**Универзитет у Крагујевцу**
**Природно-математички факултет**

**Драгана Ваљаревић**

# СТАТИСТИЧКА ТЕОРИЈА УЗРОЧНОСТИ, СТОХАСТИЧКЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И СВОЈСТВО МАРТИНГАЛНЕ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈЕ

**Докторска дисертација**

**Крагујевац, 2013**

# Садржај

# Увод

Један од важних и основних циљева науке је да се међу догађајима и појавама утврде узрочно-последичне везе. Шта се подразумева под појмом узрочности и како се она може мерити била је тема многих расправа. У економији, Гренџерова узрочност (C. W. Granger, 1969) је веома добро познат концепт и једна од најпримењиванијих метода у истраживањима. Дефиниција узрочности у смислу Гренџера заснива се на идеји да садашњост или будућност не могу узроковати прошлост. У другим научним областима се, такође, дуго расправљало о појму узрочности. Међутим, до битнијег напретка долази тек последњих декада.

Данас, појам узрочности има широку примену у физици, биолошким и социолошким наукама, историји, медицини посебно у епидемиологији, економији и др.

Предмет истраживања ове докторске дисертације је статистичка теорија узрочности и њена примена на слаба решења стохастичких диференцијалних једначина и мартингалну репрезентацију. Показује се да је овај концепт еквивалентан са слабом јединственошћу слабих решења стохастичких диференцијалних једначина и екстремним решењима мартингалног проблема. На овај концепт се могу применити и времена заустављања, па се у складу с тим доказује и еквиваленција са екстремним решењем мартингалног проблема за заустављене процесе, као и са локално јединственим слабим локалним решењима.

Такође, концепт узрочности се може применити и у Теорији мартингала. Наиме, овај концепт се може довести у везу са очувањем својства мартингалности, ортогоналним мартингалима, стабилним потпросторима, као и мартингалним репрезентацијама, које имају примену, нарочито у финансијској математици.

У глави 1 дати су основни појмови из теорије вероватноћа, дефиниција случајног процеса и преглед њихових основних особина. Такође, овде су дате дефиниције мартингала и семимартингала као и стохастичка интеграција у односу на семимартингале. У овој глави су дате и стохастичке диференцијалне једначине са семимартингалима као и њихова строга решења, док ће о слабим решењима више бити речи у глави 3. Даје се и дефиниција узрочности, која се заснива на Гренџеровој узрочности, коју уводи Микланд (P. A. Mykland [32]), а касније њено уопштење даје Љ. Петровић ([34, 36, 37, 38, 39, 40, 42]). Такође, дата дефиниција узрочности је са фиксног времена проширена на времена заустављања. На крају су дати неки основни резултати који се односе на наведене појмове узрочности.

У глави 2 је приказано како се концепт статистичке узрочности може применити у Теорији мартингала. За својство мартингалности, које је везано за филтрације, доказано је да је очување тог својства, када $\sigma$- алгебра информација расте, директно везано за концепт узрочности. Такође, може се успоставити еквиваленција између ортогоналности мартингала и концепта узрочности ([64]). Исто се може доказати и за локалне мартингале и за заустављене локалне мартингале. Концепт узрочности се може повезати и са стабилним потпросторима који садрже здесна непрекидне модификације мартингала облика $M_t = P(A \mid \mathcal{F}_t)$ (видети [44]).

У глави 3 дата су дефинисана слаба решења различитих типова диференцијалних једначина које су генерисане семимартингалима. Наиме, доказано је да је концепт узрочности еквивалентан са слабом јединственошћу слабих решења ([39]). Такође, на слаба решења су примењена и времена заустављања, па је проучавана и веза између локалне јединствености слабих локалних решења и концепта узрочности са временима заустављања. Другачији приступ решавању стохастичких диференцијалних једначина, тј. мартингални проблем је такође разматран и доказана је еквиваленција између екстремног решења мартингалног проблема и узрочности ([41]).

У глави 4 је разматрана веза између концепта узрочности и мартингалне репрезентације у односу на различите филтрације са посебним освртом на већ познате резултате. Показано је да се дати резултати могу применити на слаба решења стохастичких диференцијалних једначина генерисаних семимартингалима, као и на мартингални проблем који је придружен датој једначини.

Делови дисертације 2.2, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2, 3.4, 3.6 садрже нове резултате који су објављени у радовима [39, 41, 44, 64].

# Глава 1

# Основни појмови теорије случајних процеса

Једну од важних области примене теорије вероватноћа чине случајни процеси. Своју примену су нашли у разним областима науке, а нарочито код система за праћење неког физичког процеса чије стање, у произвољном временском тренутку $t$, представља неку случајну величину. Основне дефиниције и тврђења из ове главе могу се наћи у класичној литератури из теорије случајних процеса, на пример у $[6,\ 19,\ 21,\ 25,\ 52,\ 61]$.

## 1.1 Случајни процеси. Дефиниције и особине

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ комплетан простор вероватноћа, тј. простор у коме су сви подскупови скупова мере нула, такође мерљиви. Ова претпоставка није јака рестрикција, а има веома битну улогу. Даље, нека је индексни скуп $I = [0, t_0] \subset R$, $R^d$ $d$-димензионалан Еуклидов простор, $\mathcal{B}_I$ и $\mathcal{B}^d$ Борелова (E. Borel) поља на $I$ и $R^d$, редом.

**Дефиниција 1.1.** *Случајан процес* $X = \{X(t, \omega),\ t \in I,\ \omega \in \Omega\}$ *је фамилија случајних променљивих, индексираних реалним параметром* t, *дефинисаних на истом простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Уместо $X(t, \omega)$ најчешће се користи ознака $X_t(\omega)$ или $X$. Скуп $I$ се назива параметарски или *индексни скуп*. Параметар $t \in I$ се најчешће тумачи као време, а његова фиксирана вредност као временски тренутак, док се $\omega$ може схватити као резултат експеримента. Ако је скуп $I$ пребројив, каже се да је $X$ случајан процес са дискретним параметром, а ако је $I$ интервал, каже се да је $X$ случајан процес са непрекидним параметром.

Случајан процес $X(t, \omega)$ је функција два аргумента: $t \in I$ и $\omega \in \Omega$. За фиксирано $t$ добија се случајна величина, функција $X(\omega)$ која је мерљива у односу на $\mathcal{F}$. За фиксирано $\omega$ добија се реална, неслучајна функција $X(t)$ и то је реализација или *трајекторија* случајног процеса.

**Дефиниција 1.2.** *Случајан процес* $X = \{X_t(\omega), t \in I\}$ *је мерљив ако је функција* $(t, \omega) \to X(t, \omega)$, $(\mathcal{B}_I \times \mathcal{F})$*-мерљива, тј. за свако* $S \in \mathcal{B}^d$

$$\{(t, \omega) : X(t, \omega) \in S\} \in \mathcal{B}_I \times \mathcal{F}.$$

**Дефиниција 1.3.** *Случајни процеси* $X = \{X_t(\omega), t \in I\}$ *и* $Y = \{Y_t(\omega), t \in I\}$, *дефинисани на истом простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *и са параметарским скупом* $I$ *су стохастички еквивалентни ако је за свако* $t \in I$

$$P\{X_t(\omega) = Y_t(\omega)\} = 1.$$

За два стохастички еквивалентна процеса се каже да је један *модификација* другог.

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ комплетан простор вероватноћа. *Филтрација* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_\mathbf{t},\ t \in I\}$ је неопадајућа фамилија под-$\sigma$-алгебри од $\mathcal{F}$, тј. фамилија за коју важи

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t,\ \ s \leq t,$$

у којој је $\sigma$-алгебра $(\mathcal{F}_0)$ комплетирана нула догађајима из $\mathcal{F}$. Филтрација $\mathbf{F}$ обухвата све догађаје из $\mathcal{F}$ до тренутка $t$.

Инклузија међу филтрацијама дефинише се на следећи начин:

**Дефиниција 1.4.** *Филтрација* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \in I\}$ *је потчињена филтрацији* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ *(или* $\mathbf{G}$ *је подфилтрација од* $\mathbf{F}$*) ако је*

$$\mathcal{F}_t \supseteq \mathcal{G}_t \ \text{ за свако } t \in I$$

*и то се означава са* $\mathbf{F} \supseteq \mathbf{G}$.

Интуитивно, $\sigma$-алгебра $(\mathcal{F}_t)$ је колекција догађаја који се могу десити пре или у тренутку $t$, другим речима, то је скуп могућих "прошлости" до тренутка $t$. Филтрације су основни појам у теорији стохастичких процеса и дефиниција основних појмова као мартингала, Марковских процеса, укључује и филтрације.

**Дефиниција 1.5.** *Комплетан простор вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *са филтрацијом* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ *означава се са* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *и назива простор вероватноћа са филтрацијом.*

**Дефиниција 1.6.** *Случајан процес* $X = \{X_t(\omega), t \in I\}$ *је адаптиран (сагласан) у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$ *ако за свако* $t \in I$ *случајна променљива* $X_t$ *јесте* $(\mathcal{F}_t)$*-мерљива.*

Случајан процес $X$ који је $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран, означава се са $(X_t, \mathcal{F}_t)$.

**Дефиниција 1.7.** *Природна филтрација случајног процеса* $X = \{X_t(\omega),\ t \in I\}$ *облика* $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X,\ t \in I\}$ *где је* $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$, *је минимална* $\sigma$*-алгебра у односу на коју су мерљиве све случајне променљиве* $X_s,\ s \leq t$, *и комплетирана је нула догађајима из* $\mathcal{F}$.

Очигледно да ће процес $X$ бити $\mathbf{F}$-адаптиран ако је $\mathbf{F}^X \subseteq \mathbf{F}$.

Више процеса, такође, може да индукује заједничку филтрацију.

$$\mathbf{F}^{X,Y} = \mathbf{F}^X \vee \mathbf{F}^Y = \{\mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{F}_t^Y, t \in I\}.$$

Једна од основних карактеристика сваког процеса $X$ је непрекидност.

**Дефиниција 1.8.** *Случајан процес $X = \{X_t(\omega), t \in I\}$ је непрекидан (слева, здесна), на скупу $S \subseteq I$ ако су скоро све његове трајекторије непрекидне (слева, здесна), за свако $t \in S$.*

За процес $X$ каже се да је $cadlag$ процес, ако је непрекидан здесна и има граничну вредност слева. Уколико је процес непрекидан слева и има граничну вредност здесна, онда се он означава као $caglad$ процес.

**Дефиниција 1.9.** ([6]) *Нека је $\mathbf{F}$ непрекидна филтрација на $(\Omega, \mathcal{F})$ и $X = \{X_t(\omega),\ t \in I\}$ случајан процес дефинисан на $(\Omega, \mathcal{F})$. $X$ је прогресивно мерљив процес ако је за свако $t \in I$ функција $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ $(\mathcal{B}_I \times \mathcal{F}_t)$-мерљива, тј. за свако $S \in \mathcal{B}^d$*

$$\{(s \leq t, \omega) : X(s, \omega) \in S\} \in \mathcal{B}_I \times \mathcal{F}_t.$$

Очигледно је сваки прогресивно мерљив процес, мерљив и адаптиран у односу на филтрацију $\mathbf{F}$. За обрнуто тврђење важи следећи резултат.

**Пропозиција 1.1.** ([52]) *Адаптиран процес са здесна или слева непрекидним трајекторијама је прогресивно мерљив.*

Поставља се питање која је сврха прогресивне мерљивости. Наиме, нека је произвољна филтрација $(\mathcal{F}_t)$ генерисана неким процесом $X_t$. Тада филтрација $(\mathcal{F}_t^X)$ садржи све информације које се могу добити посматрањем процеса $X_t$ пребројиво много пута, до тренутка $t$. Ако је процес $Y_t$ $(\mathcal{F}_t^X)$-адаптиран, онда $Y_t$ представља информације које се могу добити из пребројиво много посматрања процеса $X_t$. Али, понекад су потребне информације које зависе од непребројивог броја посматрања случајног извора информација, тј. процеса $X_t$. У тим случајевима је потребна прогресивна мерљивост.

Класа прогресивно мерљивих процеса је веома велика. Међутим, интересантнији су процеси који имају регуларне трајекторије. Постоје две класе таквих процеса, неки имају трајекторије непрекидне здесна, неки непрекидне слева. Изненађујуће је да постоји тако велика разлика између ове две класе процеса.

Филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t,\ \ t \in I\}$ је *непрекидна здесна* ако је $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigvee_{s>t} \mathcal{F}_s$ за свако $t \in I$ и $\mathcal{F}_{t_0+} = \mathcal{F}_{t_0}$. Аналогно се дефинише *непрекидност слева*: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-} = \sigma\{\bigcap_{s<t} \mathcal{F}_s\}$ за свако $t \in I$ и $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$.

Филтрација $\mathbf{F}$ је непрекидна ако је $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-} = \mathcal{F}_{t+}$.

**Дефиниција 1.10.** ([51]) *Предвидива $(predictable)$ $\sigma$-алгебра $\mathcal{P}$ дефинисана на $\Omega \times R_+$ је најмања $\sigma$-алгебра која је генерисана свим слева непрекидним, адаптираним процесима који имају граничну вредност здесна. Процес који је мерљив у односу на $\mathcal{P}$ се назива предвидив процес.*

Једноставно се може уочити да су предивидиви процеси $(\mathcal{F}_{t-})$-адаптирани.

**Дефиниција 1.11.** ([51]) *Опциона $(optional)$ $\sigma$-алгебра $\mathcal{O}$ дефинисана на $\Omega \times R_+$ је најмања $\sigma$-алгебра генерисана свим здесна непрекидним адаптираним процесима који имају граничну вредност слева $(cadlag)$. Процес који је мерљив у односу на $\mathcal{O}$ се назива опциони процес.*

Како су непрекидни процеси cadlag очигледно је $\mathcal{O} \supset \mathcal{P}$ и важи строга инклузија.

**Дефиниција 1.12.** ([51]) *Адаптиран, cadlag процес $A$ је процес коначне варијације (finite variation process) ако су скоро извесно трајекторије процеса $A$ коначне варијације на сваком интервалу $[0, \infty)$.*

## 1.2 Времена заустављања

После филтрације време заустављања је можда најзначајнији концепт теорије случајних процеса. Како времена заустављања описују тренутке када се догађај реализовао, није изненађујуће што се већина питања из теорије вероватноћа везује за њих. Битно је напоменути да није свако случајно време - време заустављања (види [50]). Један важан пример случајног времена које није време заустављања је моменат када процес $X$ достиже свој максимум на одређеном интервалу.

Ако се параметар $t$ посматра као време, тада је приликом реализације неког феномена (као: земљотрес јачине изнад одређеног нивоа, број посетилаца који може да угрози безбедност неке установе, итд.) потребно посматрати неки одређени временски тренутак $T(\omega)$ када се феномен манифестовао по први пут.

**Дефиниција 1.13.** *Време заустављања у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t)$ је пресликавање $T : \Omega \to [0, \infty]$ ако је за свако $t$*

$$\{T \leq t\} \in (\mathcal{F}_t).$$

Време заустављања представља случајно време реализације посматраног догађаја. Ако се за одређени резултат $\omega$ догађај никад не реализује онда је вредност времена заустављања за ово $\omega$ једнака $+\infty$.

За време заустављања дефинише се и $\sigma$-алгебра која обухвата догађаје реализоване до тренутка $T$ и у тренутку $T$

$$\mathcal{F}_T = \sigma\{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \text{за свако } t \geq 0\}.$$

Наиме, $\sigma$-алгебра $(\mathcal{F}_T)$ се обично посматра као скуп свих догађаја који се реализују пре или у тренутку $T$. Ако је $T$ време заустављања, са $(\mathcal{F}_{T+})$ се означава $\sigma$-алгебра генерисана са $(\mathcal{F}_0)$ и свим скуповима $A$ за које важи да је $A \cap \{T \leq t\} \in (\mathcal{F}_{t+})$ за свако $t$. Ако је $t \in R_+$ и $T(\omega) \equiv t$ тада је $T$ време заустављања и $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$ и $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_{t+}$.

Неке важније особине времена заустављања су дата следећим пропозицијама.

**Пропозиција 1.2.** ([6]) *Ако су $T$ и $S$ времена заустављања, тада су $T \wedge S$ и $T \vee S$ такође времена заустављања. Ако је $\{T_n\}$ растући низ времена заустављања тада је*

$$T = \lim_{n \to \infty} T_n$$

*време заустављања. Ако је филтрација $\mathcal{F}$ здесна непрекидна и $\{T_n\}$ опадајући низ времена заустављања, тада је*

$$T = \lim_{n\to\infty} T_n$$

*време заустављања.*

**Последица 1.1.** ([6]) *Ако је филтрација $\mathcal{F}$ здесна непрекидна и $\{T_n\}$ низ времена заустављања, тада су*

$$\sup_n T_n, \ \inf_n T_n, \ \lim\sup_{n\to\infty} T_n, \ \lim\sup_{n\to\infty} T_n$$

*времена заустављања.*

Филтрација $(\mathcal{F}_T)$ има следеће особине.

**Лема 1.1.** ([6]) *За два времена заустављања $T$ и $S$ и за произвољно $A \in (\mathcal{F}_S)$, важи да је $A \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$. Такође, ако је $S \leq T$ на $\Omega$, тада је $(\mathcal{F}_S) \subseteq (\mathcal{F}_T)$.*

**Лема 1.2.** ([6]) *Нека су $T$ и $S$ времена заустављања. Тада је $\mathcal{F}_{T\wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$ и сваки од догађаја*

$$\{T < S\}, \{S < T\}, \{T \leq S\}, \{S \leq T\}, \{T = S\}$$

*припада филтрацији $\mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$.*

Једноставно се доказује да је следеће тврђење тачно.

**Пропозиција 1.3.** ([6]) *Нека су $T$ и $S$ времена заустављања и $Z$ интеграбилна случајна променљива, тј. $E[|Z|] < \infty$. Тада је:*

*(1)* $E[Z|\mathcal{F}_T] = E[Z|\mathcal{F}_{S\wedge T}], P -$ *с.и. на* $\{T \leq S\}$,

*(2)* $E[E[Z|\mathcal{F}_T]|\mathcal{F}_S] = E[Z|\mathcal{F}_{S\wedge T}], P$*-с.и.*

Нека је $(\mathcal{F}_t)$ филтрација на мерљивом простору $(\Omega, \mathcal{F})$ и $T$ време заустављања. За процес $X$ дефинише се нова случајна променљива $X_T$ на скупу $\{\omega : T(\omega) < \infty\}$ са

$$X_T(\omega) = X_t(\omega), \quad \text{ако је} \quad T(\omega) = t.$$

Ово је позиција процеса $X$ у тренутку $T$.

Ако је $X$ случајан процес и $T$ време заустављања, дефинише се процес заустављен у тренутку $T$, који се означава као $X^T$, са

$$X_t^T = \{X_{t\wedge T} \mid t \in R_+\}.$$

Процес $X^T$ назива се *заустављен процес* и важи

$$X_t^T = X_{t\wedge T} = X_t 1_{\{t<T\}} + X_T 1_{\{t\geq T\}}.$$

Тада је и фамилија $\sigma$-алгебри $\mathbf{F}^T = \{\mathcal{F}_{t\wedge T}\}$ филтрација и важи следећи резултат.

**Пропозиција 1.4.** ([6]) *Ако је $X$ прогресивно мерљив процес и $T$ произвољно време заустављања тада је заустављена случајна променљива $X_T$ мерљива у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_T)$, а заустављен процес $X^T$ прогресивно мерљив у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_{t\wedge T})$.*

**Дефиниција 1.14.** ([6]) *Време заустављања $T$ је предвидиво (predictable) ако постоји низ времена заустављања $\{T_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, тако да је:*

*(1)* $\{T_n(\omega)\}$ *скоро извесно растући низ на* $[0,\infty)$ *и*

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(\omega) = T(\omega) \text{ с.и.}$$

*(2)* $T_n(\omega) < T(\omega)$ *с.и. за свако* $n$ *на скупу* $\{T > 0\}$.

*Каже се да низ $\{T_n\}$ најављује (announce) $T$.*

**Дефиниција 1.15.** ([51]) *Време заустављања $T$ је достижно (accessible) ако постоји низ предвидивих времена заустављања $\{T_k\}$, $k \in \mathbf{N}$, тако да је*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega : T_k(\omega) = T(\omega) < \infty\}\right) = P(T < \infty).$$

*Каже се да низ $\{T_k\}$ покрива $T$.*

**Дефиниција 1.16.** ([51]) *Време заустављања $T$ је потпуно недостижно (totally inaccessible) ако је за свако предвидиво време заустављања $S$ задовољено*

$$P\{\omega : T(\omega) = S(\omega) < \infty\} = 0.$$

Скуп предвидивих процеса је затворен у односу на времена заустављања.

**Пропозиција 1.5.** ([27]) *Ако је $T$ произвољно време заустављања и $X$ предвидив случајан процес, тада је заустављен процес $X^T$ такође предвидив.*

**Дефиниција 1.17.** ([22]) *За процес $H$ каже се да је једноставан предвидив процес ако је облика*

$$H_t = H_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{n} H_i 1_{(T_i,T_{i+1})}(t),$$

*где је $0 = T_1 \leq \ldots \leq T_{n+1} < \infty$ коначан низ времена заустављања, $H_i \in \mathcal{F}_{T_i}$, $|H_i| < \infty$ с.и. за $0 \leq i \leq n$.*

**Дефиниција 1.18.** ([51]) *Нека је $T$ време заустављања на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. Тада је*

$$\mathcal{F}_{T-} = \sigma\{H_T : H \text{ је предвидив процес}\}.$$

**Дефиниција 1.19.** ([19]) *Процес $X$ који је непрекидан здесна и има граничну вредност слева је квази-слева непрекидан ако је $\Delta X_T = 0$ с.и. на скупу $\{T < \infty\}$ за свако предвидиво време $T$.*

## 1.3 Мартингали

Концепт мартингала у теорију вероватноћа уводи Вил (J. Ville) 1939. године, иако концепт креира Леви (P. Lévy) још 1934. године у покушају да прошири закон великих бројева. Дуб (J. L. Doob) у својим радовима из 1940. године, увиђа везу између мартингала и хармонијских функција и развија читаву теорију мартингала базирану на теорији вероватноћа. Због тога се данас Дуб сматра оснивачем теорије мартингала. Са интуитивне тачке гледишта појам мартингала је веома близак појму случајног корака што је и главни разлог за њихово увођење у теорију вероватноћа. Такође, још једна важна особина мартингала је да када се фиксира количина добијених информација простор мартингала формира линеаран простор. Данас су мартингали незаобилазни у теорији потенцијала, стохастичком рачуну и финансијској математици.

Мартингал је математички модел фер опкладе. Његово име потиче од израза "la grande martingale" што представља стратегију за парне-непарне опкладе у којој се улог дуплира после сваког губитка. Пре или касније оваква стратегија гарантује добитак, јер ако се улог дуплира после сваког губитка, прва победа ће повратити све претходне губитке и донети мали профит. Наиме, на математичком језику, под појмом фер се подразумева да очекиван добитак треба бити нула, али није довољно да укупно очекивање буде нула, већ да очекивање буде нула у тренутку опкладе. Математички модел успешног клађења се описује помоћу мартингала у дискретном случају.

У дискретном случају посматра се параметарски скуп $I = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Тада је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, P)$ простор вероватноћа са филтрацијом. Са $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ је означен простор вероватноћа, а са $\{\mathcal{F}_n : n \geq 0\}$ филтрација, тј. неопадајућа фамилија под-$\sigma$-алгебри од $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}.$$

**Дефиниција 1.20.** ([63]) *Случајан процес $X = \{X_n : 0 \leq n < \infty\}$ који је адаптиран у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_n)$, је мартингал у односу на $(\mathcal{F}_n)$ ако је:*

*(1)* $E|X_n| < \infty,$ *за свако $n$ и*

*(2)* $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ *с.и.* $\quad (n \geq 1)$.

У непрекидном случају, дефиниција мартингала је нешто сложенија.

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа, $I = [0, t_0] \subseteq R$ и $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_\mathbf{t},\ t \in I\}$ филтрација. Дефинише се, такође $(\mathcal{F}_\infty)$ са $\mathcal{F}_\infty = \bigvee\limits_{t \in I} \mathcal{F}_t$. Нека је $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X,\ t \in I\}$ природна филтрација процеса $X$.

**Дефиниција 1.21.** ([6]) *Случајан процес $X = \{X_t(\omega),\ t \in I\}$ је $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингал ако је $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран и ако важи:*

*(1)* $E|X_t| < \infty,\ t \in I;$

*(2)* $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$ *с.и. за све $s < t,\ s, t \in I.$*

Ако у Дефиницији 1.21 уместо услова 2. важи

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s \text{ с.и. за свако } s < t,$$

случајан процес је *субмартингал*; а ако је

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s \text{ с.и. за свако } s < t,$$

случајан процес је *супермартингал*.

Својство мартингалности је везано за филтрацију, па ће се у даљем тексту подразумевати да је случајан процес $X$ $(\mathcal{F}_t)$-мартингал, уколико другачије није наглашено.

**Дефиниција 1.22.** ([25]) *За мартингал $X = \{X_t,\ t \in I\}$ каже се да је регуларан ако постоји интеграбилна случајна променљива $\eta$ таква да је*

$$X_t = E(\eta \mid \mathcal{F}_t) \ (P\text{-с.и.})$$

За мартингале важе следеће теореме.

**Теорема 1.1.** [**Теорема о скоро извесној конвергенцији мартингала** ([25])] *Нека је $X$ непрекидан мартингал, за који је $E(|X_t|^p) < \infty$ за неко $p > 1$ и свако $t \in I$, тада постоји случајна променљива $X_\infty$, $E(|X_\infty|^p) < \infty$, тако да је*

$$P\{\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty\} = 1 \ \text{и} \ \lim_{t\to\infty} \|X_t - X_\infty\|_p = 0.$$

Ако су $S$ и $T$ времена заустављања, онда важи и следећа теорема, позната под називом Дубова опциона теорема о времену заустављања.

**Теорема 1.2.** ([25]) *Нека је $X$ здесна непрекидан, адаптиран процес. Тада су следећи услови еквивалентни:*

*(1) $X$ је мартингал;*

*(2) За свако ограничено време заустављања $T$ и свако време заустављања $S$, је*

$$E(X_T \mid \mathcal{F}_S) = X_{S\wedge T} \ \text{с.и.;}$$

*(3) За свако време заустављања $T$, $(X_{t\wedge T}, \mathcal{F}_t)$ је мартингал;*

*(4) За свако ограничено време заустављања $T$, важи $E(X_T) = E(X_0)$;*

*Ако је процес $X$ униформно интеграбилан, онда тврђења (2) и (4) важе за свако време заустављања.*

**Последица 1.2.** ([52]) *Ако је $X$ мартингал и $T$ време заустављања, тада је заустављен процес $X^T$ мартингал у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t)$.*

Највећи допринос теорији мартингала даје Дуб, који 1953. године утврђује познату теорему о декомпозицији супермартингала.

**Теорема 1.3.** ([5]) *Нека је $X_n$ (у дискретном случају) супермартингал. Тада постоји јединствена декомпозиција $X_n = M_n - A_n$ где је $M_n$ мартингал и $A_n$ је процес са неопадајућим трајекторијама, $A_0 = 0$ и специјалним својством мерљивости да је $A_n$, $(\mathcal{F}_{n-1})$-мерљиво.*

Међутим, до 1962. није било могуће проширити ову дефиницију и на непрекидан случај. Те године познати француски математичар Мејер (P. A. Meyer) доказује егзистенцију и показује да се теорема може проширити и на непрекидан случај, уз претпоставку да субмартингал има својство униформне интеграбилности и уколико индексни скуп садржи времена заустављања. Годину дана касније, Мејер доказује јединственост декомпозиције, која је данас позната под називом Дуб-Мејерова декомпозиција.

**Теорема 1.4.** ([6]) *Нека је $X = \{X_t,\ t \in I\}$ здесна непрекидан униформно интеграбилан супермартингал. $X$ има Дуб-Мејерову декомпозицију ако постоји здесна непрекидан мартингал $M$ и растући, адаптиран процес $A$, коначне варијације на сваком коначном интервалу, тако да је $X_t = M_t - A_t$ с.и. за $t \in I$.*

Здесна непрекидан мартингал $X$ који задовољава да је $EX_t^2 < \infty$ за свако $t \geq 0$ назива се *квадратно интеграбилан мартингал* .

За сваки квадратно интеграбилан мартингал $X$, случајан процес $X^2 = \{X_t^2, t \in I\}$ је ненегативан субмартингал и има јединствену Дуб-Мејерову декомпозицију

$$X_t^2 = M_t + A_t; \quad 0 \leq t < \infty$$

где је $M$ здесна непрекидан мартингал и $A_t = \langle X \rangle_t$ предвидив, растући процес, $M_0 = A_0 = 0$.

**Дефиниција 1.23.** ([6]) *Квадратна варијација $\langle X \rangle_t = A_t$, квадратно интеграбилног мартингала $X$, је предвидив, растући процес у Дуб-Мејеровој декомпозицији, за који је $X_t^2 - \langle X \rangle_t$ мартингал.*

Јединственост процеса квадратне варијације је обезбеђена Дуб-Мејеровом декомпозицијом.

Следећа теорема је једна од најкориснијих теорема о мартингалима. Ако је $X$ униформно интеграбилан мартингал, тада процес $X_\infty$ постоји с.и. и ако је $S$ време заустављања дефинише се $X_S$ на $\{S = \infty\}$ са $X_S = X_\infty$.

**Теорема 1.5.** [**Теорема опционог заустављања** ([6])] *Нека је $X$ здесна непрекидан мартингал (супермартингал) и $X_\infty = 0$. Тада за сваки пар времена заустављања $S, T$, где је $S \leq T$ важи*

$$X_S = (\geq) E[X_T \mid \mathcal{F}_S] \text{ с.и.}$$

За до сада наведене класе процеса важи следећа инклузија супермартингали $\supset$ мартингали $\supset$ униформно интеграбилни мартингали $\supset$ ограничени мартингали.

Један од најзначајнијих примера мартингала је Винеров (N. Wiener) процес.

**Дефиниција 1.24.** ([5]) *Непрекидан случајан процес $W = \{W_t, t \geq 0\}$ је $d$-димензионалан Винеров процес ако је:*

*(1) $W_0 = 0$ с.и;*

*(2) $W$ је процес са независним прираштајима;*

*(3) за свако $s \leq t \in I$ прираштај $W_t - W_s$ има нормалну расподелу са очекивањем $0$ и дисперзијом $\sigma^2|t-s|$.*

Нека је $\mathbf{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W\} = \sigma\{W_s,\ s \leq t\}\ \ s,t \in I$ природна филтрација Винеровог процеса. Одмах се може уочити да је Винеров процес *мартингал* у односу на $\mathbf{F}^W$

$$E(W_t \mid \mathcal{F}_s^W) = W_s\ \ P - \text{с.и},\ \ t \geq s.$$

Чак штавише, Винеров процес је квадратно интеграбилан мартингал, јер је $E|W_t|^2 < \infty,\ t \geq 0$. Природна филтрација Винеровог процеса је непрекидна, тј. $\mathcal{F}_{t-}^W = \mathcal{F}_t^W = \mathcal{F}_{t+}^W$ и $\mathcal{F}_{0-}^W = \mathcal{F}_0^W$.

## 1.4 Локални мартингали

Појам локалних мартингала 1965. године уводе Ито (K.Ito) и Ватанабе (S.Watanabe), прочавајући мултипликативне функционале марковских процеса.

**Дефиниција 1.25.** ([25]) *Случајан процес $X = \{X_t, t > 0\}$ је локалан мартингал ако постоји неопадајући низ времена заустављања $\{T_n\}$ у односу на $\mathbf{F}$, тако да је*

*(1) $P\{T_n \leq n\} = 1,\ P\{\lim T_n = \infty\} = 1$;*

*(2) $\{X_{t\wedge T_n}\}$ низ униформно интеграбилних мартингала, за свако $n \geq 1$.*

Наиме, Винеров процес или општије сваки здесна непрекидан мартингал је локалан мартингал, што се једноставно може уочити ако је $T_n = n$. Локални мартингали су процеси општијег карактера од мартингала и није довољно да је задовољен услов интеграбилности да би ти процеси били и мартингали. Наиме, постоје локални мартингали који имају својство јаке интеграбилности, а ипак нису мартингали (види Пример 2.15, Глава V [52]).

Увођење појма локалног мартингала се показало као кључно да би у свом изворном облику важила Дубова теорема о декомпозицији.

**Теорема 1.6.** ([25]) *Нека је* $X = \{X_t, t \in I\}$ *здесна непрекидан, ненегативан супермартингал. Онда постоји здесна непрекидан процес* $M = \{M_t, t \geq 0\}$ *који је локалан мартингал и растући, интеграбилан,* $(\mathcal{F}_t)$*-предвидив процес* $A_t, t \geq 0$ *тако да је* $X_t = M_t - A_t,\ \ P -$ *с.и. за* $t \in I$. *Ова декомпозиција је јединствена.*

**Лема 1.3.** ([32]) *Нека је* $X = \{X_t, t \in I\}$ *непрекидан процес на простору* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.

