda za komponente Hercovog vektora u Henkelovom domenu oblika

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha^2 \right) \tilde{\Pi}_{\xi i 1}(\alpha_x, \alpha_y, z) = -2P_{\xi} \delta(z - z') \delta_{i1}, \quad \xi = x, y, z, \quad i = 0, 1, \quad (2.2.15)$$

gde je $P_{\xi} = \frac{p_{e\xi}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} e^{-j(\alpha_x x' + \alpha_y y')}$, $\xi = x, y, z$ i $\alpha^2 = \alpha_x^2 + \alpha_y^2$.

Rešenje diferencijalnih jednačina koje čine sistem opisan prethodnim izrazom pretpostavlja se u sledećoj formi

$$\tilde{\Pi}_{\xi i 1} = \begin{cases} C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z}, & \text{za } i = 0 \\ \tilde{\Pi}_{\xi 11}^> = \tilde{\Pi}_{\xi 11}^> \text{hom} + \tilde{\Pi}_{\xi 11}^> \text{part}, & z \geq z', \\ \tilde{\Pi}_{\xi 11}^< = \tilde{\Pi}_{\xi 11}^< \text{hom} + \tilde{\Pi}_{\xi 11}^< \text{part}, & z \leq z', \end{cases} \quad \text{za } i = 1, \quad (2.2.16)$$

gde oznake "hom" i "part" označavaju homogeni i partikularni deo rešenja respektivno. Homogeni deo rešenja koji se pojavljuje u izrazu (2.2.16) za $i=1$ ima oblik

$$\tilde{\Pi}_{\xi 11}^{\text{hom}} > = C_1' e^{\alpha z} + C_2' e^{-\alpha z}, \text{ za } z \geq z' \text{ i} \quad (2.2.17)$$

$$\tilde{\Pi}_{\xi 11}^{\text{hom}} < = C_1'' e^{\alpha z} + C_2'' e^{-\alpha z}, \text{ za } z \leq z', \quad (2.2.18)$$

dok je partikularni deo rešenja

$$\tilde{\Pi}_{\xi 11}^{\text{part}} > = -\frac{1}{j\alpha} \int_{s=z'}^{z \geq z'} 2P_\xi \delta(s-z') \sin[j\alpha(z-s)] ds = \frac{P_\xi}{2\alpha} [e^{-\alpha(z-z')} - e^{\alpha(z-z')}] \text{ za } z \geq z' \quad (2.2.19)$$

$$\tilde{\Pi}_{\xi 11}^{\text{part}} < = \frac{1}{j\alpha} \int_{s=z'}^{z \leq z'} 2P_\xi \delta(s-z') \sin[j\alpha(z-s)] ds = -\frac{P_\xi}{2\alpha} [e^{-\alpha(z-z')} - e^{\alpha(z-z')}] \text{ za } z \leq z'. \quad (2.2.20)$$

Na osnovu prethodnih izraza, potpuni oblik rešenja za $i=1$ koji uključuje i partikularni i homogeni deo, može se napisati u obliku

$$\tilde{\Pi}_{\xi 11}^{\text{hom}} > = \frac{P_\xi}{\alpha} e^{-\alpha(z-z')} + A_1 e^{\alpha z} + B_1 e^{-\alpha z} \text{ za } z \geq z' \text{ i} \quad (2.2.21)$$

$$\tilde{\Pi}_{\xi 11}^{\text{hom}} < = \frac{P_\xi}{\alpha} e^{\alpha(z-z')} + A_2 e^{\alpha z} + B_2 e^{-\alpha z}, \text{ za } z \leq z', \xi = x, y, z, \quad (2.2.22)$$

gde su A_1, A_2, B_1 i B_2 nove konstante. Iz uslova neprekidnosti Hercovog vektora i njegovog izvoda po z -osi,

$$\tilde{\Pi}_{\xi 11}^{\text{hom}} > \Big|_{z=z'+\Delta} = \tilde{\Pi}_{\xi 11}^{\text{hom}} < \Big|_{z=z'-\Delta}, \Delta \rightarrow 0, \text{ odnosno} \quad (2.2.23)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{\Pi}_{\xi 11}^{\text{hom}} >}{\partial z} \Big|_{z=z'+\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{\Pi}_{\xi 11}^{\text{hom}} <}{\partial z} \Big|_{z=z'-\Delta} = -2P_\xi, \quad (2.2.24)$$

dobija se da je $A_1 = A_2$ i $B_1 = B_2$, pa se rešenje (2.2.16) konačno dobija jedinstveni oblik

$$\tilde{\Pi}_{\xi i1} = \frac{P_\xi}{\alpha} [\delta_{i1} e^{-\alpha|z-z'|} + A_{\xi i1} e^{\alpha z} + B_{\xi i1} e^{-\alpha z}] = \frac{P_\xi e_\xi(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \tilde{f}_{\xi i1}(\alpha_x, \alpha_y, z) e^{-j(\alpha_x x' + \alpha_y y')}, \text{ gde je} \quad (2.2.25)$$

$$\tilde{f}_{\xi i1}(\alpha_x, \alpha_y, z) = \frac{\delta_{i1} e^{-\alpha|z-z'|} + A_{\xi i1} e^{\alpha z} + B_{\xi i1} e^{-\alpha z}}{\alpha}.$$

U prethodnom izrazu $A_{\xi i1}$ i $B_{\xi i1}$, $i=0,1$, $\xi = x, y, z$, su nove konstante. Iz uslova da Hercov vektor u vazduhu (sredina $i=0$) i u zemlji ($i=1$) za $z \rightarrow \pm\infty$ ima konačnu vrednost, dobija se $B_{\xi 01} = A_{\xi 11} = 0$. Preostale konstante integracije određuju se iz opštih graničnih uslova (2.2.5-2.2.8) koji u Henkelovom domenu imaju opšti oblik

$$\gamma_0^2 \tilde{\Pi}_{\eta 01} = \gamma_1^2 \tilde{\Pi}_{\eta 11}, \eta = x, y, \quad (2.2.26)$$

$$\sigma_0 \frac{\partial \tilde{\Pi}_{\eta 01}}{\partial z} = \sigma_1 \frac{\partial \tilde{\Pi}_{\eta 11}}{\partial z}, \eta = x, y, \quad (2.2.27)$$

$$\sigma_0 \tilde{\Pi}_{z01} = \sigma_1 \tilde{\Pi}_{z11} \text{ i} \quad (2.2.28)$$

$$j\alpha_x \tilde{\Pi}_{x01} + j\alpha_y \tilde{\Pi}_{y01} + \frac{\partial \tilde{\Pi}_{z01}}{\partial z} = j\alpha_x \tilde{\Pi}_{x11} + j\alpha_y \tilde{\Pi}_{y11} + \frac{\partial \tilde{\Pi}_{z11}}{\partial z}, i=0,1. \quad (2.2.29)$$

Rešenja za konstante integracije očigledno su funkcije parametara sredine, promenljivih z, z', α_x i α_y . Činioci $j\alpha_x$ i $j\alpha_y$ u Henkelovom domenu mogu se prema (2.14) zameniti izvodom $\partial/\partial x$ i $\partial/\partial y$ u prostornim koordinatama pa se na osnovu (2.14) i (2.25) može se pisati

$$\Pi_{\xi i1}(x, y, z) = \frac{p_{e\xi}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_{\xi i1}(\alpha_x, \alpha_y, z) e^{j[\alpha_x(x-x') + \alpha_y(y-y')] } d\alpha_x d\alpha_y. \quad (2.230)$$

Uvođenjem u prethodni izraz smena

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \alpha \cos \beta, \quad \alpha_y = \alpha \sin \beta, \quad \tan \beta = \alpha_y / \alpha_x, \quad d\alpha_x d\alpha_y = \alpha d\alpha d\beta, \\ \vec{\rho}_0 &= (x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} = \rho_0 \cos \delta \hat{x} + \rho_0 \sin \delta \hat{y} \quad \text{i} \quad \tan \delta = (y-y')/(x-x'), \end{aligned} \quad (2.231)$$

dobija se

$$\Pi_{\xi i1}(x, y, z) = \frac{p_{e\xi}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} f_{\xi i1}(x, y, z) = \frac{p_{e\xi}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \int_{\alpha=0}^{\infty} \tilde{f}_{\xi i1}(\alpha, z) \alpha \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} e^{j\alpha\rho_0 \cos(\beta-\delta)} d\beta \right] d\alpha. \quad (2.232)$$

Kako je $J_0(\alpha\rho_0) \frac{1}{2\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} e^{j\alpha\rho_0 \cos(\beta-\delta)} d\beta$ po definiciji Beselova (Bessel) funkcija prve vrste nultog reda, konačno rešenje za komponente Hercovog vektora može napisati u obliku

$$\Pi_{\xi i1} = \frac{p_{e\xi}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \int_{\alpha=0}^{\infty} \tilde{f}_{\xi i1}(\alpha, z) \alpha J_0(\alpha\rho_0) d\alpha, \quad \xi = x, y, z, \quad i = 0, 1. \quad (2.233)$$

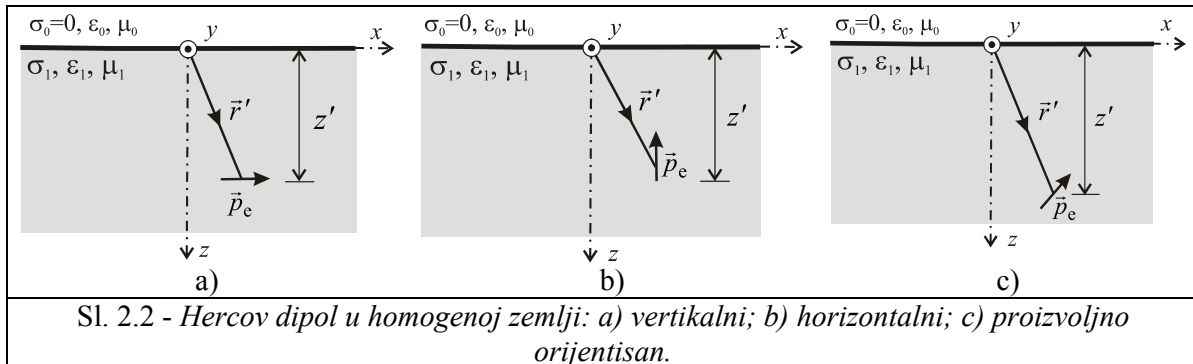
U tekstu koji sledi detalno je opisan postupak za određivanje konstanti koje figurišu u razvijenoj formi izraza (2.233). Pri tome su odvojeno razmatrani vertikalni (Sl. 2.2a) i horizontalni (Sl. 2.2b) Hercov dipol, dok su izrazi koji se odnose na proizvoljno orijentisan dipol (Sl. 2.2c) formirani superpozicijom dobijenih rešenja.

2.2.1.1 Vertikalni Hercov dipol ($p_{ez}(\vec{r}') \neq 0, p_{e\eta}(\vec{r}') = 0, \eta = x, y$)

Na osnovu prethodno izložene analize, opšte rešenje (2.2.25) u slučaju vertikalnog Hercovog dipola smeštenog u tački definisanoj vektorom položaja $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$ (Sl. 2.2a), dobija oblik⁵

$$d\tilde{\Pi}_{zz01} = \frac{P_z}{\alpha} A_{zz01} e^{\alpha z}, \quad z \leq 0 \quad \text{i} \quad (2.234)$$

$$d\tilde{\Pi}_{zz11} = \frac{P_{z1}}{\alpha} \left(e^{-\alpha|z-z'|} + B_{zz11} e^{-\alpha z} \right), \quad z \geq 0. \quad (2.235)$$



⁵ Upotrebljava se diferencijal komponenti jer se radi o tačkastom izvoru.

Prethodnim izrazima u indeksu je dodato još jedno "z" kako bi bilo naglašeno da se radi o z -komponenti koja potiče od vertikalne, z -komponente izvora. Pored nje, postoji i z -komponenta Hercovog vektora koja je posledica horizontalnih, η -komponenti, η = x, y. Shodno tome, rezultujuća z -komponenta Hercovog vektora u opštem slučaju određuje se superpozicijom ovih rešenja što će biti detaljnije objašnjeno kasnije, prilikom analize usamljenog horizontalnog Hercovog dipola u homogenoj zemlji.

Konstante A_{zz01} i B_{zz11} određuju se iz graničnih uslova datih izrazima (2.2.28) i (2.2.29)⁶. Tako se dobija

$$A_{zz01} = \frac{2\sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} e^{-\alpha z'} = T_{z10} e^{-\alpha z'} \quad (2.2.36)$$

$$B_{zz11} = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} e^{-\alpha z'} = R_{z01} e^{-\alpha z'}. \quad (2.2.37)$$

U izrazu (2.2.36), odnosno (2.2.37), pojavljuju se koeficijent refleksije R_{z01} i transmisije T_{z10} definisani kao

$$R_{z01} = -R_{z10} = T_{z01} - 1 = -T_{z10} + 1 = \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1}. \quad (2.2.38)$$

Kada se konstante date izrazima (2.2.36) i (2.2.37) smene u (2.2.34) i (2.2.35), a ovi u opšte rešenje (2.2.33) dobija se

$$d\Pi_{zz01} = \frac{p_{ez}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \int_{\alpha=0}^{\infty} T_{z10} e^{\alpha(z-z')} J_0(\alpha\rho_0) d\alpha, \quad z \leq 0 \quad (2.2.39)$$

$$d\Pi_{zz11} = \frac{p_{ez}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \int_{\alpha=0}^{\infty} \left(e^{-\alpha|z-z'|} + R_{z01} e^{-\alpha(z+z')} \right) J_0(\alpha\rho_0) d\alpha, \quad z \geq 0, \quad (2.2.40)$$

gde je $\rho_0^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$. Korišćenjem identiteta ([2.6], izraz 11.4.39)

$$\int_{\alpha=0}^{\infty} e^{-\alpha|b|} J_0(\alpha\rho) d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}, \quad b \in R, \quad (2.2.41)$$

izrazi (2.2.39) i (2.2.40) postaju

$$d\Pi_{zz01} = \frac{p_{ez}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} T_{z10} \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (z-z')^2}} = \frac{p_{ez}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} T_{z10} \frac{1}{r_{10}}, \quad z \leq 0 \quad (2.2.42)$$

$$d\Pi_{zz11} = \frac{p_{ez}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + (z-z')^2}} + \frac{R_{z01}}{\sqrt{\rho_0^2 + (z+z')^2}} \right) = \frac{p_{ez}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{r_{10}} + \frac{R_{z01}}{r_{20}} \right), \quad z \geq 0. \quad (2.2.43)$$

Oznake r_{10} i r_{20} u prethodna dva izraza

$$r_{10} = \sqrt{\rho_0^2 + (z-z')^2} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \quad (2.2.44)$$

$$r_{20} = \sqrt{\rho_0^2 + (z+z')^2} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}, \quad (2.2.45)$$

obeležavaju rastojanja vertikalnog Hercovog dipola (tačka (x', y', z')) i njegovog lika u ravnom ogledalu (tačka $(x', y', -z')$) od tačke određivanja Hercovog vektora (tačka (x, y, z)) respektivno.

⁶ Kod graničnog uslova (2.2.29) treba voditi računa o znaku izraza $z-z'$ kada se traži izvod po z.

2.2.1.2 Horizontalni Hercov dipol ($p_{ez}(\vec{r}') = 0$, $p_{e\eta}(\vec{r}') \neq 0$, $\eta = x, y$)

Posmatra se horizontalni Hercov dipol (Sl. 2.2.b) smešten u tački definisanoj vektorom položaja $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$. Prema opštem rešenju (2.2.25) kada je $p_{ez}(\vec{r}') = 0$, odgovarajuća vertikalna z -komponenta takođe je jednaka nuli. Međutim, tada ne bi bilo moguće zadovoljiti granični uslov (2.2.29). Za zadovoljenje pomenutog uslova neophodno je postojanje vertikalne z -komponente Hercovog vektora i u slučaju horizontalnog dipola, čija je vertikalna komponenta jednaka nuli. Ova "sekundarna" z -komponenta objašnjava se indukovanim strujama na razdvojnoj površini koje stvara polje horizontalnog Hercovog dipola. U skladu sa prethodnom diskusijom, komponente Hercovog vektora pretpostavljaju se u obliku

$$d\tilde{\Pi}_{\eta 01} = \frac{P_{\eta}}{\alpha} A_{\eta 01} e^{\alpha z}, \quad z \leq 0, \quad (2.2.46)$$

$$d\tilde{\Pi}_{\eta 11} = \frac{P_{\eta}}{\alpha} \left[e^{-\alpha|z-z'|} + B_{\eta 11} e^{-\alpha z} \right], \quad z \geq 0, \quad (2.2.47)$$

$$d\tilde{\Pi}_{z\eta 01} = \frac{P_{\eta}}{\alpha} A_{z\eta 01} e^{\alpha z}, \quad z \leq 0 \quad i \quad (2.2.48)$$

$$d\tilde{\Pi}_{z\eta 11} = \frac{P_{\eta}}{\alpha} B_{z\eta 11} e^{-\alpha z}, \quad z \geq 0, \quad \eta = x, y. \quad (2.2.49)$$

Na osnovu graničnih uslova (2.2.26-2.2.29) za nepoznate konstante u izrazima (2.2.46-2.2.49) dobija se

$$A_{\eta 01} = \frac{\underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_0} T_{\eta 10} e^{-\alpha z'}, \quad (2.2.50)$$

$$B_{\eta 11} = R_{\eta 01} e^{-\alpha z'}, \quad (2.2.51)$$

$$A_{z\eta 01} = \frac{\underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_0} \left(\frac{\underline{\gamma}_0^2}{\underline{\gamma}_1^2} - 1 \right) T_{z10} T_{\eta 10} \frac{j\alpha_{\eta}}{2\alpha} e^{-\alpha z'} \quad i \quad (2.2.52)$$

$$B_{z\eta 11} = \left(\frac{\underline{\gamma}_0^2}{\underline{\gamma}_1^2} - 1 \right) T_{z10} T_{\eta 10} \frac{j\alpha_{\eta}}{2\alpha} e^{-\alpha z'}, \quad \eta = x, y. \quad (2.2.53)$$

U prethodna četiri izraza $\underline{\gamma}_i = (j\omega\mu_i\underline{\sigma}_i)^{1/2}$, $i = 0, 1$ predstavlja kompleksnu konstantu prostiranja za vazduh ($i = 0$), odnosno zemlju ($i = 1$), dok je T_{z10} koeficijent prethodno definisan izrazom (2.2.38). Sa $R_{\eta 01}$ i $T_{\eta 10}$ označeni su koeficijenti refleksije, odnosno transmisije za horizontalne komponente određeni na osnovu izraza

$$R_{\eta 01} = -R_{\eta 10} = T_{\eta 01} - 1 = -T_{\eta 10} + 1 = \frac{\underline{\mu}_0 - \underline{\mu}_1}{\underline{\mu}_0 + \underline{\mu}_1}, \quad \eta = x, y. \quad (2.2.54)$$

Sukcesivnom smenom izraza (2.2.50-2.2.53) u pretpostavljena rešenja (2.2.46-2.2.49) i izraz (2.2.33), dobija se

$$d\Pi_{\eta 01} = \frac{p_{e\eta}(\vec{r}')}{4\pi\underline{\sigma}_1} \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_0} T_{\eta 10} e^{-\alpha(z'-z)} J_0(\alpha\rho_0) d\alpha, \quad z \leq 0, \quad (2.2.55)$$

$$d\Pi_{\eta 11} = \frac{p_{e\eta}(\vec{r}')}{4\pi\underline{\sigma}_1} \int_{\alpha=0}^{\infty} \left(e^{-\alpha|z-z'|} + R_{\eta 01} e^{-\alpha(z+z')} \right) J_0(\alpha\rho_0) d\alpha, \quad z \geq 0, \quad (2.2.56)$$

$$d\Pi_{z\eta 01} = \frac{p_{e\eta}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \left(\frac{\gamma_0^2}{\gamma_1^2} - 1 \right) T_{z10} T_{\eta 10} \frac{j\alpha_\eta}{2\alpha} e^{-\alpha(z'-z)} J_0(\alpha\rho_0) d\alpha, \quad z \leq 0 \quad \text{i} \quad (2.2.57)$$

$$d\Pi_{z\eta 11} = \frac{p_{e\eta}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \int_{\alpha=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma_0^2}{\gamma_1^2} - 1 \right) T_{z10} T_{\eta 10} \frac{j\alpha_\eta}{2\alpha} e^{-\alpha(z'+z)} J_0(\alpha\rho_0) d\alpha, \quad z \geq 0, \quad \eta = x, y. \quad (2.2.58)$$

Korišćenjem identiteta (2.2.41) i jednakosti ([PRILOG 1])

$$\frac{\partial}{\partial\eta} \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha|b|}}{\alpha} J_0(\alpha\rho) d\alpha = \frac{\partial}{\partial\eta} \left[-\ln\left(|b| + \sqrt{\rho^2 + b^2}\right) \right], \quad b \in R, \quad \eta = x, y \quad (2.2.59)$$

za komponente Hercovog vektora konačno se dobija

$$d\Pi_{\eta 01} = \frac{p_{e\eta}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \frac{\sigma_1}{\sigma_0} T_{\eta 10} \frac{1}{r_{10}}, \quad z \leq 0, \quad (2.2.60)$$

$$d\Pi_{\eta 11} = \frac{p_{e\eta}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{r_{10}} + R_{\eta 01} \frac{1}{r_{20}} \right), \quad z \geq 0, \quad (2.2.61)$$

$$d\Pi_{z\eta 01} = \frac{p_{e\eta}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{\gamma_0^2}{\gamma_1^2} - 1 \right) \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \frac{T_{z10} T_{\eta 10}}{2} \frac{\partial}{\partial\eta} \left[-\ln(|z-z'| + r_{10}) \right], \quad z \leq 0, \quad \text{i} \quad (2.2.62)$$

$$d\Pi_{z\eta 11} = \frac{p_{e\eta}(\vec{r}')}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{\gamma_0^2}{\gamma_1^2} - 1 \right) \frac{T_{z10} T_{\eta 10}}{2} \frac{\partial}{\partial\eta} \left[-\ln(z+z'+r_{20}) \right], \quad z \geq 0, \quad \eta = x, y. \quad (2.2.63)$$

Pri izvođenju prethodnih izraza korišćena je činjenica da se $j\alpha_\eta$ u Henkelovom domenu menja izvodom $\partial/\partial\eta$ u prostornom domenu, $\eta = x, y$. Rastojanja r_{10} i r_{20} kao i u slučaju vertikalnog Hercovog dipola predstavljaju vektore položaja tačke u kojoj se određuje Hercov vektor u odnosu na dipol i njegovog lik respektivno (izrazi (2.2.44) i (2.2.45)).

2.2.1.3 Proizvoljno orijentisani Hercov dipol ($p_{e\xi 1}(\vec{r}') \neq 0, \xi = x, y, z$)

Ukoliko Hercov dipol ima i vertikalnu (z) i horizontalnu ($\eta = x, y$) komponentu (Sl. 2.2.c), shodno principu superpozicije, z -komponente Hercovog vektora mogu se izraziti kao

$$d\Pi_{z01} = d\Pi_{zz01} + d\Pi_{z\eta 01}, \quad z \leq 0 \quad \text{i} \quad (2.2.64)$$

$$d\Pi_{z11} = d\Pi_{zz11} + d\Pi_{z\eta 11}, \quad z \geq 0, \quad \eta = x, y, \quad (2.2.65)$$

gde su $d\Pi_{zz01}$, $d\Pi_{z\eta 01}$, $d\Pi_{zz11}$ i $d\Pi_{z\eta 11}$ predstavljeni izrazima (2.2.42), (2.2.62), (2.2.43) i (2.2.63) respektivno. Horizontalne komponente komponente $d\Pi_{\eta 01}$ i $d\Pi_{\eta 11}$, $\eta = x, y$, date su izrazima (2.2.60), odnosno (2.2.61).

2.2.2 Tačkasti strujni izvor u prisustvu poluprovodne sfere

Shodno vrsti problema kojima se rad bavi, kao i primenjenim metodima, od interesa je poznavati Grinovu funkciju za tačkasti izvor u prisustvu poluprovodne sfere. Sam problem karakterizacije uticaja sfere načinjene od homogenog materijala na strukturu polja tačkastog izvora još od sredine XIX veka predmet je istraživanja u različitim oblastima teorijske fizike. Činjenica da se u radu analizirani problemi kvazistacionarnog elektromagnetnog polja uticala je na izbor literature i ponuđenih rešenja navedenih i diskutovanih u tekstu.

Za rešavanje problema koji uključuju sfernu nehomogenost, kandidatu su na raspolaganju bili modeli za određivanje uticaja sfernih provodnih ([2.7], [2.8]) i dielektričnih tela ([2.9]-[2.17]).

Ako se radi o statičkom, stacionarnom ili kvazistacionarnom polju, u radovima koji su bili dostupni kandidatu, tačnim rešenjem ovog problema bez izuzetka smatraju se izrazi koje je ponudio Straton (Stratton) u ref. [2.9] 1941. godine. Pomenuto rešenje dobijeno je integracijom Puasonove, odnosno Laplasove diferencijalne jednačine za tačkasto naelektrisanje smešteno u okolini sfere načinjene od homogenog dielektrika. Pri tome su u potpunosti zadovoljeni granični uslovi za potencijal i normalnu komponentu vektora električne indukcije. Koristeći drugačiju matematičku tehniku Lindel (Lindell) je u radu [2.10] dobio rešenje identično onom iz [2.9], dok je problem tačkastog izvora unutar dielektrične sfere u formi sličnoj rešenju iz [2.9] isti autor rešio u [2.11].

Gotovo identično rešenje istog problema dobijeno rešavanjem Puasonove, odnosno Laplasove jednačine metodom varijacije konstanti može se naći u [2.12].

U radu [2.13] predloženo rešenje dobijeno detaljnom analizom i primenom teorije likova, uključuje i beskonačne sume različitim tehnikama transformisane u integrale koji se u opštem slučaju ne mogu odrediti u zatvorenom obliku.

Problem sferične nehomogenosti i tačkastog opterećenja analiziran je i u referencama [2.14] i [2.15], pri čemu je korišćen Kelvinov faktor inverzije i uveden lik koji odgovara kontinualnom linijskom izvoru. Dobijeno rešenje odgovara onom iz [2.13].

Zajedničko za sva nabrojana rešenja je da je njihova primena u analizi (najčešće razmatranih) lineičnih i pločastih elektroda različitih geometrija skopčana sa određivanjem vrednosti suma koje sadrže beskonačan broj članova. Pomenuta činjenica predstavlja ozbiljan i često složen problem u primeni opisanih modela na analizu realnih elektrodnih sistema.

Približni izrazi za potencijal tačkastog strujnog izvora smeštenog izvan, odnosno unutar homogene poluprovodne sfere predloženi su u [2.16] i [2.17]. Rešenje je najpre pretpostavljeno u formi koja uključuje potencijal izvora i sistema likova u sfernom ogledalu, pri čemu je u obzir uzeta i neutralnost sfere (ukupno opterećenje sfere (ili struja oticanja sa sfere) jednaka je nuli). U ovom obliku rešenje u potpunosti ne zadovoljava granični uslov za normalnu komponentu vektora gustine totalne struje, pa je zbog toga prošireno beskonačnom sumom, sličnog oblika kao i suma koja se pojavljuje u tačnom rešenju iz [2.9]. Primenom teorije Ležandrovih (Legendre) polinoma određene su konstante i sabrana prisutna suma sa beskonačnim brojem članova, a prošireni oblik opisanog rešenja predstavljen je u zatvorenoj formi. Na opisani način formirano približno rešenje zadovoljava granične uslove na površini sfere, ali ne i Puasonovu, odnosno Laplasovu diferencijalnu jednačinu za potencijal koje su zadovoljene samo delimično.

Konačno, tokom izrade samog rada, razvijeno je i predloženo još jedno približno rešenje za problem tačkastog strujnog izvora smeštenog izvan, odnosno unutar sfere načinjene od homogenog poluprovodnog materijala ([2.18]). Polazeći od tačnog rešenja datog u [2.9]-[2.11] iz kog su izdvojeni članovi koji odgovaraju likovima u sfernom ogledalu, formirani su u zatvorenom obliku izrazi koji potpuno zadovoljavaju Puasonovu, odnosno Laplasovu diferencijalnu jednačinu kao i granični uslov za potencijal, dok je granični uslov za normalnu komponentu vektora gustine totalne struje delimično zadovoljen.

U tekstu koji sledi detaljnije će biti analiziran model koji je usvojen za tačan i predložen u [2.9], odnosno [2.11], zatim model opisan u [2.16] i [2.17] koji je korišćen od samog početka istraživanja vezanih za ovaj rad, kao i model nedavno razvijen i izložen u [2.18]. Na osnovu imena autora citiranih radova, u daljem tekstu ovi modeli biće navođeni i označavani kao modeli "Straton", "Veličković" i "Rančić", odnosno "S", "V" i "R" model respektivno.

Od značaja je napomenuti da je većina u prethodnom tekstu nabrojanih modela u izvornom obliku izvedena za tačkasto opterećenje i homogenu dielektričnu sferu. Kako se radi o stacionarnom režimu, korišćenjem formalnih analogija između elektrostatičkog polja i stacionarnog strujnog polja ([2.3]) dobijeni izrazi mogu se primeniti i na tačkasti strujni izvor i sferu konačne specifične provodnosti. Pri tome dielektričnoj konstanti, vektoru električne indukcije i naelektrisanju tačkastog iz-

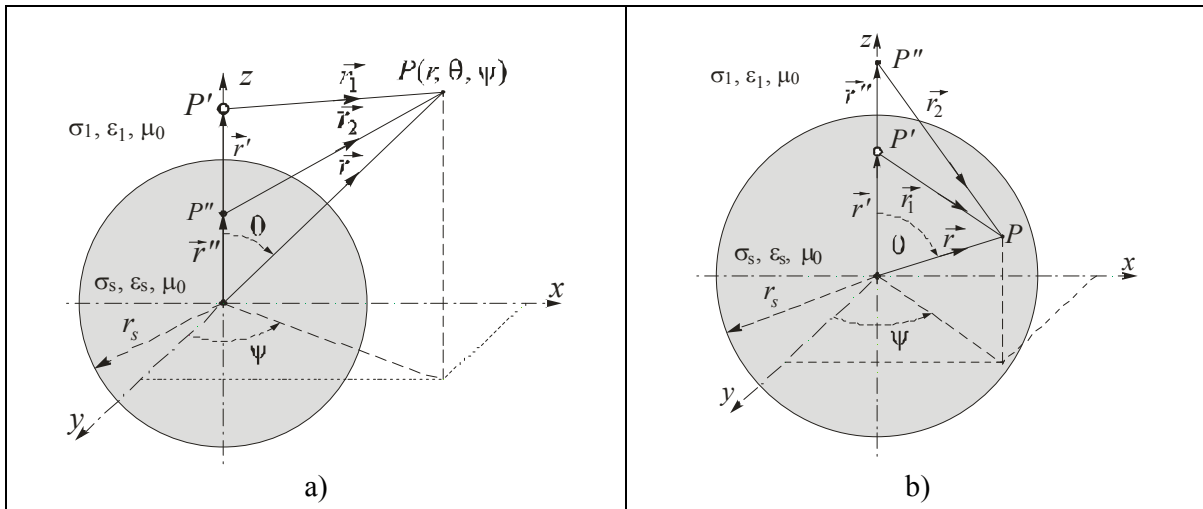
vora kod elektrostatičkog polja, u analizi stacionarnog strujnog polja odgovaraju specifična provodnost, vektor gustine totalne struje i struja tačkastog izvora respektivno.

Svi predloženi izrazi mogu se primeniti i u kompleksnom domenu u slučaju kvazistacionarne prostoperiodične pobude kada je sfera načinjena od homogenog poluprovodnog materijala, specifične provodnosti σ i dielektrične konstante ϵ . Pri tome se u predložena rešenja umesto specifične provodnosti σ , smešta kompleksna specifična provodnost $\underline{\sigma} = \sigma + j\omega\epsilon$, gde je ω kružna učestanost prostoperiodične pobude. Modeli "Veličković" i "Rančić" su, kao što je to već rečeno, u izvornom obliku formirani za rešavanje problema kvazistacionarnog strujnog polja.

2.2.2.1 Opis problema

Posmatra se sfera poluprečnika r_s načinjena od linearnog, izotropnog i homogenog poluprovodnog materijala, poznatih električnih parametara σ_s , $\epsilon_s = \epsilon_0\epsilon_{rs}$ i $\mu_s = \mu_0$, gde su σ_s -specifična provodnost, $\epsilon_s = \epsilon_0\epsilon_{rs}$ - permitivnost (dielektrična konstanta), i $\mu_s = \mu_0$ - permeabilnost. Sredina u kojoj je smeštena sfera je takođe linearna, izotropna i homogena, parametara σ_1 , $\epsilon_1 = \epsilon_0\epsilon_{r1}$ i $\mu_1 = \mu_0$.

Problemu je pridružen odgovarajući Dekartov (Descarte), odnosno sferni koordinatni sistem sa centrom smeštenim u centru sfere. Položaj tačkaste elektrode (tačka P'), definisan je vektorom \vec{r}' , pri čemu elektroda može da bude smeštena izvan ($r' > r_s$), Sl. 2.3a, ili unutar sfere ($r' < r_s$), Sl. 2.3b. Elektroda se preko izolovanog provodnika napaja prostoperiodičnom strujom jačine I_T i niske kružne učestanosti ω (kvazistacionarni režim). Na Slici 2.3 se može videti da je u oba slučaja $\vec{r}' = r'\hat{z}$, što ne utiče na opštost razmatranja. Tačka P u kojoj se određuje električni skalar potencijal može biti smeštena unutar ili izvan sfere i njen položaj definiše vektor \vec{r} . Položaj lika tačkastog izvora u sfernom ogledalu (tačka P'' , Sl. 2.3) određen je vektorom $\vec{r}'' = r''\hat{z}$, gde je $r'' = r_s^2/r'$ Kelvinov (Kelvin) faktor inverzije za sferno ogledalo. Rastojanje tačke P od tačke P' , odnosno P'' označeno je vektorima \vec{r}_1 i \vec{r}_2 respektivno. Na istoj slici uočava se da je u konkretnom slučaju $r_1 = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos\theta}$ i $r_2 = \sqrt{r''^2 + r^2 - 2r''r\cos\theta}$, gde su r i θ koordinate pridruženog sfernog koordinatnog sistema.



Sl. 2.3 - Tačkasti strujni izvor: a) izvan poluprovodne sfere; b) unutar poluprovodne sfere.

Kao što je to učinjeno i u slučaju Hecovog dipola u homogenoj zemlji, (odjeljak 2.2.1) sa $\underline{\sigma}_i = \sigma_i + j\omega\epsilon_i$, $\underline{\gamma}_i = (j\omega\mu_i\underline{\sigma}_i)^{1/2}$, $i = 1, s$ redom su označeni kompleksna specifična provodnost i

kompleksna konstanta prostiranja tla ($i = 1$), odnosno sfere ($i = s$). Sa $\underline{n}_{1s} = \underline{\gamma}_1 / \underline{\gamma}_s = 1 / \underline{n}_{s1}$ biće obeležen kompleksni indeks refrakcije. Takođe će u tekstu koji sledi biti korišćene i oznake za koeficijente refleksije $R_{1s/s1}$ i transmisije $T_{1s/s1}$ ⁷ definisane kao

$$R_{1s} = -R_{s1} = T_{1s} - 1 = -T_{s1} + 1 = \frac{\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_s}{\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1} = \frac{\underline{n}_{1s}^2 - 1}{\underline{n}_{1s}^2 + 1}. \quad (2.2.66)$$

Na način analogan onom u odeljku 2.2.1, potencijal će biti označen sa dva indeksa, od kojih prvi definiše sredinu u kojoj se nalazi tačka P , dok je drugi odgovara sredini u kojoj se nalazi tačkasti izvor, tj. tačka P' . Tako se potencijal u i -toj sredini koji potiče od izvora smeštenog u j -toj sredini označava kao $\varphi_{ij}^{S/V/R}$, $i, j = 1, s$. Gornji indeks pojavljuje se u tekstu po potrebi i definiše model korišćen za određivanje Grinove funkcije za električni skalar potencijal ("Straton"-S, "Veličković"-V i "Rančić"-R).

2.2.2.2 Tačno rešenje-Model "Straton"

a) Tačkasti izvor izvan poluprovodne sfere

Potencijal u sistemu sa Sl. 2.3a zadovoljava Puasonovu (za $r > r_s$, φ_{11}), odnosno Laplasovu diferencijalnu jednačinu (za $r < r_s$, φ_{s1}). Uzimajući u obzir činjenicu da se radi o problemu aksijalno simetričnom u odnosu na z -osu, u pridruženom sfernom koordinatnom sistemu, ove jednačine imaju oblik

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \theta} \right) = -\frac{I_T}{2\pi \underline{\sigma}_1} \frac{\delta(r-r')\delta(\theta)}{r^2 \sin \theta}, \quad r > r_s \quad (2.2.67)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi_{s1}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi_{s1}}{\partial \theta} \right) = 0, \quad r < r_s. \quad (2.2.68)$$

U izrazu (2.2.67), sa δ je obeležena Dirakova (Dirack) "delta" funkcija. Primenom metoda razdvajanja promenljivih ([2.3], str. 162-165) opšte rešenje navedenih diferencijalnih jednačina pretpostavljeno je u obliku

$$\varphi_{i1} = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n r^n + (B_n / r^{n+1})] P_n(\cos \theta), \quad i = 1, s, \quad (2.2.69)$$

gde je $P_n(\cos \theta)$ Ležandrov polinom n -tog stepena prve vrste. Tokom rešavanja opisanog problema koristi se Ležandrova diferencijalna jednačina ([2.6], izraz 8.1.1),

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \right) = -n(n+1) \sin \theta P_n(\cos \theta) \quad (2.2.70)$$

i jednakost ([2.6], izrazi 8.14.5 i 8.14.11)

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m. \end{cases} \quad (2.2.71)$$

Potencijal izvan sfere ($r > r_s$) određuje se superpozicijom potencijala primarnog izvora i potencijala indukovano opterećenja na razdvojnoj površini koji je pretpostavljen u generalnoj formi datoj izrazom (2.2.69). Potencijal unutar sfere ($r < r_s$) zadovoljava Laplasovu jednačinu i njegova opšta forma odgovara izrazu (2.2.58). Kada se uz prethodno navedene pretpostavke u analizu uklju-

⁷ Nadalje će u izlaganju biti izostavljena oznaka "z" u indeksu koeficijenata.

či i uslov da potencijal mora da ima konačnu vrednost u koordinatnom početku ($r = 0$), odnosno tačkama u beskonačnosti ($r \rightarrow \infty$), za potencijal izvan, odnosno unutar sfere dobija se

$$\varphi_{11} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1 r_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta), \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.72)$$

$$\varphi_{s1} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^n P_n(\cos\theta), \quad r < r_s. \quad (2.2.73)$$

Nepoznate konstante C_n , D_n , $n = 0, 1, \dots$ određuju se iz graničnih uslova za neprekidnost potencijala i normalne r -komponente vektora gustine totalne struje na površini sfere ($r = r_s$)

$$\varphi_{11}(r = r_s^+) = \varphi_{s1}(r = r_s^-) \quad \text{i} \quad (2.2.74)$$

$$\sigma_1 \left. \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial r} \right|_{r=r_s^+} = \sigma_s \left. \frac{\partial \varphi_{s1}}{\partial r} \right|_{r=r_s^-}. \quad (2.2.75)$$

Za $r = r_s$ je odnos $r/r' < 1$, pa je na osnovu razvoja (8.2.1) iz PRILOGA 2,

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos\theta}} = \frac{1}{r'\sqrt{1 + (r/r')^2 - 2(r/r')\cos\theta}} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{r'^n} P_n(\cos\theta). \quad (2.2.76)$$

Smenom prethodnog izraza u (2.2.72), granični uslovi (2.2.74-2.2.75) postaju

$$\frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_s^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{r_s^{n+1}} P_n(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n r_s^n P_n(\cos\theta) \quad \text{i} \quad (2.2.77)$$

$$\frac{I_T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n r_s^{n-1}}{r'^{n+1}} P_n(\cos\theta) - \sigma_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)C_n}{r_s^{n+2}} P_n(\cos\theta) = \sigma_s \sum_{n=0}^{\infty} n D_n r_s^{n-1} P_n(\cos\theta). \quad (2.2.78)$$

Konačno se za konstante C_n , D_n , $n = 0, 1, \dots$ dobija

$$C_n = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \frac{n(\sigma_1 - \sigma_s)}{n\sigma_s + (n+1)\sigma_1} \frac{r_s^{2n+1}}{r'^{n+1}} P_n(\cos\theta) \quad \text{i} \quad (2.2.79)$$

$$D_n = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \frac{(2n+1)\sigma_1}{n\sigma_s + (n+1)\sigma_1} \frac{P_n(\cos\theta)}{r'^{n+1}}, \quad n = 0, 1, \dots, \infty. \quad (2.2.80)$$

Sada se potencijal po modelu "Straton" može izraziti u obliku

$$\varphi_{11}^S = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(\sigma_1 - \sigma_s)}{n\sigma_s + (n+1)\sigma_1} \frac{r_s^{2n+1}}{(r'r)^{n+1}} P_n(\cos\theta) \right], \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.81)$$

$$\varphi_{s1}^S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\sigma_1}{n\sigma_s + (n+1)\sigma_1} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\theta), \quad r < r_s. \quad (2.2.82)$$

Izrazi (2.2.81-2.2.82) biće prezentovani u formi koja će u daljem tekstu omogućiti jednostavnije poređenje sa druga dva približna modela ([2.18]),

$$\varphi_{11}^S = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + R_{1s} \frac{r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) - \frac{T_{1s} R_{1s}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \frac{r_s^{2n+1}}{(r'r)^{n+1}} P_n(\cos\theta) \right], \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.83)$$

$$\varphi_{s1}^S = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{1}{r'} - \frac{T_{1s} R_{1s}}{2} \frac{1}{r'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \left(\frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos\theta) \right], \quad r < r_s. \quad (2.2.84)$$

Prilikom transformacije izraza (2.2.81-2.2.82) u (2.2.83-2.2.84) korišćen je identitet $P_0(x)=1$, ([2.3]). Koeficijenti refleksije R_{1s} i transmisije T_{1s} koji figurišu u prethodne dve formule već ranije su definisani izrazom (2.2.66), dok oznaka "S" asocira na model "Straton".

b) Tačkasti izvor unutar poluprovodne sfere

Problem tačkastog izvora unutar poluprovodne sfere (Sl. 2.3b) moguće je rešiti na način analogan proceduri primenjenoj za slučaj kada se izvor nalazi izvan sfere, opisanoj u prethodnom tekstu. Potencijal unutar i izvan sfere sada zadovoljava Laplasovu i Puasonovu jednačinu respektivno, tj.

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi_{1s}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi_{1s}}{\partial \theta} \right) = 0, \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.85)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi_{ss}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi_{ss}}{\partial \theta} \right) = -\frac{I_T}{2\pi\sigma_s} \frac{\delta(r-r')\delta(\theta)}{r^2 \sin \theta}, \quad r < r_s. \quad (2.2.86)$$

gde je, kao i u prethodnom slučaju, δ oznaka za Dirakovu "delta" funkciju. Opšte rešenje opet ima formu datu izrazom (2.2.69).

Sada se potencijal unutar sfere ($r < r_s$) određuje supozicijom potencijala primarnog izvora (smeštenog unutar sfere) i potencijala indukovnog opterećenja na razdvojnoj površini čiji je oblik dat izrazom (2.2.69). Potencijal u tačkama izvan sfere ($r > r_s$) zadovoljava Laplasovu jednačinu i, shodno prethodnoj analizi, njegova opšta forma odgovara izrazu (2.2.69). Uzimajući u obzir neophodnost da potencijal u svim tačkama ima konačnu vrednost, izrazi za potencijal izvan, odnosno unutar sfere imaju oblik

$$\varphi_{1s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta), \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.87)$$

$$\varphi_{ss} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_s r_1} + \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^n P_n(\cos \theta), \quad r < r_s. \quad (2.2.88)$$

Kao i u slučaju tačkastog izvora smeštenog izvan sfere, nepoznate konstante C_n , D_n , $n=0,1,\dots,\infty$ određuju se iz graničnih uslova za neprekidnost potencijala i normalne komponente vektora gustine totalne struje na površini sfere,

$$\varphi_{1s}(r=r_s^+) = \varphi_{ss}(r=r_s^-) \quad \text{i} \quad (2.2.89)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi_{1s}}{\partial r} \Big|_{r=r_s^+} = \sigma_s \frac{\partial \varphi_{ss}}{\partial r} \Big|_{r=r_s^-}. \quad (2.2.90)$$

Sada je za $r=r_s$ odnos r'/r manji od jedinice, pa se osnovu razvoja (8.2.1) iz PRILOGA 2 dobija,

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \theta}} = \frac{1}{r\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r) \cos \theta}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r^n} P_n(\cos \theta). \quad (2.2.91)$$

U ovom slučaju iz graničnih uslova dobijaju se jednačine

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{r_s^{n+1}} P_n(\cos \theta) = \frac{I_T}{4\pi\sigma_s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r'^n}{r_s^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \sum_{n=0}^{\infty} D_n r_s^n P_n(\cos \theta) \quad \text{i} \quad (2.2.92)$$

$$-\sigma_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)C_n}{r_s^{n+2}} P_n(\cos \theta) = -\frac{I_T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)r'^n}{r_s^{n+2}} P_n(\cos \theta) + \sigma_s \sum_{n=0}^{\infty} n D_n r_s^{n-1} P_n(\cos \theta). \quad (2.2.93)$$

Na osnovu prethodna dva izraza, konstante C_n , D_n , $n=0,1,\dots$ određene su u obliku

$$C_n = \frac{I_T}{4\pi} \frac{(2n+1)}{n\sigma_s + (n+1)\sigma_1} r'^n P_n(\cos\theta) \quad (2.2.94)$$

$$D_n = \frac{I_T}{4\pi\sigma_s} \frac{(n+1)(\sigma_s - \sigma_1)}{n\sigma_s + (n+1)\sigma_1} \frac{r'^n}{r_s^{2n+1}} P_n(\cos\theta), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2.95)$$

Potencijal po modelu "Straton" za sistem sa Sl. 2.3b sada je

$$\varphi_{1s}^S = \frac{I_T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n\sigma_s + (n+1)\sigma_1} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta), \quad r > r_s \quad (2.2.96)$$

$$\varphi_{ss}^S = \frac{I_T}{4\pi\sigma_s} \left[\frac{1}{r_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(\sigma_s - \sigma_1)}{n\sigma_s + (n+1)\sigma_1} \frac{(r'r)^n}{r_s^{2n+1}} r^n P_n(\cos\theta) \right], \quad r < r_s \quad (2.2.97)$$

Iz istog razloga i na način analogan onom u slučaju analize sistema sa Sl. 2.3a, prethodne dve jednačine preuređene su u oblik

$$\varphi_{1s}^S = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{1}{r} - \frac{T_{1s} R_{1s}}{2} \frac{1}{r'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \left(\frac{r'}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \right], \quad r > r_s \quad (2.2.98)$$

$$\varphi_{ss}^S = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r'} \frac{1}{r_2} - \frac{R_{1s}}{r_s} - \frac{T_{1s} R_{1s}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \frac{(r'r)^n}{r_s^{2n+1}} P_n(\cos\theta) \right]. \quad (2.2.99)$$

Koeficijenti refleksije R_{1s} i transmisije T_{1s} i T_{s1} definisani su izrazom (2.2.66).

2.2.2.3 Približno rešenje-Model "Veličković"

a) Tačkasti izvor izvan poluprovodne sfere

U radovima [2.16] i [2.17], Grinova funkcija za potencijal tačkastog strujnog izvora smeštenog izvan poluprovodne sfere, Sl. 2.3a, pretpostavljena je u obliku

$$\varphi_{11} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1 r_1} + \frac{C_1}{r_2} + \frac{C_2}{r}, \quad r > r_s \quad (2.2.100)$$

$$\varphi_{s1} = \frac{C_3}{r_1} + C_4, \quad r < r_s, \quad (2.2.101)$$

gde su $r_1 = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos\theta}$ i $r_2 = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r''r \cos\theta}$.

Konstante u izrazima (2.2.100) i (2.2.101) određuju se iz graničnih uslova za potencijal (2.2.74) i normalnu komponentu vektora gustine totalne struje (2.2.75).

Kako je za $r = r_s$, $r_2 = (r_s/r')r_1$, granični uslov za potencijal može se napisati u formi

$$\frac{I_T}{4\pi\sigma_1 r_1} + \frac{r' C_1}{r_s r_1} + \frac{C_2}{r_s} = \frac{C_3}{r_1} + C_4. \quad (2.2.102)$$

Iz uslova neutralnosti poluprovodne sfere dobija se

$$C_1 = -C_2, \quad (2.2.103)$$

pa se izjednačavanjem koeficijenata u (2.2.102) dobija

$$C_4 = C_2/r_s \quad (2.2.104)$$

$$\frac{I_T}{4\pi\sigma_1} + \frac{r_s C_1}{r'} = C_3. \quad (2.2.105)$$

Ako je $r' - r_s \ll r_s$, odnos r_s/r' teži jedinici, $r_s/r' \rightarrow 1$, pa je u tački $r = r_s^-$, $\theta = 0$,

$$\lim_{r'/r_s \rightarrow 1} r_1 = \lim_{r'/r_s \rightarrow 1} \sqrt{r'^2 + r_s^2 - 2rr_s} \rightarrow 0, \text{ tj. } \lim_{r'/r_s \rightarrow 1} \varphi_{s1}(r = r_s^-, \theta = 0) = \frac{C_3}{r_1} \quad (2.2.106)$$

Granična vrednost (2.2.106) odgovara vrednosti potencijala u posmatranoj tački dobijenom primenom teoreme lika u modifikovanom ravnom ogledalu ([2.17]),

$$\varphi(r = r_s^-, \theta = 0) = \frac{2\sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{I_T}{4\pi\sigma_s r_1} = \frac{I_T}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_s)r_1}. \quad (2.2.107)$$

Na bazi prethodne analize iz (2.2.106) i (2.2.107) dobija se

$$C_3 = \frac{I_T}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_s)}. \quad (2.2.108)$$

Smenom prethodnog izraza u (2.2.105) određeni su koeficijenti koeficijent C_1 i $C_2 = -C_1$ (2.2.103),

$$C_1 = -C_2 = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \frac{\sigma_1 - \sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{r_s}{r'}, \quad (2.2.109)$$

dok je na osnovu (2.2.104),

$$C_4 = \frac{C_2}{r_s} = -\frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \frac{\sigma_1 - \sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{1}{r'}. \quad (2.2.110)$$

Konačno, izrazi za potencijal se u ovom koraku mogu se napisati u obliku

$$\varphi_{11} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) \right], \quad r > r_s \text{ i} \quad (2.2.111)$$

$$\varphi_{s1} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{1}{r_1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{1}{r'} \right), \quad r < r_s. \quad (2.2.112)$$

U prethodnoj analizi iskorišćen je samo granični uslov za potencijal (2.2.74). Da bi bio zadovoljen i drugi granični uslov za normalnu komponentu vektora gustine totalne struje (2.2.75), prethodnim izrazima dodaje se linearna kombinacija funkcija koje uključuju i Ležandrove polinome $P_n(\cos\theta)$. Funkcije ovog tipa se inače pojavljuju u opštem rešenju Puasonove i Laplasove jednačine u sfernom koordinatnom sistemu, što je viđeno i u analizi modela "Straton", odeljak 2.2.2.2. Pretpostavljene forme izraza za potencijal sada su

$$\varphi_{11} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{r_s}{r} \right)^n P_n(\cos\theta), \quad r > r_s \text{ i} \quad (2.2.113)$$

$$\varphi_{s1} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{1}{r_1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{1}{r'} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{r_s} \right)^n P_n(\cos\theta), \quad r < r_s. \quad (2.2.114)$$

gde je $P_n(\cos\theta)$ Ležandrov polinom prve vrste. Nepoznati koeficijenti A_n , $n=1,2,\dots$ određuju se iz jednačine formirane na osnovu graničnog uslova za normalnu komponentu vektora gustine totalne struje (2.2.75) i izraza za potencijal (2.2.113) i (2.2.114), u tačkama na površini sfere $r = r_s$. Nakon izvršenih jednostavnih algebarskih transformacija, ova jednačina može se izraziti u obliku

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n P_n(\cos \theta) = \frac{I_T}{4\pi} \frac{\sigma_s - \sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_s)^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'} \right). \quad (2.2.115)$$

Primenom razvoja (2.2.76), uz korišćenje jednakosti $P_0(x) = 1$, prethodni izraz postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n P_n(\cos \theta) = \frac{I_T}{4\pi} \frac{\sigma_s - \sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_s)^2} \frac{r_s}{r'^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_s^{n-1}}{r'^{n-1}} P_n(\cos \theta). \quad (2.2.116)$$

Upoređivanjem leve i desne strane izraza (2.2.116) za koeficijente A_n dobija se

$$A_n = \frac{1}{n} \frac{I_T}{4\pi} \frac{\sigma_s - \sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_s)^2} \frac{r_s^n}{r'^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.117)$$

Smenom (2.2.117) u (2.2.113-2.2.114), izrazi za potencijal postaju

$$\varphi_{11} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) \right] + \frac{I_T}{4\pi r'} \frac{\sigma_s - \sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_s)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r_s^n}{r'^n} P_n(\cos \theta), \quad r > r_s \text{ i} \quad (2.2.118)$$

$$\varphi_{s1} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{1}{r_1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{1}{r'} \right] + \frac{I_T}{4\pi r'} \frac{\sigma_s - \sigma_1}{(\sigma_1 + \sigma_s)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r_s^n}{r'^n} P_n(\cos \theta), \quad r < r_s, \quad (2.2.119)$$

gde je $r'' = r_s^2 / r'$ u prethodnom tekstu ranije definisan Kelvinov faktor inverzije.

Kada se razvoj (8.2.6) iz PRILOGA 2 primeni na sume u izrazima za potencijal, one dobijaju zatvorenu formu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r_s^n}{r'^n} P_n(\cos \theta) = -\ln \left(\frac{r - r'' \cos \theta + \sqrt{r^2 + r''^2 - 2r''r \cos \theta}}{2r} \right), \quad (p = r''/r < 1) \text{ i} \quad (2.2.120)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r_s^n}{r'^n} P_n(\cos \theta) = -\ln \left(\frac{r' - r \cos \theta + \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos \theta}}{2r'} \right), \quad (p = r/r' < 1). \quad (2.2.121)$$

Sa p je označen argument u razvoju (8.2.6) [PRILOG 1] za slučajeve kada kada se on primenjuje na sume (2.2.120) odnosno (2.2.121). Smenom u prethodne dve formule izraza za r_1 , odnosno r_2 ,

$$r_1 = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \theta} \text{ i } r_2 = \sqrt{r''^2 + r^2 - 2r''r \cos \theta}, \quad (2.2.122)$$

približni izrazi za potencijal po modelu "Veličković" konačno dobijaju oblik

$$\varphi_{11}^V = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r'} \frac{\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_s)}{(\sigma_1 + \sigma_s)^2} \ln \left(\frac{r - r'' \cos \theta + r_2}{2r} \right) \right], \quad r > r_s \text{ i} \quad (2.2.123)$$

$$\varphi_{s1}^V = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{1}{r_1} - \frac{\sigma_1 - \sigma_s}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{1}{r'} + \frac{1}{r'} \frac{\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_s)}{(\sigma_1 + \sigma_s)^2} \ln \left(\frac{r' - r \cos \theta + r_1}{2r'} \right) \right], \quad r < r_s. \quad (2.2.124)$$

Uređeni na način sličan onom na koji je to učinjeno prilikom analize modela "Straton", ovi izrazi dobijaju oblik

$$\varphi_{11}^V = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + R_{1s} \frac{r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r - r'' \cos \theta + r_2}{2r} \right) \right], \quad r > r_s \text{ i} \quad (2.2.125)$$

$$\varphi_{s1}^V = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{r_1} - \frac{R_{1s}}{r'} + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r' - r \cos \theta + r_1}{2r'} \right) \right], \quad r < r_s. \quad (2.2.126)$$

Oznaka "V", kao što je to već rečeno, označava da se radi o izrazima koji karakterišu model "Veličković".

b) Tačkasti izvor unutar poluprovodne sfere

Procedura analogna onoj koja je primenjena u slučaju tačkastog izvora smeštenog izvan sfere ("V" model), može se formulisati i iskoristiti za određivanje Grinove funkcije tačkastog strujnog izvora koji se nalazi unutar poluprovodne sfere. Sada se potencijal tačkastog strujnog izvora smeštenog unutar poluprovodne sfere, Sl. 2.3b, pretpostavljena je u obliku

$$\varphi_{1s} = \frac{C_1}{r_1} + \frac{C_2}{r}, \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.127)$$

$$\varphi_{ss} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_s r_1} + \frac{C_3}{r_2} + C_4, \quad r < r_s. \quad (2.2.128)$$

Kao i u prethodnom izlaganju r_1 i r_2 definisani su izrazom (2.2.122), dok su granični uslovi za potencijal i normalnu komponentu vektora gustine totalne struje,

$$\varphi_{1s}(r = r_s^+) = \varphi_{ss}(r = r_s^-) \quad \text{i} \quad (2.2.129)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial \varphi_{1s}}{\partial r} \Big|_{r=r_s^+} = \sigma_s \frac{\partial \varphi_{ss}}{\partial r} \Big|_{r=r_s^-}. \quad (2.2.130)$$

Iz graničnog uslova za potencijal (2.2.129), uz korišćenje uslova da je na površini sfere (za $r = r_s$), $r_2 = (r_s/r')r_1$, dobija se

$$\frac{C_1}{r_1} + \frac{C_2}{r_s} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_s r_1} + \frac{r' C_3}{r_s r_1} + C_4. \quad (2.2.131)$$

Nakon izjednačavanja koeficijenata u (2.2.131) je

$$C_4 = C_2/r_s \quad \text{i} \quad (2.2.132)$$

$$\frac{I_T}{4\pi\sigma_s} + \frac{r' C_3}{r_s} = C_1. \quad (2.2.133)$$

Ukupna struja kroz sferu je I_T što za posledicu ima uslov

$$C_1 + C_2 = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1}. \quad (2.2.134)$$

U slučaju da je $r' - r_s \ll r_s$, važi da $r_s/r' \rightarrow 1$, pa je u tački $r = r_s^-, \theta = 0$ ispunjen uslov

$$\lim_{r'/r_s \rightarrow 1} r_1 = \lim_{r'/r_s \rightarrow 1} \sqrt{r'^2 + r_s^2 - 2rr'_s} \rightarrow 0, \quad \text{tj.} \quad \lim_{r'/r_s \rightarrow 1} \varphi_{1s}(r = r_s^-, \theta = 0) = \frac{C_1}{r_1}. \quad (2.2.135)$$

Granična vrednost data prethodnim izrazom odgovara vrednosti potencijala u posmatranoj tački dobijenom primenom teoreme lika u modifikovanom ravnom ogledalu ([2.17]),

$$\varphi(r = r_s^-, \theta = 0) = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{I_T}{4\pi\sigma_1 r_1} = \frac{I_T}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_s)r_1}. \quad (2.2.136)$$

Na bazi prethodne analize iz izraza (2.2.132-2.2.135) određeni su koeficijenti u izrazima (2.2.127-2.2.128),

$$C_1 = \frac{I_T}{2\pi(\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_s)}, \quad (2.2.137)$$

$$C_2 = \frac{I_T}{4\pi\underline{\sigma}_1} \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_s}, \quad (2.2.138)$$

$$C_3 = \frac{I_T}{4\pi\underline{\sigma}_s} \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1} \frac{r'_s}{r'} \quad \text{i} \quad (2.2.139)$$

$$C_4 = \frac{I_T}{4\pi\underline{\sigma}_1} \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1} \frac{1}{r_s}. \quad (2.2.140)$$

Smenom obrazaca (2.2.137-2.2.140) u (2.2.127-2.2.128) dobija se

$$\varphi_{1s} = \frac{I_T}{4\pi\underline{\sigma}_s} \left(\frac{2\underline{\sigma}_s}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_s} \frac{1}{r_1} + \frac{\underline{\sigma}_s}{\underline{\sigma}_1} \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1} \frac{1}{r} \right), \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.141)$$

$$\varphi_{ss} = \frac{I_T}{4\pi\underline{\sigma}_s} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1} \frac{r'_s}{r'_2} \frac{1}{r_2} + \frac{\underline{\sigma}_s}{\underline{\sigma}_1} \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1} \frac{1}{r_s} \right), \quad r < r_s. \quad (2.2.142)$$

Kao i u slučaju tačkastog izvora van sfere, da bi se zadovoljio granični uslov (2.2.130) izrazi za potencijal prošireni su linearnom kombinacijom funkcija istog oblika kao i u izrazima (2.2.113-2.2.114). Sada je

$$\varphi_{1s} = \frac{I_T}{4\pi\underline{\sigma}_s} \left(\frac{2\underline{\sigma}_s}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_s} \frac{1}{r_1} + \frac{\underline{\sigma}_s}{\underline{\sigma}_1} \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1} \frac{1}{r} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{r_s}{r} \right)^n P_n(\cos\theta), \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.143)$$

$$\varphi_{ss} = \frac{I_T}{4\pi\underline{\sigma}_s} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1} \frac{r'_s}{r'_2} \frac{1}{r_2} + \frac{\underline{\sigma}_s}{\underline{\sigma}_1} \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1} \frac{1}{r_s} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{r_s} \right)^n P_n(\cos\theta), \quad r < r_s. \quad (2.2.144)$$

Jednačina formirana na osnovu graničnog uslova za normalnu komponentu totalne struje (2.2.131) i izvršenih transformacija je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n P_n(\cos\theta) = \frac{I_T}{4\pi} \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{(\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_s)^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_s} \right). \quad (2.2.145)$$

Primenom razvoja (2.2.76), uz korišćenje jednakosti $P_0(x) = 1$, prethodni izraz postaje

$$\sum_{n=1}^{\infty} n A_n P_n(\cos\theta) = \frac{I_T}{4\pi} \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{(\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_s)^2} \frac{1}{r_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'^n}{r_s^n} P_n(\cos\theta). \quad (2.2.146)$$

Upoređivanjem leve i desne strane izraza (2.2.146) za koeficijente A_n dobija se

$$A_n = \frac{1}{n} \frac{I_T}{4\pi} \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{(\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_s)^2} \frac{r'^n}{r_s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2.147)$$

Smenom (2.2.147) u (2.2.143-2.2.144), izrazi za potencijal postaju

$$\varphi_{1s} = \frac{I_T}{4\pi} \left[\frac{2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_s} \frac{1}{r_1} + \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_1(\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1)} \frac{1}{r} + \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{(\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_s)^2} \frac{1}{r_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r'^n}{r_s^n} P_n(\cos\theta) \right], \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.148)$$

$$\varphi_{ss} = \frac{I_T}{4\pi} \left[\frac{1}{\underline{\sigma}_s r_1} + \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_s(\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1)} \frac{r'_s}{r'_2} + \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_1(\underline{\sigma}_s + \underline{\sigma}_1)} \frac{1}{r_s} + \frac{\underline{\sigma}_s - \underline{\sigma}_1}{(\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_s)^2} \frac{1}{r_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r'^n}{nr'^n} P_n(\cos\theta) \right], \quad r < r_s. \quad (2.2.149)$$

Kao i u prethodnom slučaju, sa $r'' = r_s^2/r'$ označen je Kelvinov faktor inverzije.

