УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ
ФАКУЛТЕТ

Слађана Димитријевић

СТАТИСТИЧКА ТЕОРИЈА УЗРОЧНОСТИ У НЕПРЕКИДНОМ СЛУЧАЈУ

Докторска дисертација

Крагујевац, 2013.

ИДЕНТИФИКАЦИОНА СТРАНИЦА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I. Аутор
Име и презиме: Слађана Димитријевић
Датум и место рођења: 19.07.1975. године, Крагујевац
Садашње запослење: асистент на Природно-математичком факултету, Универзитет у Крагујевцу
II. Докторска дисертација
Наслов: Статистичка теорија узрочности у непрекидном случају
Број страница: 81
Број слика: 1
Број библиографских података: 86
Установа и место где је рад израђен: Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Научна област (УДК): 51 - Математика (Теорија вероватноће)
Ментор: Др Љиљана Петровић
III. Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 09.04.2012.
Број одлуке и датум прихватања докторске дисертације:
Комисија за оцену подобности теме и кандидата: Др Љиљана Петровић, редовни професор Економског факултета у Београду Др Светлана Јанковић, редовни професор Природно-математичког факултета у Нишу Др Дејан Бојовић, ванредни професор Природно-математичког факултета у Крагујевцу
Комисија за оцену и одбрану докторске дисертације: Др Љиљана Петровић, редовни професор Економског факултета у Београду Др Светлана Јанковић, редовни професор Природно-математичког факултета у Нишу Др Дејан Бојовић, ванредни професор Природно-математичког факултета у Крагујевцу
Датум одбране дисертације: . .2013.

Садржај

Предговор **4**

1 Основни појмови теорије случајних процеса **6**

1.1 Случајни процеси 7

1.2 Времена заустављања 12

1.3 Условно математичко очекивање 13

1.4 Условна независност 16

1.5 Неке класе случајних процеса 17

1.6 Процес Брауновог кретања 21

1.7 Процес фракталног Брауновог кретања 23

2 Познати концепти узрочности **27**

2.1 Статистичко дефинисање узрочности 28

2.2 Узрочност за случајне процесе са дискретним параметром 29

2.2.1 Гренџерова и Симсова узрочност 29

2.2.2 p-узрочност 31

2.2.3 Графичко представљање узрочности 33

2.3 Узрочност за случајне процесе са непрекидним параметром 34

2.3.1 Микландов приступ 34

2.3.2 Узрочност између Хилбертових простора 36

2.3.3 Тренутна и глобална, слаба и јака узрочност 37

2.3.4 Узрочност и декомпозија Дуб-Мејера 41

3 Уопштење Гренцерове нелинеарне узрочности на случајне процесе са непрекидним параметром **43**

3.1 Уопштење Гренцерове дефиниције узрочности на случајне процесе са непрекидним параметром 43

3.2 Узрочност и времена заустављања 46

3.3 Узрочност и конвергенције 50

3.4 s-узрочност 55

4 Узрочност и адаптиране расподеле случајних процеса **60**

4.1 Адаптиране расподеле 60

4.2 Веза узрочности и адаптираних расподела 65

4.2.1 Примена узрочности на стохастичке диференцијалне једначине 70

Литература **73**

Додатак **79**

Предговор

Ова докторска дисертација представља обједињени приказ резултата насталих током рада под менторством професора Љиљане Петровић. Дисертација је настала као резултат истраживања у оквиру области Статистичке теорије узрочности и специјално је посвећена изучавању ове области у непрекидном случају. Наиме, у последњих неколико деценија постоје константни напори да се откривање узрочно-последичних релација што више операционализује и формализује кроз одговарајуће математичке моделе, што је и условило настајање Статистичке теорије узрочности, која се пре свега ослања на појмове и апаратуру Теорије вероватноће, Статистике и Стохастичке анализе. У оквиру саме области битно је развијенији део који се односи на дискретан случај, тј. на случајне процесе са дискретним параметром. Међутим, како неке појаве природно намећу потребу за разматрањем непрекидног случаја, тј. за формирањем теорије узрочности за случајне процесе са непрекидним параметром, циљ ове дисертације је управо и био проширивање постојећих и добијање нових резултата који се односе на непрекидан случај.

Истраживања су фокусирана на уопштавање већ постојећих концепата узрочности, тако да они обухвате и филтрације повезане са временима заустављања, као и на испитивање особина тих концепата везаних за неке типове конвергенција. Такође, пажња је била усмерена и на повезевање узрочности са специфичним концептом еквиваленције случајних процеса.

Дисертација је организована у четири главе и то на следећи начин. У Глави 1 је дат кратак преглед основних појмова Теорије случајних процеса који су неопходни за касније излагање.

У Глави 2 је дат преглед познатих резултата Теорије узрочности, како у дискретном тако и у непрекидном случају, који су послужили као полазна основа за истраживања у оквиру ове дисертације. Ту су побројани пре свега резултати који се ослањају на концепт Грејџерове узрочности, јер је уопштење тог концепта и његово прилагођавање непрекидном случају и био циљ ове дисертације.

Оригинални резултати дисертације изложени су у главама 3 и 4. У оквиру Главе 3 су приказани новоуведени концепти узрочности у непрекидном случају, који су засновани на Гренџеровој дефиницији узочности, као и њихове особине.

У делу 3.2 је приказан нов концепт узрочности у непрекидном случају који је сродан већ познатим уопштењима Гренџерове узрочности у непрекидном случају, али је специјално погодан за разматрање у случају заустављених процеса, тј. блиско је повезан са временима заустављања. У делу 3.3 доказана је инваријантност узрочности под одговарајућим типовима конвергенција, што је посебно битно с обзиром да се у пракси најчешће посматрају дискретизације случајних процеса са непрекидним параметром. У делу 3.4 описан је специфичан концепт узрочности који узима у обзир само део прошлости случајног процеса коначне дужине. Део оригиналних резултата ове главе је публикован у радовима [66] и [68]. Један део резултата се налази на рецензији ([69]), а мањи део је у фази припреме за слање.

Резултати дати у Глави 4 повезују разматрани концепт узрочност са специфичним концептом еквивалентности случајних процеса, који се своди на то да посматрани процеси имају исту адаптирану расподелу (исти адаптирани закон). Испоставља се да узрочност може да помогне успостављању релације еквиваленције између одговарајућих процеса, али и да се особина узрочности преноси у случају еквиваленције у разматраном смислу. Оригинални резултати ове главе су публиковани у раду [67].

Сва тврђења наведена у дисертацији која су преузета из литературе дата су са одговарајућим референцама, а без доказа.

* * *

Овом приликом желим посебно да се захвалим свом ментору, професору др Љиљани Петровић, на свесрдној помоћи која је присутна од почетка наше сарадње, а која је пресудно утицала на израду ове дисертације. Такође, желим да се захвалим и професору др Светлани Јанковић, њени савети и подршка су ми пуно значили. Поред тога, велику захвалност дугујем и својим колегама из Института за математику и информатику који су увек били ту када ми је помоћ била потребна. Позитивна атмосфера у којој радимо је увек била један од главних покретача за мој рад. И на крају, све би било много другачије, али не боље и не лепше, да уз мене нису били моји најмилији. Хвала им на томе!

Крагујевац, фебруар 2013. *Слађана Димитријевић*

Глава 1

Основни појмови теорије случајних процеса

Случајни процеси представљају математичку апстаркцију емпиријских процеса чије понашање је у складу са законима Теорије вероватноће. На пример, у току неког временског интервала I посматрамо одређено обележје X неког физичког система, при чему вредност тог обележја $X(t)$ у тренутку t није унапред одређена, већ је случајна променљива. Тада се скуп свих случајних променљивих $X(t)$, $t \in I$, може посматрати као случајна величина која се мења у времену, тј. може се сматрати да је $X(t)$, $t \in I$, једна случајна функција времена. У том случају за $X = \{X_t = X(t), t \in I\}$ се каже да је случај процес.

Убрзо по аксиоматизацији Теорије вероватноће од стране Колмогорова 1933. године са развојем је почела и Теорија случајних процеса. Дуб (Doob) је 1953. године написао прву књигу, [12], која је на систематски начин обрадила ову тематику, а до данас је објављено још много књига на ову тему.

Теорија случајних процеса је нашла примену у разним областима науке и технике, а пре свега код система за управљање и система за праћење физичких објеката чије стање у произвољном тренутку t није познато већ представља случајну величину. Такође, случајни процеси су нашли примену у телекомуникацијама, демографији и многим другим областима. Поред тога, убрзани развој економије у прошлом столећу условио је и развој финансијске математике за коју је такође неопходна Теорија случајних процеса.

У овом поглављу изложени су само основни појмови Теорије случајних процеса који ће касније у дисертацији бити коришћени. Више детаља може се наћи, на пример, у књигама [12, 45, 85, 53, 46].

1.1 Случајни процеси

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ произвољан простор вероватноћа. Подсетимо се, $\mathcal{F}$ је σ-алгебра подскупова скупа Ω, тј. $\mathcal{F}$ је σ-алгебра случајних догађаја. Даље у дисертацији, увек ћемо подразумевати да је то комплетан простор вероватноћа, тј. простор вероватноћа такав да за све скупове $B \in \mathcal{F}$ такве да је $P(B) = 0$ и све $A \subseteq B$ важи $A \in \mathcal{F}$.

Под **случајним процесом** се подразумева фамилија случајних променљивих $\{X(t, \omega),\ t \in I, \omega \in \Omega\}$ дефинисаних на истом простору вероватноћа које имају следеће две особине:

1) за свако фиксирано $t \in I$, $X(t, \omega)$ је мерљива функција од $\omega \in \Omega$, односно случајна променљива;
2) за сваки фиксиран исход $\omega \in \Omega$, $X(t, \omega)$ је реална функција од $t \in I$.

За фиксирано $\omega \in \Omega$ величина $X(t, \omega) = X(t)$ (функција времена) се назива **трајекторија** или реализација која одговара елементарном догађају ω. Фазни простор сваке случајне величине $X_t = X(t)$ у том случају је $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, јер је за свако t простор вредности случајног процеса скуп реалних бројева. Стога, простор $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ називамо фазним простором случајног процеса. Скуп I називамо параметарским или индексним скупом.

Дефиниција 1.1. *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа и I скуп вредности параметра t. Једнодимензионалан случајан процес X на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ са фазним простором $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ и индексним скупом I је фамилија $X = \{X_t, t \in I\}$ мерљивих функција $X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$.*

Индексни скуп може бити подскуп целих, реалних или комплексних бројева. Он може бити једнодимензионалан или вишедимензионалан. У односу на природу индексног скупа разликујемо следеће случајеве:

- када се скуп I састоји само од једне тачке, тада је $X = X(t)$ **случајна променљива**;
- ако је I скуп са коначно много елемената, тада је $X = \{X_t,\ t \in I\}$ фамилија коначно много случајних променљивих;
- ако је I пребројив скуп, тада се фамилија $X = \{X_t,\ t \in I\}$ назива **случајан процес са дискретним параметром** или низ случајних променљивих;
- када је I интервал реалних бројева, тада се фамилија $X = \{X_t,\ t \in I\}$ назива **случајан процес са непрекидним параметром**.

Параметар t се најчешће тумачи као време, јер се углавном изучавају процеси који су везани за време. Уобичајено је да скуп I буде подскуп скупа реалних бројева (интервал реалних бројева), а најчешће је $I = [0, +\infty)$, иако у општем случају ово не мора да важи.

Један од централних појмова ове дисертације је појам филтрације. Заправо, истраживања у оквиру ове дисертације се пре свега односе на испитивање особина случајних процеса које су везане за филтрације.

Дефиниција 1.2. *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа и $I \subseteq \mathbb{R}$. Филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ је фамилија под-σ-алгебри од $\mathcal{F}$ која је неопадајућа као функција од t, тј. за коју важи $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ за $s \leqslant t$.*

Дефиниција 1.3. *Филтрација $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \in I\}$ је подфилтрација филтрације $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ или филтрација $\mathbf{G}$ је потчињена филтрацији $\mathbf{F}$ (у ознаци $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$) ако је за свако $t \in I$ испуњено $\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t$.*

Дефиниција 1.4. *Филтрација $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t, t \in I\}$ је стохастички еквивалентна или једнака филтрацији $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ (у ознаци $\mathbf{G} = \mathbf{F}$* с.и.*) ако је за свако $t \in I$ испуњено $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t$* с.и.

Надаље ће се користити ознака $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, а подразумева се да $t \in I \subseteq \mathbb{R}$. Такође, ради једноставнијег записа, користе се и следеће ознаке:

- $\mathcal{F}_\infty$ је најмања σ-алгебра која садржи све $\mathcal{F}_t$, $t \in I$, тј.
$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \in I} \mathcal{F}_t \,,$$
без обзира да ли је $\sup I = +\infty$ или $\sup I < +\infty$);
- $\mathcal{F}_{t+}$ је σ-алгебра догађаја који следе одмах по тренутку t, тј.
$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s \,;$$
- $\mathcal{F}_{t-}$ је σ-алгебра догађаја који претходе тренутку t, тј.
$$\mathcal{F}_{t-} = \bigvee_{s < t} \mathcal{F}_s \,.$$

Дефиниција 1.5. *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа и $I \subseteq \mathbb{R}$. Филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ је комплетна ако је σ-алгебра $\mathcal{F}$ комплетна и ако свака σ-алгебра $\mathcal{F}_t$ садржи све P-нула скупове из $\mathcal{F}$.*

У Теорији вероватноће модел за временски завистан систем је уређена четворка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, где је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа, а $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \in I\}$ је „оквирна” филтрација. То значи да $\mathcal{F}_t$ представља скуп свих случајних догађаја посматраних до тренутка t, то јест $\mathcal{F}_t$ садржи све могуће информације о моделу до тренутка t. Надаље у дисертацији се подразумева да све посматране филтрације задовољавају „уобичајене услове”, тј. да су непрекидне здесна и да је сваки њихов елемент комплетна σ-алгебра.

За нас је посебно битан појам природне или канонске филтрације случајног процеса, тј. филтрације која је индукована датим процесом.

Дефиниција 1.6. *Природном филтрацијом процеса $X = \{X_t, t \in I\}$ назива се филтрација $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X, t \in I\}$, где је $\mathcal{F}_t^X$ најмања σ-алгебра у односу на коју су све случајне променљиве X_s, $s \leqslant t$, мерљиве.*

Филтрације могу бити индуковане и са више процеса. На пример, филтрација индукована процесима X и Y обележава се са $\mathbf{F}^{X,Y} = \{\mathcal{F}_t^{X,Y}\}$, при чему је $\mathcal{F}_t^{X,Y} = \mathcal{F}_t^X \bigvee \mathcal{F}_t^Y$.

Једна од битних карактеристика случајних процеса јесте мерљивост.

Дефиниција 1.7. *Случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$ дефинисан на простору $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ је мерљив ако је за сваки скуп $B \in \mathcal{B}$ реалне осе $\mathbb{R}$ испуњено*

$$\{(\omega, t) : X(t, \omega) \in B\} \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}(I),$$

где је $\mathcal{B}(I)$ σ-алгебра Борелових скупова на I.

Следећа теорема илуструје значај особине мерљивости неког процеса, задатог на комплетном простору вероватноћа.

Теорема 1.1. (Фубини) *Нека је $X = \{X_t, t \in I\}$ мерљив реалан случајан процес дефинисан на простору $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тада важе следећа тврђења:*

1) *скоро све трајекторије процеса X су мерљиве функције од t (у односу на $\mathcal{B}$);*
2) *ако EX_t постоји за свако $t \in I$, онда је $m(t) = EX_t$ мерљива функција од t;*
3) *ако је S мерљив подскуп од I и $\int_S E|X(t)|dt < \infty$, онда је*

$$\int_S |X(t)|dt < \infty \quad P\text{-с.и.},$$

тј. скоро све трајекторије $X(t, \omega) = X(t)$ су интеграбилне на скупу S и

$$\int_S EX(t)dt = E\int_S X(t)dt.$$

Тема ове дисертације је уско повезана са појмом адаптираности случајног процеса на дату филтрацију.

Дефиниција 1.8. *Случајан процес* $X = \{X_t, t \in I\}$ *дефинисан на простору* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *је адаптиран у односу на филтрацију (сагласан са филтрацијом)* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ *ако је за свако* $t \in I$ *случајна променљива* X_t $\mathcal{F}_t$*-мерљива.*

Често се, једноставности ради, ова особина записује са $X = (X_t, \mathcal{F}_t), t \in I$, и каже се да је процес $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран или $(\mathcal{F}_t)$-сагласан. Лако се може закључити да је процес X $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран ако и само ако је $\mathbf{F}^{\mathbf{X}} \subseteq \mathbf{F}$. Такође, ако је процес X $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран, онда је адаптиран и на сваку филтрацију $\mathbf{G}$, којој је филтрација $\mathbf{F}$ потчињена.