*(i)* *Ако је* $X$ *локалан мартингал и* $T$ *време заустављања, такво да је* $X_{t\wedge T}$ *ограничен процес, онда је* $X_{t\wedge T}$ *мартингал.*

*(ii)* *Постоји низ времена заустављања* $\{T_n\}$*, за који је* $T_n \to t_0$ *и* $X_{t\wedge T_n}$ *је ограничен процес за свако* $n$.

*(iii)* $X$ *је локалан мартингал ако и само ако је* $X$ $(\mathcal{F}_{t+})$*-локалан мартингал.*

**Теорема 1.7.** ([51]) *Нека су* $X$ *и* $Y$ *локални мартингали и* $T$ *време заустављања.*

*(i)* *Процес* $X + Y$ *је такође локалан мартингал.*

*(ii)* *Процеси* $X^T, X^T 1_{\{T>0\}}$ *су локални мартингали.*

*(iii)* *Нека је* $X$ $cadlag$ *процес и нека је* $\{T_n\}$ *растући низ времена заустављања који тежи ка* $\infty$ *с.и., тако да су процеси* $X^{T_n} 1_{\{T_n>0\}}$ *локални мартингали за свако* $n$. *Тада је* $X$ *локалан мартингал.*

## 1.5 Семимартингали

Израз семимартингал први пут се у теорији вероватноћа појављује 1970. године. Уводе га Долеанс-Даде (C. Doleans-Dade) и Мејер како би означили најопштији процес за који је до тада постојао стохастички интеграл.

**Дефиниција 1.26.** ([22]) *Нека је дат простор вероватноћа са филтрацијом* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. *Процес* $X$ *је* $m$*-димензионалан семимартингал ако је адаптиран, непрекидан здесна и има граничну вредност слева* $(cadlag)$ *и има декомпозицију*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \tag{1.1}$$

*где је* $A$ *процес коначне варијације на сваком коначном интервалу, а* $M = \{M_t, t \in I\}$ *униформно интеграбилан локалан мартингал.*

**Дефиниција 1.27.** ([19]) *Процес* $X = \{X_t, t \in I\}$ *је специјалан семимартингал ако постоји јединствена декомпозиција (1.1) где је* $A$ *предвидив процес.*

Декомпозиција семимартингала на локалан мартингал и процес коначне варијације је јединствена, али ако је процес $X$ непрекидан семимартингал у односу на две различите филтрације $(\mathcal{F}_t)$ и $(\mathcal{G}_t)$, декомпозиције могу бити различите, чак и када је задовољен услов $(\mathcal{G}_t) \subset (\mathcal{F}_t)$ за свако $t$.

Иако из дефиниције није очигледно, простор семимартингала је веома уређен простор, јер је он стабилан у односу на велики број трансформација. На пример, у односу на заустављање, локализацију, „промену времена”, апсолутно непрекидну промену мере, „промену филтрације”, а главно својство тог простора је што је то највећа могућа класа процеса у односу на које се могу интегралити сви ограничени предвидиви процеси.

Постоје многи примери семимартингала, Поасонов (S. Poisson) процес, Винеров процес, чак и Левијев процес.

**Последица 1.3.** ([51]) *Cadlag локалан мартингал је семимартингал.*

**Последица 1.4.** ([51]) *Cadlag супермартингал је семимартингал.*

**Последица 1.5.** ([51]) *Сваки субмартингал је семимартингал.*

Неке једноставне, али важне особине семимартингала дате су у следећим теоремама.

**Теорема 1.8.** ([22]) *Ако је $Q$ апсолутно непрекидна вероватноћа у односу на вероватноћу $P$, онда је сваки $P$-семимартингал и $Q$-семимартингал.*

**Теорема 1.9.** ([22]) *Ако је $X$ семимартингал у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ и ако је $\mathbf{G}$ подфилтрација таква да је процес $X$ $\mathbf{G}$-адаптиран, онда је $X$ семимартингал и у односу на $\mathbf{G}$.*

Ова теорема показује везу између семимартингала и подфилтрације, док, међутим није једноставно доказати особину семимартингалности и у односу на проширење постојеће филтрације.

**Теорема 1.10.** ([22]) *Нека је $\mathcal{A}$ пребројива колекција дисјунктних скупова у $\mathcal{F}$. Нека је $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\} = \sigma\{\mathcal{F}_t, \mathcal{A}\}$, $t \in I$ филтрација. Онда сваки $\mathbf{F}$ семимартингал јесте и $\mathbf{H}$ семимартингал.*

Теоријом квазимартингала су се први бавили Фиск (D. L. Fisk), Ореј (S. Orey) и посебно Рао (K. M. Rao).

**Дефиниција 1.28.** ([51]) *Нека је $\tau$ партиција интервала $[0,\infty]$ и нека је $X_{t_i} \in L^1$ за свако $t_i \in \tau$. Тада је*

$$C(X,\tau) = \sum_{i=0}^{n} |E\{X_{t_i} - X_{t_{i+1}} \mid \mathcal{F}_{t_i}\}|.$$

*Варијација процеса $X$ у односу на $\tau$ се дефинише са*

$$Var_\tau(X) = E\{C(X,\tau)\}.$$

*Варијација процеса $X$ се дефинише са*

$$Var(X) = \sup_\tau Var_\tau(X).$$

**Дефиниција 1.29.** ([51]) *Адаптиран процес $X$ је квазимартингал ако је cadlag, ако на $[0,\infty]$ важи да је $E\{|X_t|\} < \infty$ за свако $t$ и ако је $Var(X) < \infty$.*

Треба напоменути да је појам квазимартингала најпогоднији начин да се покаже да неки процес јесте семимартингал, чак и ако експлицитно нема декомпозицију.

**Теорема 1.11.** ([51]) *Квазимартингал $X$ има јединствену декомпозицију $X = M + A$, где је $M$ локалан мартингал и $A$ је предвидив процес чије трајекторије имају локално интеграбилну варијацију и $A_0 = 0$.*

На основу ове теореме може се рећи да је сваки квазимартингал специјалан.

**Последица 1.6.** ([51]) *Cadlag квазимартингал је семимартингал.*

Историјски, појам семимартингала је последњи појам у низу генерализација које су настале од појма мартингала. Међутим, сада када је та теорија заокружена, поставља се питање: зашто се појам семимартингала, који је инавријантан у односу на промену мере, мора дефинисати преко појма мартингала, који зависи од мере? Зар није могуће генерализовати појам семимартингала тако да очува основне карактеристике стохастичког рачуна? Одговор на ова питања се добија преко карактеризације семимартингала користећи стохастичке интеграле елементарних предвидивих процеса (видети [4]).

## 1.6 Семимартингали и стохастички интеграли

Још од 1970. године, када су Долеанс-Даде и Мејер увели појам семимартингала, многи математичари: Галчук (L. I. Gal'chuk), Лебедев (V.A.Lebedev), Мемин (J. Memin), Жакод (J. Jacod) и други, бавили су се проучавањем стохастичких диференцијалних једначина са семимартингалима. Ти резултати се нарочито примењују у финансијској математици. Опширније о стохастичкој интеграцији и једначинама са семимартингалима може се наћи у [10, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 32, 51].

Нека је $\mathbf{S}$ скуп свих једноставних предвидивих процеса $H$, датих Дефиницијом 1.17 *Одређени интеграл* за процес $H \in \mathbf{S}$ и семимартингал $Z = \{Z_t, t \in I\}$ дефинише се као оператор $I_Z : \mathbf{S} \to L^0$, где је $\mathbf{L}^0$ простор скоро извесно коначних случајних промењљивих

$$I_Z(H) = H_0 Z_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i (Z_{T_{i+1}} - Z_{T_i}),$$

где је $0 = T_1 \leq \ldots \leq T_{n+1} < \infty$ коначан низ времена заустављања.

Помоћу одређеног интеграла дефинише се *неодређени интеграл* једноставног предвидивог процеса $H \in \mathbf{S}$ и семимартингала $Z$. Наиме, интеграл се дефинише као оператор $J_Z : \mathbf{S} \to \mathbf{D}$, где је $\mathbf{D}$ простор свих адаптираних, cadlag процеса

$$J_Z(H) = H_0 Z_0 + \sum_{i=1}^{n} H_i (Z^{T_{i+1}} - Z^{T_i}),$$

где ознака $Z^T$, за време заустављања $T$, означава процес $Z^T = \{Z_t^T = Z_{t\wedge T},\ t \geq 0\}$.

Стохастички интеграл се означава са

$$J_Z(H)_t = \int_0^t H_s dZ_s = H \cdot Z_t.$$

Стохастички интеграл се може дефинисати и за ширу класу процеса. Нека је $\mathbf{D}$ простор свих адаптираних процеса са трајекторијама које су непрекидне здесна и имају граничну вредност слева, а $\mathbf{L}$ простор свих адаптираних процеса са трајекторијама које су непрекидне слева и имају граничну вредност здесна. Ако је $H \in \mathbf{D}$, онда је $H_-$ (његова слева непрекидна модификација) у $\mathbf{L}$; а ако је $H \in \mathbf{L}$, онда је $H_+$ у $\mathbf{D}$.

Стохастички интеграл за процесе $H \in \mathbf{D}$, се дефинише на следећи начин. Нека је $\sigma$ коначан низ времена заустављања

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq \ldots \leq T_k < \infty \quad \text{с.и.} \tag{1.2}$$

Такав низ се назива *случајна партиција*. За низ случајних партиција $\sigma_n$

$$\sigma_n : T_0^n \leq T_1^n \leq \ldots \leq T_{k_n}^n$$

каже се да тежи *идентичности* ако је:

*(i)* $\lim_n \sup_i T_i^n = \infty$ с.и.

*(ii)* $\|\sigma_n\| = \sup_i |T_{i+1}^n - T_i^n|$ конвергира ка 0 скоро извесно.

За процес $H$ и случајну партицију $\sigma$, дату са (1.2) дефинише се

$$H^\sigma = H_0 1_{\{0\}} + \sum_{i=1}^n H_{T_i} 1_{(T_i, T_{i+1}]}.$$

Тада је за $H \in \mathbf{D}$

$$\int_0^t H_s^\sigma dZ_s = H_0 Z_0 + \sum_{i=1}^n H_{T_i}(Z^{T_{i+1}} - Z^{T_i}).$$

**Теорема 1.12.** ([22]) *Нека је $Z$ семимартингал и $H \in \mathbf{D}$. Нека је $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ низ случајних партиција који тежи идентичности. Тада*

$$H \cdot Z = p.\lim_{n\to\infty} \sum_i H_{T_i^n}(Z^{T_{i+1}} - Z^{T_i})$$

*конвергира униформно у вероватноћи.*

Ова теорема, због регуларности трајекторија процеса под знаком интеграла, даје интуитивни опис стохастичког интеграла који се може израчунати и као гранична вредност Риманових (B. Riemann) сума. Овако дефинисан стохастички интеграл има следеће особине.

**Теорема 1.13.** ([22]) *Ако је $Z$ процес коначне варијације с.и, онда се $H \cdot Z$ израчунава као Лебег-Стилтјесов (H. Lebesgue, T. J. Stieltjes) интеграл.*

**Теорема 1.14.** *Нека је $H \in \mathbf{D}$ и $Z$ семимартингал. Онда је $Y = H \cdot Z$ поново семимартингал. Ако је још $G \in \mathbf{D}$, тада је*

$$G \cdot Y = G \cdot (H \cdot Z) = (GH) \cdot Z.$$

Процес који има главну улогу у теорији стохастичке интеграције је процес *квадратне варијације*. Дефинише се помоћу стохастичког интеграла.

**Дефиниција 1.30.** ([22]) *Нека је $Z$ семимартингал. Процес квадратне варијације $\langle Z, Z\rangle_t = \langle Z\rangle_t$ се дефинише са*

$$\langle Z, Z\rangle_t = Z_t^2 - 2\int_0^t Z_s dZ_s. \tag{1.3}$$

*Ако су $Z$ и $Y$ два семимартингала, процес квадратне варијације се дефинише са*

$$\langle Z, Y\rangle_t = Z_t Y_t - \int_0^t Z_s dY_s - \int_0^t Y_s dZ_s. \tag{1.4}$$

Ако је $Z$ процес коначне варијације, онда се интеграл у (1.3) може израчунати парцијалном интеграцијом, а ако је $Z$ и непрекидан процес онда је $\langle Z, Z\rangle_t = Z_0^2$, тј. константа. Такође, процес квадратне варијације задовољава и следећи услов

$$\langle Z, Y\rangle = \frac{1}{2}\{\langle Z+Y, Z+Y\rangle - \langle Z, Z\rangle - \langle Y, Y\rangle\}.$$

**Теорема 1.15.** ([22]) *Нека је $Z$ семимартингал. Тада је $\langle Z, Z\rangle_t$ у $\mathbf{D}$, има неопадајуће трајекторије, $\langle Z, Z\rangle_0 = Z_0^2$ и*

*(i)* $\triangle\langle Z, Z\rangle = (\triangle Z)^2$;

*(ii) Ако је $\sigma_n$ низ партиција који тежи идентичности као у (1.2), онда је*

$$\lim_{n\to\infty}\{Z_0^2 + \sum_i (Z^{T_{i+1}^n} - Z^{T_i^n})^2\} = \langle Z, Z\rangle$$

*где је гранична вредност униформна у вероватноћи;*

*(iii) За време заустављања $T$ је $\langle Z^T, Z\rangle = \langle Z, Z^T\rangle = \langle Z^T, Z^T\rangle = \langle Z, Z\rangle^T$.*

Претходна теорема нам омогућава да се појам квадратне варијације дефинише и за ширу класу процеса од семимартингала. Наиме, помоћу Теореме 1.15 могу се израчунати квадратне варијације неких основних процеса. Нека је $W$ Винеров процес, тада је $\langle W, W\rangle_t = t$, с.и. Ако је $A$ непрекидан процес коначне варијације, онда је $\langle A, A\rangle_t = A_0^2$, а ако је $A_0 = 0$, следи да је $\langle A, A\rangle_t \equiv 0$.

Процес квадратне варијације има слична својства и у односу на стохастички интеграл.

**Теорема 1.16.** ([22]) *Нека су $Z$ и $Y$ два семимартингала, $H, K \in \mathbf{D}$. Онда је*

$$\langle H \cdot Z, K \cdot Y\rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle Z, Y\rangle_s.$$

*Такође, важи*

$$\langle H \cdot Z, H \cdot Z\rangle_t = \int_0^t (H_s)^2 d\langle Z, Z\rangle_s.$$

На онову ове теореме одмах се може уочити да ако је $W$ Винеров процес и $H \in \mathbf{D}$ (и због $\langle W, W\rangle_t = t$)

$$\langle H \cdot W, H \cdot W\rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

Итова формула је уствари веома блиска формули за Лебег-Стилтјесову интеграцију.

Нека је за семимартингал $Z$, процес $\langle Z, Z\rangle$ неопадајући и припада скупу $\mathbf{D}$. Трајекторије процеса $\langle Z, Z\rangle$ имају Лебегову декомпозицију на непрекидан део и чисто прекидан део, тј.

$$\langle Z, Z\rangle_t = \langle Z, Z\rangle_t^c + \sum_{0<s\leq t} (\triangle Z_s)^2,$$

где је $\langle Z, Z\rangle_t^c$ непрекидан део квадратне варијације. Такође, за два семимартингала $Z$ и $Y$ је

$$\langle Z, Y\rangle_t = \langle Z, Y\rangle_t^c + \sum_{0<s\leq t} \triangle Z_s \triangle Y_s,$$

уз претпоставку да је $\sum_{0<s\leq t} (\triangle Z_s)^2 < \infty$ с.и. за сваки семимартингал $Z$.

**Теорема 1.17.** ([22]) *Нека је $Z = (Z^1, \ldots, Z^d)$ $d$-димензионалан семимартингал и нека је $f : R^d \to R$ из $\mathcal{C}^2$. Тада је $f(Z)$ такође семимартингал и важи*

$$\begin{aligned} f(Z_t) - f(Z_0) &= \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z_i}(Z_{s-}) dZ_s^i + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq d} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(Z_{s-}) d\langle Z^i, Z^j\rangle_s \\ &\quad + \sum_{0<s\leq t} \left\{ f(Z_s) - f(Z_{s-}) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial z_i}(Z_{s-}) \triangle Z_s^i \right\}. \end{aligned}$$

Треба напоменути да претходна теорема представља *Итову формулу* за случајан процес $f(Z)$. Нека је, на пример, $Z = (W^1, \ldots, W^d)$ $d$-димензионалан Винеров процес где су $W^i$ и $W^j$ међусобно независни за $i \neq j$, уз претпоставку да је $W_0 = 0$. Тада за функцију $f \in \mathcal{C}^2$, формула из претходне теореме постаје облика

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t \nabla f(W_s) \cdot dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \triangle f(W_s) ds,$$

која је позната као *Итова формула* за Винеров процес.

**Теорема 1.18.** ([51]) *Нека је $T$ време заустављања. Тада је*

$$\int_0^{t\wedge T} H_s(X)dZ_s = \int_0^t H_s(X)I\{s \leqslant T\}dZ_s = \int_0^t H_s(X)dZ_{s\wedge T}.$$

Нека су $P$ и $Q$ вероватноће и нека $H_Q \cdot Z = \int_Q H_s dZ_s$ означава стохастички интеграл процеса $H$ и семимартингала $Z$ у односу на вероватноћу $Q$. Тада важи следећа теорема.

**Теорема 1.19.** ([51]) *Ако је $Q$ апсолутно непрекидна вероватноћа у односу на вероватноћу $P$, тада се $H_Q \cdot Z$ не разликује од $H_P \cdot Z$.*

## 1.7 Стохастичке диференцијалне једначине са семимартингалима

Нека је дата стохастичка диференцијална једначина

$$X_t = K_t + \int_0^t g_s(X)dZ_s \tag{1.5}$$

где је $Z = \{Z_t, t \in I\}$ $m$-димензионалан семимартингал, $X = \{X_t, t \in I\}$ $d$-димензионалан процес, $K = \{K_t, t \in I\}$ $d$-димензионалан процес који представља почетну вредност и чије су трајекторије непрекидне здесна и има граничну вредност слева, коефицијент $g_t(X)$ је $d \times m$-димензионалан предвидив процес који зависи од трајекторија процеса $X$.

Као и за диференцијалну једначину Итоа и код једначине (1.5) се дефинише строго и слабо решење.

Проблемом одређивања строгог решења једначине (1.5) бавили су се Долеанс-Даде, Протер (P. Protter [22, 51]), Галчук ([10]), Кулинич (G. L. Kulinich), Жакод ([17, 18, 19]) и многи други.

Нека је дат мерљив простор $(E, \mathcal{E})$ где је $E$ простор свих могућих скокова неког $d$-димензионалног процеса $X$ и $\mathcal{E}$ је скуп Борелових скупова над $E$. Нека је $\mathcal{P}$ предвидива $\sigma$-алгебра. Тада важи следећа дефиниција.

**Дефиниција 1.31.** ([27]) *Нека је $X$ здесна непрекидан случајан процес са скоковима на простору $E$ и нека је $\mu$ случајна непрекидна мера скокова трајекторија процеса $X$. Ако је $D \in \mathcal{B}^d \times \mathcal{E}$ тада је*

$$\mu(\omega, D) = \text{ број скокова процеса } X \text{ на скупу } D \text{ за трајекторије } X(\omega). \tag{1.6}$$

**Теорема 1.20.** ([27]) *Нека је $X$ здесна непрекидан процес дефинисан на $R^d$ и $\mu$ случајна непрекидна мера дата са (1.6). Тада мера $\mu$ има дуалну предвидиву пројекцију*

$$\nu(\omega, D), \;\; D \in \mathcal{B}^d \times \mathcal{E},$$

*која задовољава следеће услове*

*(1) интеграл*

$$I(t,\omega)=\int_{(0,t]\times E} H(s,\omega,e)\nu(ds,\omega,de)$$

*је $\mathcal{P}$-мерљив за сваку ненегативну $(\mathcal{P}\times\mathcal{E})$-мерљиву функцију $H$ и*

*(2)* $E\left(\int_{(0,\infty]\times E} Hd\mu\right)=E(I(\infty))=E\left(\int_{(0,\infty]\times E} Hd\nu\right)$.

*Ако су $\nu_1$ и $\nu_2$ две дуалне предвидиве пројекције мере $\mu$ онда су оне скоро извесно једнаке.*

Дуална предвидива пројекција мере $\mu$ је још позната и под називом *предвидив компензатор*. Мера $\mu$ представља тачан број скокова процеса $X$ на скупу $D$, док њена дуална предвидива пројекција $\nu$ представља очекиван, тј. средњи број скокова.

Нека је сада сваком семимартингалу $Z$ придружена случајна мера $\mu$ на $R_+\times R^m$, дефинисана са

$$\mu(\omega;\cdot)=\sum_{s>0} I_{\{\triangle Z_s(\omega)\neq 0\}}\varepsilon_{(s,\triangle Z_s(\omega))}(\cdot),$$

а са $\nu$ нека је означена њена дуална предвидива пројекција, а то ће поново бити предвидива случајна мера на $R_+\times R^m$.

Нека је, даље, $C=(C^{ij})$ процес дефинисан са

$$C^{ij}=\langle M^i,M^j\rangle$$

квадратна карактеристика локалног мартингала из декомпозиције (1.1).

По дефиницији, $(A,C,\nu)$ је локална карактеристика семимартингала $Z$. Дефинисана је до скупова $P$-мере нула и важи:

*(i)* $A$ је процес из декомпозиције (1.1), који је $\mathcal{F}$-предвидив, $A_0=0$ и јесте коначне варијације на сваком коначном интервалу.

*(ii)* $C$ је непрекидан, $\mathcal{F}$-адаптиран , $C_0=0$ и за свако $s\leq t$ матрица $(C_t^{ij}-C_s^{ij})$ је симетрично ненегативна.

*(iii)* $\nu$ је $\mathcal{F}$-предвидива мера.

Нека је $(\dot\Omega,\dot{\mathcal{F}},\dot{\mathcal{F}}_t,\dot P)$(где је $\dot{\mathcal{F}}_t=\mathcal{F}_t^{\dot Z}$) филтриран простор вероватноће на коме се дефинишу $m$-димензионалан семимартингал $\dot Z$ где је $\dot Z_0=0$, $\dot P$-скоро извесно и $d$-димензионалан предвидив, cadlag процес $\dot K$, који представља почетну вредност (не мора бити семимартингал).

Нека је даље $(\hat\Omega,\hat{\mathcal{F}},\hat{\mathcal{F}}_t,\hat P)$ (где је $\hat{\mathcal{F}}_t=\mathcal{F}_t^{\hat X}$) простор на коме је дефинисан $d$-димензионалан процес решења $\hat X$.

Даље, нека је $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ простор где је $\Omega=\dot\Omega\times\hat\Omega$ ; $\mathcal{F}=\dot{\mathcal{F}}\otimes\hat{\mathcal{F}}$ на коме је дефинисан коефицијент $g_t(X)$, $d\times m$-димензионалан, $\mathcal{F}$-предвидив процес на $\Omega$, који је ограничен.

**Дефиниција 1.32.** ([18]) *Строго решење једначине (1.5) је процес* $\dot{X} \in R^d$ *на простору* $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}}, \dot{\mathcal{F}}_t, \dot{P}, \dot{Z}, \dot{K})$ *који задовољава:*

*(i)* $\dot{X}$ *је* $\dot{\mathcal{F}}$*-адаптиран процес;*

*(ii)* $\dot{X}$ *је здесна непрекидан процес и има граничну вредност слева;*

*(iii) задовољава једначину*

$$\dot{X} = \dot{K} + \dot{g}(\dot{X}) \cdot \dot{Z} \qquad \dot{P} - \text{с.и.}$$

За строго решење једначине дефинише се и јединственост.

**Дефиниција 1.33.** ([16]) *За решење стохастичке диференцијалне једначине (1.5) каже се да је јединствено по трајекторијама, ако за систем* $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}}, \dot{\mathcal{F}}_t, \dot{P}, \dot{Z}_t, \dot{K}_t)$ *постоји највише један процес решења (до скупова* $\dot{P}$ *мере нула).*

Питање постојања и јединствености овако дефинисаног решења је поново од централног значаја.

Долеанс-Даде доказује да строго решење стохастичке диференцијалне једначине (1.5) постоји и јесте јединствено, ако је коефицијент $g_s(X)$ $\mathcal{F}_s$-адаптиран, ако су трајекторије процеса $g_s(X)$ непрекидне слева и ако имају граничну вредност здесна у односу на $s$ и да процес задовољава Липшицов (R. Lipschitz) услов за $x$, тј.

$$|g_s(x) - g_s(y)| \le K|x - y|,$$

где је $K$ константа.

Међутим, Галчук ([10]), посматра сложенију једначину, тако да је једначина (1.5) њен специјалан случај. Тада за једначину (1.5) постоји строго решење ако је процес $g_s(X)$ предвидив и ако је задовољено

$$|g_s(x) - g_s(y)| \le B(s, \omega)|x - y|,$$

где је $B(s, \omega)$ функција која је предвидива и интеграбилна у смислу [10].

Наиме, предвидив процес $g_s(X)$ у радовима које разматра Галчук, јесте есенцијално везан за квадратну карактеристику семимартингала, тј. за процес $\langle Z, Z \rangle_t$. Тада, за дати семимартингал $Z$, решење једначине (1.5) може постојати и бити јединствено, али за други семимартингал то не мора бити случај. Међутим, још строжији услови које Долеанс-Даде, у својим радовима, намеће на подинтегрални процес гарантују постојање и јединственост строгог решења за сваки семимартингал.

Проблемом одређивања слабих решења стохастичких диференцијалних једначина са семимартингалима бавили су се Жакод, Мемин ([17, 18]), Лебедев ([23, 24]), Куртц (T. Kurtz [22]), Протер ([51]) и други.

Више речи о слабим решењима стохастичких диференцијалних једначина са семимартингалима, као и о њиховој јединствености биће у Глави 3.

## 1.8 Неке познате дефиниције узрочности

Један од циљева науке је да се пронађу узрочно-последичне везе. Међутим, оне се не могу увек уочити извођењем експеримената, већ су истраживачи ограничени на посматрање појава које испитују. Али, на основу посматрања не може се увек са сигурношћу тврдити шта је узрок, а шта последица.

Генерално, постоје два начина за решавање овог проблема. Један приступ је да се помоћу теорије искључе одређене релације, а на основу преосталих да се утврди узрочност. Међутим, мана овог приступа је да се не могу одмах уочити релације које су релевантне.

Други приступ се заснива на линеарном уређењу времена. Ако су два догађаја узрочно зависна, идеја је да се догађај који се први реализовао сматра "узроком", а други "последицом". Директна последица оваквог приступа је да се на основу информација о реализацији једног догађаја могу боље предвидети ток и исход другог догађаја. Овакав концепт уводи Винер, а касније га формализује Гренџер у смислу модела линеарне регресије случајних процеса.

Узрочност је тема која у последње време има јако велики значај. Статистичари, епидемиолози, биостатистичари, информатичари (посебно они који се баве вештачком интелегенцијом), економетричари и филозофи се баве питањем „шта би се десило ако”. Узрочност је, у сваком случају, један концепт предвиђања и главно питање је: да ли је могуће смањити број потребних информација, како би се предвидела нека филтрација?

Овим проблемом су се бавили: Расел (B. Russel), Гренџер, Супе (P. Suppes), Микланд, Флоренс (J. P. Florens), Фужер (D. Fougere), Моучарт (M. Mouchart), Љ. Петровић и други.

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ произвољан простор вероватноћа и нека је филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I(\subseteq R)\}$, фамилија под-$\sigma$-алгебри од $\mathcal{F}$. $(\mathcal{F}_\infty)$ је најмања $\sigma$-алгебра која садржи све $(\mathcal{F}_t)$ (чак и ако је $\sup I = +\infty$). Дакле, тада је $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\in I} \mathcal{F}_t$.

Вероватносни модел за временско-зависни систем је описан са $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ где је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа и $\{\mathcal{F}_t,\ t \in I\}$ је "оквирна" филтрација. Претпоставља се да филтрација $(\mathcal{F}_t)$ задовољава "уобичајене" услове што значи да је $(\mathcal{F}_t)$ здесна непрекидна и свака $(\mathcal{F}_t)$ је комплетна.

Најслабији облик узрочности уводи се између филтрација $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ и $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$, $t \in I(\subseteq R)$ на следећи начин.

**Дефиниција 1.34.** ([56]) *Каже се да је* $\mathbf{H}$ *потчињена* $\mathbf{G}$ *или да је* $\mathbf{H}$ *подфилтрација од* $\mathbf{G}$ *(у ознаци* $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$*) ако је* $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{G}_t$ *за свако* $t$.

Каже се да су филтрације $\mathbf{H}$ и $\mathbf{G}$ *еквивалентне* (у ознаци $\mathbf{H} = \mathbf{G}$) ако је $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{G}$ и $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{H}$.

**Дефиниција 1.35.** *(упоредити са* [55]*) Нека је* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *простор вероватноћа и* $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ *и* $\mathcal{G}$ *произвољне под-*$\sigma$*-алгебре од* $\mathcal{F}$*. Каже се да* $\mathcal{G}$ *раздваја* $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_2$ *или да су* $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_2$ *условно независне у односу на* $\mathcal{G}$ *(у ознаци* $\mathcal{F}_1 \perp \mathcal{F}_2 \mid \mathcal{G}$*), ако је за свако* $A_1 \in \mathcal{F}_1$ *и за свако* $A_2 \in \mathcal{F}_2$ *задовољено*

$$P(A_1A_2 \mid \mathcal{G}) = P(A_1 \mid \mathcal{G})P(A_2 \mid \mathcal{G}).$$

Дефинисање појма узрочности у терминима Хилбертових (D. Hilbert) простора је дато у [37]. Овде ће бити представљени аналогни резултати у терминима филтрација.

Нека су $\mathbf{J}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ произвољне филтрације. Каже се да је $\mathbf{G}$ узрок за $\mathbf{J}$ у оквиру $\mathbf{H}$ ако је задовољено

$$\mathcal{J}_\infty \perp \mathcal{H}_t|\mathcal{G}_t \tag{1.7}$$

јер суштина релације (1.7) је да све информације о $\mathcal{J}_\infty$ које су из $(\mathcal{H}_t)$ долазе преко $(\mathcal{G}_t)$ за произвољно $t$; или еквивалентно , $(\mathcal{G}_t)$ садржи све информације из $(\mathcal{H}_t)$ које су потребне за предвиђање $(\mathcal{J}_\infty)$. Дакле, било је природно увести следећу дефиницију узрочности међу филтрацијама.

**Дефиниција 1.36.** *(видети [11, 34, 35, 36, 37]) Каже се да је* $\mathbf{G}$ *потпун узрок (или само узрок) за* $\mathbf{J}$ *у оквиру* $\mathbf{H}$ *у односу на меру* $P$ *(у ознаци* $\mathbf{J} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}; \mathbf{P}$*) ако је* $\mathcal{J}_\infty \subseteq \mathcal{H}_\infty$*,* $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{H}$ *и ако је* $(\mathcal{J}_\infty)$ *условно независан од* $(\mathcal{H}_t)$ *у односу на* $(\mathcal{G}_t)$ *за свако* $t$*, тј.*

$$\mathcal{J}_\infty \perp \mathcal{H}_t|\mathcal{G}_t$$

*(тј.* $\mathcal{J}_u \perp \mathcal{F}_t|\mathcal{G}_t$ *важи за свако* $t$ *и свако* $u$*), или*

$$\text{за свако } A \in \mathcal{J}_\infty \quad P(A|\mathcal{H}_t) = P(A|\mathcal{G}_t).$$

Интуитивно, $\mathbf{J} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}$ значи, за произвољно $t$, информације о $(\mathcal{J}_\infty)$ које долазе из $(\mathcal{H}_t)$ нису веће од оних које долазе из $(\mathcal{G}_t)$.

Дефиниција, слична Дефиницији 1.36 је први пут дата у [30]. Ипак, дефиниција из [30] такође садржи услов $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{H}$ (уместо $\mathcal{J}_\infty \subseteq \mathcal{H}_\infty$) која нема интуитивно оправдање. Како је Дефиниција 1.36 општијег карактера од Дефиниције дате у [30], сви резултати везани за концепт узрочности у смислу Дефиниције 1.36 ће бити задовољени и за дефиницију која је дата у смислу Хилбертових простора, када им се дода услов $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{H}$.

Ако су $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ такве филтрације да важи релација $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{G} \bigvee \mathbf{H}$ (где је $\mathbf{G} \bigvee \mathbf{H}$ фамилија одређена са $(\mathcal{G} \bigvee \mathcal{H})_t = \mathcal{G}_t \bigvee \mathcal{H}_t$) каже се да $\mathbf{H}$ не узрокује $\mathbf{G}$. Јасно је да интерпретација Гренџерове узрочности је сада облика $\mathbf{H}$ не узрокује $\mathbf{G}$ ако $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{G} \bigvee \mathbf{H}$ (видети [31]). $\mathbf{H}$ не узрокује $\mathbf{G}$ је еквивалентан појму $\mathbf{H}$ не антиципира $\mathbf{G}$ (како је уведено у [57]).