Primenom razvoja (8.2.6) ([PRILOG 2]) na sume u gornjim izrazima za potencijal, one u zatvorenom obliku postaju

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r''^n}{r^n} P_n(\cos\theta) = -\ln\left(\frac{r - r' \cos\theta + \sqrt{r^2 + r'^2 - 2r'r \cos\theta}}{2r}\right), (p = r'/r < 1) \text{ i} \quad (2.2.150)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{r^n}{r''^n} P_n(\cos\theta) = -\ln\left(\frac{r'' - r \cos\theta + \sqrt{r''^2 + r^2 - 2r'r'' \cos\theta}}{2r''}\right), (p = r/r'' < 1), \quad (2.2.151)$$

gde je p argument u razvoju (8.2.6) iz PRILOGA 2 za slučajeve kada se on primenjuje na sume iz izraza (2.2.148) i (2.2.149). Smenom (2.2.122) u prethodne dve formule, konačni oblik približnih izraza za potencijal po modelu "Veličković" kada je tačkasti izvor unutar sfere,

$$\varphi_{1s}^V = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_s} \frac{1}{r_1} + \frac{\sigma_s - \sigma_1}{\sigma_s + \sigma_1} \frac{1}{r} + \frac{\sigma_1(\sigma_s - \sigma_1)}{(\sigma_1 + \sigma_s)^2} \frac{1}{r_s} \ln\left(\frac{r - r' \cos\theta + r_1}{2r}\right) \right], r > r_s \text{ i} \quad (2.2.152)$$

$$\varphi_{ss}^V = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_s r_1} + \frac{\sigma_1(\sigma_s - \sigma_1)}{\sigma_s(\sigma_s + \sigma_1)} \frac{r_s}{r'r_2} + \frac{\sigma_s - \sigma_1}{(\sigma_s + \sigma_1)r_s} + \frac{\sigma_1(\sigma_s - \sigma_1)}{r_s(\sigma_1 + \sigma_s)^2} \ln\left(\frac{r'' - r \cos\theta + r_2}{2r''}\right) \right], r < r_s. \quad (2.2.153)$$

Kada se dobijeni izrazi predstave u obliku sličnom formi izraza (2.2.125-2.2.126), dobija se

$$\varphi_{1s}^V = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - \frac{R_{1s}}{r} + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r_s} \ln\left(\frac{r - r' \cos\theta + r_1}{2r}\right) \right], r > r_s \text{ i} \quad (2.2.154)$$

$$\varphi_{ss}^V = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r'r_2} - \frac{R_{1s}}{r_s} + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r_s} \ln\left(\frac{r'' - r \cos\theta + r_2}{2r''}\right) \right], r < r_s. \quad (2.2.155)$$

2.2.2.4 Približno rešenje-Model "Rančić"

a) Tačkasti izvor izvan poluprovodne sfere

Da bi se odredilo približno rešenje u zatvorenom obliku za Grinovu funkciju tačkastog izvora smeštenog izvan poluprovodne sfere, Sl. 2.3a, u [2.18] krenulo se od generalnih izraza po modelu "Straton" (2.2.72-2.2.73), preuređenih u formu koja odgovara obliku izraza (2.2.83-2.2.84),

$$\varphi_{11} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + C_1 \frac{r_s}{r'r_2} + B_0 \frac{r_s}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{r_s}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \right], r > r_s \text{ i} \quad (2.2.156)$$

$$\varphi_{s1} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[D_1 \frac{1}{r_1} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{r_s}\right)^n P_n(\cos\theta) \right], r < r_s, \quad (2.2.157)$$

gde su C_1 , D_1 , A_n i B_n , $n=0,1,\dots$ nepoznate konstante. Granični uslov za potencijal (2.2.74) na površini sfere ($r = r_s$, $r_2 = (r_s/r')r_1$), rezultira jednačinom

$$\frac{1}{r_1} + \frac{C_1}{r_1} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos\theta) = D_1 \frac{1}{r_1} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta). \quad (2.2.158)$$

Izjednačavanjem koeficijenata leve i desne strane u (2.2.158) dobija se

$$1 + C_1 = D_1 \text{ i} \quad (2.2.159)$$

$$A_n = B_n, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.2.160)$$

Analizom izraza za potencijal (2.2.156) i izraza za potencijal po modelu "Straton" (2.2.83-2.2.84) može se zaključiti da je $C_1 = R_{1s}$, odnosno $D_1 = 1 + C_1 = 1 + R_{1s} = T_{1s}$. Ako je granični uslov za gustinu totalne struje (2.2.75) približno zadovoljen ([2.19]⁸), važi da je $A_0 = B_0 = -R_{1s}/r'$. Konstante B_n , $n = 0, 1, \dots$, shodno prethodnoj analizi i graničnom uslovu (2.2.75) određuju se iz uslova

$$-\frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_s}{r'}\right)^n P_n(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n P_n(\cos\theta), \quad (2.2.161)$$

odakle je

$$B_n = -\frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \frac{1}{n} \left(\frac{r_s}{r'}\right)^n = A_n \quad (\text{iz jednačine (2.2.160)}). \quad (2.2.162)$$

Smenom prethodnog izraza u pretpostavljene izraze za potencijal po modelu "Rančić" (2.2.156-2.2.157) dobija se (uz korišćenje Kelvinovog faktora $r'' = r_s^2/r'$),

$$\varphi_{11} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + R_{1s} \frac{r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right) - \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \frac{r_s}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r''}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) \right], \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.163)$$

$$\varphi_{s1} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - \frac{R_{1s}}{r'} - \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\theta) \right], \quad r < r_s. \quad (2.2.164)$$

U jednačinama (2.2.163-2.2.164) javljaju se sume koje su u zatvorenom obliku određene izrazima (2.2.120) i (2.2.121) respektivno, pa izrazi za Grinovu funkciju po modelu "Rančić" dobijaju oblik

$$\varphi_{11}^R = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{R_{1s}r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right) + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \frac{r_s}{r} \ln \left(\frac{r - r'' \cos\theta + \sqrt{r^2 + r''^2 - 2r''r \cos\theta}}{2r} \right) \right], \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.165)$$

$$\varphi_{s1}^R = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - \frac{R_{1s}}{r'} + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r' - r \cos\theta + \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr' \cos\theta}}{2r'} \right) \right], \quad r < r_s, \quad (2.2.166)$$

odnosno smenom izraza (2.2.122) za r_1 i r_2 ,

$$\varphi_{11}^R = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{R_{1s}r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right) + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \frac{r_s}{r} \ln \left(\frac{r - r'' \cos\theta + r_2}{2r} \right) \right], \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.167)$$

$$\varphi_{s1}^R = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - \frac{R_{1s}}{r'} + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r' - r \cos\theta + r_1}{2r'} \right) \right], \quad r < r_s. \quad (2.2.168)$$

b) Tačkasti izvor unutar poluprovodne sfere

Primenom procedure slične onoj koja je primenjena na analizu sistema sa Sl. 2.3a, prilikom izvođenja izraza za potencijal po modelu "Rančić", može se odrediti približna Grinova funkcija tačkastog izvora smeštenog unutar poluprovodne sfere, Sl. 2.3b. Tako se sada kreće od formula koje imaju oblik sličan formi izraza (2.2.98-2.2.99) (model "Straton"),

$$\varphi_{1s} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[C_1 \frac{1}{r_1} + B_0 \frac{r_s}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(\frac{r_s}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos\theta) \right], \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.169)$$

⁸ U radu [2.18] ova referenca citirana je kao primer rešavanja složenih problema EM polja primenom metoda delimičnog zadovoljenja graničnih uslova.

$$\varphi_{ss} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{1}{r_1} + D_1 \frac{r_s}{r'} \frac{1}{r_2} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{r_s} \right)^n P_n(\cos\theta) \right], \quad (2.2.170)$$

gde su, kao i u slučaju izvora koji se nalazi izvan sfere, C_1 , D_1 , A_n i B_n , $n=0,1,\dots$ nepoznate konstante. Na osnovu graničnog uslova za potencijal na površini sfere ($r=r_s$), ovoga puta datog izrazom (2.2.129) formira se jednačina

$$C_1 \frac{1}{r_1} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos\theta) = \frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{1}{r_1} + D_1 \frac{1}{r_1} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta). \quad (2.2.171)$$

Izjednačavanjem koeficijenata u gornjem izrazu dobija se

$$C_1 = \frac{T_{1s}}{T_{s1}} + D_1 \quad (2.2.172)$$

$$A_n = B_n, \quad n=0,1,\dots \quad (2.2.173)$$

Analizom izraza (2.2.170) i izraza za potencijal po modelu "Straton" (2.2.99) može se zaključiti da je $C_1 = T_{1s}$, a zatim na osnovu (2.2.172) $D_1 = -R_{1s} T_{1s} / T_{s1}$. Na način sličan onome u prethodnoj tački, da bi se približno zadovoljio granični uslov za gustinu totalne struje (2.2.130), važi $A_0 = B_0 = -R_{1s} / r_s$. Konstante A_n , $n=0,1,\dots$, shodno prethodnoj analizi i graničnom uslovu (2.2.130) određuju se iz izraza

$$-\frac{R_{1s} T_{1s}}{2r_s} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r'}{r_s} \right)^n P_n(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n P_n(\cos\theta), \quad (2.2.174)$$

odakle je

$$A_n = -\frac{R_{1s} T_{1s}}{2r_s} \frac{1}{n} \left(\frac{r'}{r_s} \right)^n = B_n \quad (\text{iz jednačine (2.2.173)}). \quad (2.2.175)$$

Smenom (2.2.175) i $A_0 = B_0 = -R_{1s} / r_s$ u jednačine (2.2.169-2.2.170) dobija se (uz korišćenje Kelvinovog faktora $r'' = r_s^2 / r'$),

$$\varphi_{1s} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{1}{r} - \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos\theta) \right], \quad r > r_s \quad (2.2.176)$$

$$\varphi_{ss} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{1}{r_1} - \frac{R_{1s} T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r'} \frac{1}{r_2} - \frac{R_{1s}}{r_s} - \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r_s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r''} \right)^n P_n(\cos\theta) \right], \quad r < r_s \quad (2.2.177)$$

U jednačinama (2.2.176-2.2.177) javljaju se sume koje su u zatvorenom obliku određene izrazima (2.2.150) i (2.2.151) respektivno, pa konačno izrazi za Grinovu funkciju po modelu "Rančić" (uz korišćenje jednačina (2.2.122) dobijaju oblik

$$\varphi_{1s}^R(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{1}{r} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r} \ln \left(\frac{r - r' \cos\theta + r_1}{2r} \right) \right], \quad r > r_s \quad (2.2.178)$$

$$\varphi_{ss}^R(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{1}{r_1} - \frac{R_{1s} T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r'} \frac{1}{r_2} - \frac{R_{1s}}{r_s} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r_s} \ln \left(\frac{r'' - r \cos\theta + r_2}{2r''} \right) \right], \quad r < r_s. \quad (2.2.179)$$

2.2.2.5 Analiza opisanih rešenja

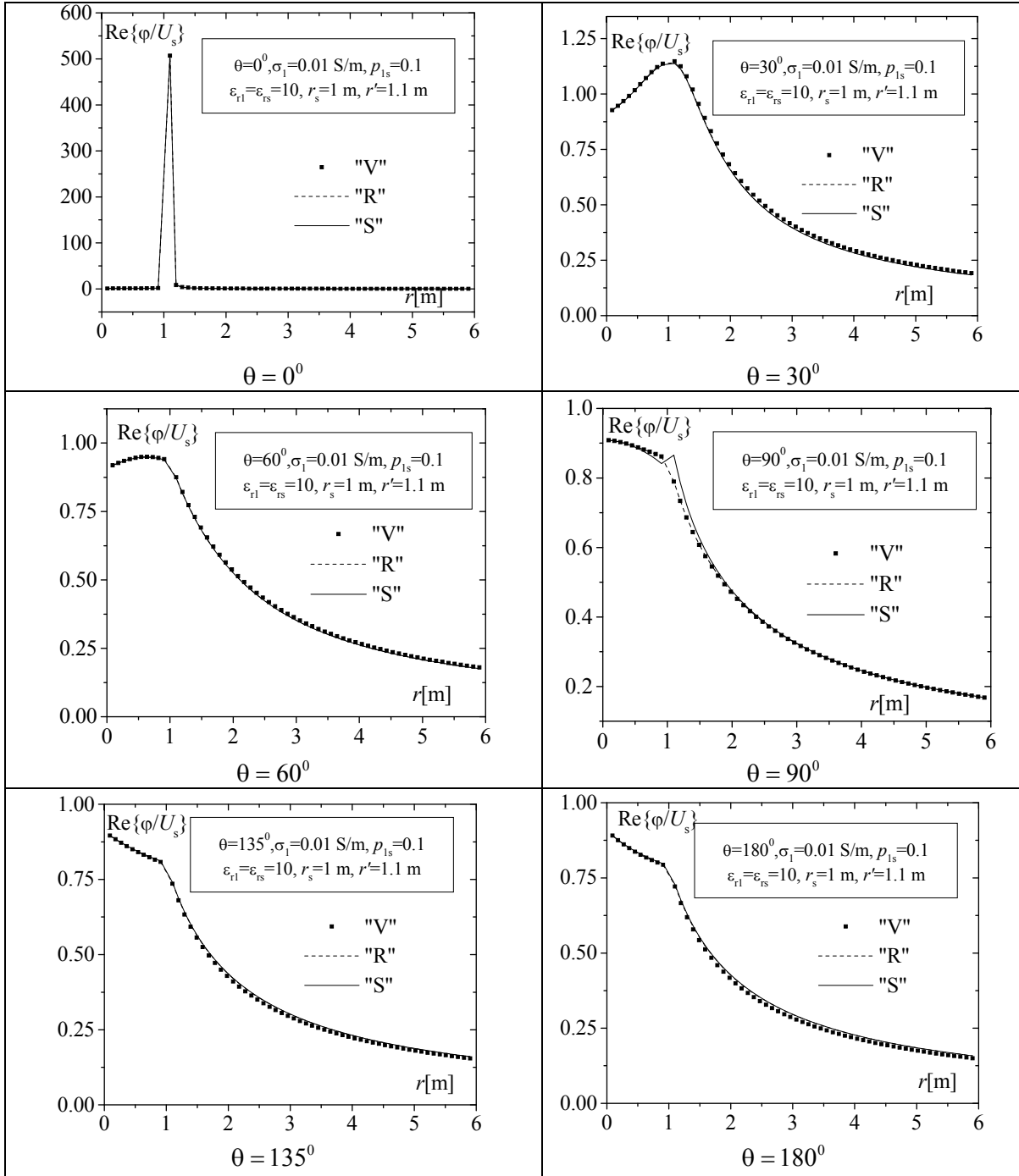
Na osnovu analize opisanih rešenja "Straton", "Veličković" i "Rančić", može se zaključiti, ([2.18]):

- Rešenja "Veličković" i "Rančić" su približna, ali za razliku od tačnog rešenja "Straton" data su u zatvorenoj formi, što čini njihovu primenu na rešavanje složenijih problema jednostavnijom.
- Približni modeli "Veličković" i "Rančić" su veoma slični i razlikuju se samo u faktoru r_s/r kojim se množi logaritamska funkcija u izrazima za potencijal izvan sfere.
- Model "Veličković" zadovoljava granične uslove za potencijal i normalnu komponentu vektora gustine totalne struje, ali samo približno zadovoljava Puasonovu, t.j. Laplasovu jednačinu.
- Rešenje "Rančić" potpuno zadovoljava Puasonovu, odnosno Laplasovu jednačinu i granični uslov za potencijal, dok je granični uslov za vektor gustine totalne struje samo delimično zadovoljen.
- Izrazi za potencijal po modelu "Rančić" mogu se izvesti na osnovu tačnog rešenja (model "Straton") kada je ispunjen uslov da je $n_{1s} \ll 1$. To za posledicu ima manje odstupanje modela "Rančić" u odnosu na model "Straton" za $n_{1s} < 1$.

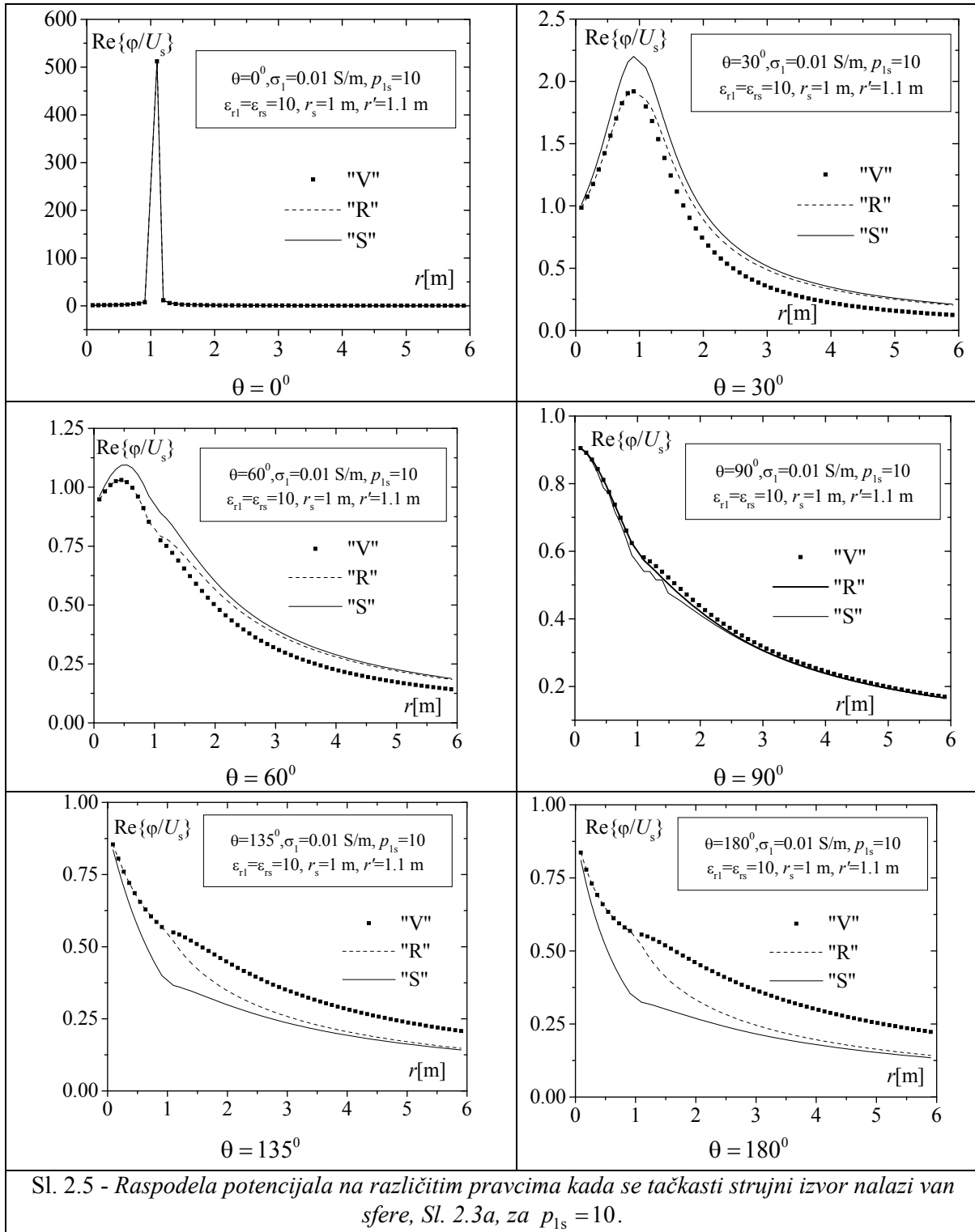
2.2.2.6 Poređenje modela

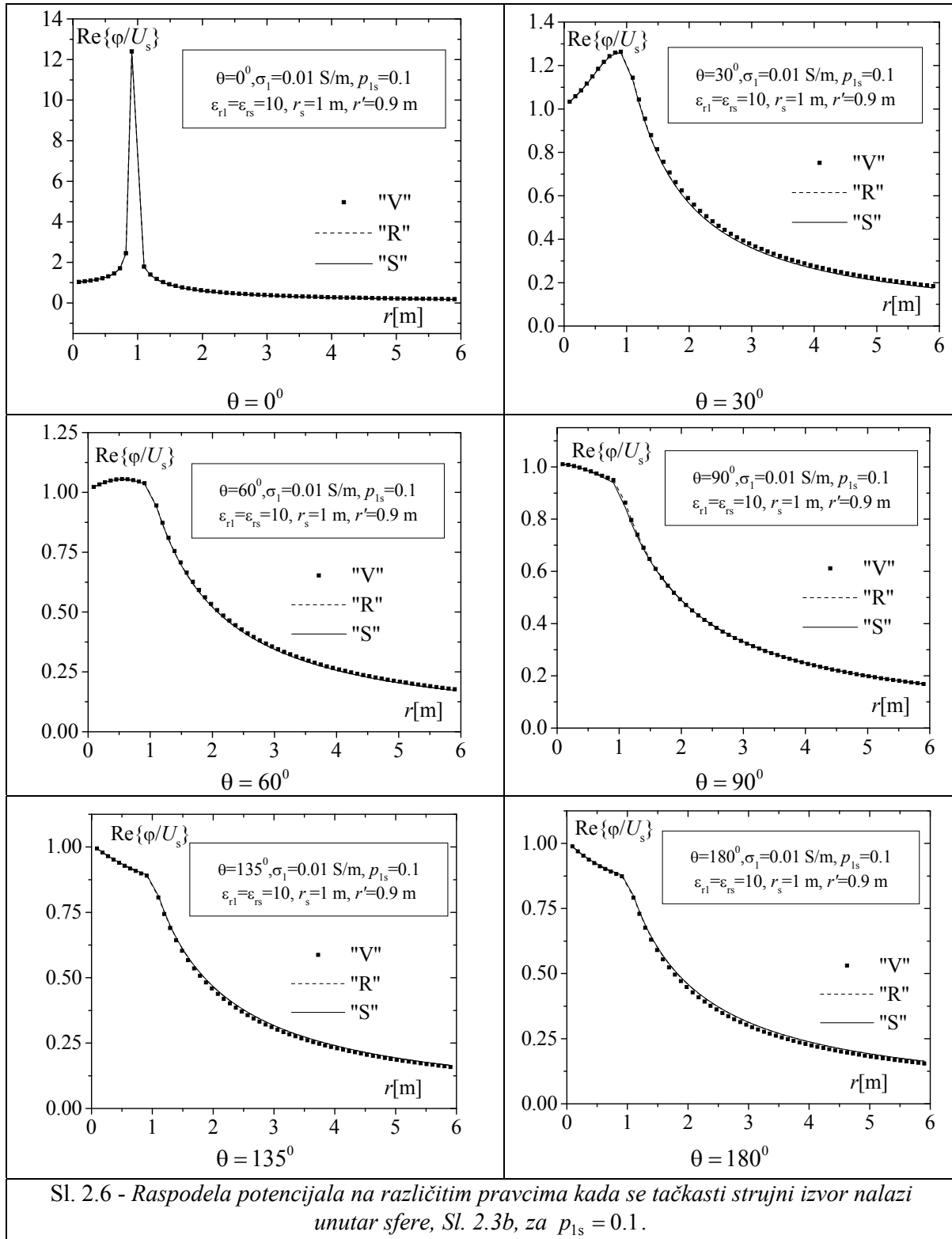
Na Sl. 2.4 i 2.5 prikazana je normalizovana raspodela potencijala određenog primenom obrazaca "S", "V" i "R" modela na pravcima definisanim vrednostima ugla θ ($0, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$) kada se tačkasti izvor nalazi na rastojanju $r'=1.1\text{m}$. Pri tome je $r_s=1\text{m}$, $\underline{\sigma}_1=0.01\text{S/m}$, $\epsilon_{r1}=\epsilon_{r2}=10$ i $p_{1s}=\sigma_1/\sigma_s=0.1$ (Sl. 2.4), odnosno $p_{1s}=10$ (Sl. 2.5). Potencijal je normalizovan vrednošću konstante $U_s=1/4\pi\underline{\sigma}_1 r_s$. Na sličan način, raspodela potencijala na istim pravcima kada je izvor smešten unutar sfere, na rastojanju $r'=0.9\text{m}$ prikazana je na Sl. 2.6 za $p_{1s}=0.1$, odnosno Sl. 2.7, za $p_{1s}=10$. Vrednosti ostalih parametara iste su kao i vrednosti parametara na Sl. 2.4.⁹ Kao što je već rečeno, bolje slaganje sa tačnim rešenjem postoji za slučaj kada je $n_{1s} < 1$. Takođe se uočava da je odstupanje približnih modela "Rančić" u odnosu na tačno rešenje "Straton" manje nego odstupanje rezultata dobijenog primenom modela "Veličković".

⁹ U PRILOGU 3 objašnjeno je zašto su prikazani samo grafici koji se odnose na realni deo potencijala.

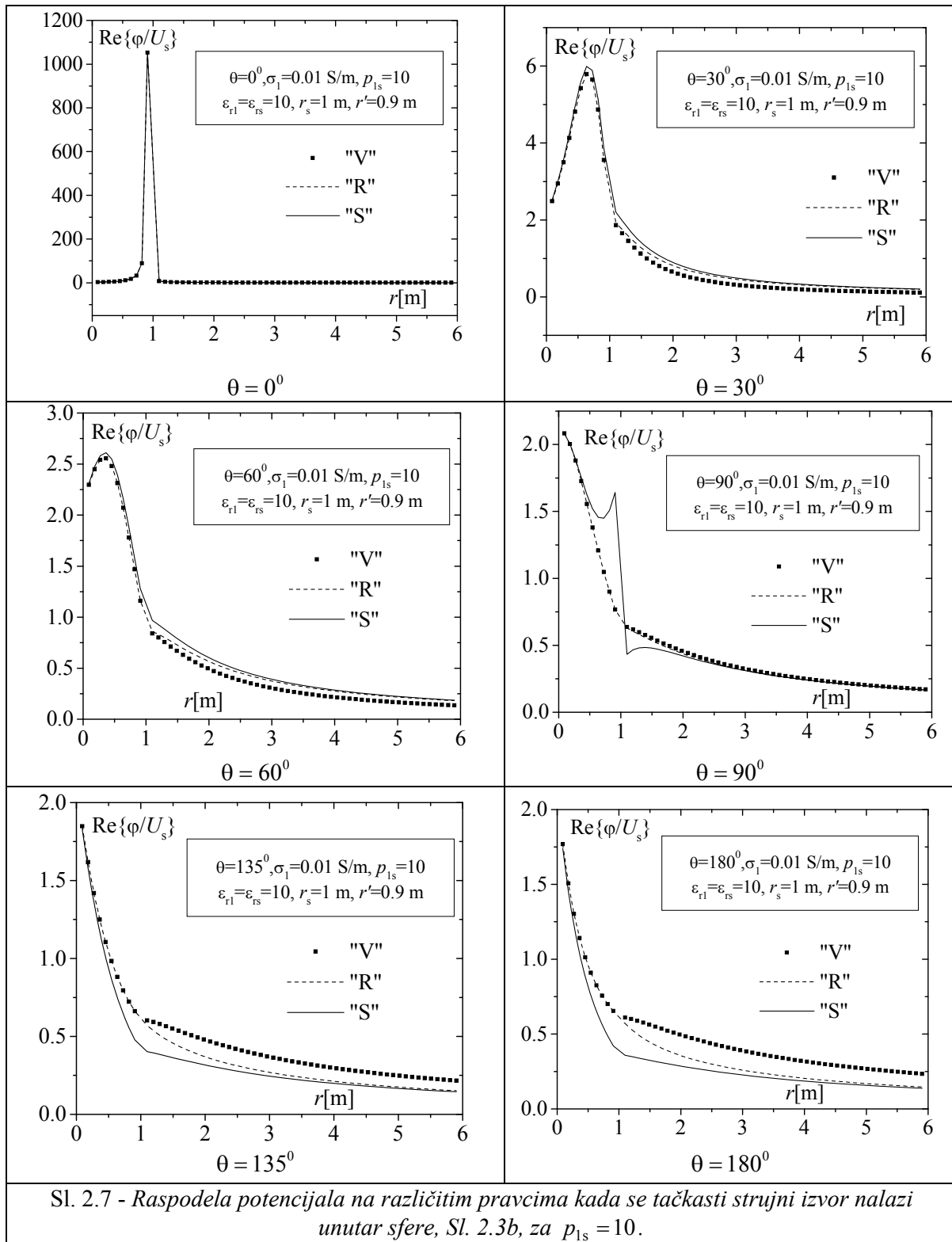


Sl. 2.4 - Raspodela potencijala na različitim pravcima kada se tačkasti strujni izvor nalazi van sfere, Sl. 2.3a, za $p_{1s} = 0.1$.





Sl. 2.6 - Rasporeda potencijala na različitim pravcima kada se tačkasti strujni izvor nalazi unutar sfere, Sl. 2.3b, za $p_{1s} = 0.1$.

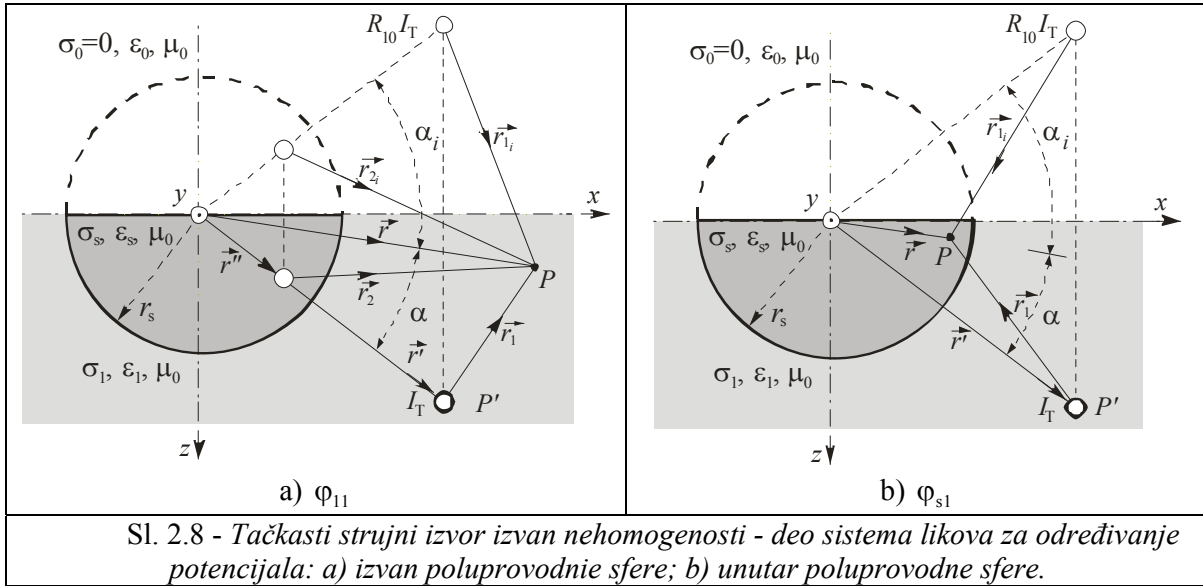


2.2.3 Tačkasti strujni izvor u prisustvu poluprovodne polusferične nehomogenosti

Primenom modifikovanih teorema lika u ravnom i sfernom ogledalu za kvazistacionarni režim, formiran je model za određivanje Grinove funkcije tačkastog izvora smeštenog izvan ili unutar polusferične nehomogenosti ([2.20]). Pri tome se razmatra zemlja, parametara $\sigma_1, \varepsilon_1, \mu_1 = \mu_0$ čija se nehomogenost modeluje homogenom polusferom čiji su parametri $\sigma_s, \varepsilon_s, \mu_s = \mu_0$.

2.2.3.1 Tačkasti izvor izvan polusferične nehomogenosti

Na Sl. 2.8a-b prikazan je tačkasti strujni izvor smešten u okolini polusferične nehomogenosti (tačka P') i deo sistema likova za određivanje potencijala (tačka P) izvan ($r > r_s, \varphi_{11}$), odnosno unutar nehomogenosti ($r < r_s, \varphi_{s1}$), respektivno. Nakon primene teoreme lika u ravnom poluprovodnom ogledalu, lik tačkastog izvora struje I_T nalazi se simetrično u odnosu na površinu tla i njegova struja je $R_{10}I_T$, gde je R_{10} koeficijent refleksije $R_{10} = (\sigma_1 - \sigma_0)/(\sigma_1 + \sigma_0)$. Određivanje uticaja polusferične nehomogenosti svodi se na korišćenje nekog od modela za Grinovu funkciju tačkastog izvora izvan sferične poluprovodne nehomogenosti.



Sl. 2.8 - Tačkasti strujni izvor izvan nehomogenosti - deo sistema likova za određivanje potencijala: a) izvan poluprovodnie sfere; b) unutar poluprovodne sfere.

Imajući u vidu opisanu analizu, izrazi za potencijal sistema sa Sl. 2.8 po "S" modelu uz korišćenje izraza (2.2.83-2.2.84) formirani su u obliku

$$\varphi_{11}^S = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + R_{1s} \frac{r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) - \frac{T_{1s}R_{1s}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \frac{r_s^{2n+1}}{(r'r)^{n+1}} P_n(\cos \alpha) \right] +$$

$$+ \frac{R_{10}I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + R_{1s} \frac{r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_{2i}} - \frac{1}{r} \right) - \frac{T_{1s}R_{1s}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \frac{r_s^{2n+1}}{(r'r)^{n+1}} P_n(\cos \alpha_i) \right], \quad r > r_s, \quad i \quad (2.2.180)$$

$$\varphi_{s1}^S = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{1}{r'} - \frac{T_{1s}R_{1s}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \left(\frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos \alpha) \right] +$$

$$+ \frac{R_{10}I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_{1i}} - R_{1s} \frac{1}{r'} - \frac{T_{1s}R_{1s}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \left(\frac{r}{r'} \right)^n P_n(\cos \alpha_i) \right] \quad . \quad r < r_s. \quad (2.2.181)$$

Po modelu "Veličković" (2.2.125-2.2.126) u ovom slučaju (Sl. 2.8) Grinova funkcija je

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^V = & \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + R_{1s} \frac{r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r - r'' \cos \alpha + r_2}{2r} \right) \right] + \\ & + \frac{R_{10} I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_{1i}} + R_{1s} \frac{r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_{2i}} - \frac{1}{r} \right) + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r - r'' \cos \alpha_i + r_{2i}}{2r} \right) \right], \end{aligned} \quad r > r_s \text{ i} \quad (2.2.182)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{s1}^V = & \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{r_1} - \frac{R_{1s}}{r'} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r' - r \cos \alpha + r_1}{2r'} \right) \right] + \\ & + \frac{R_{10} I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{r_{1i}} - \frac{R_{1s}}{r'} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r' - r \cos \alpha_i + r_{1i}}{2r'} \right) \right], \end{aligned} \quad , r < r_s. \quad (2.2.183)$$

Konačno, za model "Rančić" (2.2.167-2.2.168) izrazi za potencijal su oblika

$$\begin{aligned} \varphi_{11}^R = & \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{R_{1s} r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r'} \frac{r_s}{r} \ln \left(\frac{r - r'' \cos \alpha + r_2}{2r} \right) \right] + \\ & + \frac{R_{10} I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_{1i}} + \frac{R_{1s} r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_{2i}} - \frac{1}{r} \right) + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r'} \frac{r_s}{r} \ln \left(\frac{r - r'' \cos \alpha_i + r_{2i}}{2r} \right) \right], \end{aligned} \quad , r > r_s \text{ i} \quad (2.2.184)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{s1}^R = & \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - \frac{R_{1s}}{r'} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r' - r \cos \alpha + r_1}{2r'} \right) \right] + \\ & + \frac{R_{10} I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_{1i}} - \frac{R_{1s}}{r'} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r' - r \cos \alpha_i + r_{1i}}{2r'} \right) \right] \end{aligned} \quad , r < r_s. \quad (2.2.185)$$

U prethodnim izrazima (2.2.180-2.2.185) je $\cos \alpha = \vec{r} \vec{r}' / (rr')$ i $\cos \alpha_i = \vec{r} \vec{r}'_i / (rr'_i)$, gde je \vec{r}'_i vektor položaja lika $R_{10} I_T$ u odnosu na koordinatni početak, pri čemu je $r'_i = r_i$. Dužine rastojanja označenih na Sl. 2.8 su $r_1 = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha}$, $r_2 = \sqrt{r''^2 + r^2 - 2r''r \cos \alpha}$, $r_{1i} = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha_i}$ i $r_{2i} = \sqrt{r''^2 + r^2 - 2r''r \cos \alpha_i}$.

2.2.3.2 Tačkasti izvor unutar polusferične nehomogenosti

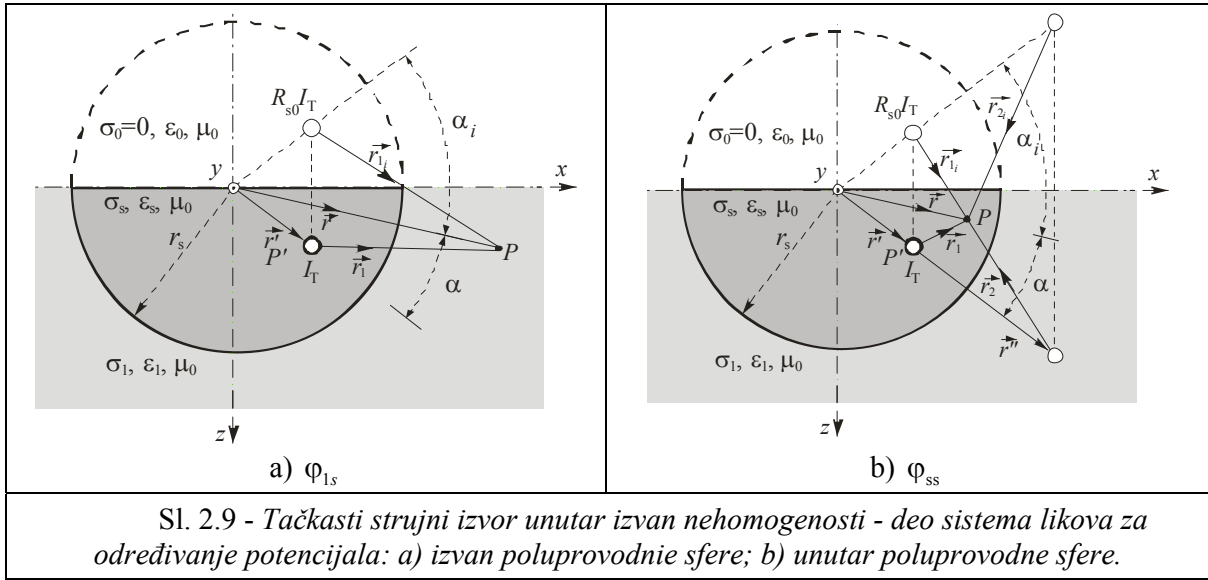
Na Sl. 2.9a-b prikazan je tačkasti strujni izvor smešten unutar polusferične nehomogenosti (tačka P') i deo sistema likova za određivanje potencijala (tačka P) izvan ($r > r_s$, φ_{1s}), odnosno unutar nehomogenosti ($r < r_s$, φ_{ss}), respektivno.

Kao i u slučaju kada se izvor nalazio izvan polusferične nehomogenosti, primenom teorije likova u ravnom poluprovodnom ogledalu, lik tačkastog izvora struje I_T nalazi se simetrično u odnosu na površinu tla i njegova struja je $R_{s0} I_T$, gde je je $R_{s0} = (\sigma_s - \sigma_0) / (\sigma_s + \sigma_0)$ koeficijent refleksije. Modelovanje uticaja polusferične nehomogenosti svodi se na primenu jedne od Grinovih funkcija za tačkasti izvor unutar poluprovodne sfere ("Straton", "Veličković" ili "Rančić"). U narednim izrazima je, kao i u prethodnom slučaju, $\cos \alpha = \vec{r} \vec{r}' / (rr')$, $\cos \alpha_i = \vec{r} \vec{r}'_i / (rr'_i)$, (\vec{r}'_i je vektor položaja lika tačkastog izvora $R_{s10} I_T$), $r_1 = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha}$, $r_2 = \sqrt{r''^2 + r^2 - 2r''r \cos \alpha}$, $r_{1i} = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha_i}$ i $r_{2i} = \sqrt{r''^2 + r^2 - 2r''r \cos \alpha_i}$.

Po "S" modelu (2.2.98-2.2.99), izrazi za potencijal su

$$\begin{aligned} \varphi_{1s}^S = & \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{1}{r} - \frac{T_{1s} R_{1s}}{2} \frac{1}{r'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \left(\frac{r'}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \alpha) \right] + \\ & + \frac{R_{s0} I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_{1i}} - R_{1s} \frac{1}{r} - \frac{T_{1s} R_{1s}}{2} \frac{1}{r'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \left(\frac{r'}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \alpha_i) \right], \end{aligned} \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.186)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ss}^S = & \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r' r_2} - \frac{R_{1s}}{r_s} - \frac{T_{1s} R_{1s}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \frac{(r'r)^n}{r_s^{2n+1}} P_n(\cos \alpha) \right] + \\ & + \frac{R_{s0} I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{1}{r_{1i}} - R_{1s} \frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r' r_{2i}} - \frac{R_{1s}}{r_s} - \frac{T_{1s} R_{1s}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + T_{1s}/2} \frac{(r'r)^n}{r_s^{2n+1}} P_n(\cos \alpha_i) \right], \end{aligned} \quad r < r_s. \quad (2.2.187)$$



Model "Veličković" (2.2.154-2.2.155) daje

$$\begin{aligned} \varphi_{1s}^V = & \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - \frac{R_{1s}}{r} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r_s} \ln \left(\frac{r - r' \cos \alpha + r_1}{2r} \right) \right] + \\ & + \frac{R_{s0} I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_{1i}} - \frac{R_{1s}}{r} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r_s} \ln \left(\frac{r - r' \cos \alpha_i + r_{1i}}{2r} \right) \right], \end{aligned} \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.188)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ss}^V = & \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r' r_2} - \frac{R_{1s}}{r_s} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r_s} \ln \left(\frac{r'' - r \cos \alpha + r_2}{2r''} \right) \right] + \\ & + \frac{R_{s0} I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{1}{r_{1i}} - R_{1s} \frac{T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r' r_{2i}} - \frac{R_{1s}}{r_s} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r_s} \ln \left(\frac{r'' - r \cos \alpha_i + r_{2i}}{2r''} \right) \right], \end{aligned} \quad r < r_s. \quad (2.2.189)$$

Konačno, po modelu "Rančić" (2.2.178-2.2.179) je

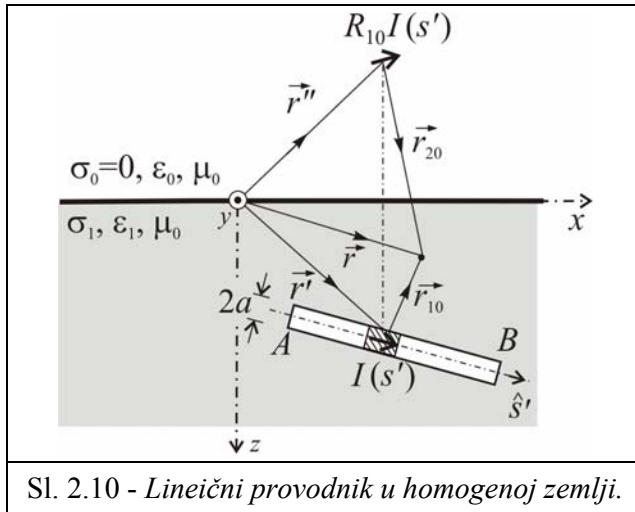
$$\begin{aligned} \varphi_{1s}^R(\vec{r}, \vec{r}') = & \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{1}{r} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r} \ln \left(\frac{r - r' \cos \alpha + r_1}{2r} \right) \right] + \\ & + \frac{R_{s0} I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_{1i}} - R_{1s} \frac{1}{r} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r} \ln \left(\frac{r - r' \cos \alpha_i + r_{1i}}{2r} \right) \right], \end{aligned} \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (2.2.190)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ss}^R(\vec{r}, \vec{r}') = & \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1}r_1} - \frac{R_{1s}T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r'r_2} - \frac{R_{1s}}{r_s} + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r_s} \ln\left(\frac{r'' - r \cos \alpha + r_2}{2r''}\right) \right] \\ & + \frac{R_{s0}I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1}r_{1i}} - \frac{R_{1s}T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r'r_{2i}} - \frac{R_{1s}}{r_s} + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r_s} \ln\left(\frac{r'' - r \cos \alpha_i + r_{2i}}{2r''}\right) \right], \quad r < r_s. \end{aligned} \quad (2.2.191)$$

2.3 STRUKTURA ELEKTROMAGNETNOG POLJA I POTENCIJALA

U tekstu koji sledi, opisana je struktura elektromagnetnog polja određena na osnovu izraza za Grinove funkcije izvedenih u odeljku 2.2. Analizirane su geometrije čije razmatranje predstavlja osnovu za rešavanje problema razmatranih u radu.

2.3.1 Lineični provodnik u homogenoj zemlji



Sl. 2.10 - Lineični provodnik u homogenoj zemlji.

Posmatra se provodnik dužine l (između tačaka A i B) smešten u homogenoj zemlji poznatih parametara σ_1, ϵ_1 i $\mu_1 = \mu_0$, Sl. 2.10. Integracijom izraza (2.2.42-2.2.43) i (2.2.60-2.2.63) po promenljivoj s' u granicama $s' \in [0, l]$ mogu se odrediti rezultujuće komponente Hercovog vektora u okolini provodnika ([2.5]). Longitudinalna struja duž ose provodnika označena je sa $I(s')$. Kako je $\mu_1 = \mu_0$, iz jednačine (2.2.54) za koeficijente refleksije i transmisije dobija se $R_{\eta 01} = R_{\eta 10} = 0$ i $T_{\eta 01} = T_{\eta 10} = 1$. U narednim izrazima sa r_{10} i r_{20} označena su rastojanja strujnog elementa, odnosno njegovog lika od

tačke u kojoj se određuje Hercov vektor i mogu se izraziti kao $r_{10} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ i $r_{20} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}$, gde je $x' = x'(s')$, $y' = y'(s')$ i $z' = z'(s')$. Pri tome su vektori položaja strujnog elementa i njegovog lika $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$, odnosno $\vec{r}'' = x'\hat{x} + y'\hat{y} - z'\hat{z}$, respektivno. Shodno oznakama korišćenim u ranijem tekstu, veličine koje opisuju strukturu polja biće indeksirane sa "11" i "01" za tačke koje se nalaze u vazduhu, odnosno zemlji, respektivno.

Kada se opisana procedura primeni na jednačinu (2.2.46) dobija se

$$\Pi_{\eta 01} = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \int_{s'=0}^l I(s') (\hat{s}' \hat{\eta}) \frac{1}{r_{10}} ds', \quad z < 0, \quad \eta = x, y. \quad (2.3.1)$$

Na sličan način iz izraza (2.2.62) i (2.2.42) dobijaju se izrazi za $\Pi_{z\eta 01}$, $\eta = x, y$ i $\Pi_{zz 01}$. Kako je $\Pi_{z 01} = \Pi_{zx 01} + \Pi_{zy 01} + \Pi_{zz 01}$ (jednačina 2.2.64), dobija se

$$\Pi_{z 01} = \frac{1}{4\pi\sigma_0} \int_{s'=0}^l I(s') \left[\left(\sum_{\eta=x,y} (\hat{s}' \hat{\eta}) R_{z\eta 01} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\ln(|z-z'| + r_{10}) \right] \right) + (\hat{s}' \hat{z}) \frac{1 + R_{zz 01}}{r_{10}} \right] ds', \quad z < 0. \quad (2.3.2)$$

Izrazi (2.3.1-2.3.2) definišu strukturu Hercovog vektora u vazduhu za sistem sa Sl. 2.10. Analogno tome može se odrediti i struktura Hercovog vektora u zemlji. Kada se na opisani način izvrši integracija izraza (2.2.61), dobija se

$$\Pi_{\eta 11} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \int_{s'=0}^l I(s') (\hat{s}'\hat{\eta}) \frac{1}{r_{10}} ds', z > 0, \eta = x, y. \quad (2.3.3)$$

Nakon integracije izraza (2.2.63) i (2.2.43) i njihovom smenom u jednačinu (2.2.65) dobija se

$$\Pi_{z11} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \int_{s'=0}^l I(s') \left[\left(\sum_{\eta=x,y} (\hat{s}'\hat{\eta}) R_{z01} \frac{\partial}{\partial \eta} [-\ln(z+z'+r_{20})] \right) + (\hat{s}'\hat{z}) \left(\frac{1}{r_{10}} + \frac{R_{z01}}{r_{20}} \right) \right] ds', z > 0. \quad (2.3.4)$$

2.3.1.1 Električni skalar potencijal

Električni skalar potencijal može se odrediti na osnovu Hercovog vektora iz (2.2.3),

$$\varphi_{i1} = -\operatorname{div} \vec{\Pi}_{i1} = -\frac{\partial \Pi_{xi1}}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_{yi1}}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_{zi1}}{\partial z}, i = 0, 1. \quad (2.3.5)$$

Razmatranje koje će biti opisano u tekstu koji sledi, omogućava sređivanje izraza za potencijal u jednostavnijoj formi. Ako se sa $\vec{r}_A = x_A \hat{x} + y_A \hat{y} + z_A \hat{z}$ označi vektor položaja tačke A , Sl. 2.10, intenziteti vektora \vec{r}_{10} i \vec{r}_{20} mogu se izraziti kao

$$r_{10} = |\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r} - \vec{r}_A - s' \hat{s}'| = \sqrt{(x - x_A - s'(\hat{s}'\hat{x}))^2 + (y - y_A - s'(\hat{s}'\hat{y}))^2 + (z - z_A - s'(\hat{s}'\hat{z}))^2} \quad (2.3.6)$$

$$r_{20} = |\vec{r} - \vec{r}' + 2z' \hat{z}| = \sqrt{(x - x_A - s'(\hat{s}'\hat{x}))^2 + (y - y_A - s'(\hat{s}'\hat{y}))^2 + (z + z_A + s'(\hat{s}'\hat{z}))^2}. \quad (2.3.7)$$

Na osnovu prethodnih izraza je

$$\left[s'(\hat{s}'\hat{x}) \frac{\partial}{\partial x} + s'(\hat{s}'\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y} + s'(\hat{s}'\hat{z}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[\frac{1}{r_{10}} \right] = -\frac{\partial}{\partial s'} \left[\frac{1}{r_{10}} \right] \quad (2.3.8)$$

$$\left[s'(\hat{s}'\hat{x}) \frac{\partial}{\partial x} + s'(\hat{s}'\hat{y}) \frac{\partial}{\partial y} - s'(\hat{s}'\hat{z}) \frac{\partial}{\partial z} \right] \left[\frac{1}{r_{20}} \right] = -\frac{\partial}{\partial s'} \left[\frac{1}{r_{20}} \right]. \quad (2.3.9)$$

Kada se izrazi (2.3.1-2.3.2) smene u (2.3.5) i iskoriste veze (2.3.8-2.3.9) za potencijal u vazduhu se dobija

$$\varphi_{01} = \frac{1 + R_{z01}}{4\pi\sigma_0} \int_{s'=0}^l I(s') \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r_{10}} \right) ds' = \frac{T_{z01}}{4\pi\sigma_0} \left[\frac{I(s')}{r_{10}} \Big|_{s'=0}^l - \int_{s'=0}^l \frac{I'(s')}{r_{10}} ds' \right], z < 0. \quad (2.3.10)$$

Na sličan način smenom izraza (2.3.3-2.3.4) u (2.3.5) formira se izraz za potencijal u zemlji

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \frac{1}{4\pi\sigma_1} \int_{s'=0}^l I(s') \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r_{10}} - \frac{R_{z01}}{r_{20}} \right) ds' = \\ &= \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[I(s') \left(\frac{1}{r_{10}} - \frac{R_{z01}}{r_{20}} \right) \Big|_{s'=0}^l - \int_{s'=0}^l I'(s') \left(\frac{1}{r_{10}} - \frac{R_{z01}}{r_{20}} \right) ds' \right], z > 0. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

U prethodnim izrazima sa $I'(s') = -\partial I(s')/\partial s'$ označena je podužna gustina struje oticanja sa površine lineičnog provodnika.

2.3.1.2 Električno polje

Kako je to već ranije objašnjeno u okviru odeljka 2.1.1, struktura električnog polja u slučaju kvazistacionarnog režima ($|\gamma_i^2| \ll 1, i = 0, 1$), može se odrediti na osnovu izraza (2.2.1),

$$\vec{E}_{i1} = E_{xi1} \hat{x} + E_{yi1} \hat{y} + E_{zi1} \hat{z} \cong -\operatorname{grad} \varphi_{i1}, i = 0, 1. \quad (2.3.12)$$

Primenom prethodne jednačine na (2.3.10), za komponente električnog polja u vazduhu dobija se

$$E_{x01} = -\frac{T_{z01}}{4\pi\sigma_0} \left[I(s') \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{10}} \right) \Big|_{s'=0}^l - \int_{s'=0}^l I'(s') \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{10}} \right) ds' \right], \quad z < 0, \quad (2.3.13)$$

$$E_{y01} = -\frac{T_{z01}}{4\pi\sigma_0} \left[I(s') \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_{10}} \right) \Big|_{s'=0}^l - \int_{s'=0}^l I'(s') \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_{10}} \right) ds' \right], \quad z < 0 \text{ i} \quad (2.3.14)$$

$$E_{z01} = -\frac{T_{z01}}{4\pi\sigma_0} \left[I(s') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_{10}} \right) \Big|_{s'=0}^l - \int_{s'=0}^l I'(s') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_{10}} \right) ds' \right], \quad z < 0. \quad (2.3.15)$$

Slično tome, iz (2.3.11) i (2.3.12) određuju se komponente električnog polja u zemlji

$$E_{x11} = -\frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[I(s') \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{10}} - R_{z01} \frac{1}{r_{20}} \right) \Big|_{s'=0}^l - \int_{s'=0}^l I'(s') \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_{10}} - R_{z01} \frac{1}{r_{20}} \right) ds' \right], \quad z > 0, \quad (2.3.16)$$

$$E_{y11} = -\frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[I(s') \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_{10}} - R_{z01} \frac{1}{r_{20}} \right) \Big|_{s'=0}^l - \int_{s'=0}^l I'(s') \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_{10}} - R_{z01} \frac{1}{r_{20}} \right) ds' \right], \quad z > 0 \text{ i} \quad (2.3.17)$$

$$E_{z11} = -\frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[I(s') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_{10}} - R_{z01} \frac{1}{r_{20}} \right) \Big|_{s'=0}^l - \int_{s'_k=0}^{l_k} I'(s') \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_{10}} - R_{z01} \frac{1}{r_{20}} \right) ds' \right], \quad z > 0. \quad (2.3.18)$$

2.3.1.3 Magnetno polje

Magnetno polje određuje se iz jednačine (2.2.2)

$$\vec{H}_{i1} = H_{x11}\hat{x} + H_{y11}\hat{y} + H_{z11}\hat{z} = \sigma_i \text{ rot } \vec{\Pi}_{i1}, \quad i = 0, 1. \quad (2.3.19)$$

Primenom prethodne jednačine na vektor $\vec{\Pi}_{01}$ čije su komponente određene izrazima (2.3.1-2.3.2) za komponente magnetnog polja u vazduhu ($z < 0$) dobija se

$$\begin{aligned} H_{x01} &= \sigma_0 \left(\frac{\partial}{\partial y} \Pi_{z01} - \frac{\partial}{\partial z} \Pi_{y01} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{s'=0}^l I(s') \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{\eta=x,y} (\hat{s}'\hat{\eta}) R_{z01} \frac{\partial}{\partial \eta} [-\ln(|z-z'|+r_{10})] \right) + (\hat{s}'\hat{z}) \frac{1+R_{z01}}{r_{10}} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left((\hat{s}'\hat{y}) \frac{1}{r_{10}} \right) \right\} ds', \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

$$\begin{aligned} H_{y01} &= \sigma_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} \Pi_{x01} - \frac{\partial}{\partial x} \Pi_{z01} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{s'=0}^l I(s') \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left((\hat{s}'\hat{x}) \frac{1}{r_{10}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{\eta=x,y} (\hat{s}'\hat{\eta}) R_{z01} \frac{\partial}{\partial \eta} [-\ln(|z-z'|+r_{10})] \right) + (\hat{s}'\hat{z}) \frac{1+R_{z01}}{r_{10}} \right] \right\} ds', \text{ i} \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

$$H_{z01} = \sigma_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Pi_{y01} - \frac{\partial}{\partial y} \Pi_{x01} \right) = \frac{1}{4\pi} \int_{s'=0}^l I(s') \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((\hat{s}'\hat{y}) \frac{1}{r_{10}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left((\hat{s}'\hat{x}) \frac{1}{r_{10}} \right) \right] ds'. \quad (2.3.22)$$

Kada se određuje struktura magnetnog polja u zemlji ($i = 1$ u izrazu (2.3.19)), iz jednačina za komponente vektora $\vec{\Pi}_{11}$ (2.3.3-2.3.4) ($z > 0$) dobija se

$$\begin{aligned}
 H_{x11} &= \sigma_1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \Pi_{z11} - \frac{\partial}{\partial z} \Pi_{y11} \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{s'=0}^l I(s') \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\sum_{\eta=x,y} (\hat{s}'\hat{\eta}) R_{z01} \frac{\partial}{\partial \eta} [-\ln(z+z'+r_{20})] \right) + (\hat{s}'\hat{z}) \left(\frac{1}{r_{10}} + \frac{R_{z01}}{r_{20}} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left((\hat{s}'\hat{y}) \frac{1}{r_{10}} \right) \right\} ds',
 \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

$$\begin{aligned}
 H_{y11} &= \sigma_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} \Pi_{x11} - \frac{\partial}{\partial x} \Pi_{z11} \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{s'=0}^l I(s') \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left((\hat{s}'\hat{x}) \frac{1}{r_{10}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sum_{\eta=x,y} (\hat{s}'\hat{\eta}) R_{z01} \frac{\partial}{\partial \eta} [-\ln(z+z'+r_{20})] \right) + (\hat{s}'\hat{z}) \left(\frac{1}{r_{10}} + \frac{R_{z01}}{r_{20}} \right) \right] \right\} ds', i
 \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

$$H_{z11} = \sigma_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \Pi_{y11} - \frac{\partial}{\partial y} \Pi_{x11} \right) = \frac{1}{4\pi} \int_{s'=0}^l I(s') \left[\frac{\partial}{\partial x} \left((\hat{s}'\hat{y}) \frac{1}{r_{10}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left((\hat{s}'\hat{x}) \frac{1}{r_{10}} \right) \right] ds'. \quad (2.3.25)$$

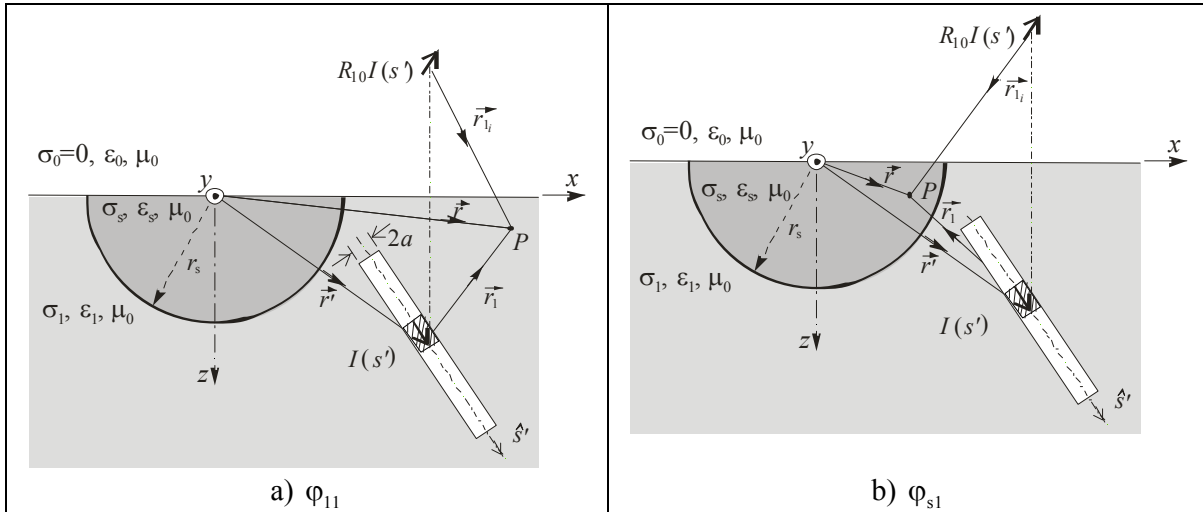
2.3.2 Lineični provodnik u prisustvu polusferične nehomogenosti

2.3.2.1 Električni skalar-potencijal

U ovom odeljku opisana je primena Grinovih funkcija za tačkasti izvor smešten unutar odnosno izvan poluprovodne polusferične nehomogenosti na analizu lineičnih provodnika. Pri tome se uvode oznake za Grinove funkcije

$$G_{ij}^{S/V/R}(\vec{r}, \vec{r}') = \varphi_{ij}^{S/V/R}(\vec{r}, \vec{r}') / I_T, \quad i, j = 1, s, \quad (2.3.26)$$

gde je $\varphi_{ij}^{S/V/R}(\vec{r}, \vec{r}')$ $i, j = 1, s$ jedna od funkcija zadatih izrazima (2.2.180-2.2.191), dok gornji indeks, kao i u prethodnim razmatranjima definiše primenjeni model ("S", "V" ili "R").



Sl. 2.11- *Lineični provodnik izvan nehomogenosti i tačka u kojoj se određuje potencijal: a) izvan poluprovodne sfere; b) unutar poluprovodne sfere.*

Tako, u slučaju lineičnog provodnika dužine l u okolini polusferične nehomogenosti, Sl. 2.11, potencijal u okolini elektrode izvan polusfere, pomoću izraza (2.2.180-model "S"), (2.2.182-model "V") i (2.2.184-model "R") može se izraziti kao

$$\varphi_{11}^{S/V/R}(\vec{r}) = \int_l dI(\vec{r}') G_{11}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (2.3.27)$$

dok je potencijal unutar nehomogenosti po modelima "S", "V" i "R" (izrazi (2.2.81), (2.2.183), (2.2.185)),

$$\varphi_{s1}^{S/V/R}(\vec{r}) = \int_l dI(\vec{r}') G_{s1}(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (2.3.28)$$

U prethodnim izrazima je $dI(\vec{r}') = I_{ot}(\vec{r}') ds'$, gde je

$$I_{ot}(\vec{r}') = -\partial I(s')/\partial s' \quad (2.3.29)$$

podužna gustina struje oticanja sa provodnika.

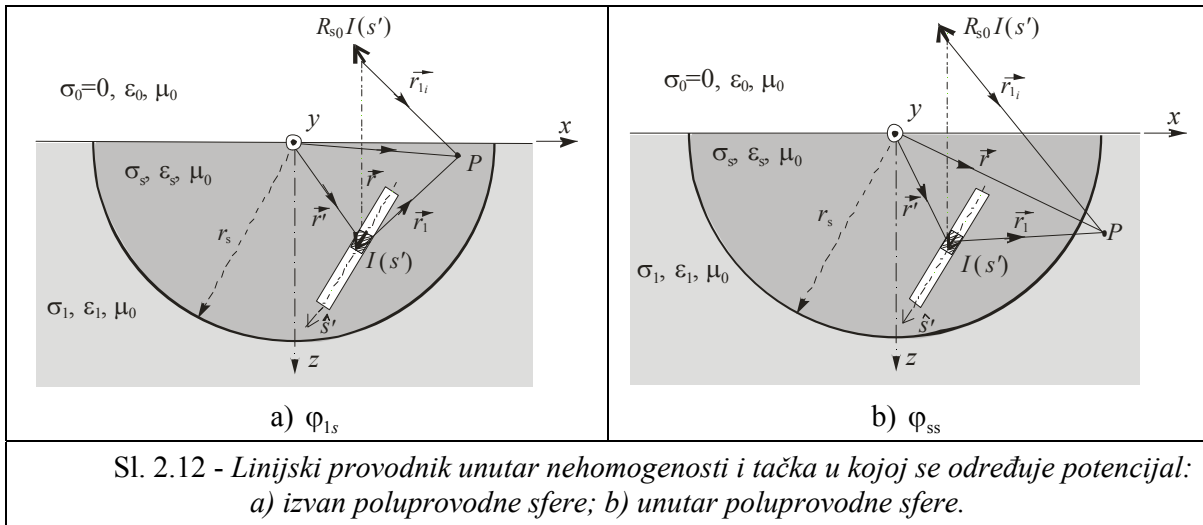
Na sličan način razmatra se i lineični provodnik koji se nalazi unutar polusfere, Sl. 2.12. Ta- da je potencijal izvan polusfere, na osnovu (2.2.186), (2.2.188) i (2.2.190)

$$\varphi_{1s}^{S/V/R}(\vec{r}) = \int_l dI(\vec{r}') G_{1s}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad (2.3.30)$$

dok je u polusferi (jednačine (2.2.187), (2.2.189) i (2.2.1190))

$$\varphi_{ss}^{S/V/R}(\vec{r}) = \int_l dI(\vec{r}') G_{ss}(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (2.3.31)$$

Kao i u prethodnom slučaju je $dI(\vec{r}') = I_{ot}(\vec{r}') ds'$, gde je I_{ot} podužna gustina struje oticanja sa provodnika, dok je l dužina provodnika.



2.3.2.2 Električno polje

Električno polje određuje se iz izraza za potencijal (2.3.27-2.3.28) i (2.3.30-2.3.31), pri čemu se razmatra kvazistacionarni režim

$$\vec{E}_{ij}^{S/V/R} = E_{ij}^{S/V/R} \hat{x} + E_{ij}^{S/V/R} \hat{y} + E_{ij}^{S/V/R} \hat{z} \cong -\text{grad} \varphi_{ij}^{S/V/R}, \quad i, j = 1, s. \quad (2.3.32)$$

Na ovaj način, komponente električnog polja mogu se u opštoj formi izraziti kao

$$E_{xij}^{S/V/R} = -\frac{\partial \varphi_{ij}^{S/V/R}(\vec{r})}{\partial x} = -\int_l dI(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial x} (G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}')), \quad (2.3.33)$$

$$E_{yij}^{S/V/R} = -\frac{\partial \varphi_{ij}^{S/V/R}(\vec{r})}{\partial y} = -\int_l dI(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial y} (G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}')) \quad (2.3.34)$$

$$E_{zij}^{S/V/R} = -\frac{\partial \varphi_{ij}^{S/V/R}(\vec{r})}{\partial z} = -\int_l dI(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial z} (G_{ij}(\vec{r}, \vec{r}')). \quad (2.3.35)$$

- [2.4] P. D. Rančić, "A new concept for linear grounding system analysis", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, ПЕС '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp 103-116.
- [2.5] P. D. Rančić, "Osnovni izraz za izračunavanje strukture EM polja proizvoljno postavljenog Hercovog dipola u nehomogenoj zemlji koja je aproksimirana sa N homogenih i izotropnih slojeva-kvazistacionarna analiza", Tehnički izveštaj, TEH-RP-EM-11b, Laboratorija za Električne instalacije i Osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Januar 1998.
- [2.6] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York, 8th Printing, Government Printing Office, 10th Printing, 1972, pp 487.
- [2.7] L. Hannakam, N. Sakaji, "Störung der Potentialverteilung des strombeschichten Erdreiches durch Erzeinschlüsse", *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 68, No. 1, 1985, pp 57-62.
- [2.8] E. Boridy, "Solution of Some Electrostatic Potential Problems Involving Spherical Conductors: A Dual Series Approach", *IEEE Trans. on EMC*, Vol. 29, No. 2, 1987, pp 132-140.
- [2.9] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*, Mc Grow-Hill Book Company, New York /London, 1941, pp 201-205.
- [2.10] I. V. Lindell, "Electrostatic image theory for the dielectric sphere", *Radio Sci.*, Vol. 27, No. 1, 1992, pp 1-8.
- [2.11] J. C-E. Sten, I. V. Lindell, "Electrostatic image theory for the dielectric sphere with an internal source", *Microwave and optical technology letters*, Vol 5, No. 11, October 1992, pp 579-602.
- [2.12] D M. Veličković: *Metodi za proračun elektrostatickih polja*, Knjiga prva, Stil-Podvis, Niš, 1982, str. 256-260, str. 200.
- [2.13] L. Hannakam, "Allgemeine Lösung des Randwertproblems für eine Kugel durch Integration des ungestörten erregenden Feldes", *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 54, No. 4, 1971, pp 187-199.
- [2.14] K. Reiß, "Kraftwirkungen und Bahnkurven in einem Elektromechanischen Kugel-Punkt Ladungs-System", *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 73, 1990, pp 141-151.
- [2.15] K. Reiß, "Deformation des Potentialfeldes einer Punktladung durch eine kugelförmige Material Inhomogenität", *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 74, No. 2, 1990, pp 135-144.
- [2.16] D. M. Veličković, "Green's function of spherical body," *Euro Electromagnetics, EUROEM '94*, May 30 – June 4, 1994, Bordeaux, France, Conf. Proc., THp-09-04.
- [2.17] H. Uhlmann (Ed.), D. M. Veličković, K. Brandisky, R. D. Stantcheva, H. Brauer, *Fundamentals of Modern Electromagnetics for Engineering-Textbook for Graduate Students, Part I: Static and Stationary Electrical and Magnetic Field*, Technical University Ilmenau/Germany, 2005, pp 97-98, pp 101-108, pp 91, pp 129-130.
- [2.18] P. D. Rančić, "A point ground electrode in the presence of spherical ground inhomogeneity: analysis of two approximate closed form solutions for electrical scalar potential", *International PhD Seminar Computational Electromagnetics and Technical Applications*, Banja Luka, Bosnia and Herzegovina, August 28-September 01, 2006, Proc. of Papers, pp 213-223, dostupno na: http://www.phd.etfbl.net/files/Works_PDF/Rancic%20Predrag.pdf.
- [2.19] Г. А. Лавров, А. С. Кнйазев, *Приземные и Подземные Антенны: Теория и Практика Антенн, Размещенных Вблизи Поверхности Земли*, Советское Радио, Москва, 1965.
- [2.20] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "The point ground electrode in vicinity of the semi-spherical inhomogeneity", *Serbian Journal of Electrical Engineering*, Vol. 2, No. 2, Nov. 2005, pp 163-172.

3. PREGLED KORIŠĆENIH METODA

Kratak prikaz numeričkih metoda korišćenih u radu za analizu i rešavanje problema biće izložen u ovom delu teksta. Detaljan opis primene metoda na razmatranje konkretnih problema prezentovan je u kasnijim poglavljima.

3.1 METOD MOMENATA

Metod momenata (Method of Moments-MoM, ([3.1])) predstavlja generalni metod za rešavanje nehomogenih jednačina oblika

$$PF = G, \quad (3.1.1)$$

gde je P operator diferencijalne, integralne ili diferencijalno-integralne prirode, G je funkcija definisana poznatom pobudom, dok je F nepoznata funkcija koju je potrebno odrediti¹. Najveći broj problema u teoriji polja može se svesti na oblik (3.1.1), što metod čini značajnim u okviru ove oblasti teorijske fizike, ([3.3]).