Непрекидност је једна од веома битних карактеристика за функције. Слично је и са случајним процесима. У Теорији случајних процеса разматра се неколико типова непрекидности.

Дефиниција 1.9. *Случајан процес* $X = \{X_t, t \in I\}$ *је непрекидан (слева, здесна), на скупу* $S \subseteq I$ *ако су скоро све његове трајекторије непрекидне (слева, здесна) за свако* $t \in S$.

Дефиниција 1.10. *Случајан процес* $X = \{X_t, t \in [a, b]\}$ *је без тачака прекида друге врсте ако све његове трајекторије имају леву и десну граничну вредност за свако* $t \in (a, b)$*, десну граничну вредност у тачки* a *и леву граничну вредност у тачки* b.

Дефиниција 1.11. *Случајан процес* $X = \{X_t, t \in I\}$ *је стохастички непрекидан у тачки* $t_0 \in I$*, ако је испуњено*

$$X_t \xrightarrow{P} X_{t_0}, \quad t \to t_0,$$

тј. ако за свако $\varepsilon > 0$ *важи*

$$P\{\omega : |X_t - X_{t_0}| \geqslant \varepsilon\} \to 0, \quad t \to t_0.$$

Ако је случајан процес стохастички непрекидан у свакој тачки интервала $[a, b]$*, каже се да је стохастички непрекидан на* $[a, b]$.

За стохастички непрекидан процес каже се и да је непрекидан у вероватноћи.

Дефиниција 1.12. *Случајан процес* $X = \{X_t, t \in I\}$ *је непрекидан у средњем реда* p *у тачки* $t_0 \in I$ *ако је испуњено*

$$E|X_t - X_{t_0}|^p \to 0, \quad t \to t_0.$$

Ако је случајан процес непрекидан у средњем реда p *у свакој тачки интервала* $[a, b]$*, каже се да је непрекидан у средњем реда* p *на* $[a, b]$.

Специјално, ако је у претходној дефиницији $p = 2$ користи се назив средње квадратно непрекидан.

Ако је случајан процес непрекидан у средњем реда p, тада је он непрекидан и у средњем реда q, за $0 \leqslant q \leqslant p$.

Дефиниција 1.13. *Случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$ је непрекидан скоро извесно (непрекидан са вероватноћом 1) на интервалу $[a, b] \subseteq I$ ако су скоро све његове трајекторије непрекидне, тј. ако је*

$$P\{\omega : \lim_{t \to t_0} |X_t - X_{t_0}| = 0\} = 1.$$

За испитивање скоро извесне непрекидности често се користи следећа теорема Колмогорова.

Теорема 1.2. (Колмогоров) *Ако за случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$ постоје позитивни бројеви p, q и K такви да за произвољне временске тренутке $t, s \in [a, b]$ важи*

$$E|X_t - X_s|^p \leqslant K|t - s|^{1+q},$$

онда је случајан процес X скоро извесно непрекидан на интервалу $[a, b]$.

Однос између ових врста непрекидности је исти као однос одговарајућих конвергенција низова случајних променљивих. Ако је случајан процес непрекидан у средњем реда p, тада је он и стохастички непрекидан. Ако је случајан процес скоро извесно непрекидан, тада је он и стохастички непрекидан.

За стохастичку анализу су веома битне и такозване càdlàg[1] функције. То су функције које су у свакој тачки непрекидне здесна и имају свуда леву граничну вредност. Фамилија càdlàg функција на задатом домену назива се Скороходов простор (engl. Skorokhod space). Овај простор представља природан и погодан формализам за описивање трајекторија случајних процеса који дозвољавају скокове, као што су: трајекторије Пуасоновог процеса, Левијевог процеса, мартингала и семимартингала, емпиријских функција расподела, трајекторија дискретизација случајних процеса итд. Када на Скороходовом простору уведемо супремум норму добијамо несепарабилан Банахов простор. Зато су за Теорију вероватноће јако битне сепарабилне топологије које је увео Скороход у раду [77]. Међу тим топологијама најфинија је J_1-топологија (најближа је униформној топологији). Нека је $\mathbb{D}$ Скороходов простор функција $x : [0, 1] \to [0, 1]$. Тада низ $\{x_n\}$, $x_n \in \mathbb{D}$, конвергира ка $x_0 \in \mathbb{D}$ у J_1-топологији ако постоји низ растућих хомеоморфизама $\lambda_n : [0, 1] \to [0, 1]$ такав да

$$\sup_{t \in [0,1]} |\lambda_n(t) - t| \to 0 \ \text{ и } \ \sup_{t \in [0,1]} |x_n(\lambda_n(t)) - x_0(t)| \to 0 \ \text{ кад } \ n \to +\infty.$$

Када је функција x_0 непрекидна конвергенција у J_1-топологији је еквивалентна униформној конвергенцији.

Дефиниција 1.14. *Случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$ је càdlàg ако су његове трајекторије càdlàg функције скоро извесно.*

[1] Скраћеница пореклом из француског језика од „**c**ontinue **à** **d**roite, **l**imite **à** **g**auche“. Поред ове користе се скраћенице настале у енглеском језику: RCLL од „**r**ight **c**ontinuous with **l**eft **l**imits“, или corlol од „ **c**ontinuous **o**n (the) **r**ight, **l**imit **o**n (the) **l**eft”.

1.2 Времена заустављања

Времена заустављања (engl. stoping time) су јако битна класа случајних променљивих, а посебно велику улогу имају у Теорији мартингала. Покушаћемо укратко да објаснимо мотиве за увођење овог појма и његову примену. Замислимо да параметар t заиста представља време, а σ-алгебра $\mathcal{F}_t$ се посматра као акумулирана информација до тренутка t. Такође, замислимо да нас интересује дешавање одређеног феномена (земљотрес одређене јачине, број потрошача који су поручили робу преко одређене суме итд.). У том случају посебна пажња се поклања тренутку $T(\omega)$ у коме се феномен десио по први пут. Природно је очекивати да се догађај $\{\omega \,|\, T(\omega) \leqslant t\}$, који се реализовао ако и само ако се феномен десио пре или у тренутку t, налази у информацији акумулираној кроз време до тренутка t. На основу ових интуитивних идеја формулисан је прецизан математички модел.

Дефиниција 1.15. *Нека* $(\Omega, \mathcal{F})$ *мерљив простор.* $\mathcal{F}$*-мерљива функција* $T : \Omega \to [0, +\infty]$ *назива се случајно време.*

Дефиниција 1.16. *Нека је на мерљивом простору* $(\Omega, \mathcal{F})$ *задата филтрација* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$. *Случајно време* T *је време заустављања у односу на филтрацију* $\mathbf{F}$*, ако за свако* $t \in [0, +\infty)$ *догађај* $\{T \leqslant t\}$ *припада* σ*-алгебри* $\mathcal{F}_t$.

Дакле, време заустављања T је случајно време такво да догађај „T се десио до тренутка t" (за свако t) зависи само од прошлости до тренутка t, а не зависи од било какве информације о будућности.

Пример 1.1. Елементарни примери времена заустављања су:

1) константна случајна променљива $T = t$, $t \in I$, је време заустављања;

2) ако је T време заустављања и $s \in I$, онда је и $T + s$ време заустављања.

На основу датог примера очигледно је да је време заустављања уопштење детерминистичког времена. Стога, замена параметра t код случајних процеса временима заустављања представља својеврсну генерализацију.

Теорема 1.3. ([16]) *Нека су* S *и* T *времена заустављања. Тада су и* $S \wedge T$ *и* $S \vee T$ *времена заустављања. Ако је* $\{T_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *низ времена заустављања, онда су и* $\bigwedge_n T_n$ *и* $\bigvee_n T_n$ *времена заустављања.*

Дефиниција 1.17. ([16]) *Нека је* T *време заустављања у односу на филтрацију* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$. *Тада је* $\mathcal{F}_T$, σ*-алгебра догађаја који се дешавају до времена* T, σ*-алгебра догађаја* A *из* $\mathcal{F}$ *таквих да за свако* t *важи*

$$A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Напомена 1.1. Очигледно је да је T $\mathcal{F}_T$-мерљиво. Приметимо да ако је $T = t$, онда је $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$.

Теорема 1.4. ([16]) *Нека су S и T времена заустављања.*

1) *Ако је $S \leqslant T$ скоро извесно, онда је $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.*

2) *Ако $A \in \mathcal{F}_S$, онда је $A \cap \{S \leqslant T\} \in \mathcal{F}_T$.*

Теорема 1.5. ([16]) *Ако су S и T времена заустављања, онда је $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$.*

Теорема 1.6. ([16]) *Нека су S и T времена заустављања. Тада догађаји $\{S < T\}$, $\{S = T\}$ и $\{S > T\}$ припадају обема σ-алгебрама $\mathcal{F}_S$ и $\mathcal{F}_T$.*

Дефиниција 1.18. ([16]) *Време заустављања T је предвидиво (predictable) уколико постоји низ времена заустављања $\{T_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, такав да важи:*

1) *$\{T_n(\omega)\}$ је растући низ на $[0, +\infty)$ с.и. и $\lim_n T_n(\omega) = T(\omega)$ с.и.;*

2) *$T_n(\omega) < T(\omega)$ с.и. за свако n на скупу $\{T > 0\}$.*

Тада кажемо да низ $\{T_n\}$ најављује T.

Пример 1.2. Предвидива времена заустављања се природно појављују у реалности. На пример, замислимо да посматрамо брод који бива насукан на стеновиту обалу. Време T када се брод насукао је време заустављања најављено низом $\{T_n\}$, где је T_n време када је брод од обале био удаљен $\frac{1}{n}$ km.

Напомена 1.2. За свако време заустављања и произвољан реалан број $r > 0$ случајна променљива $T + r$ је време заустављања. Заправо, $T + r$ је предвидиво време заустављања које најављује низ $\{T_n\}$, где је $T_n = T + r\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Према томе, посматрајући низ $\{r_n\}$ такав да је $r_n > 0$ и $\lim_n r_n = 0$, на пример $r_n = \frac{1}{n}$, увиђамо да је свако време заустављања граница опадајућег низа предвидивих времена заустављања. Наравно, у општем случају $T - r$ за $r > 0$ не мора бити време заустављања.

1.3 Условно математичко очекивање

Појам условног математичког очекивања је веома битан за излагање и разумевање Статистичке теорије узрочности, па ће бити детаљно објашњен, почевши од елементарних случајева, а завршивши са условним математичким очекивањем у односу на дату σ-алгебру.

Нека је на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задата функција f са вредностима у скупу $\mathbb{N}$ и нека је

$$A_n = \{\omega \mid f(\omega) = n\} \in \mathcal{F}.$$

Нека је X друга реална случајна променљива дефинисана на Ω. Тада је природно дефинисати условно очекивање од X када је дато f као случајну променљиву Y задату са

$$Y(\omega) = Y_n = \frac{\int_{A_n} X dP}{P(A_n)}, \text{ када је } \omega \in A_n \text{ и } P(A_n) \neq 0,$$

док када $\omega \in A_n$ и $P(A_n) = 0$, $Y(\omega)$ може бити произвољан број (уобичајено узети да је $Y(\omega) = 0$). Слободније говорећи, Y се добија тако што X узима просечну вредност (усредњавањем случајне променљиве X) на скуповима на којима је функција f константна.

Фундаменталан резултат теорије мере, Радон-Никодимова теорема, омогућава да се појам даље генерализује.

Теорема 1.7. (Радон-Никодим) *Ако је $P \ll Q$, тада постоји ненегативна случајна променљива $\xi = \xi(\omega)$, таква да је за свако $A \in \mathcal{F}$ испуњено*

$$P(A) = \int_A \xi(\omega) Q(d\omega).$$

$\mathcal{F}$-мерљива функција $\xi = \xi(\omega)$ је јединствена до на стохастичку еквиваленцију, тј. ако је такође $P(A) = \int_A \eta(\omega) Q(d\omega)$ за $A \in \mathcal{F}$, онда је $\xi = \eta$ $(Q -$ с.и.).

Случајна променљива $\xi(\omega)$ назива се густином мере P у односу на меру Q или Радон-Никодимовим изводом, па се често користи следећа нотација:

$$\xi(\omega) = \frac{dP}{dQ}(\omega).$$

Теорема 1.8. ([16]) *Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа и нека је на њему задата мерљива функција f са вредностима у мерљивом простору $(E, \mathcal{E})$. Нека је Q вероватноћа индукована функцијом f на $(E, \mathcal{E})$, тј. за $A \in \mathcal{E}$ важи*

$$Q(A) = P(f^{-1}(A)).$$

Нека је X P-интеграбилна случајна променљива на $(\Omega, \mathcal{F})$. Тада постоји Q-интеграбилна случајна променљива Y на $(E, \mathcal{E})$ таква да за сваки скуп $A \in \mathcal{E}$ важи

$$\int_A Y(x) dQ(x) = \int_{f^{-1}(A)} X(\omega) dP(\omega). \tag{1.1}$$

Ако Y_1 нека друга Q-интеграбилна случајна променљива на $(E, \mathcal{E})$ која такође задовољава (1.1)*, онда је $Y_1 = Y$* с.и.

Напомена 1.3. Случајна променљива Y, из претходне теореме, често се назива условним очекивањем од X када је дато f. Међутим, како је Y дефинисано само до на скоро извесну еквиваленцију, строго говорећи, сваку функцију која задовољава (1.1) требало би називати верзијом условног очекивања од X.

За истраживања у оквиру ове дисертације најинтересантније је условно очекивање у односу на задату σ-алгебру.

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа, $E \subset \Omega$ и $\mathcal{E}$ под-σ-алгебра од $\mathcal{F}$. Ако је f идентичко пресликавање на Ω, онда је мера Q индукована функцијом f на $(E, \mathcal{E})$ само рестрикција од P на $\mathcal{E}$.

Дефиниција 1.19. ([16]) *Нека је на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ дефинисана реална интеграбилна случајна променљива X и нека је $\mathcal{E}$ под-σ-алгебра од $\mathcal{F}$. Тада је условно очекивање случајне променљиве X у односу на $\mathcal{E}$, у означи $E[X|\mathcal{E}]$, свака $\mathcal{E}$-мерљива интеграбилна случајна променљива Y таква да за свако $A \in \mathcal{E}$ важи*

$$\int_A X(\omega) dP(\omega) = \int_A Y(\omega) dP(\omega).$$

Напомена 1.4. Егзистенција условног математичког очекивања од X у односу на σ-алгебру $\mathcal{E}$, тј. егзистенција случајне променљиве Y из претходне дефиниције, следи на основу Теореме 1.8. Поново због дефинисаности до на стохастичку еквиваленцију прецизно би било рећи да је конкретно Y само једна од верзија условног математичког очекивања случајне променљиве X у односу на σ-алгебру $\mathcal{E}$.

Слободније говорећи, $E[X|\mathcal{E}]$ добијамо усредњавањем X на „грубље” скупове из $\mathcal{E}$ (јер је $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$).

Навешћемо и неколико особина условног математичког очекивања, која се користе у даљем раду. У наредним теоремама подразумева се да су случајне променљиве дефинисане на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и да је $\mathcal{E}$ под-σ-алгебра од $\mathcal{F}$.

Теорема 1.9. ([16]) *Нека су X и Y интеграбилне случајне променљиве, а α, β и γ реалне константе. Тада је*

$$E[\alpha X + \beta Y + \gamma \mid \mathcal{E}] = \alpha E[X|\mathcal{E}] + \beta E[Y|\mathcal{E}] + \gamma \quad \text{с.и.}$$

Теорема 1.10. ([16]) *Нека су X и Y интеграбилне случајне променљиве и нека је $X \leqslant Y$. Тада је*

$$E[X|\mathcal{E}] \leqslant E[Y|\mathcal{E}] \quad \text{с.и.}$$

Теорема 1.11. ([16]) *Нека је $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, растући низ интеграбилних случајних променљивих који конвергира интеграбилној случајној променљивој X. Тада важи*

$$E[X|\mathcal{E}] = \lim_n E[X_n|\mathcal{E}] \quad \text{с.и.}$$

Теорема 1.12. ([16]) *Нека је X интеграбилна случајна променљива. Тада је $X = E[X|\mathcal{E}]$* с.и. *ако и само ако је случајна променљива X $\mathcal{E}$-мерљива.*

Теорема 1.13. ([16]) *Нека су $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$ йод-σ-алгебре од $\mathcal{F}$ шакве да важи $\mathcal{D} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Тада за сваку иншеграбилну случајну йроменљиву X важи*

$$E\left[E[X|\mathcal{E}]|\mathcal{D}\right] = E[X|\mathcal{D}] \quad \text{с.и.}$$

Последица 1.13.1. ([16]) *Нека је $\mathcal{D}$ шривијална σ-алгебра, шј. $\mathcal{D} = \{\emptyset, \Omega\}$. Тада је*

$$E[X|\mathcal{D}] = E[X]$$

и

$$E\left[E[X|\mathcal{E}]|\mathcal{D}\right] = E[E[X|\mathcal{E}]] = E[X].$$

Теорема 1.14. ([16]) *Нека је X иншеграбилна случајна йроменљива и Y $\mathcal{E}$-мерљива случајна йроменљива шаква да је йроизвод XY иншеграбилан. Тада је*

$$E[XY|\mathcal{E}] = YE[X|\mathcal{E}] \quad \text{с.и.}$$

1.4 Условна независност

Условна независност међу σ-алгебрама је фундаменталан појам за заснивање Статистичке теорије узрочности, па је његовом дефинисању и главним резултатима везаним за тај појам посвећено ово поглавље.