Ако су $\mathbf{G}$ и $\mathbf{H}$ такве филтрације да важи $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}$, каже се да је $\mathbf{G}$ *сопствени узрок* у оквиру $\mathbf{H}$ (упоредити са [30]). Треба напоменути да је појам субординације (уведен у [56]) еквивалентан појму бити сопствени узрок, онако како је дефинисан овде.

Ове дефиниције се могу применити и на случајне процесе. Каже се да су случајни процеси у одговарајућој вези ако и само ако су у таквој вези њихове природне филтрације.

На пример, $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран случајан процес $X_t$ је сопствени узрок ако је $\mathbf{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)$ сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$ тј. ако важи

$$\mathbf{F}^X \models\!\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P.$$

Дат концепт узрочности повезује Гренџерову узрочност са концептом адаптираних расподела, којима су се бавили Кислер (J. Keisler) и Хувер (D. Hoover) (види [3, 14]). Наиме, овај нестандардан приступ теорији стохастичких процеса указује да се чувају скоро сва важна својства стохастичких процеса уколико се докаже еквиваленција између њихових адаптираних расподела (види [15]).

Неке основне особине релације узрочности из Дефиниције 1.36 су дате следећим резултатима.

**Лема 1.4.** (видети [37]) *Из релације* $\mathbf{J} \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}$ *и* $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{H}$ *следи да је* $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{G}$.

Концепт узрочности је инваријанатан у односу на трансформацију мере и конвергенцију случајних процеса, што је дато следећим теоремама.

**Теорема 1.21.** ([32]) *Нека су* $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ *филтрације дефинисане на мерљивом простору* $(\Omega, \mathcal{F})$ *и нека су* $P$ *и* $\hat{P}$ *вероватноће дефинисане на* $\mathcal{F}$ *такве да је* $\hat{P} \ll P$ *и* $\dfrac{d\hat{P}}{dP}$ *је* $(\mathcal{H}_\infty)$*-мерљиво. Тада важи*

$$\mathbf{H} \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P \Longrightarrow \mathbf{H} \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; \hat{P}. \tag{1.8}$$

**Теорема 1.22.** ([32]) *Нека су* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{G}$ *филтрације на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *и нека је* $\{X^{(n)}\}$ *низ случајних процеса који задовољавају*

$$X_t^{(n)} \xrightarrow{P} X_t \text{ када } n \to \infty \text{ за свако } t \in I \tag{1.9}$$

*и*

$$\mathbf{F}^{X^{(n)}} \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F} \text{ за свако } n. \tag{1.10}$$

*где је* $I$ *параметарски скуп. Онда процес* $X$ *задовољава релацију*

$$\mathbf{F}^X \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}.$$

**Теорема 1.23.** ([32]) *Нека су* $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ *и* $\mathbf{I}$ *филтрације на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *такве да је*

$$\mathbf{G} \leq \mathbf{F}, \quad \mathbf{H} \leq \mathbf{F}, \quad \mathbf{I} \leq \mathbf{F}.$$

*Онда важи:*

*(i)* $\mathbf{H} \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P \Rightarrow \mathbf{H} \leq \mathbf{G}$

*(ii)* $\mathbf{H} \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P \ \wedge\ \mathbf{H} \models\!\!< \mathbf{I}; \mathbf{F}; P \Rightarrow \mathbf{H} \models\!\!< (\mathbf{G} \wedge \mathbf{I}); \mathbf{F}; P.$

Претходна теорема утврђује минималну филтрацију која је под одређеним условима узрок за другу филтрацију.

**Теорема 1.24.** ([32]) *Нека су* $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ *и* $\mathbf{I}$ *филтрације на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Следећа два услова су међусобно еквивалентна*

*(i)* $\mathbf{I} \models \mathbf{H}; \mathbf{G} \;\wedge\; \mathbf{I} \models \mathbf{G}; \mathbf{F}$

*(ii)* $\mathbf{I} \models \mathbf{H}; \mathbf{F} \;\wedge\; \mathbf{H} \leq \mathbf{G} \leq \mathbf{F}$.

Следећа лема показује да релација "бити сопствени узрок" има особину транзитивности.

**Лема 1.5.** ([38]) *Ако је филтрација* $\mathbf{H}$ *сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{G}$ *и у односу на меру* $P$, *а филтрација* $\mathbf{G}$ *сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$ *у односу на исту меру* $P$, *тада је и филтрација* $\mathbf{H}$ *сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$ *у односу на* $P$.

Појам екстремних мера који се уводи следећом дефиницијом је веома важан у теорији стохастичких процеса. Нека је дефинисан скуп $H$ облика

$$H = \{M_t : M_t = P(A \mid \mathcal{G}_t), A \in \mathcal{G}_\infty\}. \tag{1.11}$$

Тада је скуп $\mathcal{M}_H$ скуп свих мера у односу на које су сви елементи из скупа $H$ мартингали.

**Дефиниција 1.37.** ([16]) *Мера* $P$ *је екстремна мера у скупу* $\mathcal{M}_H$ *(у ознаци* $P \in ext\mathcal{M}_H$ *где је* $ext\mathcal{M}_H$ *скуп елемената из* $\mathcal{M}_H$*) за које важи да ако је* $P = aQ + (1-a)Q'$, $a \in (0,1), Q, Q' \in \mathcal{M}_H$ *следи да је* $Q = Q' = P$.

Између концепта узрочности и екстремних мера се може успоставити еквиваленција, што показује следећа теорема.

**Теорема 1.25.** ([32]) *Нека је* $(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$ *простор вероватноћа са филтрацијом* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ *и* $H$ *скуп* $(\mathcal{G}_t, P)$*-мартингала. Онда су следећи услови еквивалентни:*

*(i)* $P$ *је екстремна мера на* $\mathcal{M}_H$, *скупу свих вероватноћа* $Q$ *на* $\mathcal{G}_\infty$ *које се поклапају са* $P$ *на* $\mathcal{G}_{-\infty} = \cap_t \mathcal{G}_t$, *и у односу на које су сви елементи из* $H$ $(\mathcal{G}_t, Q)$*-мартингали.*

*(ii)* *Нека је* $\hat{\mathbf{F}}$ *филтрација на екстензији* $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P})$ *простора* $(\Omega, \mathcal{G}_\infty, P)$, *где је* $\hat{\mathbf{F}} \geq \hat{\mathbf{G}}$. *Ако су сви елементи скупа* $\hat{H}$ $(\hat{\mathcal{F}}_t, \hat{P})$*-мартингали, важи*

$$\hat{\mathbf{G}} \models \hat{\mathbf{G}}; \hat{\mathbf{F}}; \hat{P}.$$

Релација сопствене узрочности $\mathbf{G} \,|\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ указује да за филтрацију $\mathbf{G}$ важи да је $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \cap \mathcal{G}_\infty$ за свако $t \geq 0$. Такође, $(\mathcal{G}_t)$ је филтрација генерисана непрекидним мартингалима облика $M_t = P(A \mid \mathcal{F}_t), A \in (\mathcal{G}_\infty)$.

Једноставно се показује да важи следеће тврђење.

**Пропозиција 1.6.** ([45]) *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ простор вероватноћа са филтрацијом, тада из услова $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ следи да је $E(M_t \mid \mathcal{F}_t) = E(M_t \mid \mathcal{G}_\infty)$.*

Сада ће бити презентована карактеризација концепта узрочности, користећи времена заустављања. Мало прецизније, овде ће бити проширена Дефиниција 1.36 од фиксираног на заустављено време тј. дефинише се узрочност уз помоћ $\sigma$-алгебри које су одређене временима заустављања.

На основу Дефиниције 1.13 време заустављања је пресликавање $T : \Omega \to R_+$ такво да је $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ за свако $t \in R_+$.

Следећом дефиницијом се генералише појам узрочности из Дефиниције 1.36 користећи $\sigma$-алгебре које су одређене временима заустављања. Нека су дати $\mathcal{H}^T = \bigvee_t \mathcal{H}_{t\wedge T}$ и фамилија

$$\mathbf{H}^T = \{\mathcal{H}_{t\wedge T}, t \in I\}.$$

**Дефиниција 1.38.** ([43]) *Каже се да је филтрација $\mathbf{G}$ потпун узрок за $\mathbf{H}^T$ у оквиру $\mathbf{F}$ у односу на $P$ (у ознаци $\mathbf{H}^T \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$) ако је $\mathcal{H}_T \subseteq \mathcal{F}_\infty$, $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$ и ако је $(\mathcal{H}_T)$ условно независно од $(\mathcal{F}_t)$ за дато $(\mathcal{G}_t)$ за свако $t$, тј.*

$$\mathcal{H}_T \perp \mathcal{F}_t | \mathcal{G}_t \quad \textit{за свако } t.$$

Идеја која је овде презентована је да је статистички концепт узрочности фокусиран на мерења у времену и како она могу да утичу једно на друго. Интуитивно, концепт узрочности са временима заустављања значи да, за произвољно $t$, $(\mathcal{G}_t)$ садржи све информације из $(\mathcal{F}_t)$ које су потребне за предвиђање $(\mathcal{H}_T)$.

Неке основне особине које важе за концепт узрочности са временима заустављања су дате следећим теоремама.

**Теорема 1.26.** (упореди са [8, 43]) *Нека је $X$ $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран случајан процес и $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$. Филтрација $\mathbf{G}$ потпуно узрокује $\mathbf{F}^X$ у оквиру $\mathbf{F}$, тј. $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ ако и само ако важи једно од следећих тврђења:*

*(i) $(\mathcal{F}_\infty^X)$ је условно независно од $(\mathcal{F}_t)$ у односу на $(\mathcal{G}_t)$ за свако $t$, тј. $\mathcal{F}_\infty^X \perp \mathcal{F}_t | \mathcal{G}_t$ за свако $t$.*

*(ii) За свако време заустављања $S$ у односу на филтрацију $\mathbf{G}$, је $\mathcal{F}_\infty^X \perp \mathcal{F}_S | \mathcal{G}_S$.*

*(iii) За свако време заустављања $T$ у односу на филтрацију $\mathbf{F}^X$ и свако време заустављања $S$ у односу на филтрацију $\mathbf{G}$, важи $\mathcal{F}_T^X \perp \mathcal{F}_S | \mathcal{G}_S$.*

Следећи резултати се једноставно могу доказати.

**Лема 1.6.** ([45]) *Нека су $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$ за $t \in [0, +\infty)$ филтрације на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}_t, P)$. Тада:*

(i) *За свако време заустављања* $T$ *у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$*, где је* $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{H}_\infty$*, из услова*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P,$$

*следи да је*

$$\mathbf{F}^T \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P,$$

*где је* $\mathbf{F}^T = \{\mathcal{F}_{t\wedge T}, t \in I\}$*. Дакле, за* $(\mathcal{F}_t)$*-адаптиран случајан процес* $\{X_t\}$ *следи да је*

$$\mathbf{F}^{X^T} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P,$$

*где је* $\mathbf{F}^{X^T} = \{\mathcal{F}^X_{t\wedge T}\}$*.*

(ii) *За свако време заустављања* $T$ *у односу на филтрацију* $\mathbf{H}$*, где је* $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{H}_\infty$*, из услова*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P,$$

*следи да је*

$$\mathbf{H}^T \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P,$$

*где је* $\mathbf{H}^T = \{\mathcal{H}_{t\wedge T}, t \in I\}$*.*

**Теорема 1.27.** ([45]) *Нека су* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$*,* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$*,* $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$ *за* $t \in [0, +\infty)$ *филтрације на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *где је* $\mathbf{H} \subset \mathbf{F}$ *и нека је* $\{X_t\}$ $(\mathcal{F}_t)$*-адаптиран случајан процес. Тада, за свако време заустављања* $T$ *у односу на* $\mathbf{H}$ *из услова*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P,$$

*следи да је*

$$\mathbf{F}^{X^T} \mid\!< \mathbf{G}^T; \mathbf{F}^T; P,$$

*где је* $\mathbf{F}^{X^T} = (\mathcal{F}^X_{t\wedge T})$*.*

**Последица 1.7.** ([45]) *Нека су* $\mathbf{X} = \{X_t, t \in I\}$ *и* $\mathbf{Y} = \{Y_t, t \in I\}$ $(\mathcal{F}_t)$*-адаптирани случајни процеси. Тада, за свако време заустављања* $T$ *у односу на* $\mathbf{F}^X$ *из услова*

$$\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P,$$

*следи да је*

$$\mathbf{F}^{Y^T} \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P, \text{ и } \mathbf{F}^{Y^T} \mid\!< \mathbf{F}^{X^T}; \mathbf{F}^T; P.$$

Следећи резултат показује да је релација "бити сопствени узрок" за $\sigma$-алгебре са временима заустављања, транзитивна.

**Пропозиција 1.7.** ([45]) *Нека су* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$*,* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$*,* $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$ *за* $t \in [0, +\infty)$ *филтрације на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$*. Ако је* $T$ *време заустављања у односу на* $\mathbf{F}$*, тада из услова*

$$\mathbf{H}^T \mid\!< \mathbf{H}^T; \mathbf{G}^T; P \text{ и } \mathbf{G}^T \mid\!< \mathbf{G}^T; \mathbf{F}^T; P,$$

*следи*

$$\mathbf{H}^T \mid\!< \mathbf{H}^T; \mathbf{F}^T; P.$$

**Пропозиција 1.8.** ([45]) *Нека су на мерљивом простору* $(\Omega, \mathcal{F})$ *дате филтрације* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$ *и* $\mathbf{I} = \{\mathcal{I}_t\}$ *и нека је* $T$ *време заустављања у односу на* $\mathbf{F}$. *Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

*(i)* $\mathbf{I}^T \ltimes \mathbf{H}^T; \mathbf{G}^T \wedge \mathbf{I}^T \ltimes \mathbf{G}^T; \mathbf{F}^T$,

*(ii)* $\mathbf{I}^T \ltimes \mathbf{H}^T; \mathbf{F}^T \wedge \mathbf{H}^T \subseteq \mathbf{G}^T \subseteq \mathbf{F}^T$.

**Лема 1.7.** ([45]) *Нека су* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$ *за* $t \in [0, +\infty)$ *филтрације на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *и нека је* $T$ *време заустављања у односу на* $\mathbf{F}$. *Нека је*

$$\mathbf{G}^T \subseteq \mathbf{F}^T, \mathbf{I}^T \subseteq \mathbf{F}^T, \ \ \text{и} \ \ \mathcal{H}_T \subseteq \mathcal{F}_T.$$

*Тада је*

$$\mathbf{H}^T \ltimes \mathbf{G}^T; \mathbf{F}^T \ \ \wedge \ \ \mathbf{H}^T \ltimes \mathbf{I}^T; \mathbf{F}^T \ \ \Rightarrow \ \ \mathbf{H}^T \ltimes (\mathbf{G}^T \wedge \mathbf{I}^T); \mathbf{F}^T.$$

**Пропозиција 1.9.** ([45]) *Нека су* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{G}$ *филтрације на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Ако је филтрација* $\mathbf{F}$ *квази-непрекидна слева,* $\{T_n\}$ *растући низ времена заустављања,* $T$ *предвидиво време заустављања које је најављено са* $\{T_n\}$ *и* $X = \{X_t\}$ *је здесна непрекидан униформно интеграбилан мартингал, тада из услова*

$$\mathbf{F}^{X^{T_n}} \ltimes \mathbf{G}; \mathbf{F}, \text{ за свако } n$$

*следи*

$$\mathbf{F}^{X^T} \ltimes \mathbf{G}; \mathbf{F}.$$

# Глава 2

# Узрочност и теорија мартингала

У овој глави су првенствено дати резултати који указују да појам узрочности игра битну улогу у очувању својства мартингалности. Наиме, својство мартингалности се чува ако се филтрација смањује, али у општем случају ово својство се не чува ако филтрација расте. Када филтрација расте чување својства мартингалности је повезано са концептом узрочности, јер су мартингали процеси који остају непредвидиви када се скуп информација повећава.

## 2.1 Ортогоналност мартингала и стабилни потпростори

Нека је $\mathcal{M}_0^2$ простор свих $L^2$ограничених мартингала за које је $\sup_t E(M_t^2) < \infty$ где је њихова почетна вредност једнака нули.

**Дефиниција 2.1.** (**слаба ортогоналност** $[51]$) *Нека су $M$ и $N$ елементи простора $\mathcal{M}_0^2$. Тада су $M$ и $N$ слабо ортогонални ако је $E(M_\infty N_\infty) = 0$.*

Такође, постоји јачи и строжи појам ортогоналности за мартингале.

**Дефиниција 2.2.** (**јака ортогоналност** $[51]$) *Нека су $M$ и $N$ елементи простора $\mathcal{M}_0^2$. Тада су $M$ и $N$ јако ортогонални ако је њихов производ $L = MN$ (униформно интеграбилан) мартингал.*

Наиме, ако је производ мартингала $MN$ (униформно интеграбилан) мартингал тада је $[N, M]$ (квадратна варијација процеса $M$ и $N$) локалан мартингал, па се Дефиниција 2.2 може преформулисати: $M$ и $N$ су јако ортогонални ако и само ако је $[N, M]$ униформно интеграбилан мартингал. Ако су $M$ и $N$ јако ортогонални мартингали тада је $E(M_\infty N_\infty) = E(L_\infty) = E(L_0) = 0$, па јака ортогоналност повлачи слабу. Обратно тврђење не важи. На пример нека је $M \in \mathcal{M}_0^2$ и $Y \in \mathcal{F}_0$ независна од $M$, са $P(Y = 1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$. Нека је $N_t = YM_t, t \geqslant 0$. Тада $N \in \mathcal{M}_0^2$ и

$$E(N_\infty M_\infty) = E(YM_\infty^2) = E(Y)E(M_\infty^2) = 0,$$

па су $M$ и $N$ слабо ортогонални. Ипак $MN = YM^2$ није мартингал, (сем ако је $M_0 = 0$), јер $E(YM_t^2 \mid \mathcal{F}_0) = YE(M_t^2 \mid \mathcal{F}_0) \neq 0 = YM_0^2$.

Концепт јаке ортогоналности за мартингале је блиско повезан са мартингалном репрезентацијом, стабилним потпросторима и екстремним мерама (о чему ће касније бити речи).

**Дефиниција 2.3.** ([51]) *За подскуп $\mathcal{A} \in \mathcal{M}^2$ са $\mathcal{A}^{\perp}$ (респ. $\mathcal{A}^{\times}$) означава се скуп свих елемената из $\mathcal{M}^2$ који су слабо ортогонални (респ. јако ортогонални) на сваки елемент скупа $\mathcal{A}$.*

Концепт ортогоналности се може применитити и на локалне мартингале, што је дато у следећој дефиницији.

**Дефиниција 2.4.** ([27]) *Каже се да су локални мартингали $M$ и $N$ ортогонални ако је њихов производ $MN$ локалан мартингал.*

Такође се уводи и појам ортогоналности на самог себе, како код мартингала тако и код локалних мартингала. Наиме, локалан мартингал $M$ је *ортогоналан на самог себе* ако и само ако је $M^2$ локалан мартингал.

Ортогоналност се чува и код времена заустављања, тј. ако су два локална мартингала ортогонална, онда су и заустављени локални мартингали ортогонални, тј. важи следећа теорема.

**Пропозиција 2.1.** (**ортогоналност и локализација** [27]) *Ортогоналност локалних мартингала има следећа својства:*

*(i) Ако су $T$ и $S$ времена заустављања, $M$ и $N$ ортогонални локални мартингали, тада су заустављени процеси $M^T$ и $N^S$ такође ортогонални.*

*(ii) Ако су $M$ и $N$ локални мартингали и $\{T_n\}$ низ који локализује $N$, тада су $M$ и $N$ ортогонални ако и само ако су $M$ и заустављени процеси $\{N^{T_n}\}$ ортогонални за свако $n$.*

Такође, ако су $M$ и $N$ ортогонални локални мартингали онда су они увек ортогонални у Хилбертовом простору (простор квадратно-интеграбилних мартингала са скаларним производом). Обрнуто тврђење не важи.

Нека је $\mathcal{M}$ простор здесна непрекидних, униформно интеграбилних $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингала са семинормом $\|(N_t)\|_{\mathcal{M}} = \|N_\infty\|_{L^1}$ и нека је $H^p, (p \in [1, \infty))$ скуп мартингала $N_t \in \mathcal{M}$ који задовољавају $\|N_t\|_{H^p}^p = E(\sup_t |N_t|^p) < \infty$.

Следећа дефиниција је кључна у теорији мартингалних репрезентација

**Дефиниција 2.5.** ([27]) *Затворен линеарни потпростор $\mathcal{X}$ простора $H^p$ се назива стабилан потпростор ако је стабилан у односу на заустављање, тј. ако је $X \in \mathcal{X}$ тада је $X^T \in \mathcal{X}$ за свако време заустављања $T$. Ако је $\mathcal{X}$ потпростор простора $H^p$ тада се са $stable_p(\mathcal{X})$ означава најмањи, затворен, линеарни потпростор простора $H^p$ који садржи $\mathcal{X}$.*

Очигледно је $H^p$ стабилан потпростор. Пресек стабилних потпростора је такође, стабилан, па $stable_p(G)$ постоји за свако $G \subseteq H^p$. Да би се, што је могуће више, упростила нотација ако изложиоц $p$ није битан у даљем излагању он се може изоставити и уместо $stable_p(G)$ може се писати $stable(G)$. Наравно, $stable(G)$ је најмањи стабилан потпростор од $(\mathcal{F}_t)$ који садржи $G$.

**Дефиниција 2.6.** ([51]) *За подскуп $G$ од $H^p$ нека је са $G^\perp$ (тј. $G^\times$) означен скуп свих мартингала из $H^p$ који су слабо ортогонални (тј. јако ортогонални) на сваки елемент из $G$.*

**Лема 2.1.** ([51]) *Ако је $G$ произвољан подскуп од $H^p$, тада је $G^\times$ (затворен и) стабилан.*

**Лема 2.2.** ([51]) *Нека су $N, M$ квадратно интеграбилни мартингали. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

*(1)* *$M$ и $N$ су јако ортогонални;*

*(2)* *$stable(M)$ и $N$ су јако ортогонални;*

*(3)* *$stable(M)$ и $stable(N)$ су јако ортогонални;*

*(4)* *$stable(M)$ и $N$ су слабо ортогонални;*

*(5)* *$stable(M)$ и $stable(N)$ су слабо ортогонални.*

**Теорема 2.1.** ([51]) *Нека је $G$ подскуп од $H^p$ који је стабилан. Тада је $G^\perp$ стабилан потпростор и ако је $M \in G^\perp$ тада је $M$ јако ортогоналан на $G$. Тј. $G^\perp = G^\times$, и $stable(G) = G^{\perp\perp} = G^{\times\perp} = G^{\times\times}$.*

Стабилни потпростори се могу посматрати и из другачије перпективе. Наиме, својство стабилности неког подскупа мартингала је уствари својство вероватноће $P$, где се посматра читава колекција вероватноћа у односу на коју су елементи скупа $G$ $(\mathcal{F}_t)$-мартингали.

## 2.2 Узрочност и својство мартингалности

Данас, мартингали налазе примену у економији, демографији и многим другим областима. Питање очувања својства мартингалности, када се информациона $\sigma$-алгебра повећава, због његове непредвидивости је директно везано за концепт узрочности.

Нека је $H$ скуп здесна непрекидних модификација $(\mathcal{H}_t)$-адаптираних процеса облика

$$H = \{M_t : M_t = P(A|\mathcal{H}_t), A \in \mathcal{H}_\infty\}. \tag{2.1}$$

Тада важи следећи резултат.

**Теорема 2.2.** ([45]) *Нека је* $\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{F}_\infty$ *и* $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$. *Тада је* $\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ *ако и само ако је сваки* $(\mathcal{H}_t)$*-адаптиран* $(\mathcal{G}_t)$*-мартингал и* $(\mathcal{F}_t)$*-мартингал.*

**Доказ:** Нека је $\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$. Тада је $\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{F}_\infty, \mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$ и

$$\text{за свако } A \in \mathcal{H}_\infty \quad P(A \mid \mathcal{G}_t) = P(A \mid \mathcal{F}_t).$$

Нека је задовољена претпоставка да су елементи скупа $H$ облика (2.1) $(\mathcal{G}_t)$-мартингали, тада је

$$\begin{aligned} M_t &= E(M_\infty \mid \mathcal{G}_t) = E(P(A \mid \mathcal{H}_\infty) \mid \mathcal{G}_t) = E(E(\chi_A \mid \mathcal{H}_\infty) \mid \mathcal{G}_t) \\ &= E(\chi_A \mid \mathcal{G}_t) = P(A \mid \mathcal{G}_t) = P(A \mid \mathcal{F}_t) = E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t) \\ &= E(E(\chi_A \mid \mathcal{H}_\infty) \mid \mathcal{F}_t) = E(P(A \mid \mathcal{H}_\infty) \mid \mathcal{F}_t) = E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

где је $\chi_A$ индикатор функција скупа $A \in (\mathcal{H}_\infty)$, која је и $(\mathcal{H}_\infty)$-мерљива, па је

$$M_t = E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t)$$

што значи да су сви елементи скупа $H$ $(\mathcal{F}_t)$-мартингали.

Обрнуто, нека су сви елементи скупа $H$ $(\mathcal{G}_t)$-мартингали и $(\mathcal{F}_t)$-мартингали, или

$$\begin{aligned} M_t = E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) &= E(M_\infty \mid \mathcal{G}_t) \\ E(P(A \mid \mathcal{H}_\infty) \mid \mathcal{F}_t) &= E(P(A \mid \mathcal{H}_\infty) \mid \mathcal{G}_t) \\ E(E(\chi_A \mid \mathcal{H}_\infty) \mid \mathcal{F}_t) &= E(E(\chi_A \mid \mathcal{H}_\infty) \mid \mathcal{G}_t) \\ E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t) &= E(\chi_A \mid \mathcal{G}_t) \\ P(A \mid \mathcal{G}_t) &= P(A \mid \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

за $A \in (\mathcal{H}_\infty)$, па је, такође, задовољена и дефиниција узрочности, тј. $\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$. $\square$

Сличан резултат је доказан у [8], али је исказан у терминима неузрочности.

**Последица 2.1.** ([45]) *Нека је* $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$. *Тада је* $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ *ако и само ако је сваки* $(\mathcal{G}_t)$*-мартингал и* $(\mathcal{F}_t)$*-мартингал.*

**Доказ:** Ова пропозиција је специјалан случај претходне теореме (ако је $\mathbf{G} = \mathbf{H}$). $\square$

Као специјалан случај могу се посматрати процес Маркова и Винеров процес.

**Лема 2.3.** ([41]) *Процес* $X = \{X_t, t \in I\}$ *је процес Маркова у односу на филтрацију* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ *на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *ако и само ако је процес* $X$ *Марковски процес (у односу на* $\mathbf{F}^X$*) и процес је сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$ *у односу на меру* $P$.

**Доказ**: Нека је $X$ процес Маркова у односу на филтрацију $\mathbf{F}$, тј. нека је

$$P(A \cap B|X_t) = P(A|X_t)P(B|X_t)\ (P - \text{с.и.})$$

за свако $t \in I$, нека важи $A \in (\mathcal{F}_t),\ B \in \mathcal{F}_{[t,\infty)} = \sigma\{X_s, s \geq t\}$. Тада је за свако $t$ и за свако $A \in (\mathcal{F}^X_\infty)$

$$E(\chi_A|\mathcal{F}_t) = E(\chi_A|X_t)\ (P - \text{с.и.}).$$

Сада, из чињенице да је $\mathbf{F}^X \subseteq \mathbf{F}$, следи

$$(A \in \mathcal{F}_\infty^X),\ P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{F}_t^X)\ (P - \text{с.и.}),$$

тј.

$$\mathbf{F}^X \models\!\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P.$$

Јасно је да је $X$ процес Маркова (у односу на $\mathbf{F}^X$).

Једноставно се може уочити да је обрнуто тврђење тачно.□

Следећа Лема је специјалан случај Леме 2.3.

**Лема 2.4.** $([41])$ *Винеров процес* $W = (W_t, t \in I)$ *на простору вероватноћа са филтрацијом* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *је сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ *у односу на вероватноћу* $P$.

На основу претходних резултата може се закључити да процес који је сопствени узрок јесте комплетно описан својим понашањем у односу на своју природну филтрацију.

Такође, концепт узрочности се може повезати и са већом класом процеса, класом локалних мартингала. Нека је $G$ скуп здесна непрекидних модификација $(\mathcal{G}_t)$-адаптираних процеса облика

$$G = \{N_t : N_t = P(A \mid \mathcal{G}_t), A \in \mathcal{G}_\infty\}. \tag{2.2}$$

Тада важи следећи резултат.

**Теорема 2.3.** $([45])$ *Сваки* $(\mathcal{G}_t)$*-локалан мартингал је и* $(\mathcal{F}_t)$*-локалан мартингал ако и само ако је* $\mathbf{G}$ *сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$*, тј. ако* $\mathbf{G} \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ *важи.*

**Доказ:** Нека је сваки $(\mathcal{G}_t)$-локалан мартингал истовремено и $(\mathcal{F}_t)$-локалан мартингал. Тада то тврђење важи за сваки мартингал (јер је сваки мартингал и локалан мартингал). $(\mathcal{G}_t)$-мартингал $N_t$ је облика

$$N_t = E(N_\infty \mid \mathcal{G}_t) \tag{2.3}$$

и на основу претпоставке то је и $(\mathcal{F}_t)$-мартингал. Дакле, важи

$$N_t = E(N_\infty \mid \mathcal{F}_t) = E(N_\infty \mid \mathcal{G}_t) \quad \text{за сваки } (\mathcal{G}_t)\text{-мартингал } N_t, \text{ или}$$

$$\text{за свако } A \in (\mathcal{G}_\infty) \quad P(A \mid \mathcal{F}_t) = P(A \mid \mathcal{G}_t),$$

и на основу дефиниције узрочности је $\mathbf{G} \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$.

Обрнуто, нека важи $\mathbf{G} \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$, или нека је за свако $A \in (\mathcal{G}_\infty)$ задовољено

$$P(A \mid \mathcal{G}_t) = P(A \mid \mathcal{F}_t),$$

и нека је процес $N_t$ облика (2.2) и $(\mathcal{G}_t)$-локалан мартингал. Тада постоји низ времена заустављања $\{T_n\}$ у односу на филтрацију $\mathbf{G}$ за коју је $\{N_{t\wedge T_n}\}$ низ $(\mathcal{G}_t)$-мартингала.

Тада на основу Теореме 3 у [2] низ времена заустављања $\{T_n\}$ у односу на $\mathbf{G}$ је низ времена заустављања и у односу на филтрацију $\mathbf{F}$. На основу последице $(c.1)$ у $[2]$, $T$ је време заустављања у односу на филтрацију $(\mathcal{G}_t)$ ако и само ако је то време заустављања у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t)$ и $\mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{G}_\infty$. Тада је за свако $n$

$$\begin{aligned}
E(N_\infty \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_n}) &= E(P(A \mid \mathcal{G}_\infty) \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_n}) = E(E(1_A \mid \mathcal{G}_\infty) \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_n}) \\
&= E(1_A \mid \mathcal{G}_\infty \cap \mathcal{F}_{t\wedge T_n}) = \begin{cases} E(1_A \mid \mathcal{F}_t \cap \mathcal{G}_\infty), & t < T_n \\ E(1_A \mid \mathcal{F}_{T_n} \cap \mathcal{G}_\infty), & t \geq T_n \end{cases} \\
&= \begin{cases} E(1_A \mid \mathcal{G}_t), & t < T_n \\ E(1_A \mid \mathcal{G}_{T_n}), & t \geq T_n \end{cases} = E(1_A \mid \mathcal{G}_{t\wedge T_n}) \\
&= E(E(1_A \mid \mathcal{G}_\infty) \mid \mathcal{G}_{t\wedge T_n}) = E(N_\infty \mid \mathcal{G}_{t\wedge T_n}) = N_{t\wedge T_n},
\end{aligned}$$

где је $A$ $(\mathcal{G}_\infty)$-мерљив догађај. Процеси $\{N_{t\wedge T_n}\}$ који су $(\mathcal{G}_t)$-мартингали су такође и $(\mathcal{F}_t)$-мартингали а низ $\{T_n\}$ је низ времена заустављања у односу на $\mathbf{F}$, па је $N_t$ процес који је $(\mathcal{F}_t)$-локалан мартингал, где је

$$N_{t\wedge T} = P(A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) = \begin{cases} N_t = P(A \mid \mathcal{F}_t), & t < T, \\ N_T = P(A \mid \mathcal{F}_T), & t \geq T. \end{cases} \square$$

Једноставно се доказује следеће тврђење.

**Пропозиција 2.2.** ([45]) *Из релације* $\mathbf{G} \models \mathbf{G};\mathbf{F};P$ *следи* $E(N_t \mid \mathcal{F}_t) = E(N_t \mid \mathcal{G}_\infty)$.