U ovom radu, metod momenata primenjen je na rešavanje integralnih jednačina, odnosno na slučaj kada je P integralni operator, što je i razlog da će u tekstu koji sledi biti opisana primena metoda momenata na rešavanje ove vrste problema.

Primena razmatranog metoda na rešavanje integralnih jednačina u teoriji elektromagnetnih polja podrazumeva svođenje problema na problem sistema N linearnih algebarskih jednačina, gde je N broj nepoznatih, najčešće koeficijenata u odgovarajuće izabranoj funkciji raspodele struje. Ova procedura ilustrovana je u daljem tekstu, ([3.4]).

Posmatra se provodno telo opticano strujom površinske gustine J . Uslov da je tangencijalna komponenta vektora električnog polja na površini provodnika jednaka nuli opisuje se izrazom

$$E_{\tan}^s = E_{\tan}^i, \text{ tj. } \vec{E}_{\tan}^s = -\vec{E}_{\tan}^i \quad (3.1.2)$$

gde je E_{\tan}^s tangencijalna komponenta polja koje stvara struja J , dok je E_{\tan}^i tangencijalna komponenta polja koju stvara izvor smešten u proizvoljnoj tački prostora, unutar ili izvan tela. U daljem opisu procedure, oznaka "tan" biće izostavljena, pa izraz (3.1.2) ima oblik $-E^s = E^i$ ².

Uvođenjem operatora L_{op} ,

$$L_{\text{op}}(J) = -E^s, \quad (3.1.3)$$

može se korišćenjem koncepta linearnih vektorskih prostora napisati operatorska jednačina

$$L_{\text{op}}(J) = E^i. \quad (3.1.4)$$

gde je L_{op} operator koji ima različit oblik i prirodu za konkretne probleme, E_i je poznata funkcija pobude, dok je J odgovarajuća funkcija odziva koju je neophodno odrediti. Uz pretpostavku da po-

¹ Ovaj metod predstavlja nekada se naziva indirektnim metodom graničnih elemenata ("Indirect boundary elements method") ili metod fundamentalnog rešenja ("Method of fundamental solution") ([3.2]).

² Oznake u gornjem indeksu vezane su isključivo za ovo poglavlje i ne treba ih mešati sa oznakama korišćenim u prethodnom poglavlju ("S"-model "Straton").

stoji jedno i samo jedno rešenje za zadatu pobudu E^i , može se definisati i inverzni operator L_{op}^{-1} , tako da je

$$L_{op}^{-1}(E^i) = J. \quad (3.1.5)$$

Uslov o jedinstvenosti rešenja dovodi do zaključka da operator L_{op} predstavlja zapravo preslikavanje "jedan na jedan", skupa vrednosti za odziv J na skup vrednosti pobudne funkcije E_i , u definisanom domenu.

Da bi se odredio domen i vrsta operatora, često je neophodno definisati skalarnu veličinu nazvanu unutrašnji proizvod ("inner product") $\langle J, E \rangle$, koja se određuje integracijom proizvoda JE po razmatranoj površini (dakle L_{op} će se u daljem tekstu smatrati integralnim operatorom). U [3.4] ova veličina je definisana tako da su zadovoljeni uslovi

$$\langle J, E \rangle = \langle E, J \rangle, \quad (3.1.6)$$

$$\langle \alpha J + \beta J, E \rangle = \alpha \langle J, E \rangle + \beta \langle J, E \rangle, \quad (3.1.7)$$

$$J \neq 0 \text{ za } \langle J^*, J \rangle > 0 \text{ i } J \neq 0 \text{ za } \langle J^*, J \rangle = 0. \quad (3.1.8)$$

Dakle, procedura za određivanje odziva podrazumeva četiri koraka:

1. Razvoj nepoznate funkcije odziva u posmatranom domenu uz pomoć odabranih baznih funkcija;
2. Izbor odgovarajućeg unutrašnjeg proizvoda i definisanje težinskih funkcija;
3. Formiranje sistema linearnih jednačina na osnovu unutrašnjeg proizvoda; i
4. Rešavanje obrazovanog sistema linearnih jednačina.

Prethodno nabrojani koraci biće detaljnije analizirani u tekstu koji sledi.

3.1.1 Galerkinov (Galerkin) metod

Funkcija odziva na razmatranoj površini pretpostavlja se u obliku sume

$$J = \sum_{n=1}^N I_n J_n \quad (3.1.9)$$

gde su I_n , $n=1, N$ nepoznati koeficijenti, a J_n , $n=1, N$ izabrane bazne funkcije u domenu u kom je definisan operator L_{op} . Tako se smenom prethodnog izraza u (3.1.4), pri čemu se koristi linearna priroda L_{op} dobija

$$\sum_{n=1}^N I_n L_{op}(J_n) = E^i. \quad (3.1.9)$$

Nakon izbora težinskih funkcija W_m , $m=1, 2, \dots$ formira se unutrašnji proizvod

$$\sum_{n=1}^N I_n \langle W_m, L_{op}(J_n) \rangle = \langle W_m, E^i \rangle. \quad (3.1.10)$$

Izbor težinskih funkcija koje zadovoljavaju uslov $W_m = J_m$, $m=1, N$, jeste definišuća karakteristika tzv. Galerkinovog metoda. Tada prethodni izraz postaje

$$\sum_{n=1}^N I_n \langle J_m, L_{op}(J_n) \rangle = \langle J_m, E^i \rangle. \quad (3.1.11)$$

Određivanjem unutrašnjeg proizvoda formira se matična jednačina

$$\begin{bmatrix} \langle J_1, L_{\text{op}}(J_1) \rangle & \langle J_1, L_{\text{op}}(J_2) \rangle & \cdot & \cdot & \cdot & \langle J_1, L_{\text{op}}(J_N) \rangle \\ \langle J_2, L_{\text{op}}(J_1) \rangle & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \langle J_N, L_{\text{op}}(J_1) \rangle & & & & & \langle J_N, L_{\text{op}}(J_N) \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle J_1, E^i \rangle \\ \langle J_2, E^i \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle J_N, E^i \rangle \end{bmatrix}, \quad (3.1.12)$$

odnosno u kompaktnijoj formi,

$$[Z][I] = [V]. \quad (3.1.13)$$

U jednačini (3.1.13) elementi matrica $[Z]$, $[I]$ i $[V]$ predstavljaju generalisane impedanse, struje i napone respektivno ([3.4]). Sada se nakon određivanja inverzne matrice $[Z]^{-1}$ na osnovu

$$[I] = [Z]^{-1}[V], \quad (3.1.14)$$

određuju elementi matrice $[I]$, odnosno koeficijenti I_n , $n = 1, N$.

3.1.2 Metod podešavanja u tačkama

Metod podešavanja u tačkama (Point Matching Method-PMM) omogućava približno određivanje elemenata matrice $[Z]$ u izrazu (3.1.13), $Z_{mn} = \langle J_m, L_{\text{op}}(J_n) \rangle$ tako što se uslov zadat jednačinom (3.1.11) zadovoljava samo u pojedinim tačkama na posmatranoj površini. Na taj način neophodno je vršiti samo onu integraciju koju zahteva sam operator L_{op} . Jednačina (3.1.12) tako dobija oblik

$$\begin{bmatrix} \langle \delta(r-r_1), L_{\text{op}}(J_1) \rangle & \langle \delta(r-r_1), L_{\text{op}}(J_2) \rangle & \cdot & \cdot & \cdot & \langle \delta(r-r_1), L_{\text{op}}(J_N) \rangle \\ \langle \delta(r-r_2), L_{\text{op}}(J_1) \rangle & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \langle \delta(r-r_N), L_{\text{op}}(J_1) \rangle & & & & & \langle \delta(r-r_N), L_{\text{op}}(J_N) \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \delta(r-r_1), E^i \rangle \\ \langle \delta(r-r_2), E^i \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \langle \delta(r-r_N), E^i \rangle \end{bmatrix}. \quad (3.1.15)$$

U prethodnoj jednačini r je rastojanje od neke referentne tačke (najčešće koordinatnog početka), dok je r_n , $n = 1, N$ rastojanje tačke u kojoj se zadovoljava zadati uslov od iste tačke. Sa $\delta(r-r_n)$ označena je Dirakova delta funkcija. Donji indeksi u oznakama pobude E_n^i , $n = 1, N$, označavaju da se podešavanje vrši u tačkama 1, 2, ..., N , respektivno.

U praksi se pokazalo da se zadovoljavanjem zadatog uslova u dovoljno velikom broju tačaka postiže zadovoljavajuća tačnost. To naročito važi za tačke udaljene od domena na čijoj se površini zadovoljava granični uslov. Veća osetljivost javlja se kod određivanja veličina u okolini razmatrane površine, ali generalno uzevši, metod momenata pokazao se kao dovoljno efikasan i precizan metod koji se može primeniti za analizu i rešavanje velikog broja problema.

3.1.3 Metod odsečaka

Umesto aproksimacije na celom domenu, nekada je jednostavnije aproksimirati odziv tako da na jednom delu površine pretpostavlja da je odziv konstantan. Ovakav pristup koji karakteriše metod odsečaka omogućava rešavanje problema bez prethodnog poznavanja očekivane prirode

odziva. Praktično, kada se domen podeli na N segmenata, bazna funkcija na bilo kojoj tački površine P tada se može prikazati kao

$$J = \begin{cases} I_n & P \in \text{segmenta } n \\ 0 & P \notin \text{segmenta } n \end{cases}, \quad n = 1, N. \quad (3.1.16)$$

U literaturi se gornja funkcija često naziva impulsna ("pulse") funkcija i primenjena je i na rešavanje konkretnih problema analiziranih u ovom radu. Pored funkcije (3.1.16) može se kod metoda odsečaka koristiti i trougaona ("triangle") aproksimacija, zatim aproksimacija isečene sinusoida ("piecewise sinusoid") i zarubljene kosinusoida ("truncated cosine") ([3.5]), kvadratna interpolacija ([3.4]) itd.

3.1.4 Metod celodomske aproksimacije

Celodomska ("Entire-domain") aproksimacija podrazumeva da se odziv J aproksimira pomoću odgovarajuće izabranih baznih funkcija J_n , $n = 1, N$ na celom domenu na kome se zadovoljava zadati granični uslov, (izraz (3.1.9)). Izbor baznih funkcija vezan je za konkretnu prirodu problema. Tako je u slučaju celodomske aproksimacije primenjene na analizu problema u ovom radu korišćena polinomska aproksimacija struje,

$$J(x) = \sum_{n=0}^N I_n x^n, \quad (3.1.17)$$

dok se u [3.4] za rešavanje problema dipol antene predlažu sledeće forme odziva:

$$J(x) = I_1 \cos(\pi x/2) + I_2 \cos(3\pi x/2) + \dots \quad (\text{Furijeova (Fourier)}), \quad (3.1.18)$$

$$J(x) = I_1 T_0(x) + I_2 T_2(x) + I_3 T_4(x) + \dots \quad (\text{Čebiševljeva (Chebyshev)}), \quad (3.1.19)$$

$$J(x) = I_1 + I_2 x^2 + I_3 x^4 + \dots \quad (\text{Maklorenova (Maclaurin)}) \quad (3.1.20)$$

$$J(x) = I_1 P_0(x) + I_2 P_2(x) + I_3 P_4(x) + \dots \quad (\text{Ležandrova (Legendre)}). \quad (3.1.21)$$

U prethodnim izrazima x je generalisana koordinata koja zavisi od prirode problema, dok su $P_n(x)$ i $T_n(x)$ Ležandrovi polinomi prve vrste i Čebiševljevi polinomi, respektivno.

3.2 VARIJACIONI METOD

Rešavanje problema u teoriji polja gotovo neizostavno podrazumeva i rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina, čiji je opšti oblik

$$L_{\text{op}}(f) = g \quad (3.2.1)$$

gde je f nepoznata funkcija, L_{op} je diferencijalni operator, dok je g nehomogeni član. Umesto direktnog rešavanja jednačine (3.2.1) varijacioni metod problem svodi na određivanje funkcije koja daje minimalnu vrednost integrala formiranog tokom analize, odnosno rešava varijacioni problem ([3.4]). U fizičkom smislu, pomenuti integral srazmeran je razlici između tražene funkcije i zadatog graničnog uslova. Tekst koji sledi sadrži kratak prikaz metoda, sa naglaskom na one karakteristike metoda koje dolaze do izražaja kod primene na konkretne probleme analizirane u ovom radu.

Prvi i osnovni korak u primeni varijacionog metoda predstavlja formiranje funkcionala, koji se u literaturi nekada naziva "funkcija funkcije", ([3.4]). Kao što vrednosti promenljive odgovara vrednost funkcije, tako i funkcional svakoj funkciji pridružuje odgovarajuću brojnu vrednost.

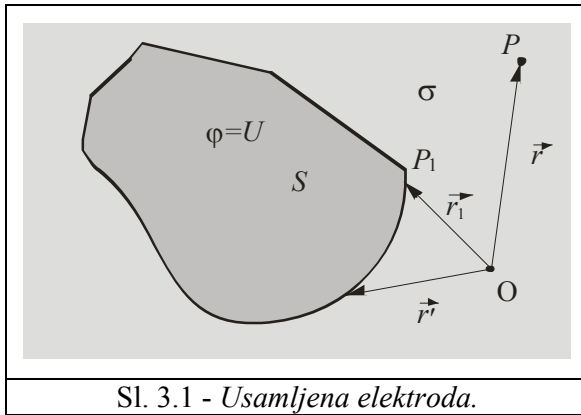
Ništa manje važan drugi korak je određivanje funkcija za koje funkcional postiže maksimalnu i minimalnu vrednost, kao i funkcije za koju funkcional ima stalnu vrednost ("saddle"(sedlo) funkcija), odnosno da bude stacionaran, ([3.6]).

U vezi sa prethodnim tekstom, od značaja je naglasiti da veličine koje se javljaju u teoriji elektromagnetnih polja često zadovoljavaju uslov da neki od funkcionala koji su korelisani sa njima imaju minimalnu vrednost. Tako na primer, elektrostatički skalar-potencijal ima raspodelu koja odgovara minimalnoj vrednosti energije elektrostatičkog polja. Saglasnost varijacionog principa i Maksvelovih jednačina detaljno je analizirana u [3.7]-[3.8].

U ovom radu se za traženje funkcije koja funkcional čini približno stacionarnim koristi Rejli-Ricov (Rayleigh-Ritz) metod ([3.6]), zasnovan na ideji da se funkcija aproksimira linearnom kombinacijom poznatih funkcija i da se konačno rešenje dobije određivanjem parametara u pretpostavljenoj linearnoj formi. Parametri se određuju po proceduri koja podrazumeva smenjivanje linearne kombinacije u funkcional i diferenciranje po svakom parametru ponasob.

3.2.1 Metod srednjih potencijala

Metod srednjih potencijala (Average Potential Method-APM), poznat i kao metod Hove (Howe) veoma je jednostavan i zadovoljavajuće tačan metod za rešavanje problema stacionarnih i kvazistacionarnih elektromagnetnih polja, ([3.9]-[3.11]). Metod predstavlja poseban slučaj varijacionog metoda, što će biti pokazano u kasnijem tekstu, u okviru analize konkretnog problema rešenog u radu.



Primena metoda ilustrovana je na slučaju elektrode proizvoljnog oblika površine S smeštene u homogenu sredinu, specifične provodnosti σ , Sl. 3.1. Potencijal elektrode je U . Metod je zasnovan na pretpostavci da je gustina struje otičanja sa površine posmatrane elektrode stalna, pa je njena površinska gustina $J = I/S$ stalna, gde je I ukupna struja koja otiče sa elektrode. Uz ovu pretpostavku, potencijal u tački P čiji je položaj definisan vektorom \vec{r} je

$$\varphi(\vec{r}) = \oint_S \frac{J dS}{4\pi\sigma|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{I}{S} \oint_S \frac{dS}{4\pi\sigma|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.2.2)$$

Na ovaj način određen potencijal ne zadovoljava uslov ekvipotencijalnosti elektrode, pa je potencijal tačke na površini elektrode P_1 (položaja definisanog vektorom \vec{r}_1), različit od pretpostavljene vrednosti potencijala U , odnosno

$$\varphi(\vec{r}_1) = \frac{I}{S} \oint_S \frac{dS}{4\pi\sigma|\vec{r}_1 - \vec{r}'|} \neq U. \quad (3.2.3)$$

Da bi se ublažila načinjena greška, približna vrednost potencijala elektrode određuje se kao srednja vrednost potencijala datog izrazom (3.2.3) po površini elektrode (potencijal se "osrednjava"),

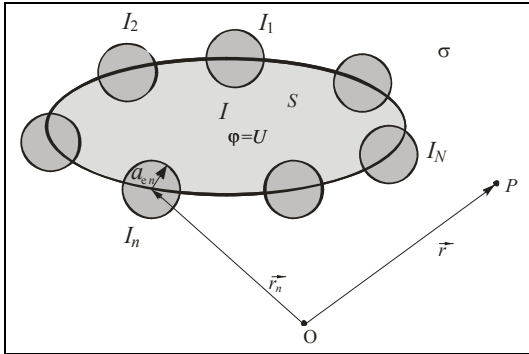
$$U_{sr} = \frac{1}{S} \oint_S \varphi(\vec{r}_1) dS_1 = \frac{I}{S^2} \oint_S \oint_S \frac{dS dS_1}{4\pi\sigma|\vec{r}_1 - \vec{r}'|}, \quad (3.2.4)$$

pa je približna otpornost elektrode

$$R = \frac{U_{sr}}{I} = \frac{1}{S^2} \oint_S \oint_S \frac{dS dS_1}{4\pi\sigma|\vec{r}_1 - \vec{r}'|}. \quad (3.2.5)$$

3.3 METOD EKVIVALENTNE ELEKTRODE

Metod ekvivalentne elektrode (MEE) je numerički metod razvijen na Elektronskom fakultetu u Nišu, namenjen približnom proračunu potencijalnih polja teorijske fizike, uključujući i kvazistacionarno elektromagnetno polje ([3.12]- [3.14]). Predloženi metod zasnovan je na ideji da se elektroda proizvoljnog oblika "zameni ekvivalentnim sistemom sastavljenim od konačnog broja tzv. ekvivalentnih elektroda" ([3.12]). Tako se analiza posmatranog elektrodnog sistema svodi na rešavanje većeg broja lakše rešivih problema.



Sl. 3.2 - Primena MEE.

Oblik, dimenzije i položaj ekvivalentnih elektroda određuju se tako da u potpunosti zamene posmatrani elektrodni sistem. Zavisno od geometrije problema za čije se rešavanje primenjuje MEE, ekvivalentna elektroda može da bude ravna ili ovalna traka, ako se radi o planparalelnim problemima, sfera, ako se metod primenjuje na trodimenzionalne probleme, ili tanka toroidalna traka, u slučaju aksijalno simetričnih sistema. Ekvivalentne elektrode se smeštaju po površini provodnika, pri čemu je poluprečnik ekvivalentne elektrode jednak ekvivalentnom poluprečniku dela elektrode koji konkretna ekvivalentna elektroda zamenjuje. Sistem linearnih jednačina, u kojem su nepoznate veličine struje oticanja ekvivalentnih elektroda, formira se iz uslova da su potencijal i struja oticanja ekvivalentne elektrode jednaki potencijalu, odnosno struji oticanja sa dela površine elektrode zamenjenog ekvivalentnom elektrodom.

Primena metoda ilustrovana je, bez uticaja na opštost izlaganja, na primeru glatke usamljene elektrode površine S proizvoljnog oblika, koja se nalazi na potencijalu $\varphi = U$, dok je ukupna struja oticanja sa elektrode I . Elektroda se nalazi u homogenoj sredini specifične provodnosti σ .

Površina provodnika zamenjena je sistemom od N sfernih ekvivalentnih elektroda pri čemu je njihov potencijal jednak potencijalu elektrode U , dok je struja oticanja sa ekvivalentnih elektroda I_n , $n=1, \dots, N$. Zbir struja oticanja sa ekvivalentnih elektroda jednak je ukupnoj struji oticanja sa elektrode, I , odnosno

$$I = \sum_{n=1}^N I_n. \quad (3.3.1)$$

Poluprečnik ekvivalentne elektrode a_{en} zavisi od dimenzija površine koju konkretna ekvivalentna elektroda zamenjuje. Ako je površina koja se zamenjuje ekvivalentnom elektrodom pravougaonog oblika dimenzija $b \times d$, poluprečnik ekvivalentne elektrode određuje se prema obrascu ([3.12]),

$$\frac{a_e}{b} = \begin{cases} 0.373(d/b)^{0.3882} & 0.5b < d \leq b \\ 0.404(d/b)^{0.5} & 0.3b < d \leq 0.5b \\ 0.696(d/b)^{0.957} & 0 < d \leq 0.3b \end{cases}. \quad (3.3.2)$$

Ako se radi o masivnim elektrodama velike dužine, one se mogu zameniti cilindričnim provodnicima poluprečnika $a_e = d/4$, gde je d širina ravne površine (trake) koju zamenjuje cilindrični provodnik, ([PRILOG 4]). U slučaju ovalne površine (trake) kojoj odgovara ugao 2α , ekvivalentni poluprečnik je $a_e = R \sin(\alpha/2)$, gde je R poluprečnik kružnice na koju se ovalna površina oslanja, ([PRILOG 5]).

Sistem jednačina kod primene MEE formira se iz uslova da je potencijal ekvivalentnih elektroda jednak potencijalu provodnika U ,

$$U = \sum_{n=1}^N \frac{I_n}{4\pi\sigma\sqrt{|\vec{r}_m - \vec{r}_n|^2 + a_{cm}^2}\delta_{mn}}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (3.3.3)$$

gde je δ_{mn} Kronekerov simbol. Rešenja sistema linearnih jednačina (3.3.3) su ukupne struje oticanja sa ekvivalentnih elektroda I_n , $n = 1, 2, \dots, N$.

Nakon određivanja struja oticanja ekvivalentnih elektroda moguće je proračunati i ostale veličine od interesa. Tako se vektor električnog polja u okolini posmatrane elektrode određuje na osnovu izraza (2.1.27).

3.4 LITERATURA

- [3.1] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, The Macmillan Company, New York, 1969.
- [3.2] G. Fairweather G, A. Karageorghis, "The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems", *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 9, 1998, pp 69–95.
- [3.3] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton-London-New York-Washington D.C., 2001, Chapters 4, 5.
- [3.4] R. Mitra (Ed.), *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sidney-Braunschweig, 1973, pp 15-31.
- [3.5] C. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1989, pp 671-740.
- [3.6] R. C. Botton, Jr., *Computational Methods for Electromagnetics and Microwaves*, John Wiley & Sons Inc., New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1992, pp 113-129.
- [3.7] H. Uhlmann (Ed.), D. M. Veličković, K. Brandisky, R. D. Stantcheva, H. Brauer, *Fundamentals of Modern Electromagnetics for Engineering-Textbook for Graduate Students, Part I: Static and Stationary Electrical and Magnetic Field*, Technical University Ilmenau/Germany, 2005, pp 43-56, 78-79.
- [3.8] D. M. Veličković, *Elektromagnetika-Prva Sveska*, II izdanje, Elektronski fakultet u Nišu, 1999, str. 95-104.
- [3.9] D. M. Veličković, "Numerički i približni metodi za rešavanje problema elektrostatičke", *III Jugoslovensko savetovanje o statičkom elektricitetu, ELEKTROSTATIKA 78*, Oktobar 1978, Beograd, Zbornik radova, str. 22-42.
- [3.10] B. A. Говорков, *Электрические и Магнитные поля*, Энергия 68, Москва.
- [3.11] T. N. Giao, M. P. Sarma, "Effect of two layer earth on the electric field near HVDC electrodes", Vol. PAS 91, No. 6, 1972, 2356-2365.
- [3.12] D. M. Veličković, "Equivalent electrodes method", *Scientific Review*, Belgrade, 1996, pp 207-248.
- [3.13] D. M. Veličković, "The equivalent electrode method", 34. Int. Symposium Theoretische Elektrotechnik, 26-31. Oct. 1981, Ilmenau, DDR, Proc., Vol. 2, pp 125-128.
- [3.14] D. M. Veličković, "Equivalent electrodes method application in nonrotational fields theory", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, PIEC '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp 103-116.

4. UZEMLJIVAČKI SISTEMI U HOMOGENOJ ZEMLJI

U ovom delu teksta, primenom različitih metoda opisanih u Poglavlju 3, analizirano je nekoliko karakterističnih tipova uzemljivačkih elektroda i sistema smeštenih u zemlji tretiranoj kao poluprovodna homogena izotropna sredina poznatih parametara. Izvršeno je upoređivanje rezultata dobijenih primenom različitih metoda, pri čemu su tokom procesa razmatrane i referentne vrednosti iz literature koja je kandidatu bila dostupna. Na taj način, u rad je praktično uključena verifikacija metoda kasnije korišćenih za analizu uzemljivačkih sistema u okolini nehomogenosti cilindričnog i polusferičnog tipa. Pri tome je primena metoda objašnjena za svaki pojedinačni problem, uz izostavljanje generalnih razmatranja vezanih za procedure ponaosob. Ona su, u meri u kojoj predmet istraživanja to zahteva, izložena u Poglavlju 3.

4.1 USAMLJENA PRAVA LINEIČNA ELEKTRODA

Posmatra se usamljena prava lineična elektroda dužine l i poluprečnika poprečnog preseka a , ($a \ll l$), smeštena u homogenoj zemlji poznatih električnih parametara, σ_1 , $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1}$ i $\mu_1 = \mu_0$ (σ_1 specifična provodnost, $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1}$ - dielektrična konstanta i $\mu_1 = \mu_0$ - magnetna propustljivost)¹, Sl. 4.1. Elektroda je preko izolovanog zemljovodnog provodnika napajana niskofrekventnom strujom jačine I_g . Osa provodnika i odgovarajući ort obeleženi su sa s' . Raspodela longitudinalne struje duž ose provodnika označena je sa $I(s')$. Na osnovu toreme lika u ravnom poluprovodnom ogledalu, ekvivalentni sistem za određivanje strukture elektromagnetnog polja u okolini elektrode uključuje i odgovarajući lik lineičnog provodnika sa raspodelom longitudinalne struje $R_{z10} I(s')$, gde je R_{z10} koeficijent refleksije definisan izrazom (2.2.38). Kako se radi o kvazistacionarnom režimu i kako je $\sigma_0 = 0$, može se bez značajne greške smatrati da je $R_{z10} \cong 1$. Ostali parametri vezani za položaj elektrode i pridruženog koordinatnog sistema mogu se uočiti na Sl. 4.1.

Potencijal u okolini elektrode (tačka P definisana vektorom položaja \vec{r} na Sl. 4.1), može se izraziti kao

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \cdot \frac{T_{z10} I_g}{|\vec{r} - x_0 \hat{x}|} + \int_{s'=0}^l \frac{I(s')}{4\pi\sigma_1} \frac{\partial}{\partial s'} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{R_{z10}}{r_2} \right) ds' \quad (4.1.1)$$

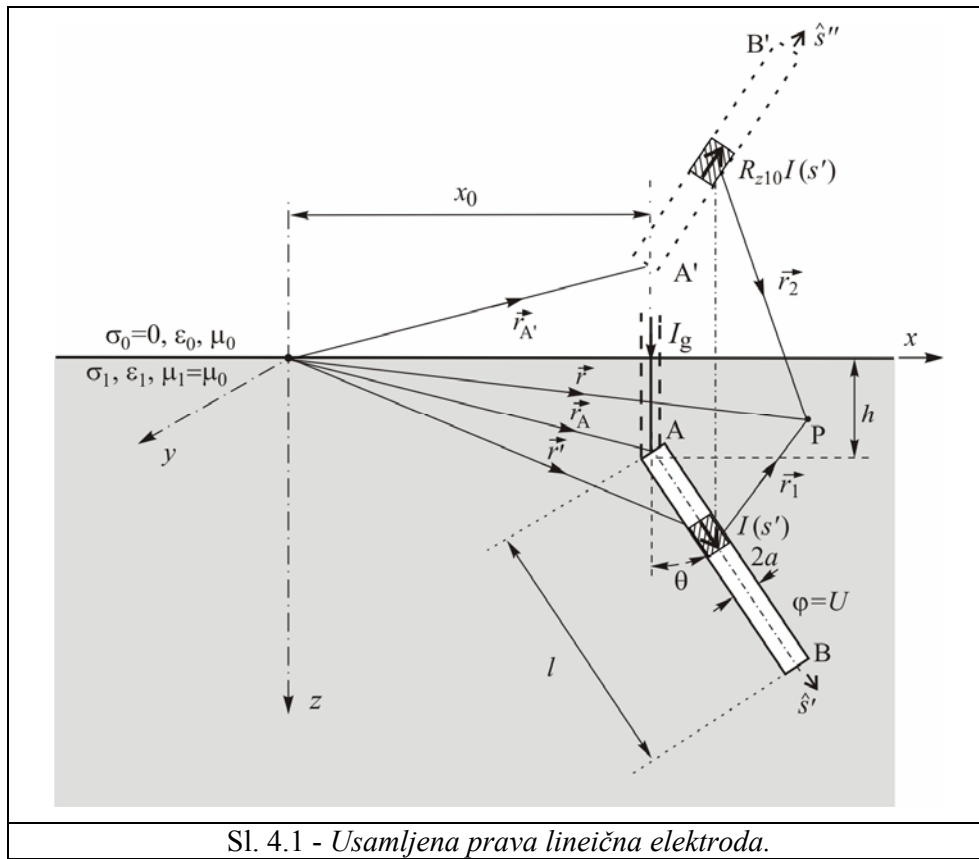
U prethodnom izrazu T_{z10} je koeficijent refleksije definisan jednačinom (2.2.38).

Kada se primeni parcijalna integracija i iskoriste činjenice da je zemljovodni provodnik izolovan (nema struje oticanja), tj. da je $I(s'=0) = I_g$, da je $R_{z10} \cong 1$, (odnosno $T_{z10} = 1 + R_{z10} \cong 2$) i ako se smatra da je provodnik dovoljno tanak ($a \ll l$) pa je struja oticanja na njegovim krajevima jednaka nuli, izraz za potencijal dobija formu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \int_l I_{ot}(s') \left(\frac{1}{r_1} + \frac{R_{z10}}{r_2} \right) ds' \cong \frac{1}{4\pi\sigma_1} \int_l I_{ot}(s') \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ds' \quad (4.1.2)$$

gde je $I_{ot}(s') = -\partial I(s')/\partial s'$ podužna gustina struje oticanja.

¹ Nadalje će se podrazumevati da su σ , ε i μ specifična provodnost, dielektrična konstanta i magnetna propustljivost, respektivno.



4.1.1 Konstantna struja oticanja- Metod podešavanja u tačkama (Point Matching Method)

Ako se pretpostavi da je gustina struje oticanja sa površine elektrode konstantna, $I_{ot}(s') = I_g / l = const$, jednačina (4.1.2) dobija oblik

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{I_g}{4\pi\sigma_1 l} \int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ds' . \quad (4.1.3)$$

Primenom metoda podešavanja u tačkama (Point Matching Method-PMM, ([4.1])), vrednost potencijala $\varphi = U$ podešava se u tački na sredini izvodnice lineičnog provodnika², $s = l/2$ i formira se jednačina

$$U = \frac{I_g}{4\pi\sigma_1 l} \int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ds' \Big|_{s=l/2} , \quad (4.1.4)$$

na osnovu koje je moguće odrediti impedansu lineične elektrode, kao

$$\underline{Z}_g = \frac{U}{I_g} = \frac{1}{4\pi\sigma_1 l} \int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ds' \Big|_{s=l/2} . \quad (4.1.5)$$

Za određivanje integrala u izrazu (4.1.3) od interesa je da se rastojanja r_1 i r_2 izraze kao

² Primenjuje se "teorija logaritamskih potencijala", kao način da se izbegne singularitet kada se računa potencijal koji stvara struja oticanja sa elementa provodnika u tački koja pripada tom elementu. Tačka podešavanja tada se pomera na površinu provodnika. Ovaj pristup koristi se i nadalje u radu, kada se vrednost potencijala podešava u pojedinim tačkama na površini provodnika.

$$r_1 = |\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r} - \vec{r}_A - s'\hat{s}'| = \sqrt{|\vec{r} - \vec{r}_A|^2 - 2(\vec{r} - \vec{r}_A)\hat{s}'s' + s'^2} = \sqrt{A_0 + A_1s' + s'^2} \quad \text{i} \quad (4.1.6a)$$

$$r_2 = |\vec{r} - \vec{r}_A' - s'\hat{s}''| = \sqrt{|\vec{r} - \vec{r}_A'|^2 - 2(\vec{r} - \vec{r}_A')\hat{s}''s' + s'^2} = \sqrt{B_0 + B_1s' + s'^2}. \quad (4.1.6b)$$

Iz prethodnih jednačina je $A_0 = |\vec{r} - \vec{r}_A|^2$, $A_1 = -2(\vec{r} - \vec{r}_A)\hat{s}'$, $B_0 = |\vec{r} - \vec{r}_A'|^2$ i $B_1 = -2(\vec{r} - \vec{r}_A')\hat{s}''$, pa se integral iz (4.1.3) svodi na rešavanje integrala opisano u PRILOGU 6, za $m = 1$.

4.1.2 Konstantna struja oticanja- Metod srednjih potencijala

Ako se smatra da je struja oticanja konstantna, podešavanjem vrednosti potencijala u N_T tačaka na površini provodnika koje su definisane pomoću vrednosti koordinate s ,

$$s_n = n \frac{l}{N_T + 1} = n * \Delta s, \Delta s = \frac{l}{N_T + 1}, n = 1, 2, \dots, N_T, \quad (4.1.7)$$

i za svaku od ovih tačaka odredi impedansa uzemljivačke elektrode pomoću postupka opisanog u 4.1.1, za njenu srednju vrednost dobija se

$$\underline{Z}_g = \frac{1}{N_T} \frac{1}{4\pi\sigma_1 l} \sum_{n=1}^{N_T} \int_l \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ds' \Big|_{s=s_n}. \quad (4.1.8)$$

Metod srednjih potencijala (metod Howe) ([4.2]), zasnovan je na ideji da se funkcija potencijala zadata izrazom (4.1.2) "osrednji" po površini elektrode, pa se na taj način za srednju vrednost potencijala površine provodnika dobija

$$\Phi_{sr} = \frac{1}{l} \int_l \Phi(\vec{r}_{na \text{ elektrodi}}) ds = \frac{1}{4\pi\sigma_1 l} \int_l \int_l I_{ot}(s') \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ds' ds. \quad (4.1.9)$$

Ako se smatra da je struja oticanja konstantna ($I_{ot} = I_g/l$), za srednju vrednost impedanse elektrode sa Sl. 4.1 dobija se

$$\underline{Z}_g = \frac{\Phi_{sr}}{I_g} = \frac{1}{4\pi\sigma_1 l^2} \int_l \int_l \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ds' ds. \quad (4.1.10)$$

Kada se u jednačinu (4.1.8) stavi da je $N_T = l/\Delta s$ i $N_T \rightarrow \infty$ on dobija formu izraza (4.1.10), što znači da se zapravo radi primeni metoda srednjih potencijala u konačnom broju tačaka.

4.1.3 Metod odsečaka

Primenom metoda odsečaka ([4.3]), lineični provodnik deli se ravnomerno na konačan broj odsečaka N . Pri tome je dužina svakog odsečka $\Delta s = l/N$, dok je ukupna struja oticanja sa svakog odsečka I_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Podešavanjem vrednosti potencijala u N tačaka na površini odsečaka, $s_n = (n - 0.5) * \Delta s$, $n = 1, 2, \dots, N$, formira se sistem jednačina

$$U = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=1}^N \frac{I_n}{\Delta_n} \int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ds' \Big|_{s=s_n}, n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1.11)$$

Rešenje sistema jednačina (4.1.11) su ukupne struje oticanja po segmentima, I_n , $n = 1, 2, \dots, N$, dok se impedansa uzemljivačke elektrode određuje kao

$$\underline{Z}_g = U/I_g = U / \sum_{n=1}^N I_n. \quad (4.1.12)$$

4.1.4 Polinomska aproksimacija struje

Veoma često se raspodela longitudinalne struje pretpostavlja u obliku polinoma ([4.4]),

$$I(s') = \sum_{m=0}^M I_m \left(\frac{s'}{l} \right)^m . \quad (4.1.13)$$

Smenom prethodnog izraza u jednačinu (4.1.1), uz primenu procedure parcijalne integracije i uslove $R_{z10} \cong 1$ i $T_{z10} \cong 2$, dobija se

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{m=0}^M I_m \left[\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{1i}} \right) \right]_{s=l} - \frac{m}{l} \int_{s'=0}^l \left(\frac{s'}{l} \right)^{m-1} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) ds' . \quad (4.1.14)$$

Tokom formiranja jednačine (4.1.14) iskorišćene su i jednakosti

$$I_{ot}(s') = -\frac{\partial I(s')}{\partial s'} = -\sum_{m=0}^M I_m \frac{m}{l} \left(\frac{s'}{l} \right)^{m-1} \quad \text{i} \quad I(s'=l) = \sum_{m=0}^M I_m .$$

Kada se rastojanja r_1 i r_{1i} izraze pomoću izraza (4.1.6), integral iz (4.1.14) dobija formu integrala čije je rešenje dato u PRILOGU 6.

Očigledno je da je ukupan broj nepoznatih koeficijenata $M+1$, koliki je i broj jednačina neophodnih za njihovo određivanje. Jedna jednačina direktno proizilazi iz uslova za struju oticanja na kraju provodnika ([PRILOG 7]),

$$I(l) = -aI'(l) . \quad (4.1.15)$$

Pri tome se za tanke provodnike prethodni uslov može bez velike greške svesti na uslov nulte struje na kraju provodnika, tj.

$$I(l) \cong 0 . \quad (4.1.16)$$

Ostalih M jednačina formiraju se podešavanjem vrednosti potencijala datog izrazom (4.1.14) u tačkama na površini provodnika definisanih koordinatama,

$$S_n = \frac{n}{M+1} l, \quad n = 1, 2, \dots, M . \quad (4.1.17)$$

Kako je $I(s'=0) = A_0 = I_g$, za impedansu elektrode dobija se

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g = \frac{U}{I_g} = \frac{U}{I_0} . \quad (4.1.18)$$

4.1.5 Numerički rezultati

U Tabeli 4.1 date su vrednosti otpornosti usamljene lineične elektrode sa Sl. 4.1 dobijeni primenom metoda opisanih u prethodnom tekstu, za različite vrednosti ugla θ . Pri tome je $\sigma_1 = 0.01\text{S/m}$, $\varepsilon_{r1} = 10$, $l = 1\text{m}$, $h = 0.7\text{m}$ i $a = 25\text{mm}$, dok je frekvencija pobude $f = 50\text{Hz}$. Iz Tabele 4.1, priložene u cilju verifikacije metoda koji će nadalje biti korišćeni, uočava se zadovoljavajuće slaganje dobijenih rezultata. U PRILOGU 3 objašnjeno je da za navedenu frekvenciju reaktansa elektrode ima veoma malu vrednost u odnosu na rezistansu, pa je to razlog što su u Tabeli prikazane vrednosti samo za otpornost elektrode.

U Tabeli 4.2 upoređene su vrednosti impedanse iz reference [4.5]³ sa vrednostima dobijenim primenom procedure iz odeljka 4.1.1, kada je pretpostavljena konstantna struja oticanja sa elektrode. Pri tome parametri imaju iste vrednosti kao i u [4.5], $\sigma_1 = 5\text{mS/m}$, $\varepsilon_{r1} = 4$, $l = 1.5\text{m}$, $h = 1\text{m}$ i $a = 7\text{mm}$. Kao i u pomenutoj referenci, razmatrana je horizontalna ($\theta = 0$) i vertikalna ($\theta = 90^\circ$) elektroda. I ovde se, kao i u slučaju vrednosti u Tabeli 4.2 može sagledati zadovoljavajuće slaganje dobijenih vrednosti.

³ Za konverziju parametara iz [4.5], od značaja je bila aplikacija sa sajta <http://online.unitconverterpro.com/unit-conversion/convert-alpha/conductivity.html>.

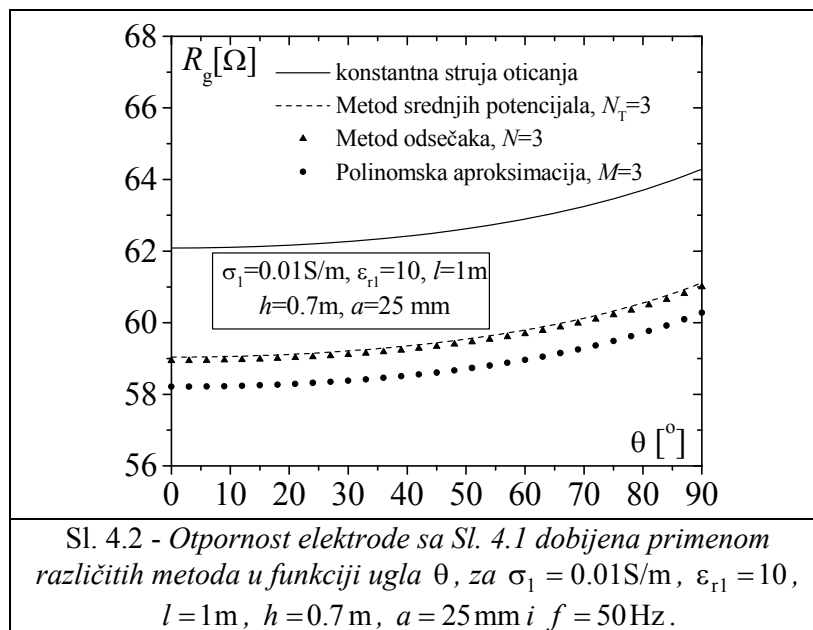
Konačno, na Sl. 4.2 prikazana je zavisnost otpornosti provodnika sa Sl. 4.1 u funkciji ugla θ , kada su primenjene procedure opisane u odeljcima 4.1.1. za vrednosti parametara $\sigma_1 = 0.01\text{S/m}$, $\varepsilon_{r1} = 10$, $l = 1\text{m}$, $h = 0.7\text{m}$ i $a = 25\text{mm}$, dok je frekvencija pobude $f = 50\text{Hz}$.

Tabela 4.1-Poređenje otpornosti elektrode sa Sl. 4.1 određene primenom različitih metoda za $\sigma_1 = 0.01\text{S/m}$, $\varepsilon_{r1} = 10$, $l = 1\text{m}$, $h = 0.7\text{m}$, $a = 25\text{mm}$ i $f = 50\text{Hz}$ i različite vrednosti ugla θ .

PRIMENJENI METOD		$\theta = 0$	$\theta = 30^\circ$	$\theta = 45^\circ$	$\theta = 60^\circ$	$\theta = 90^\circ$
		$R_g [\Omega]$	$R_g [\Omega]$	$R_g [\Omega]$	$R_g [\Omega]$	$R_g [\Omega]$
Konstantna struja oticanja		62.085	62.268	62.514	62.895	64.290
Metod srednjih potencijala	$N_T = 2$	59.848	60.021	60.253	60.613	61.938
	$N_T = 3$	59.039	59.209	59.439	59.795	61.109
Metod odsečaka	$N = 2$	59.862	60.035	60.268	60.629	61.956
	$N = 3$	58.937	59.107	59.335	59.690	60.998
Polinomska aproksimacija struje ⁴	$M = 2$	60.172	60.351	60.593	60.969	62.354
	$M = 3$	58.210	58.380	58.608	58.962	60.277

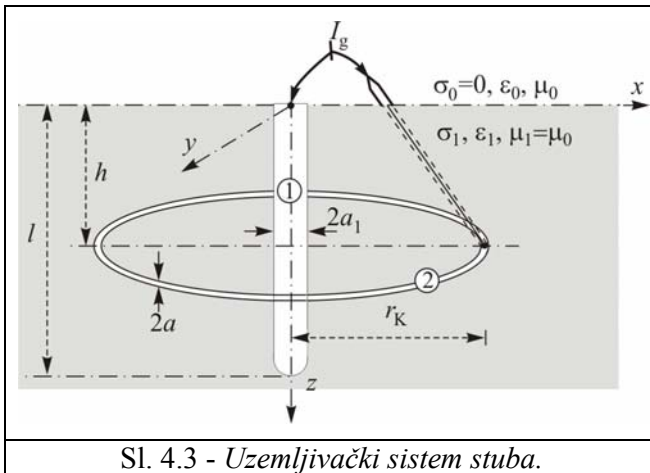
Tabela 4.2-Poređenje otpornosti elektrode sa Sl. 4.1 određene primenom procedure iz 4.1.1 sa vrednostima iz [4.5] za $\sigma_1 = 5\text{mS/m}$, $\varepsilon_{r1} = 4$, $l = 1.5\text{m}$, $h = 1\text{m}$ i $a = 7\text{mm}$.

$\omega\varepsilon_1 / \sigma_1$	$Z_g [\Omega]$			
	Horizontalna elektroda ($\theta = 0$)		Vertikalna elektroda ($\theta = 90^\circ$)	
	Ref. [4.5]	Konstantna struja oticanja	Ref. [4.5]	Konstantna struja oticanja
0	1134 - j0	1217 - j0	1106 - j0	1185 - j0
1.0	551 - j565	591 - j607	542 - j552	582 - j591
3.0	108 - j333	116 - j357	107 - j327	115 - j351



⁴ Iskorišćen je uslov za struju oticanja na kraju provodnika dat izrazom (4.1.15).

4.2 PRSTENASTA UZEMLJIVAČKA ELEKTRODA-UZEMLJIVAČKI SISTEM STUBA



Sl. 4.3 - Uzemljivački sistem stuba.

U [4.6] i [4.7] analiziran je uzemljivački sistem stuba (Sl. 4.3) i određena njegova ukupna otpornost. Ovi rezultati upoređeni su sa otpornošću sistema određenom uz korišćenje pretpostavke da je struja oticanja sa obruča, odnosno koaksijalnog provodnika konstantna. Ova pretpostavka je opravdana ako je zanemaren uticaj zemljovodnog provodnika, kao što je to i učinjeno u [4.6] i [4.7], jer postoji očigledna simetrija posmatranog uzemljivačkog sistema. Uzemljivački sistem stuba detaljnije je razmatran u Petom poglavlju, gde je pored uticaja zemljovodnog pro-

vodnika, razmatran i uticaj temelja stuba kao cilindrične nehomogenosti tla na karakteristike uzemljenja, dok je struja duž provodnika pretpostavljena u obliku polinoma višeg reda. U ovom delu rada, uzemljivački sistem sa Sl. 4.3 je zbog poređenja analiziran uz iste pretpostavke i za iste vrednosti parametara kao u [4.6] i [4.7]. To uključuje i potpuno zanemarivanje dielektričnih karakteristika okoline, tako da je u ovom slučaju u proračun uključena samo specifična provodnost homogene zemlje σ_1 .

Uzemljivački sistem sastoji se od koaksijalnog provodnika kojim je modelovana armatura temelja stuba (1) i prstenaste elektrode (2). Sistem se napaja niskofrekventnom strujom jačine I_g preko izolovanog zemljovodnog provodnika. Poluprečnik obruča označen je sa r_k , dubina ukopavanja sa h , dužina koaksijalnog provodnika sa l , dok su sa a i a_1 , označeni ekvivalentni poluprečnik trake od koje je načinjen prsten, odnosno polupečnik koaksijalnog provodnika, respektivno. Zemlja se tretira kao homogena sredina poznatih parametara, σ_1 , $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1}$ i $\mu_1 = \mu_0$.

Potencijal u okolini uzemljivačkog sistema (tačka definisana vektorom položaja \vec{r}), uz pretpostavku da je struja oticanja duž provodnika konstantna, ima oblik

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{I_1}{4\pi\sigma_1 l} \int \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_{1i}} \right) ds'_1 + \frac{I_2}{4\pi\sigma_1 l_{ob}} \int \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_{2i}} \right) ds'_2, \quad (4.2.1)$$

gde su I_1 i I_2 ukupne struje oticanja sa koaksijalnog provodnika i obruča, respektivno. Pri tome je ispunjen uslov $I_g = I_1 + I_2$. U prethodnom izrazu, $l_{ob} = 2r_k \pi$ je obim prstenaste elektrode, dok su sa r_k i r_{ki} , $k=1,2$ (slično kao i u 4.1.1.) obeležena rastojanja strujnog elementa, odnosno njegovog lika u ravnom provodnom ogledalu od tačke u kojoj se određuje potencijal ($k=1$ -pravolinijski provodnik, $k=2$ -obruč). Podešavanjem potencijala (4.2.1) u tačkama definisanim vektorom položaja $\vec{r}_1 = (l/2)\hat{z}$ (sredina provodnika) i $\vec{r}_2 = r_k \hat{y}$ (na obruču) formira se sistem jednačina

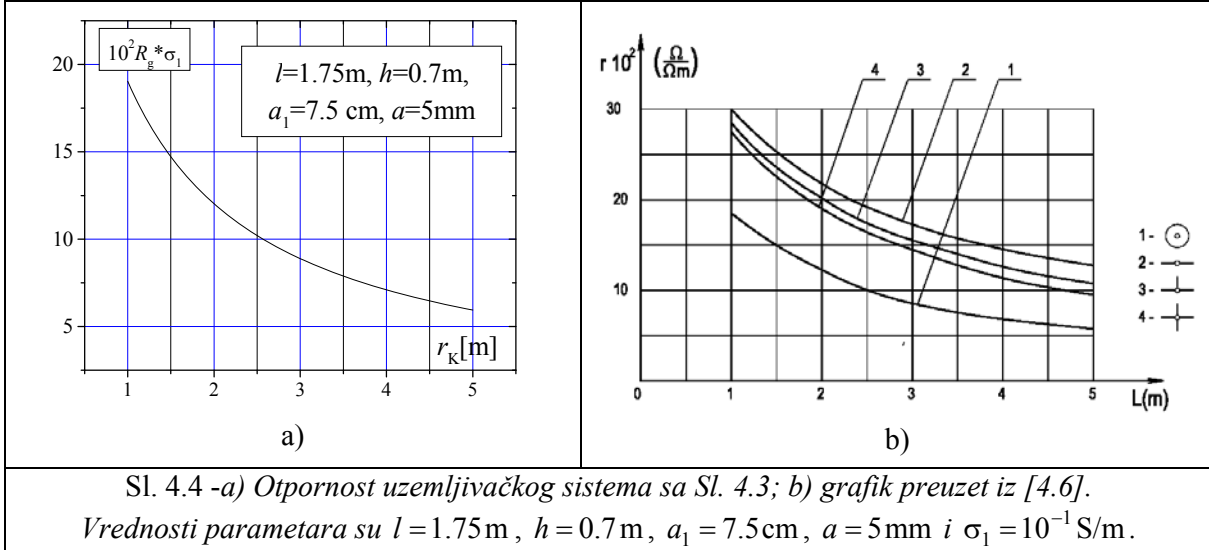
$$\varphi(\vec{r} = \vec{r}_k) \cong U, \quad k=1,2. \quad (4.2.2)$$

Rešenje prethodnog sistema jednačina su ukupne struje oticanja sa elektroda I_1 i I_2 , pa je otpornost uzemljivačkog sistema

$$R_g = \frac{U}{I_g} = \frac{U}{I_1 + I_2}. \quad (4.2.3)$$

4.2.1 Numerički rezultati

Na Sl. 4.4a prikazana je normalizovana otpornost uzemljivačkog sistema sa Sl. 4.3 u funkciji poluprečnika obruča r_k . Vrednosti parametara su $l=1.75\text{ m}$, $h=0.7\text{ m}$, $a_1=7.5\text{ cm}$, $a=5\text{ mm}$ i $\sigma_1=10^{-1}\text{ S/m}$. Primenjeni faktor normalizacije $10^2 * \sigma_1$ isti je kao i onaj korišćen u [4.6]. Grafik iz [4.6] može se videti na Sl. 4.4.b, označen brojem 1. Uočava se izvanredno dobro slaganje grafika dobijenog procedurom opisanom u prethodnom tekstu i grafika iz [4.6]⁵.



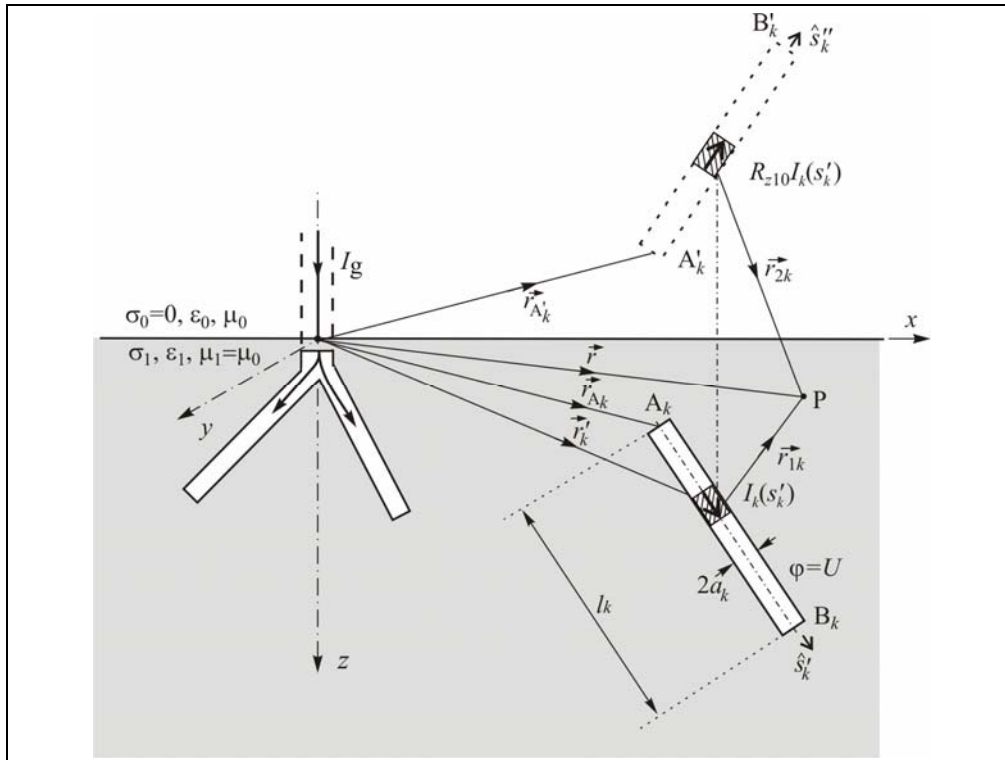
4.3 UZEMLJIVAČKI SISTEM NAČINJEN OD LINEIČNIH ELEKTRODA-ZRAKASTI UZEMLJIVAČ

Posmatra se uzemljivački sistem načinjen od N_p međusobno spojenih lineičnih provodnika dužine l_k i kružnog poprečnog preseka poluprečnika a_k , $a_k \ll l_k$, $k=1, 2, \dots, N_p$, Sl. 4.5. Sistem je položen u homogeno tlo poznatih električnih parametara σ_1 , ϵ_1 , $\mu_1 = \mu_0$ i preko izolovanog zemljovodnog provodnika napajan niskofrekventnom strujom jačine I_g . Ose provodnika i odgovarajući ortovi obeleženi su sa s'_k , dok su raspodele longitudinalne struje duž provodnika označene sa $I_k(s'_k)$, $k=1, 2, \dots, N_p$. Zbog izražene lineične strukture, smatraće se da je struja na slobodnom kraju jednaka nuli (uslov (4.1.16)). Na osnovu teoreme lika u ravnom poluprovodnom ogledalu, slično kao i u 4.1.1, ekvivalentni sistem za određivanje strukture elektromagnetnog polja u okolini elektrode uključuje i odgovarajući lik lineičnih provodnika, raspodele longitudinalne struje $R_{z10} I_k(s'_k)$, gde je R_{z10} koeficijent refleksije definisan izrazom (2.2.38). Kako je $\sigma_0 = 0$, u kvazistacionarnoj analizi kao što je ova, usvaja se da je $R_{z10} \cong 1$. Slično kao i u tački 4.2, u proračun je uključena samo specifična provodnost homogene zemlje σ_1 , (bez uzimanja u obzir vrednosti za ϵ_1), jer je to uslov pod kojim su određeni i referentni rezultati iz [4.6] i [4.7], iskorišćeni za verifikaciju metoda.

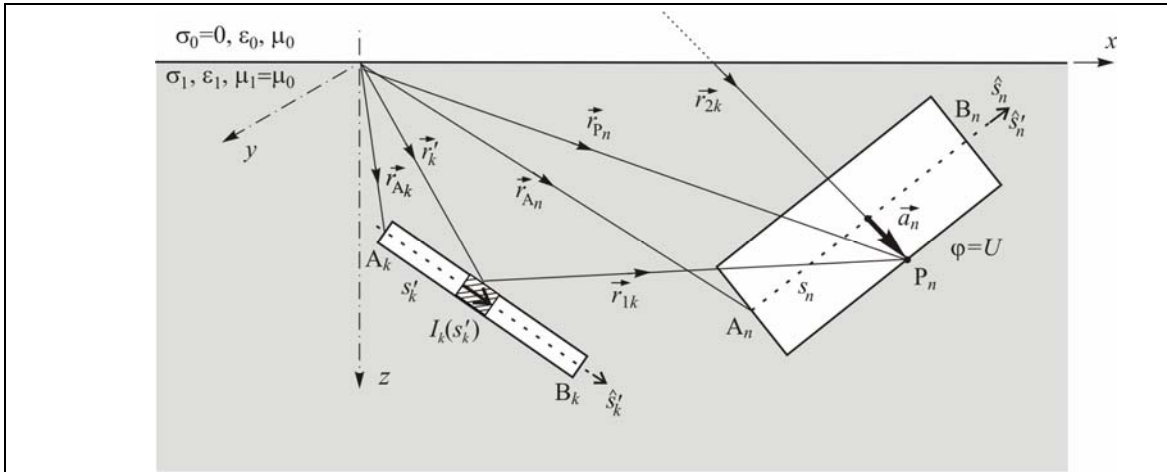
Analizom analognom onoj opisanoj u odeljku 4.1, superpozicijom potencijala od svakog provodnika ponaosob i za potencijal u okolini posmatranog uzemljivačkog sistema dobija

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{s'_k=0}^{l_k} I_{otk}(s'_k) \left(\frac{1}{r_{1k}} + \frac{R_{z01}}{r_{2k}} \right) ds'_k \cong -\frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{s'_k=0}^{l_k} I'_k(s'_k) \left(\frac{1}{r_{1k}} + \frac{1}{r_{2k}} \right) ds'_k. \quad (4.3.1)$$

⁵ Grafik sa Sl. 4.4b direktno je preuzet iz [4.6] tako da oznake r i L sa Sl. 4.4b odgovaraju parametrima $R_g \sigma_1$ i r_k (Sl. 4.4a.), respektivno. Grafici 2, 3 i 4 sa Sl. 4.4b analizirani su u kasnijem tekstu.



Sl. 4.5 - Uzemljivački sistem načinjen od lineičnih elektroda-zrakasti uzemljivač.



Sl. 4.6 - Ilustracija međusobnog uticaja k-tog (izvor) i n-tog provodnika (tačka podešavanja).

U prethodnom izrazu sa $I_{ot,k}(s'_k) = -\partial I_k(s'_k)/\partial s'_k$, $k = 1, 2, \dots, N_p$, obeležena je podužna gustina struje oticanja sa k -tog provodnika dok je σ_1 specifična provodnost okolnog zemljišta.

Podešavanjem vrednosti potencijala u tački P_n na površini n -tog provodnika, $n = 1, 2, \dots, N_p$, Sl.4.6⁶, definisanom vektorom položaja $\vec{r}_{P_n} = \vec{r}_{A_n} + s_n \hat{s}_n + \vec{a}_n$, formira se sistem integralnih jednačina

$$\varphi(\vec{r} = \vec{r}_{P_n}) = U = -\frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{s'_k=0}^{l_k} I'_k(s'_k) \left(\frac{1}{r_{1k}} + \frac{1}{r_{2k}} \right) ds'_k, \text{ za } \vec{r} = \vec{r}_{P_n}, n = 1, 2, \dots, N_p, \quad (4.3.2)$$

⁶ Iako se posmatra sistem lineičnih provodnika, provodnik na smešten na desnom delu Sl. 4.6 ne izgleda "lineično" da bi ilustracija bila jasnija.

gde je U priključeni napon na uzemljivaču, dok se jezgro potencijala računa u tački P_n . Rastojanja r_{1k} i r_{2k} data su izrazima

$$r_{1k} = \sqrt{a_n^2 + |\vec{r}_{An} - \vec{r}_{Ak} + s_n \hat{s}_n - s'_k \hat{s}'_k|^2} \quad \text{i} \quad r_{2k} = \sqrt{a_n^2 + |\vec{r}_{An} - \vec{r}_{A'k} + s_n \hat{s}_n - s'_k \hat{s}'_k|^2}. \quad (4.3.3)$$

Rešenje sistema integralnih jednačina (4.3.2) su funkcije raspodele struja oticanja $I_{ot}(s'_k) = -I'_k(s'_k)$, (tj. longitudinalnih struja $I_k(s'_k)$), sa provodnika uzemljivačkog sistema ($k = 1, 2, \dots, N_p$).

Kada se nepoznate raspodele longitudinalne struje struje pretpostave u obliku polinoma sa nepoznatim kompleksnim strujnim koeficijentima

$$I_k(s'_k) = \sum_{m=0}^{M_k} I_{km} \left(\frac{s'_k}{l_k} \right)^m, \quad k = 1, 2, \dots, N_p \quad (4.3.4)$$

ukupna struja oticanja sa površine k -tog provodnika je

$$I_k(0) - I_k(l_k) = - \sum_{m=1}^{M_k} I_{km}, \quad k = 1, 2, \dots, N_p, \quad (4.3.5)$$

dok je zbir svih ovih struja zapravo struja napajanja uzemljivačkog sistema I_g , tj.

$$I_g = \sum_{k=1}^{N_p} [I_k(0) - I_k(l_k)]. \quad (4.3.6)$$

Uz pretpostavljenu raspodelu longitudinalne struje u polinomskoj formi (4.3.4.), sistem integralnih jednačina (4.3.2) rešen je u ovom delu rada pomoću varijacione formule ([4.9]- [4.14]), odnosno metodom podešavanja u tačkama ([4.1]).

4.3.1 Varijaciona formula

Sadržaj ovog odeljka predstavlja redukovanu formu analize detaljnije izložene u referenci [4.9].

Prvi korak u formiranju varijacione formule za određivanje otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 4.6 je množenje izraza (4.3.2) sa $I'_n(s_n)$ i njegova integracija u granicama od $s_n = 0$ do $s_n = l_n$, $n = 1, 2, \dots, N_p$, na osnovu čega se dobija

$$U[I_n(0) - I_n(l_n)] = \int_{s_n=0}^{l_n} U I'_n(s_n) ds_n = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{k=0}^{N_p} \int_{s_n=0}^{l_n} I'_n(s_n) \int_{s'_k=0}^{l_k} I'_k(s'_k) K(s_n, s'_k) ds'_k ds_n. \quad (4.3.7)$$

U prethodnoj jednačini je sa $K(s_n, s'_k) = \left(\frac{1}{r_{1k}} + \frac{1}{r_{2k}} \right)$ označeno jezgro integrala. Sumiranjem izraza (4.3.7) za vrednosti indeksa $n = 1$ do $n = N_p$ formira se jednačina

$$U \sum_{n=1}^{N_p} [I_n(0) - I_n(l_n)] = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{s_n=0}^{l_n} I'_n(s_n) \int_{s'_k=0}^{l_k} I'_k(s'_k) K(s_n, s'_k) ds'_k ds_n. \quad (4.3.8)$$

Kako se na osnovu (4.3.6) leva strana prethodne jednačine može napisati u obliku $U I_g = R_g I_g^2$, normiranjem (4.3.8) sa I_g^2 dobija se varijaciona formula za izračunavanje ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema R_g ,

$$R_g = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{n=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \int_{s_n=0}^{l_n} I_n'(s_n) \int_{s'_k=0}^{l_k} I_k'(s'_k) K(s_n, s'_k) ds'_k ds_n, \quad (4.3.9)$$

gde su sa $I_n^*(s_n) = I_n'(s_n)/I_g$ i $I_k^*(s'_k) = I_k'(s'_k)/I_g$ označene normirane raspodele podužne struje oticanja. Sada su normirane polinomske raspodele longitudinalnih struja (4.3.4),

$$I_k^*(s'_k) = I_k(s'_k)/I_g = \sum_{m=0}^{M_k} \left(\frac{I_{km}}{I_g} \right) \cdot \left(\frac{s'_k}{l_k} \right)^m = \sum_{m=0}^{M_k} A_{km} \left(\frac{s'_k}{l_k} \right)^m, \quad k=1, 2, \dots, N_p, \quad (4.3.10)$$

dok su raspodele struja oticanja

$$I_{ot}^*(s'_k) = -I_k^*(s'_k) = -I_k'(s'_k)/I_g = -\sum_{m=0}^{M_k} A_{km} \frac{m}{l_k} \left(\frac{s'_k}{l_k} \right)^{m-1}, \quad k=1, 2, \dots, N_p. \quad (4.3.11)$$

Na osnovu (4.3.10) i (4.3.6) za nepoznate normirane strujne koeficijente A_{km} dobija se jednačina veze

$$\left(\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{m=1}^{M_k} A_{km} + 1 \right) = 0. \quad (4.3.12)$$

Smenom polinomske raspodele struje oticanja (4.3.11) u (4.3.9) dobija se varijaciona formula za otpornost uzemljivačkog sistema,

$$R_g = \sum_{n=1}^{NP} \sum_{k=1}^{NP} \sum_{i=1}^{M_n} \sum_{m=1}^{M_k} A_{ni} A_{km} W_{i,m}^{n,k}, \quad (4.3.13)$$

gde je sa $W_{i,m}^{n,k}$ označen integralni izraz

$$W_{i,m}^{n,k} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \cdot \frac{i}{l_n} \cdot \frac{m}{l_k} \int_{s_n=0}^{l_n} \left(\frac{s_n}{l_n} \right)^{i-1} \int_{s'_k=0}^{l_k} \left(\frac{s'_k}{l_k} \right)^{m-1} K(s_n, s'_k) ds'_k ds_n, \quad (4.3.14)$$

recipročan po indeksima "n" i "k", odnosno "i" i "m", dok koeficijenti A_{km} zadovoljavaju uslov (4.3.12).

4.3.1.1 Formiranje funkcionala

Varijacioni metod za određivanje nepoznatih koeficijenta A_{km} , zasniva se na tome da se na osnovu (4.3.12) i (4.3.13) formira funkcional F , oblika

$$F = R_g + \left(\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{m=1}^{M_k} A_{km} + 1 \right) \lambda, \quad (4.3.15)$$

gde je λ - Lagranžov (Lagrange) koeficijent.

Variranjem funkcionala F po A_{km} , $k=1, 2, \dots, N_p$, $m=1, 2, \dots, M_k$ i po λ , dobija se sistem jednačina od N_U nepoznatih, $N_U = 1 + \sum_{k=1}^{N_p} M_k$,

$$\frac{\partial F}{\partial A_{km}} = 2 \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{M_n} A_{ni} W_{i,m}^{n,k} + \lambda = 0, \quad k=1, 2, \dots, N_p, \quad m=1, 2, \dots, M_k \quad (4.3.16a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{M_n} A_{ni} + 1 = 0 \quad (4.3.16b)$$

Rešenje formiranog sistema jednačina (4.3.16) su normirani strujni koeficijenti A_{km} , $k = 1, 2, \dots, N_p$, $m = 1, 2, \dots, M_k$ i koeficijent λ . Njihovom smenom u (4.3.13) i (4.3.1) može se izračunati ukupna otpornost uzemljivačkog sistema, odnosno raspodela potencijala u okolini uzemljivača.