Подсетимо се још једном да σ-алгебра представља природну математичку апстракцију за скуп информација. Наиме, σ-алгебра генерисана неком случајном променљивом представља скуп догађаја који се могу описати том случајном променљивом. Свака σ-алгебра се може повезати са скупом свих (мерљивих) функција које је генеришу, па се инклузија $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$ може интерпретирати и као „случајна променљива која генерише σ-алгебру $\mathcal{E}_1$ је функција случајне променљиве која генерише $\mathcal{E}_2$". Коначно, приметимо и да је концепт σ-алгебри камен темељац за све условне појмове, тј. условљавање (engl. conditionig) у Теорији вероватноће.

Нека је $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ произвољан простор вероватноћа и неку су $\mathcal{E}_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ под-σ-алгебре од $\mathcal{E}$. Да истакнемо да је X_i $(i = 1, 2, \dots)$ ограничена реална функција дефинисана на Ω која је $\mathcal{E}_i$-мерљива пишемо једноставно $X_i \in \mathcal{E}_i$.

Дефиниција 1.20. ([19]) *σ-алгебре $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ су условно независне у односу на σ-алгебру $\mathcal{E}_3$ (када је йознаша σ-алгебра $\mathcal{E}_3$), у ознаци*

$$\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_3,$$

ако и само ако је исйуњен један од следећа два еквиваленшна услова:

(i) $(\forall X_1 \in \mathcal{E}_1)\ (\forall X_2 \in \mathcal{E}_2) \quad E(X_1X_2 \mid \mathcal{E}_3) = E(X_1 \mid \mathcal{E}_3)E(X_2 \mid \mathcal{E}_3)$ с.и.

(ii) $(\forall X_1 \in \mathcal{E}_1) \quad E(X_1 \mid \mathcal{E}_2 \vee \mathcal{E}_3) = E(X_1 \mid \mathcal{E}_3)$ с.и.

Непосредном применом дефиниције добија се следеће тврђење.

Теорема 1.15. ([19]) *Ако је* $\mathcal{E}_4 \subset \mathcal{E}_2$ *онда* $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_3$ *имплицира* $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_4 \mid \mathcal{E}_3$.

Следећом теоремом је исказана фундаментална особина условне независности, која се често користи при доказивању других тврђења у којима се наилази на условну независност међу σ-алгебрама.

Теорема 1.16. ([19]) *Следећа три исказа су еквивалентна:*

(i) $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_3$ *и* $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_4 \mid \mathcal{E}_2 \vee \mathcal{E}_3$;

(ii) $\mathcal{E}_1 \perp (\mathcal{E}_2 \vee \mathcal{E}_4) \mid \mathcal{E}_3$;

(iii) $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_4 \mid \mathcal{E}_3$ *и* $\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_3 \vee \mathcal{E}_4$.

Последица 1.16.2. ([19]) *Нека је* $\mathcal{E}_4 \subset \mathcal{E}_2 \vee \mathcal{E}_3$ *и* $\mathcal{E}_5 \subset \mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_3$. *Ако је*

$$\mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_3,$$

онда је

$$(\mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_5) \perp (\mathcal{E}_2 \vee \mathcal{E}_4) \mid \mathcal{E}_3 \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_1 \perp \mathcal{E}_2 \mid \mathcal{E}_3 \vee \mathcal{E}_4 \vee \mathcal{E}_5.$$

Теорема 1.17. ([19]) *Нека су* $\mathcal{E}_1$ *и* $\mathcal{E}_2$ *произвољне* σ*-алгебре и нека је* $\mathcal{E}_3$ σ*-алгебра генерисана фамилијом догађаја* $\mathcal{A}$. *Ако је*

(i) *фамилија* $\mathcal{A}$ *затворена за коначне пресеке и*

(ii) *за свако* $X \in \mathcal{A}$ *важи* $P(X \mid \mathcal{E}_1 \vee \mathcal{E}_2) = P(X \mid \mathcal{E}_2)$,

онда је

$$\mathcal{E}_3 \perp \mathcal{E}_1 \mid \mathcal{E}_2.$$

Више резултата о условној независности може се наћи у [50] и [20].

1.5 Неке класе случајних процеса

У овом поглављу дефинисане су неке класе случајних процеса које се користе у наредним главама.

Једна од једноставнијих, али веома битна класа случајних процеса су они који имаји марковскво својство, тј. марковски случајни процеси или случајни процеси Маркова.

Дефиниција 1.21. ([45]) *Случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$, дат на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, је* ***марковски процес*** *(процес Маркова) у односу на филтрацију $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$, ако је*

$$P(A \cap B \mid X_t) = P(A \mid X_t) P(B \mid X_t) \quad \text{с.и.}$$

за свако $t \in I$, $A \in \mathcal{F}_t$, $B \in \mathcal{F}^X_{[t,\infty)} = \sigma\{X(s), s \geqslant t\}$.

За случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$ каже се да је марковски процес, ако је марковски у односу на филтрацију $\mathbf{F}^X$.

Ако је I интервал реалне осе каже се да је процес X марковски процес у ужем смислу, а ако је дискретан скуп, реч је о ланцу Маркова.

Ови процеси су пре свега нашли примену у описивању стохастичких система „без меморије”, тј. система где је будућност независна од прошлости.

Следећа теорема даје услове за алтернативно дефинисање процеса Маркова.

Теорема 1.18. ([45]) *Следећи искази су еквивалентни.*

(i) *$X = \{X_t, t \in I\}$ је марковски процес у односу на филтрацију $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$.*

(ii) *За свако $t \in I$ и произвољну ограничену $\mathcal{F}^X_{[t,\infty)}-$мерљиву функцију Y важи*

$$E(Y|\mathcal{F}_t) = E(Y|X_t) \quad \text{с.и.}$$

(iii) *За $t \geqslant s \geqslant 0$ и произвољну мерљиву функцију $f(t)$ са $\sup_x |f(x)| < \infty$, важи*

$$E[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = E[f(X_t)|X_s] \quad \text{с.и.}$$

Као критеријум за утврђивање да ли је неки процес марковски може послужити следећа теорема.

Теорема 1.19. ([45]) *Неопходан и довољан услов да би процес $X=\{X_t, t \in I\}$ био марковски је да за сваку (мерљиву) функцију f са особином да је $\sup_x |f(x)| < \infty$ и сваку колекцију $\{t_n\}$, такву да је $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant t$, важи*

$$E[f(X_t) \mid X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}] = E[f(X_t) \mid X_{t_n}].$$

Процеси са независним прираштајима су битна подкласа класе марковских процеса.

Дефиниција 1.22. ([45]) *Случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$ је* ***процес са независним прираштајима*** *ако су случајне величине*

$$X_{t_0},\, X_{t_1} - X_{t_0},\, X_{t_2} - X_{t_1},\, \ldots,\, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

независне за сваки избор временских тренутака $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n$.

Лако се уочава да ако је X случајни процес са независним прираштајима и f функција задата на I, тада је и $Y = \{X_t - f(t), t \in I\}$ процес са независним прираштајима. Стога се често уместо процеса X посматра одговарајући процес Y, где се функција f бира тако да буду задовољене неке унапред захтеване особине процеса, нпр. када је $f(t) = EX_t$, тада је $EY_t = 0$, за свако $t \in I$.

За случајан процес X са независним прираштајима каже се да је хомоген (у односу на време) ако расподеле вероватноћа прираштаја $X_t - X_s$ зависе само од разлике $t - s$. Такви процеси се често називају процесима са стационарним независним прираштајима.

Дефиниција 1.23. ([12]) *Процес $X = \{X_t, t \in I\}$ је **процес са ортогоналним прираштајима** ако је*

$$E|X_t - X_s|^2 < \infty, \ t, s \in I$$

и ако су за било који избор $t_1, t_2, t_3, t_4 \in T$, таквих да је $t_1 < t_2 \leqslant t_3 < t_4$, прираштаји $X_{t_2} - X_{t_1}$ и $X_{t_4} - X_{t_3}$ међусобно ортогонални, тј. ако је

$$E[X_{t_2} - X_{t_1}] \cdot [X_{t_4} - X_{t_3}] = 0.$$

Једна од важнијих класа процеса у Теорији случајних процеса су мартингали. Један од мотива за њихово увођење је био описивање фер хазардне игре, тј. игре у којој ни један од играча нема већу шансу за добитак. Ако са X_n означимо суму новца коју играч има после n партија, онда је игра фер ако је

$$E(X_n \mid X_{n-1}) = X_{n-1} \text{ за } n = 1, 2, \ldots$$

Дефиниција 1.24. ([45]) *Случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$ је **мартингал** у односу на филтрацију $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ ако је:*

(i) *адаптиран на филтрацију $\mathbf{F}$;*

(ii) $E|X_t| < \infty$ *за свако* $t \in I$;

(iii) $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ с.и. *за* $t \geqslant s$, *где* $t, s \in I$.

Теорема 1.20. *Ако је процес $X = \{X_t, t \in I\}$ мартингал, тада је $EX_t = \mathrm{const}$.*

Ако у дефиницији мартингала уместо услова (iii) важи

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) \geqslant X_s \quad \text{с.и.}$$

тада је дати процес **субмартингал**, а ако важи

$$E(X_t|\mathcal{F}_s) \leqslant X_s \quad \text{с.и.}$$

онда је процес **супермартингал**.

Ако је $X = (X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in I$, квадратно интеграбилни мартингал, тј. мартингал са особином да је $\sup_t E|X_t|^2 < \infty$, тада је случајни процес $X^2 = \{X_t^2, t \in I\}$ субмартингал и може се разложити на збир, тј. постоји Дуб-Мејерова декомпозиција тог процеса (engl. Doob-Mayer decomposition),

$$X_t^2 = Z_t + A_t \quad \text{с.и.},$$

где је $Z = (Z_t, \mathcal{F}_t)$ мартингал, а $A = (A_t, \mathcal{F}_t)$ униформно интеграбилан скоро извесно неопадајући случајни процес са почетном вредношћу 0 скоро извесно. Случајни процес A назива се квадратна карактеристика мартингала X.

За стохастичку анализу веома битна класа процеса јесу и локални мартингали. То су случајни процеси који локално имају мартингалну особину, али не нужно и глобално. Наравно, сви мартингали јесу и локални мартингали, док обрнуто не важи.

Дефиниција 1.25. ([45]) *Нека $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа и нека је на њему задата филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$. Тада је $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран случајни процес $X = \{X_t, t \in I\}$ локални мартингал у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ ако постоји низ времена заустављања $\{T_k\}$ (у односу на филтрацију $\mathbf{F}$) такав да:*

(i) *$\{T_k\}$ је скоро извесно растући низ, тј. $P(T_k < T_{k-1}) = 1$;*

(ii) *$\{T_k\}$ је скоро извесно дивергира, тј. $P(T_k \to +\infty$ кад $k \to +\infty) = 1$;*

(iii) *заустављени процес $X^{T_k} = \{X_{t \wedge T_k}\}$ је мартингал у односу на филтрацију $\mathbf{F}$ за свако k.*

Да се докаже да је неки локал мартингал $X = \{X_t\}$ уједно и мартингал довољно је доказати да за свако t важи $E|X_{t \wedge T_k} - X_t| \to 0$ кад $k \to +\infty$.

За стохастичку анализу је веома битна и класа семимартингала, јер је то најшира класа случајних процеса за које се може дефинисати Итоов интеграл. Ове процесе карактерише одговарајућа декомпозиција, они се могу представити као збир локалног мартингала и процеса коначне варијације.

Дефиниција 1.26. ([43]) *Случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$, $I = [0, +\infty)$, задат на простору вероватноћа са филтрацијом $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ је семимартингал ако се може разложити на следећи начин*

$$X = X_0 + M + A,$$

где је X_0 коначна и $\mathcal{F}_0$-мерљива случајна променљива, $M = \{M_t, t \in I\}$ локални мартингал са почетном вредношћу 0, а $A = \{A_t, t \in I\}$ процес коначне варијације.

1.6 Процес Брауновог кретања

Шкотски ботаничар Браун (Robert Brown) 1827. године је посматрајући кроз микроскоп честице полена у води запазио да оне изводе непрекидно хаотично кретање, тј. он је уочио феномен кретања микроскопски мале честице кроз течност, мада није умео да објасни механизам и разлоге ове појаве. Њему у част се такво кретање назива Брауново кретање. Ајнштајн је 1905. године дао математички опис Брауновог кретања полазећи од закона физике и констатујући да до таквог кретања долази због непрекидних судара честица са молекулима флуида. На изучавању Брауновог кретања радило је много математичара и физичара. Најпрецизнији математички модел Брауновог кретања дао је Винер (Norbert Wiener) у својој дисертацији, 1918. године. Често се због тога процес Брауновог кретања назива Винеров процес. У дисертацији ће бити коришћен назив процес Брауновог кретања, јер тај назив преовлађује у коришћеној литератури.

Процес Брауновог кретања је један од највише проучаваних процеса у Теорији случајних процеса, а један од разлога за то лежи у чињеници да је овај процес математички модел за описивање многих физичких и других појава. На пример, ово кретање је кључ за боље разумевање „белог шума", често коришћеног модела за феномене шума у електротехници.

Дефиниција 1.27. ([45]) *Реалан случајан процес $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ је **процес Брауновог кретања са параметром** σ^2 ако испуњава следеће услове:*

(i) $W_0 = 0$ *скоро извесно;*

(ii) W *је процес са независним прираштајима;*

(iii) *прираштаји $W_t - W_s$ имају нормалну расподелу $\mathcal{N}(0, \sigma^2|t-s|)$;*

(iv) *за скоро све $\omega \in \Omega$ функција $W_t = W_t(\omega)$ је скоро свуда непрекидна.*

Уколико је у претходној дефиницији $\sigma^2 = 1$, процес се назива само **процес стандардног Брауновог кретања**.

Поред управо наведене у литератури се може наћи и дефиниција процеса Брауновог кретања која садржи само прве три особине, јер се четврта особина може из њих извести. Међутим, доказ егзистенције процеса Брауновог кретања, као и конструкција овог процеса су знатно лакши ако се полази од дефиниције која укључује и особину (iv), па се тако најчешће и чини.

Из трећег услова у дефиницији Брауновог кретања следи да на интервалу (s, t) расподела прираштаја $W_t - W_s$ не зависи од u, $u < s$, што значи да ако је познато W_s, онда никаква допунска информација о понашању W_{s_1} за $s_1 < s$, не утиче на закон расподеле прираштаја $W_t - W_s$. Дакле, расподела прираштаја

$W_t - W_s$ на интервалу (s, t) не зависи од прошлости, што значи да Брауново кретање има марковско својство, тј. да је процес Маркова.

Теорема 1.21. *Процес Брауновоī креūања* $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ *са ūарамеūром* σ^2 *је марковски ūроцес.*

Такође, битно је уочити да је Брауново кретање процес са ортогоналним прираштајима. Ова особина се користи при дефинисању случајног интеграла по процесу Брауновог кретања, када подинтегрална функција није случајна.

На основу дефиниције процеса Брауновог кретања очигледно је да за свако $t \geqslant 0$ важи:

$$EW_t = 0 \quad \text{и} \quad DW_t = \sigma^2 t.$$

Корелациона функција процеса Брауновог кретања је:

$$K(t, s) = E(W_t - EW_t)(W_s - EW_s) = \sigma^2 \min\{t, s\}.$$

Применом неједнакости Чебишева следи да је процес Брауновог кретања стохастички непрекидан процес у свакој тачки.

Како је $E|W_t - W_s|^4 = 3\sigma^4 |t - s|^2$ применом Теореме 1.2 (Колмогорова) за $p = 4$, $q = 1$ и $K = 3$, следи да је процес Брауновог кретања скоро извесно непрекидан процес.

Нагласимо и то да трајекторије процеса Брауновог кретања немају извод. Прецизније речено, скоро свака трајекторија је скоро свуда недиференцијабилна. Наиме, на основу дефиниције процеса Брауновог кретања важи

$$\frac{W_{t_0+h} - W_{t_0}}{h} \sim \mathcal{N}(0; \frac{\sigma^2}{|h|}) \, .$$

Ако $h \to 0$, лева страна би представљала извод процеса Брауновог кретања у тачки t_0, одакле би следило да тај извод има нормалну расподелу са бесконачном дисперзијом, а таква не постоји. Дакле, иако су трајекторије процеса Брауновог кретања непрекидне у свакој тачки, оне немају извод ни у ком смислу ни у једној тачки. Услед овога је веома тешко графички представити те трајекторије.