**Доказ:** Из услова $\mathbf{G} \models \mathbf{G};\mathbf{F};P$ важи да је

$$\begin{aligned}
E(N_t \mid \mathcal{F}_t) &= E(P(A \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_t) = E(E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_t) = E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t) \\
&= P(A \mid \mathcal{F}_t) = P(A \mid \mathcal{G}_t) = E(\chi_A \mid \mathcal{G}_t) = E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t \cap \mathcal{G}_\infty) \\
&= E(E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{G}_\infty) = E(P(A \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{G}_\infty) = E(N_t \mid \mathcal{G}_\infty). \square
\end{aligned}$$

Концепт узрочности се може применити и на семимартингале, што је показано следећом теоремом.

**Теорема 2.4.** ([45]) *Сваки* $(\mathcal{G}_t)$*-семимартингал је* $(\mathcal{F}_t)$*-семимартингал ако и само ако важи* $\mathbf{G} \models \mathbf{G};\mathbf{F};P$.

**Доказ:** Сваки семимартингал, као што је познато, се може представити као сума локалног мартингала и процеса коначне варијације (декомпозиција семимартингала).

На основу Теореме 2.3 својство локалне мартингалности се чува уз помоћ концепта узрочности, чак и када $\sigma$-алгебра информација расте.

Варијациони процес $Var(A_t)$ од процеса $A_t$ је дефинисан са

$$Var(A_t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{0\leq i<nt} \left| A\left(\frac{i+1}{n}\right) - A\left(\frac{1}{n}\right) \right|.$$

Како је $A_t$ процес коначне варијације $Var(A_t)$ је скоро извесно коначан, за скоро свако $t$ и растући у односу на обе филтрације $(\mathcal{G}_t)$ и $(\mathcal{F}_t)$, следи да је $Var(A_t)$ процес коначне варијације у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t)$. Дакле, $Z_t$ је $(\mathcal{F}_t)$-семимартингал.

Обрнуто, нека је сваки $(\mathcal{G}_t)$-семимартингал истовремено и $(\mathcal{F}_t)$-семимартингал. Тада је

$$Z_t = M_t + A_t, \qquad \text{за свако } t \in I$$

и $M_t$ је локалан мартингал у односу на филтрације $(\mathcal{G}_t)$ и $(\mathcal{F}_t)$. На основу Теореме 2.3 је задовољена узрочност $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$, па тврђење важи.□

Концепт узрочности се може применити и на квази-мартингале.

Квази-мартингал има јединствену декомпозицију $Y = M + A$, где је $M$ локалан мартингал и $A$ је предвидив процес са трајекторијама које су локално интеграбилне варијације и $A_0 = 0$.

**Пропозиција 2.3.** $([45])$ *Сваки* $(\mathcal{G}_t)$*-квази-мартингал је* $(\mathcal{F}_t)$*-квази-мартингал ако и само ако је* $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$.

**Доказ**: Тврђење следи директно из Теореме 2.4 за семимартингале јер је сваки ограничен семимартингал локалан квази-мартингал, што је уствари квази-мартингал.□

Ако је задовољена релација $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ и ако је $T$ време заустављања у односу на филтрацију $\mathbf{F}$, тада на основу Теореме 3. и последице $(\text{c}.1)$ у $[2]$, $T$ је време заустављања и у односу на филтрацију $\mathbf{G}$ и филтрације $(\mathcal{F}_T)$ и $(\mathcal{G}_\infty)$ су условно независне у односу на $(\mathcal{G}_T)$ $(\mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{G}_\infty)$ или

$$\mathcal{G}_\infty \perp \mathcal{F}_T | \mathcal{G}_T.$$

Последња чињеница је еквивалентна са

$$\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}_T; \mathbf{F}_T$$

или за свако $A \in (\mathcal{G}_\infty)$ важи

$$P(A \mid \mathcal{G}_T) = P(A \mid \mathcal{F}_T).$$

Ако је $X$ $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{F})$-мерљив процес (где је $\mathcal{B}$ Борелова $\sigma$-алгебра), такав да за свако време заустављања $T$ у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ је $E[|X_T|1_{(T<\infty)}] < \infty$, тада постоји јединствен процес $Y$ са вредностима у $R$ који се назива опциона пројекција ограниченог, мерљивог процеса $X$ где је

$$E[X_T 1_{(T<\infty)} \mid \mathcal{F}_T] = Y_T 1_{(T<\infty)}, \quad P - \text{с.и.}$$

Нека важи $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$. Очигледно је тада $N_t$ процес који је $(\mathcal{G}_\infty)$-мерљив и због узрочности његова $\mathbf{F}$-опциона и $\mathbf{G}$-опциона пројекција се не могу разликовати од његове опционе пројекције на константној филтрацији $(\mathcal{G}_\infty)$. Дакле, доказан је следећи резултат.

**Пропозиција 2.4.** ([45]) *Нека је* $\mathbf{M} = \{M_t, t \geq 0\}$ *униформно интеграбилан* $(\mathcal{F}_t)$*-мартингал и* $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}_T; \mathbf{F}_T$*, где је* $T$ *време заустављања у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$*, тада важи*

$$E(M_T \mid \mathcal{F}_T) = E(M_T \mid \mathcal{G}_\infty).$$

**Пример 2.1.** ([45]) Један од најпростијих примера је када се у Последици 2.1 у релацији $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ претпостави да је $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t\wedge T}$, где је $T$ време заустављања у односу на $\mathbf{F}$, па важи $\mathbf{F}^T \mid\!< \mathbf{F}^T; \mathbf{F}; P$. Тада је сваки мартингал у односу на $(\mathcal{F}_{t\wedge T})$ такође и $(\mathcal{F}_t)$-мартингал и обрнуто. Очување својства мартингалности повлачи да је

$$\mathcal{F}_T \perp \mathcal{F}_t | \mathcal{F}_{t\wedge T}.$$

Наиме, како су мартингали облика (2.2) из релације узрочности $\mathbf{F}^T \mid\!< \mathbf{F}^T; \mathbf{F}; P$ важи да је

$$\mathcal{F}_T \perp \mathcal{F}_t | \mathcal{F}_{t\wedge T}$$

или

$$\text{за свако } A \in (\mathcal{F}_T) \quad P(A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) = P(A \mid \mathcal{F}_t).$$

Очигледно је

$$\begin{aligned}
M_t &= E(M_\infty \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) = E(P(A \mid \mathcal{F}_T) \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) = E(E(\chi_A \mid \mathcal{F}_T) \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) \\
&= E(\chi_A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) = P(A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) = P(A \mid \mathcal{F}_t) = E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t) \\
&= E(E(\chi_A \mid \mathcal{F}_T) \mid \mathcal{F}_t) = E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

и $M_t$ је $(\mathcal{F}_t)$-мартингал.

Обрнуто, ако је сваки елемент скупа (2.2) мартингал у односу на филтрације $(\mathcal{F}_t)$ и $(\mathcal{F}_{t\wedge T})$, тада је

$$\begin{aligned}
E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) &= E(M_\infty \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) \\
E(P(A \mid \mathcal{F}_T) \mid \mathcal{F}_t) &= E(P(A \mid \mathcal{F}_T) \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) \\
E(E(\chi_A \mid \mathcal{F}_T) \mid \mathcal{F}_t) &= E(E(\chi_A \mid \mathcal{F}_T) \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) \\
E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t) &= E(\chi_A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) \\
P(A \mid \mathcal{F}_t) &= P(A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) \quad \text{за свако A } \in (\mathcal{F}_T),
\end{aligned}$$

па следи да важи $\mathbf{F}^T \mid\!< \mathbf{F}^T; \mathbf{F}; P$. $\square$

## 2.3 Узрочност и ортогоналност мартингала

Концепт ортогоналних мартингала се може применити у теорији трговине акцијама и следећи резултат утврђује еквиваленцију између концепта узрочности и јако ортогоналних мартингала.

**Теорема 2.5.** ([64]) *Нека су $M$ и $N$ два независна $(\mathcal{F}_t)$-мартингала. Тада су они јако ортогонални ако и само ако су сопствени узроци.*

**Доказ**: Нека су $M$ и $N$ строго ортогонални и независни $(\mathcal{F}_t)$-мартингали. Тада је $MN$ такође мартингал. Природна филтрација мартингала $M$ је $(\mathcal{F}_t^M)$, и процес $M$ је потпуно описан својим понашањем у односу на природну филтрацију. Тада важи

$$E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) = M_t. \tag{2.4}$$

С друге стране $M_t$ је мартингал у односу на своју природну филтрацију $(\mathcal{F}_t^M)$, па је

$$E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t^M) = M_t. \tag{2.5}$$

Користећи једнакости (2.4) и (2.5) добија се

$$E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t^M) = E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t).$$

Тврђење важи за сваки $(\mathcal{F}_t^M)$-мартингал,

$$\begin{array}{rrcl} \forall\, A \in (\mathcal{F}_\infty^M) & E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t^M) & = & E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t), \\ \forall\, A \in (\mathcal{F}_\infty^M) & P(A \mid \mathcal{F}_t^M) & = & P(A \mid \mathcal{F}_t). \end{array}$$

где је $\chi_A$ индикатор функција догађаја $A \in (\mathcal{F}_\infty^M)$. Дакле, мартингал $M$ је сопствени узрок. Доказ да је мартингал $N$ сопствени узрок је сличан.

Обрнуто, због узрочности

$$\begin{array}{rrcl} \forall A \in (\mathcal{F}_\infty^M) & P(A \mid \mathcal{F}_t^M) & = & P(A \mid \mathcal{F}_t), \\ \forall B \in (\mathcal{F}_\infty^N) & P(B \mid \mathcal{F}_t^N) & = & P(B \mid \mathcal{F}_t) \end{array}$$

и независности мартингала $M$ и $N$ је

$$M_t N_t = P(A \mid \mathcal{F}_t^M) P(B \mid \mathcal{F}_t^N) = P(A \mid \mathcal{F}_t) P(B \mid \mathcal{F}_t) = P(AB \mid \mathcal{F}_t).$$

Из претходног резултата следи

$$\begin{array}{rcl} E(M_\infty N_\infty \mid \mathcal{F}_t) & = & E(P(A \mid \mathcal{F}_\infty^M) P(B \mid \mathcal{F}_\infty^N) \mid \mathcal{F}_t) \\ & = & E(E(\chi_A \mid \mathcal{F}_\infty^M) \mid \mathcal{F}_t) E(E(\chi_B \mid \mathcal{F}_\infty^N) \mid \mathcal{F}_t) \\ & = & E(\chi_A \mid \mathcal{F}_\infty^M \cap \mathcal{F}_t) E(\chi_B \mid \mathcal{F}_\infty^N \cap \mathcal{F}_t) \\ & = & E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t^M) E(\chi_B \mid \mathcal{F}_t^N) = P(A \mid \mathcal{F}_t^M) P(B \mid \mathcal{F}_t^N) \\ & = & M_t N_t. \end{array}$$

Дакле, $MN$ је мартингал и $M$ и $N$ су јако ортогонални мартингали. $\square$

Мартингал $M$ је јако ортогоналан у односу на самог себе ако је $M^2$ мартингал. Следећи резултат повезује ово својство са концептом узрочности.

**Став 2.1.** ([64]) *Непрекидан мартингал $M$ је јако ортогоналан на самог себе ако и само ако је сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$, тј. ако важи $\mathbf{F}^M \mid\!< \mathbf{F}^M; \mathbf{F}; P$.*

**Доказ**: Доказ следи директно из Теореме 2.5.□

Претходни резултат о еквиваленцији између ортогоналности и узрочности се може проширити и на ширу класу процеса, на локалне мартингале.

**Теорема 2.6.** ([64]) *Нека су $M$ и $N$ независни локални мартингали у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t)$. Тада су $M$ и $N$ ортогонални ако и само ако је сваки од њих сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$.

**Доказ:** Нека су, по претпоставци $M$ и $N$ ортогонални и независни локални мартингали. Процеси $M$ и $N$ су мартингали, (јер је сваки мартингал локалан мартингал, али обрнуто тврђење није тачно) и на основу Теореме 2.5, из ортогоналности следи да су $M$ и $N$ сопствени узроци у оквиру $\mathbf{F}$.

Обрнуто, локални мартингали $M$ и $N$ су сопствени узроци у оквиру $\mathbf{F}$, па важи

$$\forall A \in (\mathcal{F}_\infty^M) \quad P(A \mid \mathcal{F}_t^M) = P(A \mid \mathcal{F}_t) \tag{2.6}$$
$$\forall A \in (\mathcal{F}_\infty^N) \quad P(A \mid \mathcal{F}_t^N) = P(A \mid \mathcal{F}_t) \tag{2.7}$$

Нека је $\{T_n\}$ низ времена заустављања за које су $\{M_{t\wedge T_n}\}$ и $\{N_{t\wedge T_n}\}$ низови мартингала у односу на $(\mathcal{F}_t)$. Због претпостављене независности, релација (2.6) и (2.7) је

$$\begin{aligned}
E((MN)_\infty \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_n}) &= E(M_\infty N_\infty \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_n}) = E(P(A \mid \mathcal{F}_t)P(B \mid \mathcal{F}_t) \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_n}) \\
&= E(P(A \mid \mathcal{F}_t^M)P(B \mid \mathcal{F}_t^N) \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_n}) \\
&= E(E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t^M)E(\chi_B \mid \mathcal{F}_t^N) \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_n}) \\
&= E(\chi_A \cdot \chi_B \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_n}) = E(\chi_A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_n})E(\chi_B \mid \mathcal{F}_{t\wedge T_n}) \\
&= M_{t\wedge T_n} N_{t\wedge T_n} = (MN)_{t\wedge T_n}
\end{aligned}$$

за свако $n = 1, 2, \ldots$. Низ $\{(MN)_{t\wedge T_n}\}$ је низ мартингала, па је $MN$ локалан мартингал и на основу Дефиниције 2.4, процеси $M$ и $N$ су ортогонални локални мартингали. □

**Став 2.2.** ([64]) *Непрекидан локалан мартингал $M$ је ортогоналан на самог себе ако и само ако је сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$, *или* $\mathbf{F}^M \mid\!< \mathbf{F}^M; \mathbf{F}; P$.

**Доказ:** Доказ директно следи из Теореме 2.6. □

Следећа теорема важи за сва времена заустављања $S, T$ и повезује заустављен локалан мартингал са концептом узрочности.

**Лема 2.5.** ([64]) *Нека су $M$ и $N$ независни локални мартингали који су и сопствени узроци. За сва вемена заустављања $S, T$ заустављени локални мартингали $M_S$ и $N_T$ су ортогонални.*

**Доказ:** Очигледно је довољно доказати тврђење за $T = \infty$. Нека је $\{T_n\}$ низ времена заустављања, таквих да су $\{M_{t\wedge T_n}\}$ и $\{N_{t\wedge T_n}\}$ низови мартингала. Користећи Теорему

2.6, следи да је $\{(MN)_{t\wedge T_n}\}$ низ мартингала. Тада за свако време заустављања $R$ је

$$\begin{aligned}
E((M_SN)_R^{T_n}) &= E(M_{S\wedge R}^{T_n}N_R^{T_n}) = E(M_{S\wedge R}^{T_n}N_R^{T_n} + M_{S\wedge R}^{T_n}N_{S\wedge R}^{T_n} - M_{S\wedge R}^{T_n}N_{S\wedge R}^{T_n}) \\
&= E((MN)_{S\wedge R}^{T_n}) + E(M_{S\wedge R}^{T_n}(N_R^{T_n} - N_{S\wedge R}^{T_n})) \\
&= E(M_0N_0) + E(M_{S\wedge R}^{T_n}(N_R^{T_n} - N_S^{T_n})I_{\{S<R\}}) \\
&= E(M_0N_0) + E(M_S^{T_n}I_{\{S<R\}}(N_R^{T_n} - N_S^{T_n})I_{\{S<R\}}) \\
&= E(M_0N_0) + E(M_S^{T_n}I_{\{S<R\}}E(N_R^{T_n} - N_S^{T_n} \mid \mathcal{F}_S)) \\
&= E(M_0N_0)
\end{aligned}$$

према теореми опционог заустављања. На основу Леме 1.44 из [19] $(M_SN)$ је мартингал за свако $n$. $\square$

**Пример 2.2.** ([64]) Нека је $\pi$ Поасонов процес и нека је $\{T_n\}$ низ времена заустављања који описује скокове. Нека је $\{\xi_n\}$ низ независних и идентично расподељених случајно промењљивих које су независне од $\{T_n\}$. Ако је $E(\xi_n) = 0$ за свако $n$ тада је јединствен Поасонов процес облика

$$M(t) = \sum_n \xi_n \chi(\tau_n \leq t)$$

мартингал. Ако је $\{\eta_n\}$ сличан низ тада је процес

$$N(t) = \sum_n \eta_n \chi(\tau_n \leq t)$$

такође мартингал. Ако су низови $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ независни и важи $\zeta_n = \xi_n\eta_n$ тада је $E(\zeta_n) = E(\eta_n\xi_n) = E(\eta_n)E(\xi_n) = 0$. Због тога су $M$ и $N$ независни и на основу Теореме 4.1 из [41] и Теореме 3 из [2], $M(t)$ и $N(t)$ су сопствени узроци и независни. Такође, јединствен Поасонов процес

$$MN(t) = \sum_n \xi_n\eta_n\chi(T_n \leq t) = \sum_n \zeta_n\chi(T_n \leq t)$$

је мартингал па су $M$ и $N$ ортогонални.$\square$

## 2.4 Узрочност и стабилни потпростори

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ простор вероватноћа са филтрацијом, где је $(\mathcal{F}_t)$ филтрација која је здесна непрекидна и комплетна. Нека је $\mathcal{M}$ простор здесна непрекидних, униформно интеграбилних $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингала са семинормом $\|(N_t)\|_{\mathcal{M}} = \|N_\infty\|_{L^1}$ и нека је $\mathcal{H}^p$, $(p \in [1,\infty))$ скуп мартингала $N_t \in \mathcal{M}$ који задовољавају $\|N_t\|_{H^p}^p = E(\sup_t |N_t|^p) < \infty$.

Нека је $G$ скуп здесна непрекидних модификација мартингала $N_t = P(A \mid \mathcal{G}_t)$ где је $A \in (\mathcal{G}_\infty)$, облика (2.2), тј.

$$G = \{N_t = (P(A \mid \mathcal{G}_t)) \mid A \in (\mathcal{G}_\infty)\}. \tag{2.8}$$

**Теорема 2.7.** ([44]) *Нека је задовољен услов* $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$. *Ако је* $K_t$ *ортогоналан на* $G$ *за свако* $K_t \in \mathcal{M}$ *тада је* $K_t$ *ортогоналан на* $stable(G)$.

**Доказ**: Нека је са $\mathcal{Y}$ означен скуп свих $(\mathcal{F}_t)$-мартингала који су ортогонални на $K_t$. Наравно, $G \subseteq \mathcal{Y}$ па треба доказати да је $\mathcal{Y}$ стабилан потпростор од $(\mathcal{F}_t)$.

Потпростор $\mathcal{Y}$ је затворен у односу на време заустављања. Ако је $N_t = P(A \mid \mathcal{G}_t), A \in (\mathcal{G}_\infty)$ здесна непрекидан $(\mathcal{F}_t)$-мартингал, да би се доказало да је потпростор $\mathcal{Y}$ затворен у односу на време заустављања потребно је доказати да је процес $N^T = N_{t\wedge T}$ здесна непрекидан $(\mathcal{F}_t)$-мартингал. Јасно је да је $N^T$ здесна непрекидан. Наиме, ако је процес $N$ адаптиран и $\mathrm{cadlag}$ и ако је $T$ време заустављања, тада је процес

$$N_t^T = N_{T\wedge t} = N_t 1_{\{t<T\}} + N_T 1_{\{t\geq T\}}$$

такође адаптиран. Даље, на основу Теореме 2.16 у [51] (Дубова опциона теорема) је

$$\begin{aligned} N_{t\wedge T} &= E(N_T \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) = E(N_T 1_{\{T<t\}} + N_T 1_{\{T\geq t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) \\ &= N_T 1_{\{T<t\}} + E(N_T 1_{\{T\geq t\}} \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) = N_T 1_{\{T<t\}} + E(N_T \mid \mathcal{F}_t) 1_{\{T\geq t\}}. \end{aligned}$$

Зато је

$$N_{T\wedge t} = N_T 1_{\{T<t\}} + E(N_T \mid \mathcal{F}_t) 1_{\{T\geq t\}} = E(N_T \mid \mathcal{F}_t),$$

јер је $N_T 1_{\{T<t\}}$ процес који је $(\mathcal{F}_t)$-мерљив. Зато је $N^T$ $(\mathcal{F}_t)$-мартингал на основу Теореме 2.13 у [51].

Ако је $K_t$ мартингал који је ортогоналан на $N_t$, потребно је доказати да ће $K_t$ бити ортогоналан и на заустављен процес $N^T = N_{t\wedge T}$. Наиме, потребно је да процес $N^T K$ буде локалан мартингал.

$$\begin{aligned} E(N_\infty^T K_\infty \mid \mathcal{F}_t) &= E(K_\infty N^T \mid \mathcal{F}_t) = E(K_\infty P(A \mid \mathcal{G}_{T\wedge t}) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= E(K_\infty P(A \mid \mathcal{F}_{T\wedge t}) \mid \mathcal{F}_t) = E(K_\infty \mid \mathcal{F}_t) E(E(1_A \mid \mathcal{F}_{T\wedge t}) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= K_t E(1_A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T} \cap \mathcal{F}_t) = K_t \cdot \begin{cases} E(1_A \mid \mathcal{F}_t) & t \leq T \\ E(1_A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}) & T < t \end{cases} \\ &= K_t \cdot \begin{cases} N_t & t \leq T \\ N_T & T < t \end{cases} = K_t N^T \end{aligned}$$

У претходним једнакостима је коришћена релација узрочности $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$, која подразумева да је за свако $A \in (\mathcal{G}_\infty)$ задовољено

$$P(A \mid \mathcal{G}_t) = P(A \mid \mathcal{F}_t),$$

као и Теорема 1.26 у којој је доказана еквиваленција $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P \iff \mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}_T; \mathbf{F}_T; P$. Дакле, $N^T K$ је мартингал, самим тим и локалан мартингал, а $N^T$ и $K$ су међусобно ортогонални мартингали.

Потребно је још доказати да је $\mathcal{Y}$ стабилан потпростор. Нека је $\{N_n\} \in \mathcal{Y}$ низ процеса који конвергира ка $N_\infty$ у оквиру $(\mathcal{F}_t)$. Нека је $K_t \in \mathcal{M}$. Тада је $N^n K$ мартингал за свако

$n$, па је $E((N_nK)(T)) = 0$ за свако време заустављања $T$. Нека је $k < \infty$ горња граница за $K$.

$$\begin{aligned} |E((N_\infty K)(T))| &= |E((N_\infty K(T)) - E((N_nK)(T))| \\ &\leq E(|((N_\infty - N_n)K)(T)|) \leq k \cdot E(|(N_\infty - N_n)|) \\ &\leq k \cdot E\left(\sqrt{[N_\infty - N_n](\infty)}\right) \leq k \cdot ||N_\infty - N_n|| \to 0. \end{aligned}$$

Дакле, $N_\infty K$ је такође мартингал. Такође, $stable(G) = \mathcal{Y} = \{K \in \mathcal{F}_t : N \perp K\}$ је затворен у $(\mathcal{F}_t)$. $\square$

За испуњење услова $stable(H) = H^p$, потребно је и довољно да је сваки ограничен мартингал који је ортогоналан на $H$ једнак нули (види [4]). Нека је скуп $H$ облика (2.1) тј.

$$H = \{M_t = (P(A \mid \mathcal{H}_t)) \mid A \in (\mathcal{H}_\infty)\}. \tag{2.9}$$

Нека је $\mathcal{P}$ скуп свих вероватноћа $Q$ које су апсолутно непрекидне у односу на $P(Q \ll P)$ и које задовољавају:

(a.1) $Q = P$ на $(\mathcal{F}_0)$,

(a.2) сваки елемент скупа $H$ је $(\mathcal{F}_t, Q)$-мартингал.

Треба напоменути и то да други услов не би имао никакав значај ако се за вероватноћу $Q$ не претпостави да је апсолутно непрекидна у односу на вероватноћу $P$.

Наиме, важи следећа теорема.

**Теорема 2.8.** ([44]) *Нека је $H$ потпростор од $H^p$, $1 \leq p < \infty$, тако да је $1 \in H$. Тада је $stable(H) = H^p$ ако и само ако је $\mathbf{H} \not< \mathbf{H}; \mathbf{F}; P$.*

**Доказ**: Нека је, на основу претпоставке задовољен услов $\mathbf{H} |< \mathbf{H}; \mathbf{F}; P$ и нека постоји вероватноћа $Q \in \mathcal{P}^*$ која је апсолутно непрекидна у односу на вероватноћу $P$ и која задовољава услове (a.1) и (a.2). Тада је на основу Теореме 1.21 задовољено $\mathbf{H} \not< \mathbf{H}; \mathbf{F}; Q$. $H$ је скуп $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингала и на основу Теореме 1.25 (нека је $\mathcal{G}_t = \mathcal{H}_t, \mathcal{F}_t = \bar{\mathcal{F}}_t$) следи да је $P$ екстремна тачка скупа $\mathcal{P}^*$ који је скуп вероватноћа дефинисаних на $(\mathcal{H}_\infty)$. Да би се доказала једнакост $stable(H) = H^p$ потребно је и довољно да је сваки ограничен мартингал који је ортогоналан на $H$ једнак нули. Ако је $P$ екстремна мера, тада је $P = Q$ где је $L_\infty = \dfrac{dQ}{dP} = 1$ и $L_t = E(L_\infty \mid \mathcal{F}_t) = 1$. Такође је $L_0 = 1$, на основу претпоставке (a.1) и (a.2). Тада је $L_t - L_0$ ограничен мартингал који је ортогоналан на $H$ и $L_t - L_0 = 1 - 1 = 0$, дакле мартингал је једнак нули па је $stable(H) = H^p$.

Обрнуто, нека је $stable(H) = H^p$, тада сви ограничени мартингали који су ортогонални на $H$ су једнаки нули. Нека је $L_t = E(L_\infty \mid \mathcal{F}_t)$, где је $L_t - L_0 = 0$, а мартингал $L_t - L_0$ је ортогоналан на $H$. Нека је

$$L_t = E\left(\frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

где је $L_\infty$ мерљиво у односу на $(\mathcal{H}_\infty)$ и $M_t = P(A \mid \mathcal{H}_t) \in H$. Вероватноће $P, Q \in \mathcal{P}^*$, а на основу претпоставке, елементи скупа $H$ су $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингали и на основу (а.2) сви елементи скупа $H$ су истовремено и $(\mathcal{F}_t, Q)$-мартингали, па је

$$\begin{aligned} E_Q(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) &= M_t = E_P(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) \\ E_Q(P(A \mid \mathcal{H}_\infty) \mid \mathcal{F}_t) &= E_P(P(A \mid \mathcal{H}_\infty) \mid \mathcal{F}_t) \\ E_Q(\chi_A \mid \mathcal{F}_t) &= E_P(\chi_A \mid \mathcal{F}_t) \\ Q(A \mid \mathcal{F}_t) &= P(A \mid \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

где се користи чињеница да је $\chi_A$, индикатор функција скупа $A$, која је $(\mathcal{H}_\infty)$-мерљива па је $P$ екстремна тачка скупа свих вероватноћа $\mathcal{P}^*$. На основу Теореме 1.25 следи да је

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{H}; \mathbf{F}; P.\square$$

**Последица 2.2.** ([44]) *Нека су скупови $G$ и $H$ потпростори од $H^p$. Тада је $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ и $\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{H}; \mathbf{F}; P$ ако и само ако је*

$$stable(G) = stable(H).$$

**Доказ**: Доказ директно следи на основу Теореме 2.8. Из услова $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ и $\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{H}; \mathbf{F}; P$ и на основу Теореме 2.8 следи да је $stable(G) = H^p$ и $stable(H) = H^p$, па је

$$stable(G) = H^p = stable(H).\square$$

На основу Теореме 2.7 следи да је

$$\text{за свако } K_T \in \mathcal{M} \quad K_t \perp G \Rightarrow K_t \perp stable(G). \tag{2.10}$$

Разлог због кога је релација (2.10) интересантна је описан у [16]. Прво, то повезује концепт стабилних потпростора за различите вредности броја $p$ (користећи дуалност између $p$ и $q$, тј. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \neq 1$.)

Услов (2.10) повезује екстремалност мере са концептом узрочности. Нека је $\mathcal{F}_0$ (0–1) $\sigma$-алгебра, тада је $P$ екстремна мера на скупу $\mathcal{P}^*$ који означава скуп мера у односу на које су елементи скупа $G$ локални мартингали ако и само ако је $H^1 = stable_1(G \cup \{1\})$ (видети Теорему 11.2 у [16]). Ако је $Q$ мера из скупа $\mathcal{P}^*$ која је апсолутно непрекидна у односу на $P$, онда услов ортогоналности (2.10) (где је $N_\infty = dQ/dP$) јесте еквивалентан са

$$Q \in \mathcal{P}^*,\ Q \ll P \Rightarrow Q = P.$$

Другим речима елементи скупа $stable_1(G)$ остају мартингали у односу на било коју меру $Q \ll P$, па за $\forall A \in (\mathcal{G}_\infty)$ важи $Q(A \mid \mathcal{F}_t) = P(A \mid \mathcal{F}_t)$. На основу Теореме 12.21 у [16], (2.10) се може применити и на мартингалне проблеме.

**Напомена 2.1.** Ако скуп вероватноћа $\mathcal{P}^*$ садржи само један једини елемент $P$, ова вероватноћа је екстремна и теорема се може применити. Наиме, ова тривијалност је фундаментална у применама.

Последица 2.2 се може применити на екстремна регуларна слаба решења стохастичких диференцијалних једначина. Ако се претпостави да је $(\mathcal{F}_0)$ комплетна и да је $H$ скуп здесна непрекидних модификација мартингала $P(A \mid \mathcal{F}_t^{X,Z})$ за $A \in (\mathcal{F}_\infty^{X,Z})$, тада на основу чињенице $(\mathcal{G}_t) = (\mathcal{F}_t^Z)$ услов (2.10) повлачи постојање екстремног, регуларног решења за које важи

$$stable_p(G) = stable_p(H), \ \ (p > 1)$$

где је $stable_p$ најмањи стабилан потпростор од $H^p$.

**Пример 2.3.** $([44])$ Ако је $T$ време заустављања следећа декомпозиција даје врло тривијалан пример парова ортогоналних стабилних потпростора

$$X = X^T + (X - X^T)$$

која одговара стабилним потпросторима свих мартингала заустављених у тренутку $T$ и мартингала који су једнаки нули на интервалу $[0, T]$.□

**Пример 2.4.** $([44])$ Нека је $T > 0$ произвољно време заустављања. Може се показати да је процес облика $X_t^A = A1_{\{t \geq T\}}$ униформно интеграбилан мартингал ако и само ако је $A \in L_1(\mathcal{F}_T)$ и $E(A \mid \mathcal{F}_{T-}) = 0$. Наиме, када $A$ пролази кроз скуп $L_2(\mathcal{F}_T) \oplus L_2(\mathcal{F}_{T-})$, $X^A$ пролази кроз стабилан потпростор мартингала који су заустављени у тренутку $T$ и који су једнаки нули на интервалу $[0, T)$. Једноставно се показује да се тај потпростор састоји од мартингала $Y$ за које је процес $Y_T$ $(\mathcal{F}_{T-})$-мерљив. Одговарајућа ортогонална декомпозиција је $Y = Z + W$, где је

$$Z_t = (Y_T - E(Y_T \mid \mathcal{F}_{T-}))1_{\{t \geq T\}}, \ \ W_t = Y_t - Z_t.\square$$

# Глава 3

# Узрочност и стохастичке диференцијалне једначине

Израз стохастичка диференцијална једначина, први уводи Бернштаин (S Bernštein) (1934,1938) при проучавању низа марковских ланаца. Независно од Итоа, Гихман (I.I.Gihman) (1947,1950) развија теорију стохастичких диференцијалних једначина, дајући и резултате о егзистенцији, јединствености и почетним условима. Данас је, међутим, опште прихваћен Итов приступ овој проблематици, настао из дефиниције случајног интеграла случајне функције са Винеровим процесом.

Од првих радова Итоа и Гихмана интерес за математичку теорију стохастичких диференцијалних једначина био је огроман. Овај концепт, због своје интуитивне природе, доживљава нарочиту примену у теорији стабилности, стохастичкој контроли, теорији игара, математичкој економији, математичкој биологији и генетици. Опширније о стохастичким диференцијалним једначинама се може наћи у литератури [1, 22, 25, 51, 61].