Otpornost uzemljivačkog sistema može se odrediti i na jednostavniji način. Ako se jednačine date izrazom (4.3.16a) redom pomnože sa A_{km} , $k = 1, 2, \dots, N_p$, $m = 1, 2, \dots, M_k$, i dobijeni izrazi saberu po indeksima "k" i "m" dobija se

$$2R_g + \left(\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{m=1}^{M_k} A_{km} \right) \lambda = 2R_g - \lambda = 0. \quad (4.3.17)$$

Na osnovu prethodnog izraza, otpornost uzemljivačkog sistema sa Sl. 4.5 može se odrediti preko Lagranžovog koeficijenta kao

$$R_g = \lambda / 2. \quad (4.3.18)$$

Inače, može se pokazati da ranije opisani metod srednjih potencijala (metod Howe) predstavlja specijalan slučaj varijacionog metoda. Ova tvrdnja se lako dokazuje na osnovu razmatranja izloženog u odeljku 4.3.1.1.

Ako se usvoji da je struja oticanja sa površine provodnika konstantna (longitudinalna struja je linearna funkcija), odnosno da je $M_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, N_p$, jednačine (4.3.16a-b) dobijaju oblik

$$-\sum_{k=1}^{N_p} A_{k1} W_{1,1}^{n,k} = +\frac{\lambda}{2} = R_g = \frac{U}{I_g}, \quad k = 1, 2, \dots, N_p, \quad (4.3.19a)$$

$$\sum_{k=1}^{N_p} A_{k1} = -1. \quad (4.3.19b)$$

Prethodni izrazi transformacijom dobijaju oblik

$$U = -\sum_{k=1}^{N_p} I_{k1} W_{1,1}^{n,k} = -\sum_{k=1}^{N_p} I_{k1} \frac{1}{4\pi\sigma_1 l_n l_k} \int_{s_n=0}^{l_n} \int_{s'_k=0}^{l_k} K(s_n, s'_k) ds'_k ds_n, \quad k = 1, 2, \dots, N_p, \quad (4.3.20a)$$

$$I_g = -\sum_{k=1}^{N_p} I_{k1} \quad (4.3.20b)$$

Jednačine date izrazom (4.3.20a) predstavljaju zapravo primenu metoda srednjeg potencijala (metod Howe).

4.3.2 Metod podešavanja u tačkama

Zbog verifikacije metoda varijacije konstanti, otpornost uzemljivačkog sistema sa Sl. 4.5 određena je primenom metoda podešavanja u tačkama. Ukupan broj nepoznatih u raspodeli (4.3.4) je

$N_U = \sum_{k=1}^{N_p} (M_k + 1)$. Uslov nulte struje na kraju svakog od N_p provodnika daje isto toliko (N_p) jednačina, tj.

$$I(l_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_p. \quad (4.3.21)$$

Ostalih $N_U - N_p = \sum_{k=1}^{N_p} M_k$ jednačina formiraju se podešavanjem vrednosti potencijala (4.3.1) u tačkama na površini provodnika definisanih koordinatama,

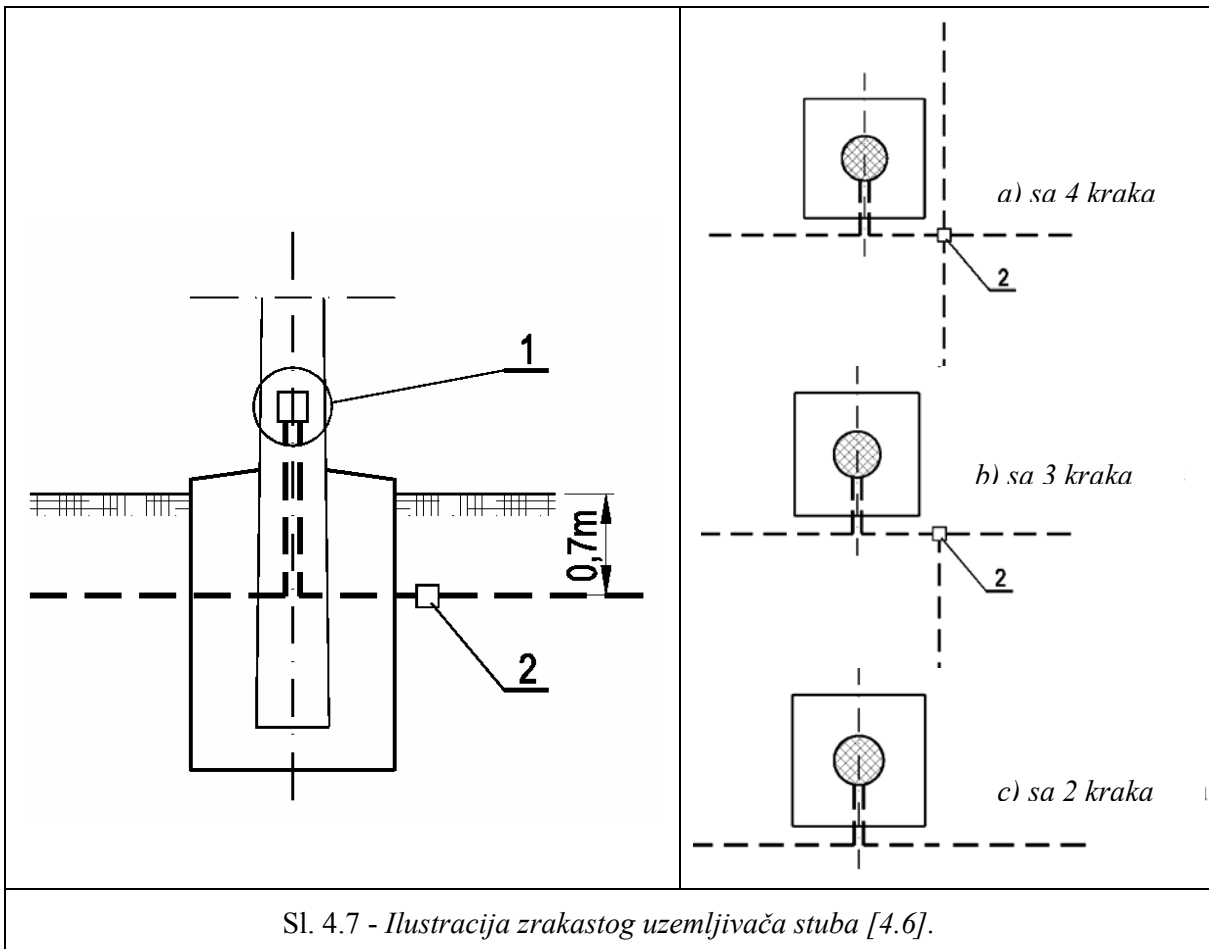
$$S_{km} = \frac{m}{M_k + 1} l_k, \quad k = 1, 2, \dots, N_p, \quad m = 1, 2, \dots, M_k. \quad (4.3.22)$$

Ukupna otpornost uzemljivačkog sistema konačno je

$$R_g = U/I_g = U / \sum_{k=1}^{N_p} I_{k0}. \quad (4.3.23)$$

4.3.3 Numerički rezultati

Primenom metoda opisanih u 4.3.1 i 4.3.2 određena je otpornost zrakastog uzemljivača čija je geometrija opisana u Tehničkim preporukama ED Srbije [4.6], odnosno u radu [4.7]. Ilustracije geometrije uzemljivača preuzete su iz [4.6] i prikazane na Sl. 4.7 a-c. Uzemljivački sistem sastoji se od temelja stuba tretiranog kao jedna vertikalna elektroda, poluprečnika $a_1 = 7.5\text{ cm}$ i $l_1 = 1.75\text{ m}$ i sistema trakastih provodnika (2, 3 ili 4 provodnika), poluprečnika poprečnog preseka $a = 5\text{ mm}$. Trakasti uzemljivač ukopan je na dubini $h = 0.7\text{ m}$, dok je specifična otpornost okolnog tla $\sigma_1 = 10^{-1}\text{ S/m}$. Tačka u kojoj se nalazi ukrasni komad kada se zrakasti uzemljivač sastoji od 3 ili 4 provodnika nalazi se na 1 m normalnog rastojanja od ose stuba [4.7]. Preneseno na uzemljivački sistem sa Sl. 4.5, posmatrano uzemljenje sastoji se od 3, 4 ili 5 provodnika, kada je zrakasti uzemljivač načinjen od 2, 3 ili 4 elektrode respektivno, tj. broju provodnika zrakastog uzemljivača dodaje se i elektroda koja odgovara temelju stuba.



Na Sl. 4.8a prikazana je normalizovana otpornost uzemljivačkog sistema sa Sl. 4.7 u funkciji dužine elektrode zrakastog uzemljivača L , kada se je on načinjen od 2, 3 i 4 provodnika. Otpornost je određena pomoću varijacione formule, primenom procedure opisane u 4.3.1 za konstantnu struju oticanja (stepen polinomske aproksimacije za longitudinalnu struju svih provodnika je 1). Grafik je organizovan na isti način kao i grafik na Sl. 4.8b preuzet iz [4.6]. Primećuje se da postoji odgovarajuće slaganje između krivih na Sl. 4.8a i 4.8b. Primenjeni faktor normalizacije $10^2 * \sigma_1$ isti je kao i onaj korišćen u [4.6], dok parametar r na Sl. 4.8b odgovara vrednosti $R_g \sigma_1$ na Sl. 4.8a.

Otpornost posmatranog uzemljivačkog sistema dobijena primenom varijacione formule (odeljak 4.3.1) i metoda podešavanja u tačkama (odeljak 4.3.2) za različite stepene polinomske ap-

roksimacije struje M (koji je isti za sve provodnike uključujući i temeljnu elektrodu) kada je dužina provodnika zrakastog uzemljivača $L = 1\text{m}$ prikazana je u Tabeli 4.3. Broj provodnika uzemljivačkog sistema (koji uključuje i temeljni provodnik) N_p , uzima vrednosti 3, 4 i 5. Uočava se dobro slaganje i očekivano ponašanje dobijenih rezultata sa povećanjem stepena polinomske aproksimacije longitudinalnih struja.

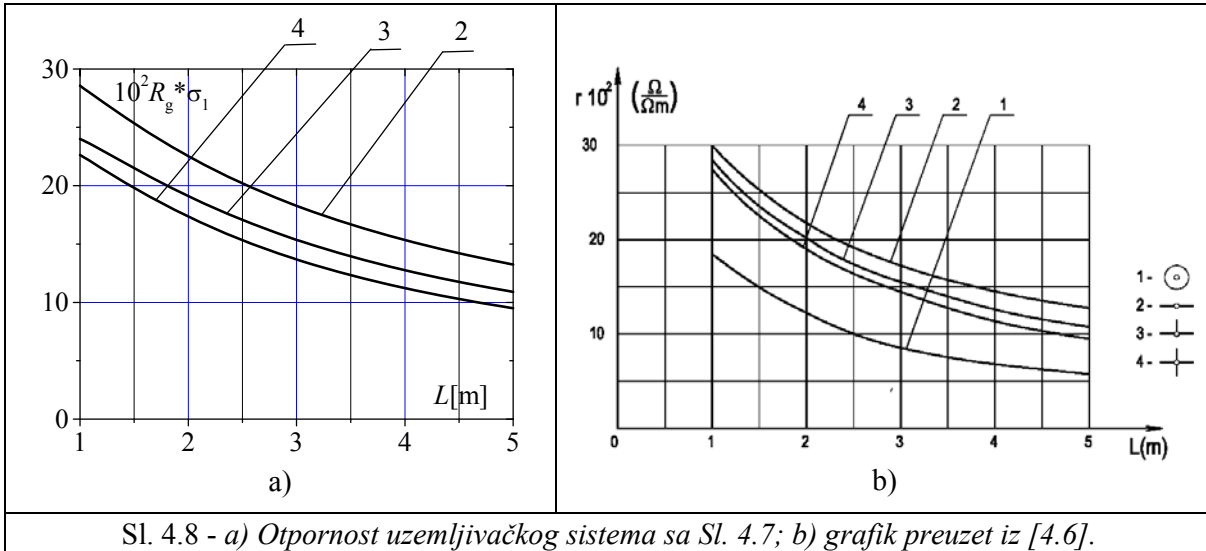
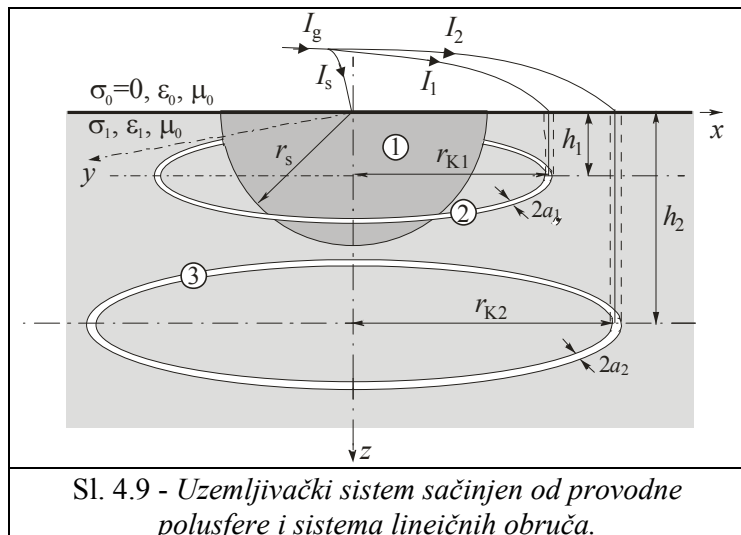


Tabela 4.3-Poređenje otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 4.7 određene primenom metoda podešavanja u tačkama (PMM) i varijacione formule (Var. form) za $a_1 = 7.5\text{ cm}$ $l_1 = 1.75\text{ m}$, $a = 5\text{ mm}$. $h = 0.7\text{ m}$, $L = 1\text{ m}$ i $\sigma_1 = 10^{-1}\text{ S/m}$.

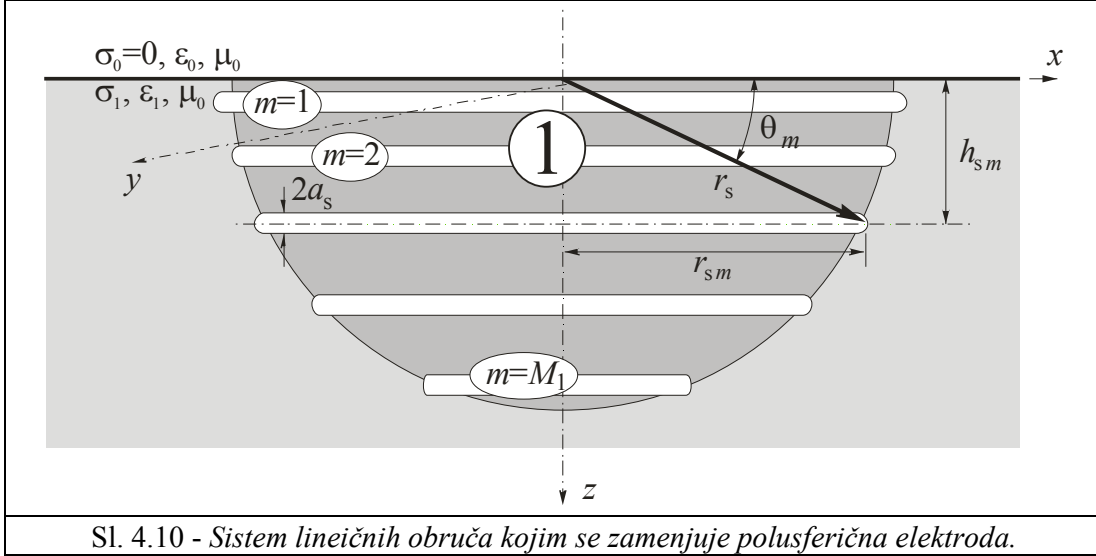
		$R_g [\Omega]$					
		$M = 1$		$M = 2$		$M = 3$	
N_p		PMM	Var. form.	PMM	Var. form.	PMM	Var. form.
3		2.992	2.857	2.763	2.716	2.732	2.688
4		2.469	2.400	2.380	2.348	2.359	2.330
5		2.308	2.262	2.232	2.204	2.215	2.188

4.4 PROVODNA SFERA I SISTEM LINEIČNIH OBRUČA

U ovom odeljku izložena je analiza uzemljivačkog sistema načinjenog od provodne polusfere poluprečnika r_s i dve koncentrično postavljene prstenaste elektrode, Sl. 4.9 ([4.15], [4.16]). Ovakvi uzemljivački sistemi u kojima se javlja više od jedne kružne lineične elektrode za osobinu imaju "mirniju" funkciju potencijala na površini tla u odnosu na sisteme izvedene sa samo jednim obručem ([4.6]). Prstenaste elektrode poluprečnika r_{K1} i r_{K2} ukopane su na dubinama h_1 odnosno h_2 , dok su poluprečnici kruž-



nog poprečnog preseka provodnika a_1 i a_2 respektivno ($a_1, a_2 \ll 2r_{K1}\pi, 2r_{K2}\pi$). Polusfera i prstenaste elektrode napajaju se preko izolovanih zemljovodnih provodnika niskofrekventnim strujama I_S , I_1 i I_2 , respektivno. Okolno tlo se smatra homogenom, izotropnom i linearnom sredinom parametara σ_1 , $\epsilon_1 = \epsilon_0\epsilon_n$ i $\mu_1 = \mu_0$. I ovog puta proračun je uključena samo specifična provodnost homogene zemlje σ_1 , jer su na taj način određeni i referentni rezultati preuzeti iz [4.15].



Problem se rešava pod pretpostavkom da je struja oticanja sa obruča i polusfere konstantna. Na osnovu jednačine kontinuiteta ([4.17]), izraza za potencijal u okolini usamljenog obruča optičnog stacionarnom strujom ([PRILOG 8]) i sukcesivnom primenom kvazistacionarne teorije likova u ravnom i sfernom ([4.18]) provodnom ogledalu (analogno načinu na koji je to urađeno u odeljku 2.2.2) formira se funkcija potencijala u okolini uzemljivačkog sistema sa Sl. 4.9. Kako se radi o kvazistacionarnoj analizi, slično kao što je to urađeno i u nekim ranijim primerima, usvojeno je da je $R_{z10} \cong 1$. Na osnovu prethodno iznetog, potencijal u okolini sistema sa Sl. 4.9 ima oblik ([4.19]),

$$\begin{aligned} \varphi(r) = & \frac{I_S}{2\pi\sigma_1 r} + \frac{1}{2\pi^2\sigma_1} \sum_{n=1}^{N=2} I_n \left\{ \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_n\right)}{\sqrt{(\rho+r_{K_n})^2 + (z-h_n)^2}} + \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_{ni}\right)}{\sqrt{(\rho+r_{K_n})^2 + (z+h_n)^2}} \right\} - \\ & - \frac{r_s}{\sqrt{r_{K_n}^2 + h_n^2}} \left\{ \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_n''\right)}{\sqrt{(\rho+r_{K_n}'')^2 + (z-h_n'')^2}} + \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_{ni}''\right)}{\sqrt{(\rho+r_{K_n}'')^2 + (z+h_n'')^2}} - \frac{\pi}{r} \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

U prethodnom izrazu je

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \\ r_{K_n}'' &= r_{K_n} \frac{r_s^2}{r_{K_n}^2 + h_n^2}, \quad h_n'' = h_n \frac{r_s^2}{r_{K_n}^2 + h_n^2}, \quad n=1,2, \\ k_n^2 &= \frac{4r r_{K_n}}{(\rho+r_{K_n})^2 + (z-h_n)^2}, \quad k_{ni}^2 = \frac{4r r_{K_n}}{(\rho+r_{K_n})^2 + (z+h_n)^2}, \quad n=1,2, \\ k_n''^2 &= \frac{4r r_{K_n}''}{(\rho+r_{K_n}'')^2 + (z-h_n'')^2}, \quad k_{ni}''^2 = \frac{4r r_{K_n}''}{(\rho+r_{K_n}'')^2 + (z+h_n'')^2}, \quad n=1,2. \end{aligned}$$

Podešavanjem vrednosti potencijala datog izrazom (4.4.1) u po jednoj tački na površinama polusfere i obruča, formira se sistem od tri jednačine čije su rešenje struje I_s , I_1 i I_2 ,

$$\begin{aligned}\varphi(x=r_s, y=0, z=0) &= U \\ \varphi(x=r_{K_n}+a_n, y=0, z=h_n) &= U, n=1,2.\end{aligned}\quad (4.4.2)$$

Otpornost uzemljivačkog sistema sada je

$$R_g = \frac{U}{I_g} = \frac{U}{I_s + I_1 + I_2}.\quad (4.4.3)$$

Pretpostavka da su struje oticanja sa obruča konstantne kada se posmatra sistem sa Sl. 4.9 (sa zanemarenim uticajem zemljovoda) u potpunosti je opravdana. To međutim nije slučaj sa istom pretpostavkom za raspodelu struje oticanja sa polusfere. Iako većina autora u rešavanju ovog problema polazi od te činjenice, u ovom radu je sistem sa Sl. 4.9 analiziran i uz pretpostavku da struja oticanja sa polusferične elektrode nije konstantna. Pri tome je primenjen metod ekvivalentne elektrode ([4.20], [4.21]) tako što je polusfera zamenjena sistemom od ukupno M_1 lineičnih obruča, Sl. 4.10. Poluprečnik prstenastih elektroda je r_{sm} i one su koncentrično u odnosu na z osu smeštene paralelno površini tla, na dubini h_{sm} , $m=1,2,\dots,M_1$, pri čemu je

$$r_{sm} = r_s \cos \theta_m, \quad h_{sm} = r_s \sin \theta_m, \quad \theta_m = m\Delta\theta = m \frac{0.5\pi}{N_1 + 1}, \quad m=1,2,\dots,M_1.\quad (4.4.4)$$

Poluprečnik elektrode određuje se kao $a_s = r_s \sin(\Delta\theta/4)$ ([PRILOG 5]).

Ukupna struja oticanja sa svakog od obruča sa Sl. 4.10, I_{sm} , $m=1,2,\dots,M_1$ je konstantna. Kada se polusfera ovako подели, potencijal sistema sa Sl. 4.9 je

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= \frac{1}{2\pi^2\sigma_1} \sum_{m=1}^{M_1} I_{sm} \left\{ \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_{sm}\right)}{\sqrt{(\rho+r_{sm})^2 + (z-h_{sm})^2}} + \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_{smi}\right)}{\sqrt{(\rho+r_{sm})^2 + (z+h_{sm})^2}} \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi^2\sigma_1} \sum_{n=1}^{N=2} I_n \left\{ \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_n\right)}{\sqrt{(\rho+r_{Kn})^2 + (z-h_n)^2}} + \frac{K\left(\frac{\pi}{2}, k_{ni}\right)}{\sqrt{(\rho+r_{Kn})^2 + (z+h_n)^2}} \right\}.\end{aligned}\quad (4.4.5)$$

U prethodnom izrazu je

$$k_{sm}^2 = \frac{4r r_{sm}}{(\rho+r_{sm})^2 + (z-h_{sm})^2}, \quad k_{smi}^2 = \frac{4r r_{sm}}{(\rho+r_{sm})^2 + (z+h_{sm})^2}, \quad m=1,2,\dots,M_1.$$

Ostale oznake iste su kao i u jednačini (4.4.2).

Na način sličan onom u prethodnom slučaju, podešavanjem vrednosti potencijala datog izrazom (4.4.1) u po jednoj tački na površinama obruča (ukupno $M_1 + 2$), formira se sistem od ukupno $M_1 + 2$ jednačine čije su rešenje struje I_{sm} , $m=1,2,\dots,M_1$, I_1 i I_2 ,

$$\begin{aligned}\varphi(x=r_{K_n}+a_n, y=0, z=h_n) &= U, n=1,2. \\ \varphi(x=r_{sm}+a_s, y=0, z=h_{sm}) &= U, m=1,2,\dots,M_1.\end{aligned}\quad (4.4.6)$$

Otpornost uzemljivačkog sistema sada je

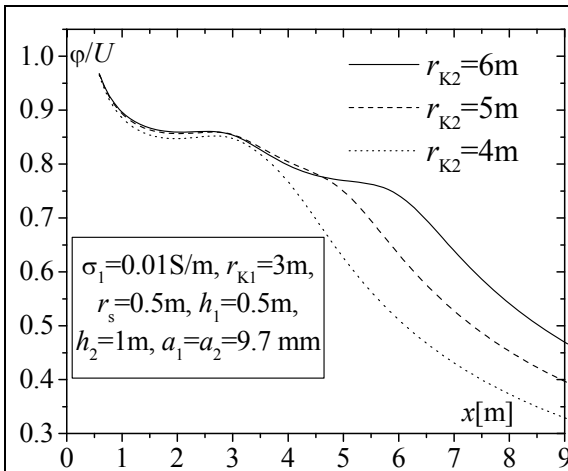
$$R_g = \frac{U}{I_s + I_1 + I_2} = \frac{U}{\left(\sum_{m=1}^{M_1} I_{sm}\right) + I_1 + I_2}.\quad (4.4.7)$$

4.4.1 Numerički rezultati

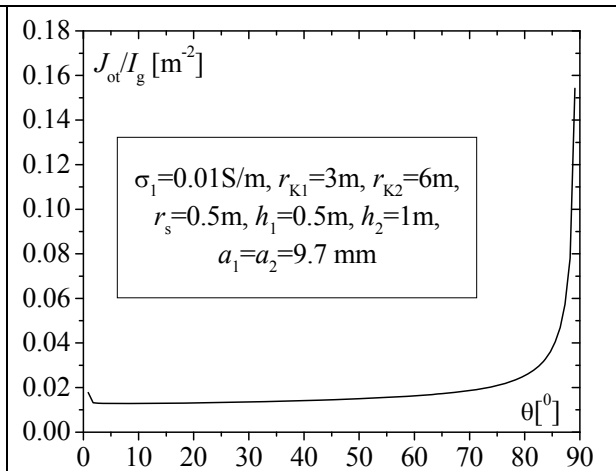
U Tabeli 4.4 prikazana je otpornost uzemljivačkog sistema sa Sl. 4.9 određena primenom izraza za potencijal (4.4.1) i (4.4.5) za $M_1 = 100$. Dobijene vrednosti upoređene su sa vrednostima preuzetim iz reference [4.15]⁷. Vrednosti parametara uzemljivačkog sistema su $\sigma_1 = 0.01\text{S/m}$, $r_s = 0.5\text{m}$, $h_1 = 0.5\text{m}$, $h_2 = 1\text{m}$, dok su obruči načinjeni od FeZn trake $30 \times 4\text{mm}^2$, čiji je ekvivalentni poluprečnik $a_1 = a_2 \cong 9.7\text{mm}$ određen primenom procedure opisane u PRILOGU 9. Poluprečnici prstenastih elektroda uzimaju različite vrednosti, pri čemu se uočava zadovoljavajuće slaganje dobijenih rezultata.

Tabela 4.4-Poređenje otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 4.9 određene primenom izraza za potencijal (4.4.1), (4.4.5) i vrednosti preuzete iz reference [4.15].

$R_g [\Omega]$				
$r_{K1}[\text{m}]$	$r_{K2}[\text{m}]$	Ref [4.15]	izraz (4.4.1)	izraz (4.4.5) ($M_1 = 100$)
2	3	7.49981	7.97398	8.14626
	4	6.07590	6.47950	6.58455
3	4	5.87493	6.26953	6.36618
	5	4.96668	5.31242	5.37731
	6	4.31984	4.62313	4.66974



Sl. 4.10 - Normalizovana raspodela potencijala na površini tla za sistem sa Sl. 4.9 za $\sigma_1 = 0.01\text{S/m}$, $r_s = 0.5\text{m}$, $h_1 = 0.5\text{m}$, $h_2 = 1\text{m}$, $a_1 = a_2 \cong 9.7\text{mm}$ i $r_{K1} = 3\text{m}$ sa r_{K2} kao parametrom.



Sl. 4.11 - Normalizovana raspodela površinske struje oticanja sa polusferične elektrode sa Sl. 4.9 u funkciji ugla θ za $\sigma_1 = 0.01\text{S/m}$, $r_s = 0.5\text{m}$, $h_1 = 0.5\text{m}$, $h_2 = 1\text{m}$, $a_1 = a_2 \cong 9.7\text{mm}$, $r_{K1} = 3\text{m}$ i $r_{K2} = 6\text{m}$.

Normalizovana raspodela potencijala na površini tla za $r_{K1} = 3\text{m}$ i poluprečnikom druge elektrode r_{K2} kao parametrom predstavljena je na Sl. 4.11. Vrednosti parametara, iste su kao i u slučaju Tabele. 4.4. Maksimalne vrednosti potencijala nalaze se, kao što se to i očekuje, u tačkama na površini tla koje se nalaze iznad obruča.

Konačno, na Sl. 4.12 prikazana je raspodela površinske gustine struje oticanja J_{ot} sa sistema prstenastih elektroda (Sl. 4.10), kojima se zamenjuje provodna polusfera uzemljivačkog sistema

⁷ U [4.15] razmatrana je dvoslojna zemlja, a preuzeti rezultati su određeni za slučaj kada su specifične otpornosti slojeva $100\Omega\text{m}$ i $100.01\Omega\text{m}$, pa se praktično radi o homogenoj zemlji, specifične otpornosti $100\Omega\text{m}$, odnosno specifične provodnosti 0.01S/m .

sa Sl. 4.9. Pri tome je $r_{K1} = 3\text{ m}$, $r_{K2} = 6\text{ m}$, dok su vrednosti ostalih parametara iste kao i vrednosti parametara u slučaju Sl. 4.10. Polusfera zamenjena je sa ukupno $M_1 = 100$ obruča, dok je površinska struja oticanja sa svake elektrode određena kao količnik ukupne struje oticanja i površine obruča, tj.

$$J_{ot} = J_{otm} = \frac{I_{sm}}{2r_{sm}\pi * 2a_s\pi}, \quad m = 1, 2, \dots, M_1. \quad (4.4.8)$$

4.5 LITERATURA

- [4.1] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, The Macmillan Company, New York, 1969.
- [4.2] D. M. Veličković, "Numerički i približni metodi za rešavanje problema elektrostatike", *III Jugoslovensko savetovanje o statičkom elektricitetu, ELEKTROSTATIKA 78*, Oktobar 1978, Beograd, Zbornik radova, str. 22-42.
- [4.3] R. Mitra (Ed.), *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sidney-Braunschweig, 1973, pp 15-31.
- [4.4] B. Popović, "Polynomial Approximation of Current Along Thin Symmetrical Cylindrical Dipole", *Proc. IEE*, Vol. 117, No 5, 1970, pp 873-878.
- [4.5] T. Takashima, T. Nakae, R. Ishibahsi, "High frequency characteristics of impedances to ground and field distributions of ground electrodes", *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, Vol. 100, No. 4, 1980, pp 1893-1900.
- [4.6] Tehnička preporuka br 9, ZBIRKA TEHNIČKIH PREPORUKA ED SRBIJE, Beograd 2000.
- [4.7] T. Bojković, N. Mijušković, "Karakteristike prstenastih i zrakastih uzemljivača za stubove nadzemnih vodova 10 (20) kV", *XIV Savetovanje JUKO CIGRE*, Sarajevo 1979, Ref. 322.01.
- [4.8] P. D. Rančić, "Antenski model za kvazistacionarnu analizu uzemljivačkog sistema stuba", Tehnički izveštaj, TTL-GS-8, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2007.
- [4.9] P. D. Rančić, "Varijaciona analiza lineičnog uzemljivačkog sistema (US)", Tehnički izveštaj, TIL-GS-02, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2007.
- [4.10] B. D. Popović, Z.D. Popović, "Thin cylindrical antenna: variational solution with polynomial current Approximation", *The Radio and Electronig Engineer*, Vol. 3, No. 3, 1967, pp 493-500.
- [4.11] B. H. McDonald, M. Friedman, A. Wexler, "Variational solution of integral equations", *IEEE Transactions on Microwave theory and techniques*, Vol. MTT-22, No. 3, 1974, pp 237-248.
- [4.12] J. H. Richmond, "On the variational aspects of the Moment Method", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 39, No. 4, 1991, pp 473-479.
- [4.13] J. R. Mautz, "Variational aspects of the reaction in the Method of Moments", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 42, No. 12, 1994, pp 1631-1638.
- [4.14] J. Galeis, "Variationally computed antenna impedances and accuracy of resulting current distributions", *Electronic Letters*, Vol. 41, No. 11, 1971, pp 111-114.
- [4.15] Lj. Gerić, "Karakteristike prstenastih uzemljivača", *JUNAKO CIGRE*, ref. 22-07, str. 93-110, 1977.
- [4.16] J. Nahman, *Uzemljenje neutralne tačke distributivnih mreža*, Naučna knjiga, Beograd, 1980, str. 281-288.

- [4.17] D. M. Veličković, *Elektromagnetika-Prva Sveska*, II izdanje, Elektronski fakultet u Nišu, 1999, str. 21-23.
- [4.18] D. M. Veličković i saradnici: Z. Ž. Cvetković, N. B. Raičević, S. S. Ilić, V. L. Javor, N. N. Cvetković, D. G. Zulkić, *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Elektromagnetike I deo*, Elektronski fakultet u Nišu, Niš, 2000, str. 83-84.
- [4.19] P. D. Rančić, *Električne instalacije u zgradama-Uzemljenja i uzemljivači*, Monografija u pripremi, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2008.
- [4.20] D. M. Veličković, "Equivalent electrodes method", Scientific Review, Belgrade, 1996, pp 207-248.
- [4.21] D. M. Veličković, "Equivalent electrodes method application in nonrotational fields theory", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, IIEC '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp 103-116.

5. UZEMLJIVAČKI SISTEMI U PRISUSTVU CILINDRIČNE POLUPROVODNE NEHOMOGENOSTI TLA

U ovom delu rada analiziran je uticaj poluprovodne nehomogenosti cilindrične geometrije na uzemljivačke sisteme. Razlog za to je da se jedan broj temelja stubova izvodi u obliku kvadra formiranog od nekoliko naslaganih tipskih betonskih koaksijalnih elemenata kvadratne spoljašnje osnove. U sredini ovih elemenata nalazi se otvor u koji se polaže armirano betonski cilindrični stub, Sl. 5.1.a ([5.1], [5.2]). Posle izvesnog vremena sistem sačinjen od betonskih blokova i betonskog stuba može se u električnom smislu smatrati za homogeni domen oblika kvadra kvadratne osnove koja odgovara obliku betonskih elemenata i čija je specifična provodnost σ_C . Duž ovakvog domena smešten je snop vertikalnih elektroda armature poznate dužine. Inače, iako se u praksi za referentnu vrednost specifične otpornosti betona uzima $\rho_C = 50\Omega m$, ona se često menja u skladu sa vremenskim uslovima i zavisno od količine vlage, može da poraste i do nekoliko stotina Ωm ([5.3], [5.4]). Opisani temelj se nalazi u okruženju okolnog tla koje predstavlja homogeni linearni izotropni domen poznate specifične otpornosti σ_1 . Uticaj temelja stuba na karakteristike uzemljenja analiziran je primenom jedne jednostavne procedure za modelovanje cilindričnog temeljnog uzemljivača stuba vertikalnim cevastim uzemljivačem nove ekvivalentne geometrije (dužine i poluprečnika poprečnog preseka), tako da se posmatrani problem svodi na problem ekvivalentnog uzemljivačkog sistema u homogenoj zemlji ([5.5]). Primenom antenskog modela ([5.6]) formiran je sistem linearnih jednačina za određivanje koeficijenata u polinomskoj rapodeli longitudinalnih struja. Sistem je, na način analogan onom koji je primenjen u tački 4.3 rešen metodom momenata ([5.7]), ili u nekim slučajevima, formiranjem varijacione formule ([5.8]). Izbor konkretnih parametara korišćenih u analizi konkretnih uzemljivačkih sistema zasnovan je na vrednostima iz ([5.9]-[5.13]).

5.1 PROCEDURA ZA DEFINISANJE PARAMETARA EKVIVALENTNE UZEMLJIVAČKE ELEKTRODE ZA SLUČAJ CILINDRIČNE POLUPROVODNE NEHOMOGENOSTI

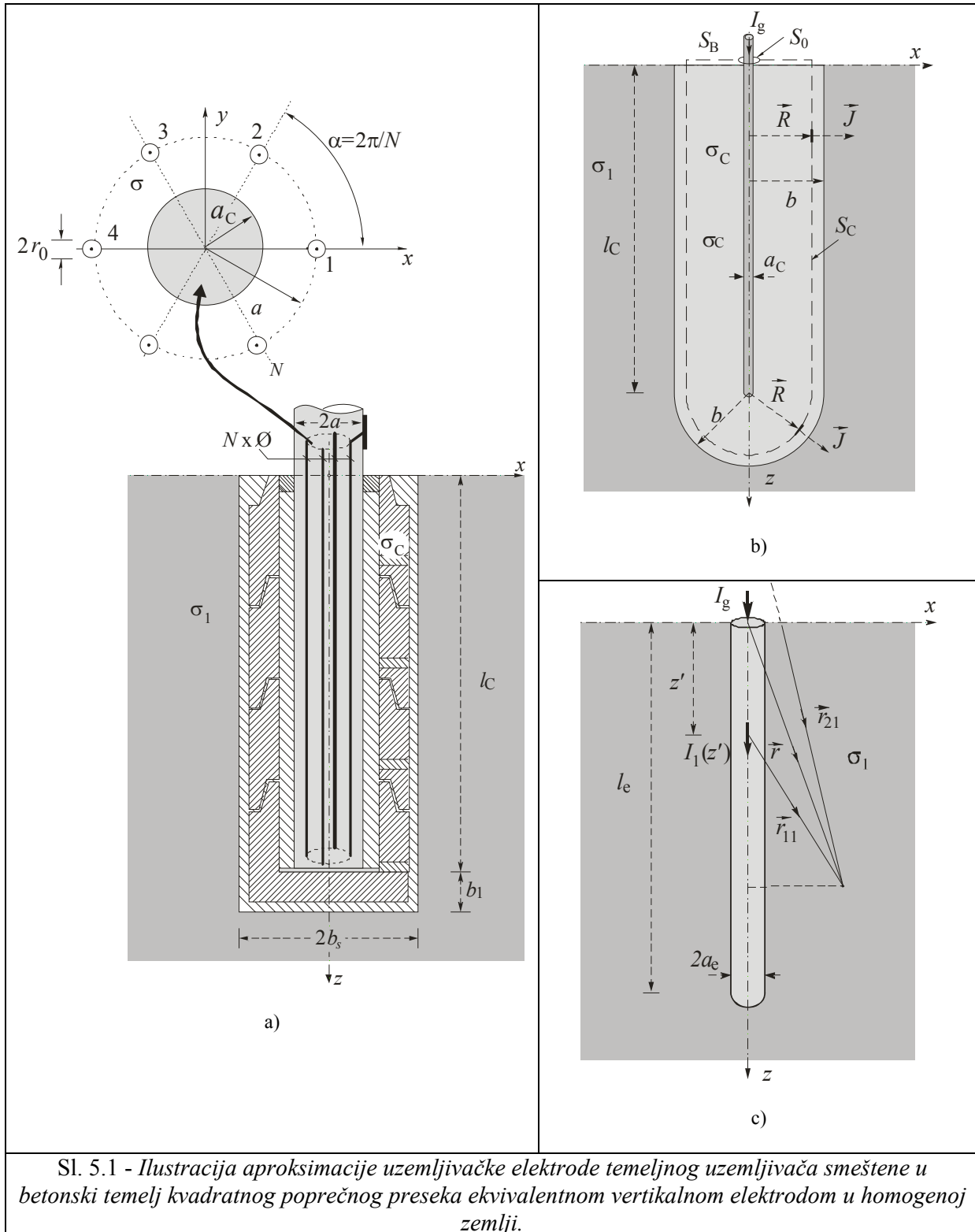
Posmatra se armirano-betonski temelj stuba, Sl. 5.1a ([5.9]). Dubina ukopavanja stuba, odnosno dužina armature je l_C , betonski temelj tretira se kao homogeni domen forme kvadra kvadratne osnove stranice b i specifične provodnosti σ_C . Ostali parametri geometrije temelja mogu se uočiti na Sl. 5.1a. Armatura se napaja niskofrekventnom strujom jačine I_g . Dielektrične konstante okolnog tla i betona nisu uzete u obzir (kvazistacionarna analiza).

Prvi korak u formiranju procedure za određivanje ekvivalentnih parametara vertikalnog uzemljivača kojim se zamenjuje cilindrični armirano-betonski temelj predstavlja proračun ekvivalentnog poluprečnika provodnika armature temelja. Pretpostavljeno je da je N žičanih provodnika kružnog poprečnog preseka poluprečnika r_0 raspoređeno po kružnici poluprečnika a . Ekvivalentni poluprečnik provodnika kojim se zamenjuje na opisani način formirana kavezasta struktura, odnosno armatura, određuje na osnovu izraza ([PRILOG 10])

$$a_C = a \sqrt[N]{N r_0 / a} . \quad (5.1.1)$$

Nadalje se domen kvadratnog poprečnog preseka stranice b aproksimira cilindričnim domenom kružnog poprečnog preseka, ekvivalentnog poluprečnika $b = b_s (1 + \sqrt{2}) / 4$ ([PRILOG 9]). Na ovaj način problem je sveden na analizu vertikalnog provodnika dužine l_C i poluprečnika kružnog pop-

rečnog preseka a_C smeštenog u cilindričnu nehomogenost specifične provodnosti σ_C , Sl. 5.1b. Dno cilindra aproksimirano je polusferom poluprečnika jednakog poluprečniku cilindra, b . Specifična otpornost okolnog tla je σ_1 .



Ukoliko se usvoji pretpostavka da je kraj vertikalnog provodnika polusferičnog oblika, može se opravdano smatrati da je vektor gustine struje normalan na fiktivnu cilindričnu površinu S_C , čiji

je poluprečnik R i čije je dno polusfera istog poluprečnika. Sa Sl. 5.1b jasno je da je $S_C(R) = 2\pi R l_1 + 2\pi R^2$. Kada se jednačina kontinuiteta primeni na površinu sa Sl. 5.1b $S = S_C + S_B + S_0$, dobija se

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = \int_{S_C} \vec{J} d\vec{S} + \int_{S_B} \vec{J} d\vec{S} + \int_{S_0} \vec{J} d\vec{S} = JS_C(R) + 0 - I_g = 0, \text{ odnosno} \quad (5.1.2)$$

$$J(\vec{R}) = \frac{I_g}{2\pi R(R+l_C)} \hat{R}, \quad R \in [a_C, \infty). \quad (5.1.3)$$

Na osnovu (5.1.3) vektor električnog polja određuje se kao

$$\vec{E}_C(R) = \frac{\vec{J}}{\sigma_C} = \frac{I_g}{2\pi\sigma_C R(R+l_C)} \hat{R}, \quad R \in [a_C, b) \quad (5.1.4a)$$

$$\vec{E}_1(R) = \frac{\vec{J}}{\sigma_1} = \frac{I_g}{2\pi\sigma_1 R(R+l_C)} \hat{R}, \quad R \in [b, \infty). \quad (5.1.4b)$$

Potencijal površine elektrode ($R = a_C$) je

$$\varphi(R = a_C) = U = \int_{a_C}^{\infty} \vec{E} d\vec{R} = \int_{a_C}^b \vec{E}_C d\vec{R} + \int_b^{\infty} \vec{E}_1 d\vec{R} = \frac{I_g}{2\pi\sigma_C l_C} \left[\ln \left(\frac{1 + \frac{l_C}{a_C}}{1 + \frac{l_C}{b}} \right) + \frac{\sigma_C}{\sigma_1} \ln \left(1 + \frac{l_C}{b} \right) \right] \quad (5.1.5)$$

pa se za otpornost elektrode dobija

$$R_g = \frac{U}{I_g} = \frac{1}{2\pi\sigma_C l_C} \left[\ln \left(\frac{1 + \frac{l_C}{a_C}}{1 + \frac{l_C}{b}} \right) + \frac{\sigma_C}{\sigma_1} \ln \left(1 + \frac{l_C}{b} \right) \right] = \sigma_1 \frac{\ln \left(1 + \frac{l_C}{a_C} \right)}{2\pi l_1} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_C} + \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_C} \right) \frac{\ln \left(1 + \frac{l_C}{b} \right)}{\ln \left(1 + \frac{l_C}{a_1} \right)} \right]. \quad (5.1.6)$$

Primena iste procedure na usamljenu elektrodu ekvivalentne dužine $l_e = K_e l_C$ i kružnog poprečnog preseka poluprečnika $a_e = K_e a_C$, smeštene u homogenu zemlju specifične provodnosti σ_1 , Sl. 5.1.c, dovodi do izraza za otpornost posmatrane elektrode

$$R_{ge} = \frac{1}{2\pi\sigma_1 l_e} \ln \left(1 + \frac{l_e}{a_e} \right) = \frac{1}{K_e} \frac{1}{2\pi\sigma_1 l_1} \ln \left(1 + \frac{l_C}{a_C} \right). \quad (5.1.7)$$

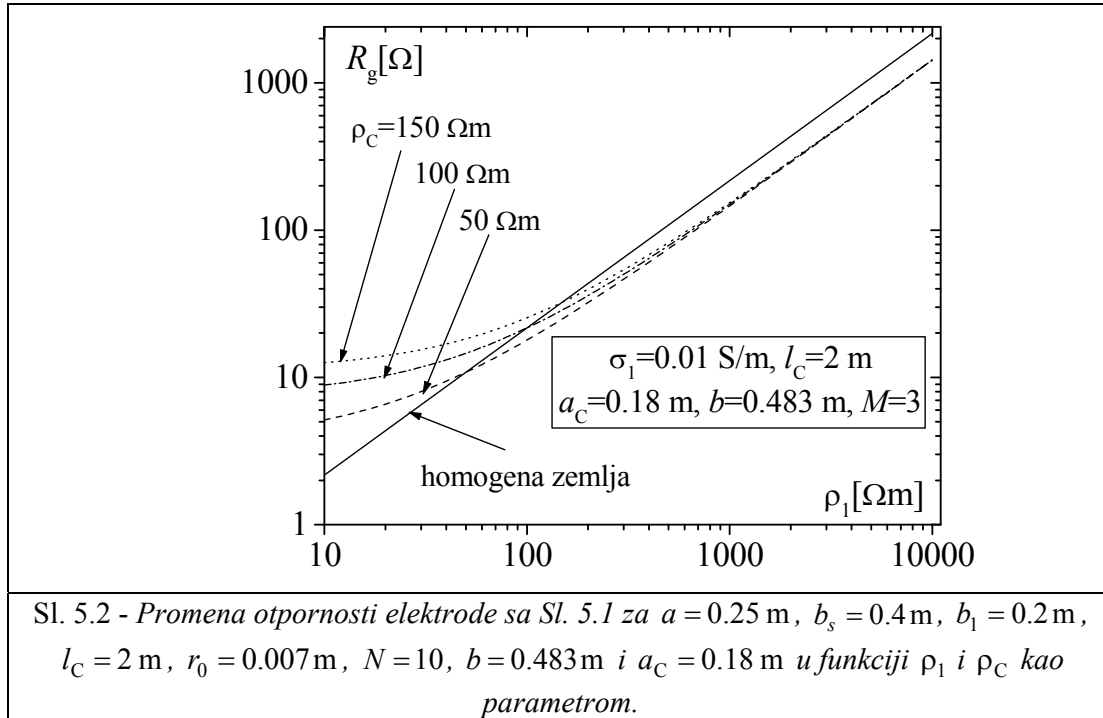
U (5.1.7) sa K_e obeležena je nepoznata konstanta koja se određuje iz uslova da su otpornosti date izrazima (5.1.6) i (5.1.7) jednake. Na ovaj način, za određivanje konstante K_e formiran je izraz

$$K_e^{-1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_C} + \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_C} \right) \frac{\ln \left(1 + \frac{l_C}{b} \right)}{\ln \left(1 + \frac{l_C}{a_C} \right)}. \quad (5.1.8)$$

Dakle, na osnovu prethodne analize, vertikalna elektroda dužine l_C i poprečnog preseka poluprečnika a_C u cilindričnom domenu sa Sl. 5.1b može se zameniti usamljenom vertikalnom elektrodom ekvivalentne dužine $l_e = K_e l_C$ i poluprečnika poprečnog preseka $a_e = K_e a_C$, smeštenom u homogenoj zemlji specifične provodnosti σ_1 , Sl. 5.1c. Na osnovu izraza (5.1.8) jasno je da bi uključivanjem dielektričnih konstanti, odnosno kompleksnih specifičnih provodnosti betona i okolne zemlje u opisanu proceduru, ekvivalentni parametri vertikalne elektrode smeštene u betonski temelj predstavljali kompleksne veličine.

5.1.1 Numerički rezultati

U prethodnom tekstu opisana procedura u kombinaciji sa metodom momenata (stepen polinomske aproksimacije struje je $M = 3$) primenjena je na vertikalnu elektrodu smeštenu unutar temelja oblika kvadra, Sl. 5.1a, pri čemu su vrednosti parametara $a = 0.25$ m, $b_s = 0.4$ m, $b_1 = 0.2$ m, $l_C = 2$ m, $r_0 = 0.007$ m i $N = 10$. Ekvivalentni poluprečnik cilindra sa Sl. 5.1b je $b = 2b_s(1 + \sqrt{2})/4 = 0.483$ m dok je ekvivalentni poluprečnik sistema žičanih provodnika $a_C = a \sqrt[3]{N r_0 / a} = 0.18$ m. Vrednosti parametara bazirane su na podacima preuzetim iz [5.2], [5.9] i [5.10].



		R_g [Ω]		
		$\rho_C = 50 \Omega\text{m}$	$\rho_C = 100 \Omega\text{m}$ (zanemaren temelj)	$\rho_C = 150 \Omega\text{m}$
PMM ¹	$M = 1$	18.62465	22.48776	26.35087
	$M = 2$	18.27441	22.06488	25.85534
	$M = 3$	17.96858	21.69561	25.42264
Metod odsečaka	$N_{\text{ods}} = 1$	19.54313	23.59675	27.65037
	$N_{\text{ods}} = 2$	18.98973	22.92856	26.86739
	$N_{\text{ods}} = 3$	18.87179	22.78617	26.70053

Promena otpornosti opisanog sistema za navedene vrednosti parametara u funkciji specifične otpornosti okolnog tla $\rho_1 = 1/\sigma_1$ i specifičnom otpornošću betona $\rho_C = 1/\sigma_C$ kao parametrom pri-

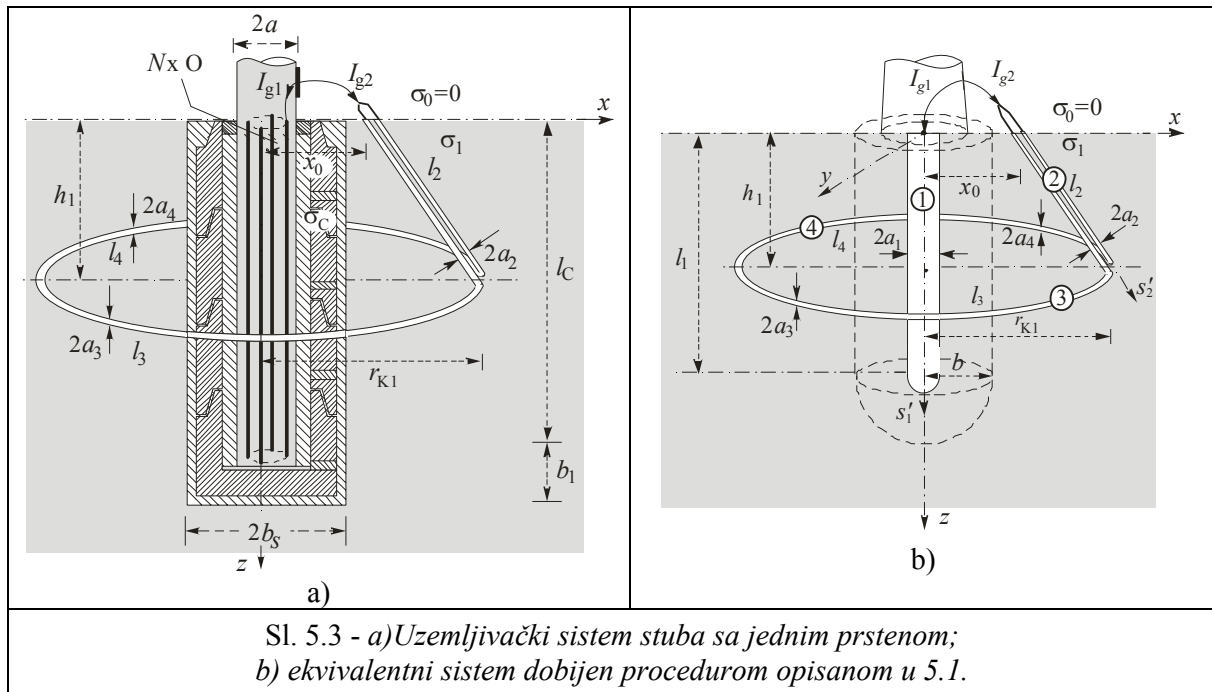
¹ Iskorišćen je uslov za struju oticanja na kraju provodnika dat izrazom (4.1.15).

kazana je na Sl. 5.2. Otpornost je određena za aproksimaciju longitudinalne struje polinomom trećeg stepena (izraz (4.1.13) za $M = 3$), dok je sistem integralnih jednačina rešen metodom podešavanja u tačkama. Na istom grafiku prikazana je i vrednost dobijena u slučaju kada se izostavi primena procedure za modelovanje uticaja betonskog temelja na karakteristike vertikalne temeljne elektrode.

Za iste vrednosti parametara i $\sigma_1 = 0.01\text{S/m}$ otpornost uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.1a određena je metodom podešavanja u tačkama (polinomska aproksimacija za longitudinalnu struju stepena $M = 1, 2, 3$) i metodom odsečaka (broj odsečaka $N_{\text{ods}} = 1, 2, 3$) i prikazana u Tabeli 5.1. Vrednost specifične otpornosti betona ρ_C pri tome uzima vrednosti 50, 100 i 150 Ω . Slaganje dobijenih rezultata, uz očekivano ponašanje funkcija na grafiku sa Sl. 5.2 upućuje na validnost procedure primenjene za modeliranje uticaja temelja na karakteristike uzemljivačkih sistema.

5.2 UZEMLJIVAČKI SISTEM STUBA IZVEDEN SA JEDNOM PRSTENASTOM ELEKTRODOM

Predmet analize je uzemljivački sistem stuba načinjen od N vertikalnih provodnika koji čine armaturu stuba i prstenaste uzemljivačke elektrode napajane zemljovodnim provodnikom, Sl. 5.3a. Krajnje tačke vertikalnih provodnika dužine l_C i poluprečnika poprečnog preseka r_0 , raspoređene su po krugu poluprečnika a i nalaze se unutar betonskog temelja, oblika kvadra kvadratnog poprečnog preseka stranice b_s i specifične provodnosti σ_C . Sistem je smešten u homogenoj zemlji specifične provodnosti σ_1 .



Poluprečnik obruča ukopanog na dubini h_1 je r_{K1} . Zemljovod kojim je napajan obruč orijentisan je koso u odnosu na temelj i načinjen je od dva provodnika koji se razdvajaju i bez prekidanja formiraju obruč, kao što je to prikazano na Sl. 5.3a. Pomoću procedure opisane u prethodnoj tački (5.1), sistem vertikalnih elektroda zamenjen je vertikalnom elektrodom ekvivalentne dužine $l_1 = K_e l_C$ i poluprečnika poprečnog preseka $a_1 = K_e a_C$, gde je K_e konstanta definisana izrazom (5.1.8). Na ovaj način problem je sveden na analizu uzemljivačkog sistema u homogenoj zemlji, Sl.

5.3.b. Razlika u odnosu na analizu iz tačke 4.2 je to što je ovde u razmatranje uzet i uticaj zemljovodnog provodnika koji se ne smatra izolovanim.

Vertikalna elektroda (označena sa 1) napaja se niskofrekventnom strujom I_{g1} , dok se prstenasta elektroda napaja strujom I_{g2} preko dva zemljovodna provodnika (zajednički obeležena sa 2) koji se pri dnu razdvajaju i čine obruč (provodnici 3 i 4).

Prstenasta elektroda i zemljovod obično su načinjeni od FeZn trake pravougaonog poprečnog preseka. U opisanoj analizi traka se smatra provodnikom kružnog poprečnog preseka ekvivalentnog poluprečnika $a_3 = a_4$, dok se dva zemljovodna provodnika tretiraju kao jedinstveni provodnik poluprečnika $a_2 = 2a_3$. Ekvivalentni poluprečnik provodnika određuje se primenom procedure detaljno opisane u PRILOGU 9. Provodnici se smatraju lineičnim, tj. podrazumeva se da su ispunjeni uslovi $a_2 \ll l_2$ i $a_3 \ll l_3$. Kao i u prethodnim slučajevima, usvojeno je da je koeficijent refleksije $R_{z10} \cong 1$.

5.2.1 Električni skalar potencijal

Opšti izraz za određivanje potencijala u okolini ekvivalentnog uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.3b je oblika ([5.14]),

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{2I_{g1}}{r} + \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{2I_{g2}}{|\vec{r} - x_0\hat{x}|} + \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{k=1}^4 \int_{s'_k=0}^{l_k} I_k(s'_k) \frac{\partial}{\partial s'_k} K(r, s'_k) ds'_k, \quad (5.2.1)$$

gde je \vec{r} vektor položaja tačke u kojoj se određuje potencijal. U prethodnom izrazu, $I_k(s'_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ su nepoznate raspodele longitudinalnih struja duž osa provodnika dok je $K(r, s'_k) = \frac{1}{r_{1k}} + \frac{1}{r_{2k}}$ oznaka za jezgro integrala. Sa r_{1k} i r_{2k} označena su rastojanja od elementa provodnika, tj. njegovog lika u ravnom ogledalu do tačke u kojoj se određuje potencijal (analogno r_{11} i r_{21} na Sl. 5.1c). Zbog postojeće simetrije, struje duž provodnika 3 i 4 imaju istu raspodelu, tj. $I_3(s'_3) = I_4(s'_4)$, što važi i za njihove izvode (struje oticanja) $I_{otk}(s'_k) = -\partial I_k(s'_k)/\partial s'_k = -I'_k(s'_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Uslovi koje struje duž provodnika treba da zadovolje proističu iz I Kirhofovog zakona, odnosno uslova za struju na kraju provodnika i dati su sledećim izrazima

$$I_1(0) = I_{g1}, \quad (5.2.2a)$$

$$I_2(0) = I_{g2}, \quad (5.2.2b)$$

$$I_2(l_2) = I_3(0) + I_4(0) = 2I_3(0), \quad (5.2.2c)$$

$$I_3(l_3) + I_4(l_4) = 2I_3(l_3) = 0 \text{ i} \quad (5.2.2d)$$

$$I_1(l_1) = -a_1 I'_1(l_1) \quad (5.2.2e)$$

Poslednje navedeni uslov (5.2.2e) već je pomenut u 4.1.4 i detaljnije je analiziran u PRILOGU 7.

5.2.2 Sistem integralnih jednačina

Kada se uzmu u obzir uslovi (5.2.2) i na izraz za potencijal (5.2.1) primeni parcijalna integracija, on dobija znatno jednostavniju formu. Kada se smatra da je površina svake elektrode praktično ekvipotencijalna potencijala U_n (što je opravdano u kvazistacionarnoj analizi), potencijal površine n -tog provodnika, $n = 1, 2, 3, 4$, u tački površine definisanoj vektorom položaja \vec{r}_n ima oblik

$$\varphi(\vec{r} = \vec{r}_n) \cong U_n = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{k=1}^4 \left\{ \delta_{k1} I_1(s'_1 = l_1) K(r_n, s'_1 = l_1) - \int_{s'_k=0}^{l_k} \left[\frac{\partial}{\partial s'_k} I_k(s'_k) \right] K(r_n, s'_k) ds'_k \right\}. \quad (5.2.3)$$

U prethodnoj jednačini, s_n definiše položaj tačke P_n na površini n -tog provodnika, dužine l_n , a sa δ_{k1} označena je Kronekerova delta.

Podešavanjem vrednosti potencijala u tačkama na površini elektroda, prethodni izraz dobija formu sistema integralnih jednačina koji za nepoznate funkcije ima raspodele struja duž elektroda $I_k(s'_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, koji je rešen metodom momenata. Nepoznate raspodele struja pretpostavljene su u polinomskoj formi

$$I_k(s'_k) = \sum_{m=0}^{M_k} I_{km} \left(\frac{s'_k}{l_k} \right)^m, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (5.2.4)$$

gde je M_k stepen polinomske aproksimacije struje duž k -tog provodnika $k = 1, 2, 3, 4$. Smenom prethodnog izraza u (5.2.3), sistem integralnih jednačina postaje sistem algebarskih jednačina čije su nepoznate strujni koeficijenti I_{km} , $k = 1, 2, 3, 4$, $m = 0, 1, 2, \dots, M_k$,

$$\sum_{k=1}^4 \sum_{m=0}^{M_k} I_{km} \left\{ \delta_{k1} K(s_n, s'_1 = l_1) - \frac{m}{l_k} \int_{s'_k=0}^{l_k} \left(\frac{s'_k}{l_k} \right)^{m-1} K(r_n, s'_k) ds'_k \right\} = \begin{cases} 4\pi\sigma_1 U_1, n = 1 \\ 4\pi\sigma_1 U_2, n = 2, 3, 4. \end{cases} \quad (5.2.5)$$

U prethodnom izrazu U_1 je oznaka za potencijal provodnika 1, dok je U_2 približna vrednost potencijala elektroda 2, 3 i 4 sa Sl. 5.2b. Ukupni broj nepoznatih u sistemu jednačina (5.2.5) $\sum_{k=1}^4 (M_k + 1)$

smanjuje se primenom uslova $I_3(s'_3) = I_4(s'_4)$ na $N_T = \sum_{k=1}^3 (M_k + 1)$. Kada se kao jednačine iskoriste tri dodatna uslova data izrazom (5.2.2c/d/e) ostatak jednačina (ukupno $N_T - 3 = \sum_{k=1}^3 M_k$) formira se podešavanjem vrednosti potencijala u tačkama definisanim vrednostima koordinata s_n , $n = 1, 2, 3$,

$$s_{ni} = \frac{i}{M_n + 1} l_n, \quad i = 1, 2, \dots, M_n, \quad n = 1, 2, 3. \quad (5.2.6)$$

Integrali koji se javljaju kao koeficijenti u sistemu jednačina (5.2.5) mogu se odgovarajućim smenama, na način sličan onom iz tačke 4.1.1 svesti na integrale čije je rešavanje opisano u PRILOGU 6. Pri tome je vektor položaja strujnog elementa na delu obruča $\vec{r}_i = h_1 \hat{z} + r_{K1} (\cos \psi_i \hat{x} - \sin \psi_i \hat{y})$, gde je ψ_i ugaona koordinata cilindričnog koordinatnog sistema koja definiše položaj strujnog elementa na obruču.

5.2.3 Sopstvene i međusobne impedanse

Kada se uzemljivački sistem sastoji od više elektroda, od interesa je odrediti međusobni uticaj delova uzemljivačkog sistema. Mera tog uticaja su međusobne impedanse sistema koje se javljaju u sistemu jednačina koji definiše "Z" parametre ([5.15])

$$\begin{aligned} U_1 &= \underline{Z}_{11} I_{g1} + \underline{Z}_{12} I_{g2}, \\ U_2 &= \underline{Z}_{21} I_{g1} + \underline{Z}_{22} I_{g2}, \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

gde su \underline{Z}_{11} i \underline{Z}_{22} sopstvene, a \underline{Z}_{12} i \underline{Z}_{21} međusobne impedanse ($\underline{Z}_{ij} = R_{ij} + jX_{ij}$, $i, j = 1, 2$). "Z" parametri određuju se rešavanjem sistema jednačina (5.2.7) pri čemu je neophodno usvojiti vred-

nosti za potencijal vertikalne elektrode U_1 i potencijal sistema provodnika 2, 3 i 4. Sistem se rešava u dva režima napajanja, simetričnom ($U_1 = U_2 = 1\text{ V}$) i antisimetričnom ($U_1 = -U_2 = 1\text{ V}$). U ranijem tekstu već je objašnjeno da je $I_{g1} = I_1(0)$ i $I_{g2} = I_2(0)$. Kada su sve četiri elektrode povezane i formiraju jedinstveni uzemljivački sistem, ukupna impedansa takvog sistema određuje se smenom $U_1 = U_2 = 1\text{ V}$ u (5.2.7), pa se ukupna impedansa uzemljivačkog sistema može odrediti kao

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g = 1/(I_{g1} + I_{g2}). \quad (5.2.8)$$

U konkretnom slučaju, radi se o kvazistacionarnoj analizi, pa su u okviru konkretnih rezultata prikazane međusobne i sopstvene otpornosti $R_{ij}, i, j = 1, 2$, kao i ukupna otpornost sistema R_g .

5.2.4 Numerički rezultati

Na osnovu opisane procedure izvršena je karakterizacija uzemljivačkog sistema stuba prikazanog na Sl. 5.3a pri čemu su vrednosti parametara $a = 0.25\text{ m}$, $b_s = 0.4\text{ m}$, $b_1 = 0.2\text{ m}$, $l_c = 2\text{ m}$, $h_1 = 0.7\text{ m}$, $r_{K1} = 1.5\text{ m}$, $x_0 = 1\text{ m}$, $N = 10$, $b = 2b_s(1 + \sqrt{2})/4 = 0.483\text{ m}$, dok je poluprečnik poprečnog preseka ekvivalentnog provodnika kojim se zamenjuje armatura temelja $a_1 = a \sqrt[3]{N r_0 / a} = 0.18\text{ m}$ ([5.2], [5.9]-[5.13]). Trakasti FeZn provodnik od koga je načinjen obruč i zemljovodni provodnici je pravougaonog poprečnog preseka dimenzija $30 \times 4\text{ mm}^2$, a poluprečnik provodnika ekvivalentnog kružnog poprečnog preseka određen procedurom opisanom u PRILOGU 9 je $a_3 = a_4 = a_2 / 2 = 9.7\text{ mm}$. Vrednosti parametara izabrane su na osnovu podataka iz [5.9]-[5.13].

Sopstvene i međusobne otpornosti posmatranog uzemljivačkog sistema prikazane su u Tabeli 5.2. Pri tome se pojedinačnim elektrodama smatraju vertikalna elektroda kao "prva" i elektrodni sistem formiran od provodnika 2, 3 i 4 sa Sl. 5.3b kao "druga" elektroda. Longitudinalne struje pretpostavljene su u polinomskom obliku (5.2.4), pri čemu je stepen polinomske aproksimacije isti za svaku struju $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M$. Stepen polinoma M kao i specifična otpornost okolne zemlje ρ_1 menja vrednost, dok je usvojena specifična otpornost betona $\rho_c = 50\ \Omega$. Oznakom * označene su vrednosti sopstvenih i međusobnih otpornosti dobijene procedurom opisanom u prvom delu odeljka 5.1, tj. uzimanjem u obzir uticaja betonskog temelja. Očigledno je da taj uticaj postoji i da je naročito izražen kada je pitanju otpornost R_{11} . Iako je u linearnim sredinama $R_{21} = R_{21}$, mala razlika koja se javlja između ova dva koeficijenta posledica je toga što se sistem integralnih jednačina za potencijal (5.2.3) svođenjem na sistem linearnih algebarskih jednačina (5.2.5) zapravo približno numerički rešava.