Једна од важних особина процеса Брауновог кретања је да оно има неограничену варијацију на сваком коначном интервалу, о чему говори следећа теорема.

Теорема 1.22. *Процес Брауновоī креūања* $W = \{W_t, t \in [a, b]\}$ *има неоīраничену варијацију на било ком инūервалу, ūј. за било које* $A \in \mathbb{R}$ *важи*

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} \mid W_{t_k} - W_{t_{k-1}} \mid > A\right\} \to 1, \ \max \triangle t_k \to 0, \ t_k \in [a, b].$$

Поред претходно наведених особина, процес Брауновог кретања има нека својства, посебно важна у применама, која указују на његову фракталну природу. Наиме сажимањем и инверзијом временског интервала трајекторије задржавају своје особине.

Теорема 1.23. *Ако је $W = \{W_t, t \geqslant 0\}$ процес Брауновог кретања, онда су:*

(i) $U = \{U_t, t \geqslant 0\}$, $U_t = W_{t+s} - W_s$,

(ii) $V = \{V_t, t \geqslant 0\}$, $V_t = cW(t/c^2)$, $c \neq 0$ *(својство множења скаларом) и*

(iii) $Q = \{Q_t, t \geqslant 0\}$, $Q_t = tW(1/t)$, $Q_0 = 0$ с.и. *(својство инверзије)*

такође процеси Брауновог кретања.

Због особине (i) из претходне теореме надаље ће се под процесом W увек подразумевати процес стандардног Брауновог кретања.

Теорема 1.24. *Брауново кретање $W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ је мартингал.*

Веома битна особина процеса Брауновог кретања, која има веома важну улогу при конструисању случајног интеграла Итоа дата је следећом теоремом.

Теорема 1.25. *За процес Брауновог кретања $W = \{W_t, \mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ када је $t \geqslant s$ важи:*

$$E(W_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s) = W_s^2 - s.$$

Дакле, процес Брауновог кретања је квадратно интеграбилни мартингал са квадратном карактеристиком t.

1.7 Процес фракталног Брауновог кретања

Појам фракталног Брауновог кретања уводи Колмогоров 1940. године. Неке основне резултате су затим дали Манделброт (Benot B. Mandelbrot) и Ван Нес (Van Ness) 1968. године (видети [47]), где први пут и наилазимо на назив фрактално Брауново кретање са Хурстовим параметром H, дат у част хидролога Хурста (Harold Edwin Hurst). Наиме, Манделброт је био мотивисан Хурстовим проучавањем поплава Нила у дугом низу година, где Хурст полазећи од претпоставке да су наноси воде за појединачну годину независни од других, долази до контрадикторних резултата. Након ових пионирских радова наступа својеврсно затишје у радовима на ову тему. Међутим, последњих двадесет година долази до великих помака у овој области, јер се увиђа да је процес фракталног Брауновог кретања погодан модел за примене у финансијској математици, телекомуникацијама и многим другим областима. Односно, долази се до закључка, као и у Хурстовој анализи, да треба одбацити претпоставку о независности.

Дефиниција 1.28. ([54]) *Центриран гаусовски процес* $B^H = \{B_t^H, t \geqslant 0\}$ *је* ***процес фракталног Брауновог кретања са Хурстовим параметром*** $H \in (0,1)$ *ако тај процес има функцију коваријансе:*

$$R_H(t,s) = E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Када је $H = \frac{1}{2}$ овако уведен процес је процес обичног Брауновог кретања.

Процес фракталног Брауновог кретања је фрактал, тј. има особину самосличности (engl. self-similarity) која се састоји у томе да за сваку константу $a > 0$ случајни процеси

$$\{a^{-H} B_{at}^H, t \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad \{B_t^H, t \geqslant 0\}$$

имају исту расподелу.

Неке од основних особина процеса фракталног Брауновог кретања $B^H = \{B_t^H, t \geqslant 0\}$ су следеће:

$$\begin{aligned} B_0^H &= 0 \, (\text{с.и.}), \\ EB_t^H &= 0, \text{ за свако } t, \\ EB_t^2 &= |t|^{2H}. \end{aligned}$$

Теорема 1.26. ([54]) *Процес фракталног Брауновог кретања* $B^H = \{B_t^H, t \geqslant 0\}$ *је процес са стационарним прираштајима, тј. за свако* $t, s \geqslant 0$ *важи:*

$$E(|B_t^H - B_s^H|^2) = |t-s|^{2H}. \tag{1.2}$$

На основу критеријума за непрекидност Колмогорова (Теорема 1.2) и релације (1.2) следи да процес фракталног Брауновог кретања има модификацију са непрекидним трајекторијама. Шта више, како за свако $\alpha \geqslant 0$ важи

$$E(|B_t^H - B_s^H|^\alpha) = C_\alpha |t-s|^{H\alpha},$$

па и за α такво да је $\alpha H > 1$, на основу критеријума Колмогорова, имамо да су трајекторије Хелдер (Hölder) непрекидне било ког реда мањег од H. При том трајекторије нису диференцијабилне, чак ни у L^2-смислу, јер у релацији

$$E\left(\left|\frac{B_t^H - B_s^H}{t-s}\right|^2\right) = E(B_1^H)^2 |t-s|^{2H-2},$$

последњи члан тежи у бесконачност кад $t \to s$ (због $2H-2<0$).

За $H = \frac{1}{2}$ функција коваријансе је $R_{\frac{1}{2}}(t,s) = t \wedge s$, па је процес B тада процес обичног Брауновог кретања. Једино у овом случају су прираштаји независни.

За $H \neq \frac{1}{2}$ корелација прираштаја $B^H_{t+h} - B^H_t$ и $B^H_{s+h} - B^H_s$ (где је $s + h \leqslant t$ и $t - s = nh$) је

$$\rho_H(n) = \frac{1}{2}h^{2H}\left((n+1)^{2H} + (n-1)^{2H} - 2n^{2H}\right) \approx h^{2H}H(2H-1)n^{2H-2},$$

и

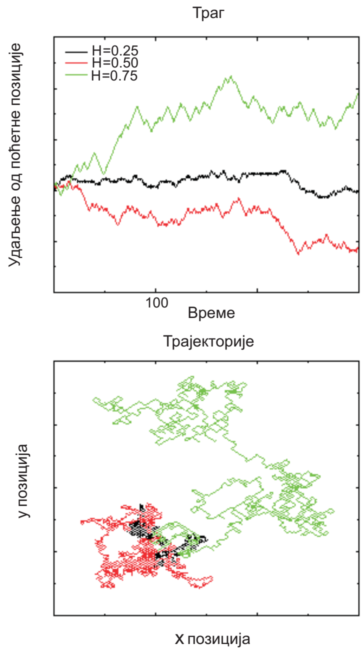
$$\rho_H(n) \to 0, \text{ кад } n \to \infty.$$

Стога:

(i) ако је $H > \frac{1}{2}$, онда је $\rho_H(n) > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_H(n) = \infty$;

(ii) ако је $H < \frac{1}{2}$, онда је $\rho_H(n) < 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_H(n)| < \infty$.

Дакле, за $H > \frac{1}{2}$ корелација између прираштаја је позитивна, честица показује тенденцију да кретање настави у истом правцу, правећи релативно „глатку” путању и више се удаљава од почетног положаја, док је за $H < \frac{1}{2}$ корелација између прираштаја негативна и честица стално мења правац и трајекторије су знатно „замршеније”, што илуструје Слика 1.



Слика 1 – Траг и трајекторије фракталног Брауновог кретања за различите вредности параметра H

Фрактална димензија трајекторија процеса B^H је $d_1 = \min\left\{\frac{1}{H}, 2\right\}$, а фрактална димензија трага (функција времена која исказује удаљење од почетне тачке) је $d_1 = 2 - H$. Дакле, фрактална димензија је директно везана за Хурстов праметар H.

Процес фракталног Брауновог кретања је за $H \neq \frac{1}{2}$ процес са дугом меморијом (engl. long-range dependant process, long-memory process). Управо ова особина је кључна за његову све већу примену, јер се концепт независности све чешће одбацује.

На основу претходног јасно је да процес фракталног Брауновог кретања није марковски процес. Међутим, процес фракталног Брауновог кретања није ни семимартингал, а то је најшира фамилија процеса за које је примењив рачун Итоа, па су се за интеграцију у односу на овај процес морала наћи нова решења.

Глава 2

Познати концепти узрочности

Питања одређивања узрока или разликовање узрока од последице неког деловања су вероватно стара колико и научни начин мишљења, односно научни приступ решавању проблема. Овим питањима се од давнина бавила филозофија на најопштији могући начин, али и остале науке покашавају парцијално да реше овај проблем у оквиру свог објекта интересовања.

У откривању узрочно-последичних релација научници се махом одлучују за извођење одговарајућих експеримената, уколико је то могуће, или ако то није изводљиво, на дуготрајно посматрање и анализирање система које проучавају (као што је то случај у економији, демографији и др.). У прилог овоме је ишао и развој савремених дигиталних технологија који је омогућио складиштење огромног броја података и њихову прилично лаку статистичку обраду. Тако се на основу прикупљених података успостављају статистичке везе, што је постала пракса готово у свим научним гранама. Међутим, корелација не имплицира узрочност. Наиме, утврђена корелација међу посматраним величинама не мора аутоматски да значи и узрочну везу између тих величина (на пример, обе величине имају исти узрок, а међусобно нису у узрочно-последичној вези), а чак уколико узрочност и постоји, њен смер нам је непознат (не знамо шта је узрок, а шта последица).

У жељи да се глобално одговори на проблем утврђивања узрочности у произвољном посматраном систему настала је **Статистичка теорија узрочности**, базирана пре свега на резултатима Теорије вероватноће, Теорије случајних процеса и Статистике.

2.1 Статистичко дефинисање узрочности

Од мноштва емпиријски установљених веза међу економским или другим промењљивама, неке су посебно битне или дубље у одређеном смислу од других, и њима се често приписује име „узрочност”, што и није увек најбоље решење (из разлога на које је већ указано). Наравно, не постоји једна опште прихваћена дефиниција узрочности, као што је улустровано у дискусијама у књигама [57] и [41].

Основно питање (основни проблем) Статистичке теорија узрочности је – *Шта узети за критеријум узрочне зависности?*

Оно што је сигурно јесте да ако један догађај узрокује други, онда ти догађаја не могу бити независни. Стога је једна од могућности да се узрочна зависност изједначи са стохастичком зависношћу (видети [79], [24], [25]). Међутим, тако се често наилази на проблем лажне узрочности. То је случај када је зависност два догађаја последица тога што оба имају исти узрок, а они нису узрочно повезани.

Софистициранији модел је предложио 1969. године Гренџер[1] у свом раду [27], где се посматра узрочност између случајних процеса, а не између појединачних догађаја. Гренџеров приступ је оставио дубок траг у науци, многи аутори су га прихватили и додатно развили (неки од радова на ту тему су [4, 8, 18, 20, 23, 30, 51, 60, 61, 63, 64]). Читав Гренџеров радни опус био је везан за економију, економетрију, и он је стога развијао пре свега концепте узрочности за случајне процесе са дискретним параметром, односно за временске серије. Основна идеја његовог приступа је следећа: *„временска серија $\{X_t\}$ је узрокована временском серијом $\{Y_t\}$ ако је могуће боље предвидети будућност од $\{X_t\}$ када знамо прошлост и од $\{X_t\}$ и од $\{Y_t\}$, него када знамо само прошлост од $\{X_t\}$”* (видети [27]). Ова веза је јача од зависности (корелације) између будућности процеса $\{X_t\}$ прошлости процеса $\{Y_t\}$, па је у овом случају лажна узрочност мањи проблем, али није у потпуности отклоњена. Зато Гренџер често нагласак стављa на неузрочност: *„$\{Y_t\}$ не узрокује $\{X_t\}$ ако када знамо прошлост и $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ не можемо боље предвидети $\{X_t\}$ него када нам је позната само прошлост од $\{X_t\}$”*, јер неузрочност не може бити лажна на исти начин као узрочност.

Гренџерова узрочност почива на концепту оптималног предвиђања. У свом првом раду ([27]) он користи оптимално линеарно предвиђање (у смислу најмањих квадрата) и тај концепт се обично назива **Гренџерова линеарна узрочност**. Међутим, он касније заједно са Њуболдом (P. Newbold) (видети [28]) предлаже дефиницију узрочности која се заснива на условној независности и тај концепт се

[1] Sir Clive William John Granger (1934-2009), британски научник, статистичар, експерт за финасијску економију. Добитник је, заједно са Робертом Енглом (Robert F. Engle), Нобелове награде за економију 2003. године, у знак признања за њихова открића у анализи временских серија која су битно променила начин анализирања финансијских и макроекономских података. Завршио је студује математике, а докторирао статистику.

обично назива **Гренџерова нелинеарна узрочност**. У оквиру ове дисертације ће бити презентовани управо резултати везани за уопштење концепта Гренџерове нелинеарне узрочности.

2.2 Узрочност за случајне процесе са дискретним параметром

Развој Статистичке теорије узрочности почиње са дефинисањем узрочности за случајне процесе са дискретним параметром. Први и уједно најпознатији концепти су предложени од сране Гренџера ([27],1969) и Симса[2] ([76],1972). Стога ћемо прво укратко изложити баш ова два концепта. Напоменимо да иако многи прво статистичко дефинисање узрочности везују за Гренџера по његовом сопственом признању он је тај концепт први пут видео код Винера (N. Wiener) у књизи [84], као и у нешто непрецизнијој форми у [6], где је предложен од стране фолозофа Бунча (M. Bunch).

2.2.1 Гренџерова и Симсова узрочност

На задатом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ посматра се вишедимензионалан случајан процес $X = \{X_n\} = \{(Y_n, Z_n)\}$, $n \in \mathbb{N}$. Нека је X_n^m σ-алгебра генерисана случајним променљивама $\{X_n, X_{n+1}, \ldots, X_m\}$, то јест

$$X_n^m = \bigvee_{n \leqslant j \leqslant m} X_j \, ,$$

а X_0^∞ σ-алгебра генерисана случајним променљивама $\{X_0, X_1, \ldots\}$, тј.

$$X_0^\infty = \bigvee_{n \geqslant 0} X_n .$$

Једноставности ради X_n^n се поистовећије са X_n. Аналогно значење ће имати и ознаке $Y = \{Y_n\}$, $Z = \{Z_n\}$, Y_n^m, Z_n^m, Y_n и Z_n. U ће бити ознака за σ-алгебру генерисану параметрима и/или почетним условима.

Дефиниција 2.1. ([27]) *Случајан процес Y не узрокује случајан процес Z у Гренџеровом смислу ако и само ако је*

(2.1) $$Z_0^{n+1} \perp Y_0^n | Z_0^n \vee U, \text{ за свако } n.$$

[2] Christopher Albert Sims (1942–), амерички научник, економетричар и макроекономиста. Добитник је, заједно са Томасом Сарџентом (Thomas J. Sargent), Нобелове награде за економију 2011. године, као признање за њихов емпиријски рад на испитивању узрока и последица у макроекономији. Завршио је основне студије математике, а докторирао је економију. Тренутни је председник Америчке економске асоцијације.

Овакав тип узрочности, када се испитује предвиђање будућности за један корак унапред, назива се тренутна узрочност.

Дефиниција 2.2. ([76]) *Случајан процес Y не узрокује случајан процес Z у Симсовом смислу ако и само ако је*

$$Z_0^\infty \perp Y_n | Z_0^n \vee U, \text{ за свако } n. \tag{2.2}$$

Овакав тип узрочности, када се испитује предвиђање будућности у произвољном тренутку, назива се глобална узрочност.

Напомена 2.1. На основу елементарних особина условне независности Y не узрокује Z је еквивалентно са X не узрокује Z, и у Гренџеровом и у Симсовом смислу.

Напомена 2.2. Приметимо да је (2.1) еквивалентно са

$$Z_{n+1} \perp Y_0^n | Z_0^n \vee U, \text{ за свако } n.$$

Слично, (2.2) је еквивалентно са

$$Z_{n+1}^\infty \perp Y_n | Z_0^n \vee U, \text{ за свако } n.$$

У раду [19] показано је да Гренџерову узрочност можемо дефинисати и на следећи начин, односно показано је да је услов (2.1) еквивалентан услову (2.3).

Дефиниција 2.3. ([19]) *Случајан процес Y не узрокује случајан процес Z у Гренџеровом смислу ако и само ако је*

$$Z_0^\infty \perp Y_0^n | Z_0^n \vee U, \text{ за свако } n. \tag{2.3}$$

Сада постаје очигледно да Гренџерова неузрочност имплицира Симсову неузрочност. Обратно не важи, јер у општем случају $\mathcal{A} \perp \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \perp \mathcal{C}$ не имплицира $\mathcal{A} \perp \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Међутим, обрат би важио ако би се независност заменила некорелираношћу, а $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ сумом комплетних линеарних подпростора (видети [42]). Према томе, у случају гаусовских процеса Дефиниција 2.1 и Дефиниција 2.2 су еквивалентне.