## 3.1 Узрочност и слаба решења стохастичких диференцијалних једначина

Нека је дата стохастичка диференцијална једначина

$$X_t = K_t + \int_0^t u_s(X) dZ_s \tag{3.1}$$

где је $Z = \{Z_t, t \in I\}$ $m$-димензионалан семимартингал, $X = \{X_t, t \in I\}$ $d$-димензионалан процес решења, $K = \{K_t, t \in I\}$ $d$-димензионалан процес који представља почетну вредност и чије су трајекторије непрекидне здесна и имају граничну вредност слева, коефицијент $u_t(X)$ је $d \times m$-димензионалан предвидив процес који зависи од трајекторија процеса $X$.

Концепт узрочности се може применити само на слаба решења, јер је код строгих решења узрочност већ садржана у дефиницији.

Нека је сваком семимартингалу $Z$ придружена случајна мера $\mu$ на $R_+ \times R^m$, дефинисана са

$$\mu(\omega; \cdot) = \sum_{s>0} I_{\{\triangle Z_s(\omega) \neq 0\}} \varepsilon_{(s, \triangle Z_s(\omega))}(\cdot),$$

а са $\nu$ нека је означена њена дуална предвидива пројекција (дата Теоремом 1.20), а то ће поново бити предвидива случајна мера на $R_+ \times R^m$.

Нека је, даље, $C = \{C^{ij}\}$ процес дефинисан са

$$C^{ij} = \langle M^i, M^j \rangle$$

квадратна карактеристика локалног мартингала из декомпозиције (1.1).

По дефиницији, $(A, C, \nu)$ је локална карактеристика семимартингала $Z$. Дефинисана је до скупова $P$-мере нула и важи

*(i)* $A$ је процес из декомпозиције (1.1), који је $(\mathcal{F})$-предвидив, $A_0 = 0$ и јесте коначне варијације на сваком коначном интервалу.

*(ii)* $C$ је непрекидан, $(\mathcal{F})$-адаптиран, $C_0 = 0$ и за свако $s \leq t$ матрица $(C^{ij}_t - C^{ij}_s)$ је симетрично ненегативна.

*(iii)* $\nu$ је $(\mathcal{F})$-предвидива мера.

Нека су основни канонски процеси дефинисани на следећи начин (видети [17]).

**Канонски простор процеса који генерише једначину**

Нека је $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}}, \dot{\mathcal{F}}_t, \dot{P})$ простор вероватноћа са филтрацијом, на коме су дефинисани

- $m$-димензионалан семимартингал $\dot{Z}$ где је $\dot{Z}_0 = 0$, $\dot{P}$-скоро извесно.
- $d$-димензионалан предвидив, процес $\dot{K}$, са трајекторијама које су здесна непрекидне и имају граничну вредност слева, који представља почетну вредност (не мора бити семимартингал).

Тада је

$$\dot{\mathcal{F}} = \sigma\{\dot{Z}_s, s \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad \dot{\mathcal{F}}_t = \bigcap_{s>t} \sigma\{\dot{Z}_r, r \leqslant s\} \Rightarrow \dot{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}^{\dot{Z}}_t \Rightarrow \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^{\dot{Z}},$$

(где је $\dot{\mathbf{F}} = \{\dot{\mathcal{F}}\}_{t \geqslant 0}$). Такође, $\dot{T}$ је време заустављања у односу на филтрацију $(\mathcal{F}^{\dot{Z}}_t)$.

**Канонски простор процеса решења**

Нека је $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}_t, \hat{P})$ простор вероватноћа са филтрацијом на коме је дефинисан $d$-димензионалан процес решења $\hat{X}$. Тада је

$$\hat{\mathcal{F}} = \sigma\{\hat{X}_s, s \geqslant 0\} \text{ и } \hat{\mathcal{F}}_t = \bigcap_{s>t} \sigma\{\hat{X}_r, r \leqslant 0s\},$$

тј. $\hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t^{\hat{X}} \Rightarrow \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^{\hat{X}}$ (где је $\hat{\mathbf{F}} = \{\hat{\mathcal{F}}_t\}_{t\geqslant 0}$).

**Заједнички канонски простор**

Нека је дефинисан производ простор $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, где је

$$\Omega = \dot{\Omega} \times \hat{\Omega} \;;\; \mathcal{F} = \dot{\mathcal{F}} \otimes \hat{\mathcal{F}} \;;\; \mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} (\dot{\mathcal{F}}_s \otimes \hat{\mathcal{F}}_s) \text{ и } \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}.$$

Такође, се посматрају и пројективна пресликавања која су дефинисана

$$\dot{\varphi} : \Omega \to \dot{\Omega} \text{ са } \dot{\varphi}(\dot{\omega}, \hat{\omega}) = \dot{\omega},$$
$$\hat{\varphi} : \Omega \to \hat{\Omega} \text{ са } \hat{\varphi}(\dot{\omega}, \hat{\omega}) = \hat{\omega}.$$

Са $Z$, $K$ и $X$ се означавају процеси на простору $\Omega$ за које је

$$\dot{\varphi}(Z) = \dot{Z} \;;\; \dot{\varphi}(K) = \dot{K} \;;\; \hat{\varphi}(X) = \hat{X},$$

и $T$ је време заустављања где је задовољено $\dot{\varphi}(T) = \dot{T}$. Такође, важи

$$\dot{\varphi}(\mathbf{F}) = \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^Z \text{ и } \hat{\varphi}(\mathbf{F}) = \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^X.$$

На овом простору је дефинисан коефицијент $u_t(X)$ који је $(\mathcal{F})$-предвидив и ограничен процес на простору $\Omega$.

Проблемом одређивања слабих решења стохастичких диференцијалних једначина са семимартингалима бавили су се Жакод, Мемин ([17, 18]), Лебедев ([23, 24]) и други.

Међутим, слабо решење не мора увек да постоји на простору $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}}, \dot{\mathcal{F}}_t, \dot{P})$, али ако и постоји онда може да захтева наметање јаких услова на коефицијент $u_t(X)$. Због тога је природно да се процес решења конструише на другом простору, по могућности да то буде проширење почетног простора, тј. на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.

Жакод и Мемин ([17, 18]) су проучавали егзистенцију и јединственост решења једначине (3.5) увођењем проширења датог простора вероватноћа. Они су доказали да на тако добијеном простору, постоји мера за коју постоји процес решења $X$. Ту меру су назвали мера решења, али је такође позната и под називом слабо решење.

Жакод и Мемин слабо решење дефинишу на следећи начин.

**Дефиниција 3.1.** ([18]) *Слабо решење једначине (3.1) је вероватноћа $P$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ која задовољава:*

*(i)* $\dot{\varphi}(P) = \dot{P}$,

*(ii)* *$Z$ је семимартингал на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$,*

*(iii)* *ако је $(\dot{A}, \dot{C}, \dot{\nu})$ локална карактеристика од $\dot{Z}$ на простору $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}}, \dot{\mathcal{F}}_t, \dot{P})$ онда је $(\dot{\varphi}^{-1}(\dot{A}), \dot{\varphi}^{-1}(\dot{C}), \dot{\varphi}^{-1}(\dot{\nu}))$ локална карактеристика од $Z$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$,*

*(iv)* *за меру $P$ постоји cadlag, $(\mathcal{F})$-адаптиран процес решења $X$ који задовољава једначину (3.5).*

Дефиницију слабог решења први уводи Пелумаил (J. Pellaumail [33]). Та дефиниција је слична Дефиницији 4.4, али не садржи услов *(iii)*. (Услов *(iii)* је додат из следећег разлога: ако је $\dot{Z}$ Винеров процес на $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}}, \dot{\mathcal{F}}_t, \dot{P})$ услов *(iii)* обезбеђује да је $Z$ Винеров процес и на простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$).

Лебедев је (у [23]) генерализовао резултате из радова [17, 18] и доказао егзистенцију слабог решења (у јаком смислу), за једначине општије од (3.1), које укључују и случајне мере. Он је увео и нешто другачију дефиницију слабог решења и утврдио услове за регуларност решења.

Лебедев ([23]) посматра сложенију једначину са мартингалима и случајним мерама:

$$X_t = N + fA + gM + h * (\mu^c - \nu^c) + h * \mu^d. \tag{3.2}$$

где је $N$ $d$-димензионалан, $(\dot{\mathcal{F}}_t)$-прогресивно мерљив процес, $A$ је $m$-димензионалан, $(\dot{\mathcal{F}}_t)$-адаптиран, непрекидан процес локално коначне варијације са $A_0 = 0$, $M$ је $m$-димензионалан, непрекидан $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}})$-мартингал са $M_0 = 0$, $\mu$ је случајна мера за коју је $\mu^d = I_{J\times E} \cdot \mu$ и $\mu^c = \mu - \mu^d$, док је $\nu$ њена дуална предвидива пројекција. $f$, $g$ и $h$ су $(\mathcal{F}_t)$-предвидиве и мерљиве функције, $*$ означава стохастички интеграл у односу на случајне мере генерисане семимартингалима у смислу [24].

Једначина (3.1) је специјалан случај једначине (3.2). Заиста, посматрајући декомпозицију семимартингала (1.1), добија се

$$\begin{aligned} X_t &= K_t + \int_0^t g_s(X)dZ_s = K_t + \int_0^t g_s(X)dA_s + \int_0^t g_s(X)dM_s \\ &+ \int_0^t \int_{|u|\le 1} h_s(u,X)(\mu^c - \nu^c)(ds,du) + \int_0^t \int_{|u|>1} k_s(u,X)\mu^d(ds,du) \end{aligned}$$

где је $h_s(u,X) = g_s(X)uI_{|u|\le 1}$, $k_s(u,X) = g_s(X)uI_{|u|>1}$. Лебедев за једначину (3.2) долази до сличних резултата као Жакод и Мемин и уводи следећу дефиницију.

**Дефиниција 3.2.** ([23]) *Слабо решење једначине (3.2) је вероватноћа $P$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ која задовољава следеће услове:*

*(i)* $P|_{\dot{\Omega}} = \dot{P}$,

*(ii)* $M$ *је локалан* $(\mathcal{F}_t, P)$*-мартингал и* $\nu$ *је дуална* $(\mathcal{F})$*-предвидива* $P$*-пројекција од* $\mu$*,*

*(iii)* *за меру* $P$ *постоји процес решења на простору* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.

Врло често се уместо услова *(ii)* захтева јачи услов

*(ii')* сваки мартингал на $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}}, \dot{\mathcal{F}}_t, \dot{P})$ је мартингал и на простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ или је

$$P(d\dot{\omega} \times d\hat{\omega}) = \dot{P}(d\dot{\omega}) \cdot Q(\dot{\omega}, d\hat{\omega}),$$

где је $Q(\dot{\omega}, d\hat{\omega})$ вероватноћа транзиције са простора $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}})$ на $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}})$. Слабо решење које задовољава последњи услов јесте регуларно или "врло добро" решење. $Q(\dot{\omega}, d\hat{\omega})$ је јединствено одређена функција на $\dot{\Omega}$ и како филтрације играју битну улогу, можемо захтевати да је

$$\text{за свако } t > 0, \;\; A \in \hat{\mathcal{F}}_t, \; Q(\cdot, A) \text{ је } (\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}}) - \text{мерљива}. \tag{3.3}$$

Следеће тврђење даје везу између регуларног слабог решења и условног очекивања.

**Лема 3.1.** ([16]) *Ако је* $P$ *мера решења онда су следећи услови еквивалентни*

*(i)* $P$ *задовољава услов* (3.3).

*(ii)* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, Z)$ *задовољава*

$$\text{за свако } V \in (\mathcal{F}^Z_\infty) \quad E(V \mid \mathcal{F}^Z_t) = E(V \mid \mathcal{F}_t). \tag{3.4}$$

На основу Дефиниције 1.36 узрочности, услов (3.4) очигледно значи да је $Z$ сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$ и у односу на меру $P$.

Микланд је у [30] описао другачији приступ решавању једначине (3.1). Он је, наиме, пронашао услове за егзистенцију регуларног решења једначине (3.1) у терминима узрочности који се намећу на процес $Y^1_t = (Z_t, K_t)$. Процес $Y^1$ је $(m+d)$-димензионалан, где су првих $m$ (респективно последњих $d$) координата процеса $Y^1$ уствари координате процеса $Z$ (респ. процеса $K$).

**Дефиниција 3.3.** ([30]) *Скуп објеката* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Y_t)$ *је регуларно слабо решење стохастичке диференцијалне једначине (3.1) ако су задовољени следећи услови:*

*(1)* $\mu(A) = P\{Z \in A\}$ *поклапа се са мером на простору функција где* $Z$ *узима вредности,*

*(2)* *процес* $Y^1_t$ *је сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$ *у односу на меру* $P$*, тј.*

$$\text{за свако } A \in (\mathcal{F}^{Y^1}_\infty) \quad P(A \mid \mathcal{F}_t) = P(A \mid \mathcal{F}^{Y^1}_t),$$

*(3)* $X_t$ *и* $Y^1_t$ *задовољавају једначину (3.1).*

За слабо решење се дефинише јединственост и то слаба јединственост по трајекторијама, као и слаба јединственост.

**Дефиниција 3.4.** ([18]) *За слабо решење једначине (3.1) каже се да је слабо јединствено по трајекторијама, ако за систем $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, Y_t^1)$, који задовољава услов (3.4), постоји највише један процес решења.*

**Дефиниција 3.5.** ([30]) *За слабо решење стохастичке диференцијалне једначине каже се да је слабо јединствено ако за свако решење $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Y_t^1)$ не постоји мера $Q$ на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ која се разликује од мере $P$, на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$, тако да је $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{Z,X}, \mathcal{F}_t^{Z,X}, Q, X_t, Y_t^1)$ слабо решење једначине (3.1).*

Егзистенција овако дефинисаног слабог решења стохастичке диференцијалне једначине (3.1) захтева неку врсту ограничености коефицијената. Већина класичних резултата која се тиче егзистенције решења једначине (3.1), најмање захтева услов ограниченог раста коефицијената једначине по $x$-у.

**Теорема 3.1.** ([18]) *Следеће претпоставке повлаче егзистенцију најмање једног слабог решења једначине (3.1):*

*(i) коефицијент $u_t(X)$ је ограничен,*

*(ii) за свако $\dot{\omega} \in \dot{\Omega}$, $t \geq 0$ пресликавање $\hat{\omega} \to u_t(\dot{\omega}, \hat{\omega})$ је непрекидно на $\hat{\Omega}$ (на коме је дефинисана униформна топологија).*

Овај резултат се може користити и за доказивање егзистенције строгог решења једначине (3.1). Ако се за слабо решење, које задовољава услове Теореме 3.1 докаже да је решење још и јединствено по трајекторијама, онда егзистенција строгог решења следи на основу ([17]).

И Лебедев се бавио утврђивањем услова за егзистенцију слабог решења, али за једначину (3.2), (видети [24]). Међутим, применом на једначину (3.1), добија се следећа теорема.

**Теорема 3.2.** ([24]) *Нека су задовољени следећи услови:*

*(i) $|g_t A_t| + tr(g_t M_t g_t^*) \leq c$ где је c предвидив процес,*

*(ii) Функција $g_t(X)$ је непрекидна за свако $x \in R^d$, скоро извесно у односу на мере $dP \times |dA_t|$ и $dP \times d\langle M \rangle_t$ на $\Omega \times R_+$.*

*Тада постоји слабо решење једначине (3.1) за $t \in I$.*

Доказ ове теореме може се наћи у ([24]).

Други, слабији резултати, везани за егзистенцију слабих решења једначине (3.1) као и везе између егзистенције слабих и строгих решења могу се наћи у радовима Лебедева, Жакода, Мемина и других.

Стохастичка диференцијална једначина облика

$$\begin{cases} dX_t = u_t(X)dZ_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.5}$$

представља специјалан случај једначине (3.1) (када је $K \equiv 0$). Тада се и њено слабо решење може дефинисати на следећи начин.

**Дефиниција 3.6.** ([30]) *Скуп објеката* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ *је регуларно слабо решење стохастичке диференцијалне једначине (3.5) ако су задовољени следећи услови:*

*(1)* $\mu_Z(A) = P(Z \in A)$ *се поклапа са унапред одређеном мером на простору функција где* $Z$ *узима вредности,*

*(2) семимартингал* $Z$ *је сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$ *у односу на меру* $P$ *или*

$$\mathbf{F}^Z \models \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}; P.$$

*(3) процеси* $X$ *и* $Z$ *задовољавају једначину (3.5).*

## 3.2 Узрочност и слаба решења у општем случају

Нека је дата стохастичка диференцијална једначина

$$\begin{cases} dX_t = a_t(X)dt + b_t(X)dZ_t \\ X_0 = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

где је $a_t(X)$ $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран узрочни функционал (концепт је из [31]), коефицијент $b_t(X)$ је предвидив узрочни функционал и процес $Z = \{Z_t,\ t \in [0, +\infty)\}$ је $m$-димензионалан семимартингал ($Z_0 = 0$).

Дефиниција регуларног слабог решења за ову стохастичку диференцијалну једначину генерисану семимартингалима се не може наћи у литератури. Међутим, полазећи од слабог решења једначине (3.5) (она је специјални случај једначине (3.6)) и наметањем нових услова на коефицијенте, може се доказати следећа теорема која показује да једначина (3.6) има најмање једно решење.

**Теорема 3.3.** *Нека једначина (3.5) има регуларно слабо решење. Тада, за сваки коефицијент* $b_t(X)$ *који задовољава услове Теореме 3.1, једначина (3.6) такође има слабо решење.*

**Доказ**: Нека је дато бијективно, мерљиво пресликавање $\psi : \Omega \longrightarrow \Omega$ дефинисано са $\psi(\dot{\omega}, \bar{\omega}) = (\dot{\omega}, \bar{\omega'})$ где је $\bar{\omega'}(t) = \bar{\omega}(t) - a_t(\dot{\omega}, \bar{\omega})$. Нека коефицијент $b$ задовољава услове Теореме 3.1 и нека је

$$b' = b \circ \psi^{-1} \ \Rightarrow\ \psi^{-1}(b_t) = b'_t \vee \psi(b'_t) = b_t$$

$$Z \circ \psi = Z \Rightarrow \psi(Z) = \psi^{-1}(Z) = Z.$$

С обзиром да је $b_t(X)$ процес који је $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран очигледно је $\psi(\mathcal{F}_t) = \psi^{-1}(\mathcal{F}_t) = \mathcal{F}_t$. Процеси $a_t(X)$ и $b_t(X)$ су дефинисани на простору $\Omega$.

Нека је $b'$ други $(\mathcal{F}_t)$-предвидив процес на простору $\Omega$, који задовољава услове Теореме 3.1. На основу претпоставке, једначина $X = b' \cdot Z$ има регуларно, слабо решење облика $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P', X_t, Z_t)$. На основу Дефиниције 1.7 из [18], за слабо решење мера $P'$ је одређена на канонском простору $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}}, \dot{\mathcal{F}}_t, \dot{P})$ где $Z$ узима вредности и задовољена је једнакост $\dot{\varphi}(P') = \dot{P}$. На простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P')$, процес $Z$ је семимартингал и важи да је $X = b' \cdot Z$ све до скупова $P'$-мере нула. Такође је и

$$P' \circ \psi = P \Rightarrow \psi(P') = P,\ \psi^{-1}(P) = P'. \tag{3.7}$$

Нека је пресликавање $\dot{\varphi} : \Omega \longrightarrow \dot{\Omega}$ дефинисано са $\dot{\varphi}(\dot{\omega}, \bar{\omega}) = \dot{\omega}$ на производ простору $\Omega = \dot{\Omega} \times \bar{\Omega}$, где је $\dot{\varphi}(Z) = \dot{Z}$. Такође, важе и једнакости

$$(\psi \circ \dot{\varphi})(\dot{\omega}, \bar{\omega}) = \dot{\varphi}(\psi(\dot{\omega}, \bar{\omega})) = \dot{\varphi}(\dot{\omega}, \bar{\omega'}) = \dot{\omega} = \dot{\varphi}(\dot{\omega}, \bar{\omega})$$

$$\dot{\varphi}(P) = (\psi \circ \dot{\varphi})(P) = \dot{\varphi}(\psi(P)) = \dot{\varphi}(P') = \dot{P}.$$

Дакле, мера $P$ је дефинисана на канонском простору $(\dot{\Omega}, \dot{\mathcal{F}}, \dot{\mathcal{F}}_t, \dot{P})$.

На основу релације (3.7) добија се

$$\mu'_Z(A) \circ \psi = P'(Z \in A) \circ \psi = P(Z \in A) = \mu_Z(A).$$

На простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P')$ задовољена је узрочност $\mathbf{F}^Z \models\!\!< \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}; P'$ па сходно томе важи

$$\text{за свако } A \in (\mathcal{F}^Z_\infty) \qquad P'(A|\mathcal{F}_t) = P'(A|\mathcal{F}^Z_t) \tag{3.8}$$

На основу добро познатог резултата из [16] поглавље X, одељак 2-а, процес $Z \circ \psi = \psi(Z)$ је семимартингал на простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ и на основу конструкције је $Z \circ \psi = Z$. Јасно је да важи једнакост $\psi(\mathcal{F}^Z_t) = \mathcal{F}^Z_t$ и $\psi(A) = A$, па је на основу Теореме 7.6 из [18]

$$P'(A|\mathcal{F}_t) \circ \psi = P(A \circ \psi|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{F}_t).$$

Такође је

$$P'(A|\mathcal{F}^Z_t) \circ \psi = P(A \circ \psi|\mathcal{F}^Z_t) = P(A|\mathcal{F}^Z_t).$$

Из једнакости (3.16) добија се

$$\text{за свако } A \in (\mathcal{F}^Z_\infty) \quad P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{F}^Z_t)$$

или $\mathbf{F}^Z \models\!\!< \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}; P$.

Тада важи

$$\begin{aligned} X \circ \psi &= (b' \circ \psi)(Z \circ \psi) \Rightarrow \psi(X) = \psi(b') \cdot \psi(Z) \Rightarrow \\ X' &= b \cdot Z \Rightarrow X - a = b \cdot Z \Rightarrow X = a + b \cdot Z \end{aligned}$$

све до скупова $P$-мере нула. Такође, на основу конструкције је $b' \circ \psi = b$ и $X \circ \psi = X - a_t(X)$, па је скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ слабо решење једначине (3.6). $\square$

Због услова да је коефицијент $b_t$ ограничен, стохастички интеграл $\int b_s(X) dZ_s$ је добро дефинисан. Сада се може дефинисати регуларно слабо решење једначине (3.6).

**Дефиниција 3.7.** *Скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ је регуларно слабо решење једначине (3.6) ако су задовољени следећи услови:*

*(1) $\mu_Z(A) = P(Z \in A)$ се поклапа са унапред одређеном мером на простору функција на коме процес $Z$ узима вредности,*

*(2) $\int_0^t |a_s(X)|ds < \infty$,*

*(3) коефицијент $b$ је ограничен (у смислу Теореме 3.1),*

*(4) процес $Z$ је сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$ у односу на меру $P$, тј.*

$$\mathbf{F}^Z \ltimes \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}; P,$$

*(5) процеси $X$ и $Z$ су $(\mathcal{F}_t)$-адаптирани за свако $t \in [0, +\infty)$ и задовољавају једначину*

$$X_t = \int_0^t a_s(X)ds + \int_0^t b_s(X)dZ_s.$$

**Пример 3.1.** ([31]) Један од најважнијих примера је стохастичка диференцијална једначина генерисана Винеровим процесом

$$\begin{cases} dX_t = a_t(X)dt + b_t(X)dW_t \\ X_0 = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

где су $a_t(X)$ ($d$-димензионалан вектор) и $b_t(X)$ ($d \times d$ матрица) узрочни функционали, $W_t$ је $d$-димензионалан Винеров процес.

На основу Теореме 3.3, скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W_t, X_t)$ је слабо решење једначине (3.9) ако је

(1) Процес $W_t$ генерише Винерову меру $\mu_W$ на $\mathcal{B}(C^d)$,

(2) $\int_0^{t_0} |a_s(X)ds| < \infty, \quad (P-$с.и.),

(3) $\int_0^{t_0} |b_s(X)|^2 ds < \infty \quad (P-$с.и.),

(4) Процес $W_t$ је сопствени узрок у оквиру $(\mathcal{F}_t)$ тј. $\mathbf{F}^W \ltimes \mathbf{F}^W; \mathbf{F}; P$,

(5) Процес $X$ је непрекидан, $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран процес и задовољава једначину (3.9) $P$-с.и., или

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s(X)ds + \int_0^t b_s(X)dW_s, \quad \text{за свако } t \in I. \square$$

## 3.3 Слаба локална решења стохастичких диференцијалних једначина

Нека је дата стохастичка диференцијална једначина (3.1)

$$X_t = K_t + \int_0^t u_s(X) dZ_s \tag{3.10}$$

У пракси све већу примену имају времена заустављања, па у складу са тим се уводи појам слабог локалног решења за стохастичку диференцијалну једначину (3.10).

**Дефиниција 3.8.** ([22]) *Скуп објеката $(K, Z, X, T)$ је слабо локално решење ако је $(K, Z)$ верзија (проширење) од $(\dot{K}, \dot{Z})$ и једначина*

$$X_{t\wedge T} = K_{t\wedge T} + \int_0^{t\wedge T} u_s(X) dZ_s. \tag{3.11}$$

*је задовољена када $(K, Z, X, T)$ замењује скуп објеката $(\dot{K}, \dot{Z}, \dot{X}, \dot{T})$.*

Нека је поново дата једноставнија једначина (3.5)

$$\begin{cases} dX_t = u_t(X) dZ_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.12}$$

која се добија из једначине (3.10) за $K = x_0$. Овај случај је интересантан јер су решења једначине (3.12) семимартингали, док то не мора да важи за решења једначине (3.10). Слабо локално решење једначине (3.12), се дефинише на заједничком канонском простору на коме је дефинисан процес који генерише једначину.

**Дефиниција 3.9.** ([22]) *Слабо локално решење једначине (3.12) је вероватноћа $P$ на $(\Omega, \mathcal{F})$ која задовољава:*

*(1)* $\dot{\varphi}(P) = \dot{P}$,

*(2) процес $Z$ је семимартингал на простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ који задржава своје локалне карактеристике,*

*(3) $T$ је $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-време заустављања,*

*(4) процес $X$ је адаптиран и задовољава једначину*

$$X_{t\wedge T} = x_0 + \int_0^{t\wedge T} u_s(X) dZ_s. \tag{3.13}$$

На заједничком канонском простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ дефинише се време заустављања $T$ у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$ или $T : \Omega \to [0, +\infty]$ је случајно време и јесте време заустављања ако важи

$$\{(\dot{\omega}, \hat{\omega}); T(\dot{\omega}, \hat{\omega}) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t^{Z,X}, \quad t \in [0, +\infty].$$

Користећи пројективно пресликавање $\dot{\varphi} : \Omega \to \dot{\Omega}$, добија се $\dot{\varphi}(T) = \dot{\varphi}(T(\dot{\omega}, \hat{\omega})) = \dot{T}(\dot{\omega})$ где је $\dot{T} : \dot{\Omega} \to [0, +\infty]$ и

$$\begin{aligned}
\{\omega; T(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t^{Z,X} &\iff \{(\dot{\omega}, \hat{\omega}); T(\dot{\omega}, \hat{\omega}) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t^{Z,X} \\
&\iff \dot{\varphi}\left(\{(\dot{\omega}, \hat{\omega}); T(\dot{\omega}, \hat{\omega}) \leqslant t\}\right) \in \dot{\varphi}\left(\mathcal{F}_t^{Z,X}\right) \\
&\iff \{\dot{\omega}; \dot{T}(\dot{\omega}) \leqslant t\} \in \dot{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t^{\dot{Z}}.
\end{aligned}$$

Другим речима $\dot{\varphi}(T) = \dot{T}$ је $(\mathcal{F}_t^{Z})$-време заустављања.

Користећи чињеницу да је $T$, $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$ време заустављања, услови (2) и (3) из Дефиниције 3.9 на основу Пропозиције 4.6 из [17], Теореме 1.26 могу бити замењени са

$$\mathbf{F}^Z \mid\!< \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}^T; P$$

или

$$\text{за свако } A \in (\mathcal{F}_\infty^Z) \qquad P(A \mid \mathcal{F}_t^Z) = P(A \mid \mathcal{F}_{t \wedge T}).$$

На основу Дефиниције 3.3 за регуларна слаба решења једначине (3.10) и везе између мере решења и условног очекивања, може се дати дефиниција слабог локалног решења у терминима узрочности.

**Дефиниција 3.10.** *(упоредити са* [30]*) Скуп објеката* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t, T)$ *је слабо локално решење једначине (3.12) ако*

*(1) мера* $\mu_Z(A) = P\{Z \in A\}$ *се поклапа са унапред датом мером на простору функција где* $Z$ *узима вредности;*

*(2) важи* $\mathbf{F}^Z \mid\!< \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}^T; P$ *или*

$$\text{за свако } A \in (\mathcal{F}_\infty^Z) \qquad P(A \mid \mathcal{F}_t^Z) = P(A \mid \mathcal{F}_{t \wedge T});$$

*(3)* $T$ *је* $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$*-време заустављања (још се назива "lifetime" процеса* $(Z, X)$*),*

*(4) процес* $X$ *је адаптиран и задовољава једначину (3.13)* $P$*-с.и.*

Ако је $T = \infty$ онда је скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ слабо решење једначине (3.12).

Дефиниција 3.10 може бити проширена и на једначину (3.10) где је почетна вредност предвидив процес $K_t$. Тада је једначина (3.10) генерисана процесом $Y_t^1 = (Z_t, K_t)$ па следећа дефиниција даје њено слабо локално решење користећи концепт узрочности.

**Дефиниција 3.11.** *(уйоредийи са* [30]*) Скуй објекаийа* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Y_t^1, T)$ *је локално слабо решење једначине (3.10) ако су задовољени следећи услови:*

*(1) йроцес $Y_t^1$ има унайред одређену расйоделу;*

*(2) за йроцес $Y_t^1$ важи ($\mathbf{F}^{Y^1} \mid\!< \mathbf{F}^{Y^1}; \mathbf{F}^T; P$);*

*(3) $T$ је $(\mathcal{F}_t^{Y^1,X})$-време зауситављања;*

*(4) йроцеси $X_t$ и $Y_t^1$ су $(\mathcal{F}_t)$-адайтирани и задовољавају једначину (3.11).*

Такође, између регуларног слабог решења и локалног слабог решења за једначину (3.12) може бити успостављена еквиваленција што показује следећа теорема.

**Теорема 3.4.** *Нека је $T$ $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-време зауситављања. Тада су следећа два йврђења еквиваленийна*

*(i)* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ *је регуларно слабо решење једначине (3.12);*

*(ii)* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t, T)$ *је локално слабо решење једначине (3.12).*

**Доказ**: Користећи Дефиницију 3.6 за регуларно слабо решење једначине (3.12), може се уочити да је разлика једино у четвртом услову, јер већ постоји претпоставка да је $T$ $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-време заустављања.

Регуларно слабо решење једначине (3.12) мора да задовољава једначину

$$X_t = x_0 + \int_0^t u_s(X)dZ_s \tag{3.14}$$

али слабо локално решење мора да задовољава једначину

$$X_{t\wedge T} = x_0 + \int_0^{t\wedge T} u_s(X)dZ_s.$$

Ако је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ регуларно слабо решење онда за $t \leqslant T$ слабо локално решење задовољава једначину (3.14), али за $T \leqslant t$ слабо локално решење мора да задовољава једначину

$$X_T = x_0 + \int_0^T u_s(X)dZ_s.$$

Ако је $T$ време заустављања на основу Теореме 1.18 следи

$$X_T = x_0 + \int_0^T u_s(X)dZ_s = x_0 + \int_0^t u_s(X)I\{s \leqslant T\}dZ_s = x_0 + \int_0^t u_s(X)dZ_{s\wedge T}.$$

За $T \leqslant t$ претходна једначина је очигледно задовољена јер је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ регуларно слабо решење. Дакле, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t, T)$ је слабо локално решење једначине (4.9).

Обрнуто је очигледно задовољено ако је $T = \infty$.□

## 3.4 Узрочност и слаба јединственост слабих решења стохастичких диференцијалних једначина

Слаба јединственост је појам који се дефинише за слаба решења. Под тим појмом се подразумева да су два слаба решења слабо јединствена ако су им једнаке расподеле и намеће слабије услове на решење једначине од јединствености по трајекторијама.

**Дефиниција 3.12.** ([51]) *За слабо решење једначине (3.10) каже се да је слабо јединствено по трајекторијама, ако за систем $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, Y_t^1)$, који задовољава услов (3.4), постоји највише један процес решења $X_t$.*

**Дефиниција 3.13.** ([30]) *За слабо решење једначине (3.10) каже се да је слабо јединствено ако за свако решење $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Y_t^1)$ не постоји мера $Q$ на $(\mathcal{F}_\infty^{X,Y^1})$ која се разликује од мере $P$, на $(\mathcal{F}_\infty^{X,Y^1})$, тако да је $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{X,Y^1}, \mathcal{F}_t^{X,Y^1}, Q, X_t, Y_t^1)$ слабо решење једначине (3.10).*

Слаба јединственост решења једначине може се довести у везу и са екстремношћу мере, што показује следећа теорема.