Ukupna otpornost posmatranog uzemljivačkog sistema u funkciji dubine ukopavanja obruča h_1 i specifičnom otpornošću betona ρ_c kao parametrom prikazana je na Sl. 5.4a-b. Specifična otpornost okolnog tla je $\rho_1 = 100\ \Omega\text{m}$ dok je vrednost ostalih parametara ista kao i u slučaju Tabele 5.2. Otpornost je određena pomoću jednačine (5.2.8) i za stepen polinomske aproksimacije longitudinalnih struja $M = 3$. Pri tome je proračun izvršen za slučaj kada je uzet u obzir uticaj zemljovoda (Sl 5.4.a) i kada to nije učinjeno ($M_2 = 0$) (Sl. 5.4b). Opadanje ukupne otpornosti sa povećavanjem dubine ukopavanja kada je u obzir uzet i zemljovodni provodnik je očekivano, dok u slučaju zanemarivanja njegovog uticaja ukupna otpornost uzemljivačkog sistema teži konstantnoj vrednosti.

Za iste vrednosti parametara kao na Sl. 5.4 i dubinu ukopavanja obruča $h_1 = 0.7\text{ m}$ ([5.10]), ukupna otpornost uzemljivača sa Sl. 5.3a-b određena je u funkciji promene poluprečnika obruča r_{K1} i prikazana na Sl. 5.5a (uticaj zemljovoda uključen u proračun) i Sl. 5.5b (bez uticaja zemljovoda, $M_2 = 0$).

Ukupna otpornost uzemljivača sa Sl. 5.3a u funkciji specifične otpornosti tla ρ_1 i specifičnom otpornošću betona ρ_C kao parametrom prikazane su na Sl.5.6a-b, uključujući i slučaj homogene zemlje (zanemaren temelj). Kao i kada se radilo o Sl. 5.5, stepen polinomske raspodele longitudinalnih struja je $M = 3$, dok je proračun izvršen za slučaj kada je uzet u obzir uticaj zemljovoda (Sl 5.6.a) i kada je ovaj uticaj isključen ($M_2 = 0$) (Sl. 5.6b).

Da bi se istakao uticaj obruča na ukupnu otpornost uzemljivačkog sistema, u Tabeli 5.3 prikazane su vrednosti otpornosti vertikalne elektrode koja čini deo sistema sa Sl. 5.3, za različite vrednosti specifične otpornosti betona. Pri tome su ostali parametri temelja i elektrode isti kao i na Sl. 5.4-5.6, dok je proračun izvršen primenom procedure opisane u tački 5.1. Na osnovu Tabele 5.3 i grafika sa Sl. 5.4-5.6, očigledno je da prisustvo obruča na ukupnu otpornost sistema značajno smanjuje otpornost uzemljenja izvedenog samo od usamljene vertikalne elektrode položene u betonski temelj.

Izgled grafika prikazanih na Sl. 5.4-5.6, navodi na zaključak da je uticaj temelja na ukupnu otpornost uzemljivača utoliko izraženiji ukoliko je manja dužina provodnika koji uz vertikalnu elektrodu formiraju uzemljivački sistem. S druge strane, uključivanje zemljovodnog provodnika potpomaže taj uticaj, ali istovremeno i povećava dužinu provodnika posmatranog uzemljivačkog sistema. Za dovoljno velike poluprečnike obruča, uticaj zemljovoda na ukupnu otpornost sistema postaje veoma mali, jer su obruči ti koji nose prevagu u ukupnoj otpornosti uzemljivača. Generalno uzevši, ovaj uticaj na ukupnu otpornost uzemljivačkog sistema nije isuviše dominantan, što je posebno uočljivo na graficima prikazanim na Sl. 5.6.

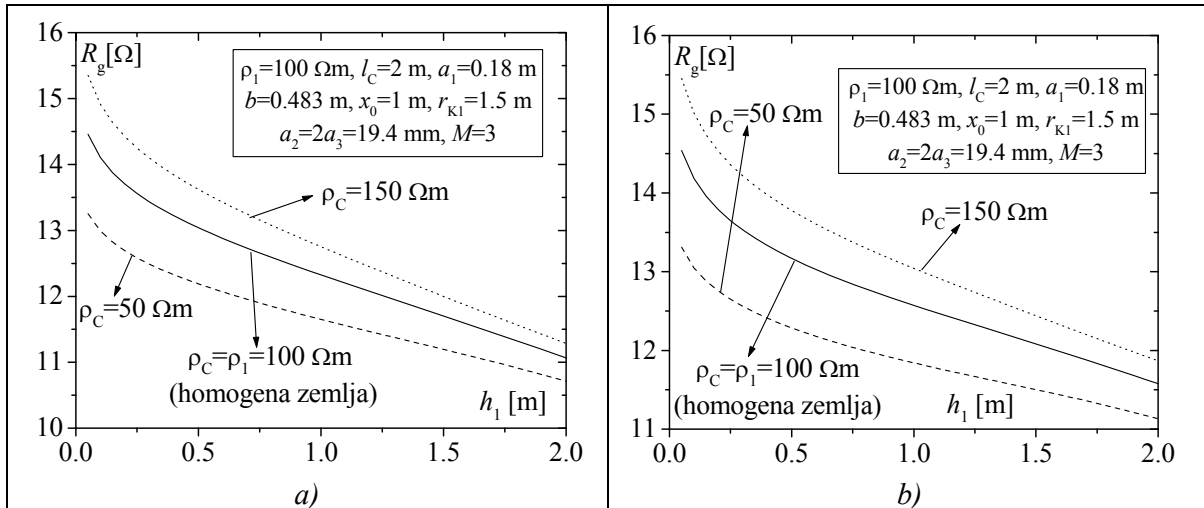
Na Sl. 5.7 prikazane su sopstvene i međusobne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.3.a u funkciji specifične otpornosti tla ρ_1 i specifičnom otpornošću betona ρ_C kao parametrom, pri čemu je uticaj zemljovodnog provodnika uzet u obzir. Na istoj slici nalaze se i grafici promene sopstvenih, međusobnih i ukupne otpornosti kada je zanemaren uticaj temelja (homogena zemlja). Step en polinomske raspodele longitudinalnih struja je isti za sve provodnike $M = 3$. Kao što se i očekuje, uticaj temelja je posebno prisutan kada se određuje sopstvena otpornost R_{11} , dok je kod ostalih koeficijenata izražen u znatno manjoj meri.

Tabela 5.2 - Sopstvene i međusobne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.3 kada je $a = 0.25$ m, $b_s = 0.4$ m, $b_1 = 0.2$ m, $l_C = 2$ m, $h_1 = 0.7$ m, $r_{K1} = 1.5$ m, $x_0 = 1$ m, $b = 0.483$ m, $N = 10$, $a_3 = a_4 = a_2 / 2 = 9.7$ mm i $a_1 = 0.18$ m.

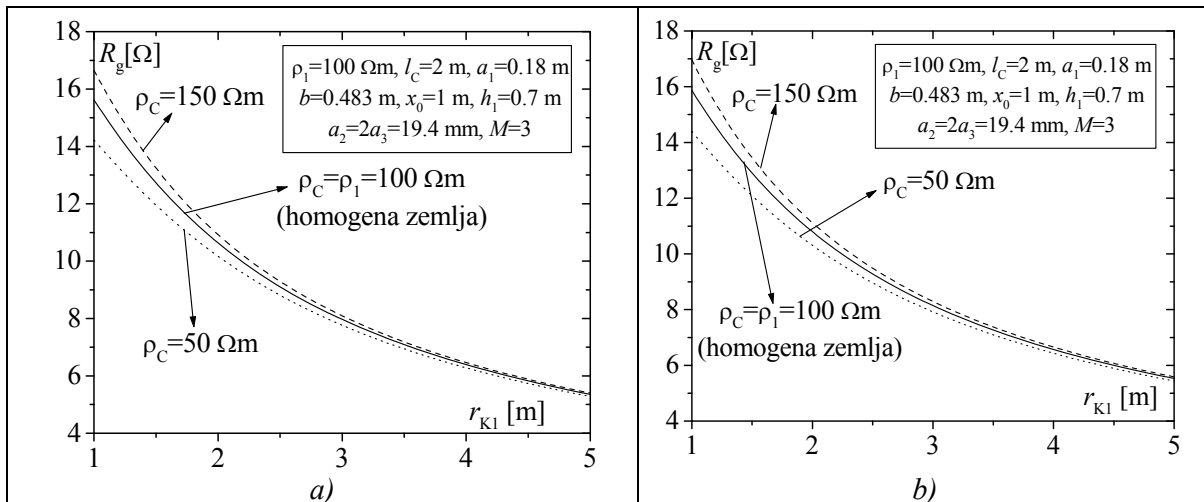
$\rho_1 = 10 \Omega \text{ m}$								
M	$R_{11}[\Omega]$	$R_{11}^*[\Omega]$	$R_{12}[\Omega]$	$R_{12}^*[\Omega]$	$R_{21}[\Omega]$	$R_{21}^*[\Omega]$	$R_{22}[\Omega]$	$R_{22}^*[\Omega]$
1	2.24688	5.33276	0.88036	0.96277	0.84616	0.95896	1.49860	1.49860
2	2.20422	5.22949	0.84509	0.95601	0.83418	0.95460	1.48985	1.50090
3	2.16688	5.14181	0.82840	0.95118	0.83086	0.95336	1.49281	1.50484

$\rho_1 = 100 \Omega \text{ m}$								
M	$R_{11}[\Omega]$	$R_{11}^*[\Omega]$	$R_{12}[\Omega]$	$R_{12}^*[\Omega]$	$R_{21}[\Omega]$	$R_{21}^*[\Omega]$	$R_{22}[\Omega]$	$R_{22}^*[\Omega]$
1	22.46883	18.61332	8.80358	8.37172	8.46160	8.01218	14.98597	14.98597
2	22.04216	18.26084	8.45092	7.93665	8.34180	7.86572	14.89846	14.78157
3	21.66877	17.94985	8.28396	7.79470	8.30862	7.82928	14.92817	14.81348

$\rho_1 = 1000 \Omega \text{ m}$								
M	$R_{11}[\Omega]$	$R_{11}^*[\Omega]$	$R_{12}[\Omega]$	$R_{12}^*[\Omega]$	$R_{21}[\Omega]$	$R_{21}^*[\Omega]$	$R_{22}[\Omega]$	$R_{22}^*[\Omega]$
1	224.68835	151.42208	88.03578	77.40112	84.61596	74.51237	149.85970	149.85970
2	220.42161	148.55928	84.50924	72.54261	83.41803	72.75400	148.98455	145.66737
3	216.68768	146.02128	82.83956	72.15828	83.08619	72.38629	149.28170	146.14323



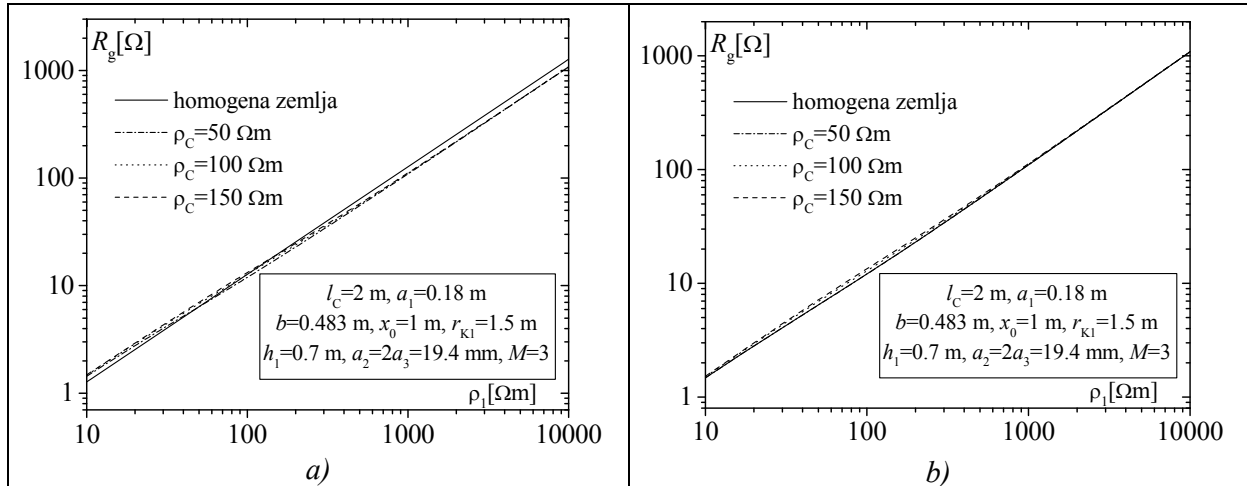
Sl. 5.4 - Promena ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl.5.3 za $\rho_1 = 100 \Omega m$, $a = 0.25 m$, $b_s = 0.4 m$, $b_1 = 0.2 m$, $l_C = 2 m$, $r_{kl} = 1.5 m$, $x_0 = 1 m$, $N = 10$, $b = 0.483 m$, $a_3 = a_4 = a_2 / 2 = 9.7 mm$, $a_1 = 0.18 m$ i $M = 3$ u funkciji h_1 i ρ_C kao parametrom: a) kada je u obzir uzet uticaj zemljovoda; b) kada je zemljovod zanemaren.



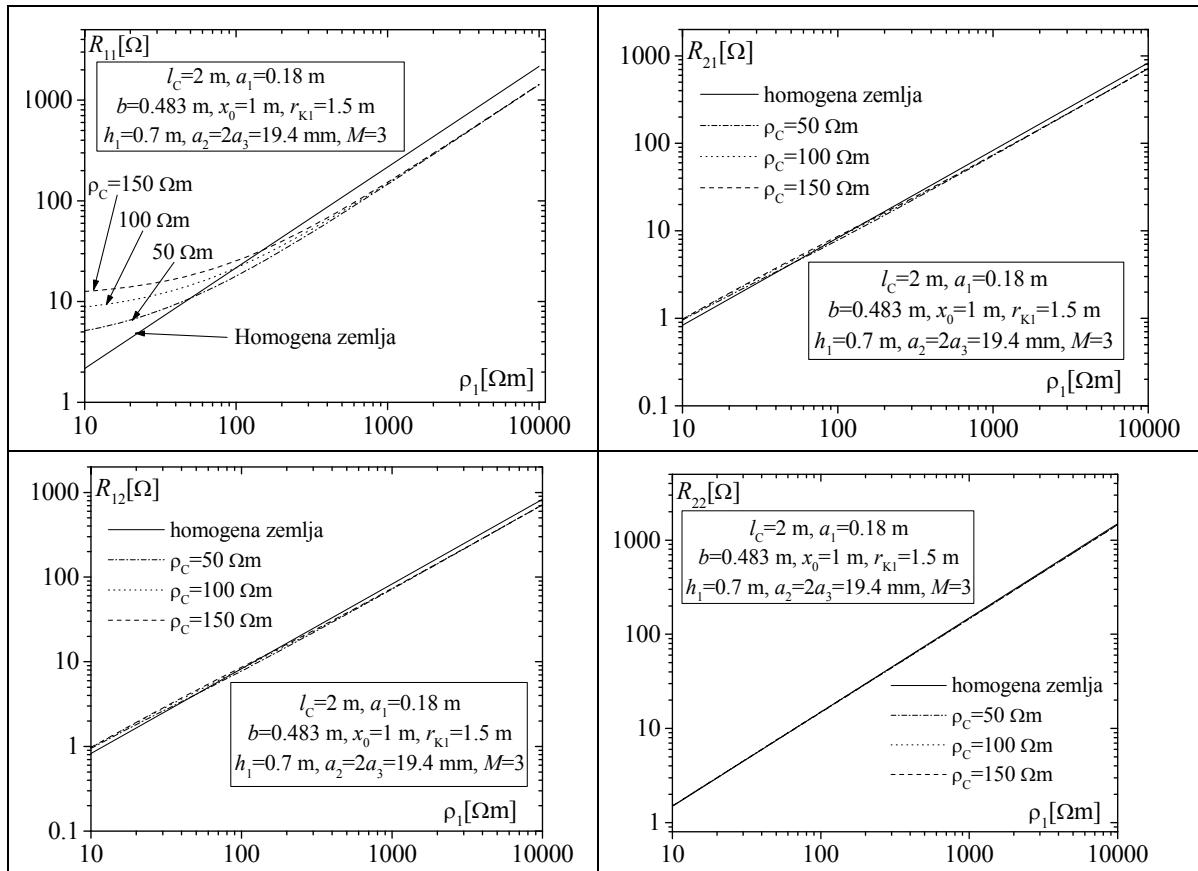
Sl. 5.5 - Promena ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl.5.3 za $\rho_1 = 100 \Omega m$, $a = 0.25 m$, $b_s = 0.4 m$, $b_1 = 0.2 m$, $l_C = 2 m$, $h_1 = 0.7 m$, $x_0 = 1 m$, $N = 10$, $b = 0.483 m$, $a_3 = a_4 = a_2 / 2 = 9.7 mm$, $a_1 = 0.18 m$ i $M = 3$ u funkciji r_{kl} i ρ_C kao parametrom: a) kada je u obzir uzet uticaj zemljovoda; b) kada je zemljovod zanemaren.

Tabela 5.3 - Otpornost vertikalne uzemljivačke elektrode sistema sa Sl. 5.3 kada je $a = 0.25 m$, $b_s = 0.4 m$, $b_1 = 0.2 m$, $l_C = 2 m$, $b = 0.483 m$, $N = 10$ i $a_1 = 0.18 m$.

$R_g [\Omega]$ (za usamljenu vertikalnu elektrodu)		
$\rho_C = 50 \Omega m$	$\rho_C = 100 \Omega m$	$\rho_C = 150 \Omega m$
17.96855	21.69546	25.42253



Sl. 5.6 - Promena ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.3 za $a = 0.25$ m, $b_s = 0.4$ m, $b_1 = 0.2$ m, $l_C = 2$ m, $h_1 = 0.7$ m, $r_{K1} = 1.5$ m, $x_0 = 1$ m, $N = 10$, $b = 0.483$ m, $a_3 = a_4 = a_2 / 2 = 9.7$ mm, $a_1 = 0.18$ m i $M = 3$ u funkciji ρ_1 i ρ_C kao parametrom: a) kada je u obzir uzet uticaj zemljovoda; b) kada je zemljovod zanemaren.



Sl. 5.7 - Promena sopstvenih i međusobnih otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.3 za $a = 0.25$ m, $b_s = 0.4$ m, $b_1 = 0.2$ m, $l_C = 2$ m, $h_1 = 0.7$ m, $r_{K1} = 1.5$ m, $x_0 = 1$ m, $N = 10$, $b = 0.483$ m, $a_3 = a_4 = a_2 / 2 = 9.7$ mm, $a_1 = 0.18$ m i $M = 3$ u funkciji ρ_1 i ρ_C kao parametrom kada je u obzir uzet uticaj zemljovoda.

Poluprečnici obruča ukopanih na dubinama h_1 i h_2 su r_{K1} i r_{K2} respektivno, Sl. 5.8a-b. Uzemljivački sistem sačinjava i kosi zemljovod kojim je napajan obruč (2) i provodnik kojim su povezani obruči (5). Svi provodnici načinjeni su od FeZn trake i bez prekidanja su položeni u zemlju kao što se to vidi na Sl. 5.8a-b. Ekvivalentni poluprečnik trake određen je primenom procedure iz PRILOGA 9, dok su, (kao i u slučaju analize iz tačke 5.2), provodnici 2 i 5 sačinjeni su od po dva provodnika koji se tretiraju kao jedan. Analogno postupku iz 5.2, važi da je $a_3 = a_4 = a_6 = a_7 = a_2 / 2 = a_5 / 2$.

Niskofrekventna struja napajanja vertikalne elektrode (1) je I_{g1} , dok je sa I_{g2} označena niskofrekventna struja kojom se napaja sistem provodnika sačinjen od dva obruča (provodnici 3,4,6 i 7), zemljovoda (2) i provodnika koji spaja obruče (5).

5.3.1 Električni skalar potencijal

Opšti izraz za potencijal u okolini ekvivalentnog uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.8b ima oblik identičan izrazu za potencijal (5.2.1), pri čemu je promenjen samo broj provodnika (7 umesto 4),

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{2I_{g1}}{r} + \frac{1}{4\pi\sigma_1} \frac{2I_{g2}}{|\vec{r} - x_0\hat{x}|} + \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{k=1}^7 \int_{s'_k=0}^{l_k} I_k(s'_k) \frac{\partial}{\partial s'_k} K(r, s'_k) ds'_k. \quad (5.3.1)$$

Oznake u (5.3.1) odgovaraju onima (5.2.1), a isto važi i za uslov jednakosti longitudinalnih struja, odnosno struja oticanja provodnika koji formiraju obruče,

$$I_3(s'_3) = I_4(s'_4), \quad I_6(s'_6) = I_7(s'_7), \quad I'_3(s'_3) = I'_4(s'_4) \quad \text{i} \quad I'_6(s'_6) = I'_7(s'_7).$$

Uslovi koje struje duž provodnika treba da zadovolje sada su

$$I_1(0) = I_{g1}, \quad (5.3.2a)$$

$$I_2(0) = I_{g2}, \quad (5.3.2b)$$

$$I_2(l_2) = I_3(0) + I_4(0) = 2I_3(0), \quad (5.3.2c)$$

$$I_3(l_3) + I_4(l_4) = I_5(0) \quad (5.3.2d)$$

$$I_5(l_5) = I_6(0) + I_7(0) = 2I_7(0) \quad (5.3.2e)$$

$$I_6(l_6) + I_7(l_7) = 2I_6(l_6) = 0 \quad \text{i} \quad (5.3.2f)$$

$$I_1(l_1) = -a_1 I'_1(l_1). \quad (5.3.2g)$$

5.3.2 Sistem integralnih jednačina

Primenom parcijalne integracije na (5.3.1) uz korišćenje i uslova (5.3.2), izraz za potencijal se pojednostavljuje i ima formu analognu izrazu (5.2.3),

$$\varphi(\vec{r} = \vec{r}_n) \cong U_n = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \sum_{k=1}^7 \left\{ \delta_{k1} I_1(s'_1 = l_1) K(s_n, s'_1 = l_1) - \int_{s'_k=0}^{l_k} \left[\frac{\partial}{\partial s'_k} I_k(s'_k) \right] K(r_n, s'_k) ds'_k \right\}. \quad (5.3.3)$$

Podešavanjem vrednosti potencijala u tačkama na površini elektroda, prethodni izraz transformiše se u sistem integralnih jednačina koji za nepoznate funkcije ima raspodele struja duž elektroda $I_k(s'_k)$, $k = 1, 2, \dots, 7$. Nepoznate raspodele struja pretpostavljene su u polinomskoj formi

$$I_k(s'_k) = \sum_{m=0}^{M_k} I_{km} \left(\frac{s'_k}{l_k} \right)^m, \quad k = 1, 2, \dots, 7 \quad (5.3.4)$$

gde je M_k stepen polinomske aproksimacije struje duž k -tog provodnika $k = 1, 2, \dots, 7$. Sada sistem integralnih jednačina postaje sistem algebarskih jednačina čije su nepoznate strujni koeficijenti I_{km} , $k = 1, 2, \dots, 7$, $m = 0, 1, 2, \dots, M_k$,

$$\sum_{k=1}^7 \sum_{m=0}^{M_k} I_{km} \left\{ \delta_{k1} K(s_n, s'_1 = l_1) - \frac{m}{l_k} \int_{s'_k=0}^{l_k} \left(\frac{s'_k}{l_k} \right)^{m-1} K(r_n, s'_k) ds'_k \right\} = \begin{cases} 4\pi\sigma_1 U_1, n=1 \\ 4\pi\sigma_1 U_2, n=2,3,\dots,7. \end{cases} \quad (5.3.5)$$

U prethodnom izrazu U_1 je oznaka za potencijal provodnika 1, dok je U_2 približna vrednost jedinstvenog potencijala ostalih elektroda uzemljivačkog sistema (2-7), Sl. 5.8b. Ukupni broj nepoznatih koeficijenata je $\sum_{k=1}^7 (M_k + 1)$. Korišćenjem uslova simetrije $I_3(s'_3) = I_4(s'_4)$ i $I_6(s'_6) = I_7(s'_7)$ ovaj

broj se smanjuje na $N_T = \sum_{k=1}^7 (M_k + 1) - \sum_{k=4,7} (M_k + 1)$. Kada se kao jednačine iskoriste uslovi (5.3.2c-g), ostatak jednačina (ukupno $N_T - 5$) formira se podešavanjem vrednosti potencijala u tačkama definisanim vrednostima koordinata s_n , $n = 1, 2, 3, 5, 6$,

$$S_{ni} = \frac{i}{M_n + 1} I_n, \quad i = 1, 2, \dots, M_n, \quad n = 1, 2, 3, 5, 6. \quad (5.3.6)$$

"Z" parametri i ukupna impedansa sistema određuju se na način identičan onom opisanom u tački 5.2.3. Pri tome su iz istih razloga kao i u tački 5.2 određene i prikazane vrednosti sopstvenih, međusobnih i ukupne otpornosti sistema.

5.3.3 Numerički rezultati

Pristup izložen u prethodnom tekstu primenjen je na analizu uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.8, za vrednosti parametara $a = 0.25$ m, $b_s = 0.4$ m, $b_1 = 0.2$ m, $l_C = 2$ m, $h_1 = 0.5$ m, $h_2 = 1$ m, $r_{k1} = 1$ m, $r_{k2} = 2$ m, $x_0 = 1$ m, $N = 10$, $b = 2b_s(1 + \sqrt{2})/4 = 0.483$ m i $a_1 = a\sqrt{N}r_0/a = 0.18$ m ([5.2], [5.9]-[5.13]). Trakasti FeZn provodnik od koga je načinjen obroč i zemljovodni provodnici je kao i u 5.2, pravougaonog poprečnog preseka dimenzija 30×4 mm², a ekvivalentni poluprečnik provodnika kružnog poprečnog preseka $a_3 = a_4 = a_2/2 = 9.7$ mm ([PRILOG 9]). Primenjen je metod podešavanja u tačkama, dok je stepen polinomske aproksimacije struje isti za sve provodnike $M = 3$. Vrednost specifične otpornosti betona ρ_C korišćena je kao promenljivi parametar.

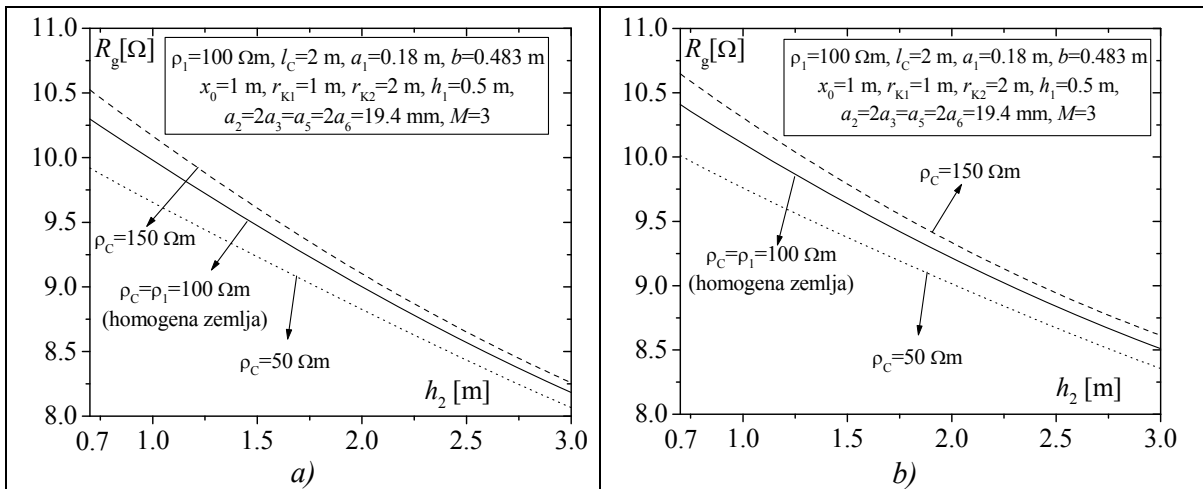
Ukupna otpornost uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.8a određena je za navedene vrednosti parametara u funkciji dubine ukopavanja drugog obruča h_2 za $\rho_1 = 100\Omega$ m. Dobijeni grafici prikazani su na Sl. 5.9a-b. Proračun je izveden za slučaj kada je zemljovod uzet u obzir (Sl. 5.9a) i kada je njegov uticaj zanemaren, tj. $M_2 = M_3 = 0$ (Sl. 5.9b).

Na Sl. 5.10, koeficijenti sopstvenih i međusobnih otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.8 prikazani su u funkciji promene specifične otpornosti tla ρ_1 , za $h_2 = 1$ m ([5.11]) dok su vrednosti ostalih parametara iste kao i na prethodnoj slici, dok je uticaj zemljovoda uzet u obzir.

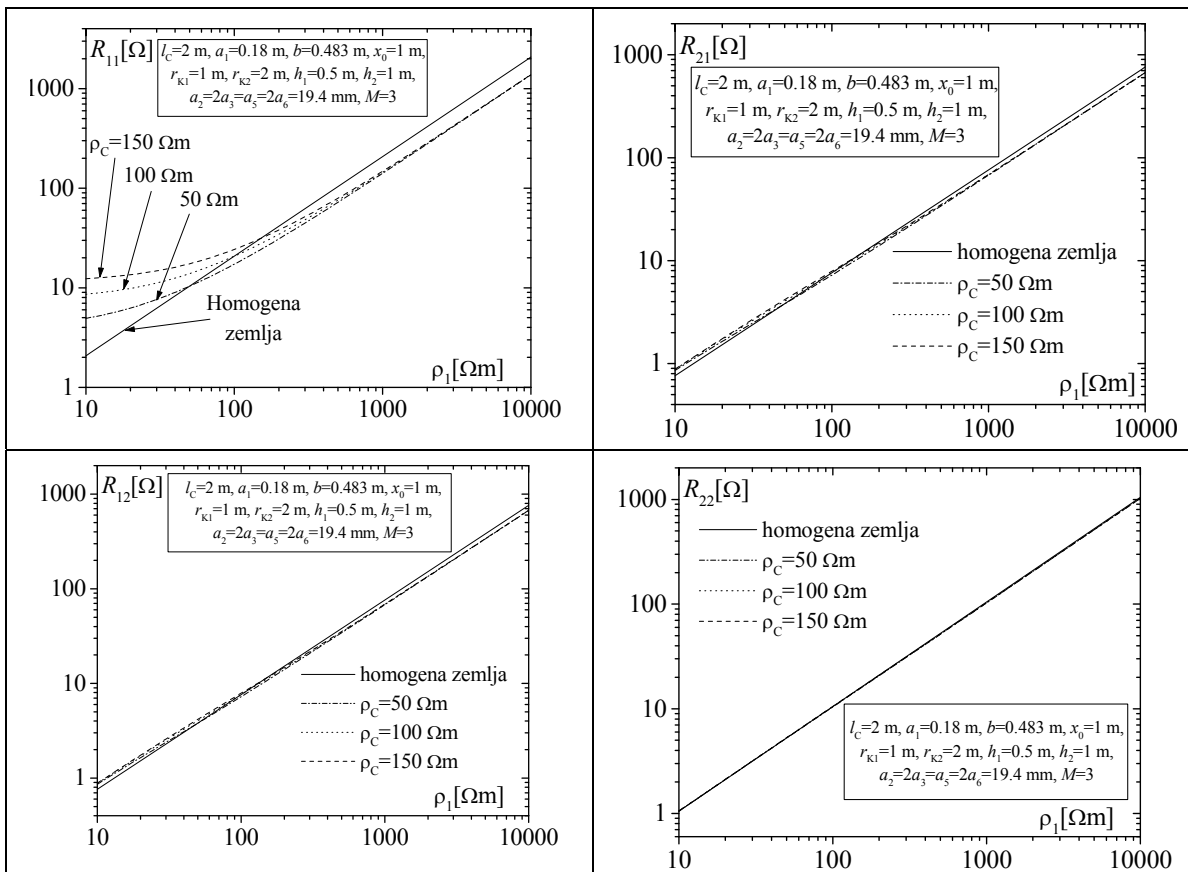
Rezultati dobijeni zanemarivanjem uticaja temelja (homogena zemlja) takođe su uključeni u Sl. 5.10. I u ovom slučaju, kada dva obruča zajedno sa ostalim elektrodama formiraju uzemljivački sistem, uticaj temelja je najizraženiji kod određivanja otpornosti R_{11} .

Ukupna otpornost uzemljivača sa Sl. 5.8a određena je u funkciji poluprečnika donjeg obruča r_{k2} za iste vrednosti parametara kao na Sl. 5.10 i prikazana na Sl. 5.11. Pri tome je $\rho_1 = 100\Omega$ m, dok je uticaj zemljovoda uzet u obzir (Sl. 5.11a), odnosno zanemaren (Sl. 5.11b).

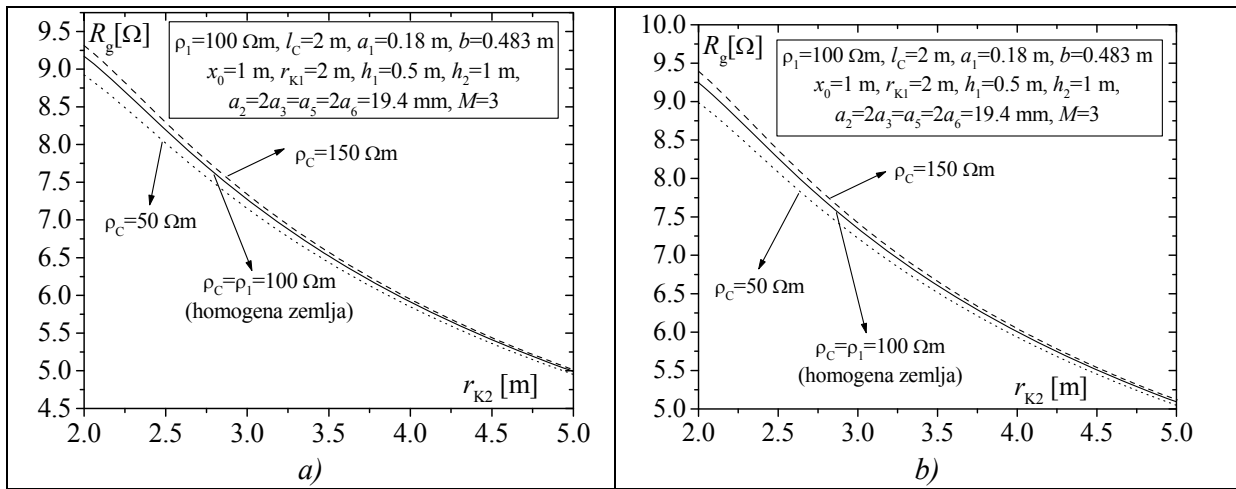
Kao i u slučaju uzemljivačkog sistema koji uključuje jedan obroč (tačka 5.2) uticaj temelja na ukupnu otpornost uzemljivača utoliko je izraženiji ukoliko je manja dužina provodnika koji uz vertikalnu elektrodu formiraju uzemljivački sistem, dok uključivanje zemljovodnog provodnika u proračun taj uticaj dovodi do izražaja u većoj (ne i u velikoj) meri. Za dovoljno velike poluprečnike obruča, uticaj zemljovoda na ukupnu otpornost sistema postaje zanemarljiv.



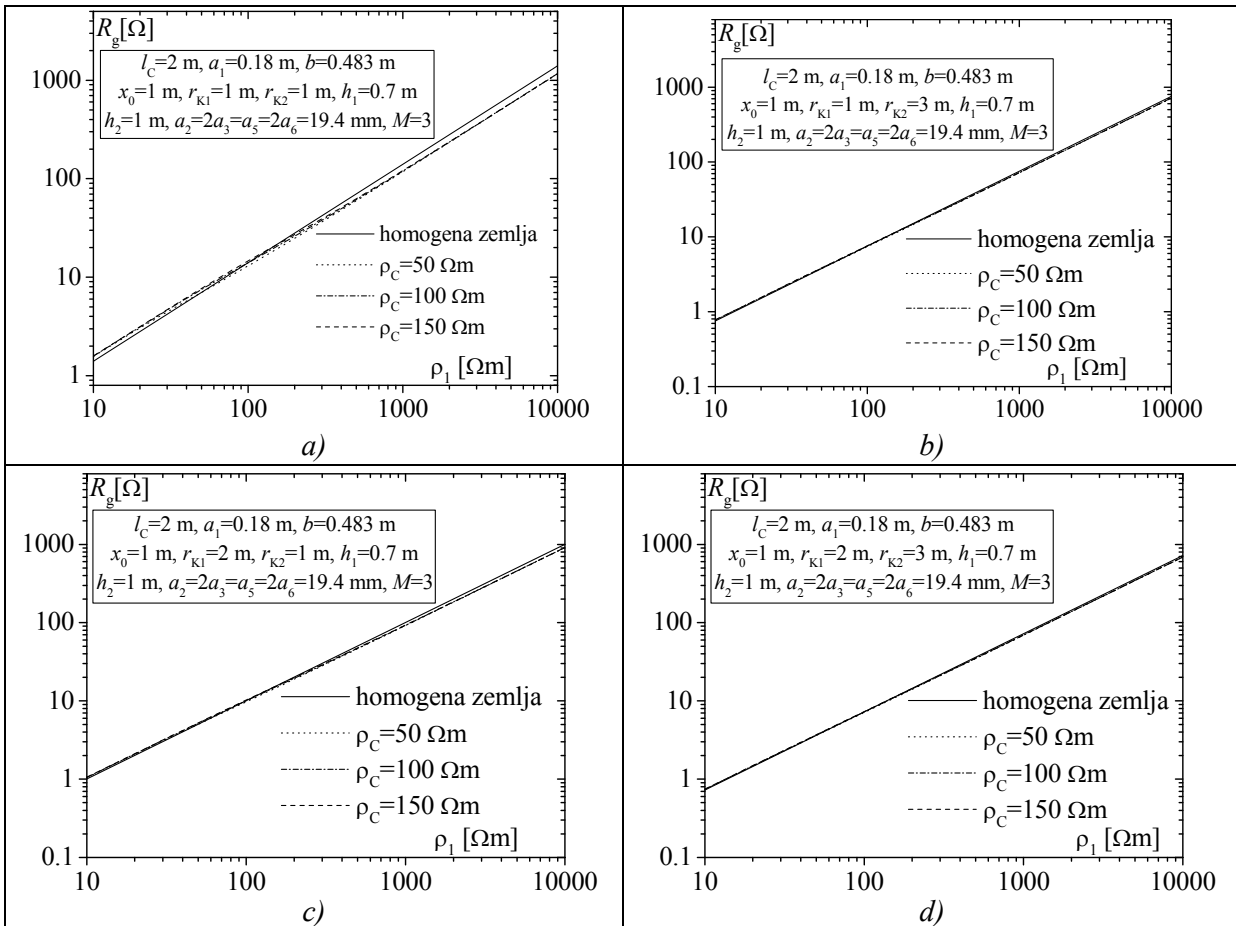
Sl. 5.9 - Promena ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.8 za $\rho_1 = 100 \Omega\text{m}$, $a = 0.25 \text{ m}$, $b_s = 0.4 \text{ m}$, $b_1 = 0.2 \text{ m}$, $l_c = 2 \text{ m}$, $h_1 = 0.5 \text{ m}$, $r_{k1} = 1 \text{ m}$, $r_{k2} = 2 \text{ m}$, $x_0 = 1 \text{ m}$, $N = 10$, $b = 0.483 \text{ m}$, $a_3 = a_4 = a_2 / 2 = 9.7 \text{ mm}$, $a_1 = 0.18 \text{ m}$ i $M = 3$ u funkciji h_1 i ρ_c kao parametrom: a) kada je u obzir uzet uticaj zemljovoda; b) kada je zemljovod zanemaren.



Sl. 5.10 - Promena sopstvenih i međusobnih otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.8 za $a = 0.25 \text{ m}$, $b_s = 0.4 \text{ m}$, $b_1 = 0.2 \text{ m}$, $l_c = 2 \text{ m}$, $h_1 = 0.5 \text{ m}$, $h_2 = 1 \text{ m}$, $r_{k1} = 1 \text{ m}$, $r_{k2} = 2 \text{ m}$, $x_0 = 1 \text{ m}$, $N = 10$, $b = 0.483 \text{ m}$, $a_3 = a_4 = a_2 / 2 = 9.7 \text{ mm}$, $a_1 = 0.18 \text{ m}$ i $M = 3$ u funkciji ρ_1 i ρ_c kao parametrom.

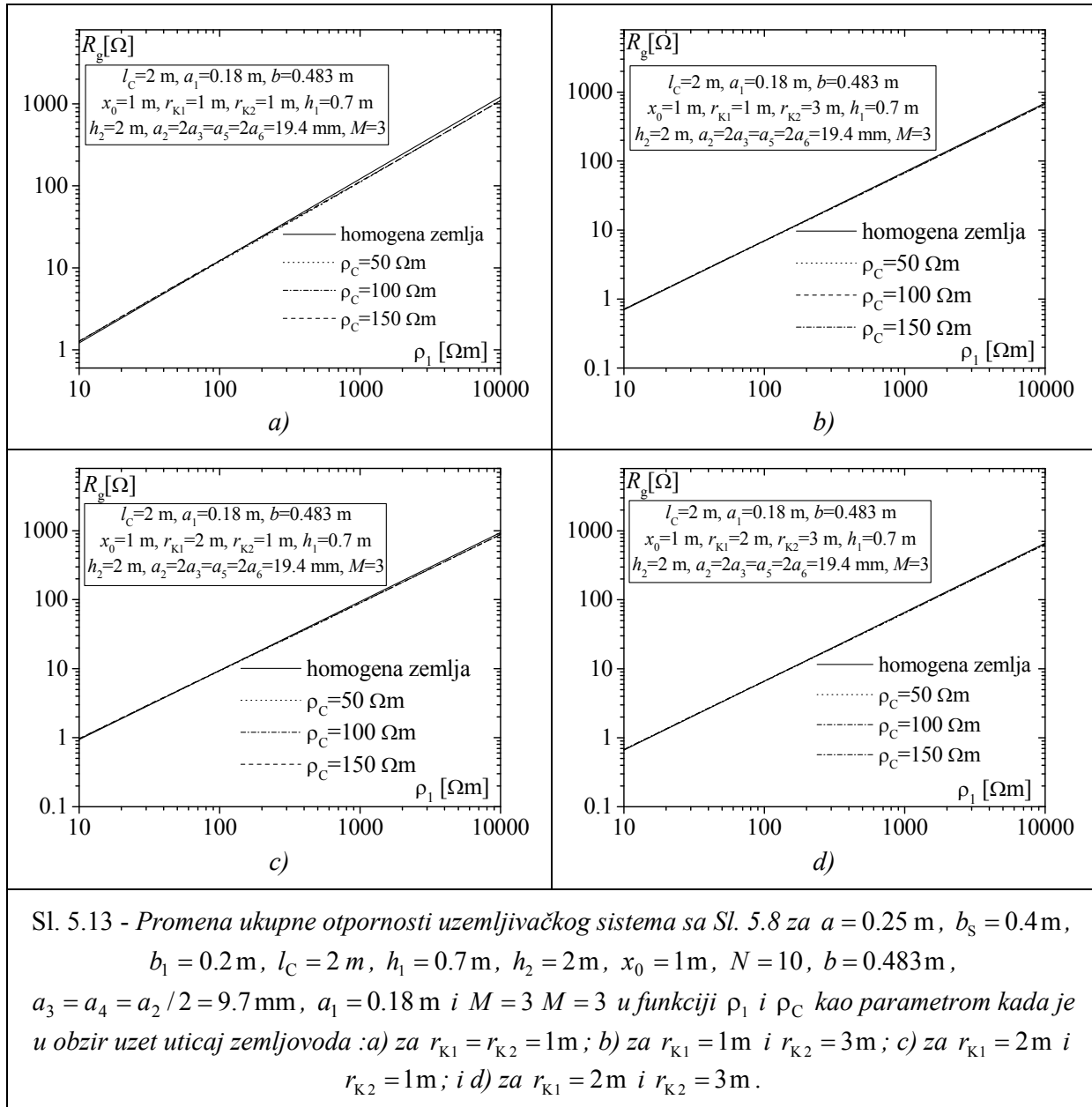


Sl. 5.11 - Promena ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.8 za $\rho_1 = 100 \Omega m$, $a = 0.25 m$, $b_s = 0.4 m$, $b_1 = 0.2 m$, $l_c = 2 m$, $h_1 = 0.5 m$, $h_2 = 1 m$, $r_{k1} = 2 m$, $x_0 = 1 m$, $N = 10$, $b = 0.483 m$, $a_3 = a_4 = a_2 / 2 = 9.7 mm$, $a_1 = 0.18 m$ i $M = 3$ u funkciji r_{k2} i ρ_c kao parametrom: a) kada je u obzir uzet uticaj zemljovoda; b) kada je zemljovod zanemaren.



Sl. 5.12 - Promena ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.8 za $a = 0.25 m$, $b_s = 0.4 m$, $b_1 = 0.2 m$, $l_c = 2 m$, $h_1 = 0.7 m$, $h_2 = 1 m$, $x_0 = 1 m$, $N = 10$, $b = 0.483 m$, $a_3 = a_4 = a_2 / 2 = 9.7 mm$, $a_1 = 0.18 m$ i $M = 3$ u funkciji ρ_1 i ρ_c kao parametrom kada je u obzir uzet uticaj zemljovoda: a) za $r_{k1} = r_{k2} = 1 m$; b) za $r_{k1} = 1 m$ i $r_{k2} = 3 m$; c) za $r_{k1} = 2 m$ i $r_{k2} = 1 m$; d) za $r_{k1} = 2 m$ i $r_{k2} = 3 m$.

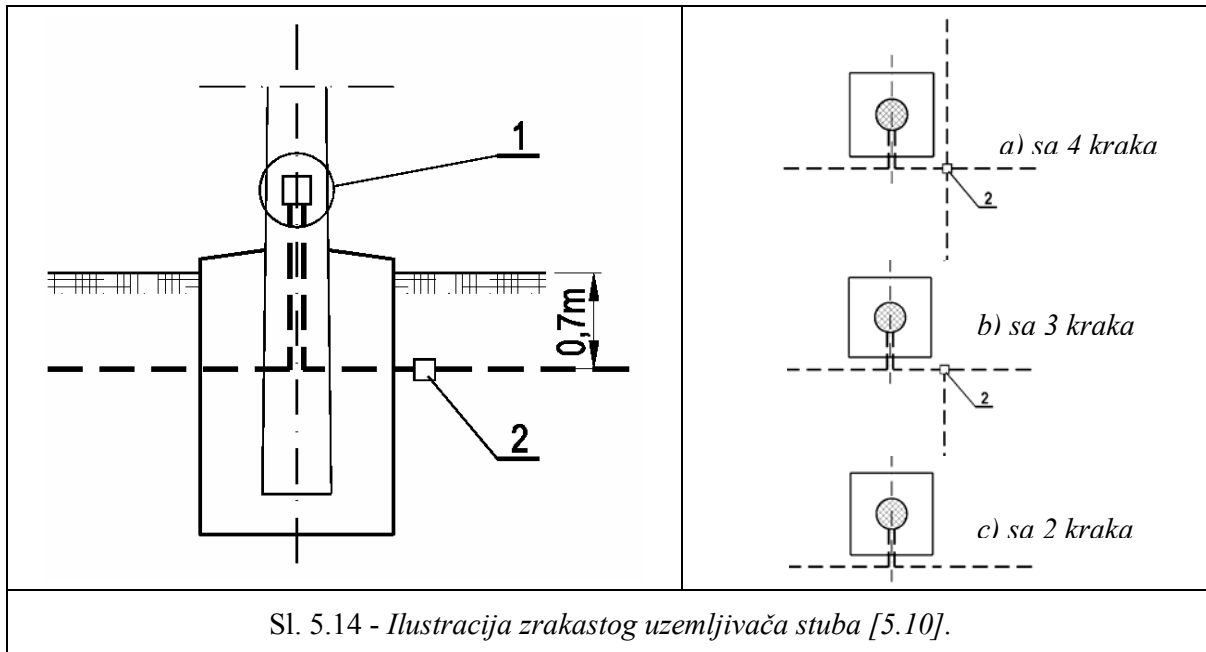
Promena ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.8 u funkciji promene specifične otpornosti tla ρ_1 i otpornošću betona ρ_C kao parametrom prikazana je na Sl. 5.12-5.13. Pri tome je $h_1 = 0.7 \text{ m}$ ($[5.10]$)², h_2 uzima vrednosti 1m (Sl. 5.12) i 2m (Sl. 5.13) i u obzir je uzet uticaj zemljovoda. Poluprečnik gornjeg obruča r_{K1} je 1m i 2m, dok r_{K2} uzima vrednosti 1m i 3m. Vrednosti ostalih parametara iste su kao i na Sl. 5.10. I ovde su realizovani grafici dobijeni zanemarivanjem uticaja temelja (homogena zemlja). Kao i u slučaju uzemljivačkog sistema sa jednim prstenom, Sl. 5.3, uticaj temelja na ukupnu otpornost uzemljivačkog sistema nije značajnije prisutan.



² U [5.5] za h_1 korišćena je vrednost 0.5 m, dok je u [5.10] ta vrednost 0.7 m. Kada se dubina ukopavanja kreće u navedenim granicama, njen uticaj na ukupnu otpornost uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.8 nije veliki.

5.4 SISTEM LINEIČNIH PROVODNIKA

Primenom varijacionog metoda biće određena otpornost zrakastog uzemljivača čija je geometrija opisana u Tehničkim preporukama ED Srbije [5.10], SI 5.14³. Isti uzemljivački sistem u ovom radu je već razmatran pod tačkom 4.3.3, ali bez razmatranja uticaja temelja. U proceduri izloženoj u ovom delu teksta, uticaj temelja uključen je u model primenom postupka iz tačke 5.1, pošto je je armatura smeštena u betonski temelj zamenjena ekvivalentnim vertikalnim provodnikom. Na taj način, matematički aparat neophodan za analizu opisanog uzemljivačkog sistema primenom modela koji uključuje uticaj temelja na karakteristike uzemljenja ostaje isti, dok se razlikuju se samo ulazni parametri neophodni za proračun.



5.4.1 Numerički rezultati

Pristup izložen u 4.3.1 ponovo je primenjen na rešavanje uzemljivačkog sistema stuba sa Sl. 5.14 (ilustracija preuzeta iz [5.10]) za vrednosti parametara iz [5.10]. Ovog puta u rešavanje sistema uključena je i procedura za određivanje uticaja betonskog temelja opisana u 5.1. Dimenzije i geometrija temelja iste su kao i slučaju analiza koje čine sadržaj odeljaka 5.1-5.3. Posmatra se dakle uzemljivački sistem formiran od vertikalne elektrode smeštene u betonski temelj, Sl. 5.1b, i zrakastog uzemljivača, Sl. 5.14. Pri tome su parametri vezani za sistem temelj-armatura (Sl. 5.1 a-b) $a_C = 7.5$ cm, $b_s = 0.4$ m, $b_l = 0.2$ m, i $l_C = 1.75$ m (u [5.10] nije određivan ekvivalentni poluprečnik armature već je naveden kao konkretna vrednost). Ekvivalentni poluprečnik cilindra je $b = 2b_s(1 + \sqrt{2})/4 = 0.483$ m, dok je ekvivalentni poluprečnik trakastog provodnika od koga je načinjen zrakasti uzemljivač $a_2 = 5$ mm. Dubina ukopavanja zrakastog uzemljivača je $h = 0.7$ m, a specifična otpornost okolnog tla $\rho_1 = 1/\sigma_1 = 10\Omega\text{m}$. Dužine provodnika trakastog uzemljivača su $L = 1$ m. Tačka u kojoj je smešten ukrсни komad kada se zrakasti uzemljivač sastoji od 3 ili 4 provodnika smeštena je na 1 m normalnog rastojanja od ose stuba [5.13].

Otpornost posmatranog uzemljivačkog sistema određena primenom varijacione formule (odeljak 4.3.1) različite stepene polinomske aproksimacije struje M (koji je isti za sve provodnike uključujući i temeljnu elektrodu) prikazana je u Tabeli 5.3. Pri tome specifična otpornost betona ρ_C

³ Sl. 5.14 identična je Sl. 4.7 i u ovom poglavlju pojavljuje se samo zbog lakšeg praćenja teksta.

uzima različite vrednosti. Broj provodnika uzemljivačkog sistema, uključujući i temeljni provodnik uzima vrednost $N_p = 3, 4, 5$. U prvom delu tabele prikazane su i vrednosti dobijene bez razmatranja uticaja betonskog temelja stuba ($\rho_C = \rho_1$), primenom polinomske aproksimacije za struju i procedure izložene u odeljku 5.1, (prethodno prikazane i u Tabeli 4.3).

Na Sl. 5.15-5.17 prikazane su ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.14a-c respektivno ($N_p = 5, 4, 3$) u funkciji dubine ukopavanja ukrsnog komada h i specifičnom otpornošću betona u koji je ukopana vertikalna elektroda ρ_1 (Sl. 5.1) kao parametrom. Odgovarajuće vrednosti parametara uzemljivača sa Sl. 5.14 i betonskog temelja sa Sl. 5.1 su $a_C = 7.5$ cm, $l_C = 1.75$ m, $a_2 = 5$ mm, $h = 0.7$ m, $\rho_1 = 100 \Omega m$, $b_s = 0.4$ m, $b_1 = 0.2$ m i $b = 0.483$ m (Sl. 5.1), dok dužina provodnika zrakastog uzemljivača L uzima vrednosti 1, 3 i 5 m. Primenjen je metod momenata, pri čemu su struje duž provodnika aproksimirane polinomom trećeg stepena ($M = 3$).

Na osnovu vrednosti prikazanih u Tabeli 5.3 i grafika sa Sl. 5.15-5.17 očigledno je da je uticaj betonskog temelja utoliko izraženiji ukoliko je manji broj elektroda zrakastog uzemljivača i ukoliko su one kraće što je i očekivano, jer je tada otpornost vertikalnog uzemljivača dominantnija. Sa povećanjem broja elektroda koje formiraju zrakasti uzemljivač, kao i sa povećanjem njihove dužine ovaj uticaj postaje značajno manji.

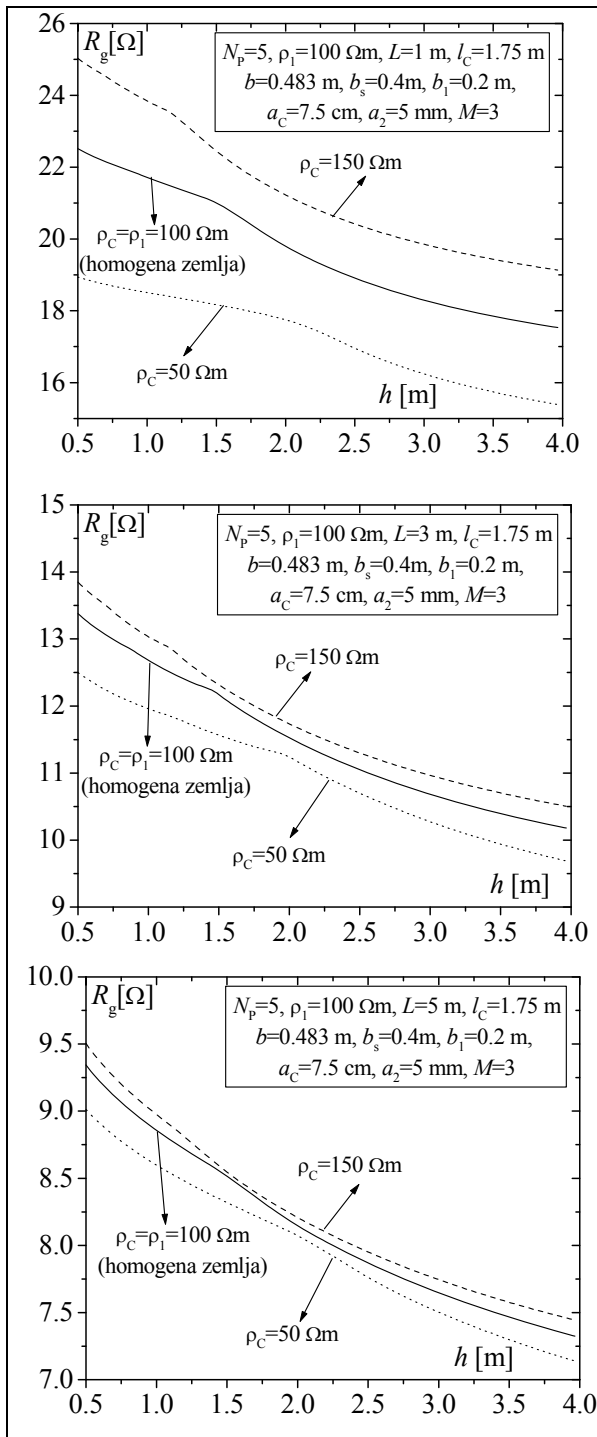
Tabela 5.3-Poređenje otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.14 za $a_C = 7.5$ cm, $l_C = 1.75$ m, $a_2 = 5$ mm, $h = 0.7$ m, $L = 1$ m, $\rho_1 = 10 \Omega m$ i parametre geometrije temelja, $b_s = 0.4$ m, $b_1 = 0.2$ m i $b = 0.483$ m (Sl. 5.1).

$R_g [\Omega]$ za $\rho_C = \rho_1$						
N_p	$M = 1$		$M = 2$		$M = 3$	
	PMM	Var. form.	PMM	Var. form.	PMM	Var. form.
3	2.992	2.857	2.763	2.716	2.732	2.688
4	2.469	2.400	2.380	2.348	2.359	2.330
5	2.308	2.262	2.232	2.204	2.215	2.188

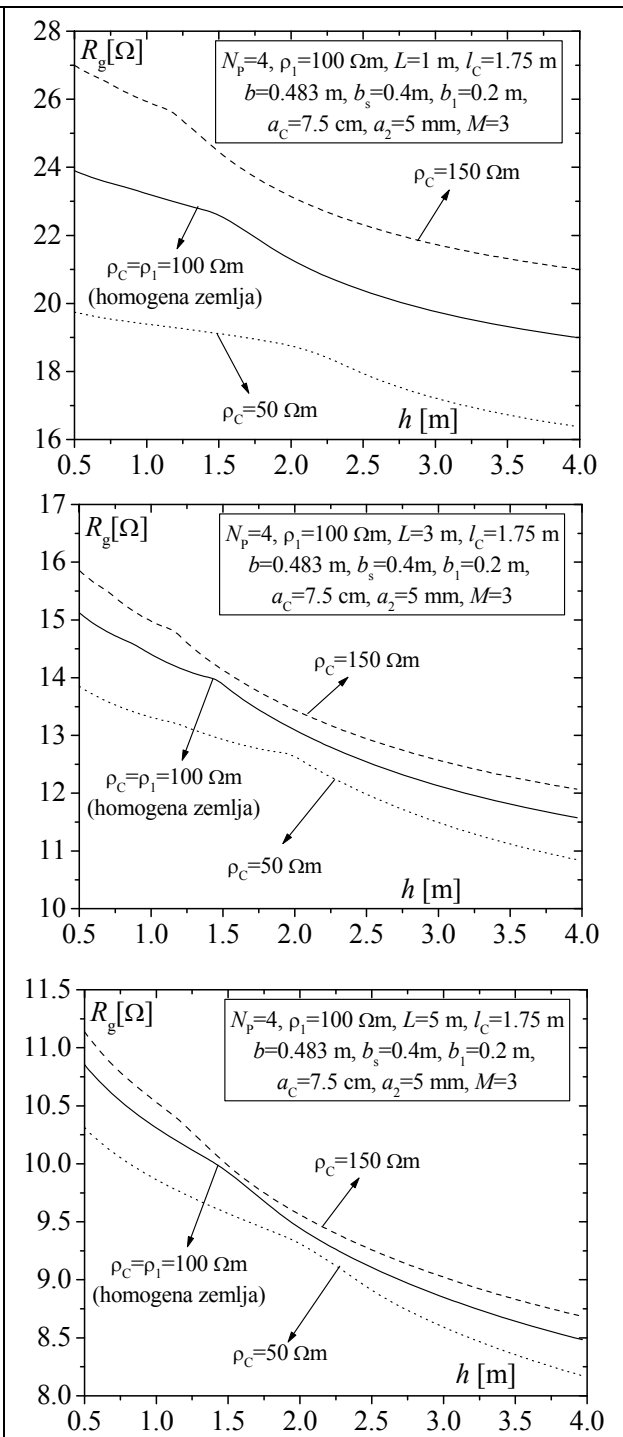
$R_g [\Omega], M = 1$				
N_p	$\rho_C = 50 \Omega m$	$\rho_C = 100 \Omega m$	$\rho_C = 150 \Omega m$	$\rho_C = \rho_1$
3	4.227	4.530	4.673	2.857
4	3.407	3.659	3.765	2.400
5	3.043	3.220	3.293	2.262

$R_g [\Omega], M = 2$				
N_p	$\rho_C = 50 \Omega m$	$\rho_C = 100 \Omega m$	$\rho_C = 150 \Omega m$	$\rho_C = \rho_1$
3	4.184	4.497	4.643	2.716
4	3.362	3.600	3.701	2.348
5	2.967	3.125	3.191	2.204

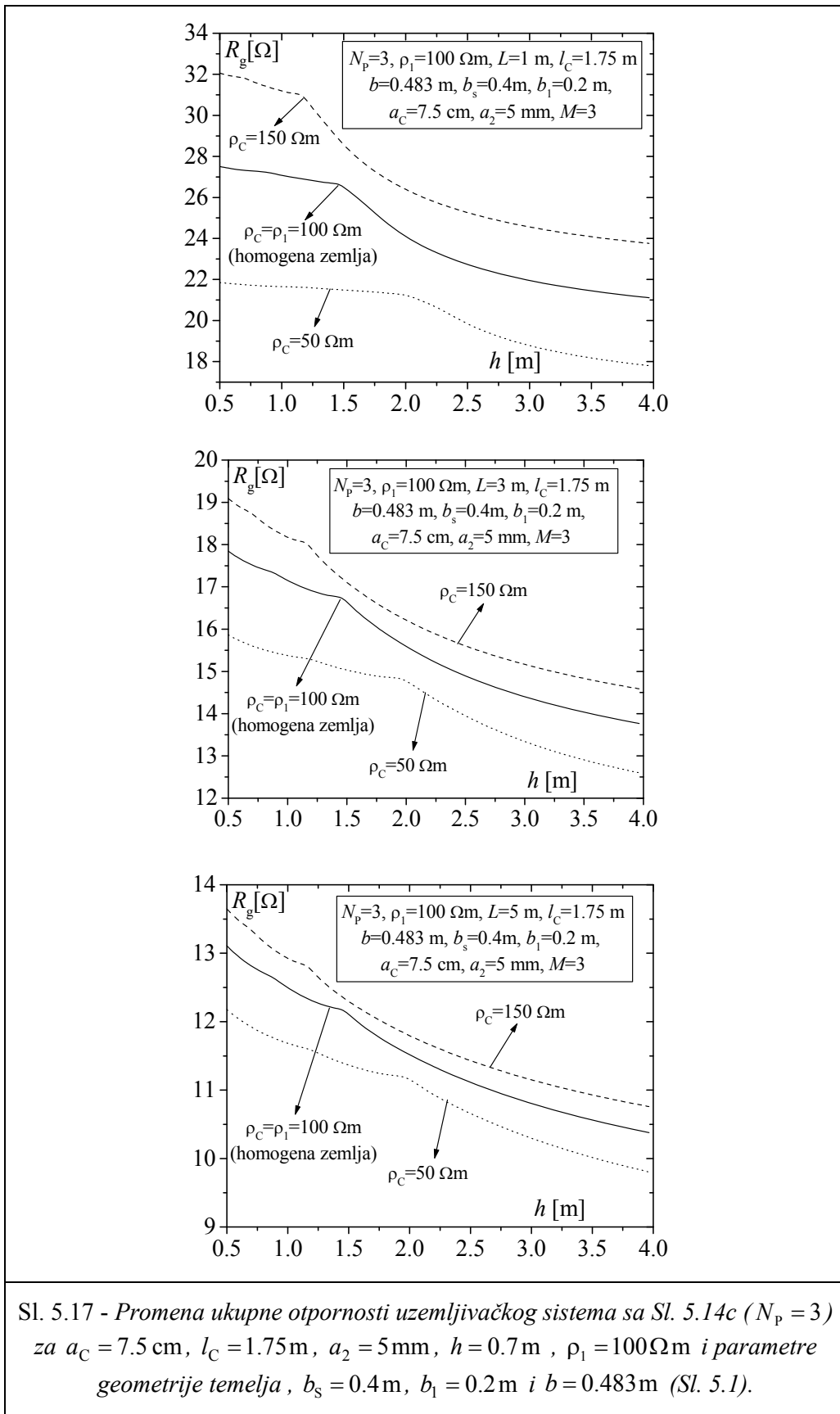
$R_g [\Omega], M = 3$				
N_p	$\rho_C = 50 \Omega m$	$\rho_C = 100 \Omega m$	$\rho_C = 150 \Omega m$	$\rho_C = \rho_1$
3	4.179	4.486	4.632	2.688
4	3.359	3.596	3.698	2.330
5	2.965	3.124	3.190	2.188



Sl. 5.15 - Promena ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.14a ($N_p = 5$) za $a_c = 7.5$ cm, $l_c = 1.75$ m, $a_2 = 5$ mm, $h = 0.7$ m, $\rho_1 = 100 \Omega\text{m}$ i parametre geometrije temelja, $b_s = 0.4$ m, $b_1 = 0.2$ m i $b = 0.483$ m (Sl. 5.1).



Sl. 5.16 - Promena ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 5.14b ($N_p = 4$) za $a_c = 7.5$ cm, $l_c = 1.75$ m, $a_2 = 5$ mm, $h = 0.7$ m, $\rho_1 = 100 \Omega\text{m}$ i parametre geometrije temelja, $b_s = 0.4$ m, $b_1 = 0.2$ m i $b = 0.483$ m (Sl. 5.1).