Поред тога што су теоријски резултати везани за концепт Гренџерове узрочности усавршавани, битно је нагласити да је овај концепт заживео и у применама и да су развијени статистички тестови за временске серије на основу којих се прихвата или одбацује нулта хипотеза о неузрочности у Гренџеровом смислу. На пример, у софтверском пакету R се може наћи тест за Гренџерову узрочност (engl. Test for Granger Causality). Више о разним модификацијама и применама овог теста може се наћи у [29, 33, 34, 73, 31, 32], као и у многим другим радовима.

2.2.2 p-узрочност

Појам узрочности ће у више наврата у овој дисертацији бити повезиван са појмом марковости. Више аутора је испитивало везе ова два појма и у дискретном (видети на пример [4], [26]) и у непрекидном случају (у [58]), а преглед више резултата се може наћи у [62].

Овом приликом ћемо навести још један концепт узрочности у дискретном случају, такозвану p-узрочност, која је у блиској вези с појмом p-марковости. За разлику од предходних концепата, овај укључује познавање само коначног дела прошлости (последњих p стања) посматраних процеса, а не нужно читаве прошлости. Овај концепт, као и његови основни резултати изложени су у раду [21]. У овом одељку ће бити изложен део тих резултата, а у поглављу 3.4 биће изложени резултати ове дисертације који представљају уопштење овог концепта, односно његово преношење на непрекидан случај. Ознаке уведене у претходном одељку користе се и сада.

Дефиниција 2.4. ([21]) *Случајан процес $X = \{X_n\}$ је p-марковски или процес Маркова реда p ако важи*

$$X_n \perp X_0^{n-1} | X_{n-p}^{n-1}, \text{ за свако } n \geqslant p.$$

Уколико је процес X p-марковски, онда је и p'-марковски за свако $p' \leqslant p$.

Дефиниција 2.5. ([21]) *Случајан процес $Z = \{Z_n\}$ је p-марковски условно у односу на процес $Y = \{Y_n\}$ ако је*

$$Z_n \perp Z_0^{n-1} | Y_0^{n-1}, Z_{n-p}^{n-1}, \text{ за свако } n \geqslant p.$$

Претходна дефиниција формализује идеју да у случају када је дата читава прошлост X_0^{n-1} процеса X, маргинална расподела од Z_n зависи од сопсвене прошлости Z_0^{n-1} само кроз последњих p стања, то јест зависи само од Z_{n-p}^{n-1}. Дакле, то је p-узрочност процеса Z, али условно у односу на информацију акумулирану преко процеса Y. Ово је слабије од p-узрочности читавог процеса X, о чему говори следећа теорема.

Теорема 2.1. ([21]) *Ако је $X = \{X_n\} = \{(Y_n, Z_n)\}$ процес Маркова реда p, онда је $Z = \{Z_n\}$ процес Маркова реда p условно у односу на процес $Y = \{Y_n\}$.*

Дефиниција 2.6. ([21]) *Случајан процес $Y = \{Y_n\}$ не узрокује процес $Z = \{Z_n\}$ ако је*

$$Z_n \perp Y_0^{n-1} | Z_0^{n-1}, \text{ за свако } n \geqslant 1.$$

У претходној дефиницији су само занемарени почетни услови из Дефиниције 2.1.

Дефиниција 2.7. ([21]) *Случајан процес* $Y = \{Y_n\}$ *p-не узрокује процес* $Z = \{Z_n\}$ *ако је*

$$Z_n \perp Y_0^{n-1} | Z_{n-p}^{n-1}, \text{ за свако } n \geqslant p.$$

Једно од разматраних питања у раду [21] је под којим условима p-марковост процеса X имплицира p-марковост маргиналног процеса Z. Одговор је дат у следећој теореми.

Теорема 2.2. ([21]) *Случајан процес* $Z = \{Z_n\}$ *је p-марковски условно у односу на процес* $Y = \{Y_n\}$ *и* Y *p-не узрокује процес* Z *ако и само ако је процес* Z *p-марковски и* Y *не узрокује* Z.

Може се рећи да је ова теорема у неку руку оптимална с обзиром да је дата у облику еквиваленције која повезује особине маргиналне и условне p-марковости и узрочности у односу на ограничену и неограничену прошлост.

Према Теореми 2.1, из претходног се добија следеће тврђење.

Теорема 2.3. ([21]) *Ако је* $X = \{X_n\} = \{(Y_n, Z_n)\}$ *процес Маркова реда* p *онда* $Y = \{Y_n\}$ *p-не узрокује процес* $Z = \{Z_n\}$ *ако и само ако је процес* $Z = \{Z_n\}$ *p-марковски и* Y *не узрокује* Z.

Следећи једноставан пример илуструје примену датих тврђења.

Пример 2.1. ([21]) Нека је $X_n = (Y_n, Z_n) \in \{0,1\}^2$ и нека је процес $X = \{X_n\}$ 1-марковски. Дакле, дати ланац Маркова има 4 стања. Једноставности ради посматраћемо хомогени случај (што није од пресудне важности), другим речима расподела од $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ је одређена вектором почетних вероватноћа и 4×4 транзиционом матрицом $P = [p_{k1}^{ij}]$, где је

$$p_{k1}^{ij} = P[Y_n = k, Z_n = 1 \mid Y_{n-1} = i, Z_{n-1} = j].$$

У општем случају $Z = \{Z_n\}$ није марковски процес. Заиста,

$$\begin{aligned} P[Z_n | Z_0^{n-1}] &= \sum_{Y_0^{n-1} \in \{0,1\}^{n-1}} P[Z_n \mid Z_0^{n-1}, Y_0^{n-1}] \cdot P[Y_0^{n-1} \mid Z_0^{n-1}] \\ &= \sum_{Y_{n-1} \in \{0,1\}} P[Z_n \mid Z_{n-1}, Y_{n-1}] \cdot P[Y_{n-1} \mid Z_0^{n-1}]. \end{aligned}$$

Видимо да последњи члан зависи од читаве прошлости процеса Z сем ако Y_{n-1} не нестане из првог чиниоца или Z_0^{n-2} из другог чиниоца. Дакле, процес Y 1-не узрокује Z је еквивалентно са

$$P[Z_n | Z_{n-1}, Y_{n-1}] = P[Z_n | Z_{n-1}],$$

што у овом случају значи

$$p_{0,I}^{0,j} + p_{1,I}^{0,j} = p_{0,I}^{1,j} + p_{1,I}^{1,j}, \quad \forall (j, I) \in \{0,1\}^2.$$

Последња једнакост се може проверити, то је хипотеза која се може теститрати. Уколико се утврди да је хипотеза тачна, на основу Теореме 2.3 следи да је процес Z марковски реда 1.

У раду [21] аутори су узрочност повезивали и са концептима мерљиве сепарабилности (measurable separability) и строге идентификације (strong identification), али како ти концепти нису пренети у непрекидан случај, изостављени су резултати везани за њих. Главни резултат рада [21] је свакако показивање дуалности између услова марковости и неузрочности. Услови марковости се могу користити за добијање оперативних (са коначном меморијом) тестова за неузрочност (са неограниченом меморијом), а услови неузрочности могу се користити за задржавање особине марковости подпроцеса процеса Маркова.

2.2.3 Графичко представљање узрочности

Графичка репрезентација узрочне структуре вуче корене из далеке 1921. године и рада Рајта (S. Wright), [86], који је увео дијаграм путања (engl. path diagram) за дискусију система линеарних структурних једначина. У последње две деценије, развој графичких модела за анализу релација између променљивих код мултиваријабилних података стимулисао је и проналазење графичко-теоријског оквира за анализу узрочности (видети нпр. [56, 57, 44]). Свонсон (N. R. Swanson) и Гренџер су у раду [80], као и Демиралп (S. Demiralp) и Хувер (K. D. Hoover) у раду [10] применили ове концепте на макроекономске проблеме. У последње време овом тематиком се интезивно бави Ајхлер (M. Eichler) као и други аутори, видети на пример радове [13, 15, 14].

При графичком представљању узрочности темена графа су одговарајуће променљиве (подпроцеси вишедимензионалног процеса), док су гране графа усмерене дужи које указују на смер узрочности. На овај начин се разликују директна и индиректна узрочност, тј. случај када једна променљива директно узрокује другу, или када се утицај једне променљиве на другу врши преко неке треће променљиве. Такође, у оквиру овог приступа се посебна пажња поклања лажној узрочности, тј. њеном отклањању.

2.3 Узрочност за случајне процесе са непрекидним параметром

Развијање концепата узрочности за случајне процесе са непрекидним параметром почело је средином осамдесетих година прошлог века, а може се рећи да се интезивирало у последњој деценији. Уочена је потреба за стварањем Статистичке теорије узрочности и за случајне процесе са непрекидним параметром, јер се многи процеси од интереса за испитивање узрочних веза дешавају управо непрекидно у времену, па примена концепата из дискретног случаја није адекватна, као што је, на пример, истакнуто у раду [48]. У оквиру овог поглавља приказани су главни резултати других аутора који су пресудно утицали на истраживања ове дисертације. У излагању је праћен хронолошки развој теорије, као и међусобне везе између добијених резултата.

2.3.1 Микландов приступ

Микланд (P. A. Mykland), вероватно први, 1986. године у радовима [52, 51] уводи концепт узрочности за случајне процесе са непрекидним параметром базиран на идеји нелинеарне Гренџерове узрочности.

Дефиниција 2.8. ([51]) *Нека су на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *задате филтрације* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ *и* $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$. *Филтрација* $\mathbf{G}$ *потпуно узрокује* $\mathbf{H}$ *у оквиру* $\mathbf{F}$ *у односу на* P, *у ознаци*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P,$$

ако је

$$\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F} \quad \text{и} \quad \mathbf{H} \subseteq \mathbf{F} \tag{2.4}$$

и ако важи

$$(\forall\, t)\,(\forall A \in \mathcal{H}_\infty) \quad P(A|G_t) = P(A|F_t). \tag{2.5}$$

Уколико не доводи до забуне, филтрација $\mathbf{F}$ и вероватноћа P се могу изоставити из записа.

Видимо да се Микланд одлучио да за дефинисање узрочности користи приступ преко σ-алгебри, односно филтрација, и да критеријум за утврђивање узрочности буде условна независност. Заправо, услов (2.5) значи да је $\mathcal{H}_\infty$ условно независно од $\mathcal{F}_t$ када је дато $\mathcal{G}_t$ за свако t. Суштина услова (2.5) је да све информације о филтрацији $\mathbf{H}$ улазе у $\mathbf{F}$ преко филтрације $\mathbf{G}$.

Посебно истичемо и следећи специјални случај.

Дефиниција 2.9. ([51]) *Нека су на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *задате филтрације* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ *и* $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$. *Филтрација* $\mathbf{H}$ *је сопствени узрок унутар филтрације* $\mathbf{F}$ *у односу на* P *ако је*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{H}; \mathbf{F}; P.$$

Дефиниције 2.8 и 2.9 могу се применити и на случајне процесе тако што се посматрају њихове природне филтрације. Тако се каже да је случајан процес $X = \{X_t\}$ сопствени узрок ако је

$$\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P.$$

Битно је истаћи да је сваки процес X који је сопствени узрок комплетно описан својим понашањем у односу на своју природну филтрацију $\mathbf{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)$.

Веза између дате узрочности и Гренџерове нелинеарне узрочности била би следећа. Процес $Y = \{Y_t\}$ не узрокује (у Гренџеровом смислу) процес $X = \{X_t\}$ ако и само ако

$$(\mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{U}) \mid\!< (\mathcal{F}_t^X \vee \mathcal{U}); (\mathcal{F}_t^{X,Y} \vee \mathcal{U}),$$

где је $\mathcal{U}$ σ-алгебра генерисана параметрима и/или почетним условима.

Микланд, поред навођења основних особина датог концепта узрочности, тај концепт повезује и са слабом јединственошћу слабих решења стохастичких диференцијалних једначина, што је даље развијано, за једначине са фракталним Брауновим кретањем и семимартингалима у радовима [65, 70, 71]. Такође, у радовима [52, 51] концепт узрочности је повезан и са мартингалним проблемом, екстремним мерама и стабилним подпросторима и та врста истраживања је настављена у радовима [71, 72, 69].

Микланд први поставља и питање стабилности узрочности при конвергенцији.

Теорема 2.4. ([51]) *Нека су на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *задате филтрације* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ *и* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, $t \in I$, *и нека је* $(X^n) = (\{X_t^n, t \in I\})$ *низ случајних процеса за које је испуњено*

$$X_t^n \xrightarrow{P} X_t, \quad n \to +\infty, \quad \text{за свако}\, t \in I,$$

и

$$\mathbf{F}^{X^n} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}, \quad \text{за свако}\, n.$$

Тада следи да је

$$\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}, \quad \text{за свако}\, n,$$

тј. филтрација $\mathbf{G}$ *потпуно узрокује процес* X *унутар* $\mathbf{F}$.

Један део резултата ове дисертације који се управо на ово надовезују може се наћи у [66], где је показана инваријантност узрочности под разним врстама конвергенције.

Уопште, један од главних подстицаја за истраживања у оквиру ове дисертације је управо био Микландов допринос Статистичкој теорији узрочности. У Глави 3 биће детаљно изложене добијене генерализације Микландовог концепта узрочности.

2.3.2 Узрочност између Хилбертових простора

Убрзо по објављивању Микландових радова [52, 51], 1987. године његов приступ узрочности је пренет на Хилбертове просторе и примењен на стохастичке динамичке системе од стране Гил (Gill) и Петровић у раду [23]. Касније, 1988. године у раду [58] и 1989. године у раду [59], Петровић уводи уопштење овог приступа (ослабљен је услов (2.4)), који је касније пренет и у приступ преко σ-алгебри (први пут у радовима [65] и [70]).

Са $\mathrm{F} = \{F_t\}$, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, означавамо фамилију Хилбертових простора. Укупна информација коју носи фамилија F обележава се са $F_{<\infty}$, при чему је

$$F_{<\infty} = \bigvee_{t \in I} F_t.$$

Прошлост и будућност у односу на тренутак t означава се са $F_{\leqslant t}$ и $F_{\geqslant t}$, при чему је

$$F_{\leqslant t} = \bigvee_{s \leqslant t} F_s \quad \text{и} \quad F_{\geqslant t} = \bigvee_{s \geqslant t} F_s.$$

Приметимо да

$$F_{<t} = \bigvee_{s<t} F_s \quad \text{и} \quad F_{>t} = \bigvee_{s>t} F_s$$

не морају да се подударају са $F_{\leqslant t}$ и $F_{\geqslant t}$, респективно, и оне се често називају стварном прошлошћу и стварном будућношћу у односу на тренутак t. Аналогна нотација биће коришћена за фамилије $\mathrm{G} = \{G_t\}$ и $\mathrm{H} = \{H_t\}$.

Уколико су F_1 и F_2 произвољни подпростори Хилбертовог простора $\mathcal{H}$ онда ће $P(F_1|F_2)$ означавати ортогоналну пројекцију F_1 на F_2, а $F_1 \ominus F_2$ ће означавати Хилбертов простор генерисан елементима $x - P(x|F_2)$, где је $x \in F_1$. Ако је $F_2 \subset F_1$, онда се $F_1 \ominus F_2$ подудара са $F_1 \cap F_2^{\perp}$, где је $F_2^{\perp}$ ортогонални комплемент од F_2 у $\mathcal{H}$.

Дефиниција 2.10. ([60]) *Нека су* $\mathrm{F} = \{F_t\}$, $\mathrm{G} = \{G_t\}$ *и* $\mathrm{H} = \{H_t\}$, $t \in I$, *фамилије Хилбертових простора. Каже се да је* G *узрок за* H *у оквиру* F, *у ознаци*

$$\mathrm{H} \mid\!< \mathrm{G}; \mathrm{F},$$

ако је

$$H_{<\infty} \subset F_{<\infty},\ \mathrm{G} \subset \mathrm{F}$$

и

$$H_{<\infty} \perp G_{\leqslant t}; F_{\leqslant t}, \quad \text{за свако}\, t \in I.$$

Теорема 2.5. ([23, 60]) *Нека су* $\mathrm{F} = \{F_t\}$, $\mathrm{G} = \{G_t\}$ *и* $\mathrm{H} = \{H_t\}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, *фамилије Хилбертових простора. Тада је*

$$\mathrm{H} \models\!\!< \mathrm{G}; \mathrm{F}$$

ако и само ако је

$$H_{<\infty} \subset F_{<\infty}, \mathrm{G} \subset \mathrm{F}$$

и за свако $t \in I$ *важи*

$$P(H_{<\infty}|F_t) = P(H_{<\infty}|F_t).$$

У радовима [61, 63, 64] овај приступ је примењен за добијање резултата везаних за реализациони проблем (engl. realization problem), минималне марковске репрезентације (engl. Markovian representations), односно минимална марковска проширења (engl. Markovian extensions) случајних процеса.