**Теорема 3.5.** ([41]) *За слабо решење $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ једначине (3.12), $P$ је екстремна мера на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ међу мерама $Q$ за које је $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{Z,X}, \mathcal{F}_t^{Z,X}, Q, X_t, Z_t)$ слабо решење ако и само ако свако проширење $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P})$ простора $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{Z,X}, P)$ задовољава да је $(\hat{Z}_t, \hat{X}_t)$ сопствени узрок у оквиру $\hat{\mathbf{F}}$ у односу на $\hat{P}$ за свако $\hat{\mathbf{F}} = \{\hat{\mathcal{F}}_t\}$ тако да је $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}_t, \hat{P}, \hat{X}_t, \hat{Z}_t)$ слабо решење.*

**Доказ**: Нека је $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{Z,X}, \mathcal{F}_t^{Z,X}, Q, X_t, Z_t)$ слабо решење једначине (3.12) и нека је на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ дефинисана мера $P$ која је екстремна у скупу свих мера $Q$ за које је $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{Z,X}, \mathcal{F}_t^{Z,X}, Q, X_t, Z_t)$ слабо решење. На основу претпоставке да је $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{Z,X}, \mathcal{F}_t^{Z,X}, Q, X_t, Z_t)$ слабо решење, следи узрочност $\mathbf{F}^z \mid\!< \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}^{Z,X}; P$. На основу претпоставке да је $P$ екстремна мера следи да постоји мерљива функција $f : (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}) \to (\Omega, \mathcal{F})$ која задовољава $\hat{P} f^{-1} = P$ на $\mathcal{F}$ и да екстензија $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P})$ простора $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{Z,X}, P)$ садржи филтрације $\hat{\mathbf{F}}^Z = \{\hat{\mathcal{F}}^Z\}$ и $\hat{\mathbf{F}}^{Z,X} = \{\hat{\mathcal{F}}^{Z,X}\}$ где је $\hat{\mathcal{F}}_t^Z = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{F}_t^Z\}, \hat{\mathcal{F}}_t^{Z,X} = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{F}_t^{Z,X}\}, \hat{\mathcal{F}}_t^Z \subseteq \hat{\mathcal{F}}_t^{Z,X} \subseteq \hat{\mathcal{F}}_t$ и да је за свако $\hat{\mathbf{F}} = \{\hat{\mathcal{F}}_t\}$, $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}_t, \hat{P}, \hat{X}_t, \hat{Z}_t)$ слабо решење. Због последњег услова је $\hat{\mathbf{F}^Z} \mid\!< \hat{\mathbf{F}^Z}; \hat{\mathbf{F}}; \hat{P}$. На основу Теореме 4.1 из ([41]) претходна узрочност значи да су сви елементи скупа

$$\hat{H} = \left\{ \hat{M}_t, \hat{M}_t = P(A \mid \hat{\mathcal{F}}_t^Z), A \in \mathcal{F}_\infty^Z \right\}$$

$(\hat{\mathcal{F}}_t)$-мартингали, па је

$$\text{за свако } \hat{M}_t \in \hat{H} \qquad E(\hat{M}_\infty \mid \hat{\mathcal{F}}_t) = \hat{M}_t, t \in I.$$

Како је $\hat{\mathcal{F}}_t^{Z,X} \subseteq \hat{\mathcal{F}}_t, t \in I$, на основу Теореме 1.25 је

$$\hat{\mathbf{F}}^{Z,X} \mid\!< \hat{\mathbf{F}}^{Z,X} ; \hat{\mathbf{F}} ; \hat{P}.$$

$$\text{за свако } A \in (\hat{\mathcal{F}}_\infty^{Z,X}) \quad E(P(A \mid \hat{\mathcal{F}}_\infty^{Z,X}) \mid \hat{\mathcal{F}}_t) = P(A \mid \hat{\mathcal{F}}_t^{Z,X}), \;\; t \in I.$$

На сличан начин се добија да је за свако $A \in (\hat{\mathcal{F}}_\infty^{Z,X})$ задовољена релација

$$P(A \mid \hat{\mathcal{F}}_t) = P(A \mid \hat{\mathcal{F}}_t^{Z,X}).$$

Како је $\hat{\mathcal{F}}_t^{Z,X} \subseteq \hat{\mathcal{F}}_t, t \in I$ добија се

$$\hat{\mathbf{F}}^{Z,X} \not< \hat{\mathbf{F}}^{Z,X} \,;\, \hat{\mathbf{F}} \,;\, \hat{P}.$$

Обрнуто, нека за слабо решење $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}_t, \hat{P}, \hat{X}_t, \hat{Z}_t)$ важи да је $(\hat{Z}_t, \hat{X}_t)$ сопствени узрок у оквиру $\hat{\mathbf{F}}$ у односу на меру $\hat{P}$. Нека је $P = a_1P_1 + a_2P_2$ $(a_1, a_2 > 0)$, тако да се мере $P_1$ и $P_2$ поклапају на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ и да су елементи скупа $H$ облика

$$H = \left\{M_t, M_t = P(A \mid \mathcal{F}_t^Z), A \in \mathcal{F}_\infty^Z\right\} \tag{3.15}$$

мартингали у односу на меру $P_1$, тако да је $P_1 \neq P_2$. Тада је

$$\hat{\Omega} = \Omega \times \{1, 2\}, \; \hat{F}_t = A \times \{1\} \cup B \times \{2\} : A, B \in (\mathcal{F}^{Z,X})$$

и

$$\hat{P}(A \times \{1\} \cup B \times \{2\}) = a_1P_1(A) + a_2P_2(B).$$

За филтрацију $\hat{\mathbf{F}} = \{\hat{\mathcal{F}}_t\}$ на простору $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P})$, скуп објеката $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{F}}_t, \hat{P}, \hat{X}_t, \hat{Z}_t)$ је слабо решење, али $(\hat{Z}_t, \hat{X}_t)$ није сопствени узрок у оквиру $\hat{\mathbf{F}}$ у односу на меру $\hat{P}$. Дакле, тврђење следи.$\square$

Следећа теорема одређује услове под којима стохастичка диференцијална једначина (3.12) (специјалан случај једначине (3.10)) има слабо јединствено решење.

**Теорема 3.6.** ([41]) *Слабо решење стохастичке диференцијалне једначине (3.12) је слабо јединствено ако и само ако је $(Z_t, X_t)$ сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ у односу на $P$, тј. ако је*

$$\mathbf{F}^{Z,X} \not< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P.$$

**Доказ:** Нека постоји слабо јединствено решење једначине (3.12). Ако су $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ и $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{Z,X}, \mathcal{F}_t^{Z,X}, P, X_t, Z_t)$ два слаба решења, тада је

$$\mathbf{F}^Z \not< \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}; P \;\text{ и }\; \mathbf{F}^Z \not< \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}^{Z,X}; Q. \tag{3.16}$$

Како су слаба решења једначине (3.12) слабо јединствена следи да је $P = Q$ на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$. Дакле из (3.16) следи да је

$$\mathbf{F}^Z \not< \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}^{Z,X}; P. \tag{3.17}$$

Нека је $H$ скуп облика (3.15), $M_t$ су здесна непрекидни мартингали, а на основу релација (3.16) то су $(\mathcal{F}_t^{Z,X}, Q)$-мартингали и $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингали. Такође, на основу (3.17) сви елементи скупа $H$ су $(\mathcal{F}_t^{Z,X}, P)$-мартингали. Дакле, мере $P, Q \in \mathcal{M}_H$, $(\mathcal{M}_H$

је скуп свих мера у односу на које су елементи скупа $H$ мартингали) и на основу [16] (Теорема 11.3 и Теорема 11.2) следи да је $P$ екстремни елемент скупа $\mathcal{M}_H$. Даље, на основу Теореме 1.25 следи да је

$$\mathbf{F}^{Z,X} \mid\!< \mathbf{F}^{Z,X} \,;\, \mathbf{F} \,;\, P.$$

Обрнуто, нека је

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$$

слабо решење стохастичке диференцијалне једначине (3.12). Тада је

$$\mathbf{F}^{Z} \mid\!< \mathbf{F}^{Z} \,;\, \mathbf{F} \,;\, P. \tag{3.18}$$

На основу претпоставке теореме $(Z_t, X_t)$ је сопствени узрок у оквиру $\{\mathcal{F}_t\}$ у односу на меру $P$, па је

$$\mathbf{F}^{Z,X} \mid\!< \mathbf{F}^{Z,X} \,;\, \mathbf{F} \,;\, P. \tag{3.19}$$

Ако је $(\Omega, \mathcal{F}^{Z,X}_\infty, \mathcal{F}^{Z,X}_t, Q, X_t, Z_t)$ такође слабо решење, онда је

$$\mathbf{F}^{Z} \mid\!< \mathbf{F}^{Z} \,;\, \mathbf{F}^{Z,X} \,;\, Q. \tag{3.20}$$

Због услова (3.18) и (3.19) и Пропозиције 5.4 из [30] важи

$$\mathbf{F}^{Z} \mid\!< \mathbf{F}^{Z} \,;\, \mathbf{F}^{Z,X} \,;\, P. \tag{3.21}$$

Нека је $H$ скуп облика (3.15). Због услова облика (3.18), (3.20), (3.21) и Теореме 4.1 из ( [41]) елементи скупа $H$ су $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингали, $(\mathcal{F}^{Z,X}_t, Q)$-мартингали и $(\mathcal{F}^{Z,X}_t, P)$-мартингали. Тада је, због релације (3.19) задовољена и Теорема 1.25. Дакле, мера $P$ је екстремна у скупу $\mathcal{M}_H$ а мере $P$ и $Q$ се поклапају на $(\mathcal{F}^{Z,X}_{-\infty})$.

Дакле, важи

$$E_Q(M_\infty \mid \mathcal{F}^{Z,X}_t) = M_t, \quad t \in I.$$

Нека је $\chi_A$ индикатор функција скупа $A$, $\chi_A$ је ограничена и $(\mathcal{F}^{Z}_\infty)-$мерљива функција, па је

$$E_Q(E(\chi_A \mid \mathcal{F}^{Z}_\infty) \mid \mathcal{F}^{Z,X}_t) = M_t, \quad t \in I,$$

$$E_Q(\chi_A \mid \mathcal{F}^{Z,X}_t) = M_t, \quad t \in I,$$

$$Q(A \mid \mathcal{F}^{Z,X}_t) = P(A \mid \mathcal{F}^{Z}_t)$$

Због услова (3.18) и (3.19) важи

$$Q(A \mid \mathcal{F}^{Z,X}_t) = P(A \mid \mathcal{F}_t)$$

или за свако $A \in (\mathcal{F}^{Z}_\infty)$ је

$$Q(A \mid \mathcal{F}^{Z,X}_t) = P(A \mid \mathcal{F}^{Z,X}_t).$$

Такође, ако је $A \in (\mathcal{F}^{Z,X}_\infty)$ тада је $\chi_A$ ограничена и $(\mathcal{F}^{Z,X}_\infty)$-мерљива функција, па је

$$Q(A \mid \mathcal{F}^{Z,X}_\infty) = E_Q(\chi_A \mid \mathcal{F}^{Z,X}_\infty) = \chi_A.$$

Због релације (3.19) за свако $A \in (\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ важи

$$\begin{aligned} E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t) &= E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t^{Z,X}) \\ &= E(E_Q(\chi_A \mid \mathcal{F}_\infty^{Z,X}) \mid \mathcal{F}_t^{Z,X}) \\ &= E_Q(E(\chi_A \mid \mathcal{F}_\infty^{Z,X}) \mid \mathcal{F}_t^{Z,X}) \\ &= E_Q(\chi_A \mid \mathcal{F}_t^{Z,X}) \\ &= Q(A \mid \mathcal{F}_t^{Z,X}) \end{aligned}$$

у трећем кораку је искоришћена чињеница да су мере $P$ и $Q$ дефинисане на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$. Дакле, следи да је $Q = P$ на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$.□

На основу претходна два резултата следи да важи следећа теорема.

**Теорема 3.7.** ([41]) *Свако слабо решење $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ стохастичке диференцијалне једначине (3.12) је слабо јединствено ако и само ако је вероватноћа $P$ екстремна на сваком слабом решењу.*

**Доказ:** Следи на основу Теореме 3.5 и Теореме 3.6.□

Једначина (3.10) има слабо јединствено решење ако су задовољене наредне теореме.

**Теорема 3.8.** *Свако слабо решење стохастичке диференцијалне једначине (3.10) је слабо јединствено ако и само ако је $(X_t, Y_t^1)$ сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ у односу на меру $P$, тј.*

$$\mathbf{F}^{X,Y^1} \ltimes \mathbf{F}^{X,Y^1}; \mathbf{F}; P,$$

*где је $Y^1 = (Z, K)$.*

**Доказ**: Доказ ове теореме се базира на екстремним мерама. Нека постоји слабо јединствено решење једначине (3.10). Тада, ако су $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Y_t^1)$ анд $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{X,Y^1}, \mathcal{F}_t^{X,Y^1}, P, X_t, Y_t^1)$ два слаба решења, онда је, на основу Дефиниције 3.3

$$\mathbf{F}^{Y^1} \ltimes \mathbf{F}^{Y^1}; \mathbf{F}; P \text{ и } \mathbf{F}^{Y^1} \ltimes \mathbf{F}^{Y^1}; \mathbf{F}^{X,Y^1}; Q. \tag{3.22}$$

Како су, на основу претпоставке, решења једначине (3.10) слабо јединствена, онда је $P = Q$ на $(\mathcal{F}_\infty^{X,Y^1})$. Из услова (3.22) је

$$\mathbf{F}^{Y^1} \ltimes \mathbf{F}^{Y^1}; \mathbf{F}^{X,Y^1}; P. \tag{3.23}$$

Ако је скуп $G$ облика (2.2), тј.

$$G = \{N_t \mid N_t = P(A \mid \mathcal{F}_t^{Y^1}),\ A \in \mathcal{F}_\infty^{Y^1}\}. \tag{3.24}$$

тада су здесна непрекидни мартингали $N_t$, на основу (3.22) $(\mathcal{F}_t^{X,Y^1}, Q)$-мартингали и $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингали. Такође, на основу релације (3.23) и Последице 2.1 сви елементи скупа $G$ су $(\mathcal{F}_t^{X,Y^1}, P)$-мартингали. Дакле, вероватноће $P, Q \in \mathcal{M}_G$ ($\mathcal{M}_G$ је скуп свих вероватноћа $P$ таквих да да су сви елементи скупа $G$ мартингали на простору

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P))$. У складу са Теоремом 11.3 и Теоремом 11.2 из [16] следи да је вероватноћа $P$ екстремни елемент скупа $\mathcal{M}_G$. Даље, на основу Теореме 1.25 следи да је

$$\mathbf{F}^{X,Y^1} \mid\!< \mathbf{F}^{X,Y^1} \; ; \; \mathbf{F} \; ; \; P.$$

Обрнуто, нека је

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Y_t^1)$$

слабо решење стохастичке диференцијалне једначине $(3.10)$. Тада је испуњено

$$\mathbf{F}^{Y^1} \mid\!< \mathbf{F}^{Y^1} \; ; \; \mathbf{F} \; ; \; P. \tag{3.25}$$

На основу претпоставке теореме $(X_t, Y_t^1)$ је сопствени узрок у оквиру $(\mathcal{F}_t)$ у односу на вероватноћу $P$, па је

$$\mathbf{F}^{X,Y^1} \mid\!< \mathbf{F}^{X,Y^1} \; ; \; \mathbf{F} \; ; \; P. \tag{3.26}$$

Такође, ако је $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{X,Y^1}, \mathcal{F}_t^{X,Y^1}, Q, X_t, Y_t^1)$ још једно слабо решење, онда је

$$\mathbf{F}^{Y^1} \mid\!< \mathbf{F}^{Y^1} \; ; \; \mathbf{F}^{X,Y^1} \; ; \; Q. \tag{3.27}$$

Због услова (3.25), (3.26) и Пропозиције 6.4 из [31] задовољено је

$$\mathbf{F}^{Y^1} \mid\!< \mathbf{F}^{Y^1} \; ; \; \mathbf{F}^{X,Y^1} \; ; \; P. \tag{3.28}$$

Нека је $G$ скуп облика (3.24). Због услова (3.25), (3.27), (3.28) и Последице 2.1 елементи скупа $G$ су $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингали, $(\mathcal{F}_t^{X,Y^1}, Q)$-мартингали и $(\mathcal{F}_t^{X,Y^1}, P)$-мартингали. Тада је због услова (3.26) задовољена Теорема 1.25. Дакле, $P$ је екстремна у скупу свих вероватноћа $\mathcal{M}_G$ па се мере $P$ и $Q$ поклапају на филтрацији $(\mathcal{F}_\infty^{X,Y^1})$.

Дакле, тада важи

$$E_Q(M_\infty \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) = M_t, \;\; t \in I.$$

Нека је $\chi_A$ индикатор функција скупа $A$, која је још ограничена и $(\mathcal{F}_\infty^{Y^1})$-мерљива, па је

$$E_Q(E(\chi_A \mid \mathcal{F}_\infty^{Y^1}) \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) = M_t, \;\; t \in I,$$

$$E_Q(\chi_A \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) = M_t, \;\; t \in I,$$

$$Q(A \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) = P(A \mid \mathcal{F}_t^{Y^1}).$$

Због релација (3.25) и (3.26) важи да је

$$Q(A \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) = P(A \mid \mathcal{F}_t)$$

или за свако $A \in (\mathcal{F}_\infty^{Y^1})$ важи

$$Q(A \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) = P(A \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}).$$

Такође, ако је $A \in (\mathcal{F}_\infty^{X,Y^1})$ онда је функција $\chi_A$ ограничена и $(\mathcal{F}_\infty^{X,Y^1})$-мерљива, па је

$$Q(A \mid \mathcal{F}_\infty^{X,Y^1}) = E_Q(\chi_A \mid \mathcal{F}_\infty^{X,Y^1}) = \chi_A.$$

Због услова (3.26) је за свако $A \in (\mathcal{F}_\infty^{X,Y^1})$

$$\begin{aligned} P(A \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) &= E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) = E(E_Q(\chi_A \mid \mathcal{F}_\infty^{X,Y^1}) \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) \\ &= E_Q(E(\chi_A \mid \mathcal{F}_\infty^{X,Y^1}) \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) = E_Q(\chi_A \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) = Q(A \mid \mathcal{F}_t^{X,Y^1}) \end{aligned}$$

трећи корак је оправдан јер су мере $P$ и $Q$ дефинисане на $(\mathcal{F}_\infty^{X,Y^1})$. Дакле, $Q = P$ на $(\mathcal{F}_\infty^{X,Y^1})$. □

Нека је дат систем

$$\begin{cases} dX_t = u_t(X)dZ_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad \text{и} \ \ (Z, X) \in A \tag{3.29}$$

где је $A$ мерљив скуп. Поставља се питање шта је слабо решење овог система? Решење овог проблема као и слаба јединственост решења су директно повезани са екстремним регуларним слабим решењима једначине (3.12).

**Дефиниција 3.14.** ([31]) *Регуларно слабо решење* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ *једначине (3.12) је екстремно уколико важи да постоје мере* $P_1$ *и* $P_2$ *на* $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$, *за које важи да ако је* $P = a_1P_1 + a_2P_2$ $(a_1, a_2 > 0)$ *на* $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ *и ако су* $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{Z,X}, \mathcal{F}_t^{Z,X}, P_i, X_t, Z_t), i = 1, 2$ *регуларна слаба решења, онда је* $P_1 = P_2 = P$ *на* $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$.

Дефиниција простора $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ је из преузета из [24]. Мера $P$ је $\sigma$-коначна, случајна мера са вредностима из простора $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. За меру $P$ је дефинисан простор $L^1(\mathcal{F}, P)$ као простор $(\mathcal{F})$-мерљивих случајно променљивих $\eta$ са $E|\eta|\infty$, и на том простору је дефинисана нормална семинорма. Следећа теорема даје слабо решење проблема (3.29).

**Теорема 3.9.** *За свако екстремно решење* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ *једначине (3.12) постоји мерљив скуп* $A$ *на простору функција где* $(Z, X)$ *узима вредности, тако да систем (3.29) има регуларно слабо решење* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ *које је и слабо јединствено.*

**Доказ**: Тврђење да свако решење једначине (3.12) јесте и решење једначине (3.29) је очигледно ако је $A$ скуп свих могућих трајекторија процеса $(Z, X)$ (тј. $A = \Omega$ је канонски простор). Ово важи чак и за решења која нису екстремна .

Нека је скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ регуларно слабо решење система (3.29). Ово решење је екстремно за једначину (3.12) и према Теореми 2.1 у [62], $P$ је екстремна мера ако је простор $L_1(\mathcal{F}_\infty^Z, P)$ сепарабилан (тј. простор је коначан, пребројив или има свуда густ подскуп). Дакле, на основу [23] мера $P$ допушта проширење филтрације $(\mathcal{F}_\infty^Z)$ на филтрацију $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ и на основу Теореме 3.(а) из [24], мера $P$ је јединствена у $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$. На основу тога, може се рећи да је слабо решење $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ система (3.29) слабо јединствено. □

## 3.5 Узрочност и локална јединственост

Појам локалне јединствености је облик јединствености који је јачи од обичне јединствености. Следећа дефиниција је везана за појам слабе локалне јединствености (то је локална јединственост у смислу расподела) која је карактеристична за слаба локална решења једначине (3.10).

**Дефиниција 3.15.** *([22]) Слабо локално решење једначине (3.10) је слабо локално јединствено ако за свака два слаба локална решења $(K^1, Z^1, X^1, T^1)$ и $(K^2, Z^2, X^2, T^2)$ са $T^1 = h_1(X^1)$ и $T^2 = h_2(X^2)$ за мерљиве функције $h_1, h_2$ важи да $(X^1, h_1 \wedge h_2(X^1))$ и $(X^2, h_1 \wedge h_2(X^2))$ имају исте расподеле.*

За слабо локално решење стохастичке диференцијалне једначине која је генерисана семимартингалима облика (3.12), дефинише се појам слабе локалне јединствености (локална јединственост у смислу расподеле). Али, овај појам јединствености се не може тако лако испитати, јер времена заустављања морају бити функције решења. Следећа теорема доказује како се појам слабе локалне јединствености може повезати са концептом узрочности, али се у доказу користи појам локалне јединствености мартингалног проблема за заустављене процесе (што је и главни разлог за проучавање локалне јединствености мартингалног проблема), због чега ће доказ бити наведен касније.

Нека је дат простор $(\Omega, \mathcal{F})$ где је филтрација $(\mathcal{F}_t)$ генерисана процесом $X$ и процесом који генерише једначину која је придружена мартингалном проблему.

Такође, нека је дефинисана и филтрација $(\mathcal{F}_t^0)$ која није непрекидна здесна, и важи да је

$$\mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t^0 \subset \mathcal{F}_t, \quad t > 0$$

где је

*(i)* $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^0, \ \mathcal{F}_s^0 = \mathcal{F}_s^{Z,X}$,

*(ii)* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \bigvee_t \mathcal{F}_t$.

Тада је филтрација $\mathbf{F}$ облика

$$\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}, \tag{3.30}$$

другим речима $\mathbf{F}$ је најмања филтрација за коју је процес $(Z, X)$ адаптиран. У односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t^0)$ се дефинише и време заустављања.

**Дефиниција 3.16.** ([19]) *Строго време заустављања (или време заустављања у односу на $\mathcal{F}_t^0$) је пресликавање $T : \Omega \to R_+$ тако да је $\{T \leq t\} \in (\mathcal{F}_t^0)$ за свако $t \in R_+$. Ако је $T$ строго време заустављања, тада $(\mathcal{F}_T^0)$ означава $\sigma$-алгебру свих $A \in \mathcal{F}$ који задовољавају да $A \cap \{T \leq t\}$ припада $(\mathcal{F}_t^0)$ за свако $t \in R_+$.*

**Напомена 3.1.** Строго време заустављања је и време заустављања. Такође је $\mathcal{F}_T^0 \subset \mathcal{F}_T$ и $\mathcal{F}_{T-} \subset \mathcal{F}_T^0$ на скупу $\{T > 0\}$, где је

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{T-} &= \{A \in \mathcal{F}; A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t, \text{за свако } t > 0\};\\ \mathcal{F}_T^0 &= \{A \in \mathcal{F}; A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t^0, \text{за свако } t \geq 0\};\\ \mathcal{F}_T &= \{A \in \mathcal{F}; A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \text{за свако } t \geq 0\}.\end{aligned}$$

Наиме, важи следећа теорема.

**Теорема 3.10.** *Слабо локално решење једначине (3.12) је локално јединствено ако и само ако је*

$$\mathbf{F}^{(Z,X)^T} \mid\!< \mathbf{F}^{(Z,X)^T}; \mathbf{F}^T; P,$$

*где је $T$ строго време заустављања.*

Доказ ове теореме је дат у делу 3.7.

**Напомена 3.2.** Више о концепту локалних слабих решења за једначине које су генерисане Винеровим процесом, њиховој егзистенцији, јединствености таквих решења и вези са строгим решењима може се наћи у $[7, 59]$.

## 3.6 Мартингални проблем

Нека је дата једначина (3.5), (види $[17, 18]$)

$$\begin{cases} dX_t = u_t(X)dZ_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.31}$$

где је процес $Z = \{Z_t, t \in I\}$ $m$-димензионалан семимартингал $(Z_0 = 0)$ и коефицијент $u_t(X)$ је $n \times m$-димензионалан предвидив функционал.

У претходном делу стохастичка диференцијална једначина је решавана у "слабом" смислу, тј. пронађен је јединствен процес са одговарајућом коначно-димензионалном расподелом који ће задовољавати дату једначину у слабом смислу.

Другачији приступ, који су први увели Строк (D. W. Stroock) и Варадан (S. R. S. Varadhan) (у [61]) је поступак налажења вероватноће $P$ на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ тако да је дати процес $X$ решење у односу на задати процес $Z$, који је генеришући процес. Ово је формулација такозваног мартингалног проблема који је еквивалентан решавању стохастичке диференцијалне једначине у слабом смислу, али не укључује експлицитно једначину.

Мартингални проблем се може посматрати као стохастички аналог обичних диференцијалних једначина, али се ретко користи у моделирању физичких процеса. Мартингални проблем се може користити за моделирање цене акција. Утврђивање егзистенција јединственог решења је само први корак у примени мартингалног проблема у моделирању физичких феномена.

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ простор вероватноћа са филтрацијом (мера још није одређена) и нека је $(\mathcal{H}_0)$ под-$\sigma$-поље од $(\mathcal{F}_0)$, које се назива почетним $\sigma$-пољем. $\mathcal{O}$ је фамилија опционих процеса на простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$.

**Дефиниција 3.17.** ([19]) *Нека је $P_H$ мера на простору $(\Omega, \mathcal{H}_0)$ (назива се још и почетни услов). Тада је решење мартингалног проблема придружено процесу $\mathcal{K}$ и мери $P_H$ мера $P$ на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ која задовољава*

*(i) рестрикција $P|_{\mathcal{H}_0}$ од мере $P$ на $\sigma$-пољу $(\mathcal{H}_0)$ је мера $P_H$; тј. $P|_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{H}_0}$;*

*(ii) сваки процес $X \in \mathcal{O}$ је локалан мартингал на простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.*

Наиме, филтрација $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$ још није комплетна јер вероватноћа $P$ није унапред позната. Мартингални проблем може имати више решења. Жакод и Ширјаев (A. N. Shiryaev) у [19] су први увели најзначајнију класу мартингалних проблема везаних за карактеристике семимартингала.

**Формулација "семимартингалног" проблема** ([19]).

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t)$ простор вероватноћа са филтрацијом, $\sigma(Y_0)$ почетно $\sigma$-поље и почетни услов $\dot{P}$ (што представља меру на простору $(\Omega, \sigma(Y_0))$. Али, на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ још увек није дефинисана мера.

Потсећања ради, $Y$ је канонски процес дефинисан на $\Omega$ са $Y = (Z, X)$. Са $S_x$ је означен скуп вероватноћа $P$ на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ које задовољавају да је процес $Y$ семимартингал на простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ при чему је уређена тројка $(A, C, \nu)$ локална карактеристика семимартингала $Y$, где је $Y_0^{m+1} = x^i$ с.и., за свако $i \leq n$ (а на основу конструкције је $Y_0^i = 0$ када је $i \leq m$).

Нека је $C_t^d$ скуп ограничених функција одсецања $h : R^d \to R^d$ ($R^d$ је компактан простор) где је $h(x) = x$.

**Дефиниција 3.18.** ([19]) *Решење мартингалног проблема који је придружен системима $(\sigma(Y_0), Y)$ и $(\dot{P}, A, C, \nu)$ је мера $P$ на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ која задовољава следеће услове:*

*(i) рестрикција $P|_{\sigma(Y_0)} = \dot{P}$*

*(ii) процес $Y$ је семимартингал на простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ са карактеристикама $(A, C, \nu)$ у односу на функцију одсецања $h$.*

Скуп свих таквих решења се означава са $S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$ (нотација је преузета из [19]). Мера решења је сада одређена, па је и филтрација $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$ комплетна.

Решење мартингалног проблема је био предмет проучавања докторске дисертације [20], где се за мартингални проблем користи ознака $(\Theta, \eta, b, c, F, K)^M$ (види Лему 2.29 у

[20]). Ту је коришћена нешто другачија нотација за исти проблем и важе везе

$$\begin{aligned}
A(h) &= \int_0^t b_s(X)ds + \int_0^t \int (h(x)-x)F((X,s),dx)ds \\
&+ \Sigma_{s\in\Theta\cap[0,t]} \int h(x)K((X,s),dx), \qquad (3.32) \\
C_t &= \int_0^t c_s(X)ds, \\
\nu([0,t]\times G) &= \int_0^t F((X,s),G)ds + \Sigma_{s\in\Theta\cap[0,t]}K((X,s),G\setminus\{0\}),
\end{aligned}$$

где је $h : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ функција одсецања (Дефиниција II.2.3 из [19] за специјалне семимартингале је $h(x) = x$) која укључује и језгра прелаза $F$ и $K$ за свако $t \in \mathbf{R}_+, G \in \mathcal{B}^d$. Чак штавише је $P_{Y_0} = \eta$.

Иако би "семимартингални проблем" био много прикладнији назив, ипак се термин "мартингални проблем" најчешће користи јер је на основу Теореме 2.7 из [19] довољно показати да је процес $Y$ локалан мартингал у односу на исти простор, са адекватним процесима који представљају локалну карактеристику семимартингала $Y$.

Следећа теорема показује да се може успоставити еквиваленција између слабог решења једначине (3.31) и мартингалног проблема који је придружен истој једначини.

**Теорема 3.11.** ([41]) *Нека је $X \in \mathbf{R}^d$, а $u_t(X)$ предвидив функционал. Тада су следећа два тврђења еквивалентна*

*(1) Скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ је регуларно слабо решење једначине (3.31),*

*(2) мера $P$ је решење мартингалног проблема или $P \in S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$.*

**Доказ**: Теорема важи на основу Теореме 6.3 из [17] где је тврђење доказано за заједничку меру решења. Појам заједничке мере решења је општијег карактера од појма регуларног слабог решења јер се процес решења конструише и на канонском простору где је дефинисан семимартингал $Z$, као и на проширењу (види [23]). Дакле, теорема важи. □

Претходна теорема захтева кратко објашњење. У применама, стохастички феномени се најчешће моделирају стохастичким диференцијалним једначинама које су генерисане Винеровим процесима. Овај уобичајен избор је, на основу Теореме 3.11, природан са тачке гледишта мартингалног проблема уколико се посматрају само модели са непрекидним трајекторијама (тј. $\nu \equiv 0$). Ситуација није тако очигледна ако трајекторије нису непрекидне. Иако формално мартингални проблеми (где је $\sigma(Y_0) = \emptyset$) могу бити трансформисани у решавање стохастичке диференцијалне једначине у слабом смислу, у односу на Винеров процес и Поасонову случајну меру, избор и значење коефицијената нису тако очигледни. Зато се може рећи да је, посебно у случају са прекидима, мартингални проблем више интуитивни концепт посебно када је реч о моделирању.

Нека су $H$ и $G$ скупови здесна непрекидних модификација процеса дефинисаних са (2.1) и (2.2)

$$H = \{M_t = P(A|\mathcal{F}_t^Z); A \in \mathcal{F}_\infty^Z\}, \qquad (3.33)$$

$$G = \{N_t = P(A|\mathcal{F}_t^{Z,X}); A \in \mathcal{F}_\infty^{Z,X}\}. \tag{3.34}$$

Нека је $S_y$ скуп свих мера $P$ на простору $(\Omega, \mathcal{F})$, таквих да је процес $N_t$ $(\mathcal{F}_t, P)$-локалан мартингал.

Следећа теорема показује да се егзистенција екстремног решења мартингалног проблема може довести у везу са концептом узрочности.