5.5 LITERATURA

- [5.1] A.B.Корсунцев, К.И.Покровская: "Методика расчёта сопротивлений заземления железобетонных фундаментов", Ел. станций, 1968, No.1.
- [5.2] T. Radojičić, *Betonske konstrukcije*, Prosveta, Niš, 1981.
- [5.3] M. Chouteau, S. Beaulieu, *An investigation on application of the electrical resistivity tomography method to concrete structures*, Geophysics 2002, Los Angeles, CA, USA, April 15-19, dostupno na:
http://www.dot.ca.gov/hq/esc/geotech/gg/geophysics2002/050chouteau_resistivity_tomography.pdf
- [5.4] J. Ribič, J. Podlipnik, "Uzemljenje i negativni učinci upotrebe pocinčanih uzemljivača u temeljima objekata", Web prezentacija Kompanije Hermi, dostupno na:
<http://www.hermi.si/bih/Projektanti/UzemljenjeinegativniuC4%8Dinciupotrebe/tabid/442/Default.aspx>
- [5.5] P. D. Rančić, "Jedan jednostavan model cilindričnog temeljnog uzemljivača stuba", Tehnički izveštaj, TIL-GS-04, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2007.
- [5.6] B. Popović, "Polynomial Approximation of Current Along Thin Symmetrical Cylindrical Dipole", Proc. IEE, Vol. 117, No 5, 1970, pp 873-878.
- [5.7] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, The Macmillan Company, New York, 1969.
- [5.8] P. D. Rančić, "Varijaciona analiza lineičnog uzemljivačkog sistema (US)", Tehnički izveštaj, TIL-GS-02, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2007.
- [5.9] Web prezentacija firme ELEKTROIZGRADNJA, Bajina Bašta, "Armirano betonski montažni temelji EBB-MT1", dostupno na:
http://www.ebb.co.yu/temeljihtml_files/armirano%20betonski%20montažnii%20temelji%20EBB-MT1.htm
- [5.10] Tehnička preporuka br 9, ZBIRKA TEHNIČKIH PREPORUKA ED SRBIJE, Beograd 2000.
- [5.11] Lj. Gerić, "Karakteristike prstenastih uzemljivača", JUNAKO CIGRE, Ref. 22-07, str. 93-110, 1977.
- [5.12] J. Nahman, *Uzemljenje neutralne tačke distributivnih mreža*, Naučna knjiga, Beograd, 1980.
- [5.13] T. Bojković, N. Mijušković, "Karakteristike prstenastih i zrakastih uzemljivača za stubove nadzemnih vodova 10 (20) kV", *XIV Savetovanje JUKO CIGRE*, Sarajevo 1979, Ref. 322.01.
- [5.14] P. D. Rančić, "Antenski model za kvazistacionarnu analizu uzemljivačkog sistema stuba", Tehnički izveštaj, TTL-GS-8, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2007.
- [5.15] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "Coupled Linear Grounding Systems: Quasistationary Antenna Model", *XLII International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies - ICEST 2007*, June 24-27, 2007, Ohrid, Macedonia, Proc. of papers, Vol. I, pp 91-94.

6. UZEMLJIVAČKI SISTEMI U PRISUSTVU POLUSFERIČNE POLUPROVODNE NEHOMOGENOSTI TLA

Kao što je već rečeno u prethodnom izlaganju, tačnost analize uzemljivačkih sistema između ostalog zavisi i od toga u kojoj meri je prilikom istraživanja razmatrana nehomogenost tla u njihovoj okolini. Česti su slučajevi kada se prisutne nehomogenosti mogu aproksimirati poluprovodnom nehomogenošću. Problemi ove vrste tako se javljaju u slučaju stubnog uzemljivača pri čemu se temelj aproksimira polusferičnom nehomogenošću tla. Model opisan i analiziran u ovom radu moguće je primeniti i na određivanje uticaja većih rupa u zemlji (bara, manje jezero) ispunjenih vodom na uzemljivačke sisteme u njihovoj okolini, pri čemu se ovakva ulegnuća u tlu mogu smatrati polusferičnim nehomogenostima. U graničnom slučaju kada se polusfera smatra idealno provodnom, model se može primeniti i na analizu uzemljivačkih sistema u okolini silosa ili rezervoara čije dno ima polusferični oblik.

U ovom poglavlju izloženi su rezultati dobijeni primenom različitih metoda opisanih u 3. poglavlju rada na uzemljivačke sisteme čije su elektrode smeštene unutar i/ili izvan polusferične poluprovodne nehomogenosti, prethodno modelovane u tački 2.2.3. Polusfera je poluprečnika r_s načinjena od linearnog, izotropnog i homogenog poluprovodnog materijala, poznatih električnih parametara σ_s , $\epsilon_s = \epsilon_0 \epsilon_{rs}$ i $\mu_s = \mu_0$. Okolna sredina se takođe smatra linearnim izotropnim i homogenim domenom parametara σ_1 , $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1}$ i $\mu_1 = \mu_0$.

Pri tome su korišćeni izrazi za električni skalar potencijal formirani na osnovu Grinovih funkcija za tačkasti strujni izvor smešten u homogenoj zemlji, odnosno unutar ili izvan polusferične nehomogenosti izloženih u tački 2.2. Ove funkcije već su navedene u poglavlju 2.3. Kao što je to već objašnjeno u uvodnom delu, iako su početni rezultati istraživanja vezanih za ovaj rad dobijeni primenom modela "Veličković", rezultati prezentovani u ovom poglavlju dobijeni su analizom kojom je uticaj poluprovodne polusferične nehomogenosti na tačkasti strujni izvor opisan modelom "Rančić", razvijenim tokom istraživanja.

U PRILOGU 3 objašnjeno je da je uticaj vrednosti dielektrične konstante tla na karakteristike uzemljivačkih sistema zanemarljiv (imaginarni deo kompleksne specifične provodnosti je veoma mali u odnosu na realnu specifičnu provodnost). To je i razlog što su u ovoj tački prezentovani kao značajni samo rezultati koji se odnose na realni deo potencijala i impedanse uzemljivačkih sistema.

6.1 USAMLJENI LINEIČNI PROVODNIK

Posmatra se usamljena lineična elektroda smeštena u okolini poluprovodne polusferične nehomogenosti, Sl. 6.1 ([6.1]). Elektroda je dužine l_1 , poluprečnika poprečnog preseka a_1 , $a_1 \ll l_1$ i nalazi se na dubini h od površine tla. Rastojanje x_0 i ugao θ_1 na Sl. 6.1 definišu položaj elektrode u odnosu na polusferičnu nehomogenost. Kao što je to već objašnjeno u tački 2.3.2, električni skalar potencijal u okolini elektrode u tačkama izvan (Sl. 6.1a) i unutar nehomogenosti (Sl. 6.1b) određuje se na osnovu izraza

$$\varphi_1(\vec{r}) = \int_{l_1} dI(\vec{r}') G_{11}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (6.1.1)$$

$$\varphi_s(\vec{r}) = \int_{l_1} dI(\vec{r}') G_{s1}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad r < r_s. \quad (6.1.2)$$

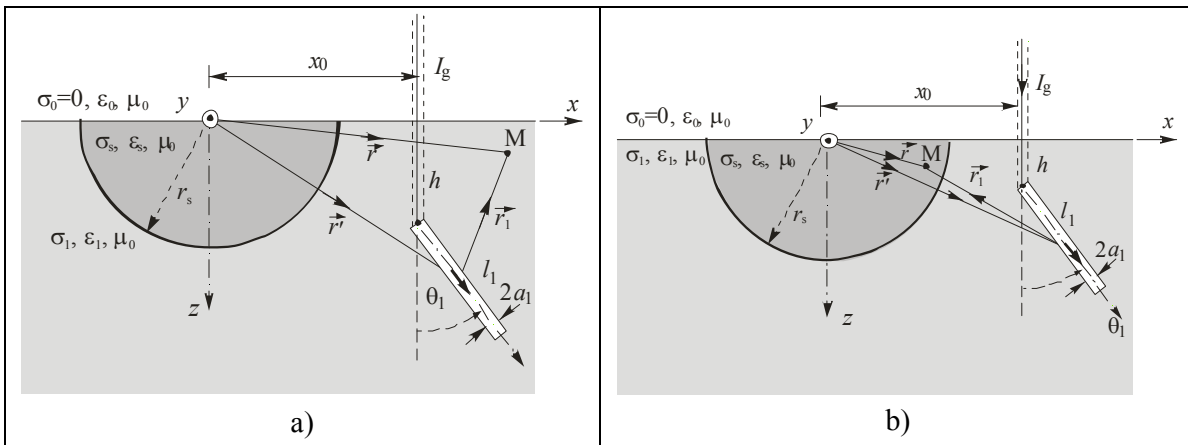
pri čemu indeksi u oznakama za potencijal odgovaraju domenu u kojem se potencijal određuje ("s"-sfera, "1"-okolna sredina). Grinove funkcije u prethodnim izrazima određuju se na osnovu jednačini (2.3.26) i (2.2.184-2.2.185)

$$G_{11}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\varphi_{11}^R}{I_T} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{R_{1s}r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \frac{r_s}{r} \ln \left(\frac{r - r'' \cos \alpha + r_2}{2r} \right) \right] + \quad r > r_s \text{ i } (6.1.3)$$

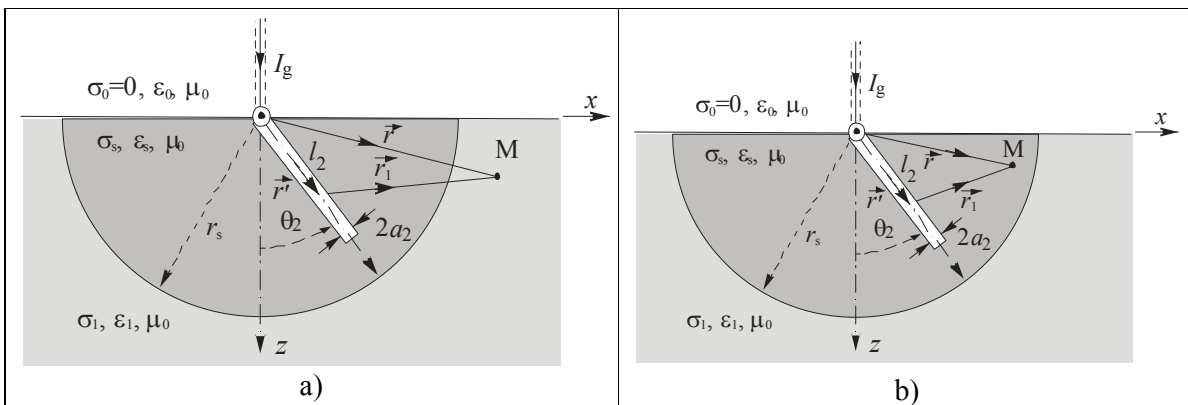
$$+ \frac{R_{10}I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{r_{1i}} + \frac{R_{1s}r_s}{r'} \left(\frac{1}{r_{2i}} - \frac{1}{r} \right) + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \frac{r_s}{r} \ln \left(\frac{r - r'' \cos \alpha_i + r_{2i}}{2r} \right) \right],$$

$$G_{s1}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\varphi_{s1}^R}{I_T} = \frac{I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - \frac{R_{1s}}{r'} + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r' - r \cos \alpha + r_1}{2r'} \right) \right] + \quad r < r_s. \quad (6.1.4)$$

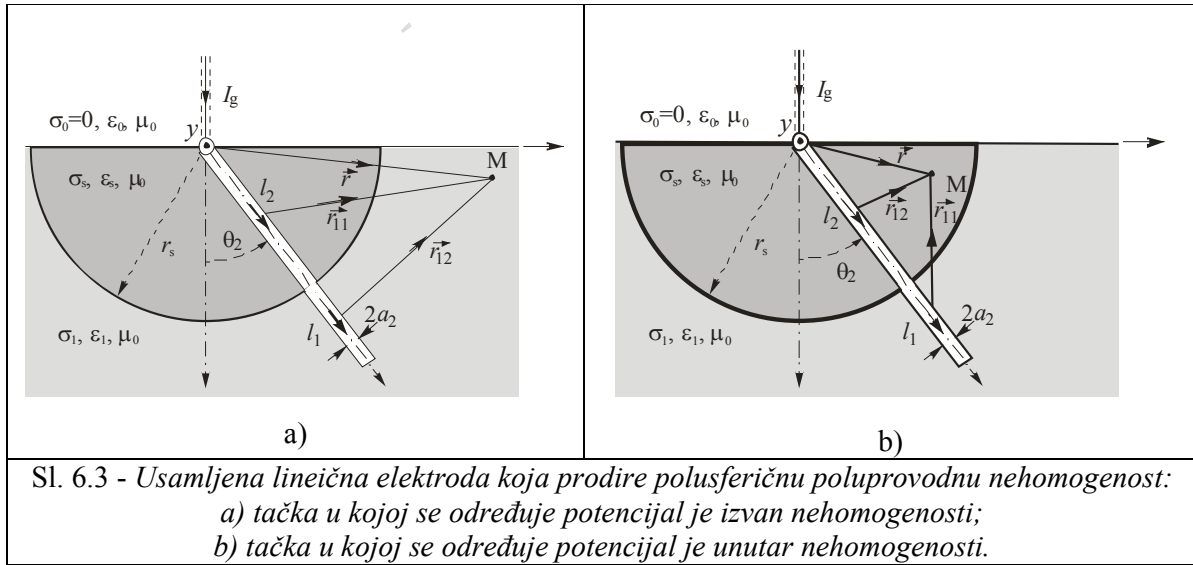
$$+ \frac{R_{10}I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_{1i}} - \frac{R_{1s}}{r'} + \frac{R_{1s}T_{1s}}{2r'} \ln \left(\frac{r' - r \cos \alpha_i + r_{1i}}{2r'} \right) \right],$$



Sl. 6.1 - Usamljena lineična elektroda izvan polusferične poluprovodne nehomogenosti:
 a) tačka u kojoj se određuje potencijal je izvan nehomogenosti;
 b) tačka u kojoj se određuje potencijal je unutar nehomogenosti.



Sl. 6.2 - Usamljena lineična elektroda unutar polusferične poluprovodne nehomogenosti:
 a) tačka u kojoj se određuje potencijal je izvan nehomogenosti;
 b) tačka u kojoj se određuje potencijal je unutar nehomogenosti.



Na sličan način, izrazi za potencijal u okolini usamljene lineične elektrode dužine l_2 i poluprečnika poprečnog preseka a_2 , $a_2 \ll l_2$ smeštene unutar poluprovodne nehomogenosti sa početkom u njenom centru, u tačkama van (Sl. 6.2a) i unutar (Sl. 6.2b) polusferične nehomogenosti imaju oblik

$$\varphi_1(\vec{r}) = \int_{l_2} dI(\vec{r}') G_{1s}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (6.1.5)$$

$$\varphi_s(\vec{r}) = \int_{l_2} dI(\vec{r}') G_{ss}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad r < r_s. \quad (6.1.6)$$

Pri tome su Grinove funkcije formirane na osnovu (2.3.26) i (2.2.190-2.2.191),

$$G_{1s}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\varphi_{1s}^R(\vec{r}, \vec{r}')}{I_T} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_1} - R_{1s} \frac{1}{r} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r} \ln \left(\frac{r - r' \cos \alpha + r_1}{2r} \right) \right] + \frac{R_{s0} I_T}{4\pi\sigma_1} \left[T_{1s} \frac{1}{r_{1i}} - R_{1s} \frac{1}{r} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r} \ln \left(\frac{r - r' \cos \alpha_i + r_{1i}}{2r} \right) \right], \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (6.1.7)$$

$$G_{ss}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\varphi_{ss}^R(\vec{r}, \vec{r}')}{I_T} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1} r_1} - \frac{R_{1s} T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r' r_2} - \frac{R_{1s}}{r_s} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r_s} \ln \left(\frac{r'' - r \cos \alpha + r_2}{2r''} \right) \right] + \frac{R_{s0} I_T}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{T_{1s}}{T_{s1} r_{1i}} - \frac{R_{1s} T_{1s}}{T_{s1}} \frac{r_s}{r' r_{2i}} - \frac{R_{1s}}{r_s} + \frac{R_{1s} T_{1s}}{2r_s} \ln \left(\frac{r'' - r \cos \alpha_i + r_{2i}}{2r''} \right) \right], \quad r < r_s. \quad (6.1.8)$$

Konačno, ako se posmatra lineična elektroda koja prodire nehomogenost čiji su položaj i dimenzije prikazani na Sl. 6.3, potencijal u njenoj okolini može se izraziti kao

$$\varphi_1(\vec{r}) = \int_{l_1} dI(\vec{r}') G_{11}(\vec{r}, \vec{r}') + \int_{l_2} dI(\vec{r}') G_{1s}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (6.1.9)$$

$$\varphi_s(\vec{r}) = \int_{l_1} dI(\vec{r}') G_{s1}(\vec{r}, \vec{r}') + \int_{l_2} dI(\vec{r}') G_{ss}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad r < r_s \quad (6.1.10)$$

gde je l_1 dužina dela elektrode koji se nalazi izvan nehomogenosti, dok je l_2 dužina dela elektrode smeštenog unutar polusfere.

Grinove funkcije u (6.1.9)-(6.1.10) prethodno su date jednačinama (6.1.3)-(6.1.4) i (6.1.7)-(6.1.8)¹. U (6.1.1)-(6.1.2) i (6.1.9)-(6.1.10) sa $dI(\vec{r}') = I_{ot}(\vec{r}')ds'$ označena je ukupna struja oticanja sa dela lineične elektrode ds' , pri čemu je $I_{ot}(\vec{r}') = -\partial I(s')/\partial s'$ podužna gustina struje oticanja sa lineične elektrode, dok je $I(s')$ longitudinalna struja duž ose provodnika. Sa $\underline{\sigma}_k = \sigma_k + j\omega\epsilon_k$, $k = 0,1,s$ obeležene su kompleksne specifične provodnosti domena, dok su ostale oznake vezane za geometriju razmatranih problema već prethodno definisane u odeljku 2.2.3.

Takođe, koeficijenti refleksije R_{nk} i transmisije T_{nk} u prethodnim izrazima definisani su kao u ranijem izlaganju,

$$R_{nk} = -R_{kn} = T_{nk} - 1 = -T_{kn} + 1 = \frac{\underline{\sigma}_n - \underline{\sigma}_k}{\underline{\sigma}_n + \underline{\sigma}_k}, \quad n, k = 0, 1, s. \quad (6.1.11)$$

Kako se radi o kvazistacionarnoj analizi, kao i u prethodnim slučajevima, u konkretnim izračunavanjima je usvojeno da je $R_{i0} \cong 1$, $i = 1, s$.

6.1.1 Određivanje impedanse i karakterizacija usamljene lineične elektrode

6.1.1.1 Metod odsečaka

Procedura izložena u ovom tekstu analogna je onoj iz odeljka 4.1.3. Lineični provodnik deli se na N jednakih odsečaka dužine $\Delta s = l/N$. Podešavanjem vrednosti potencijala u N tačaka na sredini odsečaka $s_n = (n - 0.5) * \Delta s$, $n = 1, 2, \dots, N$, (definisanih vektorima položaja \vec{r}_n , $n = 1, 2, \dots, N$) formira se sistem jednačina

$$\varphi = U = \sum_{n=1}^N \frac{I_n}{\Delta_n} \int_{\Delta_n} G(\vec{r}_n, \vec{r}') dl, \quad (6.1.12)$$

U prethodnom izrazu Δ_n i I_n predstavljaju dužinu i ukupnu struju oticanja sa n -tog odsečka, $n = 1, \dots, N$, dok je $G(\vec{r}')$ jedna od Grinovih funkcija zadatih izrazima (6.1.3)-(6.1.4) i (6.1.7)-(6.1.8). Izbor Grinove funkcije zavisi od tipa analizirane uzemljivačke elektrode. Rešenje formiranog sistema jednačina (6.1.12) su ukupne struje oticanja po segmentima, I_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Impedansa uzemljivača određuje se na osnovu izraza

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g = U/I_g = U / \sum_{n=1}^N I_n, \quad (6.1.13)$$

gde je ukupna struja koja utiče u provodnik $I_g = \sum_{n=1}^N I_n$. Nakon što se odredi približna raspodela podužne gustine struje oticanja sa provodnika $I_{ot}(\vec{r}') = -\partial I(s')/\partial s'$, na n -tom odsečku, $n = 1, 2, \dots, N$, kao

$$I_{ot} \cong \frac{I_n}{\Delta_n}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (6.1.14)$$

može se odrediti i približna raspodela longitudinalne struje $I(s')$. Ako se sa s_n i s_{n+1} označe početna i krajnja tačka n -tog segmenta, definisanog sa $s_n \leq s \leq s_{n+1}$ dužine $\Delta s = (s_{n+1} - s_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$, longitudinalna struja na n -tom odsečku $I_{(n)}(s')$, $n = 1, 2, \dots, N$ je

¹ U daljem tekstu biće primenjen samo model "Rančić", pa će indeks "R" u oznakama za Grinove funkcije biti izostavljen.

$$I_{(n)}(s') = -I_n(s' - s_{n-1}) + I_{n-1}s_{n-1}, \quad n = 2, \dots, N \quad \text{i} \quad (6.1.15a)$$

$$I_{(1)}(s') = -I_1s' + I_g. \quad (6.1.15b)$$

Indeks je u oznaci longitudinalne struje stavljen u zagradu da bi se razlikovao od indeksa kojim su označene ukupne struje oticanja na svakom od segmenata ponaosob, I_n , $n = 1, 2, \dots, N$.

6.1.1.2 Polinomska raspodela longitudinalne struje-metod podešavanja u tačkama

Kao i u slučaju usamljene lineične elektrode u homogenoj zemlji, odeljak 4.1.4, raspodela struje pretpostavlja se u formi polinoma M -tog stepena

$$I(s') = \sum_{m=0}^M I_m \left(\frac{s'}{l} \right)^m, \quad (6.1.16)$$

gde je l dužina posmatrane elektrode (l_1 , l_2 ili $l_1 + l_2$ za elektrodu sa Sl. 6.3). Od ukupno $M+1$ jednačina neophodnih za određivanje nepoznatih koeficijenata I_m , $m = 0, 1, \dots, M$, jedna se formira iz uslova nulte struje na kraju provodnika

$$I(l) \cong 0, \quad (6.1.17)$$

dok se ostalih M jednačina formira podešavanjem vrednosti potencijala u tačkama na površini provodnika definisanih koordinatama,

$$S_n = \frac{n}{M+1} l, \quad n = 1, 2, \dots, M. \quad (6.1.18)$$

Kada su poznati koeficijenti I_m , $m = 0, 1, \dots, M$, dobijeni rešavanjem formiranog sistema jednačina, za impedansu elektrode dobija se

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g = \frac{U}{I_g} = \frac{U}{I(s'=0)} = \frac{U}{I_0}, \quad (6.1.19)$$

dok je raspodela struje oticanja,

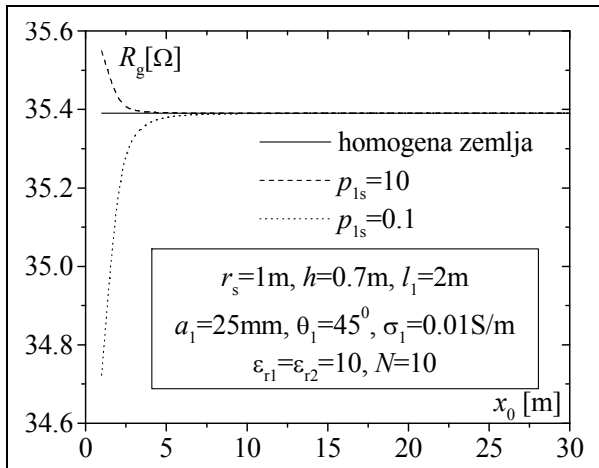
$$I_{ot}(\vec{r}') = -\partial I(s') / \partial s' = -\sum_{m=1}^M \frac{m}{l} I_m \left(\frac{s'}{l} \right)^{m-1}, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (6.1.20)$$

6.1.2 Numerički rezultati

6.1.2.1 Lineična elektroda izvan poluprovodne nehomogenosti

Karakterizacija usamljene lineične elektrode sa Sl. 6.1 izvršena je primenom metoda odsečaka (tačka 6.1.1.1). U cilju verifikacije metoda, dobijeni rezultati upoređeni su sa rezultatima analize usamljene elektrode u homogenoj, odnosno sektoralnoj zemlji.

Na Sl. 6.4 prikazana je promena otpornosti uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.1 u funkciji rastojanja od centra nehomogenosti x_0 i upoređena sa otpornošću elektrode ukopane u homogenu zemlju ($\underline{\sigma}_1 = \underline{\sigma}_s$) (odeljak 4.1). Proračun je izveden metodom odsečaka (tačke 4.1.3 i 6.1.1.1), za $N = 10$ segmenata. Pri tome je $l_1 = 2 \text{ m}$, $r_s = 1 \text{ m}$, $h = 0.7 \text{ m}$, $\theta_1 = 45^\circ$, $r_0 = 25 \text{ mm}$, $\sigma_1 = 0.01 \text{ S/m}$, $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 10$, dok je odnos $p_{1s} = \sigma_1 / \sigma_s$ parametar. Sa udaljavanjem od nehomogenosti, otpornost uzemljivača teži vrednosti otpornosti usamljene elektrode u homogenoj zemlji, tj. uticaj nehomogenosti se smanjuje.



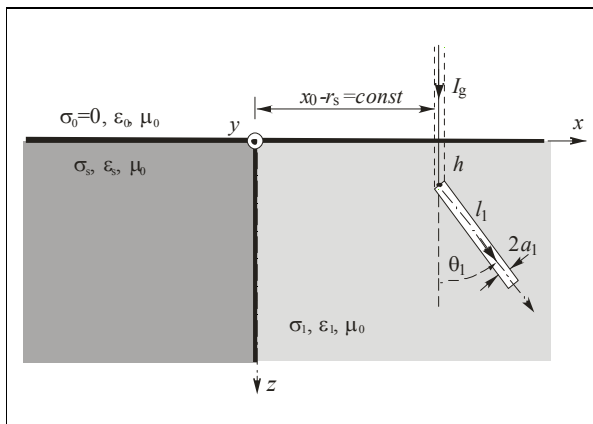
Sl. 6.4 – Otpornost uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.1 u funkciji od x_0 sa odnosom $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ kao parametrom.

Promena otpornosti elektrode sa Sl. 6.1 u funkciji vrednosti poluprečnika polusferične nehomogenosti r_s , upoređena je sa vrednošću otpornosti elektrode ukopane u sektoralnu zemlju ([6.2], [6.3]) na rastojanju $x_0 - r_s = 1\text{m}$ od nehomogenosti. Ostali parametri koji definišu položaj elektrode su prikazani na Sl. 6.5. Grafici dobijeni primenom metode odsečaka (pri čemu je za sektoralnu zemlju korišćen izraz za potencijal (8.11.1) iz PRILOGA 11), prikazani su na Sl. 6.5b. Vrednosti parametara su $h = 0.7\text{m}$, $\theta_1 = 45^\circ$, $a_1 = 25\text{mm}$, $\sigma_1 = 0.01\text{S/m}$, $\varepsilon_{r1} = 10$ i $\varepsilon_{r2} = 10$, dok je odnos $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s = 10$. Sa povećanjem poluprečnika r_s otpornost uzemljivača teži vrednosti otpornosti elektrode ukopane u sektoralnu zemlju sa Sl. 6.6.

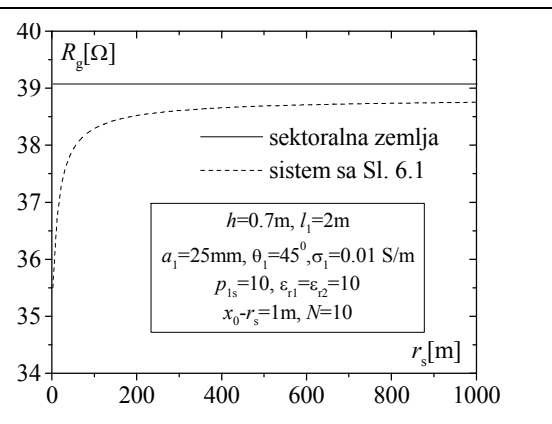
Na Sl. 6.7 prikazana je raspodela potencijala duž x -ose u okolini uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.1, za vrednosti parametara $l_1 = 2\text{m}$, $r_s = 1\text{m}$, $x_0 = 1.5\text{m}$, $a_1 = 25\text{mm}$, $h = 0.7\text{m}$, $\theta_1 = 45^\circ$, $\sigma_1 = 0.01\text{S/m}$ i $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 10$. Metod odsečaka primenjen je za $N = 10$ odsečaka, dok je p_{1s} parametar koji uzima različite vrednosti. Maksimum vrednosti potencijala nalazi se u tačkama na površini tla koje se nalaze iznad elektrode, što je očekivano ponašanje ove raspodele.

Otpornost iste elektrode u funkciji ugla θ_1 , prikazana je na Sl. 6.8, dok su vrednosti ostalih parametara iste kao i na Sl. 6.7.

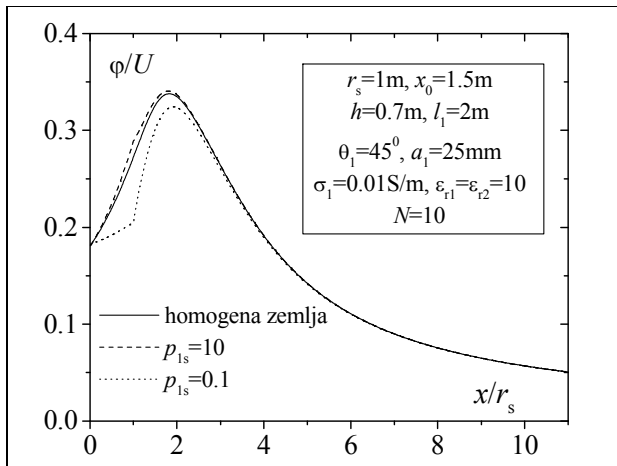
Raspodela struje oticanja I_{ot} sa posmatrane elektrode prikazana je na Sl. 6.9. Pri tome je $r_s = 1\text{m}$, $x_0 = 2\text{m}$, $h = 0.7\text{m}$, $\theta_1 = 45^\circ$, $\sigma_1 = 0.01\text{S/m}$, $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 10$, $l_1 = 2\text{m}$, $a_1 = 25\text{mm}$ i $p_{1s} = 10$, dok je metod odsečaka primenjen sa $N = 30$ segmenata, a napon na površini elektrode $U = 1\text{V}$. Za iste vrednosti parametara, određena je raspodela longitudinalne struje procedurom iz tačke 6.1.1.1 ($N = 30$ odsečaka) i u polinomskoj formi (6.1.16) trećeg stepena ($M = 3$). Ovako određene raspodele predstavljene su na Sl. 6.10. Očigledno je da raspodela struje oticanja ima očekivane maksimume na krajevima provodnika, dok je longitudinalna struja u oba slučaja približno linearna funkcija.



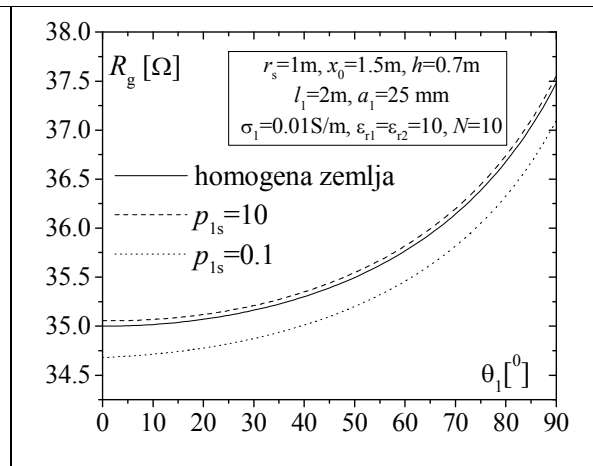
Sl. 6.5 - Usamljena lineična elektroda smeštena u sektoralnoj zemlji.



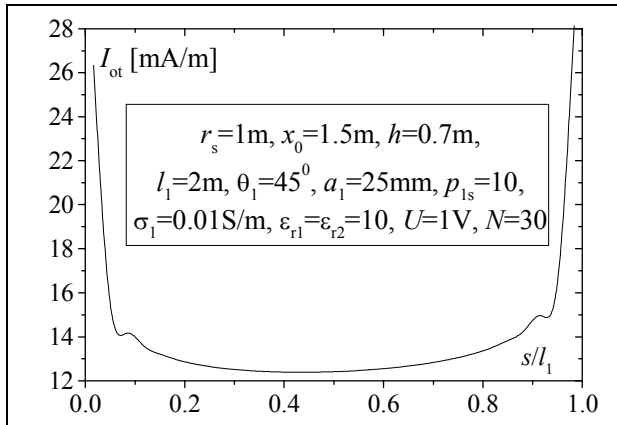
Sl. 6.6 - Otpornost uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.1 u funkciji poluprečnika r_s i otpornost elektrode ukopane u sektoralnu zemlju.



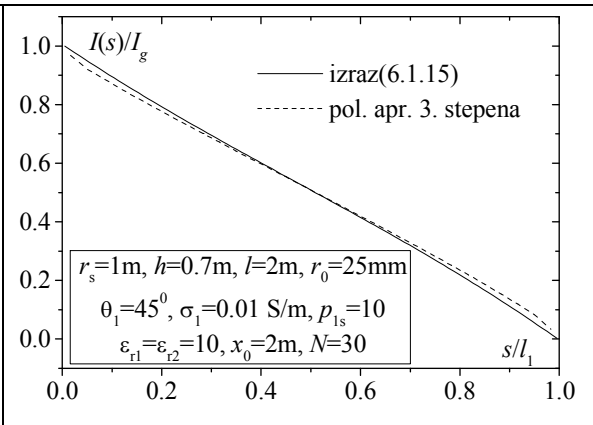
Sl. 6.7. - Raspodela potencijala na površini tla u okolini uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.1 i odnosom $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ kao parametrom.



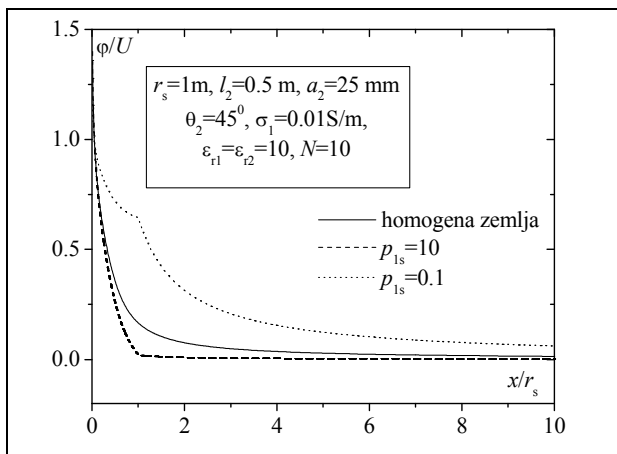
Sl. 6.8 - Otpornost uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.1 u funkciji ugla θ_1 i odnosom $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ kao parametrom.



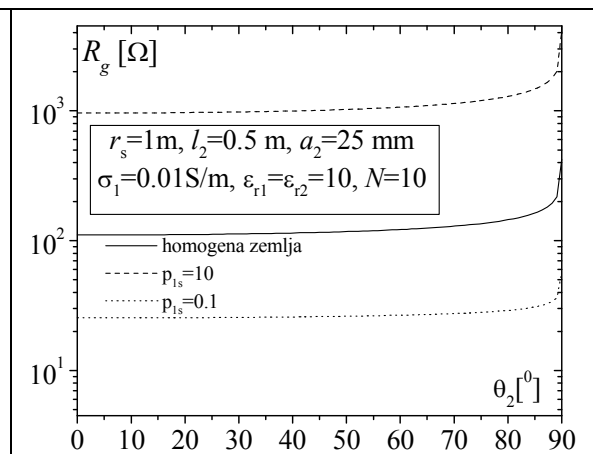
Sl. 6.9 - Raspodela struje oticanja uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.1.



Sl. 6.10 - Raspodela longitudinalne struje duž uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.1, određena metodom odsečaka i procedurom iz 6.1.1.2.



Sl. 6.11 - Raspodela potencijala na površini tla u okolini uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.2 i odnosom $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ kao parametrom.



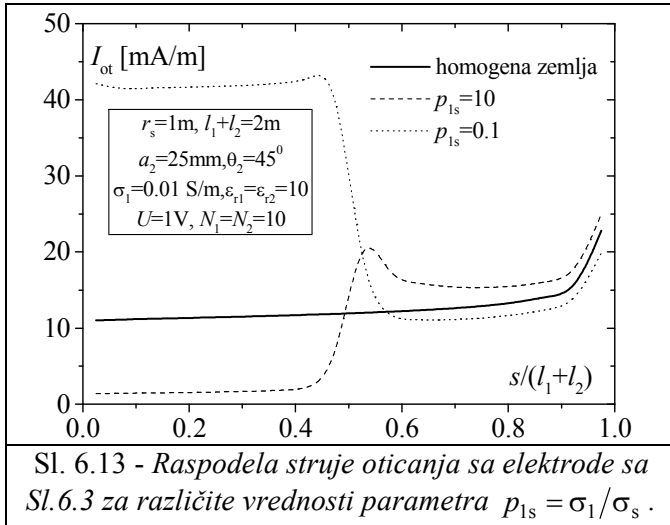
Sl. 6.12 - Otpornost uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.2 u funkciji ugla θ_2 i odnosom $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ kao parametrom.

6.1.2.2 Lineična elektroda unutar poluprovodne nehomogenosti

Na Sl. 6.11 prikazana je raspodela potencijala u okolini uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.2. Vrednosti parametara su $r_s = 1\text{ m}$, $\theta_2 = 45^\circ$, $\sigma_1 = 0.01\text{ S/m}$ i $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 10$. Dužina provodnika je $l_2 = 0.5\text{ m}$, poluprečnik poprečnog preseka $a_2 = 25\text{ mm}$, dok je procedura izložena u tački 6.1.1.1 primenjena na $N = 10$ odsečaka. Na grafiku se može uočiti singularna tačka na površini tla, u koordinatnom početku u kome se nalazi jedan od krajeva elektrode.

Otpornost posmatrane elektrode u funkciji ugla θ_2 i sa odnosom $p_s = \sigma_1/\sigma_s$ kao parametrom, za iste vrednosti ostalih parametara kao na Sl. 6.11, prikazana je na Sl. 6.12.

6.1.2.3 Lineična elektroda koja prodire polusferičnu poluprovodnu nehomogenost



Sl. 6.13 - Raspodela struje oticanja sa elektrode sa Sl. 6.3 za različite vrednosti parametra $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$.

Raspodela podužne gustine struje oticanja I_{ot} sa uzemljivačke elektrode sa Sl. 6.3 prikazana je na Sl. 6.13. Pri tome su vrednosti parametara $r_s = 1\text{ m}$, $\theta_1 = 45^\circ$, $\sigma_1 = 0.01\text{ S/m}$, $a_2 = 25\text{ mm}$, $\varepsilon_{r1} = 10$, $\varepsilon_{r2} = 10$, $l_1 = 1\text{ m}$ i $l_2 = 1\text{ m}$. Metod odsečaka primenjen je na $N_1 = 10$ odsečaka na delu provodnika van i $N_2 = 10$ odsečaka unutar nehomogenosti. Potencijal površine elektrode je $U = 1\text{ V}$, dok odnos $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ uzima vrednosti 0.1, 1 i 10.

6.2 UZEMLJIVAČKI SISTEM NAČINJEN OD PO JEDNE LINEIČNE ELEKTRODE UNUTAR I IZVAN POLUSFERIČNE NEHOMOGENOSTI

Posmatra se uzemljivački sistem formiran od dve lineične elektrode, jedne smeštene unutar i druge izvan poluprovodne polusferične nehomogenosti, Sl. 6.14 ([6.4]). Parametri koji definišu dimenzije i položaj elektroda kao i parametri sredina prikazani su, odnosno označeni na slici i odgovaraju parametrima uzemljivačkih elektroda iz tačke 6.1 kada su elektrode posmatrane kao usamljeni provodnici smešteni izvan/unutar polusfere. Potencijal u okolini ovog uzemljivačkog sistema može se napisati kao

$$\varphi_1(\vec{r}) = \int_{l_1} dI(\vec{r}')G_{11}(\vec{r}, \vec{r}') + \int_{l_2} dI(\vec{r}')G_{1s}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad r > r_s \quad (\text{Sl. 6.14a}) \quad (6.2.1)$$

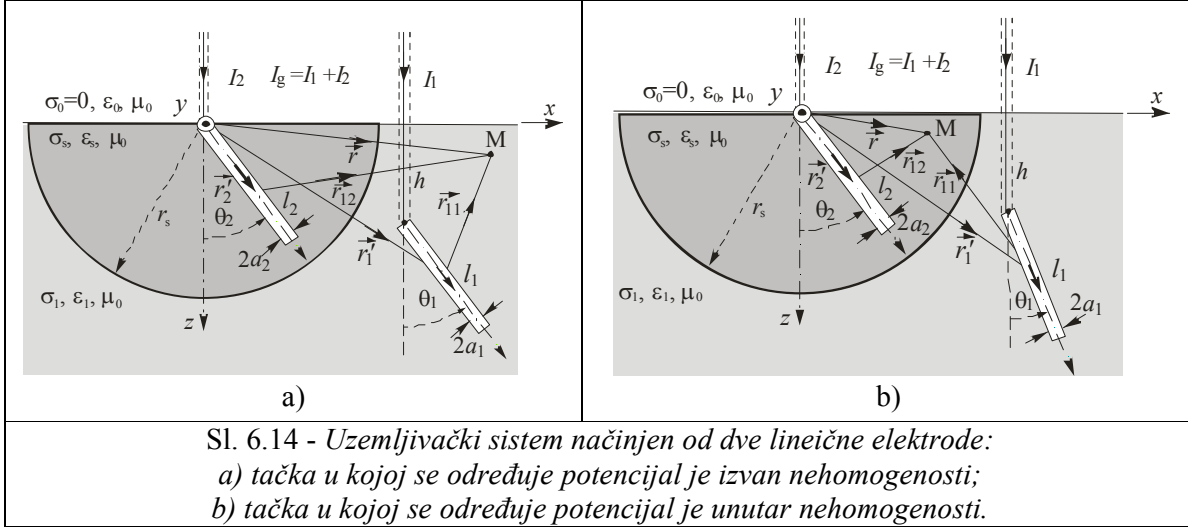
$$\varphi_s(\vec{r}) = \int_{l_1} dI(\vec{r}')G_{s1}(\vec{r}, \vec{r}') + \int_{l_2} dI(\vec{r}')G_{ss}(\vec{r}, \vec{r}'), \quad r < r_s \quad (\text{Sl. 6.14b}). \quad (6.2.2)$$

Kao i u prethodnoj analizi iz tačke 6.1 $dI(\vec{r}') = I_{ot}(\vec{r}')ds'_k$ predstavlja ukupnu struju oticanja sa dela lineične elektrode ds'_k , $k = 1, 2$ (indeks odgovara indeksu provodnika), dok je podužna gustina struje oticanja negativni izvod lonitudinalne struje $I_{ot}(\vec{r}') = -\partial I(s')/\partial s'$.

Kada se na način analogan proceduri izloženoj u odeljku 6.1.1 provodnici podele na N_1 (provodnik 1), odnosno N_2 (provodnik 2) segmenata, podešavanjem vrednosti potencijala $\varphi_1 = U_1$ i $\varphi_s = U_2$ u N_1 i N_2 tačaka na provodniku 1 i 2 respektivno, formira se sistem jednačina

$$U_1 = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{I_n}{\Delta_n} \int_{\Delta_n} G_{11}(\vec{r}_k, \vec{r}'_1) d s'_1 + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{I_m}{\Delta_m} \int_{\Delta_m} G_{1s}(\vec{r}_k, \vec{r}'_2) d s'_2, \text{ (ukupno } N_1 \text{ jednačina) i} \quad (6.2.3a)$$

$$U_2 = \sum_{n=1}^{N_1} \frac{I_n}{\Delta_n} \int_{\Delta_n} G_{s1}(\vec{r}_l, \vec{r}'_1) d s'_1 + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{I_m}{\Delta_m} \int_{\Delta_m} G_{ss}(\vec{r}_l, \vec{r}'_2) d s'_2. \text{ (ukupno } N_2 \text{ jednačina)} \quad (6.2.3b)$$



U jednačinama (6.2.3a-b), Δ_n, I_n, Δ_m i I_m , su oznake za dužine i odgovarajuće struje oticanja n -tog odsečka, $n=1, \dots, N_1$ na prvom i m -tog odsečka, $m=1, \dots, N_2$ na drugom provodniku elektrode. Sa $\vec{r}_k, k=1, \dots, N_1$ i $\vec{r}_l, l=1, \dots, N_2$ označeni su vektori položanja tačaka podešavanja na prvom, odnosno drugom provodniku. Rešenje sistema jednačina (6.2.3) su ukupne struje oticanja po segmentima

$$I_n, n=1, \dots, N_1 \text{ i } I_m, m=1, \dots, N_2. \text{ Ukupne struje oticanja sa provodnika su } I_{g1} = \sum_{n=1}^{N_1} I_n \text{ i } I_{g2} = \sum_{m=1}^{N_2} I_m.$$

Kao što je to već objašnjeno u odeljku 5.2.3, između napona elektroda i i ukupnih struja koje protiču kroz njih postoji relacija

$$\begin{aligned} U_1 &= \underline{Z}_{11} I_{g1} + \underline{Z}_{12} I_{g2}, \\ U_2 &= \underline{Z}_{21} I_{g1} + \underline{Z}_{22} I_{g2}. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

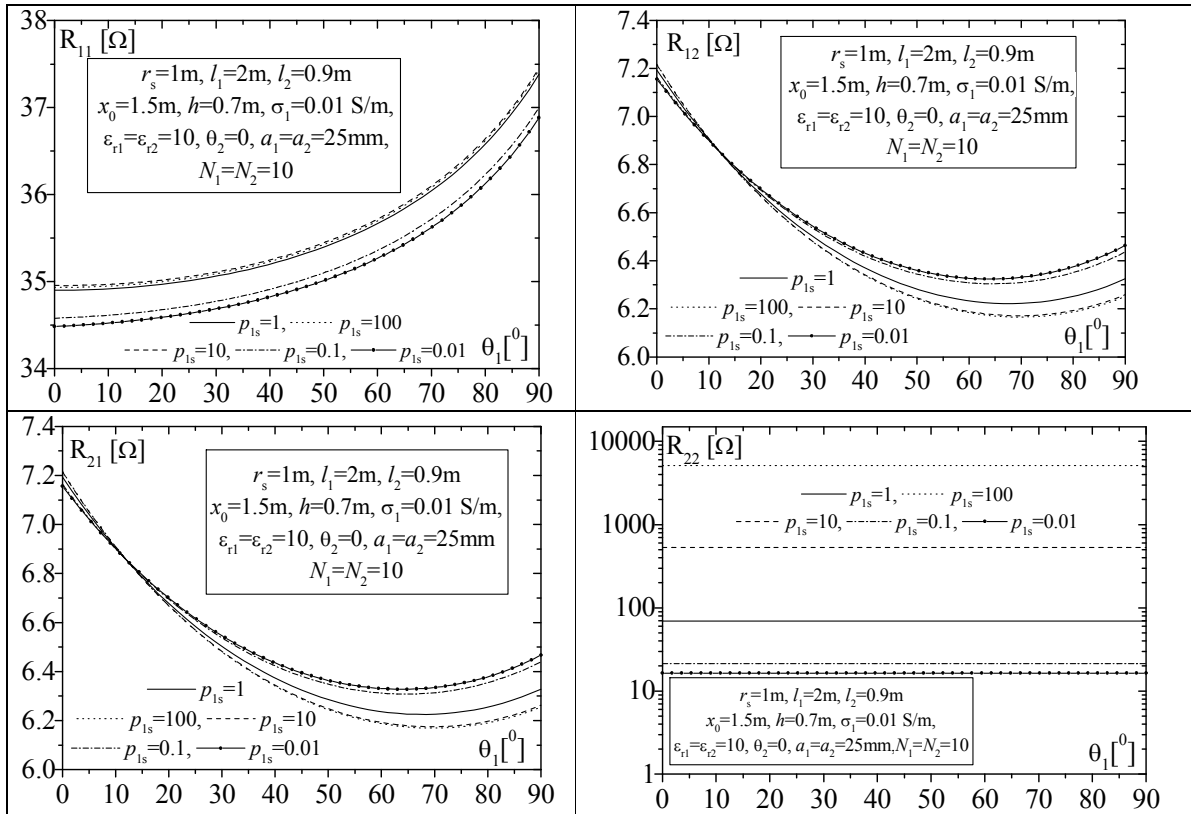
" \underline{Z} " parametri koji se javljaju u jednačinama (6.2.4) određuju se rešavanjem sistema jednačina u simetričnom i antisimetričnom režimu napajanja (odeljak 5.2.3). Kada su elektrode međusobno povezane u jedinstveni uzemljivački sistem, ukupna impedansa takvog sistema određuje se smenom $U_1 = U_2 = 1 \text{ V}$ u (6.2.4), pa se ukupna impedansa uzemljivačkog sistema može odrediti kao

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g = 1/(I_{g1} + I_{g2}). \quad (6.2.5)$$

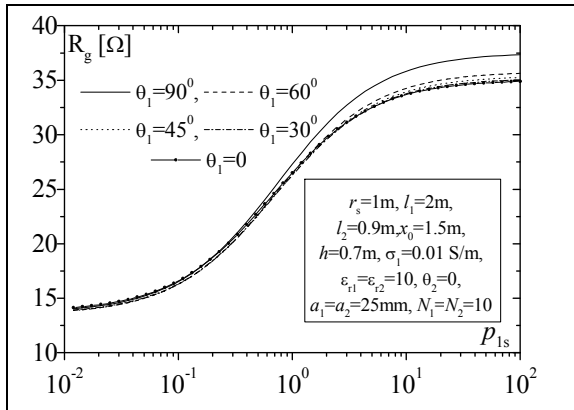
6.2.1 Numerički rezultati

Procedura izložena u prethodnom tekstu primenjena je na karakterizaciju sistema sa Sl. 6.14. Na Sl. 6.15 prikazane su realne vrednosti " \underline{Z} " parametara sistema sa Sl. 6.14 u zavisnosti od ugla θ_1 . Vrednosti parametara su $r_s = 1 \text{ m}$, $h = 0.7 \text{ m}$, $l_1 = 2 \text{ m}$, $l_2 = 0.9 \text{ m}$, $x_0 = 1.5 \text{ m}$, $\theta_2 = 0$, $\sigma_1 = 0.01 \text{ S/m}$ i $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 10$, dok je odnos $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ parametar. Poluprečnik poprečnog preseka oba provodnika je $a_1 = a_2 = 25 \text{ mm}$, dok je metod odsečaka primenjen na $N_1 = N_2 = 10$ odsečaka. Uticaj veličine ugla θ_1 najizrazitiji je na vrednost parametra R_{11} , dok u slučaju parametra R_{22} praktično ne postoji, što je i očekivano.

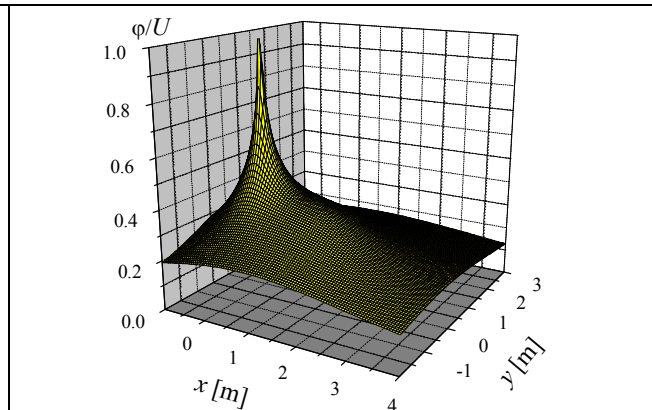
Ukupna impedansa analiziranog sistema u funkciji odnosa $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ i uglom θ_1 kao parametrom, prikazana je na Sl. 6.16. Pri tome su vrednosti parametara iste kao one date na Sl. 6.15. Za veće vrednosti parametra p_{1s} , provodnost okolne zemlje je velika i dominira u strukturi otpornosti, pa položaj elektrode 1, odnosno vrednost ugla θ_1 bitnije utiče na ukupnu otpornost, što se uočava sa Sl. 6.16.



Sl. 6.15 - Promena sopstvenih i međusobnih otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 6.14 u zavisnosti od ugla θ_1 i odnosom $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ kao parametrom.



Sl. 6.16 - Promena ukupne otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 6.14 u zavisnosti od odnosa $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ i uglom θ_1 kao parametrom.

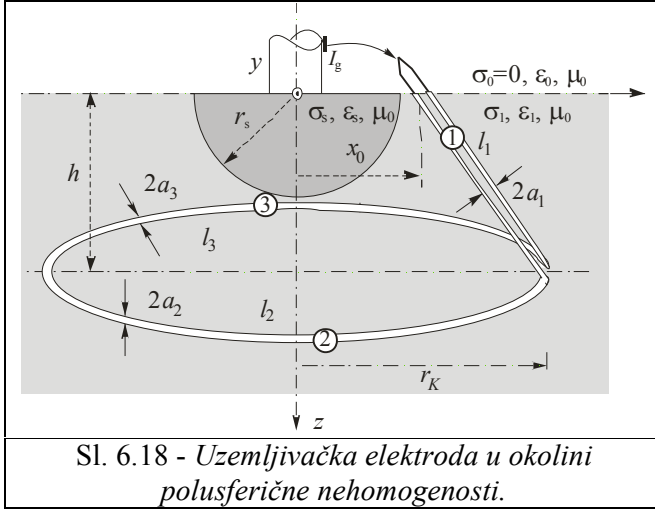


Sl. 6.17 - Raspodela potencijala na površini tla u okolini uzemljivačkog sistema sa Sl. 6.14 za $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s = 1$, $\theta_1 = 0$, $N_1 = N_2 = 1$ i iste vrednosti ostalih parametara kao na Sl. 6.15.

Normalizovana raspodela potencijala na površini tla za $\theta_1 = 0$, $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s = 1$, $N_1 = N_2 = 1$ i iste vrednosti ostalih parametara kao na Sl. 6.14-6.15 prikazana je na Sl. 6.17 ([6.5]). Pri tome je poten-

cijal površine obe elektrode $\varphi = U$. U tačkama na površini tla koje se nalaze iznad provodnika nalaze se maksimumi funkcije potencijala.

6.3 USAMLJENI LINEIČNI OBRUČ U OKOLINI NEHOMOGENOSTI



Sl. 6.18 - Uzemljivačka elektroda u okolini polusferične nehomogenosti.

U ovom delu rada, izvršena je karakterizacija prstenaste elektrode poluprečnika r_K položene na dubinu h koncentrično u odnosu na polusferičnu nehomogenost poluprečnika r_s , Sl. 6.18. Okolno tlo (indeks "1") i polusfera ("s") smatraju se homogenim, izotropnim i linearnim poluprovodnim sredinama poznatih parametara $\sigma_i, \epsilon_i, \mu_i = \mu_0$, $\underline{\sigma}_i = \sigma_i + j\omega\epsilon_i, i = 1, s$ (specifična provodnost, dielektrična konstanta, magnetna propustljivost, kompleksna specifična provodnost respektivno). I ovde je analiza izvršena za kvazistacionarni režim.

Slično kao u primeru iz tačke 5.2, obruč se napaja sa dva kosa provodnika koja se smatraju jedinstvenim provodnikom označenim sa 1 koji se razdvaja i formira obruč (provodnici 3 i 4). Model odgovara jednom od načina praktične realizacije temeljnog uzemljivača, pri čemu se provodnik, (obično FeZn traka ili bakarno uže) ne prekida tokom izrade uzemljenja, dok se temelj ovog puta modeluje polusferičnim poluprovodnim domenom.

Ekvivalentni poluprečnik poprečnog preseka trake $a_2 = a_3$ određuje se procedurom opisanim u PRILOGU 9, $a_2 \ll l_2, l_2 = l_3 = \pi r_K$. Poluprečnik zemljovodnog provodnika tretiranog kao jedinstvena elektroda je $a_1 = 2a_2, a_1 \ll l_1$.

Sistem je napajan niskofrekventnom strujom I_g . Nepoznate struje duž osa provodnika označene su sa $I_k(s'_k), s'_k \in [0, l_k], k = 1, 2, 3$, pri čemu je zbog postojeće simetrije $I_2(s'_2) = I_3(s'_3)$. Isto važi i za podužne gustine struja oticanja, $I_{ot2}(s'_2) = I_{ot3}(s'_3)$, već ranije u tački 4.1 definisane kao $I_{otk}(s'_k) = -\partial I_k(s'_k) / \partial s'_k = -I'_k(s'_k), k = 1, 2, 3$.

Raspodele struja pretpostavljene su u obliku polinoma prvog stepena ([6.6]- [6.8]),

$$I_k(s'_k) = I_{k0} - I_{k1}(s'_k / l_k), s'_k \in [0, l_k], k = 1, 2, 3, \quad (6.3.1)$$

gde su I_{k0} i $I_{k1}, k = 1, 2$ nepoznati koeficijenti. Kako je $I_2(s'_2) = I_3(s'_3)$, važi da je $I_{20} = I_{30}$ i $I_{21} = I_{31}$. Izraz za potencijal u okolini sistema sa Sl. 6.18 formira se na način analogan onom u [6.9] i ima oblik

$$\varphi_i(\vec{r}) = I_g G_{i1}(\vec{r}, \vec{r}' = x_0 \hat{x}) + \sum_{k=1}^3 \int_{s'_k=0}^{l_k} I_k(s'_k) \frac{\partial}{\partial s'_k} [G_{i1}(\vec{r}, \vec{r}')] ds'_k, i = 1, s, \quad (6.3.2)$$

gde su $T_{i0} = 1 + R_{i0} \cong 2, i = 1, s$ koeficijenti transmisije zemlja/vazduh ($i = 1$) i polusfera/vazduh ($i = s$) dati izrazom (2.2.38). Sa $G_{i1}(\vec{r}, \vec{r}'), i = 1, s$ označene su Grinove funkcije, definisane izrazima (6.1.3) za $i = 1$ ($\varphi_1, r > r_s$) i (6.1.4) za $i = s$, ($\varphi_s, r < r_s$). Uzimajući u obzir uslov $I_g = I_1(0)$, i uslove koji proističu iz I Kirhofovog zakona

$$I_1(l_1) = I_2(0) + I_3(0) = 2I_3(0), I_2(l_2) = 0, \quad (6.3.3)$$

izraz za potencijal (6.3.2) se primenom parcijalne integracije pojednostavljuje i dobija formu

$$\varphi_{i1}(\vec{r}) = -\sum_{k=1}^3 \int_{s'_k=0}^{l_k} I'_k(s'_k) G_{i1}(\vec{r}, \vec{r}') ds'_k, \quad i=1, s, \quad (6.3.4)$$

gde su $I'_k(s'_k) = \partial I_k(s'_k) / \partial s'_k = I_{k1} / l_k$, $k=1, 2, 3$. Integracija u (6.3.4) vrši se duž osa provodnika, dok je vektor \vec{r}' vektor položaja strujnog elementa na osi provodnika.

Podešavanjem vrednosti potencijala (6.3.4) u tačkama P_n na osi n -tog provodnika $n=1, 2$, formira se sistem jednačina

$$U = \varphi_{11}(\vec{r} = \vec{r}_n) = \sum_{k=1}^3 \frac{I_{k1}}{l_k} \int_{s'_k=0}^{l_k} G_{i1}(\vec{r}_n, \vec{r}') ds'_k, \quad n=1, 2. \quad (6.3.5)$$

gde je \vec{r}_n vektor položaja tačke P_n . Na osnovu prethodnog izraza, uslova $I_{20} = I_{30}$, $I_{21} = I_{31}$, kao i jednačine (6.3.3) određuju se nepoznati koeficijenti u (6.3.1). Ukupna struja napajanja je

$$I_g = \sum_{k=1}^3 I_{k1} \quad (6.3.6)$$

pa je impedansa sistema

$$Z_g = R_g + jX_g = U / I_g. \quad (6.3.7)$$

Opisani model može se primeniti i na rešavanje problema provodne polusferične elektrode i prstenastog uzemljivača, analiziranog u odeljku 4.4 kada $\sigma_s \rightarrow \infty$ ([6.10]).

6.3.1 Numerički rezultati

Prethodno izloženom procedurom određena je impedansa uzemljivačkog sistema sa Sl. 6.18 kao i raspodela potencijala u njegovoj okolini.

Promena otpornosti uzemljivačkog sistema sa dubinom ukopavanja h prikazana je na Sl. 6.19a. Pri tome je uticaj zemljovodnog provodnika zanemaren, a parametar $p_{1s} = \sigma_1 / \sigma_s$ uzima različite vrednosti. Vrednosti ostalih parametara sa Sl. 6.18 su $\sigma_1 = 10^{-2}$ S/m, $\epsilon_{r1} = \epsilon_{rs} = 10$ i $r_K = r_s = 1$ m. Poprečni presek FeZn trake je 30×4 mm² ([6.11]), a poluprečnik ekvivalentnog kružnog poprečnog preseka određen je procedurom iz PRILOGA 9 kao $a_2 = a_3 = 9.7$ mm.

Otpornost duboko ukopane (usamljene) elektrode istih dimenzija prikazana je na istom grafiku i određena je na osnovu izraza za impedansu usamljene elektrode kada je okolna sredina poluprovodna, kompleksne provodnosti $\underline{\sigma}_1$ ([6.12]),

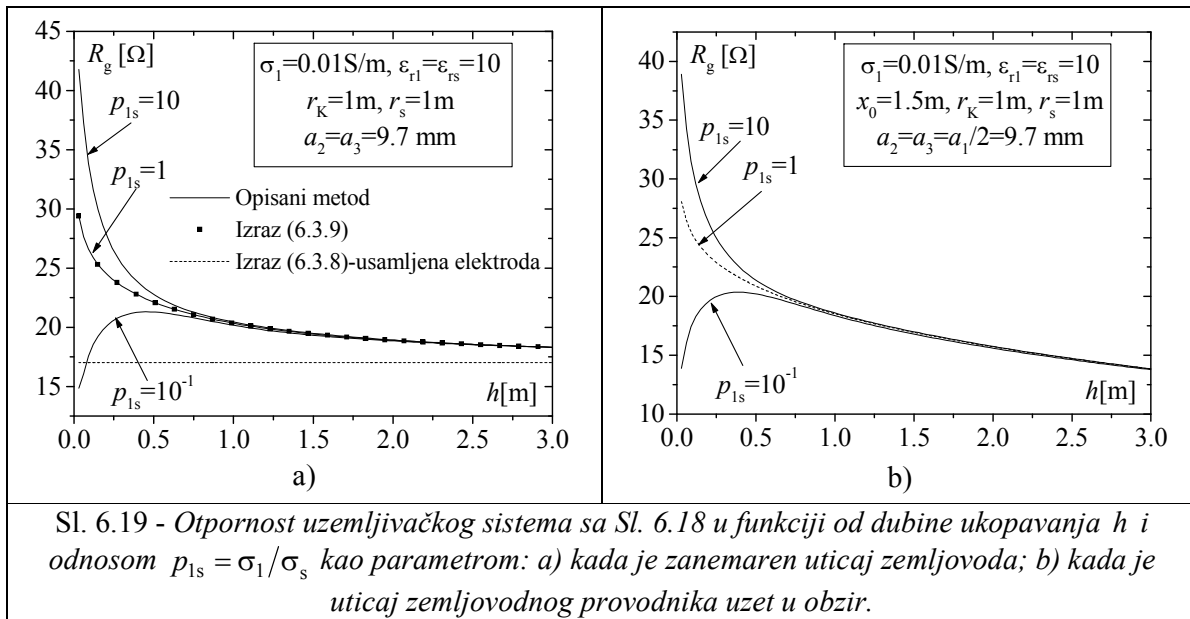
$$\underline{Z}_g = \ln(8r_K / a_2) / 4\pi^2 \underline{\sigma}_1 r_K. \quad (6.3.8)$$

Kao što se i očekuje, sa porastom dubine ukopavanja, sve vrednosti teže otpornosti određenog na osnovu prethodnog izraza.

Za $p_{1s} = 1$ (homogeno tlo), dobijeni grafik poklapa se sa onim dobijenim na osnovu izraza za impedansu usamljene prstenaste elektrode ukopane u homogenu poluprovodnu zemlju specifične otpornosti $\underline{\sigma}_1$ ([6.13]- [6.14]),

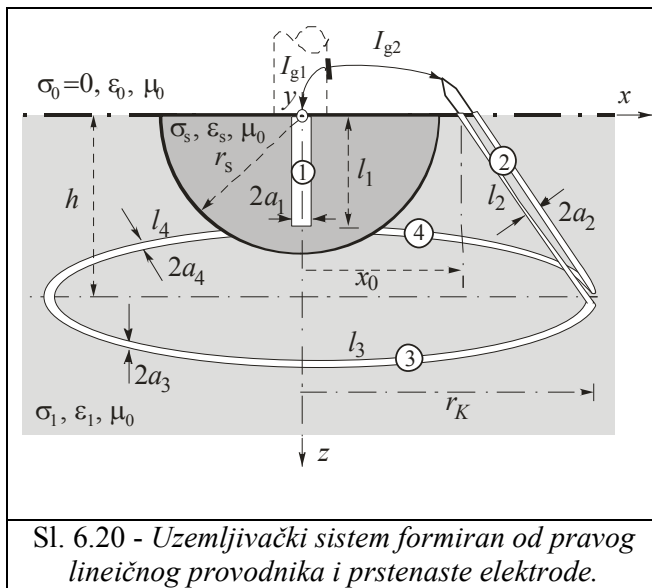
$$\underline{Z}_g = \frac{1}{4\pi^2 \underline{\sigma}_1 r_K} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + 0.25(a_2 / r_K)^2}} K(\pi/2, k_1) + \frac{1}{\sqrt{1 + (h / r_K)^2}} K(\pi/2, k_2) \right]. \quad (6.3.9)$$

U izrazu (6.3.9) $K(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$ je potpuni eliptički integral prve vrste, dok su odgovarajući argumenti $k_1^2 = 4r_K^2 / (4r_K^2 + a_2^2)$ i $k_2^2 = 4r_K^2 / (4r_K^2 + 4h^2)$.



Otpornost posmatranog uzemljivačkog sistema u zavisnosti od dubine ukopavanja h prikazana je na Sl. 6.19b. Parametri su isti kao i u slučaju Sl. 6.19a, samo što je ovog puta u obzir uzet i zemljovodni provodnik ($x_0 = 1.5 \text{ m}$). Za razliku od grafika sa Sl. 6.19a, sa povećanjem dubine ukopavanja otpornost uzemljivačkog sistema opada, što je rezultat činjenice da je zemljovodni provodnik uzet u obzir.

6.4 UZEMLJIVAČKI SISTEM NAČINJEN OD LINEIČNE ELEKTRODE UNUTAR POLUSFERIČNE NEHOMOGENOSTI I OBRUČA IZVAN POLUSFERIČNE NEHOMOGENOSTI



Posmatra se uzemljivački sistem formiran od prave lineične elektrode smeštene unutar polusferične nehomogenosti ($\sigma_s, \epsilon_s, \mu_s = \mu_0$), i u odnosu na nehomogenost koncentrično postavljene prstenaste elektrode izvan polusferične nehomogenosti, u homogenoj zemlji ($\sigma_1, \epsilon_1, \mu_1 = \mu_0$), Sl. 6.20 ([6.4]). Prava elektroda koja modeluje armaturu stuba (označena sa 1) i obruč napajani su niskofrekventnim strujama I_{g1} i I_{g2} , respektivno. Parametri koji definišu dimenzije i položaj elektroda kao i parametri sredina označeni su na slici. Analiza opisana u ovom delu teksta, kao i u prethodnim primerima ima kvazistacionarni karakter.

Glavna uzemljivačka prstenasta elektroda napaja se preko dva zemljovodna provodnika (označena kao jedinstveni provodnik sa 2 poluprečnika dvostruko većeg od poluprečnika prstena). Ovi provodnici se spuštaju koso i razvijaju u prstenastu elektrodu (provodnici 3 i 4). Kao što je to rečeno i u odeljku 6.3, ovakav model odgovara jednom načinu praktične realizacije uzemljivačkog sistema stuba, pri čemu se provodnik ne prekida tokom izrade uzemljenja. Ekvivalentni poluprečnik poprečnog preseka trake od koje su načinjeni zemljovodni provodnici i prstenasta elektroda određuje se procedurom opisanom u PRILOGU 9. Poluprečnik zemljovodnog provodnika tretiranog kao jedinstvena elektroda je $a_2 = 2a_3 = 2a_4$.