2.3.3 Тренутна и глобална, слаба и јака узрочност

Независно од радова Микланда и Гил и Петровић, 1996. године је објављен рад [18] аутора Флоренса (J.P. Florens) и Фужера (D. Fougères) (вероватно најцитиранији рад Статистичке теорије узрочности), као и рад [8] аутора Конта (F. Comte) и Реноа (E. Renault), који такође разматрају концепте узрочности за случајне процесе са нерекидним параметром који су сродни Гренџеровој узрочности. Оба рада су објављена у реномираним часописима за економетрију, па су тако и оставили дубљи траг у применама и литератури везаној за економију, иако нису први и једини радови на ову тему.

Узрочност се у сваком случају описује преко особина (могућности) предвиђања. Централно питање је: *Могу ли се редуковати доступне информације при предвиђању датог случајног процеса?* По аналогији са дискретним случајем (када имамо анализу предвиђања за 1 корак унапред и анализу предвиђања у било ком тренутку у будућности) аутори разликују тренутну и глобалну узрочност. С друге стране, према томе да ли се предвиђање односи на очекивање случајног процеса или на произвољну функцију процеса аутори разликују слабу и јаку узрочност.

Нека су на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задате филтрације $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ и $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, $t \in I$, при чему је $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$. Нека је $Z = \{Z_t\}$, $t \in I$, случајан процес адаптиран на филтрацију $\mathbf{G}$. Дакле, за свако t важи

$$\mathcal{F}_t^Z \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t.$$

У применама, филтрација $\mathbf{F}$ је најчешће природна филтрација неког вишедимензионалног случајног процеса $X = \{X_t\} = \{(Z_t, Y_t, W_t)\}$, чији су $Y = \{Y_t\}$ и $W = \{W_t\}$ вектор процеси (подпроцеси), а филтрација $\mathbf{G}$ је природна филтрација процеса $\{(Z_t, W_t)\}$. Битан специјалан случај је када је $\mathbf{F}^Z = \mathbf{G}$.

Дефиниција 2.11. ([18]) *Филтрација* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ *не узрокује слабо глобално процес* Z *када је дата филтрација* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, *ако за свако* $s, t \in I$ *важи*

$$E(Z_t|\mathcal{F}_s) = E(Z_t|\mathcal{G}_s). \tag{2.6}$$

Дефиниција 2.12. ([18]) *Филтрација* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ *не узрокује јако глобално процес* Z *када је дата филтрација* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, *ако за свако* $s, t \in I$ *важи*

$$\mathcal{F}_t^Z \perp \mathcal{F}_s \,|\, \mathcal{G}_s. \tag{2.7}$$

У случају када је $\mathbf{F}^Z = \mathbf{G}$ каже се да филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ не узрокује слабо глобално, односно јако глобално, процес Z.

Услов (2.7) значи да је за сваку $\mathcal{F}_t^Z$-мерљиву и P-интеграбилну функцију $f : \Omega \to \mathbb{R}$ испуњено

$$E(f|\mathcal{F}_s) = E(f|\mathcal{G}_s) \quad \text{с.и.} \tag{2.8}$$

Ако за f у (2.8) узмемо идентичко пресликавање добијамо услов (2.6). Стога је јасно да јака глобална узрочност имплицира слабу глобалну узрочност.

Битан допринос рада [18] је што се ту први пут среће алтернативна карактеризација узрочности помоћу σ-алгебри које су повезане са временима заустављања.

Теорема 2.6. ([18]) *Филтрација* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ *не узрокује јако глобално* $\mathbf{F}^Z = \{\mathcal{F}_t^Z\}$ *када је дата филтрација* $\mathbf{G} = \{G_t\}$ *ако и само ако је један од следећих услова задовољен:*

(i) *за свако* $s \in I$ *важи* $\mathcal{F}_\infty^Z \perp \mathcal{F}_s \,|\, \mathcal{G}_s$;

(ii) *за свако* $p \in \mathbb{N}$, *за све* $t_1, t_2, \dots, t_p \in I$ *и за сваку мерљиву и ограничену функцију* φ, $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, *важи*

$$E\left(\varphi(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_p}|\mathcal{F}_s)\right) = E\left(\varphi(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \dots, Z_{t_p}|\mathcal{G}_s)\right) \quad \text{с.и.};$$

(iii) *за свако време заустављања* S *у односу на филтрацију* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ *важи*

$$\mathcal{F}_\infty^Z \perp \mathcal{F}_S \,|\, \mathcal{G}_S;$$

(iv) *за свако време заустављања T у односу на филтрацију $\mathbf{F}^Z = \{\mathcal{F}_t^Z\}$ и за свако време заустављања S у односу на филтрацију $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ важи*

$$\mathcal{F}_T^Z \perp \mathcal{F}_S \,|\, \mathcal{G}_S \,.$$

Особина (i) значи да је $\mathcal{G}_t$ довољно за предвиђање произвољне функције од Z_t када је дато $\mathcal{F}_s$. Особина (ii) показује да је довољно проверити једнакости између условних очекивања, под условом $\mathcal{G}_s$ и под условом $\mathcal{F}_s$, за произвољне функције које зависе само од коначног скупа реализација процеса Z. Особина (iii) је проширење особине (i) са фиксираног времена на случајна времена заустављања. Особина (iv) дефиницију проширује на времена заустављања.

У раду [18] је указано и на повезаност задржавања мартингалне особине при проширивању филтрације и узрочности. Интуитивни разлог за испитивање мартигалне особине у Статистичкој теорији узрочности је следећи. Варијација мартингала у односу на дату филтрацију је „непредвидива" имајући у виду информацију садржану у тој филтрацији (најбоља оцена, тј. предвиђање, у L^2 смислу је 0). Онда је природно испитивати који процес остаје непредвидив и када се информација увећава, тј. када се дата филтрација проширује.

Теорема 2.7. ([18])

(i) *Ако филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ не узрокује јако глобално $\mathbf{F}^Z = \{\mathcal{F}_t^Z\}$ када је дата филтрација $\mathbf{G} = \{G_t\}$, онда је сваки $(\mathcal{F}_t^Z)$-адаптиран $(\mathcal{G}_t)$-мартингал такође и $(\mathcal{F}_t)$-мартингал;*

(ii) *Ако је сваки $(\mathcal{F}_t^Z)$-мартингал и $(\mathcal{F}_t)$-мартингал, онда $(\mathcal{F}_t)$ не узрокује јако глобално $\mathbf{F}^Z = \{\mathcal{F}_t^Z\}$.*

Дакле, у случају када је $\mathbf{F}^Z = \mathbf{G}$, јака глобална неузрочност је еквивалентна задржавању мартингалне особине. Ово су, без коришћења термина узрочности, први пут доказали Бремауд (Bremaud) и Јор (Yor) у раду [5].

Флоренс и Фужер доказују и следећу теорему која се односи на случај када је $\mathbf{G} = \mathbf{F}^Z$.

Теорема 2.8. ([18])

(i) *Ако филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ не узрокује јако глобално $\mathbf{F}^Z = \{\mathcal{F}_t^Z\}$, онда за произвољно $t_0 \in I$, сваки случајни процес (η_t), $t \in [0, t_0]$, који је $(\mathcal{F}_{t_0}^Z \vee \mathcal{F}_t)$-мартингал је и $(\mathcal{F}_\infty^Z \vee \mathcal{F}_t)$-мартингал;*

(ii) *Под претпоставком $\mathcal{F}_\infty^Z \perp \mathcal{F}_0 \,|\, \mathcal{F}_t^Z$, ако је сваки процес (η_t), $t \in [0, t_0]$, који је $(\mathcal{F}_{t_0}^Z \vee \mathcal{F}_t)$-мартингал истовремено и $(\mathcal{F}_\infty^Z \vee \mathcal{F}_t)$-мартингал, онда филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ не узрокује јако глобално $\mathbf{F}^Z = \{\mathcal{F}_t^Z\}$.*

Напомена 2.3. ([18]) У теоремама 2.7 и 2.8 мартингали се могу заменити локалним мартингалима.

Коцепт тренутне узрочности Флоренс и Фужер преносе у непрекидни случај на класу специјалних семимартингала (engl. special semimartingale).

Случајан процес $Z = \{Z_t\}$ је специјалан семимартингал у односу на филтрацију $\mathbf{F} = \{F_t\}$ ако за Z_t постоји декомпозиција

$$Z_t = Z_0 + H_t + M_t \tag{2.9}$$

где је $H = \{H_t\}$ $(\mathcal{F}_t)$-предвидив процес, а $M = \{M_t\}$ је $(\mathcal{F}_t)$-локални мартингал са очекивањем једнаким нули. Подсетимо се предвидив процес је мерљив (као функција од (t, w)) у односу на σ-алгебру на $I \times \Omega$ генерисану свим лево непрекидним процесима са десном границом. Интуитивно, ако је процес $H = \{H_t\}$ предвидив, онда све што знамо о H_s за свако $s < t$ одређује оно што знамо о H_t. Уобичајено је претпоставити да H_t има ограничену интеграбилну варијацију, тј. $E\left(\int_0^\infty |\mathrm{d}H_t|\right) < +\infty$. Треба имати на уму да је декомпозиција (2.9) јединствена до на P-нула процес.

Дефиниција 2.13. ([18])*Нека је $Z = \{Z_t\}$ специјалан семимартингал у односу на филтрацију $\mathbf{G} = \{G_t\}$, са декомпозицијом*

$$Z_t = Z_0 + H_t^* + M_t^*.$$

Онда $\mathbf{F} = \{F_t\}$ не узрокује слабо тренутно $Z = \{Z_t\}$ када је дато $\mathbf{G} = \{G_t\}$ ако процес $Z = \{Z_t\}$ остаје семимартингал у односу на филтрацију $\mathbf{F} = \{F_t\}$ са истом декомпозицијом.

Напомена 2.4. Нека је $Z = \{Z_t\}$ специјалан семимартингал у односу на филтрацију $\mathbf{F} = \{F_t\}$ са декомпозицијом $Z_t = Z_0 + H_t + M_t$, а у односу на филтрацију $\mathbf{G} = \{G_t\}$ са декомпозицијом $Z_t = Z_0 + H_t^* + M_t^*$. Тада $\mathbf{F}$ не узрокује слабо тренутно Z када је дато $\mathbf{G}$ ако је

$$H_t = H_t^* \quad \text{и} \quad M_t = M_t^* \quad \text{с.и.}$$

Теорема 2.9. ([18]) *Следећи искази су еквивалентни:*

(i) *$\mathbf{F} = \{F_t\}$ не узрокује слабо тренутно $Z = \{Z_t\}$ када је дато $\mathbf{G} = \{G_t\}$;*

(ii) *$\{H_t^*\}$ је $(\mathcal{F}_t)$-предвидив;*

(iii) *$\{M_t^*\}$ је $(\mathcal{F}_t)$-локални мартингал.*

Дефиниција 2.14. ([18])*Нека је $Z = \{Z_t\}$ специјалан семимартингал у односу на филтрацију $\mathbf{G} = \{G_t\}$, са декомпозицијом $Z_t = Z_0 + H_t^* + M_t^*$. Тада $\mathbf{F} = \{F_t\}$ не узрокује јако тренутно $Z = \{Z_t\}$ када је дато $\mathbf{G} = \{G_t\}$ ако је сваки $\mathbf{F}^Z = (\mathcal{F}_t^Z)$-адаптирани специјалан $(\mathcal{G}_t)$-семимартингал уједно и специјалан $(\mathcal{F}_t)$-семимартингал са идентичним декомпозицијама у односу на филтрације $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$.*

Очигледно је да јака тренутна узрочност имплицира слабу.

Јаку глобалну и јаку тренутну узрочност повезује следећа теорема.

Теорема 2.10. ([18])

(i) *Јака глобална неузрочност имплицира јаку тренутну узрочност.*

(ii) *Ако је* $\mathbf{G} = \mathbf{F}_t^Z$*, онда јака тренутна узочност имплицира јаку глобалну неузрочност.*

У општем случају нема еквиваленције између слабе глобалне и слабе тренутне узрочности. Међутим у неким случајевима та еквиваленција постоји. На пример, у раду ([18]), еквиваленција је показана за процесе пребројавања (counting processes).

Конт и Рено су, у раду [8], показали еквиваленцију све четири дефиниције за CIMA процесе (**c**ontinuous **i**nvertible **m**oving **a**verage processes).

У случају процеса Маркова еквивалентне су јака тренутна и јака глобална узрочност, док слаба тренутна узрочност не имплицира јаку.

2.3.4 Узрочност и декомпозија Дуб-Мејера

Изложићемо укратко још један приступ узрочности који је везан за Дуб-Мејерове декомпозиције посматраних случајних процеса, заснован на идеји коју предложио Ален (Aalen) у [1], а сродан и приступу Флоренса и Фужера из [18]. Аутори овог приступа су Команж (Commenges) и Гегу–Пти (Gégout-Petit), а главни резултати везани за овај концепт могу се наћи у радовима [7, 22].

Нека је на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ дат вишедимензионалан случајан процес $\mathbf{X} = \{X_t, t \geqslant 0\} = \{(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{mt}), t \geqslant 0\}$, при чему X_t узима вредности у $\mathbb{R}^m$, а читав процес $\mathbf{X}$ узима вредности у $\mathbb{D}(\mathbb{R}^m)$ (Скороходов простор свих càdlàg функција из $\mathbb{R}^+$ у $\mathbb{R}^m$). Ако је $D \subset \{1, 2, \ldots m\}$, са X_D се означава вишедимензионалан процес $(X_j, j \in D)$ и пишемо $X_D \subset \mathbf{X}$. Нека је $\{\mathcal{F}_t\}$ природна филтрација процеса $\mathbf{X}$, док је $\{\mathcal{F}_{-jt}\}$ филтрација коју генеришу сви подпроцеси осим X_j, тј. $\mathcal{F}_{-jt} = \vee_{l \neq j} \mathcal{F}_{lt}$. Уређена тројка (B, C, ν) означава карактеристике семимартингала $\mathbf{X}$ у односу на вероватноћу P, где је ν компензатор скока (engl. compensator of jump) семимартингала, B предвидив процес коначне варијације, а C је квадратна карактеристика (engl. angle bracket process) непрекидног мартингала. Уређена тројка (B^k, C^k, ν^k) означава карактеристике семимартингала X_k, M_k је мартингални део од X_k, а M_j^c је непрекидни део мартимгала M_k.

Команж и Гегу–Пти су предложили дефиницију узрочности која је примењива на такозвану класу $\mathcal{D}'$-класу специјалних семимартингала за које је испуњено:

(a) M_j и M_k су квадратно интеграбилни ортогонални мартингали за $j \neq k$;

(b) C^j је детерминистичко за свако j.

Услове (a) и (b) је могуће сажети у следећи услов:

(c) C је детерминистичка дијагонална матрица.

Дефиниција 2.15. ([22]) *Нека је $\mathbf{X}$ процес из класе $\mathcal{D}'$. X_k је **слабо условно локално независно** (WCLI – weak conditional local independence) од X_j у $\mathbf{X}$ на $[r,s]$ (у ознаци $X_j \not\to_{\mathbf{X}} X_k$) ако и само ако су карактеристике B^k и ν^k такве да је $B_{kt} - B_{kr}$ и $\nu_{kt} - \nu_{kr}$ (F_{-jt})-предвидиво на $[r,s]$.*

Напомена 2.5. Услов да X_k има исту тројку карактеристика (B^k, C^k, ν^k) у односу на $\{F_t\}$ и у односу на $\{F_{-jt}\}$ на интервалу $[r,s]$ је еквивалентан услову из претходне дефиниције.

Дефиниција 2.16. ([7]) *Ако X_k није слабо условно локално независно од X_j у $\mathbf{X}$ на $[r,s]$ каже се да X_j директно утиче на X_k у $\mathbf{X}$ и пишемо $X_j \to_{\mathbf{X}} X_k$.*

Дефиниција 2.17. ([7]) *X_k је **јако условно локално независно** (SCLI – strong conditional local independence) од X_j (у ознаци $X_j \to\!\!\not\to_{\mathbf{X}} X_k$) ако и само ако $X_j \not\to_{\mathbf{X}} X_k$ и не постоји $X_D \subset \mathbf{X}$ такво да $X_j \to_{\mathbf{X}} X_D$ и $X_D \to_{\mathbf{X}} X_k$.*

Исти аутори су у раду [22] предложили и дефиницију узрочности преко процеса веродостојности (engl. likelihood process). Међутим, посебно је интересантна њихова дефиниција јаке условне локалне независности дата преко филтрација, јер је она она врло слична дефиницији узрочности која се користи у дисертацији.