**Теорема 3.12.** ([41]) *Мера $P$ регуларног слабог решења једначине (3.31) је екстремно решење мартингалног проблема ако и само ако је $(Z_t, X_t)$ сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$, *тј. ако важи*

$$\mathbf{F}^{Z,X} \models\!\!< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P.$$

**Доказ**: Нека је мера $P$ екстремно решење мартингалног проблема или $P \in ext(S_y)$. На основу Последице 11.4, Теореме 11.2 и Теореме 11.3 из [16], претходно тврђење је еквивалентно са

$$Q \in S_y \ \wedge \ Q \ll P \ \Rightarrow \ Q = P.$$

Ако је $P \in ext(S_y)$ и $P$ је регуларно слабо решење, онда из $\dot{\varphi}(P) = \dot{P}$, следи да је $\mathbf{F}^Z \mid\!< \mathbf{F}^Z; \mathbf{F}; P$, па су елементи скупа $H$ $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингали (на основу Теореме 6.3 и Пропозиције 4.6 у [17]).

Нека постоји мера $Q_1 \in S_y$ на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ за коју је $Q_1 \neq P$. Нека је $Q_2$ мера на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ за коју важи $P = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}Q_2$. Мере $Q_1$ и $Q_2$ се очигледно поклапају са $P$ на $(\mathcal{F}_{-\infty}^{Z,X})$. Такође, елементи скупа $H$ су $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингали. Како је $Q_1 \in S_y$ следи да елементи скупа $H$ јесу $(\mathcal{F}_t, Q_1)$-мартингали, такође. С друге стране, то су и $(\mathcal{F}_t, Q_2)$-мартингали. Даље на основу формуле о смени променљивих (видети на пример [55]) следи да су $Q_1 f^{-1}$ и $Q_2 f^{-1} \in S_y$, па мера $P$ није екстремна у скупу $S_y$. Ово је супротно претпоставци да је $Q_1 \neq P$.

Дакле $P = Q_1$ и нека је мера екстремна на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$. На основу Теореме 4.2 из [41], ако је $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{P}) = (\Omega, \mathcal{F}, P)$ следи да је $(Z_t, X_t)$ сопствени узрок или

$$\mathbf{F}^{Z,X} \models\!\!< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}, P.$$

Обрнуто, нека важи

$$\mathbf{F}^{Z,X} \models\!\!< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P.$$

На основу Теореме 4.1 из [39] и због претходне релације елементи скупа $G$ су $(\mathcal{F}_t, P)$-мартингали, а због чињенице да је $P = Q_1$, они су и $(\mathcal{F}_t, Q_1)$-мартингали.

Дакле, $Q_1 \in S_y$ (зато што је сваки мартингал и локалан мартингал) и $Q_1 = P$, па на основу Последице 11.4 из [16] следи да је $P \in ext(S_y)$. $\square$

**Пример 3.2.** (упоредити са [20]) Нека је дата стохастичка диференцијална једначина

$$\begin{cases} dX_t = a_t(X)dt + b_t(X)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.35}$$

где су $x_0 \in R, a, b : R \times R_+ \longrightarrow R$ дате непрекидне функције и $W$ је стандардан Винеров процес.Тада је $X$ процес решења мартингалног проблема, $S(\emptyset, \epsilon_x, A, C, 0)$, где је $\epsilon_X$ Диракова (P. Dirac) делта мера, $A_t = \int_0^t a_s(X)ds$ и $C_t = \int_0^t b_s(x)b_s(X)^\top ds$.$\square$

Такође, постоје и друге дефиниције "решења" стохастичких диференцијалних једначина. Али ипак већина се своди на мартингални проблем, тј. проблем одређивања скупа мера које задовољавају услов да је одређени скуп процеса уствари скуп мартингала (наравно, ту се намећу и други услови на скуп мера). У већини случајева екстремност мере се користи на сличан начин као у претходном делу и показује се да постоји повезаност са концептом узрочности.

У случајевима када мартингални проблем има више од једног решења, концепт узрочности омогућава да се пронађе екстремно решење мартингалног проблема. Разлог због кога је ово интересантно је тај што се тада сва решења датог мартингалног проблема могу реконструисати са одређеног подскупа екстремних решења.

Моделирање физичких феномена помоћу мартингалног проблема може се посматрати као стохастички синоним за обичне диференцијалне једначине. У следећем делу је илустровано како се мартингални проблем може применити у пракси. Мартингали имају велику примену у финансијској математици, у описивању економских колебања на тржишту.

Оба наведена мартингална проблема се могу посматрати као модели цене акција, где исти догађај не само да мења повратни процес $X_t^1$ већ такође повећава волатилност акције $X_t^2$. Разлика између ова два модела је у томе што се у Примеру 3.3 волатилност може интерпретирати као приход од промене цене, док се у Примеру 3.4 интерпретира као мера просечне величине скока цене акција.

**Пример 3.3.** ([20]) Нека су фиксирани параметри $\mu \in R, \alpha, \beta, \sigma, x_0 \in R_+^*, x_1 \in (\alpha, \infty)$. Нека је $\varphi$ мера на $(R, \mathcal{B})$ која има $\lambda$-густину $x \rightarrow \frac{1}{|x|}e^{-|x|}$. Нека је дефинисана мера $F(((\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2), t), \cdot)$ као слика пресликавања $h(\bar{\omega}_t^2)\varphi$ где је $h : R \rightarrow R$, и задовољава да је $h(x) \geq \frac{\alpha}{2}$ за свако $x \in R$, и $h(x) = x$ за свако $x \in (\alpha, \infty)$. Нека је, даље, дефинисан и коефицијент $b_t(\bar{\omega}) = (\mu, -(\bar{\omega}^2 - \alpha)\beta + \int x_2 F((\bar{\omega}, t), d(x_1, x_2)))$ за свако $(\bar{\omega}, t) = ((\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2), t) \in \mathbf{D}^2 \times R_+$. Тада је за мартингални проблем $S(\emptyset, \epsilon_Y, A, 0, \nu)$ (где су $A_t$ и $\nu$ дефинисани са (3.32)) процес $Y = (X^1, X^2)$ сопствени узрок.

За процес решења $(X^1, X^2)$, процес $X^2$ се интерпретира као волатилност. Он се повећава зависно од позитивних скокова (који такође утичу и на $X^1$) и на њега негативно утиче нижа вредност акције $\alpha$ преко израза $-(\bar{\omega}_t^2 - \alpha)\beta$. Зато је вредност процеса $X^2$ увек изнад вредности процеса $\alpha$.$\square$

**Пример 3.4.** ([20]) Нека су фиксирани параметри $\mu \in R, \alpha, \beta, \sigma, x_0 \in R_+^*, x_1 \in (\alpha, \infty)$, и нека су $\varphi, h$ дефинисани као у претходном примеру. За свако $((\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2), t) \in fR^2 \times R_+$ дефинише се мера $F(((\bar{\omega}^1, \bar{\omega}^2), t), \cdot)$ као слика пресликавања $\varphi : R \rightarrow R^2, x \rightarrow (\sigma h(\bar{\omega}_t^2)x, h(\bar{\omega}_t^2)|x|)$. Нека је и коефицијент $b$ дефинисан као у претходном примеру. Тада је за мартингални проблем $S(\emptyset, \epsilon_{y_0}, A, 0, \nu)$ процес $Y = (X^1, X^2)$ сопствени узрок.$\square$

## 3.7 Мартингални проблем за заустављене процесе

Појам мартингалног проблема за заустављене процесе уведен је у [19].

Нека је уређена тројка $(A, C, \nu)$ локална карактеристика семимартингала $Y = (Z, X)$. Ако је $T$ време заустављања онда су и $Y^T, A^T, C^T$ заустављени процеси и "заустављена случајна мера" $\nu^T$ се дефинише као

$$\nu^T(\omega, ds, dz) = \nu(\omega, ds, dz) I_{\{s \leq T(\omega)\}}$$

Иако, можда, није очигледно из дефиниције семимартингала, простор семимартингала је веома уређен простор. Он је стабилан у односу на многе трансформације међу којима је и заустављање (класа процеса $\mathcal{A}$ се назива стабилном у односу на заустављање ако за сваки процес $X \in \mathcal{A}$ и свако време заустављања $T$, заустављен процес $X^T = X_{t\wedge T}$ припада класи $\mathcal{A}$).

Процес $A^T$ је поново $(\mathcal{F})$-предвидив процес на основу Пропозиције 2.4 у [19] и коначне варијације над коначним интервалима (јер је класа процеса коначне варијације над коначним интервалима стабилна у односу на заустављање); процес $C^T$ је $(\mathcal{F})$-предвидив, непрекидан процес, јер за мартингал $M$, $M^T$ је поново мартингал (Теорема 1.39 у [19]).

Дефиниција решења мартингалног проблема за заустављене процесе је уведена у [19].

**Дефиниција 3.19.** ([19]) *Решење мартингалног проблема за заустављене процесе, који је придружен системима $(\sigma(Y_0), Y^T)$ и $(\dot{P}, A^T, C^T, \nu^T)$ је мера $P$ на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ тако да су задовољени следећи услови:*

*(i) рестрикција $P|_{\sigma(Y_0)} = \dot{P}$,*

*(ii) процес $Y^T$ је семимартингал на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ са карактеристикама $(A^T, C^T, \nu^T)$ у односу на функцију одсецања $h$.*

**Пример 3.5.** ([47]) Нека је дат једнодимензионалан процес дифузије који задовољава једначину

$$\begin{cases} dX_t = a_t(X)dt + b_t(X)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{3.36}$$

где су $x_0 \in R, a, b : R \times R_+ \longrightarrow R$ дате непрекидне функције и $W$ је стандардан Винеров процес.Тада је $X^T$ процес решења мартингалног проблема за заустављене процесе, $S(\sigma(X_0), X^T|\epsilon_x, A^T, C^T, 0)$, где је $\epsilon_X$ Диракова делта мера, $A_t^T = \int_0^{t\wedge T} a_s(X)ds$ и $C_t^T = \int_0^{t\wedge T} b_s(x)b_s(X)^\top ds.\square$

У следећој пропозицији је утврђена веза између мартингалног проблема и мартингалног проблема за заустављене процесе за једначину (3.31).

**Пропозиција 3.1.** ([47]) *Нека је $T$ $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-време заустављања, тада су два следећа тврђења еквивалентна:*

(1) *мера $P$ је решење мартингалног проблема или $P \in S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$;*

(2) *мера $P$ је решење мартингалног проблема за заустављене процесе или $P \in S(\sigma(Y_0), Y^T|\dot{P}, A^T, C^T, \nu^T)$.*

**Доказ**: Нека је вероватноћа $P$ решење мартингалног проблема тј. $P \in S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$. $T$ је $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-време заустављања. Процес $Y$ је семимартингал на простору $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ са карактеристикама $(A, C, \nu)$. На основу Дефиниције III.2.4 у [19] и $Y^T$ семимартингал са карактеристикама $(A^T, C^T, \nu^T)$. Вероватноћа $\dot{P}$ остаје иста. На основу Дефиниције 3.19, вероватноћа $P$ је решење мартингалног проблема за заустављене процесе или $P \in S(\sigma(Y_0), Y^T|\dot{P}, A^T, C^T, \nu^T)$.

Обрнуто се једноставно доказује, ако је $T = \infty$. □

Следећа теорема успоставља везу између решења мартингалног проблема за заустављене процесе и слабо локалног решења једначине (3.31).

**Теорема 3.13.** *Нека је $X \in R^d, u_t(X)$ предвидив функционал, $T$ $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-време заустављања и $(\mathcal{F}_t^0) = (\mathcal{F}_t)$. Тада су следећа два тврђења еквивалентна:*

(1) *скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, F, P, X_t, Z_t, T)$ је слабо локално решење једначине (3.31),*

(2) *мера $P$ је решење мартингалног проблема за заустављене процесе или $P \in S(\sigma(Y_0), Y^T|\dot{P}, A^T, C^T, \nu^T)$.*

**Доказ:** Нека важи услов (1). Нека је скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, F, P, X_t, Z_t, T)$ регуларно слабо локално решење једначине (3.31). На основу Теореме 3.4, скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, F, P, X_t, Z_t)$ је и регуларно слабо решење исте једначине. На основу Теореме 3.11 мера $P$ је решење мартингалног проблема, или $P \in S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$. Такође, на основу Пропозиције 3.38 ако је $T$ строго време заустављања ($T$ је на основу дефиниције слабо локалног решења, $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-време заустављања), онда је мера $P$ решење мартингалног проблема за заустављене процесе.

Обрнуто, нека је $P \in S(\sigma(Y_0), Y^T|\dot{P}, A^T, C^T, \nu^T)$ или нека је мера $P$ решење мартингалног проблема за заустављене процесе. Онда је на основу Пропозиције 3.38, мера $P$ решење мартингалног проблема. На основу Теореме 3.11 скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, F, P, X_t, Z_t)$ је регуларно слабо решење једначине (3.31). Користећи Теорему 3.4, ако је $T$ $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-време заустављања, што је задовољено, тада је скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, F, P, X_t, Z_t, T)$ слабо локално решење једначине (3.31).□

Концепт локалне јединствености за мартингалне проблеме је јачи од појма "обичне" јединствености. Први пут се уводи у [19]. Овај модел јединствености се уводи због проучавања апсолутне непрекидности и питања сингуларности решења мартингалних проблема.

**Дефиниција 3.20.** ([19]) *Нека је филтрација $\mathbf{F}$ облика (3.30). Тада је решење мартингалног проблема $S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$ локално јединствено ако за свако строго време заустављања $T$ се свака два решења $P$ и $P'$ мартингалног проблема за заустављене процесе $S(\sigma(Y_0), Y^T|\dot{P}, A^T, C^T, \nu^T)$ поклапају на $\sigma$-алгебри $(\mathcal{F}_T^0)$.*

**Напомена 3.3.** Из локалне јединствености следи слаба јединственост (ако је $T = t$).

Нека је $S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$ мартингални проблем придружен једначини (3.31), тада важи једнакост $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{Z,X}$ и да би се доказала локална јединственост треба доказати да се свака два решења $P$ и $Q$ мартингалног проблема за заустављане процесе поклапају на филтрацији $(\mathcal{F}_T^{Z,X})^0$. Наиме, важи следећа теорема.

**Теорема 3.14.** ([47]) *Нека је $T$ строго време заустављања. Решење мартингалног проблема $S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$ је локално јединствено ако и само ако је процес $Y = (Z, X)$ сопствени узрок у оквиру* $\mathbf{F}$, *тј. ако важи*

$$\mathbf{F}^{(Z,X)^T} \models \mathbf{F}^{(Z,X)^T}; \mathbf{F}^T; P.$$

**Доказ:** Нека је $T$ строго време заустављања и нека је мера $P$ локално јединствено решење мартингалног проблема $S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$. На основу Дефиниције 3.13 о слабој јединствености и Напомене 3.3 мера $P$ је слабо јединствена. На основу Теореме 3.12 следи да је процес $Y = (Z, X)$ сопствени узрок или важи

$$\mathbf{F}^{Z,X} \models \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P. \tag{3.37}$$

Како је $T$ $(\mathcal{F}_t^{Z,X})^0$-време заустављања то је $T$ и $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-време заустављања. На основу Теореме 1.26 важи

$$\mathbf{F}_T^{Z,X} \models \mathbf{F}_T^{Z,X}; \mathbf{F}_T; P. \tag{3.38}$$

Због услова (3.37) и (3.38) важи

$$\mathbf{F}^{(Z,X)^T} \models \mathbf{F}^{(Z,X)^T}; \mathbf{F}^T; P.$$

Обрнуто, нека је $T$ строго време заустављања и мера $P$ решење мартингалног проблема, $P \in S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$ дефинисана на $(\mathcal{F}_t^{Z,X})^0$. На основу претпоставке, таква мера $P$ задовољава услов узрочности, тј. важи

$$\mathbf{F}^{(Z,X)^T} \models \mathbf{F}^{(Z,X)^T}; \mathbf{F}^T; P \quad \text{или}$$

$$\text{за свако } A \in (\mathcal{F}_T^{Z,X}) \quad P(A \mid \mathcal{F}_{T\wedge t}^{Z,X}) = P(A \mid \mathcal{F}_{T\wedge t}).$$

На основу Теореме 1.26 претходна релација је еквивалентна са

$$\mathbf{F}^{Z,X} \models \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P \quad \text{или}$$

$$\text{за свако } A \in (\mathcal{F}_\infty^{Z,X}) \quad P(A \mid \mathcal{F}_t^{Z,X}) = P(A \mid \mathcal{F}_t).$$

Нека постоји још једно решење мартингалног проблема $Q$ дефинисано на $(\mathcal{F}_T^{Z,X})^0 \subset (\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$. На основу Теореме 3.12 и Пропозиције 1.25 следи да је решење $P$ слабо јединствено или ако постоји још неко решење мартингалног проблема $Q$, онда је $P = Q$ на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$. Такође, важи да је $(\mathcal{F}_T^{Z,X})^0 \subseteq (\mathcal{F}_T^{Z,X}) \subseteq (\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ па је $P = Q$ на $(\mathcal{F}_T^{Z,X})^0$ и мера $P$ је локално јединствено решење.$\square$

**Пример 3.6.** ([47]) Нека је $X^T$ процес решења мартингалног проблема за заустављене процесе $S(\sigma(X_0), X^T|\epsilon_x, A^T, C^T, 0)$, придруженог стохастичкој диференцијалној једначини. Тада је решење мартингалног проблема локално јединствено ако и само ако важи

$$\mathbf{F}^{X^T} \models\!< \mathbf{F}^{X^T}; \mathbf{F}^T; P.\square$$

Сада, када је уведен појам мартингалног проблема за заустављене процесе и његове локалне јединствености, може се навести и доказ Теореме 3.10.

**Доказ Теореме 3.10:** Нека је скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, F, P, X_t, Z_t, T)$ регуларно слабо локално решење једначине (3.12). На основу претпоставке то решење је слабо јединствено. На основу Теореме 3.4 $(\Omega, \mathcal{F}, F, P, X_t, Z_t)$ је регуларно слабо решење једначине (3.12). На основу Дефиниције 3.20 о локалној јединствености и Напомене 3.3, слабо решење $(\Omega, \mathcal{F}, F, P, X_t, Z_t)$ је слабо јединствено. На основу Теореме 3.6 и због слабе јединствености задовољено је

$$\mathbf{F}^{Z,X} \models\!< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P. \tag{3.39}$$

Ако је $T$ строго време заустављања (време заустављања у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t^{Z,X})^0$), онда је то и $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-време заустављања. На основу Теореме 1.26 релација (3.39) је еквивалентна са

$$\mathbf{F}_T^{Z,X} \models\!< \mathbf{F}_T^{Z,X}; \mathbf{F}_T; P. \tag{3.40}$$

Због релација (3.39) и (3.40) важи да је

$$\mathbf{F}^{(Z,X)^T} \models\!< \mathbf{F}^{(Z,X)^T}; \mathbf{F}^T; P$$

или еквивалентно за свако $A \in (\mathcal{F}_T^{Z,X})$ је

$$P(A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}^{Z,X}) = P(A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}).$$

Обрнуто, нека је скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, F, P, X_t, Z_t, T)$ слабо локално решење једначине (3.12) где је $T$ строго време заустављања. Тада је задовољена релација

$$\mathbf{F}^{(Z,X)^T} \models\!< \mathbf{F}^{(Z,X)^T}; \mathbf{F}^T; P. \tag{3.41}$$

На основу Теореме 3.4 скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, F, P, X_t, Z_t)$ је регуларно слабо решење.

За $t < T$ релација (3.41) постаје облика $\mathbf{F}_T^{Z,X} \models\!< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P$, и на основу Теореме 1.26, то је еквивалентно са $\mathbf{F}^{Z,X} \models\!< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P$. На основу Теореме 3.6 регуларно слабо решење $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}, P, X_t, Z_t)$ једначине (3.12) је слабо јединствено. Ако постоји друго решење $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^{Z,X}, \mathcal{F}_t^{Z,X}, Q, X_t, Z_t)$ једначине (3.12) вероватноће $P$ и $Q$ се поклапају на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$. На основу претпоставке $T$ је строго време заустављања и како је $P$ слабо јединствено решење, онда је $P = Q$ на $(\mathcal{F}_T^{Z,X})^0$.

За $T \leq t$ релација (3.41) је еквивалентна са $\mathbf{F}_T^{Z,X} \models\!< \mathbf{F}_T^{Z,X}; \mathbf{F}_T; P$. На основу Теореме 1.26, то је еквивалентно са $\mathbf{F}^{Z,X} \models\!< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P$, и слично се доказује да је $P = Q$ на $(\mathcal{F}_T^{Z,X})$. Дакле, теорема је доказана.$\square$

# Глава 4

# Мартингална репрезентација

Теорија мартингалне репрезентације датира још од Итовог рада о вишедимензионалним стохастичким интегралима, а теорија за квадратно интеграбилне мартингале је настала према радовима Куните (H. Kunita) и Ватанабе. Многи значајни резултати на ову тему презентовани су у радовима Делашерија (C. Dellacherie) и Мејера ([4]). Везу између екстремности мере и мартингалне репрезентације први је проучавао Делашер, а праву форму и дефиницију дали су Жакод и Јор (M. Yor) у својим радовима ([16, 52]).

## 4.1 Својство мартингалне репрезентације

Проблем одређивања мартингалне репрезентације је следећи. За дату колекцију мартингала (или локалних мартингала) $\mathcal{A}$, поставља се питање да ли се може одредити скуп мартингала (или локалних мартингала) који се могу представити као стохастички интеграли у односу на процесе из класе $\mathcal{A}$. Питање одређивања мартингалне репрезентације је изненађујуће важно у применама и веома интересантно у теорији финансија, на пример.

У овом делу питање мартингалне репрезентације је проширено и на семимартингале. У литератури се може наћи много радова о мартингалним репрезентацијама. Овај концепт се може повезати са концептом статистичке узрочности и екстремним мерама, о чему ће бити речи у овој глави.

**Дефиниција 4.1.** ([52]) *Непрекидан локалан мартингал $X$ има мартингалну репрезентацију ако за сваки $(\mathcal{F}_t^X)$-локалан мартингал $M$, постоји $(\mathcal{F}_t^X)$-предвидив процес $H$ тако да је задовољено*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dX_s. \tag{4.1}$$

Нека је $\mathcal{U}$ (респективно $\mathcal{K}$) скуп вероватноћа на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ за које је процес $X$ локалан мартингал (респ. мартингал). Ако је $P \in \mathcal{U}$, онда је $(\mathcal{F}_t, P)$ најмања здесна непрекидна филтрација, комплетна за меру $P$, тако да је задовољено $(\mathcal{F}_t^X) \subset (\mathcal{F}_t)$.

Појам екстремних мера (Дефиниција 1.37) се може довести у везу са својством мартингалне репрезентације, на шта указује следећа теорема.

**Теорема 4.1.** ([52]) *Мера $P$ је екстремна у скупу $\mathcal{K}$ ако и само ако мера $P$ има мартингалну репрезентацију и $(\mathcal{F}_0, P)$ је тривијалан простор.*

Винеров процес има својство мартингалне репрезентације, а и Винерова мера $\mu_W$ је очигледно екстремна, што се може доказати и директно.

Претходна теорема може бити проширена са скупа $\mathcal{K}$ на скуп $\mathcal{U}$.

**Теорема 4.2.** ([52]) *Мера $P$ је екстремна у скупу $\mathcal{U}$ ако и само ако мера $P$ има мартингалну репрезентацију и $(\mathcal{F}_0, P)$ је тривијалан простор.*

У [19] и [51] се уводи генерализација појма мартингалне презентације. Наиме, нека је дат простор $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, на коме је дефинисан семимартингал $Z = \{Z_t \mid t \in I\}$ са локалним карактеристикама $(A, C, \nu)$, у односу на неку функцију одсецања $h$, $Z^c$ је непрекидан део семимартингала $Z$ и $\mu = \mu^Z$ је семимартингална мера дефинисана у [19].

Сваки локалан мартингал се може написати као стохастички интеграл у односу на Винеров процес. Али, ситуација је много компликованија за произвољне семимартингале. Не само да је потребно дефинисати два интеграла, уместо једног (први у односу на непрекидни део семимартингала, као и код Винеровог процеса и други у односу на одговарајућу меру за скокове семимартингала, тј. његов прекидни део), већ ова презентација важи само под условима који су повезани са мартингалним проблемом.

**Дефиниција 4.2.** ([19]) *Локалан мартингал $M$ има својство мартингалне репрезентације у односу на процес $Z$ ако је облика*

$$M = M_0 + H \cdot Z^c + W * (\mu - \nu) \tag{4.2}$$

*где је $H$ предвидив процес и интеграл са десне стране је стохастички интеграл у односу на случајне мере (дефинисан је у [19]).*

Као што се може уочити Дефиниција 4.2 је блага генерализација Дефиниције 4.1.

Мартингална репрезентација је била интересантна тема научницима из стохастичке анализе још од пионирских радова Итоа о филтрацији Винеровог процеса. Резултати су показали да је од кључног значаја за примену у неким областима нпр. код нелинеарног филтрирања и у финансијској математици. Чак и данас је веома интересантна, највише због везе са Малиавиновим (P. Malliavin) рачуном на Винеровом простору.

## 4.2 Узрочност и својство мартингалне репрезентације

Својство мартингалне репрезентације је везано за појам филтрације. На датом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ нека су $(\mathcal{G}_t)$ и $(\mathcal{F}_t)$ две (различите) филтрације које задовољавају уобичајене услове и за које важи $(\mathcal{G}_t) \subset (\mathcal{F}_t) \subset (\mathcal{F})$ за свако $t$. Нека је процес $M$ $(\mathcal{G}_t)$-адаптиран, непрекидан $(\mathcal{F}_t)$-локалан мартингал.

У овом делу су презентовани резултати који се тичу карактеризације мартингала који имају мартингалну репрезентацију. Веома је важно знати да ли је мартингална репрезентација у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t)$ или $(\mathcal{G}_t)$. Постоји много примера где процес $X_t$ има репрезентацију у односу на $(\mathcal{G}_t)$, али не и у односу на $(\mathcal{F}_t)$. Због тога је природно поставити питање о обрнутом тврђењу: Ако $X_t$ има мартингалну репрезентацију у односу на $(\mathcal{F}_t)$ да ли то важи и за филтрацију $(\mathcal{G}_t)$? У општем случају одговор је негативан. Следећа теорема даје услове када ово тврђење важи и утврђује еквиваленцију између концепта узрочности, мартингалне репрезентације и очувању својства мартингалности. (уопштење Пропозиције 9 из [2]).

**Пропозиција 4.1.** ([46]) *Нека $(\mathcal{F}_t)$-локалан мартингал $X_t$ има мартингалну репрезентацију у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t)$. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*

*(1) процес $X_t$ има мартингалну репрезентацију у односу на $(\mathcal{G}_t)$;*

*(2) сви $(\mathcal{G}_t)$-локални мартингали су $(\mathcal{F}_t)$-локални мартингали;*

*(3) $\mathbf{G}$ је сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$, тј. $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ важи.*

Ако процес $X_t$ има својство мартингалне репрезентације у односу на $(\mathcal{F}_t)$, онда постоји $(\mathcal{F}_t)$-локалан мартингал $M_t$ који је облика

$$M_t = a + \int_0^t H_u dX_u,$$

где је $a \in R$ и $H$ је $(\mathcal{F}_t)$-предвидив процес. Слично, ако процес $X_t$ има својство мартингалне репрезентације у односу на $(\mathcal{G}_t)$, тада се $(\mathcal{G}_t)$-локалан мартингал $N_t$ може представити у облику

$$N_t = b + \int_0^t K_u dX_u,$$

где је $b \in R$ и $K$ је $(\mathcal{G}_t)$-предвидив процес.

**Доказ**: Први део Пропозиције, еквиваленција између услова (1) и (2) је доказана у Пропозицији 9 у [2]. Док је други део тврђења, еквиваленција између услова (2) и (3) доказана у Теореми 2.3.

Следећи резултат је генерализација Пропозиције 4.1. Прецизније, дата је генерализација повезаности између мартингалне репрезентације и очувања својства семимартингалности у односу на филтрације.

**Теорема 4.3.** ([46]) *Нека $(\mathcal{F}_t)$-локалан мартингал $X_t$ има мартингалну репрезентацију у односу на $(\mathcal{F}_t)$. Тада су следећа два тврђења еквивалентна:*

*(1) процес $X_t$ има мартингалну репрезентацију у односу на $(\mathcal{G}_t)$;*

*(2) сваки $(\mathcal{G}_t)$-семимартингал је и $(\mathcal{F}_t)$-семимартингал.*

**Доказ**: Нека процес $X_t$ има мартингалну репрезентацију у односу на $(\mathcal{G}_t)$. Тада на основу Пропозиције 4.1 сви $(\mathcal{G}_t)$-локални мартингали су $(\mathcal{F}_t)$-локални мартингали и сваки локалан мартингал ове две филтрације има мартингалну репрезентацију

$$M_t = E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) = a + \int_0^t H_u dX_u \text{ у односу на } (\mathcal{F}_t),$$

$$N_t = E(N_\infty \mid \mathcal{G}_t) = b + \int_0^t K_u dX_u \text{ у односу на филтрацију } (\mathcal{G}_t).$$

Очигледно је, процес $N_t$ $(\mathcal{G}_t)$ и $(\mathcal{F}_t)$-локалан мартингал, а због Пропозиције 4.1 важи $\mathbf{G} \mid< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$. Нека је $Z_t$ $(\mathcal{G}_t)$-семимартингал чија је декомпозиција $Z_t = M_t + A_t$, где је $M_t$ локалан мартингал и $A_t$ је процес коначне варијације. Процес варијације $Var(A_t)$ процеса $A_t$ је дефинисан са

$$Var(A_t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{0 \le i < nt} \left| A\left(\frac{i+1}{n}\right) - A\left(\frac{1}{n}\right) \right|.$$

Како је процес $A_t$ процес коначне варијације истовремено и у односу на $(\mathcal{G}_t)$ и у односу на $(\mathcal{F}_t)$ он је скоро извесно коначан за скоро свако $t$ и растући у односу на обе филтрације. Дакле, $Z_t$ је$(\mathcal{F}_t)$-семимартингал.

Обрнуто, нека су $(\mathcal{G}_t)$-семимартингали истовремено и $(\mathcal{F}_t)$-семимартингали. Тврђење важи и за локалне мартингале, па је дакле, задовољена и теорема (видети Пропозицију 4.1). □

Следећа еквиваленција је вредна пажње.

**Теорема 4.4.** ([46]) *Нека процес $M$ има мартингалну репрезентацију у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t)$. Следећа тврђења су еквивалентна:*

*(1) $(\mathcal{G}_t)$ је сопствени узрок у оквиру $(\mathcal{F}_t)$ или важи $\mathbf{G} \mid< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$;*

*(2) сваки $(\mathcal{G}_t)$-мартингал је непрекидан $(\mathcal{F}_t)$-семимартингал.*

**Доказ**: Нека је задовољена претпоставка да процес $M_t$ има мартингалну репрезентацију у односу на $(\mathcal{F}_t)$ тј. постоји предвидив процес $H$ за који важи да је

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dX_s$$

и нека је задовољено $\mathbf{G} \mid< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$. Због чињенице да је $(\mathcal{G}_t)$ сопствени узрок, за свако $A \in (\mathcal{G}_\infty)$ мора да важи

$$P(A \mid \mathcal{G}_t) = P(A \mid \mathcal{F}_t). \tag{4.3}$$

Нека је $N_t$ $(\mathcal{G}_t)$-мартингал. Тада је $N_t = E(N_\infty \mid \mathcal{G}_t)$. Због (4.3) важи да је за свако $A \in (\mathcal{G}_\infty)$

$$E(\chi_A \mid \mathcal{G}_t) = E(\chi_A \mid \mathcal{F}_t),$$

или

$$E(N_\infty \mid \mathcal{G}_t) = E(N_\infty \mid \mathcal{F}_t).$$

Дакле, $N_t$ је $(\mathcal{G}_t)$ и $(\mathcal{F}_t)$-мартингал, па на основу Пропозиције 4.1 и Последице 2.1, $M$ има својство мартингалне репрезентације у односу на $(\mathcal{G}_t)$. Тада сваки $(\mathcal{G}_t)$-мартингал $N_t$ може бити написан као

$$N_t = E(N_\infty \mid \mathcal{G}_t) = c + \int_0^t \varphi_u dM_u,$$

где је $c \in R$ и $\varphi$ је предвидив процес у односу на филтрацију $(\mathcal{G}_t)$. Дакле, $N_t$ може бити написан као стохастички интеграл у односу на $M_t$, па је из тог разлога то непрекидан $(\mathcal{F}_t)$-мартингал, а самим тим и непрекидан $(\mathcal{F}_t)$-семимартингал.

Обрнуто, нека је $N_t$ $(\mathcal{G}_t)$-мартингал и непрекидан $(\mathcal{F}_t)$-семиматингал. На основу претпоставке $N_t$ се може написати као

$$N_t = c + \int_0^t \varphi_s dM_s + A_t,$$

са $c \in R, \varphi$ је $(\mathcal{F}_t)$-предивидив процес и $A$ је $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран, непрекидан процес коначне варијације.