Elektroda 1, zemljovod i prstenasta elektroda smatraju se tankim ($a_2 = 2a_3$, $a_2 \ll l_2$, $a_3 = a_4$, $a_3 \ll l_3$, $a_4 \ll l_4$, $l_3 = l_4 = \pi r_K$).

Nepoznate longitudinalne struje duž osa provodnika označene su sa $I_k(s'_k)$, $s'_k \in [0, l_k]$, $k=1,2,3,4$. Kao i u prethodnom odeljku, postojeća simetrija sistema rezultuje uslovom $I_3(s'_3) = I_4(s'_4)$, što važi i za odgovarajuće struje oticanja $I_{ot3}(s'_3) = I_{ot4}(s'_4)$, pri čemu su struje oticanja sa svakog provodnika ponaosob već ranije definisane kao $I_{otk}(s'_k) = -\partial I_k(s'_k)/\partial s'_k = -I'_k(s'_k)$, $k=1,2,3,4$.

Raspodele struja pretpostavljene su u obliku polinoma prvog stepena ([6.6]- [6.8]),

$$I_k(s'_k) = I_{k0} - I_{k1}(s'_k/l_k), \quad s'_k \in [0, l_k], \quad k=1,2,3,4, \quad (6.4.1)$$

gde su I_{k0} i I_{k1} , $k=1,2,3,4$ nepoznati koeficijenti. Kako je $I_3(s'_3) = I_4(s'_4)$, važi da je $I_{30} = I_{40}$ i $I_{31} = I_{41}$. Izraz za potencijal u okolini sistema sa Sl. 6.20 formira se na način analogan onom u [6.9] i ima oblik

$$\begin{aligned} \varphi_i(\vec{r}) = & I_{g1} G_{is}(\vec{r}, \vec{r}'=0) + I_{g2} G_{il}(\vec{r}, \vec{r}'=x_0\hat{x}) + \\ & + \int_{s'_1=0}^{l_1} I_1(s'_1) \frac{\partial}{\partial s'_1} [G_{is}(\vec{r}, \vec{r}')] ds'_1 + \sum_{k=1}^3 \int_{s'_k=0}^{l_k} I_k(s'_k) \frac{\partial}{\partial s'_k} [G_{il}(\vec{r}, \vec{r}')] ds'_k, \quad i=1,s \end{aligned} \quad (6.4.4)$$

gde su Grinove funkcije $G_{ik}(\vec{r}, \vec{r}')$, $i,k=1,s$ date izrazima (6.1.3) i (6.1.4) za $k=1$ ($r' > r_s$), odnosno izrazima (6.1.7) i (6.1.8) za $k=s$, ($r' < r_s$).

Nepoznate raspodele struja zadovoljavaju sledeće uslove

$$I_1(0) = I_{g1}, \quad (6.4.5a)$$

$$I_2(0) = I_{g2}, \quad (6.4.5b)$$

$$I_2(l_2) = I_3(0) + I_4(0) = 2I_3(0), \quad (6.4.5c)$$

$$I_3(l_3) + I_4(l_4) = 2I_3(l_3) = 2I_4(l_4) = 0, \text{ and} \quad (6.4.5d)$$

$$I_1(l_1) = -a_1 I'_1(l_1). \quad (6.4.5e)$$

Uslov (6.4.5e) za struju na slobodnom kraju provodnika detaljnije je analiziran u PRILOGU 7.

Primenom parcijalne integraciji i imajući u vidu uslove (6.4.5), izrazi za potencijal se znatno pojednostavljaju. Uz opravdanu pretpostavku da je površina svake od elektroda praktično ekvipotencijalna ($\varphi = U_1$ za elektrodu 1 i $\varphi = U_2$ za elektrode 2, 3 i 4), potencijal u tački na površini n -tog provodnika, određenoj vektorom položaja \vec{r}_{cn} , $n=1,2,3,4$, dobija oblik:

- za $n=1$ (tačka na provodniku 1)

$$\begin{aligned} \varphi(r = \vec{r}_{c1}) \cong U_1 = & \left\{ I_1(s'_1 = l_1) G_{ss}(\vec{r}_{c1}, s'_1 = l_1) - \int_{s'_1=0}^{l_1} \left[\frac{\partial}{\partial s'_1} I_1(s'_1) \right] G_{ss}(\vec{r}_{c1}, s'_k) ds'_1 \right\} - \\ & - \left\{ \sum_{k=2}^4 \int_{s'_k=0}^{l_k} \left[\frac{\partial}{\partial s'_k} I_k(s'_k) \right] G_{s1}(\vec{r}_{c1}, s'_k) ds'_k \right\}; i \end{aligned} \quad (6.4.6a)$$

- za $n = 2, 3, 4$ (tačke na provodnicima 2, 3 i 4)

$$\begin{aligned} \varphi(r = \vec{r}_{cn}) \cong U_2 = & \left\{ I_1(s'_1 = l_1) G_{1s}(\vec{r}_{cn}, s'_1 = l_1) - \int_{s'_1=0}^{l_1} \left[\frac{\partial}{\partial s'_1} I_1(s'_1) \right] G_{1s}(\vec{r}_{cn}, s'_1) ds'_1 \right\} - \\ & - \sum_{k=2}^4 \int_{s'_k=0}^{l_k} \left[\frac{\partial}{\partial s'_k} I_k(s'_k) \right] G_{11}(\vec{r}_{cn}, s'_k) ds'_k. \end{aligned} \quad (6.4.6b)$$

Izrazi (6.4.6a-b) predstavlja zapravo sistem integralnih jednačina za električni skalar potencijal. Smenom (6.4.1) u (6.4.6), i uzimajući u obzir da je

$$\frac{\partial}{\partial s'_k} I_k(s'_k) = -I_{k1}/l_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (6.4.7)$$

sistem integralnih jednačina (6.4.6) transformiše se u sistem linearnih jednačina čije su nepoznate strujni koeficijenti I_{km} , $k = 1, 2, 3, 4$. Ovaj sistem ima oblik:

-za $n = 1$

$$\sum_{m=0}^1 I_{1m} G_{ss}(\vec{r}_{c1}, s'_1 = l_1) + \frac{I_{11}}{l_1} \int_{s'_1=0}^{l_1} G_{ss}(\vec{r}_{c1}, s'_1) ds'_1 + \sum_{k=2}^4 \frac{I_{k1}}{l_k} \int_{s'_k=0}^{l_k} G_{s1}(\vec{r}_{c1}, s'_k) ds'_k = U_1, \quad (6.4.8a)$$

- za $n = 2, 3, 4$

$$\sum_{m=0}^1 I_{1m} G_{1s}(\vec{r}_{cn}, s'_1 = l_1) + \frac{I_{11}}{l_1} \int_{s'_1=0}^{l_1} G_{1s}(\vec{r}_{cn}, s'_1) ds'_1 + \sum_{k=2}^4 \frac{I_{k1}}{l_k} \int_{s'_k=0}^{l_k} G_{11}(\vec{r}_{cn}, s'_k) ds'_k = U_2. \quad (6.4.8b)$$

Ukupan broj nepoznatih koeficijenata, tj. neophodnih jednačina je $N_T = 8$ (dva za svaki pojedinačni provodnik). Uslov $I_3(s'_3) = I_4(s'_4)$ redukuje ovaj broj na $N_T = 6$. Kako postoje tri uslova (6.4.5c), (6.4.5d) i (6.4.5e), preostale tri jednačine formiraju se se podešavanjem jednačina (6.4.8) u tačkama na površini n -tog provodnika

$$s_n = \frac{1}{2} l_n, \quad n = 1, 2, 3. \quad (6.4.9)$$

Ukupne struje oticanja sa provodnika su $I_{g1} = I_1(0) = I_{10}$ i $I_{g2} = I_2(0) = I_{20}$. Kao što je to već objašnjeno u odeljku 5.2.3, između napona elektroda i i ukupnih struja koje protiču kroz njih postoji relacija

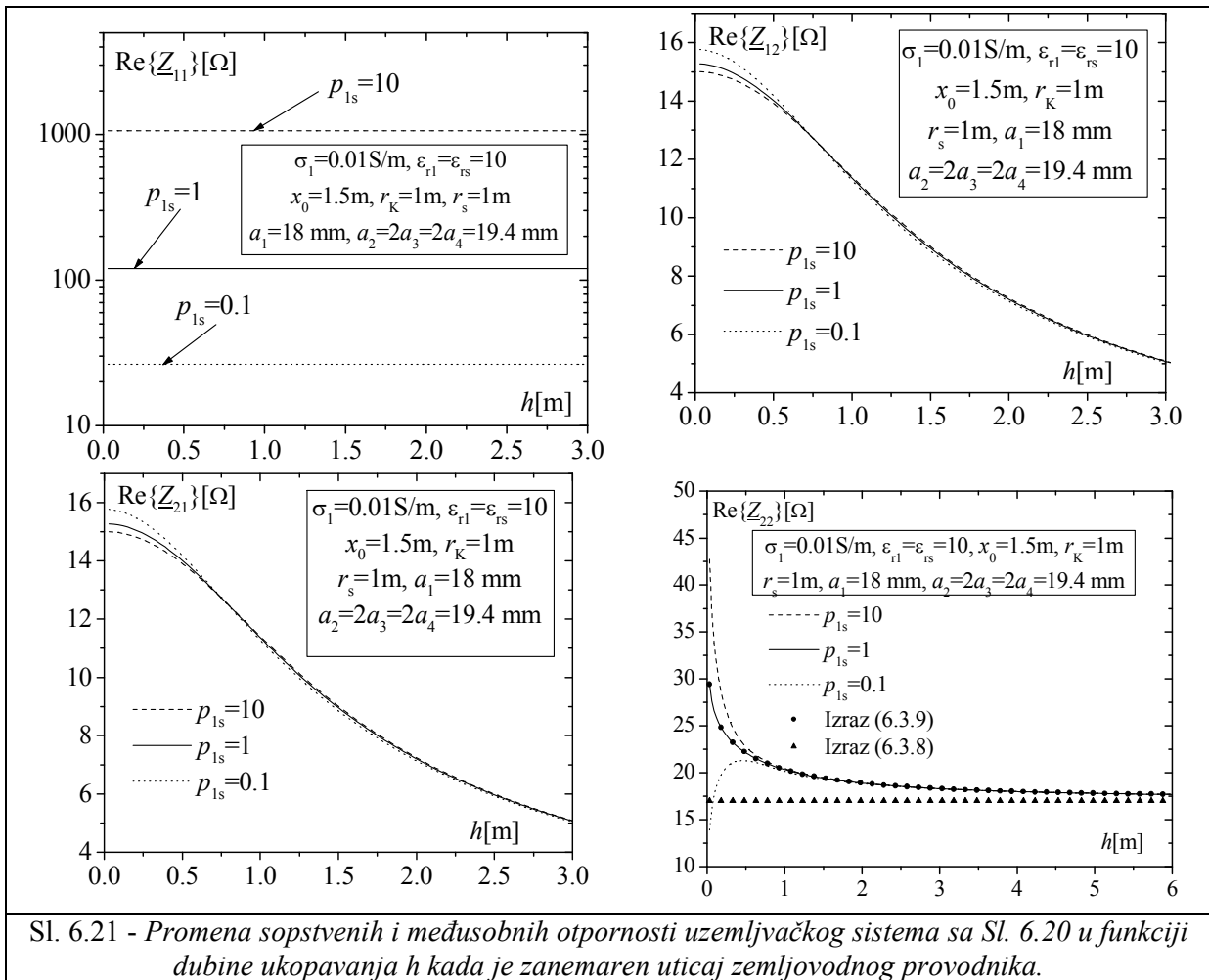
$$\begin{aligned} U_1 &= \underline{Z}_{11} I_{g1} + \underline{Z}_{12} I_{g2}, \\ U_2 &= \underline{Z}_{21} I_{g1} + \underline{Z}_{22} I_{g2}. \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

" \underline{Z} " parametri koji se javljaju u (6.2.4) određuju se rešavanjem sistema jednačina u simetričnom i antisimetričnom režimu napajanja (odjeljak 5.2.3). Kada su elektrode međusobno povezane u jedinstveni uzemljivački sistem, ukupna impedansa takvog sistema određuje se smenom $U_1 = U_2 = 1$ V u (6.4.10), pa se ukupna impedansa uzemljivačkog sistema može odrediti kao

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g = 1/(I_{g1} + I_{g2}). \quad (6.4.11)$$

6.4.1 Numerički rezultati

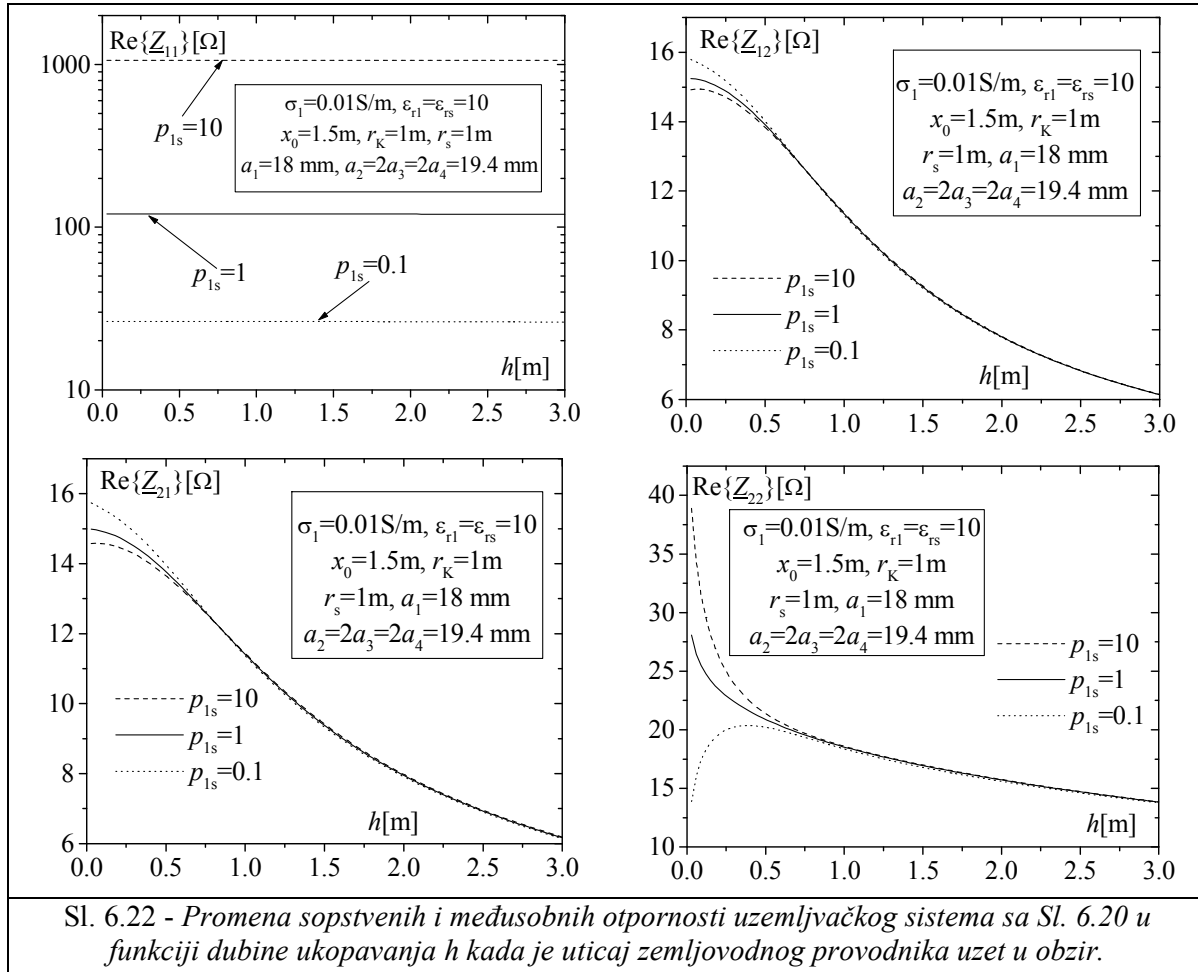
Procedura izložena u prethodnoj tački primenjena je na karakterizaciju sistema sa Sl. 6.20. Realni delovi "Z" parametara, tj. sopstvene i međusobne otpornosti elektrodnog sistema sa Sl. 6.20 u funkciji promene dubine ukopavanja obruča i odnosnom $p_{1s} = \sigma_1 / \sigma_s$ kao parametrom, prikazani su na Sl. 6.21 (kada je zanemaren uticaj zemljovodnog provodnika) i Sl. 6.22 (kada se u obzir uzima i zemljovod). Pri tome su vrednosti parametara $\sigma_1 = 10^{-2} \text{ S/m}$, $\epsilon_{r1} = \epsilon_{rs} = 10$, $l_1 = 0.5 \text{ m}$, $r_K = 1 \text{ m}$, $x_0 = 1.5 \text{ m}$, $r_s = 1 \text{ m}$, $a = 0.25 \text{ m}$ (poluprečnik kruga po kome su raspoređeni provodnici koji sačinjavaju armaturu), $r_0 = 0.007 \text{ m}$ (poluprečnik poprečnog preseka armaturne žice), $N = 10$ (broj čeličnih žica koje formiraju armaturu) i $a_1 = a_0 \sqrt[3]{N r_0 / a_0} = 0.18 \text{ m}$ (ekvivalentni poluprečnik provodnika kojim se modeluje armatura stuba, procedurom bliže opisanom u PRILOGU 10). Tračkasti provodnik je FeZn traka pravougaonog poprečnog preseka dimenzija $30 \times 4 \text{ mm}^2$, a njegov ekvivalentni poluprečnik određen na osnovu postupka iz PRILOGA 9, je $a_2 / 2 = a_3 = a_4 = 9.7 \text{ mm}$. Odabrane vrednosti parametara pripadaju opsezima koji se javljaju u kod realizacije praktičnih uzemljivačkih sistema. ([6.11], [6.15]).



Otpornost duboko ukopane (usamljene) prstenaste elektrode (izraz 6.3.8) istih dimenzija kao i obruč na Sl. 6.20 u funkciji dubine ukopavanja h , prikazana je na Sl. 6.21, u okviru grafika na kome su prikazane vrednosti sopstvene otpornosti $\text{Re}\{Z_{22}\}$. Kao što se i moglo očekivati, vrednosti otpornosti $\text{Re}\{Z_{22}\}$, teže otpornosti usamljenog obruča određenom izrazom (6.3.8) sa porastom du-

bine ukopavanja. Na istom grafiku može se videti da se za $p_{1s} = 1$ (homogena zemlja), sopstvena otpornost $\text{Re}\{Z_{22}\}$ praktično se poklapa sa vrednošću dobijenom primenom izraza (6.3.9) za impedansu obruča plitko ukopanog u homogenu zemlju.²

Sa grafika je očigledno da je uticaj odnosa p_{1s} posebno značajan na sopstvenu otpornost $\text{Re}\{Z_{11}\}$ dok je uticaj zemljovoda najuočljiviji kada se radi o sopstvenoj otpornosti $\text{Re}\{Z_{22}\}$.

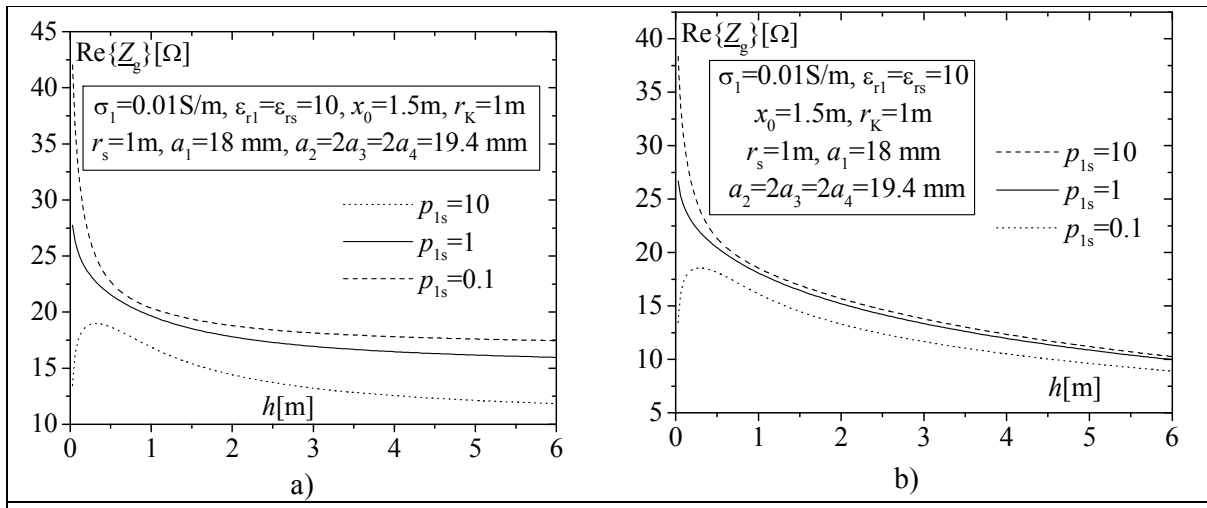


Sl. 6.22 - Promena sopstvenih i međusobnih otpornosti uzemljivačkog sistema sa Sl. 6.20 u funkciji dubine ukopavanja h kada je uticaj zemljovodnog provodnika uzet u obzir.

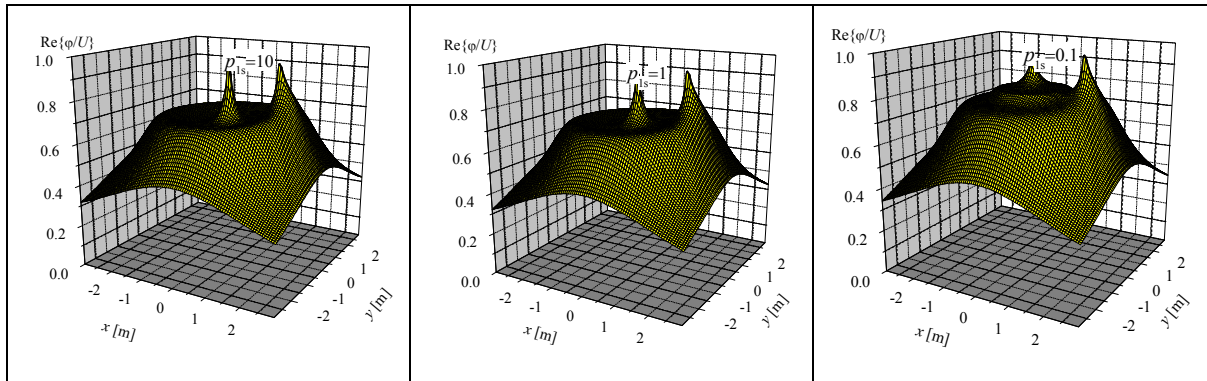
Ukupna otpornost uzemljivačkog sistema sa Sl. 6.20 određena primenom izraza (6.4.11) u funkciji promene dubine ukopavanja h za iste vrednosti parametara kao i na Sl. 6.21 i 6.22 prikazana je na Sl. 6.23a (zanemaren zemljovodni provodnik) i Sl.6.23b (razmatran uticaj zemljovoda). Očigledno je da ukupna otpornost sistema opada sa dubinom ukopavanja h kada uticaj zemljovoda nije zanemaren.

Normalizovana raspodela potencijala na površini tla u okolini uzemljivačkog sistema sa Sl. 6.20 za različite vrednosti odnosa $p_{1s} = \sigma_1 / \sigma_s$ prikazana je na Sl. 6.24. Pri tome je u razmatranje uzet i uticaj zemljovoda. Vrednosti parametara su $r_K = 2\text{m}$, $l_1 = 0.5\text{m}$, $a_1 = 0.18\text{m}$, $r_s = 1\text{m}$, $h = 0.5\text{m}$, $x_0 = 1.5\text{m}$, $\sigma_1 = 10^{-2}\text{S/m}$, $\epsilon_{r1} = \epsilon_{rs} = 10$ i $a_2/2 = a_3 = a_4 = 9.7\text{mm}$. Potencijal je normalizovan jedinstvenim potencijalom elektroda uzemljivačkog sistema U . Maksimumi potencijala nalaze se u tačkama u okolini mesta u kojima u zemlju prodire elektroda 1, odnosno zemljovod, kao i u tačkama koje se nalaze iznad obruča, što je u ovom slučaju i očekivano ponašanje funkcije potencijala. Takođe, za $p_{1s} = 0.1$ (polusfera velike provodnosti), funkcija potencijala je, očekivano, prilično "mirna" na površini polusfere, osim u okolini tačke napajanja.

² Umesto a_2 u jednačine (6.3.8) i (6.3.9) treba staviti a_3 .

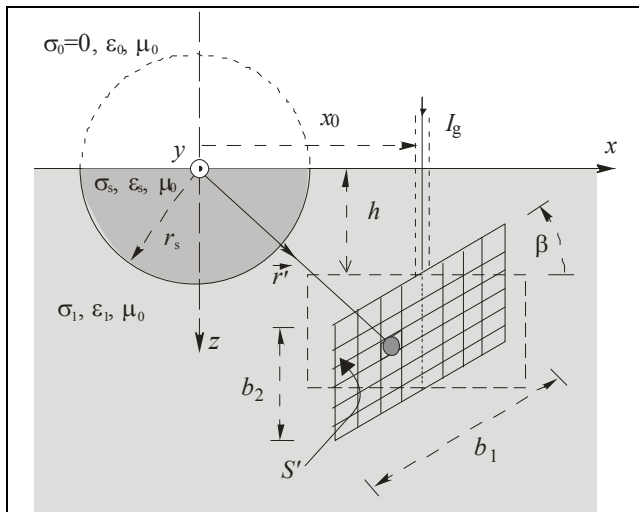


Sl. 6.23 - Ukupna otpornost uzemljivačkog sistema sa Sl. 6.20 u funkciji dubine ukopavanja h kada je uticaj zemljovodnog provodnika a) zanemaren; b) uzet u obzir.



Sl. 6.24 - Normalizovana raspodela potencijala na površini tla u okolini uzemljivačkog sistema sa Sl. 6.20 za različite vrednosti parametra $p_{1s} = \sigma_1 / \sigma_s$.

6.5 USAMLJENA PLOČASTA ELEKTRODA U OKOLINI POLUSFERIČNE NEHOMOGENOSTI



Sl. 6.25 - Usamljena pločasta elektroda u okolini poluprovodne polusferične nehomogenosti.

Za razliku od primera analiziranih u tačkama 6.1-6.4, u naredna dva odeljka biće analiziran uticaj polusferične nehomogenosti na sisteme koji uključuju pločastu elektrodu (odjeljak 2.3.3). Jedan od razloga za to je i činjenica da se često kao elementi uzemljivačkog sistema koriste i elektrode ovog tipa. Tako se na osnovu modela koji će biti izložen može analizirati pločasti uzemljivač smešten u okolini temelja aproksimiranog polusferom, ili u okolini udubljenja u tlu ispunjenih vodom (bara, manje jezero).

Posmatra se pravougaona elektroda ($b_1 \times b_2$) zanemarljive debljine vertikalno položena u homogenu zemlju ($\sigma_1, \epsilon_1, \mu_1 = \mu_0$) na dubinu h , Sl. 6.25 ([6.16]-[6.17]). Elektroda je preko izolovanog zemljovoda napajana

niskofrekventnom strujom I_g . Položaj elektrode u odnosu na poluprovodni ($\sigma_s, \varepsilon_s, \mu_s = \mu_0$) polusferični domen poluprečnika r_s definisan je uglom β i rastojanjem x_0 .

6.5.1 Određivanje električnog skalar potencijala i impedanse pločaste elektrode

Posmatrana elektroda sa Sl. 6.25 analizirana je primenom metoda ekvivalentne elektrode (MEE) ([6.18]), opisanog u ranijem tekstu u odeljku 3.3.

Prvi korak u primeni MEE, je podela površine pločaste elektrode na konačan broj (N) kvadratnih površina stranice Δ . Vektori položaja centara kvadrata su $\vec{r}'_n, n = 1, 2, \dots, N$. Ove površine zatim se zamenjuju malim ekvivalentnim provodnim sferama ("ekvivalentnim elektrodama"-EE) poluprečnika $a_e = 0.373\Delta$ ([6.19]) čiji se centar poklapa sa centrima kvadrata. Ukupna struja oticanja sa svake od sfernih elektroda je $I_n, n = 1, 2, \dots, N$.

Na osnovu jednačine (2.3.36), približna vrednost potencijala u okolini elektrode (u tačkama definisanim vektorom položaja \vec{r}) dobija se superpozicijom potencijala koji stvara svaka od EE po-naosob,

$$\varphi_1(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N I_n G_{11}(\vec{r}, \vec{r}'_n), \quad r > r_s \quad \text{i} \quad (6.5.1)$$

$$\varphi_s(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N I_n G_{s1}(\vec{r}, \vec{r}'_n), \quad r < r_s, \quad (6.5.2)$$

gde su $G_{11}(\vec{r}, \vec{r}'_n)$ i $G_{s1}(\vec{r}, \vec{r}'_n)$ Grinove funkcije date izrazima (6.1.3) i (6.1.4), respektivno. Kao što je to već ranije objašnjeno, koriste se Grinove funkcije po modelu "Rančić", dok se zbog činjenice da se radi o kvazistacionarnom režimu, smatra da je $R_{10} \cong 1$.

Podešavanjem vrednosti potencijala u ukupno N tačaka definisanih vektorom položaja $\vec{r}_{np} = \vec{r}_n + \delta_{nm} \vec{a}_{en}, n = 1, 2, \dots, N$,

$$\varphi_1(\vec{r}_{np}) = U = \sum_{n=1}^N I_n G_{11}(\vec{r}_{np}, \vec{r}'_n) \quad (6.5.3)$$

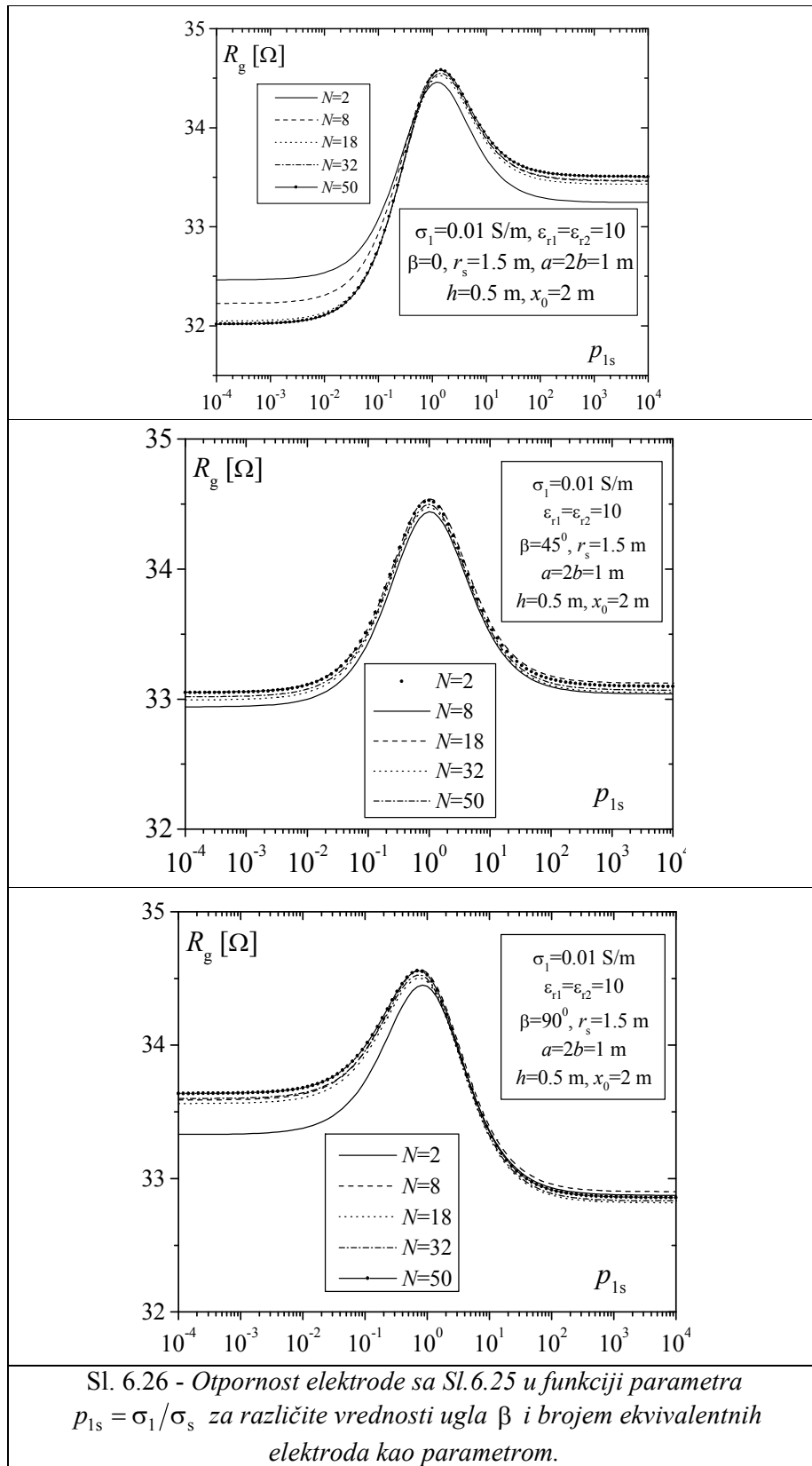
formira se sistem linearnih jednačina čije je rešenje N nepoznatih strujnih koficijenata $I_n, n = 1, 2, \dots, N$. Pri tome je u prethodnom tekstu sa \vec{a}_{en} obeležen vektor položaja tačke na površini sfere EE u odnosu na njen centar ($|\vec{a}_{en}| = a_e, n = 1, 2, \dots, N$), dok je δ_{nm} Kronekerov simbol.

Nakon rešavanja sistema jednačina (6.5.3) potencijal u okolini elektrode sa Sl. 6.24 može se odrediti na osnovu izraza (6.5.1)-(6.5.2), a njena impedansa je

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g = U / I_g = U \left(\sum_{n=1}^N I_n \right)^{-1}. \quad (6.5.5)$$

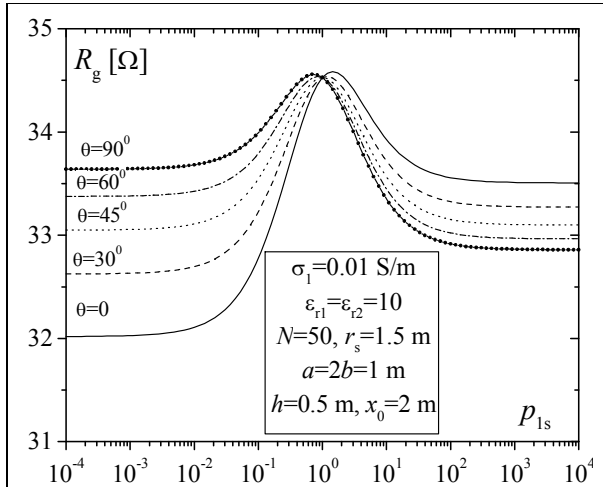
6.5.2 Numerički rezultati

Otpornost elektrode sa Sl. 6.25 u funkciji odnosa $p_{1s} = \sigma_s / \sigma_1$ za različite vrednosti ugla β ($0, 45^\circ, 90^\circ$) i brojem ekvivalentnih elektroda N kao parametrom prikazan je na Sl. 6.26. Vrednosti ostalih parametara su $\sigma_1 = 10^{-2} \text{ S/m}$, $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{rs} = 10$, $r_s = 1.5 \text{ m}$, $a = 2b = 1 \text{ m}$, $h = 0.5 \text{ m}$ i $x_0 = 2 \text{ m}$. Uočava se da postoji zadovoljavajuća konvergencija sa porastom broja ekvivalentnih elektroda.

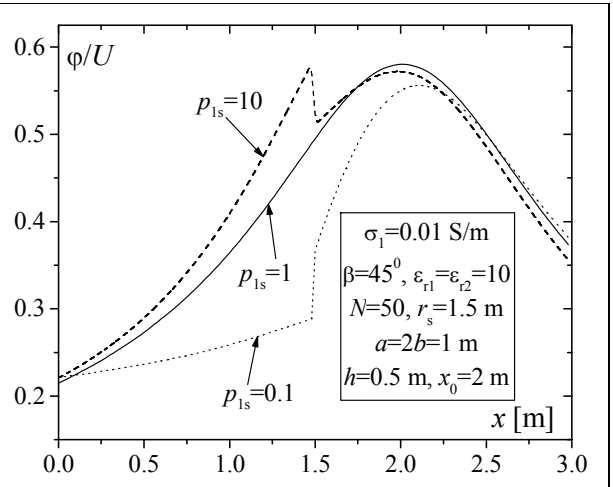


Promena otpornosti elektrode sa Sl. 6.24 sa promenom odnosa $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ sa uglom β kao parametrom i $N = 50$ upotrebljenih ekvivalentnih elektroda prikazana je na Sl. 6.27. Vrednosti ostalih parametara iste su kao i na Sl. 6.25.

Konačno, raspodela potencijala na površini tla (x -osa) u okolini elektrode sa Sl. 6.24 prikazana je na Sl. 6.28. Pri tome je $\beta = 45^\circ$, $N = 50$, a vrednosti ostalih parametara iste su kao i slučaju grafika sa Sl. 6.26. Funkcija raspodele potencijala menja oblik u tački diskontinuiteta sredine, dok joj se maksimum nalazi u tački koja se nalazi iznad pločaste elektrode.

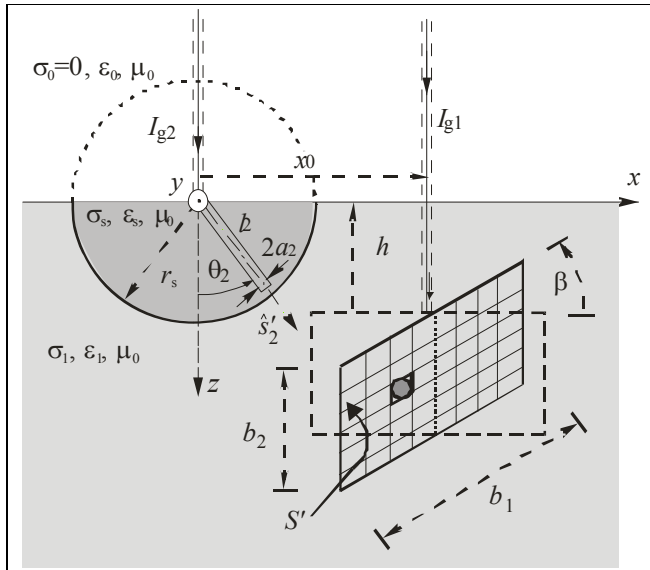


Sl. 6.27 - Otpornost elektrode sa Sl.6.25 u funkciji odnosa $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ sa uglom β kao parametrom.



Sl. 6.28 - Raspodela potencijala na x osi u okolini uzemljivačke elektrode sa Sl.6.25 sa odnosom $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ kao parametrom.

6.6 UZEMLJIVAČKI SISTEM FORMIRAN OD PRAVE LINEIČNE ELEKTRODE UNUTAR I PLOČASTE ELEKTRODE IZVAN POLUSFERIČNE NEHOMOGENOSTI



Sl. 6.29 - Uzemljivački sistem formiran od prave lineične elektrode smeštene unutar i pločaste elektrode smeštene izvan polusferične nehomogenosti.

U ovoj tački izloženi su rezultati analize uzemljivačkog sistema sačinjenog od pločaste pravougaone elektrode ($b_1 \times b_2$) vertikalno položene u homogenu zemlju ($\sigma_1, \epsilon_1, \mu_1 = \mu_0$) na dubinu h , i prave lineične elektrode dužine l_2 smeštene unutar poluprovodne ($\sigma_s, \epsilon_s, \mu_s = \mu_0$) polusferične nehomogenosti ([6.17]). Položaj elektroda odnosi na poluprovodni polusferični domen poluprečnika r_s . definisan je uglovima β i θ_2 i rastojanjem x_0 . Parametri geometrije sistema prikazani su na Sl. 6.29. Elektrode se preko izolovanih provodnika napajaju niskofrekventnim strujama I_{g1} (pločasta elektroda) i I_{g2} (provodnik).

Potencijal u okolini ovog sistema određuje se postupkom koji je zapravo rezultat simultane primene procedura

izloženih u tačkama 6.1 i 6.4 gde su elektrode koje sačinjavaju sistem sa Sl. 6.28 posmatrane kao usamljene. Tako je potencijal ovog sistema

$$\varphi_i(\vec{r}) = \int_{l_2} dI(\vec{r}')G_{is}(\vec{r}, \vec{r}') + \int_S dI(\vec{r}')G_{il}(\vec{r}, \vec{r}') \quad , \quad i = 1, s. \quad (6.6.1)$$

U prethodnom izrazu sa $dI(\vec{r}')$ označene su ukupne struje oticanja sa elementa provodnika $dI(\vec{r}') = I_{ot} ds'$ odnosno elementa površine pločaste elektrode $(dI(\vec{r}') = I_{ot} dS)^3$, gde su $G_{is}(\vec{r}, \vec{r}')$ i $G_{il}(\vec{r}, \vec{r}')$, $i = 1, s$ Grinove funkcije date izrazima (6.1.3)-(6.1.4) i (6.1.7)-(6.1.8). Zbog činjenice da se radi o kvazistacionarnom režimu, smatra da je $R_{10} = R_{20} \cong 1$.

Izraz za potencijal formira se kombinovanom primenom metoda odsečaka (lineična elektroda) i metoda ekvivalentne elektrode (pločasta elektroda). Na način potpuno analogan procedurama iz 6.1.1 i 6.4, lineični provodnik deli se na ukupno M segmenata dužine Δ , dok se pločasta elektroda zamenjuje sa N EE. Na osnovu toga formira se izraz za potencijal

$$\varphi_i(\vec{r}) = \sum_{n=1}^N I_{1n} G_{i1}(\vec{r}, \vec{r}'_1) + \sum_{m=1}^M \frac{I_{2m}}{\Delta} \int_{\Delta_n} G_{is}(\vec{r}, \vec{r}'_2) dl, \quad i = 1, s. \quad (6.6.2)$$

Sa I_{1n} , $n = 1, 2, \dots, N$ i I_{2m} , $m = 1, 2, \dots, M$, označene su ukupne struje oticanja sa elementa površine pločaste elektrode, odnosno elementa provodnika, respektivno. Podešavanjem vrednosti potencijala (6.6.2) u N tačaka na površini pločaste elektrode i M tačaka na površini provodnika formira se sistem linearnih jednačina

$$\varphi_1 = U_1 = \sum_{n=1}^N I_{1n} G_{11}(\vec{r}_k, \vec{r}'_1) + \sum_{m=1}^M \frac{I_{2m}}{\Delta} \int_{\Delta_n} G_{1s}(\vec{r}_k, \vec{r}'_2) dl, \quad (\text{ukupno } N \text{ jednačina}) \quad (6.6.3a)$$

$$\varphi_2 = U_2 = \sum_{n=1}^N I_{1n} G_{21}(\vec{r}_l, \vec{r}'_1) + \sum_{m=1}^M \frac{I_{2m}}{\Delta} \int_{\Delta_n} G_{2s}(\vec{r}_l, \vec{r}'_2) dl \quad (\text{ukupno } M \text{ jednačina}). \quad (6.6.3a)$$

Sa \vec{r}_k , $k = 1, \dots, N$ i \vec{r}_l , $l = 1, \dots, M$ označeni su vektori položaja tačaka podešavanja na pločastoj elektrodi, odnosno provodniku. Rešenje prethodnog sistema su ukupne struje oticanja I_{1n} , $n = 1, \dots, N$ i

I_{1m} , $m = 1, \dots, N_2$. Ukupne struje oticanja sa provodnika su $I_{g1} = \sum_{n=1}^N I_{1n}$ i $I_{g2} = \sum_{m=1}^M I_{1m}$. Kao što je to već objašnjeno u odeljku 5.2.3, između napona elektroda i ukupnih struja koje protiču kroz njih postoji relacija

$$\begin{aligned} U_1 &= \underline{Z}_{11} I_{g1} + \underline{Z}_{12} I_{g2}, \\ U_2 &= \underline{Z}_{21} I_{g1} + \underline{Z}_{22} I_{g2}. \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

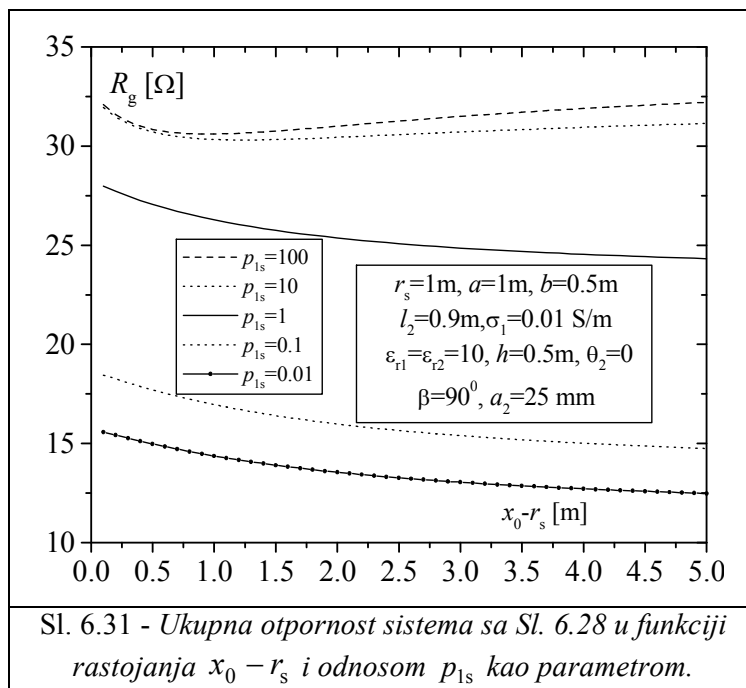
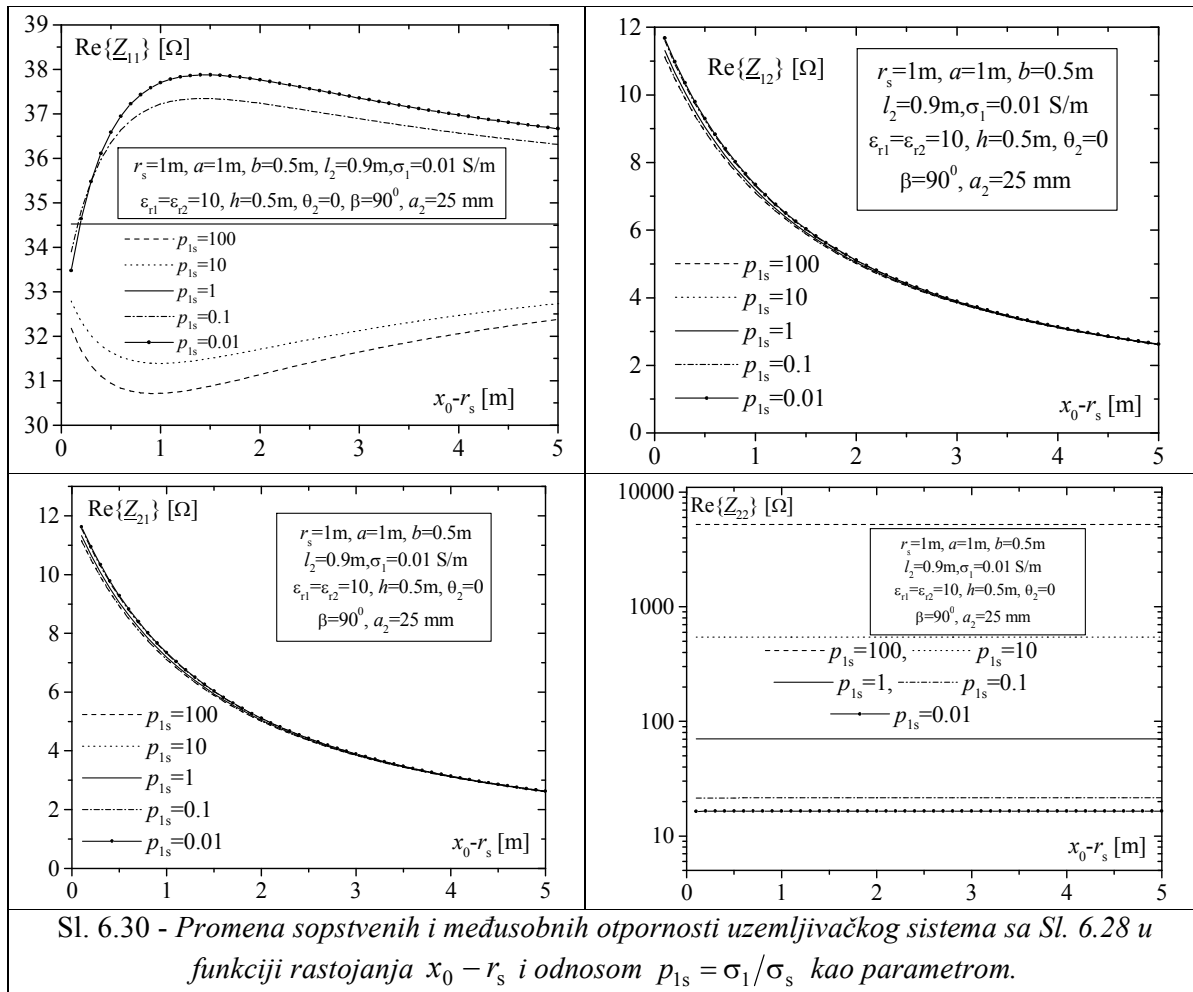
Kao što je to u više navrata ponovljeno, " \underline{Z} " parametri koji se javljaju u jednačinama (6.6.4) određuju se rešavanjem sistema jednačina u simetričnom i antisimetričnom režimu napajanja (odeljak 5.2.3). Kada su elektrode međusobno povezane u jedinstveni uzemljivački sistem, ukupna impedansa takvog sistema određuje se smenom $U_1 = U_2 = 1 \text{ V}$ u prethodni izraz pa se ukupna impedansa uzemljivačkog sistema može odrediti kao

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g = 1/(I_{g1} + I_{g2}). \quad (6.6.5)$$

6.6.1 Numerički rezultati

Na osnovu prethodne analize određeni su " \underline{Z} "-parametri i ukupna impedansa uzemljivačkog sistema sa Sl. 6.29. Promena realnih delova " \underline{Z} "-parametara i ukupne otpornosti u funkciji razlike rastojanja $x_0 - r_s$ i odnosom $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ kao parametrom prikazani su na Sl. 6.30. i Sl. 6.31, respektivno. U oba slučaja vrednosti parametara su $r_s = 1 \text{ m}$, $a = 1 \text{ m}$, $b = 0.5 \text{ m}$, $l_2 = 0.9 \text{ m}$, $\sigma_1 = 0.01 \text{ S/m}$, $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 10$, $\beta = 90^\circ$, $\theta_2 = 0$ i $a_2 = 25 \text{ mm}$. Metod ekvivalentne elektrode (pločasti provodnik) primenjen je sa $N = 50$ ekvivalentnih elektroda, dok je metod odsečaka (provodnik) primenjen na $N = 10$ segmenata.

³ U slučaju lineične elektrode, I_{ot} predstavlja podužnu, a u slučaju pločaste elektrode površinsku gustinu struje oticanja.



6.7 ZRAKASTI UZEMLJIVAČ U OKOLINI POLUSFERIČNE NEHOMOGENOSTI

U tekstu koji sledi izložena je analiza trokrakog zrakastog uzemljivača ([6.11]), smeštenog u okolini poluprovodne polsferične nehomogenosti, Sl. 6.32. Provodnici uzemljivača su istih dužina L i poluprečnika poprečnog preseka a . Uzemljivač je horizontalno položen u tlo ($\sigma_1, \varepsilon_1, \mu_1 = \mu_0$) na dubinu h i na rastojanju x_0 od centra poluprovodne polusferične nehomogenosti ($\sigma_s, \varepsilon_s, \mu_s = \mu_0$), poluprečnika r_s . Kada se na ovakvu uzemljivačku strukturu primeni metod odsečaka na način analogan onom iz odeljka 6.1.1.1, svaki od provodnika deli se na $N_k, k=1,2,3$, odsečaka (indeks k definiše provodnik). Podešavanjem vrednosti potencijala u ukupno $N_u = N_1 + N_2 + N_3$ tačaka na površini provodnika (N_k tačaka na svakom provodniku, $k=1,2,3$) formira se sistem od N_u jednačina

$$\varphi = U = \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^{N_k} \frac{I_{kn}}{\Delta_k} \int_{\Delta_n} G_{11}(\vec{r}_{kl}, \vec{r}') dl. \quad (6.7.1)$$

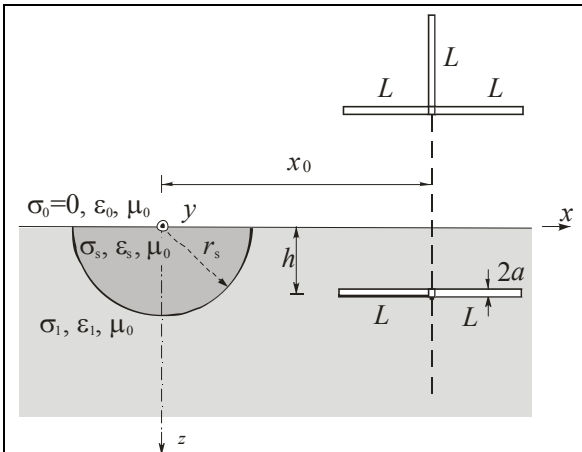
U prethodnom izrazu $\Delta_k = L/N_k, n=1, \dots, N_k$ i $I_{kn}, n=1, \dots, N_k, k=1,2,3$ predstavljaju dužinu segmenta na k -tom provodniku i ukupnu struju oticanja sa n -tog odsečka k -tog provodnika respektivno, dok je $G_{11}(\vec{r}')$ Grinova funkcija zadata izrazom (6.1.3). Sa $\vec{r}_{kl}, k=1,2,3, l=1, \dots, N_k$ označeni su vektori položaja tačaka podešavanja na provodnicima. Rešenje formiranog sistema jednačina (6.1.12) su ukupne struje oticanja po segmentima, $I_{kn}, n=1, \dots, N_k, k=1,2,3$. Impedansa uzemljivača određuje se na osnovu izraza

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g = U / \sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^{N_k} I_{kn}, \quad (6.7.2)$$

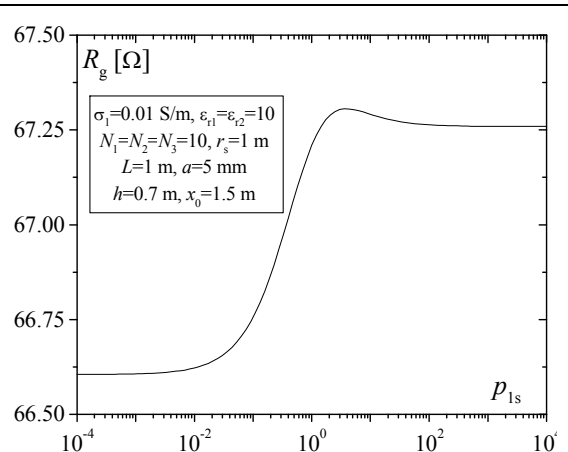
gde je ukupna struja koja utiče u sistem $\sum_{k=1}^3 \sum_{n=1}^{N_k} I_{kn}$.

6.7.1 Numerički rezultati

U prethodnom tekstu opisana procedura primenjena je na trokraki zrakasti uzemljivač dužine provodnika $L=1\text{m}$ i poluprečnika poprečnog preseka $a=5\text{mm}$. Poluprečnik polusfere je $r_s=1\text{m}$, dubina ukopavanja uzemljivača je $h=0.7\text{m}$, dok je rastojanje ukrasnog komada od centra polusfere, $x_0=2.5\text{m}$. Parametri okolnog tla su $\sigma_1=10^{-1}\text{S/m}$ i $\varepsilon_{r1}=10$. Promena otpornosti zrakastog uzemljivača sa Sl. 6.32 za navedene vrednosti parametara sa promenom odnosa $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ i za $N_1=N_2=N_3=10$ odsečaka prikazana je na Sl. 6.33. Pri tome je $\varepsilon_{r2}=10$.



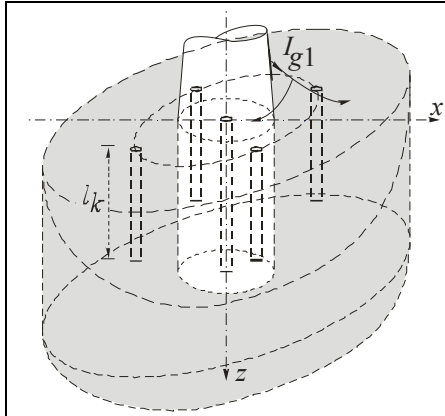
Sl. 6.32 - Trokraki zrakasti uzemljivač u okolini polusferične nehomogenosti.



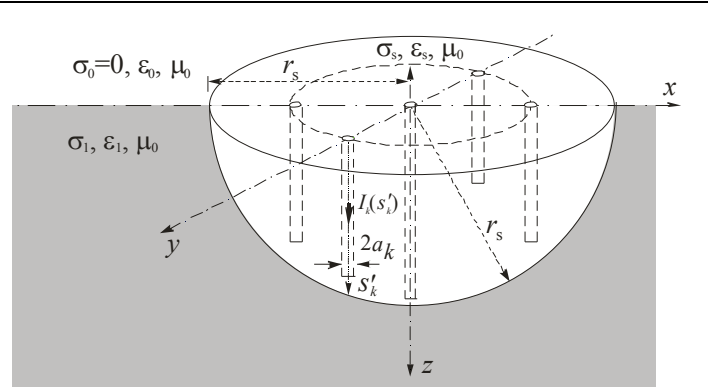
Sl. 6.33 - Otpornost uzemljivača sa Sl. 6.32 u funkciji odnosa $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$.

6.8 SISTEM LINEIČNIH PROVODNIKA UNUTAR POLUSFERIČNE NEHOMOGENOSTI

Jedan od načina da se izvrši karakterizacija temeljnog uzemljivača formiranog od armature stuba položene u betonski temelj, Sl. 6.34, izložen je u ovom delu rada ([6.20]-[6.21])⁴. Temelj se aproksimira poluprovodnom polusferom poluprečnika r_s , električnih parametara σ_s , ε_s , $\mu_s = \mu_0$, dok su parametri okolnog tla σ_1 , ε_1 , $\mu_1 = \mu_0$, Sl. 6.35. Približan proračun impedanse na ovaj način modelovanog temeljnog uzemljivača moguće je izvršiti tako što se posmatra sistem od N vertikalno postavljenih provodnika dužine l_k i poluprečnika poprečnog preseka a_k , $a_k \ll l_k$, $k=1, 2, \dots, N$. Provodnici su ravnomerno raspoređeni po zapremini polusfere i napajani su niskofrekventnom strujom I_g (razmatra se kvazistacionarni režim).



Sl. 6.34 - Armatura stuba i betonski temelj.



Sl. 6.35 - Polusferična nehomogenost i sistem provodnika kojim se aproksimira struktura sa Sl. 6.34.

Kada se u okviru primene odsečaka svaki od provodnika podeli na M_k odsečaka dužine $\Delta_k = l_k / M_k$, $k=1, 2, \dots, N$, potencijal u okolini razmatranog sistema može se napisati u obliku

$$\varphi_i(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{M_k} \frac{I_{km}}{\Delta_k} \int_{\Delta_n} G_{is}(\vec{r}, \vec{r}'_k) ds'_k, \quad i=1, s \quad (6.8.1)$$

gde su $G_{is}(\vec{r}, \vec{r}')$, $i=1, s$, Grinove funkcije zadate izrazima (6.1.7)-(6.1.8), a I_{km} , $m=1, \dots, M_k$, $k=1, 2, \dots, N$ ukupne struje oticanja sa pojedinih segmenata. Kako je to već ranije objašnjeno, indeks $i=1$ odgovara oblasti $r > r_s$ (okolna zemlja), dok $i=s$ određuje oblast polusfere ($r < r_s$). Po dešavanjem vrednosti potencijala $\varphi = U$ u tačkama na površinama provodnika definisanim vektorima položaja \vec{r}_l , $l=1, \dots, M_k$, $k=1, 2, \dots, N$, formira se sistem linearnih jednačina

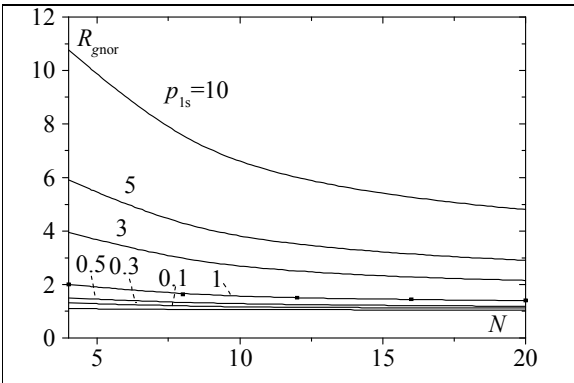
$$\varphi_i(\vec{r}_l) = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{M_k} \frac{I_{km}}{\Delta_k} \int_{\Delta_n} G_{i1}(\vec{r}_l, \vec{r}'_k) ds'_k, \quad l=1, \dots, M_k, \quad k=1, 2, \dots, N \quad (6.8.2)$$

čije su rešenje struje oticanja I_{km} , $m=1, \dots, M_k$, $k=1, 2, \dots, N$. Na osnovu ovako određenih strujnih koeficijenata može se odrediti raspodela potencijala (6.8.1) i impedansa sistema

$$\underline{Z}_g = R_g + jX_g = U / \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^{M_k} I_{km}. \quad (6.8.3)$$

⁴ Referenca [6.20] predstavlja zapravo prošireni apstrakt rada [6.21].

6.8.1 Numerički rezultati



Sl. 6.36 - Normalizovana otpornost sistema sa Sl. 6.33 u funkciji od N i odnosom $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ kao parametrom.

Opisana procedura primenjena je na uzemljivački sistem stuba sa Sl. 6.34. Tako je na Sl. 6.36 prikazana normalizovana otpornost uzemljivača $R_{g\text{nor}} = R_g/R_s$, $R_s = 1/(2\pi\sigma_1 r_s)$ u funkciji broja provodnika armature N i odnosom $p_{1s} = \sigma_1/\sigma_s$ kao parametrom ([6.20]). Faktor normalizacije predstavlja otpornost provodne polusfere istih dimenzija kao i polusferična nehomogenost sa Sl. 6.33. Može se uočiti da sa porastom broja provodnika normalizovana otpornost teži jedinici, tj. $R_g \rightarrow R_s$, što predstavlja očekivano ponašanje analizirane funkcije.

6.9 LITERATURA

- [6.1] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "Single wire grounding electrode in the presence of semi-spherical inhomogeneity", *International PhD Seminar Computational Electromagnetics and Technical Applications*, Banja Luka, Bosnia and Herzegovina, August 28-September 01, 2006, Proceedings of Full Papers, pp 57-63, dostupno na: http://www.phd.etfbl.net/files/Works_PDF/Cvetkovic%20Nenad.pdf.
- [6.2] P. D. Rančić, "A new concept for linear grounding system analysis", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, IIEC '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp 103-116.
- [6.3] N. N. Cvetković, "Linear grounding system: Quasi-stationar structure of Hertz's vector and electric scalar potential", *International PhD Seminar "Numerical field computation and optimization in electrical engineering"*, Ohrid, Macedonia, September 20-25, 2005, Proc. of Full Papers, pp 55-60.
- [6.4] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "The Influence of Semi-Spherical Inhomogeneity on the Linear Grounding System Characteristics", *FACTA UNIVERSITATIS, Ser, Elec. Energ*, Vol. 20, No. 2, September 2007, pp 147-161.
- [6.5] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "Coupled Linear Grounding Systems: Quasistationary Antenna Model", *XLII International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies - ICEST 2007*, June 24-27, 2007, Ohrid, Macedonia, Proc. of Papers, Vol. I, pp 91-94.
- [6.6] B. Popović, "Polynomial Approximation of Current Along Thin Symmetrical Cylindrical Dipole", *proc. IEE*, Vol. 117, No 5, 1970, pp 873-878.
- [6.7] N. N. Cvetković, P. D. Rančić "Prstenasti uzemljivač napajan kosim zemljovodom: kvazistacionarni antenski model", *Zbornik radova LI Konferencije ETRAN-a*, Herceg-Novi, Crna Gora, 4-7. juna 2007. godine, AP 2.3.
- [6.8] P. D. Rančić, N. N. Cvetković, "Current Distribution and Impedance of Ring Electrode Pillar Grounding System: Quasistationary Antenna Model", *8th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, TELSIKS 2007*, September 26-28, 2007, Niš, Serbia, Proceeding of papers, Vol II, pp 569-572.
- [6.9] P. D. Rančić, "Antenski model za kvazistacionarnu analizu uzemljivačkog sistema stuba", Tehnički izveštaj, TTL-GS-8, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2007.

- [6.10] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "Conductive semi-sphere and linear ground electrode as pillar foundation grounding system", *8th International Conference on Applied Electromagnetics, IIEC 2007*, Niš, Serbia, September 03-05, 2007, Proceedings of Papers (CD), Paper O3-6.
- [6.11] Tehnička preporuka br 9, ZBIRKA TEHNIČKIH PREPORUKA ED SRBIJE, Beograd 2000.
- [6.12] D. M. Veličković i saradnici: Z. Ž. Cvetković, N. B. Raičević, S. S. Ilić, V. L. Javor, N. N. Cvetković, D. G. Zulkić, *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Elektromagnetike I deo*, Elektronski fakultet u Nišu, Niš, 2000, str. 33-34.
- [6.13] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "Uticaj polusferičnog temelja stuba na električne karakteristike konturnog kružnog lineičnog uzemljivača", *Zbornik radova L Konferencije ETRAN-a*, Beograd, 6-9. juna 2006. godine, Sveska II, str. 251-254.
- [6.14] H. Uhlmann (Ed.), D. M. Veličković, K. Brandisky, R. D. Stantcheva, H. Brauer, *Fundamentals of Modern Electromagnetics for Engineering-Textbook for Graduate Students, Part I: Static and Stationary Electrical and Magnetic Field*, Technical University Ilmenau/Germany, 2005, pp 77-78.
- [6.15] T. Radojičić, *Betonske konstrukcije*, Prosveta, Niš, 1981.
- [6.16] D. M. Veličković, "The influence of semiconducting spherical body to the groundings", *Proceeding of Energy Efficiency Forum*, 15-17 June 1994, Varna, Bulgaria.
- [6.17] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "Influence of the semi-spherical semi-conducting round inhomogeneity on the grounding characteristics", *VII International Symposium on Electromagnetic Compatibility-EMC BARCELONA '06*, 05-09 Sep. 2006, Proc. of papers, pp 918-923.
- [6.18] D. M. Veličković, "Equivalent electrodes method application in nonrotational fields theory", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, IIEC '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp 5-30.
- [6.19] D. M. Veličković, "Primena metoda ekvivalentne elektrode na rešavanje problema uzemljivača", *Elektrotehnika*, 32, broj 3-4, 1989, str. 149-160.
- [6.20] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "A Simple Model for Numerical Determining of Electrical Characteristics of a Pillar Foundation Grounding System", *16-th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields-COMPUMAG*, June 24-28, 2007, Aachen, Germany, Proceedings, pp 1193-1194.
- [6.21] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "A simple model for a numerical determination of electrical characteristics of a pillar foundation grounding system", rad prihvaćen za objavljivanje u časopisu *Engineering Analysis with Boundary Elements -EABE*, izdavač ELSEVIER.