Дефиниција 2.18. ([22]) *Нека је $t \in [0,T]$. Филтрација $\{\mathcal{F}_t^{X_k}\}$ је **јако условно локално независна** (FSCLI – filtration-based strong conditional local independence) од филтрације $\{\mathcal{F}_t^{X_j}\}$ унутар филтрације $\{\mathcal{F}_t\}$ ако и само ако је*

$$\mathcal{F}_t^{X_j} \perp \mathcal{F}_t^{X_k} \mid \mathcal{F}_{-jt}\,.$$

Глава 3

Уопштење Грeнџерове нелинеарне узрочности на случајне процесе са непрекидним параметром

Истраживања у оквиру ове дисретације су имала за циљ проширивање досадашњих резултата Статистичке теорије узрочности, специјално преношење концепта Гренџерове нелинеарне узрочности на случајне процесе са непрекидним параметром, као и добијање потпуно нових резултата. У оквиру ове главе дат је приказ углавном нових резултата, од којих је део објављен (видети [66, 68]), док је део на рецензији (видети [69]) или у припремној фази. У оквиру првог поглавља, прегледности ради, презентовани су основни резултати везани за разматрани концепт узрочности, док остала три поглавља представљају оригиналан допринос ове дисертације.

3.1 Уопштење Гренџерове дефиниције узрочности на случајне процесе са непрекидним параметром

У овом поглављу су дати познати резултати везани за релације узрочности између σ-алгебри, тј. филтрација. Предност овог приступа је што се тако добија теорија која је инваријантна не само на линеарне трансформације променљивих, већ и на произвољну промену координата, као и довољно општа теорија тако да претпоставке стационарности и гаусовости нису неопходне. Наредна дефиниција, формулисана у терминима филтрација, аналогна је дефиницији датој у радовима [58] и [59]. Напоменимо и да је ова дефиниција најближа концепту јаке глобалне неузрочности уведене од стране Флоренса и Фужера у раду [18].

Дефиниција 3.1. ([65]) *Нека су на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *дате филтрације* $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ *и* $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$ *које имају исти индексни скуп,* $t \in I \subset \mathbb{R}$. *Кажемо да је* $\mathbf{G}$ ***узрок за*** $\mathbf{H}$ ***у оквиру*** $\mathbf{F}$ ***у односу на*** P, *у ознаци*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G};\ \mathbf{F};\ P, \tag{3.1}$$

ако је

$$\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{F}_\infty \tag{3.3}$$

и

$$(\forall t)(\forall A \in \mathcal{H}_\infty) P(A \mid \mathcal{G}_t) = P(A \mid \mathcal{F}_t). \tag{3.4}$$

Уколико није неопходно, ако не доводи до забуне, филтрација $\mathbf{F}$ и вероватноћа P могу се изоставити из формулације.

Услов (3.4) представља условну независност, тј.

$$(\forall t)\ \ \mathcal{H}_\infty \perp \mathcal{G}_t \mid \mathcal{F}_t.$$

Напоменимо још једном, исказ $\mathbf{G}$ је узрок за $\mathbf{H}$ у оквиру $\mathbf{F}$ значи да се узрок за $\mathbf{H}$ (информација потребна за предвиђање $\mathbf{H}$) налази у $\mathbf{G}$, и да додатне информације које јесу у $\mathbf{F}$, али нису $\mathbf{G}$, нису битне. То заправо значи да је могућа редукција података, уместо филтрације $\mathbf{F}$ посматра се само њена подфилтрација $\mathbf{G}$. Наравно, исказ $\mathbf{G}$ је узрок за $\mathbf{H}$ у оквиру $\mathbf{F}$ не искључује могућност постојања подфилтрације $\mathbf{G}'$ филтрације $\mathbf{G}$ која је узрок за $\mathbf{H}$ у оквиру $\mathbf{G}$. Посебно је интересантно утврдити која је то минимална филтрација потребна за одговарајуће предвиђање, па је управо из тих разлога посебно интересантна класа филтрација уведена следећом дефиницијом.

Дефиниција 3.2. ([51, 65]) *Филтрација* $\mathbf{H}$ *је* ***сопствени узрок у оквиру*** $\mathbf{F}$ ***у односу на*** P, *ако је*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{H};\ \mathbf{F};\ P. \tag{3.5}$$

Навешћемо и неколико основних особина посматраног концепта узрочности.

Теорема 3.1. ([59]) *На основу* $\mathbf{J} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}$ *и* $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{H}$ *следи* $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{G}$.

Напомена 3.1. Претходна теорема је у раду [59] доказана у случају Хилбертових подпростора, али је доказ аналоган и за приступ преко σ-алгебри.

Теорема 3.2. ([58, 65]) *Нека су* $\mathbf{F}$ *и* $\widetilde{\mathbf{F}}$*,* $\mathbf{G}$*,* $\widetilde{\mathbf{G}}$*,* $\mathbf{H}$ *и* $\widetilde{\mathbf{H}}$ *филтрације у простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *које задовољавају*

$$\mathbf{F} = \widetilde{\mathbf{F}},\ \mathbf{G} = \widetilde{\mathbf{G}},\ \mathbf{H} = \widetilde{\mathbf{H}} \quad \text{с.и.}$$

Тада

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P \quad \textit{имплицира} \quad \widetilde{\mathbf{H}} \mid\!< \widetilde{\mathbf{G}}; \widetilde{\mathbf{F}}; P.$$

Теорема 3.3. ([58, 65]) *Ако је* $\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{G}_\infty$ *и* $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G};\ \mathbf{F}$ *следи да је* $\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G};\ \mathbf{F}$.

Следећа теорема показује да релација „бити сопствени узрок” има, у извесном смислу, особину транзитивности.

Теорема 3.4. ([58, 65]) *Ако је* $\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{H};\ \mathbf{G}$ *и* $\mathbf{G} \mid\!< \mathbf{G};\ \mathbf{F}$*, онда је* $\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{H};\ \mathbf{F}$.

Теорема 3.5. ([65]) *Нека су дате филтрације* $\mathbf{F}$*,* $\mathbf{G}$*,* $\mathbf{H}$ *на мерљивом простору* $(\Omega, \mathcal{F})$ *и нека су* P *и* $\tilde{P}$ *вероватносне мере на том простору, такве да је* $\tilde{P} \ll P$ *и* $\dfrac{d\tilde{P}}{dP}$ *је* $\mathcal{H}_\infty$*-мерљиво. Тада*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G};\ \mathbf{F};\ P$$

имплицира

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G};\ \mathbf{F};\ \tilde{P}.$$

Теорема 3.6. ([58, 65]) *На простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *дате су филтрације* $\mathbf{F}$*,* $\mathbf{G}$*,* $\mathbf{H}$ *и* $\mathbf{I}$*, такве да је*

$$\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F},\ \mathbf{I} \subseteq \mathbf{F},\ \mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{F}_\infty. \tag{3.6}$$

Тада

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G};\ \mathbf{F} \quad \textit{и} \quad \mathbf{H} \mid\!< \mathbf{I};\ \mathbf{F}$$

имплицира

$$\mathbf{H} \mid\!< (\mathbf{G} \wedge \mathbf{I});\ \mathbf{F}.$$

Теорема 3.7. ([58, 65]) *Нека су на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *дате филтрације* $\mathbf{F}$*,* $\mathbf{G}$*,* $\mathbf{H}$ *и* $\mathbf{I}$*. Тада су следећи искази еквивалентни:*

(i) $\mathbf{I} \mid\!< \mathbf{H};\ \mathbf{G}$ *и* $\mathbf{I} \mid\!< \mathbf{G};\ \mathbf{F}$*;*

(ii) $\mathbf{I} \mid\!< \mathbf{H};\ \mathbf{F}$ *и* $\mathbf{H} \leqslant \mathbf{G} \leqslant \mathbf{F}$.

Дефиниције 3.1 и 3.2 могу се одмах применити на случајне процесе ако говоримо о одговарајућим природним филтрацијама тих процеса.

Дефиниција 3.3. ([58, 62]) *Случајни процеси су у одређеној узрочној вези ако и само ако су природне филтрације тих процеса у тој узрочној вези.*

Специјално, случајан процес $X = \{X_t, t \in I\}$ је сопствени узрок у оквиру $\mathbf{F}$ у односу на P, ако је

$$\mathbf{F}^{\mathbf{X}} \mid\!< \mathbf{F}^{\mathbf{X}};\, \mathbf{F};\, P.$$

Теорема 3.8. ([11, 71]) *Процес $X = \{X_t\}$, $t \in I$, је процес Маркова у односу на филтрацију $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ на простору $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ако и само ако је процес X процес Маркова у односу на филтрацију $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X\}$ и сопствени узрок у оквиру филтрације $\mathbf{F}$ у односу на P.*

Доказ. Нека је X процес Маркова у односу на филтрацију $\mathbf{F}$. Тада је процес X $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран, па је $\mathbf{F}^X \subseteq \mathbf{F}$. Према томе X је процес Маркова и у односу на филтрацију $\mathbf{F}^X$. На основу исказа (ii) Теореме 1.18 имамо

$$(\forall t)\,(\forall A \in \mathcal{F}_\infty^X)\;\; E(\chi_A|\mathcal{F}_t) = E(\chi_A|X_t) \quad \text{с.и.}$$

Како је σ-алгебра индукована случајном промењивом X_t под-σ-алгебра од $\mathcal{F}_t^X$ можемо закључити да је испуњено

$$(\forall t)\,(\forall A \in \mathcal{F}_\infty^X)\;\; P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{F}_t^X) \quad \text{с.и.},$$

тј. важи

$$\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X;\, \mathbf{F};\, P. \blacksquare$$

Очигледно је да важи обратно.

Последица 3.8.1. ([11, 71]) *Процес Брауновог кретања $W = (W_t, \mathcal{F}_t)$, $t \in I$, на простору $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ је сопствени узрок у оквиру филтрације $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ у односу на P.*

Доказ. Тврђење важи на основу претходне теореме, јер је процес W процес Маркова. ■

Случајни процеси, који имају особину да су сопствени узрок, потпуно су описани својим понашањем у односу на $\mathbf{F}^{\mathbf{X}}$. Стога су процеси са особином сопствене узрочности веома интересантна врста процеса за истраживање.

3.2 Узрочност и времена заустављања

У оквиру овог поглавља уводи се нов концепт узрочности сродан претходно датом, али који је повезан са временима заустављања. Наиме, у дефиницији 3.1 се захтева условна независност σ-алгебре $\mathcal{H}_\infty$ и сваке σ-алгебре $\mathcal{F}_t$ када је дато $\mathcal{G}_t$, што не мора да нам буде интересантно уколико посматрамо неки заустављени процес, или ако нас интересује понашање (узрочне везе, особине) процеса само до одређеног случајног тренутка, на пример док процес не достигне одређену вредност, или док се неки догађај не деси први пут и сл. Следећа дефиниција је прилагођена таквим ситуацијама. Подстицај за ово истраживање био је рад [18] Флоренса и Фужера, где они први сугеришу преношење концепта узрочности на σ-алгебре које су повезане са временима заустављања.

Нека је T време заустављања и нека $t \in I = [0, +\infty)$. Тада, на основу особина наведених у Поглављу 1.2, имамо да је

$$\mathcal{H}_{t \wedge T} = \mathcal{H}_t \cap \mathcal{H}_T = \begin{cases} \mathcal{H}_t, & t \leq T \\ \mathcal{H}_T, & T > t \end{cases}$$

и

$$\mathcal{H}_{s \wedge T} \subseteq \mathcal{H}_{t \wedge T}, \quad \text{када је} \quad s < t.$$

Стога је $\mathcal{H}_T = \bigvee_t \mathcal{H}_{t \wedge T}$, и са $\mathbf{H}^T$ је природно означити филтрацију заустављену са T, тј.

$$\mathbf{H}^T = \{\mathcal{H}_{t \wedge T}\}.$$

У даљем тексту се користе управо уведене ознаке, као и њима аналогне за филтрације $\mathbf{I}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$.

Дефиниција 3.4. ([66]) *Нека су на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ дате филтрације $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ и $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$ које имају исти индексни скуп, $t \in I$, и време заустављања T у односу на филтрацију $\mathbf{H}$. Кажемо да је $\mathbf{G}$* ***узрок за** $\mathbf{H}^T$ **у оквиру** $\mathbf{F}$ **у односу на*** *P, у ознаци*

$$\mathbf{H}^T \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P, \tag{3.7}$$

ако је

$$\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}, \tag{3.8}$$

$$\mathcal{H}_T \subseteq \mathcal{F}_\infty \tag{3.9}$$

и

$$(\forall t)\, (\forall A \in \mathcal{H}_T) \;\; P(A \mid \mathcal{G}_t) = P(A \mid \mathcal{F}_t). \tag{3.10}$$

Теорема 3.9. *Нека су $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$, $t \in I$, филтрације на простору вероватноћа са филтрацијом $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.*

(i) *Онда за свако време заустављања T у односу на филтрацију $\mathbf{F}$, такво да је $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{H}_\infty$, из*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P,$$

следи

$$\mathbf{F}^T \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P.$$

Шта више, за $(\mathcal{F}_t)$-адаптирани случајни процес $X = \{X_t\}$ следи

$$\mathbf{F}^{X^T} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P,$$

где је $\mathbf{F}^{X^T} = (\mathcal{F}^X_{t \wedge T})$.

(ii) *За свако време заустављања T у односу на филтрацију $\mathbf{H}$, из*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P,$$

следи

$$\mathbf{H}^T \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P.$$

Доказ.

(i) На основу $\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$, следи да је $\mathcal{H}_\infty \perp \mathcal{F}_t | \mathcal{G}_t$ за свако t, а због $\mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{H}_\infty$ имамо и $\mathbf{F}^T \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P$.
Процес X је $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран, па је $\mathbf{F}^X \subset \mathbf{F}$. Последње имплицира $\mathbf{F}^{X^T} \subseteq \mathbf{F}^T$, а специјално и $\mathcal{F}_T^X \subseteq \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{H}_\infty$. Сада, слично претходном, закључујемо да је $\mathbf{F}^{X^T} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}$.

(ii) Тврђење следи на основу $\mathcal{H}_T \subset \mathcal{H}_\infty$. ■

Ако се систем посматра до неког случајног тренутка, нпр. док се неки догађај не реализује први пут, природно је разматрати узрочност између заустављених филтрација, тј. разматрати

$$\mathbf{H}^T \mid\!< \mathbf{G}^T; \mathbf{F}^T; P, \tag{3.11}$$

где (3.11) значи да је $\mathbf{G}^T \subseteq \mathbf{F}^T$, $\mathcal{H}_T \subseteq \mathcal{F}_T$ и $\mathcal{H}_T$ условно независно од $\mathcal{F}_{t\wedge T}$ када је дато $\mathcal{G}_{t\wedge T}$ за свако t, тј.

$$(\forall t)\ \mathcal{H}_T \perp \mathcal{F}_{t\wedge T} | \mathcal{G}_{t\wedge T}.$$

Напомена 3.2. Приметимо да је $\mathbf{G}^T \subseteq \mathbf{F}^T$ директна последица чињенице $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{F}$, док $\mathcal{H}_T \subseteq \mathcal{F}_\infty$ не имплицира $\mathcal{H}_T \subseteq \mathcal{F}_T$.

Теорема 3.10. *Нека су $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$, $t \in I$, филтрације на простору вероватноћа са филтрацијом $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, такве да је $\mathbf{H} \subset \mathbf{F}$ и нека је $X = \{X_t\}$ $(\mathcal{F}_t)$-адаптиран случајан процес. Тада, за свако време заустављања T у односу на $\mathbf{H}$, из*

$$\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}; P,$$

следи

$$\mathbf{F}^{X^T} \mid\!< \mathbf{G}^T; \mathbf{F}^T; P,$$

где је $\mathbf{F}^{X^T} = (\mathcal{F}^X_{t\wedge T})$.

Доказ. Довољно је показати

$$(\forall A \in \mathcal{F}_T^X)\,(\forall t \in [0, +\infty))\ \ P(A|\mathcal{F}_{t\wedge T}) = P(A|\mathcal{G}_{t\wedge T}). \tag{3.12}$$

За $T \geqslant t$, (3.12) је еквивалентно са $P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{G}_t)$, што је испуњено због $\mathcal{F}_T^X \subset \mathcal{H}_\infty$.