Тада, како је процес $M$ непрекидан, процес $[N, M]_t = \int_0^t \varphi_s d\langle M, M\rangle_s$ је непрекидан и $(\mathcal{G}_t)$-адаптиран. Тада се може изабрати процес $\varphi = d[N, M]/d\langle M, M\rangle$ који је$(\mathcal{G}_t)$-предвидив. Дакле, $N_t - \left(c + \int_0^t \varphi_s dM_s\right)$ је $(\mathcal{G}_t)$ непрекидан мартингал, једнак $A$, а то је процес коначне варијације. Ово повлачи да је $A \equiv 0$. Процес $N_t$ има мартингалну репрезентацију у односу на филтрације $(\mathcal{F}_t)$ и $(\mathcal{G}_t)$.

Тада на основу Пропозиције 4.1 следи да сви $(\mathcal{G}_t)$-мартингали јесу и $(\mathcal{F}_t)$-мартингали, и на основу Последице 2.1 $(\mathcal{G}_t)$ је сопствени узрок, или важи узрочност $\mathbf{G} \mid< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$. Дакле, тврђење важи.$\square$

Следећа теорема показује да је статистичка узрочност битна претпоставка када се доказује инваријантност мере код мартингалне репрезентације.

**Теорема 4.5.** ([46]) *Нека су $(\mathcal{G}_t)$ и $(\mathcal{F}_t)$ филтрације на мерљивом простору $(\Omega, \mathcal{F})$ и $P$ и $Q$ су вероватноће на филтрацији $(\mathcal{F}_t)$ које задовољавају да је $Q \ll P$ са променљивом $\dfrac{dQ}{dP}$ која је $(\mathcal{G}_\infty)$-мерљива. Нека је задовољен услов $\mathbf{G} \mid< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$. Тада су следећа два тврђења еквивалентна:*

*(1) Процес $X$ има својство мартингалне репрезентације у односу на $(\mathcal{F}_t, P)$;*

*(2) Процес $X$ има својство мартингалне репрезентације у односу на $(\mathcal{F}_t, Q)$.*

**Доказ**: Нека је задовољена узрочност $\mathbf{G} \mid< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ и нека $X$ има својство мартингалне репрезентације у односу на $(\mathcal{F}_t, P)$. На основу Пропозиције 4.1 и Последице 2.1 је

$$M_t = E_P(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) = x_0 + \int_0^t H_u dP(X_u).$$

Због услова $Q \ll P$ може се дефинисати Радон-Никодимов $(\mathrm{J. Radon,\ O. Nikodym})$ извод $L(\infty) = dQ/dP$ који је $(\mathcal{G}_\infty)$-мерљива случајна променљива. Нека је дефинисан мартингал $L(t) = E_P(L(\infty) \mid \mathcal{F}_t)$. Тада је

$$\begin{aligned} M_t L_t &= E_P(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) E_P(L(\infty) \mid \mathcal{F}_t) \\ &= E_P(M_\infty L(\infty) \mid \mathcal{F}_t) = x_0 + \int_0^\infty H_u dP(X_u) \frac{dQ}{dP}. \end{aligned}$$

Дакле, важи

$$M_t = L_t^{-1} E(M_\infty \frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t) = E_Q(M_\infty \mid \mathcal{F}_t).$$

На основу последњег тврђења $X$ има својство мартингалне репрезентације у односу на $(\mathcal{F}_t, Q)$.

Обрнуто, нека је задовољено $\mathbf{G} \,|\!<\, \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$ и нека $X$ има својство мартингалне репрезентације у односу на $(\mathcal{F}_t, Q)$. Због узрочности за свако $A \in (\mathcal{G}_\infty)$ важи

$$P(A \mid \mathcal{G}_t) = P(A \mid \mathcal{F}_t).$$

Такође, $X$ има мартингалну репрезентацију у односу на $(\mathcal{F}_t, Q)$ или важи

$$M_t = E_Q(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) = x_0 + \int_0^t H_u dQ(X_u).$$

Тада је

$$M_t = E_Q(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) = L_t^{-1} E(M_\infty \frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{F}_t) = L_t^{-1} E(M_\infty \frac{dQ}{dP} \mid \mathcal{G}_t).$$

Последњи корак важи због претпостављене узрочности, јер $M_\infty$ и $\dfrac{dQ}{dP}$ су $(\mathcal{G}_\infty)$-мерљиви. На крају је

$$\begin{aligned} M_t &= L_t^{-1} E(L_\infty \mid \mathcal{G}_t) E(M_\infty \mid \mathcal{G}_t) = L_t^{-1} E(L_\infty \mid \mathcal{F}_t) E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) \\ &= E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t) = x_0 + \int_0^t H_u dP(X_u). \square \end{aligned}$$

## 4.3 Узрочност и мартингална репрезентација слабих решења стохастичких диференцијалних једначина

У овом делу се разматра веза између слабих решења стохастичких диференцијалних једначина и својства мартингалне репрезентације.

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ простор вероватноћа са филтрацијом на коме је дефинисан семимартингал $Z$ са карактеристикама $(A, C, \nu)$. Прво су дате једначине које су генерисане Винеровим процесом.

Нека је дата стохастичка диференцијална једначина

$$\begin{cases} dX_t = a_t(X)dt + b_t(X)dW_t \\ X_0 = \eta \end{cases} \tag{4.4}$$

где је $W$ Винеров процес и коефицијенти $a_t, b_t$ су узрочни функционали. Наиме, важи следећа теорема.

**Теорема 4.6.** ([46]) *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, W_t)$ слабо решење једначине (4.4). Тада сваки мартингал $M_t$, који је адаптиран у односу на филтрацију која је индукована процесом решења $X_t$, има мартингалну репрезентацију и може се представити на следећи начин*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dX_s, \tag{4.5}$$

*где је $H_s$ $(\mathcal{F}_t^X)$-предвидив процес ако и само ако је $X_t$ сопствени узрок или ако важи $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P$.*

**Доказ**: Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, W_t)$ слабо решење једначине (4.4). Такође, нека је процес $M_t$ облика (4.5) или еквивалентно процес $X$ има мартингалну репрезентацију. Тада, на основу Дефиниције 4.2, процес $X$ је непрекидан локалан мартингал. Индукована мера $P$ процеса $X$ такође има својство мартингалне репрезентације. Дакле, на основу Теореме 4.1, мера $P$ је екстремна на филтрацији $(\mathcal{F}_\infty^X)$ у скупу $\mathcal{U}$ (а то је скуп свих вероватноћа на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ за које је задовољено да је процес $X$ локалан мартингал на простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$). На основу Теореме 4.4 у ([41]) слабо решење $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, W_t)$ једначине (4.4) је слабо јединствено и на основу Теореме 5.9 у [31] процес $X_t$ је сопствени узрок или еквивалентно важи узрочност $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P$.

Обрнуто, нека је процес $X_t$ сопствени узрок или еквивалентно нека је задовољена релација $\mathbf{F}^X \mid< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P$ за слабо решење $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, W_t)$ једначине (4.4). На основу Теореме 5.9 из [31], због сопствене узрочности процеса $X_t$ решење је слабо јединствено. Дакле, на основу Теореме 4.4 из [41] мера $P$ на филтрацији $(\mathcal{F}_\infty^X)$ је екстремна међу свим мерама за које је процес $X$ решење једначине (4.4). Због Теореме 4.2 мера $P$ има својство мартингалне репрезентације на $(\mathcal{F}_\infty^X)$ или сваки $(\mathcal{F}_t^X, P)$-локалан мартингал $M$ се може представити у облику $M = H \cdot X$, где је $H$ $(\mathcal{F}_t^X, P)$-предвидив процес, а стохастички интеграл је у односу на меру $P$ или

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dX_s$$

где је $M_0 = 0$. Дакле, на основу Дефиниције 4.1 процес $X$ има мартингалну репрезентацију. □

Следећи корак јесте генерализација ове теореме, тј. покушај да се мартингална репрезентација доведе у везу са узрочношћу и за решења стохастичких диференцијалних једначина које су генерисане општијим процесима, тј. семимартингалима.

Нека је дата стохастичка диференцијална једначина која је генерисана семимартингалима (види [18]), која је облика

$$\begin{cases} dX_t = u_t(X)dZ_t \\ X_0 = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

где је $Z_t$ $m$-димензионалан семимартингал (са $Z_0 = 0$), $u_t(X)$ је $(n \times m)$-димензионалан, $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-предвидив процес и $X_t$ је процес решења.

Нека је $Y = (Z, X)$ даље $(m+n)$-димензионалан процес код кога су прве $m$ (респективно последњих $n$) координате уствари координате процеса $Z$ (респективно од процеса $X$). Тада важи следећа теорема.

**Теорема 4.7.** ([46]) *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ слабо решење стохастичке диференцијалне једначине (4.6). Тада сваки мартингал $M_t$ који је адаптиран у односу на филтрацију која је индукована процесима $(Z_t, X_t)$ има мартингалну репрезентацију и може се представити у облику*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dY_s$$

*где је $H_s$ $(\mathcal{F}_t^{Z,X}, P)$-предвидив процес ако и само ако је $(Z_t, X_t)$ сопствени узрок, тј. ако важи релација узрочности $\mathbf{F}^{Z,X} \mid\!< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P$.*

**Доказ**: Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ слабо решење стохастичке диференцијалне једначине (4.6). Тада сваки мартингал $M_t$ има мартингалну репрезентацију. Другим речима, сваки мартингал $M_t$ који је адаптиран у односу на филтрацију која је индукована процесима $(Z_t, X_t)$, може се представити у облику

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dY_s,$$

за одговарајући $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-предвидив процес $H_t$. Тада мера $P$ која је дефинисана на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$, у односу на коју је извршена стохастичка интеграција, такође има мартингалну репрезентацију. На основу Теореме 4.1, $P$ је екстремна мера на скупу свих мера за које су дефинисани мартингали облика $M_t = P(A \mid \mathcal{F}_t^{Z,X})$. Тај скуп је $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$. Наиме, за процес $M_t \in (\mathcal{F}_t^{Z,X})$ важи

$$\begin{aligned} E(M_\infty \mid \mathcal{F}_t^{Z,X}) &= E(P(A \mid \mathcal{F}_\infty^{Z,X}) \mid \mathcal{F}_t^{Z,X}) = E(E(1_A \mid \mathcal{F}_\infty^{Z,X}) \mid \mathcal{F}_t^{Z,X}) \\ &= E(1_A \mid \mathcal{F}_\infty^{Z,X} \cap \mathcal{F}_t^{Z,X}) = P(A \mid \mathcal{F}_t^{Z,X}) = M_t, \end{aligned}$$

дакле, $M_t$ је $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$-мартингал. Такав скуп мера је означен са $\mathcal{K}$. Скуп генерисан процесима $M_t$ је уствари $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ јер је то минимална филтрација на којој је дефинисано слабо решење једначине (4.6). На основу Теореме 4.3 и Теореме 4.4 у [41] мера $P$ је слабо јединствено решење једначине (4.6), одакле следи да је $(Z_t, X_t)$ сопствени узрок или важи релација

$$\mathbf{F}^{Z,X} \mid\!< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P.$$

Обрнуто, нека је задовољена узрочност $\mathbf{F}^{Z,X} \mid< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P$. Тада, је на основу Теореме 4.3 и Теореме 4.4 у [41] слабо решење $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ стохастичке диференцијалне једначине (4.6) слабо јединствено на филтрацији $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ и мера $P$ је екстремна за свако слабо решење.

Из узрочности $\mathbf{F}^{Z,X} \mid< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P$, следи да је филтрација $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$ генерисана на следећи начин $\mathcal{F}_t^{Z,X} = \mathcal{F}_t \cap \mathcal{F}_\infty^{Z,X}$ и елементи филтрације $(\mathcal{F}_t^{Z,X})$ су мартингали облика $M_t = P(A \mid \mathcal{F}_t)$. Претпоставка $\mathbf{F}^{Z,X} \mid< \mathbf{F}^{Z,X}; \mathbf{F}; P$ је еквивалентна са

$$\text{за свако } A \in (\mathcal{F}_\infty^{Z,X}) \qquad P(A \mid \mathcal{F}_t^{Z,X}) = P(A \mid \mathcal{F}_t).$$

Мера $P$ је екстремна и дефинисана на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$, па на основу Теореме 4.1 следи да мера $P$ има мартингалну репрезентацију на $(\mathcal{F}_\infty^{Z,X})$ или сваки $(\mathcal{F}_t^Y, P)$-локалан мартингал $M$ се може написати у облику $M = H \cdot Y$, где је $H$ $(\mathcal{F}_t^Y, P)$-предвидив процес и стохастичка интеграција је у односу на меру $P$. Дакле, процес $Y_t = (Z_t, X_t)$ има мартингалну репрезентацију. $\Box$

На основу својства мартингалне репрезентације сваки мартингал одговарајуће филтрације може бити јединствено представљен као стохастички интеграл у односу на локалан мартингал, за одговарајући предвидив процес. Овај концепт има примену у стохастичкој контроли, филтрирању и у последње време у економији трговања акцијама.

Најважнији пример мартингалне репрезентације је Винеров процес. Овде су презентовани примери локалних мартингала, чије трајекторије имају скокове и који имају мартингалну репрезентацију.

**Пример 4.1.** ( [51]) Нека је дата структурна једначина Емерија (M. Emery) (видети [51])

$$d[X, X]_t - t = \int_0^t H_s dX_s \tag{4.7}$$

за које је $X_0 = 0$ и компензатор (compensator) од $[X, X]_t$ је процес $A_t = t$. Нека је дата једначина (4.7) која је сада дата у форми која подсећа на диференцијалну једначину

$$d[X, X]_t = dt + \phi(X_{t-})dX_t. \tag{4.8}$$

С обзиром, да још увек није дефинисан простор вероватноћа, једини могућ начин интерпретације једначине (4.8) је преко слабог решења. То значи да постоји простор вероватноћа са филтрацијом $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ који задовољава уобичајене хипотезе и локалан мартингал $X$ који задовољава једначину (4.8). Ако је решење слабо јединствено, што значи да ако су $X$ и $Y$ решења једначине (4.8), тада процеси $X$ и $Y$ имају исте расподеле. На основу Теореме 4.3 из [41] следи да је $(X, [X, X]_t)$ сопствени узрок.

Ако је $\phi$ афина функција облика $\phi(x) = \alpha + \beta x$ једначина (4.8) постаје

$$d[X, X]_t = dt + (\alpha + \beta X_{t-})dX_t, \tag{4.9}$$

и када је $\beta = 0$ (4.9) постаје

$$d[X, X]_t = dt + \alpha dX_t. \tag{4.10}$$

Када је и $\alpha = 0$ процес $X$ је стандардан Винеров процес и на основу Теореме 4.3 из [41] процес $X$ је сопствени узрок. Даље, на основу Теореме 4.1 процес $X_t$ има мартингалну репрезентацију.

За $\alpha = 1, \beta = 0$ једначина (4.8) је облика

$$[X, X]_t = t + (X_t - X_0) = t + x_t. \tag{4.11}$$

Како је $X$ мартингал коначне варијације, $\Delta X_t = 1$, онда процес $X$ има само скокове који су увек величине 1. Нека је $X_t = N_t - t$ компензован Поасонов процес. Процес $X$ задовољава једначину, а због слабе јединствености то је процес који је сопствени узрок и на основу Теореме 4.1 има мартингалну репрезентацију у односу на своју природну филтрацију.

## 4.4 Узрочност и мартингална репрезентација решења мартингалног проблема

Својство мартингалне репрезентације је блиско повезано са мартингалним проблемом. Заиста, увек када је мера $P$ јединствено решење мартингалног проблема, који је означен са $S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$ (нотација је преузета из [16]), мера $P$ је сигурно екстремна на овом скупу. Дакле, сви случајеви јединствености воде ка својству мартингалне репрезентације (види [19] и [41]).

Ова веза даје нешто другачију теорему од резултата из претходног одељка и важи за све локалне мартингале $M = \{M_t, t \in I\}$.

Потсећања ради, процес $Z$ је семимартингал (са почетним условом $Z_0 = 0$), $X$ је процес решења, $Y = (Z, X)$. Почетни услов је да је $(\mathcal{F}_t^Z)$ под-$\sigma$-алгебра од $(\mathcal{F}_t^Y)$ и $P|_{F^Z} = \dot{P}$ је рестрикција мере $P$ на $(\mathcal{F}_t^Z)$. Тада важи следећа теорема.

**Теорема 4.8.** ([46]) *Нека је процес $Y$ решење мартингалног проблема, уз претпоставку $(\mathcal{F}) = (\mathcal{F}_{\infty-})$. Тада су следећа два тврђења еквивалентна:*

*(1) Сваки локалан мартингал има мартингалну репрезентацију у односу на процес $Y$, чак шта више $(\mathcal{F}_0)$ је садржана у $\sigma$-алгебри која је генерисана са $(\mathcal{F}_t^Z)$ и скуповима $P$-мере нула из $\sigma$-алгебре $(\mathcal{F})$.*

*(2) Процес $Y$ је сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$ или важи релација $\mathbf{F}^Y \mid\!< \mathbf{F}^Y; \mathbf{F}; P$.*

**Доказ**: Прво, нека је задовољена претпоставка да сви локални мартингали имају својство мартингалне репрезентације. Тада, на основу Теореме 4.29 из [19] мера $P$ је екстремна у скупу свих мера које су решења мартингалног проблема $S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$. На основу Теореме 5.4 у [41], $Y = (Z, X)$ је сопствени узрок, што је и требало доказати.

Обрнуто, нека је задовољена претпоставка да је $Y = (Z, X)$ сопствени узрок или (на основу Теореме 4.3 у [41]) скуп објеката $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ је слабо јединствено решење једначине (4.6). Користећи Теорему 5.4 из [41] може се закључити да је мера $P$ екстремно решење мартингалног проблема, тј. $P \in S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$.

Уколико мера $P$ нема својство мартингалне репрезентације тада је, на основу Последице 4.27 из [19], процес $M$ нетривијалан, ограничен мартингал са почетним условом $M_0 = 0$ и може се претпоставити да је $|M| < 1$. Ако, с друге стране, $\sigma$-алгебра $(\mathcal{F}_0)$ није садржана у $\sigma$-алгебри која је генерисана са $\sigma(Y_0)$ и скуповима $P$-мере нула из $(\mathcal{F})$ онда постоји скуп $A \in (\mathcal{F}_0)$ за који важи да $P(A \mid \sigma(Y_0))$ није скоро извесно једнако индикатор функцији $\chi_A$ догађаја $A$. Нека је $M_t = \chi_A - P(A \mid \sigma(Y_0))$, за свако $t \in R_+$, дакле $M$ је мартингал са условом $|M| \leqslant 1$.

Конструисан је мартингал $N = 1 + M$ који задовољава $0 \leqslant N \leqslant 2$. Нека важи $E(N_t) = 1$, за свако $t \in R_+$ и $P(N_\infty = 1) < 1$. Дакле, $Q_1(d\omega) = P(d\omega)N_\infty(\omega)$ дефинише нову вероватноћу $Q_1$ на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ и на основу Теореме 3.24 у [19] процес $Y$ је $Q_1$-семимартингал са локалним карактеристикама $(A, C, \nu)$. Чак шта више важи да је $E(N_\infty \mid \sigma(Y_0)) = E(N_0 \mid \sigma(Y_0)) = 1$, на основу конструкције, па рестрикција мере $Q_1$ на $(\mathcal{F}_t^Z)$ је једнака мери $\dot{P}$ и сходно томе је $Q_1 \in S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$. Коначно, $Q_1 \neq P$ због $P\{N_\infty = 1\} < 1$.

Слично, ако је $N' = 1 - M$, онда $Q_2(d\omega) = P(d\omega)N'_\infty(\omega)$ дефинише решење мартингалног проблема $Q_2 \in S(\sigma(Y_0), Y|\dot{P}, A, C, \nu)$ и $Q_2 \neq P$. Како је $N + N' = 2$, за свако $A \in \mathcal{F}$ важи да је

$$
\begin{aligned}
Q_1(A) + Q_2(A) &= \int_A N_\infty(\omega)P(d\omega) + \int_A N'_\infty(\omega)P(d\omega) = E(N_\infty 1_A) + E(N'_\infty 1_A) \\
&= E(N_\infty)E(1_A) + E(N'_\infty)E(1_A) = P(A) + P(A) = 2P(A).
\end{aligned}
$$

Дакле, $P(A) = \frac{1}{2}(Q_1(A) + Q_2(A))$ и слабо решење $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, X_t, Z_t)$ није слабо јединствено и на основу Теореме 4.3 из [41] то доводи до контрадикције. $\square$

# Глава 5

# Прилози

# Биографија

Драгана Ј. Ваљаревић (рођ. Станојевић) је рођена 01. 08. 1976. године у Призрену. Основну школу и гимназију природно-математичког смера је завршила у Призрену, са одличним успехом. Природно-математички факултет, Одсек математика у Приштини је уписала 1995/96 године, а завршила 19.07.2000. године.

Последипломске магистарске студије је уписала школске 2000/2001. године на Природно-математичком факултету у Крагујевцу, Одсек за вероватноћу и статистику. Магистарску тезу под насловом „УЗРОЧНОСТ И СЛАБА РЕШЕЊА СТОХАСТИЧКИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА“ одбранила је 04.03.2006. године на Природно-математичком факултету у Крагујевцу и тиме стекла звање магистра математичких наука.

Аутор је више радова објављених у међународним и националним часописима. Коаутор је три уџбеника. Тренутно је запослена на Одсеку за математику, Природно-математичког факултета, Универзитета у Приштини са седиштем у Косовској Митровици.

# Summary

## Theory of statistical causality, stochastic differential equations and martingale representation property


One of the important and basic goals of science is to establish cause-effect relations between events. Many discussions were about the concept of causality and how it can be measured. The concept of Granger's causality (Granger, 1969) is very well known in economy and it can be applied in researches. Granger's definition of causality is based on the idea that the present and the future cannot effect the past. About the concept of causality have been discussed for a very long time in all areas of science. In last decade we are dealing with a significant progress.

Today, a concept of causality have a wide application in physical, biological and social sciences, history, medicine, especially in epidemiology, economy and etc.

The area of research of this Phd dissertation is statistical theory of causality and its application on weak solutions of stochastic differential equations and martingale representation property. It have been shown that this concept of causality is equivalent with the concept of weak uniqueness of weak solutions for the stochastic differential equations and extremal solutions of the martingale problem. This concept of causality can be characterized with stopping times and its connection with extremal solution of the stopped martingale problem can be proved, as well as with locally unique weak local solutions.

The concept of causality can be related to the theory of martingales, too. Namely, this concept can be connected with the preservation of the martingale property, orthogonal martingales, stable subspaces as well as with martingale representation property, which have an application, especially in financial mathematics.

In Chapter 1 are given basic definitions from the theory of probability, stochastic processes and an overview of some properties. There are also given definitions of martingales, semimartingales and stochastic integration relative to semimartingales.

In this Chapter is given definition of strong solutions of stochastic differential equations relative to semimartingales, while the definition of weak solution is introduced in Chapter 3. At the end is given definition of causality, which is introduced by P. A. Mykland in [32], and the upgraded form that is used in this dissertation is given by Lj. Petrović in ([11]). And at the end the given definition of causality is characterized with stopping times. Some basic properties of this various concepts of causality are given.

In Chapter 2 is shown how the concept of statistical causality can be applied in Theory of martingales. The martingale property is a property that depends to filtrations and when the information $\sigma$-algebra increases the preservation of that property is strongly connected to the concept of causality.

There can be, also established equivalence between the concept of causality and orthogonality of martingales (see [64]). The same can be proved for local martingales and stopped local martingales, too. The concept of causality can be connected with stable subspaces which contains right continuous modifications of the martingales of the form $M_t = P(A \mid \mathcal{F}_t)$ (see [44]).

In Chapter 3 are given definitions of weak solutions for different types of stochastic differential equations driven with semimartingales. Namely, the given concept of causality is equivalent with weak uniqueness of weak solutions (see [39]). The weak solutions can be characterized with stopping times, so here is investigated connection between local uniqueness for local weak solutions and the concept of causality with stopping times. Here is also, considered the other approach in solving stochastic differential equations, the martingale problem and the results shows that there can be established an equivalence between extremal solution of martingale problem and the concept of causality (see [41]).

In Chapter 4 is considered a connection between the causality concept and martingale representation property relative to different filtrations with special reference relative to already known results. The given results can be then applied to weak solutions of stochastic differential equations driven with semimartingales as well as to martingale problem which is associated to the given equation.

Some parts of this Phd dissertation are published in scientific journals (see [39, 41, 44, 64]).

# Литература

[1] E. Allen, *Modelling with Ito Stochastic Differential Equations*, Springer, New York, (2007).

[2] P. Bremaud, M. Yor, *Changes of Filtrations and of Probability measures*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, Vol.45, (1978), 269–295.

[3] N. Cutland, *Nonstandard Analysis and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, (1988).

[4] C. Dellacherie, P. A. Meyer, *Probability and Potentials*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass, (1966).

[5] J. L. Doob, *Stochastic processes*, Wiley, New York, (1953).

[6] R. J. Elliot, *Stochastic Calculus and Applications*, Springer-Verlag, New York, (1982).

[7] D. Filipović, *Invariant Manifolds for Weak Solutions to Stochastic Equations*, Probability Theory and Related Fields, Vol. 118, No. 3, (2000), 323–341.

[8] J. P. Florens, D. Fougere, *Noncausality in Continuous Time*, Econometrica, Vol. 64, No. 5, (1996), 1195–1212.

[9] J. P. Florens, M. Mouchart, *A Note on Noncausality*, Econometrica, Vol. 50, (1982), 583–591.

[10] L. I. Gal'chuk, *Existence and uniqueness of a Solution for Stochastic Equations with respect to Semimartingales*, Theory Prob. Appl., Vol. 23, No. 4, (1979), 751–763.

[11] J. B. Gill, Lj. Petrović, *Causality and Stochastic Dynamic Systems*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 47, No. 6, (1987), 1361–1366.

[12] C. W. J. Granger, *Investigation Causal Relations by Econometric Models and Cross Spectral Methods*, Econometrica, Vol. 37, (1969), 424–438.

[13] C. W. J. Granger, P. Newbold, *Forecasting Economic Time Series*, Academic Press, New York, (1977).

[14] D. Hoover, J. Keisler, *Adapted Probability Distributions*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 286, No. 1, (1984), 159–201.

[15] D. N. Hoover, *A Characterization of Adapted Distribution*, The Annals of Probability, Vol. 15, No. 4, (1987), 1600–1611.

[16] J. Jacod, *Calcul Stochastique et Problemes de Martingales*, Lecture Notes, Berlin, (1979).

[17] J. Jacod, *Weak and Strong Solutions of Stochastic Differential Equations*, Stochastics, Vol. 3, (1980), 171–191.

[18] J. Jacod, J. Memin, *Existence of Weak Solutions for Stochastic Differential Equation with Driving Semimartingales*, Stochastics, Vol. 4, (1981), 317–337.

[19] J. Jacod, A. N. Shiryaev, *Limit theorems for stochastic processes*, Springer Verlag, Berlin, (1994).

[20] J. Kallsen, *Semimartingale Modelling and Finance, doctoral dissertation, Mathematichen Fakultat*, der Albert-Luqwigs-Universitata Freiburg i Br., (1998).

[21] I. Karatzas, S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, New York, (1988).

[22] T. Kurtz, P. Protter, *Limit Theorems for Solutions of Stochastic Equations I*, CIME School in Probability, Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1627, (1996), 1–41.

[23] V. A. Lebedev, *On the Existence of Weak Solutions for Stochastic Differential Equations with Driving Martingales and Random Measures*, Stochastics, Vol. 9, (1983), 37–76.

[24] V. A. Lebedev, *Behavior of Random Measures Under Filtration Change*, Theory Prob. Appl., Vol. 40, (1997), 645–652.

[25] R. S. Liptser, A. N. Shiryaev, *Statistics of Random Processes I*, Springer-Verlag, New York, (1977).

[26] A. Lindquist, G. Picci, G. Ruckebush, *On Minimal Splitting Subspaces and Markovian Representations*, Math. Syst. Theory, Vol. 12, (1979), 271–279.

[27] P. Medvegyev, *Stochastic Integration Theory*, Oxford University Press, Oxford, (2007).

[28] M. Meyer, *Continuous Stochastic Calculus with Applications to Finance*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, (2000).

[29] J. R. McCrorie, M. J. Chambers, *Granger causality and sampling of economic processes*, Journal of Econometrics, Vol. 132, (2006), 311–336.

[30] P. A. Mykland, *Statistical Causality*, Statistical Report, No. 14, University of Bergen, (1986).

[31] P. A. Mykland, *The Equivalence between Causality, Uniqueness and Martingale Representation*, University of Bergen, (1986).

[32] P. A. Mykland, *Stable subspaces over regular solutions of martingale problems*, University of Bergen, Statistical Report, No. 15, (1986).

[33] J. Pellaumail, *Weak solutions for semimartingales*, Canad. J. Math., Vol. 33, (1981), 1165-1181.

[34] Lj. Petrović, *Uzročnost i markovsko svojstvo slučajnog procesa*, doktorska disertacija, (1988).

[35] Lj. Petrović, *Causality and Stochastic Realization Problem*, Publ. Inst. Math., (Beograd), Vol. 45, No. 59, (1989), 203–212.

[36] Lj. Petrović, *Causality and Markovian Representations*, Statistics and Probability Letters, Vol. 29, (1996), 223–227.

[37] Lj. Petrović, *Causality and Markovian Reductions and Extensions of a Family of Hilbert Spaces*, J. Math. Systems Estimat. Control, Vol. 8, No. 4, (1998), 1–12.

[38] LJ. Petrović, *Uzročnost i markovsko svojstvo*, monografija, Beograd, (2001).

[39] Lj. Petrović, D. Stanojević, *Some Models of Causality and Weak Solutions of Stochastic Differential Equations With Driving Semimartingales*, Fac. Univ., Vol. 20, (2005), 103–112.

[40] Lj. Petrović, *Markovian Extensions of a Stochastic Process*, Statistics and Probability Letters, Vol. 78, (2008), 810–814.

[41] Lj. Petrović, D. Stanojević, *Statistical Causality, Extremal Measures and Weak Solutions of Stochastical Differential Equations With Driving Semimartingales*, J. Math. Model. Algor., Vol. 9, (2010), 113–128.

[42] Lj. Petrović, S. Dimitrijević, *Statistical Causality, and Adapted Distribution*, Czechoslovakian Mathematical Journal, Vol. 61, No. 138, (2011), 827–843.

[43] Lj. Petrović, S. Dimitrijević, *Invariance of statistical causality under convergence*, Statistic and Probability Letters, Vol. 81, (2011), 1445–1448.

[44] Lj. Petrović, D. Valjarević, *Statistical Causality and stable subspaces of $H^p$*, Bull. Aust. Math. Soc., doi: 10.1017/S0004972712000482, (2012).

[45] Lj. Petrović, S. Dimitrijević, D. Valjarević, *Some generalizations of Granger's causality in continuous time*, submitted for publication.

[46] Lj. Petrović, D. Valjarević, *Statistical causality and martingale representation property with application to stochastic differential equations*, submitted for publication.

[47] Lj. Petrović, D. Valjarević, *Statistical causality, martingale problems and local uniqueness*, submitted for publication.

[48] Z. R. Pop-Stojanović, *On McShane's belated stochastic integral*, SIAM. J. Appl. Math., Vol. 22, (1972), 87–92.

[49] Z. R. Pop-Stojanović, *Stochastic differential equations, linear filtering and chaos expansion*, Stochastic Processes in astrophysics, (1993), 8–12.

[50] Z. R. Pop-Stojanović, *Applications of slowly varying functions in treatments of a subordinated Brownian motion process*, Seminar iz stohastike, PMF, Niš, oktobar, (2008).

[51] P. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2004).

[52] D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer-Verlag, Berlin, (2005).

[53] L. C. G. Rogers, D. Williams, *Diffusion, Markov Processes and Martingales*, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).

[54] L. C. G. Rogers, *The Origins of risk-neutral pricing and Black-Scholes formula*, Preprint, University of Bath, (2005).

[55] H. J. Royden, *Real Analysis*, Collier Macmillan, New York, (1968).

[56] Yu. A. Rozanov, *Theory of Innovation Processes*, Monographs in Probability Theory and Mathematical Statistics, Izdat. Nauka, (1974), Moscow, (1974).

[57] Yu. A. Rozanov, *Innovation Processes*, V. H. Winston and Sons, New York, (1977).

[58] Yu. A. Rozanov, *Markov Random Fields*, Springer-Verlag, Berlin, New York, Heidelberg, (1982).

[59] A. Skorokhod, *On Stochastic Differential Equations in a Configuration Space*, Georegian Mathematical Journal, Vol. 8, No. 2, (2001), 389–400

[60] D. Stanojević, *Uzročnost i slaba rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina*, Magistarska teza, Kragujevac, (2005).

[61] D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, (1979).

[62] D. W. Stroock, M. Yor, *On Extremal Solutions of Martingale Problems*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., Vol. 13, (1980), 95–164.

[63] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, (2008).

[64] D. Valjarević, Lj. Petrović, *Statistical causality and orthogonality of local martingales*, Stat. Probabil. Lett., Vol. 82, (2012), 1326–1330.