7. ZAKLJUČAK

U radu je analiziran uticaj poluprovodnih nehomogenosti tla polusferičnog i cilindričnog oblika. Ovakvi tipovi nehomogenosti nisu retkost u praksi i od interesa je bilo proučiti njihov uticaj na karakteristike uzemljivačkih sistema koji već sami po sebi predstavljaju bitan deo brojnih tehničko-tehnoloških sistema, elektroenergetskih postrojenja, telekomunikacionih sistema ili sistema za zaštitu od atmosferskih pražnjenja.

U skladu sa vrstom problema kao i pristupom i analizama iz radova i publikacija koje su bile dostupne kandidatu, problem je tretiran kao kvazistacionaran. Iako je u prethodnim decenijama objavljen znatan broj radova koji se bavi analizom uzemljivačkih sistema, radova koji su se bavili cilindričnim ili polusferičnim tipovima nehomogenosti i to na način kao što je to učinjeno u ovom radu, nije bilo previše u publikacijama dostupnim kandidatu. U tome bi mogao da leži značaj izloženih rezultata.

U samom početku istraživanja, krenulo se od ideje da se izvrši karakterizacija uticaja polusferične poluprovodne nehomogenosti na elektrode različitih geometrija. Razlog za to bilo je opravdana ideja da se nehomogenosti koje se javljaju u okviru izrade temeljnih uzemljivača i nehomogenosti tla kao što su bare ili manja jezera mogu modelovati kao polusferični poluprovodni domeni. U graničnom slučaju, kada provodnost domena teži beskonačno velikoj vrednosti, analiza bi se mogla primeniti i na osnove cisterni ili silosa ukopanih u zemlju koje su zapravo metalne polulopte. Pri tome je polazna osnova bio približni model profesora Veličkovića ([7.1]), kao i kvazistacionarna teorija likova u ravnom ogledalu ([7.2]). Iako je uticaj poluprovodne sfere na tačkasti izvor izvan/unutar sfere određen u radovima Stratona ([7.3]) i Lindela ([7.4]), forma ponuđenih rešenja (u obliku redova) nije pogodna za primenu na lineične i masivne provodnike. Zato je rešenje profesora Veličkovića sasvim opravdano delovalo kao komforan alat za primenu u početnim analizama.

Smatrajući na osnovu primarno dobijenih rezultata da je moguće realizovati model čije je odstupanje od tačnog rešenja Stratona manje nego ono koje daje prvobitno korišćen model profesora Veličkovića, profesor Rančić je formirao novi približni model Grinove funkcije tačkastog izvora unutar/izvan poluprovodne sfere ([7.5]). Za razliku od polaznog modela, pomenuto rešenje približno zadovoljava granični uslov za kondukciju struju, ali zadovoljava Puasonovu, tj. Laplasovu jednačinu. Pri tome oba modela zadovoljavaju granični uslov za potencijal. Ovaj model je pokazao nešto bolje slaganje sa tačnim rešenjem Stratona iz 1941. godine, što je i razlog za njegovu primenu u kasnijim radovima, uključujući i analize u ovom finalnom tekstu. Tako je "model Rančić" za modelovanje poluprovodne polusferične nehomogenosti bio, iako prateći i posredan, prvi interesantniji rezultat istraživanja čiji su rezultati prezentovani u radu.

Primenom različitih metoda (Metod momenata i njegovi derivati, varijacioni metod, metod ekvivalentne elektrode, metod srednjih potencijala) analizirano je više različitih uzemljivačkih struktura u okolini polusferične nehomogenosti. Jedan broj po mišljenju autora interesantnijih rezultata, saopšten je u ovom radu. Tako je analiziran uticaj na uzemljivačke sisteme formirane od pravih lineičnih elektroda, obruča i pločastih elektroda. Određene su otpornosti, raspodele potencijala, struja oticanja i longitudinalnih struja na provodnicima. Raspodele struja su u pojedinim slučajevima smatrane konstantnim, dok se kod rešenja pojedinih problema primenjivao antenski model, odnosno polinomska aproksimacija longitudinalne struje duž provodnika. Praktično su se svi pristupi svodili na svođenje sistema integralnih jednačina za potencijal sa raspodelama struja kao nepoznatim funkcijama, na sisteme linearnih jednačina sa nepoznatim strujnim koeficijentima. Dobijeni rezultati navode na zaključak da uticaj polusferične nehomogenosti nije zanemarljiv i da zavisi od od-

nosa parametara polusferične nehomogenosti i okolne zemlje, poluprečnika polusfere i geometrije uzemljivačkog sistema.

Kao što se to i iz samog naslova vidi, bitan deo rada posvećen je analizi cilindrične nehomogenosti tla koje se javlja u okviru analize temeljnih uzemljivača stubova. Ovde je primenjeno približno rešenje predloženo u ([7.6]) i analizirani su uzemljivački sistemi čije su dimenzije preuzete iz Tehničkih preporuka ED Srbije ([7.7]), dok su kao izvor podataka vezanih za karakteristike temelja i betona od kog je načinjen poslužile reference ([7.8]- [7.11]). I u ovom slučaju korišćeni su različiti metodi, pomenuti u prethodnom tekstu. Pokazalo se da je ovaj uticaj veoma izražen kada se radi o sopstvenoj otpornosti vertikalne elektrode smeštene unutar betonskog temelja. Kada se međutim radi o ukupnoj otpornosti uzemljivačkog sistema ovaj uticaj je značajniji kada je sistem formiran od manjeg broja elektroda i shodno tome, otpornost vertikalne elektrode ima dominantan uticaj. Povećanjem broja elektroda koje čine uzemljivački sistem i/ili njihove dužine, ova prevaga više nije toliko izražena pa je i uticaj betonskog temelja na ukupnu otpornost uzemljenja znatno manji.

U okviru istraživanja, u pojedinim slučajevima razmatran je i uticaj zemljovodnog provodnika kako na raspodelu potencijala, tako i na otpornost uzemljenja. Tu činjenicu je bitno istaći jer pomenuti uticaj kako se pokazalo, nije beznačajan, pogotovo kada se radi o određivanju raspodele potencijala na površini tla. Sa druge strane ovaj aspekt nije bio uključen u analize i istraživanja autora radova koji su bili dostupni kandidatu, pa se tu ogleda još jedan mogući doprinos saopštenih rezultata.

Da bi rad predstavljao logičnu celinu, u njega je uključen i pregled i opis generalnih procedura vezanih za metode primenjene u radu. Konkretna primena svakog od ovih metoda objašnjena je za detaljno za svaki pojedinačni slučaj razmatran u radu. Kao što je rečeno i u uvodu, ovo je rezultiralo time da su neka razmatranja ponovljena u radu u više navrata. Ipak, kandidat je vodio računa da obim tih razmatranja svede na potrebnu meru.

Vezano za pomenute metode, u radu je na primeru lineične elektrode pokazana i veza između varijacionog metoda i metoda srednjih potencijala, odnosno dokazana je činjenica da je ovaj potonji samo poseban slučaj varijacionog metoda ([7.12]). I to je, po uverenju kandidata, rezultat koji bi mogao da bude jedan od doprinosa ovog rada.

Iako se rad bavi nehomogenostima u okolini uzemljivačkih sistema, zbog verifikacije metoda rešen je i određen broj problema uzemljivačkih sistema u homogenoj zemlji. To su pre svega problemi temeljnih uzemljivača stubova izvedenih kao zrakaste ili prstenaste strukture, čija su rešenja bila dostupna kandidatu ([7.7], [7.13], [7.14]). Iz istog razloga, u pojedinim primerima korišćeni su i rezultati i analize uzemljivačkih sistema u sektoralnoj zemlji ([7.15]).

Bez obzira na to što se u radu domeni tretiraju kao poluprovodni, u okviru PRILOGA 3 opravdana je činjenica da su u okviru disertacije po pravilu su prezentovani rezultati koji se odnose na realni deo potencijala i impedanse uzemljivačkih sistema, osim u slučajevima kada su referentni rezultati uključivali i vrednost reaktanse. Osnova za ovakav pristup je činjenica da je za kvazistacionarnu pobudu i realne vrednosti parametara tla, vrednost imaginarnog dela kompleksne specifične provodnosti za nekoliko redova veličine manja od vrednosti njenog realnog dela.

Konačno, ovaj rad je koncipiran kao "prilog rešavanju" problema cilindričnih i polusferičnih nehomogenosti tla. Pristup, analize i rezultati izloženi u njemu predstavljaju solidnu osnovu za dalja istraživanja kako nabrojanih, tako i drugih tipova nehomogenosti.

7.1 LITERATURA

- [7.1] D. M. Veličković, "Green's function of spherical body", *Euro Electromagnetics, EUROEM '94*, May 30 – June 4, 1994, Bordeaux, France, Conf. Proc., THp-09-04.
- [7.2] P. D. Rančić, "A new concept for linear grounding system analysis", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, IIEC '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp 103-116.

- [7.3] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*, Mc Grow-Hill Book Company, New York /London, 1941.
- [7.4] J. C-E. Sten, I. V. Lindell, "Electrostatic image theory for the dielectric sphere with an internal source", *Microwave and optical technology letters*, Vol 5, No. 11, October 1992, pp 579-602.
- [7.5] P. D. Rančić, "A point ground electrode in the presence of spherical ground inhomogeneity: analysis of two approximate closed form solutions for electrical scalar potential", *International PhD Seminar Computational Electromagnetics and Technical Applications*, Banja Luka, Bosnia and Herzegovina, August 28-September 01, 2006, Proc. of Papers, pp 213-223, dostupno na: http://www.phd.etfbl.net/files/Works_PDF/Rancic%20Predrag.pdf.
- [7.6] P. D. Rančić, "Jedan jednostavan model cilindričnog temeljnog uzemljivača stuba", Tehnički izveštaj, TIL-GS-04, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2007.
- [7.7] Tehnička preporuka br 9, ZBIRKA TEHNIČKIH PREPORUKA ED SRBIJE, Beograd 2000.
- [7.8] T. Radojičić, *Betonske konstrukcije*, Prosveta, Niš, 1981.
- [7.9] M. Chouteau, S. Beaulieu, *An investigation on application of the electrical resistivity tomography method to concrete structures*, Geophysics 2002, Los Angeles, CA, USA, April 15-19, dostupno na: http://www.dot.ca.gov/hq/esc/geotech/gg/geophysics2002/050chouteau_resistivity_tomography.pdf.
- [7.10] J. Ribič, J. Podlipnik, "Uzemljenje i negativni učinci upotrebe pocinčanih uzemljivača u temeljima objekata", Web prezentacija Kompanije Hermi, dostupno na: <http://www.hermi.si/bih/Projektanti/UzemljenjeinegativniuC4%8Dinciupotrebe/tabid/442/Default.aspx>.
- [7.11] Web prezentacija firme ELEKTROIZGRADNJA, Bajina Bašta, "Armirano betonski montažni temelji EBB-MT1", dostupno na: http://www.ebb.co.yu/temeljihtml_files/armirano%20betonski%20montažni%20temelji%20EBB-MT1.htm.
- [7.12] P. D. Rančić, "Varijaciona analiza lineičnog uzemljivačkog sistema (US)", Tehnički izveštaj, TIL-GS-02, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2007.
- [7.13] Lj. Gerić, "Karakteristike prstenastih uzemljivača", JUNAKO CIGRE, Ref. 22-07, str. 93-110, 1977.
- [7.14] J. Nahman, *Uzemljenje neutralne tačke distributivnih mreža*, Naučna knjiga, Beograd, 1980, str. 281-288.
- [7.15] P. D. Rančić, S. Z. Đokić, Z. P. Stajić, "Vertical ground rod (VGR) in inhomogeneous earth of sectoral type", *El. Letters*, Vol. 30, No. 19, 1994, pp 1562-1564.

8. PRILOZI

PRILOG 1 - ODREĐIVANJE INTEGRALA $\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha|b|}}{\alpha} J_0(\alpha\rho) d\alpha$, $b \in R$

Na osnovu izraza

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha|b|}}{\alpha} J_0(\alpha\rho) d\alpha = - \int_{\alpha=0}^{\infty} e^{-\alpha|b|} J_1(\alpha\rho) \frac{\partial \rho}{\partial \eta} d\alpha = - \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \int_{\alpha=0}^{\infty} e^{-\alpha|b|} J_1(\alpha\rho) d\alpha \quad (8.1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} &= \int_{\alpha=0}^{\infty} e^{-\alpha|b|} J_0(\alpha\rho) d\alpha = \\ &= J_0(\alpha\rho) \frac{e^{-\alpha|b|}}{-|b|} \int_{\alpha=0}^{\infty} d\alpha - \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha|b|}}{-|b|} [-J_1(\alpha\rho)] \rho d\alpha = \frac{1}{|b|} - \frac{\rho}{|b|} \int_{\alpha=0}^{\infty} e^{-\alpha|b|} J_1(\alpha\rho) d\alpha \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

pri čemu je uzeta u obzir jednačina (2.2.41) i činjenica da je ([8.1]),

$$\frac{\partial}{\partial x} J_0(x) = -J_1(x) \quad (8.1.3)$$

dobija se

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha|b|}}{\alpha} J_0(\alpha\rho) d\alpha = \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \left[\frac{|b|}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} - 1 \right] \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \frac{|b| - \sqrt{\rho^2 + b^2}}{\sqrt{\rho^2 + b^2}}. \quad (8.1.4)$$

Kombinacijom prethodnog izraza i jednačine

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\ln\left(|b| + \sqrt{\rho^2 + b^2}\right) \right] = - \frac{1}{|b| + \sqrt{\rho^2 + b^2}} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \frac{\partial \rho}{\partial \eta} = - \frac{|b| - \sqrt{\rho^2 + b^2}}{-\rho^2} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + b^2}} \frac{\partial \rho}{\partial \eta}, \quad (8.1.5)$$

konačno je

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha|b|}}{\alpha} J_0(\alpha\rho) d\alpha = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-\ln\left(|b| + \sqrt{\rho^2 + b^2}\right) \right], \quad b \in R. \quad (8.1.6)$$

PRILOG 2 - LEŽANDROVI POLINOMI

Funkcija generatriše Ležandrovih polinoma je, ([8.2])

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 - 2px}} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n P_n(x) \quad \text{za } p^2 \leq 1. \quad (8.2.1)$$

Kada se prethodni izraz podeli sa $p \neq 0$ i stavi $x = \cos \theta$, dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} P_n(\cos \theta) = \frac{1}{p\sqrt{1 + p^2 - 2p\cos \theta}} - \frac{1}{p}. \quad (8.2.2)$$

Kako je na osnovu izraza 3.3.33 i 3.3.38 u [8.1],

$$\int \frac{dp}{p\sqrt{1 + p^2 - 2p\cos \theta}} = -\ln\left(1 - p\cos \theta + \sqrt{1 + p^2 - 2p\cos \theta}\right) + \ln p - \ln 2, \quad (8.2.3)$$

integracijom jednačine (8.2.2), dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n} P_n(\cos\theta) = -\ln\left(1 - p \cos\theta + \sqrt{1 + p^2 - 2p \cos\theta}\right) + C, \quad (8.2.4)$$

gde je C konstanta koja se pojavljuje u okviru neodređenog integrala. Ako se u prethodni izraz smeni $\theta = 0$, i iskoristi uslov $P_n(\cos 0) = P_n(1) = 1$, ([8.3]), dobija se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n} = -\ln 2 - \ln(1 - p) + C. \quad (8.2.5)$$

Smenom $p = 0$ u (8.2.5) dobija se $C = \ln 2$, pa je konačna forma razvoja (8.2.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^n}{n} P_n(\cos\theta) = -\ln\left(\frac{1 - p \cos\theta + \sqrt{1 + p^2 - 2p \cos\theta}}{2}\right). \quad (8.2.6)$$

PRILOG 3 - UTICAJ RELATIVNE DIELEKTRIČNE KONSTANTE TLA NA KVAZISTACIONARNO EM POLJE

Relativna dielektrična konstanta tla je veličina čija je vrednost u ogromnoj meri uslovljena sastavom i karakteristikama zemljišta (rastresitost, vlažnost itd.). U [8.4] opravdano je pretpostavljeno da se ova vrednost kreće između vrednosti konstante za peskovito tle ($\epsilon_r \approx 4$) i dielektrične konstante vode ($\epsilon_r \approx 80$). Takođe, u [8.5] relativna dielektrična konstanta zemljišta određuje na osnovu izraza

$$\epsilon_r = \left(\frac{c}{v}\right)^2, \quad (8.3.1)$$

gde je $c = 3 \times 10^8$ m/s brzina prostiranja EM talasa u vakuumu, dok je v brzina propagacije EM talasa kroz zemljište, za koju je pomenutom radu pretpostavljeno da se kreće u opsegu 1×10^7 m/s – 2.5×10^8 m/s. Na osnovu toga se može zaključiti da se vrednost dielektrične konstante nalazi u u približnom opsegu 1.2 – 900 !

Koja god od ovih vrednosti bila usvojena za relativnu dielektričnu konstantu tla, kada se posmatra pobudno polje industrijske frekvencije od $f = 50$ Hz, koje je od značaja za temu ovog rada, imaginarni deo kompleksne specifične provodnosti $\underline{\sigma} = \sigma + j\omega\epsilon$, može se odrediti kao $\omega\epsilon = \omega\epsilon_0\epsilon_r = 2\pi f\epsilon_0\epsilon_r \cong 2.78 \times 10^{-9} \epsilon_r$. Očigledno je da je čak i za veliko ϵ_r , ova vrednost nekoliko redova veličine manja od specifične provodnosti tla koja je u realnim uslovima reda $\sigma = 10^{-2}$ S/m, dok se njena vrednost za beton kreće između $\sigma = 10^{-3}$ S/m i $\sigma = 10^{-1}$ S/m ("zaokružene" ekstremne vrednosti određene na osnovu [8.6]).

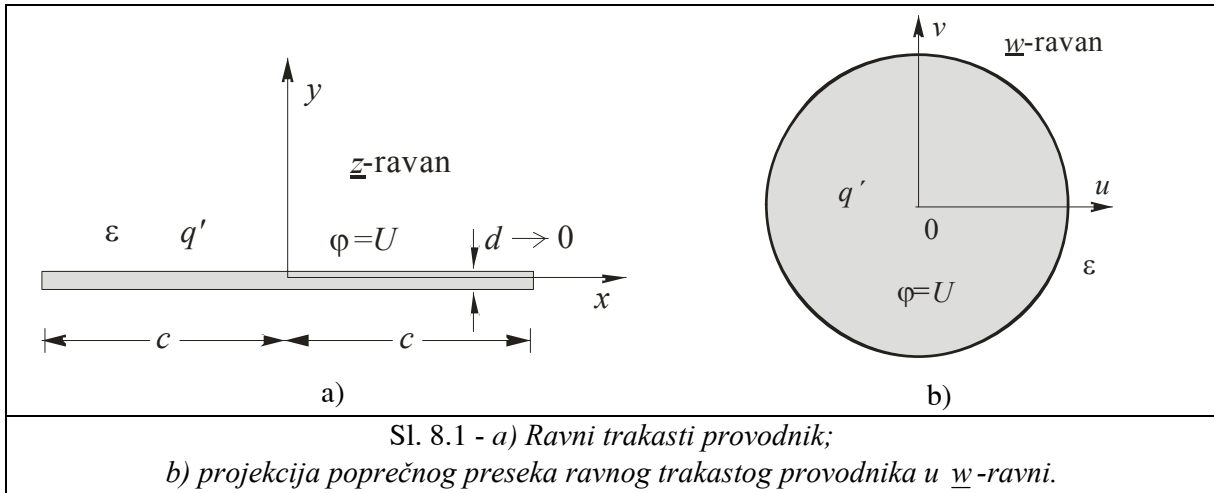
Na osnovu napred izloženog, može se zaključiti da je za EM polje industrijskih frekvencija, kvazistacionarna analiza potpuno prihvatljiv pristup za rešavanje problema, jer je uticaj vrednosti dielektrične konstante tla na karakteristike uzemljivačkih sistema zanemarljiv (imaginarni deo kompleksne specifične provodnosti je veoma mali u odnosu na realnu specifičnu provodnost). Pojedine analize izložene u radu kao teorijski značajnu uključuju i kompleksnu specifičnu provodnost (pri čemu je kod konkretnih izračunavanja $\epsilon_r = 10$ korišćeno kao izabrana vrednost između onih ekstremnih ponuđenih u [8.5]). Kada se pak radi o konkretnim izračunavanjima, po pravilu su prezentovani rezultati koji se odnose na realni deo potencijala i impedanse uzemljivačkih sistema, osim u slučajevima kada su referentni rezultati uključivali i vrednost reaktanse. S obzirom na prethodnu diskusiju, kandidat smatra da je ovakav postupak potpuno opravdan.

PRILOG 4 - EKVIVALENTNI POLUPREČNIK RAVNOG TRAKASTOG PROVODNIKA

Posmatra se ravni trakasti provodnik širine $2c$ i zanemarljive debljine opterećen podužnim naelektrisanjem q' koji se nalazi na potencijalu $\varphi = U$, Sl. 8.1a. Provodnik je smešten u sredini dielektrične konstante ε . Primenom transformacije Žukovskog (Joukowski),

$$\underline{z} = x + jy = \frac{c}{2} \left(\underline{w} + \frac{1}{\underline{w}} \right), \quad \underline{w} = u + jv, \quad (8.4.1)$$

spoljašnja oblast trakastog provodnika preslikava se u spoljnu oblast cilindričnog provodnika kružnog poprečnog preseka jediničnog poluprečnika, Sl. 8.1b ([8.7]).



Sl. 8.1 - a) Ravni trakasti provodnik;

b) projekcija poprečnog preseka ravnog trakastog provodnika u \underline{w} -ravni.

Kako se tokom preslikavanja ne menja niti potencijal niti ukupno naelektrisanje elektrode, kompleksni potencijal može se u \underline{w} -ravni izraziti kao

$$\underline{\Phi} = U - \frac{q'}{2\pi\varepsilon} \ln \underline{w}. \quad (8.4.2)$$

Na velikim udaljenostima, kada je $z \gg c$ je $\underline{z} \approx \frac{c}{2} \underline{w}$, pa je kompleksni potencijal

$$\underline{\Phi} \approx U - \frac{q'}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{2\underline{z}}{c} = U - \frac{q'}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{\underline{z}}{a_e}. \quad (8.4.3)$$

Na osnovu prethodnog izraza, za ekvivalentni poluprečnik trake dobija se

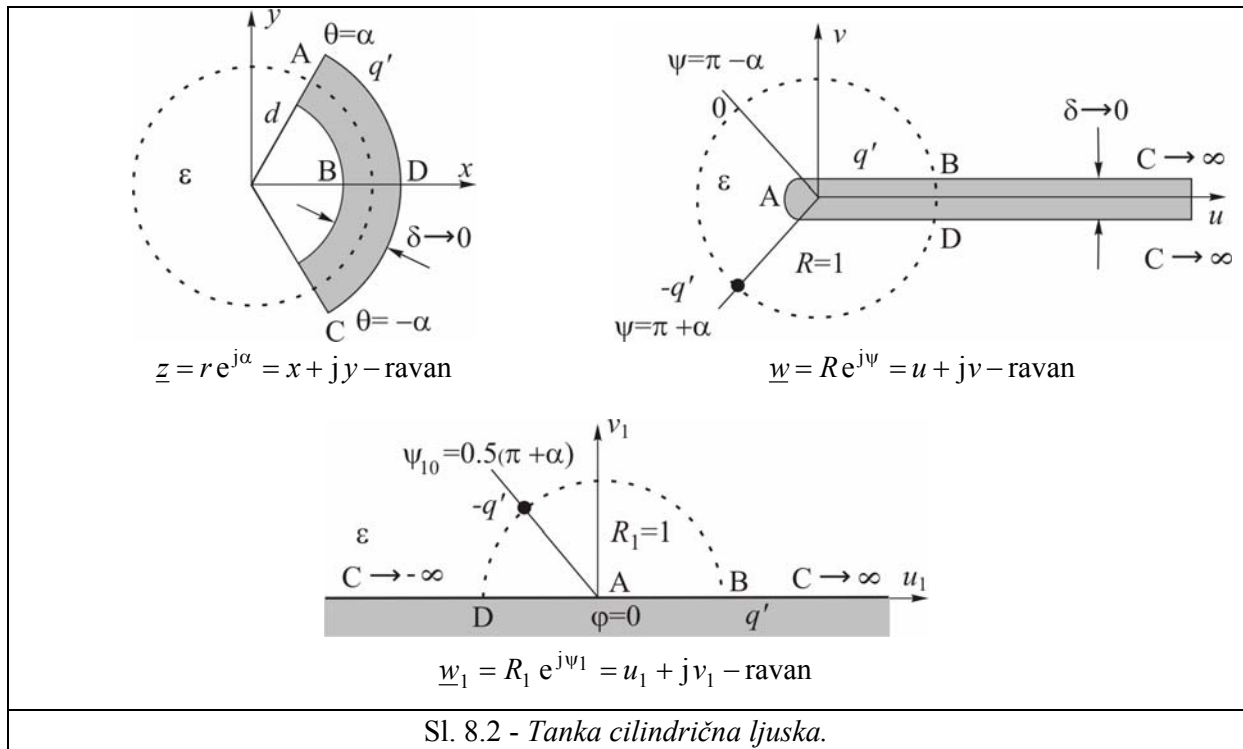
$$a_e = \frac{c}{2} = \frac{2c}{4}. \quad (8.4.4)$$

PRILOG 5 - EKVIVALENTNI POLUPREČNIK OVALNE CILINDRIČNE TRAKE

Posmatra se tanka cilindrična ovalna traka poluprečnika d i ugaonog otvora 2α , Sl. 8.2. Primenom bilinearne transformacije ([8.7]),

$$\underline{w} = e^{j\alpha} \frac{d^* - \underline{z}}{\underline{z} - d}, \quad \underline{d} = d e^{j\alpha}, \quad (8.5.1)$$

spoljašnjost ljuske iz \underline{z} -ravni se preslikava na spoljašnjost tanke polubeskonačne ploče u \underline{w} -ravni definisane sa $r = d$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$. Podužno opterećenje $-q'$ se iz beskonačnosti preslikava u tačku $R = 1$, $\psi = \pi + \alpha$. Pomoću konformnog preslikavanja $\underline{w}_1 = \sqrt{\underline{w}}$, sistem se iz \underline{w} -ravni preslikava na podužno naelektrisanje iznad provodne ravni na pravcu $R_1 = 1$ $\psi = 0.5(\pi + \alpha)$.



Sl. 8.2 - Tanki cilindrična ljuska.

Kompleksni potencijal u \underline{w}_1 -ravni je

$$\underline{\Phi} = \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{w_1 - w_{10}}{w_1 - w_{10}^*}, \quad w_{10} = e^{j\frac{\pi+\alpha}{2}}. \quad (8.5.2)$$

Na velikim udaljenostima od ljuske ($r \gg d$), kompleksni potencijal je

$$\underline{\Phi} = \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{w_{10}(d - d^*)}{2(w_1 - w_{10}^*)z}, \quad (8.5.3)$$

dok je skalar potencijal

$$\phi = \frac{q'}{2\pi\epsilon} \ln \frac{a_e}{r}, \quad \text{gde je} \quad (8.5.4)$$

$$a_e = \frac{1}{2} \left| \frac{w_{10}(d - d^*)}{w_1 - w_{10}^*} \right| = d \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (8.5.5)$$

ekvivalentni poluprečnik ovalne trake sa Sl. 8.2.

PRILOG 6 - ODREĐIVANJE INTEGRALA $\int \frac{x^m}{\sqrt{a_2x^2 + a_1x + a_0}}$,

Rešenje integrala oblika $\int \frac{x^m}{\sqrt{a_2x^2 + a_1x + a_0}}$, pretpostavlja se u obliku, ([8.8])

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{a_2x^2 + a_1x + a_0}} dx = Q_{m-1}(x)\sqrt{a_2x^2 + a_1x + a_0} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{a_2x^2 + a_1x + a_0}}, \quad (8.6.1)$$

gde je $Q_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k$, polinom stepena $m-1$, a λ nepoznata konstanta.

Rešenje integrala sa desne strane izraza (8.6.1) je

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a_2 x^2 + a_1 x + a_0}} = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \ln \left[\frac{a_1 + 2\sqrt{a_2}(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_0 + a_1 + a_2})}{2\sqrt{a_0 a_2} + a_1} \right]. \quad (8.6.2)$$

Diferenciranjem izraza (8.6.1) i izjednačavanjem koeficijenata leve i desne strane, za određivanje koeficijenata polinoma Q_{m-1} , b_k , $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ i nepoznate konstante λ može se formirati procedura rekurentnog karaktera,

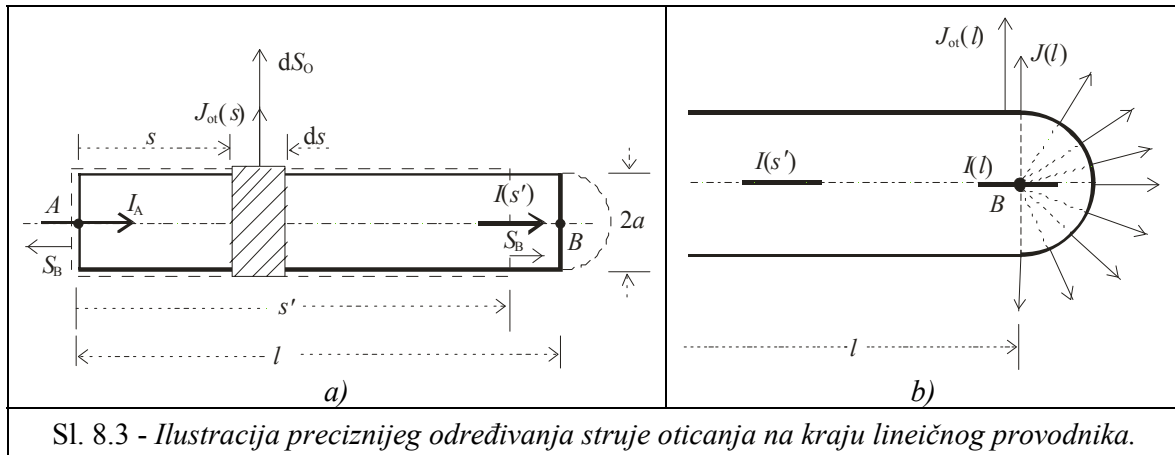
$$\begin{aligned} b_{m-1} &= \frac{1}{ma_2}, \\ b_{m-2} &= -\frac{(m-0.5)a_1}{(m-1)a_2} b_{m-1}, \\ b_k &= -\frac{b_{k+2}(k+2)a_0 + b_{k+1}(k+1.5)a_1}{(k+1)a_2}, k = m-3, m-2, \dots, 0, \\ \lambda &= -a_0 b_1 - \frac{a_1 b_0}{2}. \end{aligned} \quad (8.6.3)$$

PRILOG 7 - PRECIZNIJI IZRAZ ZA ODREĐIVANJE STRUJE NA KRAJU LINEIČNOG PROVODNIKA

Za bliže određivanje nepoznate raspodele struje na kraju provodnika posmatra se bilans ukupne totalne gustine struje u zatvorenom cilindričnom domenu omeđenim zatvorenom površinom levog i desnog bazisa površine $S_B = a^2 \pi$ i površine omotača $S_O = 2\pi a s'$, Sl. 8.3a ([8.9]). Domen obuhvata deo provodnika koji pripada sistemu elektroda uzemljivačkog sistema. Ako je specifična provodnost provodnika mnogo veća od specifične provodnosti okolne sredine, $\sigma_p \gg \sigma_{ok}$, može se smatrati da je vektor gustine struje opticanja J_{ot} upravan na površinu provodnika, odnosno na površinu omotača S_O . Shodno ovoj činjenici, prema Sl. 8.3a, prvi Kirhofov zakon dobija oblik

$$\oint_{S_B + S_O + S_B} J_{tot} dS = -\frac{I_A}{S_B} S_B + \oint_{S_O} J_{ot} dS_O + \frac{I(s')}{S_B} S_B = 0, \text{ odnosno} \quad (8.7.1)$$

$$-I_A + \int_{s=0}^{s'} I_{ot} ds + I(s') = 0. \quad (8.7.2)$$



Sl. 8.3 - Ilustracija preciznijeg određivanja struje oticanja na kraju lineičnog provodnika.

Diferenciranjem prethodnog izraza dobija se

$$I_{ot}(s') = -I'(s'), \quad (8.7.3)$$

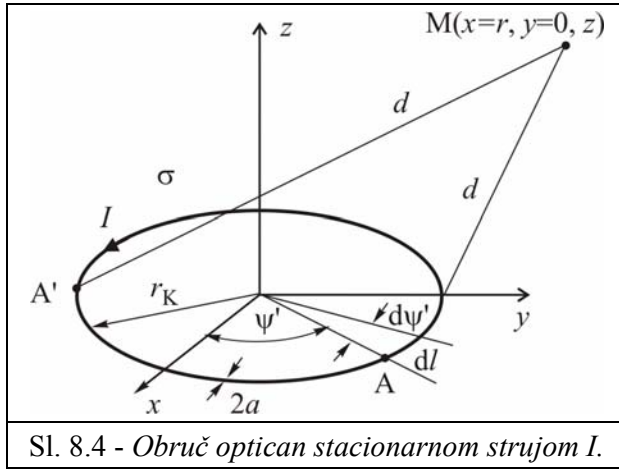
tj. može se zaključiti da je struja oticanja po jedinici dužine jednaka je negativnom prvom izvodu nepoznate raspodele struje. Prethodno navedeni uslov koristi se za precizniju karakterizaciju struje na slobodnom kraju provodnika. Ako je kraj posmatranog provodnika slobodan i modelovan polusferičnim završetkom kao na Sl. 8.3b, tada je

$$J(l) = \frac{I(l)}{2a^2\pi} = J_{ot}(l) = -\frac{I'(l)}{2a\pi} \quad (8.7.4)$$

odakle sledi da je

$$I(l) = -aI'(l). \quad (8.7.5)$$

PRILOG 8 - POTENCIJAL U OKOLINI LINEIČNOG OBRUČA OPTICANOG STACIONARNOM STRUJOM



Sl. 8.4 - Obruč optican stacionarnom strujom I.

Posmatra se usamljeni lineični obruč poluprečnika r_K načinjen od žice kružnog poprečnog preseka poluprečnika a , smešten u sredini specifične provodnosti σ , Sl. 8.4.¹ Cilindrični koordinatni sistem postavljen je kao na Sl.8.4. S obzirom na simetriju sistema, opravdano je pretpostaviti da je gustina struje oticanja stalna i da se može odrediti kao

$$I_{ot} = \frac{I}{2r_K\pi}. \quad (8.8.1)$$

Strujni element smešten na elementu obruča $dl = r_K d\psi'$ u okolini tačke A ponaša se kao tačkasti strujni izvor sa kojeg otiče ukupna struja $dI = I_{ot} dl = I_{ot} r_K d\psi'$. Potencijal ovog izvora u tački M smeštenoj u ravni $y = 0$ je

$$d\phi = \frac{dI}{4\pi\sigma d} = \frac{I_{ot} r_K d\psi'}{4\pi\sigma d} = \frac{I_{ot} r_K d\psi'}{4\pi\sigma\sqrt{r^2 + z^2 + r_K^2 - 2r_K r \cos\psi'}}. \quad (8.8.2)$$

Isti potencijal stvara i strujni element u okolini tačke A', simetrične tački A u odnosu na ravan $y = 0$, pa se rezultujući potencijal može superpozicijom odrediti kao

$$\phi = \int d\phi = 2 \int_0^\pi \frac{I_{ot} r_K d\psi'}{4\pi\sigma\sqrt{r^2 + z^2 + r_K^2 - 2r_K r \cos\psi'}}. \quad (8.8.3)$$

Dobijeni izraz važi u bilo kojoj tački u okolini obruča. Uvođenjem smene $\psi' = \pi - 2\alpha$, dobija se

$$\int_0^\pi \frac{d\psi'}{\sqrt{r^2 + z^2 + r_K^2 - 2r_K r \cos\psi'}} = \frac{2}{\sqrt{z^2 + (r_K + r)^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{2K(\pi/2, k)}{\sqrt{z^2 + (r_K + r)^2}}, \quad (8.8.4)$$

gde je

$$K(\pi/2, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad (8.8.5)$$

potpuni eliptički integral prve vrste i

¹ Procedura opisana u ovom prilogu identična je onoj izloženoj u [8.10], sa tom razlikom da se pomenuta analiza odnosi na obruč ravnomerno opterećen podužnim naelektrisanjem (elektrostatički potencijal).

$$k^2 = \frac{4r_k r}{(r_k + r)^2 + z^2}, \quad (8.8.6)$$

njegov moduo. Konačno je potencijal u okolini obruča sa Sl. 8.4

$$\varphi = \frac{I}{2\pi^2 \sigma \sqrt{(r_k + r)^2 + z^2}} K\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad (8.8.7)$$

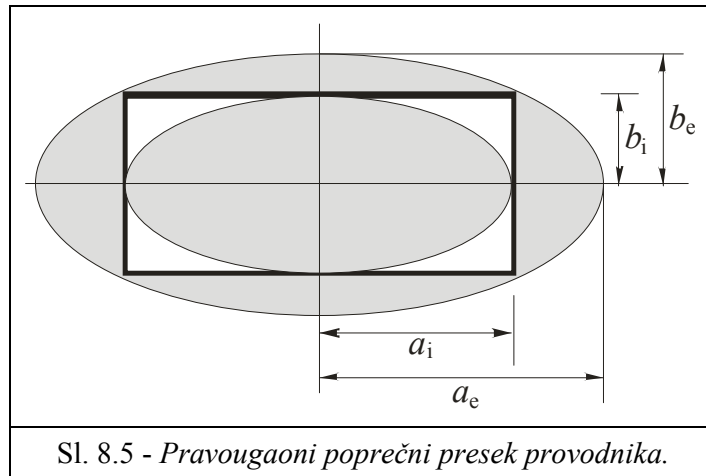
gde je $I = I_{ot} 2r_k \pi$.

PRILOG 9 - ODREĐIVANJE EKVIVALENTNOG POLUPREČNIKA PROVODNIKA PRAVOUGAONOG POPREČNOG PRESEKA

Ekvivalentni poluprečnik provodnika pravougaonog poprečnog preseka dimenzija a i b može se približno odrediti pomoću metoda procene [8.11, 8.12]. Kao pomoćne elektrode koriste se upisana i opisana cilindrična elektroda, Sl. 8.5, čiji su poprečni preseki konfokalne elipse poluosa

$$a_i = \frac{a}{2} \text{ i } b_i = \frac{b}{2} \text{ (za upisanu elektrodu), odnosno} \quad (8.9.1)$$

$$a_e = \frac{\sqrt{a(a+b)}}{2} \text{ i } b_e = \frac{\sqrt{b(a+b)}}{2} \text{ (za opisanu elektrodu).} \quad (8.9.2)$$



Granice intervala kome pripada tačna vrednost poluprečnika su

$$a_{edonje} = \frac{a_i + b_i}{2} = \frac{a+b}{4} \text{ i } a_{egornje} = \frac{a_e + b_e}{2} = \frac{\sqrt{a+b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{4}. \quad (8.9.3)$$

Konačno je približna vrednost ekvivalentnog poluprečnika

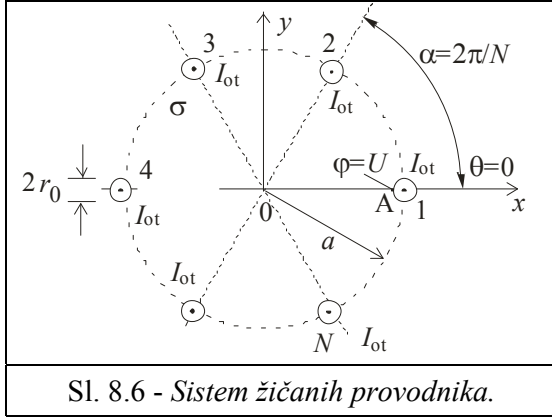
$$a_e = \frac{a_{edonje} + a_{egornje}}{2} = \frac{a+b + \sqrt{a+b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{8}. \quad (8.9.4)$$

Za $a = b$, dobija se za ekvivalentni poluprečnik kvadratnog poprečnog preseka stranice a ,

$$a_e = \frac{a(1 + \sqrt{2})}{4}. \quad (8.9.5)$$

Opisana procedura može se primeniti ako je površina poprečnog preseka trake $S_{min} \geq 100 \text{ mm}^2$ ([8.11]).

PRILOG 10 - ODREĐIVANJE EKVIVALENTNOG POLUPREČNIKA SISTEMA ŽIČANIH PROVDNIKA



Sl. 8.6 - Sistem žičanih provodnika.

Primenom funkcije kompleksne promenljive,

$$\underline{w} = C_1 \ln \underline{z} + C_2, \quad \underline{z} = r e^{j\theta} \quad (8.10.1)$$

na sistem sastavljen od N kavezastih provodnika smeštenih u linearnu sredinu specifične provodnosti σ sa kojih otiče struja podužne gustine I_{ot} , Sl. 8.6, potencijal se može napisati kao

$$\underline{w} = -\frac{I_{ot}}{2\pi\sigma} \sum_{n=1}^N \ln(\underline{z} - \underline{z}_n) + C, \quad (8.10.2)$$

gde je $\underline{z}_n = a e^{j(n-1)\alpha}$ i $\alpha = 2\pi/N$, dok je C konstanta čija vrednost zavisi od izbora referentne tačke, [8.3].

Kako je na osnovu stava o faktorizaciji polinoma $\underline{z}^N - a^N = \prod_{n=1}^N (\underline{z} - \underline{z}_n)$, za kompleksni potencijal dobija se

$$\underline{w} = -\frac{I_{ot}}{2\pi\sigma} \ln(\underline{z}^N - a^N) + C. \quad (8.10.3)$$

Električni skalar potencijal se sada određuje na osnovu izraza

$$\varphi = \text{Re}(\underline{w}) = -\frac{I_{ot}}{4\pi\sigma N} \ln(r^{2N} + a^{2N} - 2r^N a^N \cos N\theta) + C. \quad (8.10.4)$$

Primenom prethodnog izraza za potencijal od usamljenog provodnika, potencijal u tački A na Sl. 8.6, (sa koordinatama $x = a + r_0, y = 0$, tj. $r = a + r_0, \theta = 0$) je

$$U = \text{Re}(\underline{w}) \Big|_{\substack{x=R+r_0 \\ y=0}} = -\frac{I_{uk}}{2\pi\sigma N} \ln((a + r_0)^N - R^N) + C, \quad (8.10.5)$$

gde je $I_{uk} = N I_{ot}$ ukupna podužna struja oticanja sa sistema. Kada se iskoristi uslov da je $r_0 \ll 2a\pi/N$ može se napisati $(a + r_0)^N \approx a^N + N a^{N-1} r_0$, pa je potencijal usamljenog kaveza približno jednak

$$U = \text{Re}(\underline{w}) \Big|_{\substack{x=R+r_0 \\ y=0}} = -\frac{I_{uk}}{2\pi\sigma N} \ln(N a^{N-1} r_0) + C. \quad (8.10.6)$$

Ako se umesto kaveza posmatra cilindrična elektroda kružnog poprečnog preseka ekvivalentnog poluprečnika a_e , podužne struje oticanja I_{uk} i potencijala jednakog potencijalu kaveza, može se postaviti izraz

$$U = -\frac{I_{uk}}{2\pi\sigma} \ln(a_e) + C. \quad (8.10.7)$$

Upoređivanjem izraza (8.10.6) i (8.10.7) za ekvivalentni poluprečnik sistema kavezastih provodnika sa Sl. 8.6, dobija se

$$a_e = a^N \sqrt[N]{\frac{N r_0}{a}}. \quad (8.10.8)$$

PRILOG 11 - LINEIČNI PROVODNIK U PRISUSTVU NEHOMOGENOSTI SEKTORALNOG TIPa

Posmatra se nehomogena zemlja aproksimirana sa dva vertikalna sektora parametara σ_i , ε_i , μ_i , $\underline{\sigma}_i = \sigma_i + j\omega\varepsilon_i$, $\underline{\gamma}_i = (j\omega\mu_i\underline{\sigma}_i)^{1/2}$, (specifična provodnost, električna permitivnost, magnetna propustljivost, kompleksna specifična provodnost i kompleksna konstanta prostiranja, respektivno $i=1,2$, Sl. 8.7. Parametrima vazduha pridružena je vrednost indeksa $i=0$. Prava lineična elektroda, kroz koju protiče struja $I(s')$, smeštena je u sredini 1. Izraz za potencijal u okolini elektrode, u tački M definisanoj vektorom položaja \vec{r} je oblika [8.9],

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\underline{\sigma}_i} \int_{s'_k=0}^{l_k} I(s') \frac{\partial}{\partial s'} F_i^*(\vec{r}, s') ds', \quad i=1,2, \quad (8.11.1)$$

gde indeks i definiše sredinu u kojoj se potencijal određuje. Pri tome je

$$F_{11}^* = \left(\frac{1}{r_{1k}} + R_{z10} \frac{1}{r_{2k}} \right) + R_{z12} \left(\frac{1}{r_{3k}} + R_{z10} \frac{1}{r_{4k}} \right) \text{ i } F_{21}^* = T_{z12} \left(\frac{1}{r_{1k}} + R_{z10} \frac{1}{r_{2k}} \right), \quad (8.11.2)$$

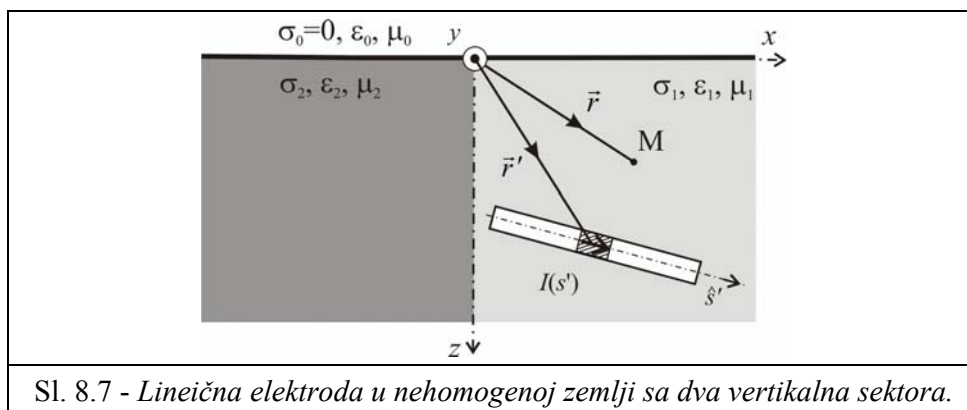
gde su koeficijenti refleksije i transmisije definisani na isti način kao u 2.2.1.1, odnosno

$$R_{z01} = \frac{\underline{\sigma}_0 - \underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_0 + \underline{\sigma}_1}, \quad R_{z12} = \frac{\underline{\sigma}_1 - \underline{\sigma}_2}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2} \text{ i } T_{z12} = \frac{2\underline{\sigma}_1}{\underline{\sigma}_1 + \underline{\sigma}_2}. \text{ U izrazima (8.11.2) je}$$

$$r_{mk} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+(-1)^m z')^2}, \quad m=1,2 \text{ i} \quad (8.11.3)$$

$$r_{mk} = \sqrt{(x+x')^2 + (y-y')^2 + (z+(-1)^m z')^2}, \quad m=3,4,$$

gde su x' , y' i z' tekuće koordinate duž pravca integracije definisanog ortom \hat{s} .



8.1 LITERATURA

- [8.1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York, 8th Printing, Government Printing Office, 10th Printing, 1972, pp 13, 487
- [8.2] M. S. Petković, G. V. Milovanović, *Matematika za studente tehničkih fakulteta-V deo*, Elektronski fakultet u Nišu, 2000, str. 102.
- [8.3] J. V. Surutka, *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989, str. 158.
- [8.4] NASA Earth Science Office web page, "Soil Moisture Retrieval Algorithm", dostupno na: http://wwwghcc.msfc.nasa.gov/landprocess/lp_smrs.html.

- [8.5] A. Ristić, D. Petrovački, "Metod optimalne estimacije radijusa podzemnih instalacija i karakteristika zemljišta", *Zbornik radova LI Konferencije ETRAN-a*, Herceg-Novi, Crna Gora, 4-7. juna 2007. godine, AU 3.2.
- [8.6] M. Chouteau, S. Beaulieu, *An investigation on application of the electrical resistivity tomography method to concrete structures*, Geophysics 2002, Los Angeles, CA, USA, April 15-19, dostupno na:
http://www.dot.ca.gov/hq/esc/geotech/gg/geophysics2002/050chouteau_resistivity_tomography.pdf.
- [8.7] D. M. Veličković, "Equivalent electrodes method application in nonrotational fields theory", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, IIEC '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp 5-30.
- [8.8] D. S. Mitrinović, *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima 2*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989, str. 193.
- [8.9] P. D. Rančić, "A new concept for linear grounding system analysis", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, IIEC '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp 103-116.
- [8.10] D. M. Veličković i saradnici: Z. Ž. Cvetković, N. B. Raičević, S. S. Ilić, V. L. Javor, N. N. Cvetković, D. G. Zulkić, *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Elektromagnetike I deo*, Elektronski fakultet u Nišu, Niš, 2000, str. 33-34.
- [8.11] J. V. Surutka, D. M. Veličković, "Jedan numerički postupak za izračunavanje otpornosti uzemljenja toroidalnih uzemljivača", *XII Međunarodni Simpozijum o obradi podataka INFORMATICA*, Bled, Jugoslavija, Zbornik radova, 1977.
- [8.12] D. M. Veličković, "Primena metoda ekvivalentne elektrode na rešavanje problema uzemljivača", *Elektrotehnika*, 32, broj 3-4, 1989, str. 149-160.

9. LITERATURA

- [1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover Publications, Inc., New York, 8th Printing, Government Printing Office, 10th Printing, 1972.
- [2] C. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1989.
- [3] T. Bojković, N. Mijušković, "Karakteristike prstenastih i zrakastih uzemljivača za stubove nadzemnih vodova 10 (20) kV", *XIV Savetovanje JUKO CIGRE*, Sarajevo 1979, Ref. 322.01.
- [4] E. Boridy, "Solution of Some Electrostatic Potential Problems Involving Spherical Conductors: A Dual Series Approach", *IEEE Trans. on EMC*, Vol. 29, No. 2, 1987, pp. 132-140.
- [5] R. C. Botton, Jr., *Computational Methods for Electromagnetics and Microwaves*, John Wiley & Sons Inc., New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore, 1992.
- [6] В. В. Бургсдорф, А. И. Якобс, *Заземляющие устройства-Электроустановок*, Энергоатомиздат, Москва 1987.
- [7] M. Chouteau, S. Beaulieu, *An investigation on application of the electrical resistivity tomography method to concrete structures*, Geophysics 2002, Los Angeles, CA, USA, April 15-19, dostupno na:
http://www.dot.ca.gov/hq/esc/geotech/gg/geophysics2002/050chouteau_resistivity_tomography.pdf
- [8] N. N. Cvetković, "Linear grounding system: Quasi-stationar structure of Hertz's vector and electric scalar potential", *International PhD Seminar "Numerical field computation and optimization in electrical engineering"*, Ohrid, Macedonia, September 20-25, 2005, Proc. of Full Papers, pp 55-60.
- [9] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "A Simple Model for Numerical Determining of Electrical Characteristics of a Pillar Foundation Grounding System", *16-th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields-COMPUMAG*, June 24-28, 2007, Aachen, Germany, Proceedings, pp. 1193-1194.
- [10] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "A simple model for a numerical determination of electrical characteristics of a pillar foundation grounding system", rad prihvaćen za objavljivanje u časopisu *Engineering Analysis with Boundary Elements -EABE*, izdavač ELSEVIER.
- [11] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "Conductive semi-sphere and linear ground electrode as pillar foundation grounding system", *8th International Conference on Applied Electromagnetics, IIEC 2007*, Niš, Serbia, September 03-05, 2007, Proceedings of Papers (CD), Paper O3-6.
- [12] N. N. Cvetković, P. D. Rančić "Prstenasti uzemljivač napajan kosim zemljovodom: kvazistacionarni antenski model", *Zbornik radova LI Konferencije ETRAN-a*, Herceg-Novi, Crna Gora, 4-7. juna 2007. godine, AP 2.3.
- [13] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "Coupled Linear Grounding Systems: Quasistationary Antenna Model", *XLII International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies - ICEST 2007*, June 24-27, 2007, Ohrid, Macedonia, Proc. of papers, Vol. I, pp. 91-94.

- [14] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "Influence of the semi-spherical semi-conducting ground inhomogeneity on the grounding characteristics", *VII International Symposium on Electromagnetic Compatibility-EMC BARCELONA '06*, 05-09 Sep. 2006, Proc. of papers, pp 918-923.
- [15] N. N. Cvetković, P. D. Rančić: "Single wire grounding electrode in the presence of semi-spherical inhomogeneity", *International PhD Seminar Computational Electromagnetics and Technical Applications*, Banja Luka, Bosnia and Herzegovina, August 28-September 01, 2006, Proceedings of Full Papers, pp 57-63, dostupno na: http://www.phd.etfbl.net/files/Works_PDF/Cvetkovic%20Nenad.pdf.
- [16] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "The Influence of Semi-Spherical Inhomogeneity on the Linear Grounding System Characteristics", *FACTA UNIVERSITATIS, Ser, Elec. Energ*, Vol. 20, No. 2, September 2007, pp. 147-161.
- [17] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "The point ground electrode in vicinity of the semi-spherical inhomogeneity", *Serbian Journal of Electrical Engineering*, Vol. 2, No. 2, Nov. 2005, pp. 163-172.
- [18] N. N. Cvetković, P. D. Rančić, "Uticaj polusferičnog temelja stuba na električne karakteristike konturnog kružnog lineičnog uzemljivača", *Zbornik radova L Konferencije ETRAN-a*, Beograd, 6-9. juna 2006. godine, Sveska II, str. 251-254.
- [19] Web prezentacija firme ELEKTROIZGRADNJA, Bajina Bašta, "Armirano betonski montažni temelji EBB-MT1", dostupno na: http://www.ebb.co.yu/temeljihtml_files/armirano%20betonski%20montažnii%20temelji%20EBB-MT1.htm
- [20] G. Fairweather G, A. Karageorghis, "The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems", *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 9, 1998, pp. 69-95.
- [21] J. Galeis, "Variationally computed antenna impedances and accuracy of resulting current distributions", *Electronic Letters*, Vol. 41 No. 11, 1971, pp. 111-114.
- [22] Lj. Gerić, "Karakteristike prstenastih uzemljivača", *JUNAKO CIGRE*, Ref. 22-07, str. 93-110, 1977.
- [23] T. N. Giao, M. P. Sarma, "Effect of two layer earth on the electric field near HVDC electrodes", *Vol. PAS 91*, No. 6, 1972, 2356-2365.
- [24] В. А. Говорков, *Электрические и Магнитные поля*, Энергия 68, Москва.
- [25] J. Haenninen, K. I. Nikoskinen, I. V. Lindell, "Electrostatic image theory for two anisotropic half-spaces", *Electrical Engineering Volume 88*, 2005, pp. 1-12.
- [26] L. Hannakam, "Allgemeine Lösung des Randwertproblems für eine Kugel durch Integration des ungestörten erregenden Feldes", *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 54, No. 4, 1971, pp. 187-199.
- [27] L. Hannakam, N. Sakaji, "Störung der Potentialverteilung des strombeschichten Erdreiches durch Erzeinschlüße", *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 68, No. 1, 1985, pp. 57-62.
- [28] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, The Macmillan Company, New York, 1969.
- [29] R. J. Heppe, "Step potential and body currents near grounds in two-layer earth", *IEEE Trans. of PAS*, Vol. 98, No. 1, 1979, pp. 45-59.
- [30] А.В.Корсунцев, К.И.Покровская: "Методика расчёта сопротивлений заземления железобетонных фундаментов", *Ел. станций*, 1968, No.1.
- [31] Г. А. Лавров, А. С. Кнйазев, *Приземные и Подземные Антенны: Теория и Практика Антенн, Размещенных Вблизи Поверхности Земли*, Советское Радио, Москва, 1965.
- [32] I. V. Lindell, "Electrostatic image theory for the dielectric sphere", *Radio Sci.*, Vol. 27, No. 1, 1992, pp. 1-8.

- [33] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Macmillan and Co., Publishers to the University of Oxford, 1873.
- [34] J. R. Mautz, "Variational aspects of the reaction in the Method of Moments", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 42, No. 12, 1994, pp. 1631-1638.
- [35] B. H. McDonald, M. Friedman, A. Wexler, "Variational solution of integral equations", *IEEE Transactions on Microwave theory and techniques*, Vol. MTT-22, No. 3, 1974, pp. 237-248.
- [36] R. Mitra (Ed.), *Computer Techniques for Electromagnetics*, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto-Sidney-Braunschweig, 1973.
- [37] D. S. Mitrinović, *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima 2*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.
- [38] J. Nahman, "Digital calculation of earthing systems in nonuniform soil", *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 62, 1980, pp. 19-24.
- [39] J. Nahman, *Uzemljenje neutralne tačke distributivnih mreža*, Naučna knjiga, Beograd, 1980,
- [40] NASA Earth Science Office web page, "Soil Moisture Retrieval Algorithm", dostupno na: http://www.ghcc.msfc.nasa.gov/landprocess/lp_smrs.html.
- [41] M. Niegl, "Erdungsanlagen in Schichtböden", *Electrical Engineering*, Vol. 81, No. 5, 1998, pp. 333-341.
- [42] M. S. Petković, G. V. Milovanović, *Matematika za studente tehničkih fakulteta-V deo*, Elektronski fakultet u Nišu, 2000.
- [43] B. Popović, "Polynomial Approximation of Current Along Thin Symmetrical Cylindrical Dipole", *proc. IEE*, Vol. 117, No 5, 1970, pp. 873-878.
- [44] B. D. Popović, Z. D. Popović, "Thin cylindrical antenna: variational solution with polynomial current Approximation", *The Radio and Electronig Engineer*, Vol. 3, No. 3, 1967, pp. 493-500.
- [45] T. Radojičić, *Betonske konstrukcije*, Prosveta, Niš, 1981.
- [46] P. D. Rančić, "Antenski model za kvazistacionarnu analizu uzemljivačkog sistema stuba", Tehnički izveštaj, TTL-GS-8, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2007.
- [47] P. D. Rančić, "A new concept for linear grounding system analysis", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, IIEC '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp. 103-116.
- [48] P. D. Rančić, "A point ground electrode in the presence of spherical ground inhomogeneity: analysis of two approximate closed form solutions for electrical scalar potential", *International PhD Seminar Computational Electromagnetics and Technical Applications*, Banja Luka, Bosnia and Herzegovina, August 28-September 01, 2006, Proc. of Papers, pp. 213-223, dostupno na: http://www.phd.etfbl.net/files/Works_PDF/Rancic%20Predrag.pdf.
- [49] P. D. Rančić, "Jedan jednostavan model cilindričnog temeljnog uzemljivača stuba", Tehnički izveštaj, TIL-GS-04, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2007.
- [50] P. D. Rančić, "Osnovni izrazi za izračunavanje strukture EM polja proizvoljno postavljenog Hercovog dipola u nehomogenoj zemlji koja je aproksimirana sa N homogenih i izotropnih slojeva-kvazistacionarna analiza", Tehnički izveštaj, TEH-RP-EM-11b, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, Januar 1998.
- [51] P. D. Rančić, "Varijaciona analiza lineičnog uzemljivačkog sistema (US)", Tehnički izveštaj, TIL-GS-02, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2007.

- [52] P. D. Rančić, *Električne instalacije u zgradama-Uzemljenja i uzemljivači*, Monografija u pripremi, Laboratorija za električne instalacije i osvetljenje, Elektronski fakultet, Univerzitet u Nišu, 2008.
- [53] P. D. Rančić, N. N. Cvetković, "Current Distribution and Impedance of Ring Electrode Pillar Grounding System: Quasistationary Antenna Model", *8th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, TELSIKS 2007*, September 26-28, 2007, Niš, Serbia, Proceeding of papers, Vol II, pp. 569-572.
- [54] P. D. Rančić, S. Z. Djokić, Z. P. Stajić, "Vertical ground rod (VGR) in inhomogeneous earth of sectoral type", *El. Letters*, Vol. 30, No. 19, 1994, pp. 1562-1564.
- [55] P. D. Rančić, Z. P. Stajić, "Pločasta uzemljivačka elektroda u nehomogenoj zemlji sektoralnog tipa", *XXII Simpozijum JUKO - CIGRE '95*, Sekcija II-Vodovi i Postrojenja, Vrnjačka Banja, Jugoslavija, 22-27. Maj 1995, Zbornik radova, str. R23-13/1-8.
- [56] P. D. Rančić, Z. P. Stajić, Dj. R. Djordjević, B. S. Tošić, "Analysis of linear ground electrodes placed in vertical three-layer earth", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 32, No. 3, 1996, pp. 1505-1508.
- [57] P. D. Rančić, L. V. Stefanović, Dj. R. Djordjević, "A new model of the vertical ground rod in two-layer earth", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 28, No. 2, 1992, pp. 1497-1500.
- [58] P. D. Rančić, L. V. Stefanović, Dj. R. Djordjević, "An improved linear grounding system analysis in two-layer earth", *IEEE Trans. on Mag.*, Vol. 32, No. 5, 1995, pp. 5179-5187.
- [59] P. D. Rančić, L. V. Stefanović, Dj. R. Djordjević, D. J. Gobović, "A new model of the horizontal line ground wire in two-layer earth", *9th Conf. on the Computation of EM Fields, COMPUMAG'93*, Miami, Florida, USA, Oct. 30 - Nov. 4. 1993, Proc., pp. 202-203.
- [60] P. D. Rančić, M. O. Veselinović, Z. P. Stajić, Dj. R. Djordjević, "Analysis of two coupled grounding systems: linear grounding system and plate ground electrode", *II Int. Symp. on Electromagnetics Compatibility EMC '96*, Roma, Italy, Sept. 17-20, 1996, Proc., pp. T-5 856-861.
- [61] K. Reiß, "Deformation des Potentialfeldes einer Punktladung durch eine kugelförmige Material Inhomogenität", *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 74, No. 2, 1990, pp. 135-144.
- [62] K. Reiß, "Kraftwirkungen und Bahnkurven in einem Elektromechanischen Kugel-Punktladungs-System", *Archiv für Elektrotechnik*, Vol. 73, 1990, pp. 141-151.
- [63] J. Ribič, J. Podlipnik, "Uzemljenje i negativni učinci upotrebe pocinčanih uzemljivača u temeljima objekata", Web prezentacija Kompanije Hermi, dostupno na: <http://www.hermi.si/bih/Projektanti/UzemljenjeinegativniuC4%8Dinciupotrebe/tabid/442/Default.aspx>
- [64] J. H. Richmond, "On the variational aspects of the Moment Method", *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 39, No. 4, 1991, pp. 473-479.
- [65] A. Ristić, D. Petrovački, "Metod optimalne estimacije radijusa podzemnih instalacija i karakteristika zemljišta", *Zbornik radova LI Konferencije ETRAN-a*, Herceg-Novi, CrnaGora, 4-7. juna 2007. godine, AU 3.2.
- [66] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, Second Edition, CRC Press, Boca Raton-London-New York-Washington D.C., 2001.
- [67] J. C-E. Sten, I. V. Lindell, "Electrostatic image theory for the dielectric sphere with an internal source", *Microwave and optical technology letters*, Vol 5, No. 11, October 1992, pp. 579-602.
- [68] J. A. Stratton, *Electromagnetic theory*, Mc Grow-Hill Book Company, New York /London, 1941.
- [69] J. V. Surutka, *Elektromagnetika*, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.

- [70] J. V. Surutka, D. M. Veličković, "Jedan numerički postupak za izračunavanje otpornosti uzemljenja toroidalnih uzemljivača", *XII Međunarodni Simpozijum o obradi podataka INFORMATICA*, Bled, Jugoslavija, Zbornik radova, 1977.
- [71] T. Takashima, T. Nakae, R. Ishibahsi, "High frequency characteristics of impedances to ground and field distributions of ground electrodes", *IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems*, Vol. 100 No. 4, 1980, pp. 1893-1900.
- [72] H. Uhlmann (Ed.), D. M. Veličković, K. Brandisky, R. D. Stantcheva, H. Brauer, *Fundamentals of Modern Electromagnetics for Engineering-Textbook for Graduate Students, Part I: Static and Stationary Electrical and Magnetic Field*, Technical University Ilmenau/Germany, 2005.
- [73] D. M. Veličković, *Elektromagnetika-Prva Sveska*, II izdanje, Elektronski fakultet u Nišu, 1999.
- [74] D. M. Veličković, "Equivalent electrodes method", *Scientific Review*, Belgrade, 1996, pp. 207-248.
- [75] D. M. Veličković, "Equivalent electrodes method application in nonrotational fields theory", *Fourth Int. Symp. of Applied Electrostatics, IIEC '96*, Niš, Yugoslavia, May 22-24, 1996, Proc. of Papers, pp. 5-30.
- [76] D. M. Veličković, "Green's function of spherical body," *Euro Electromagnetics, EUROEM '94*, May 30 – June 4, 1994, Bordeaux, France, Conf. Proc., THp-09-04.
- [77] D. M. Veličković, *Metodi za proračun elektrostatčkih polja*, Knjiga prva, Stil-Podvis, Niš, 1982.
- [78] D. M. Veličković, "Numerički i približni metodi za rešavanje problema elektrostatike", *III Jugoslovensko savetovanje o statičkom elektricitetu, ELEKTROSTATIKA 78*, Oktobar 1978, Beograd, Zbornik radova, str. 22-42.
- [79] D. M. Veličković, "Primena metoda ekvivalentne elektrode na rešavanje problema uzemljivača", *Elektrotehnika*, 32, broj 3-4, 1989, str. 149-160.
- [80] D. M. Veličković, "The equivalent electrode method", 34. International Symposium Theoretische Elektrotechnik, 26-31. October, 1981, Ilmenau, DDR, Proceedings, Vol. 2, pp. 125-128.
- [81] D. M. Veličković, "The influence of semiconducting spherical body to the groundings", *Proceeding of Energy Efficiency Forum*, June 15-17, 1994, Varna, Bulgaria.
- [82] D. M. Veličković i saradnici: Z. Ž. Cvetković, N. B. Raičević, S. S. Ilić, V. L. Javor, N. N. Cvetković, D. G. Zulkić, *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Elektromagnetike I deo*, Elektronski fakultet u Nišu, Niš, 2000.
- [83] ZBIRKA TEHNIČKIH PREPORUKA ED SRBIJE, Beograd 2000.



Универзитет у Нишу
Универзитетска библиотека

Овај текст је део Дигиталног репозиторијума, јавно је доступан, и може се слободно користити за личне потребе, у образовне и научне сврхе. Ако користите текст, наведите извор.

Комерцијална употреба текста није дозвољена.

University of Niš
University Library

This text is a part of the Digital repository of public domain. Permission is granted for personal, educational and scientific use. If you do use the document, indicate the source.

No permission is granted for commercial use.