За $T < t$, (3.12) је еквивалентно са $P(A|\mathcal{F}_T) = P(A|\mathcal{G}_T)$. На основу Теореме 3.1, из $\mathbf{H} \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}$ и $\mathbf{H} \subset \mathbf{F}$ следи $\mathbf{H} \subset \mathbf{G} \subset \mathbf{F}$. Дакле, T је време заустваљања и у односу на $\mathbf{G}$. Сада, на основу дела (ii) Теореме 3.16, следи

$$\mathbf{F}^{X^T} \mid\!< \mathbf{G}^T; \mathbf{F}^T; P. \ \blacksquare$$

Последица 3.10.2. *Нека су $X = \{X_t, t \in I\}$ и $Y = \{Y_t, t \in I\}$ $(\mathcal{F}_t)$-адаптирани случајни процеси. Онда, за свако време заустављања T у односу на филтрацију $\mathbf{F}^X$, из*

$$\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P,$$

следи

$$\mathbf{F}^{Y^T} \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P,$$

и

$$\mathbf{F}^{Y^T} \mid\!< \mathbf{F}^{X^T}; \mathbf{F}^T; P.$$

Релација „бити сопствени узрок” за филтрације повезане са временима заустављања има, у извесном смислу, особину транзитивности.

Теорема 3.11. ([69]) *Нека су $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$, $t \in I$, филтрације на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ако је T време заустављања у односу на $\mathbf{H}$, онда из*

$$\mathbf{H}^T \mid\!< \mathbf{H}^T; \mathbf{G}^T; P \quad \text{и} \quad \mathbf{G}^T \mid\!< \mathbf{G}^T; \mathbf{F}^T; P$$

следи

$$\mathbf{H}^T \mid\!< \mathbf{H}^T; \mathbf{F}^T; P.$$

Доказ. Из $\mathbf{H}^T \mid\!< \mathbf{H}^T; \mathbf{G}^T; P$ следи $\mathbf{H}^T \subseteq \mathbf{G}^T$ и

$$(\forall A \in \mathcal{H}_T)(\forall t) \ \ P(A|\mathcal{H}_{t\wedge T}) = P(A|\mathcal{G}_{t\wedge T}).$$

Слично, из $\mathbf{G}^T \mid\!< \mathbf{G}^T; \mathbf{F}^T; P$ следи $\mathbf{G}^T \subseteq \mathbf{F}^T$ и

$$(\forall A \in \mathcal{G}_T)(\forall t) \ \ P(A|\mathcal{G}_{t\wedge T}) = P(A|\mathcal{F}_{t\wedge T}).$$

Дакле, имамо да је $\mathbf{H}^T \subseteq \mathbf{G}^T \subseteq \mathbf{F}^T$ и

$$\begin{array}{ll} (a) & P(A|\mathcal{H}_t) = P(A|\mathcal{G}_t) = P(A|\mathcal{F}_t), \text{ за } \ t < T \\ (b) & P(A|\mathcal{H}_T) = P(A|\mathcal{G}_T) = P(A|\mathcal{F}_T), \text{ за } \ t \geq T, \end{array}$$

што је еквивалентно са $\mathbf{H}^T \mid\!< \mathbf{H}^T; \mathbf{F}^T; P$. $\blacksquare$

Теорема 3.12. ([69]) *Нека су на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задате филтрације $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$, $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$ и $\mathbf{J} = \{\mathcal{J}_t\}$, $t \in I$, и нека је T време заустављања у односу на филтрације $\mathbf{J}$ и $\mathbf{H}$. Онда су следећа тврђења еквивалентна:*

(i) $\mathbf{J}^T \mathrel{|\!\!<} \mathbf{H}^T;\, \mathbf{G}^T$ *и* $\mathbf{J}^T \mathrel{|\!\!<} \mathbf{G}^T;\, \mathbf{F}^T$*;*

(ii) $\mathbf{J}^T \mathrel{|\!\!<} \mathbf{H}^T;\, \mathbf{F}^T$ *и* $\mathbf{H}^T \subseteq \mathbf{G}^T \subseteq \mathbf{F}^T$.

Доказ. Доказимо прво да (i) имплицира (ii). Из $\mathbf{I}^T \mathrel{|\!\!<} \mathbf{H}^T;\, \mathbf{G}^T$ следи $\mathbf{H}^T \subseteq \mathbf{G}^T$ и

$$(\forall A \in \mathcal{I}_T)\ \ P(A \mid \mathcal{H}_{t\wedge T}) = P(A \mid \mathcal{G}_{t\wedge T}),$$

док из $\mathbf{I}^T \mathrel{|\!\!<} \mathbf{G}^T;\, \mathbf{F}^T$ следи $\mathbf{G}^T \subseteq \mathbf{F}^T$ и

$$(\forall A \in \mathcal{I}_T)\ \ P(A \mid \mathcal{G}_{t\wedge T}) = P(A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}).$$

Дакле, имамо да је

$$\mathbf{H}^T \subseteq \mathbf{G}^T \subseteq \mathbf{F}^T$$

и

$$(\forall A \in \mathcal{I}_T)\ \ P(A \mid \mathcal{H}_{t\wedge T}) = P(A \mid \mathcal{G}_{t\wedge T}) = P(A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}),$$

што је заједно еквивалентно са $\mathbf{I}^T \mathrel{|\!\!<} \mathbf{H}^T;\, \mathbf{F}^T$.

Обратно, из (ii) следи

$$(\forall A \in \mathcal{I}_T)\ \ P(A \mid \mathcal{H}_{t\wedge T}) = P(A \mid \mathcal{G}_{t\wedge T}) = P(A \mid \mathcal{F}_{t\wedge T}).$$

Према томе, важи $\mathbf{I}^T \mathrel{|\!\!<} \mathbf{H}^T;\, \mathbf{G}^T$ и $\mathbf{I}^T \mathrel{|\!\!<} \mathbf{G}^T;\, \mathbf{F}^T$. ■

3.3 Узрочност и конвергенције

Увек је интересантно испитати да ли је нека особина инваријантна (стабилна) у случају конвергенције. Прецизније, да ли граница неког конвергентног низа наслеђује особину коју имају чланови тог низа. Неколико наредних резултата је посвећено таквом испитивању када је узрочност у питању.

Први се овом проблематиком бавио Микланд, и следећа теорема представља аналог његовог резултата (али је сада коришћен концепт узрочности из Дефиниције 3.1).

Теорема 3.13. ([66]) *Нека су на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *задате филтрације* $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ *и* $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$, $t \in I$. *Нека је* $\{X^n\}$ *низ случајних процеса такав да*

$$X_t^n \xrightarrow{P} X_t,\ \ n \to +\infty,\ \ \text{за свако } t, \tag{3.13}$$

и

$$\mathbf{F}^{X^n} \mathrel{|\!\!<} \mathbf{G};\, \mathbf{H},\ \text{за свако } n. \tag{3.14}$$

Тада је и процес X *потпуно узрокован са* $\mathbf{G}$ *унутар* $\mathbf{H}$, *тј.*

$$\mathbf{F}^X \mathrel{|\!\!<} \mathbf{G};\, \mathbf{H}. \tag{3.15}$$

Доказ. За дато k и $t_1, \dots, t_k \in I$, нека је $f : (\mathbb{R}^d)^k \to \mathbb{R}$ ограничена непрекидна функција, где је d димензија вектора X_t^n и X_t. Претпоставка

$$X_t^n \xrightarrow{P} X_t$$

имплицира

$$f(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n) \xrightarrow{P} f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}).$$

На основу теореме о доминантној конвергенцији, за сваку σ-алгебру $\mathcal{M}$, имамо

$$E(f(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n)|\mathcal{M}) \xrightarrow{P} E(f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})|\mathcal{M}).$$

Претходно комбиновано са датим релацијама узрочности имплицира да за свако $t \in I$ важи

$$E(f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})|\mathcal{G}_t) = E(f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})|\mathcal{H}_t), \quad \text{с.и.}$$

Како је функција f произвољна, следи да је $\mathcal{F}(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \perp \mathcal{H}_t|\mathcal{G}_t$ за свако $t \in I$. Нека је $\mathcal{U}$ унија свих σ-алгебри $\mathcal{F}(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ када k и $t_1, \dots, t_k$ варирају. Тада је $\mathcal{F}_\infty^X$ најмања σ-алгебра над $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ је затворена за коначне пресеке, па добијамо $\mathcal{F}_\infty^X \perp \mathcal{H}_t|\mathcal{G}_t$ за свако $t \in I$, што је и требало доказати. ■

Теорему 3.13 можемо применити на локалне мартингале.

Пример 3.1. Нека је X локални мартингал и нека је $\{T_n\}$ одговарајући растући низ времена заустављања. Тада $X_t^{T_n} \xrightarrow{P} X_t$, за свако t. Стога, према Теореми 3.13, из $\mathbf{F}^{X^{T_n}} \mid\!< \mathbf{G};\, \mathbf{H}$, за свако n, следи $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{G};\, \mathbf{H}$.

Следећа теорема има нешто измењене претпоставке у односу на претходну.

Теорема 3.14. *Нека су на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ дате филтрације $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ и $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$, $t \in I$, и процес $X = \{X_t\}$, $t \in I$, чија је природна филтрација $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X\}$ непрекидна. Нека је $\widetilde{I}$ подскуп од I такав да је $I \setminus \widetilde{I}$ пребројив скуп. Ако је $\{X^n\}$ низ случајних процеса таквих да*

$$X_t^n \xrightarrow{P} X_t,\ n \to +\infty,\ \text{за свако } t \in \widetilde{I}$$

и

$$\mathbf{F}^{X^n} \mid\!< \mathbf{G};\, \mathbf{H},\ \text{за свако } n,$$

онда за процес X важи

$$\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{G};\, \mathbf{H}.$$

Доказ. Доказ је веома сличан доказу Теореме 3.13. За дато k и $t_1, \dots, t_k \in \widetilde{I}$, нека је $f : (\mathbb{R}^d)^k \to \mathbb{R}$ ограничена непрекидна функција, где је d димензија вектора X_t^n и X_t. Претпоставка $X_t^n \xrightarrow{P} X_t$ за $t \in \widetilde{I}$ имплицира

$$f(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n) \xrightarrow{P} f(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}).$$

На основу теореме о доминантној конвергенцији, за сваку σ-алгебру $\mathcal{M}$, имамо

$$E(f(X^n_{t_1},\dots,X^n_{t_k})|\mathcal{M}) \xrightarrow{P} E(f(X_{t_1},\dots,X_{t_k})|\mathcal{M}).$$

Претходно комбиновано са датим релацијама узрочности имплицира да за свако $t \in \widetilde{I}$ важи

$$E(f(X_{t_1},\dots,X_{t_k})|\mathcal{G}_t) = E(f(X_{t_1},\dots,X_{t_k})|\mathcal{H}_t), \quad \text{с.и.}$$

Како је функција f произвољна, следи да је $\mathcal{F}(X_{t_1},\dots,X_{t_k}) \perp \mathcal{H}_t|\mathcal{G}_t$ за свако $t \in \widetilde{I}$. Нека је $\mathcal{U}$ унија свих σ-алгебри $\mathcal{F}(X_{t_1},\dots,X_{t_k})$ када k и $t_1,\dots,t_k$ варирају. Како је $\mathbf{F}^X = \{\mathcal{F}^X_t\}$ непрекидна, онда је $\mathcal{F}^X_\infty$ најмања σ-алгебра над $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ је затворена за коначне пресеке, па добијамо да важи $\mathcal{F}^X_\infty \perp \mathcal{H}_t|\mathcal{G}_t$ за свако $t \in I$. ∎

Заснивање уведеног концепта узрочности се у потпуности ослања на филтрације, па је природно испитати инваријантност узрочности при конвергенцији филтрација. Разматрана је слаба конвергенција филтрација. Овај концепт је увео Хувер (D. Hoover, 1991) у раду [39], а даље су га развијали Куке, Мемин и Сломински (F. Coquet, J. Mémin, L. Slominski, 2001) у раду [9].

Нека је $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ простор вероватноћа и $\mathbb{D}$ простор càdlàg функција које пресликавају $\mathbb{R}^+$ у $\mathbb{R}$. За $G \in \mathcal{G}$ и филтрацију $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, нека је $M(G,\mathbf{F})$ десно непрекидан $(\mathcal{F}_t)$-мартингал задат са

$$M(G,\mathbf{F})_t = P(G|\mathcal{F}_t).$$

Дефиниција 3.5. ([9]) *Нека су $\mathbf{F}^n$ и $\mathbf{F}$ филтрације на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Низ филтрација $(\mathbf{F}^n)$ конвергира слабо ка филтрацији $\mathbf{F}$ (у ознаци $\mathbf{F}^n \xrightarrow{w} \mathbf{F}$) ако и само ако за свако $G \in \mathcal{F}_\infty$ важи*

$$M(G,\mathbf{F}^n) \xrightarrow{P} M(G,\mathbf{F}), \;\; n \to +\infty,$$

у односу на Скороходову J_1-топологију на $\mathbb{D}$.

Следећи резултат показује инваријантност узрочности у односу на слабу конвергенцију филтрација.

Теорема 3.15. ([66]) *Нека су на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ дате филтрације $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ и $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$, $t \in I$. Нека је $\{X^n\}$ низ случајних процеса на истом простору вероватноћа такав да је испуњено*

$$\mathbf{F}^{X^n} \xrightarrow{w} \mathbf{F}^X, \;\; n \to +\infty$$

и

$$\mathbf{F}^{X^n} \models \mathbf{G};\, \mathbf{H}, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Тада за процес X важи

$$\mathbf{F}^X \models \mathbf{G};\, \mathbf{H}.$$

Доказ. На основу претпоставке $\mathbf{F}^{X^n} \xrightarrow{w} \mathbf{F}^X$, следи да низ càdlàg мартингала $(M(A|\mathbf{F}^{X^n}))$ конвергира у вероватноћи у односу на Скороходову J_1-топологију на $\mathbb{D}$, тј. за свако $A \in \mathcal{F}_\infty^X$ важи

$$M(A|\mathbf{F}^{X^n}) \xrightarrow{P} M(A|\mathbf{F}^X).$$

Према томе,

$$(\forall t \in I)(\forall A \in \mathcal{F}_\infty^X)\, M(A|\mathbf{F}^{X^n})_t \xrightarrow{P} M(A|\mathbf{F}^X)_t.$$

На основу дефиниције мартингала $M(A|\mathbf{F}^{X^n})$ и $M(A|\mathbf{F})$, јасно је да се њихове природне филтрације поклапају са филтрацијама $\mathbf{F}^{X^n}$ и $\mathbf{F}^X$, респективно. Сада, према Теореми 3.13 добијамо жељено тврђење. ■

Овај резултат је интересантан јер се може применити на дискретизације посматраних процеса, као што је то показано у следећем примеру.

Пример 3.2. ([66])Нека је филтрација $\mathbf{F}^Y$ индукована càdlàg процесом Маркова Y, и нека су филтрације $\mathbf{F}^{Y^n}$ индуковане дискретизацијама Y^n процеса Y које су дефинисане поделама интервала $[0, T]$, код којих разлика између два суседна узроковања тежи 0. Онда, као што је доказано Пропозицијом 3. (део II) у раду [9], важи

$$\mathbf{F}^{Y^n} \xrightarrow{w} \mathbf{F}^Y.$$

Сада, на основу Теореме 3.15, из $\mathbf{F}^{Y^n} \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}$ за свако n, следи $\mathbf{F}^Y \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}$.

Теорема 2.6 даје алтернативне карактеризације узрочности помоћу σ-алгебри повезаних са временима заустављања. Слично, следећа теорема даје још једну карактеризацију узрочности у смислу Дефиниције 3.1.

Теорема 3.16. ([66]) *Филтрација $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ узрокује $(\mathcal{H}_t)$-адаптирани процес X у оквиру $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$, тј. $\mathbf{F}^X \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}; P$, ако и само ако постоји растући низ времена заустављања (T_n) (који зависи од X), такав да је*

$$\lim_n T_n = \infty \quad \text{с.и.}$$

и да за свако n важи

$$\mathcal{F}_{T_n}^X \perp \mathcal{H}_t | \mathcal{G}_t.$$

Доказ. Нека важи $\mathbf{F}^X \models\!\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}; P$. Тада је

$$\mathcal{F}_\infty^X \perp \mathcal{H}_t | \mathcal{G}_t,$$

а како је за свако n испуњено

$$\mathcal{F}_{T_n}^X \subseteq \mathcal{F}_\infty^X \subseteq \mathcal{H}_\infty,$$

следи да је

$$\mathcal{F}_{T_n}^X \perp \mathcal{H}_t | \mathcal{G}_t.$$

Према томе, $\mathbf{F}^X \models\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}; P$ имплицира $\mathcal{F}^X_{T_n} \perp \mathcal{H}_t | \mathcal{G}_t$ за свако n.

Обрнуто, за $\phi^n(t) = t \wedge T_n$ имамо да је $\mathbf{F}^{X^{T_n}} = \{\mathcal{F}^X_{\phi^n(t)}\}$. Приметимо да је $(\phi^n(t))$ низ неопадајућих càdlàg функција таквих да

$$\phi^n(t) \to t.$$

Онда, на основу Пропозиције 1. (део II) из рада [9], следи

$$\mathbf{F}^{X^{T_n}} \xrightarrow{w} \mathbf{F}^X.$$

Сада, тврђење следи на основу Теореме 3.15. ■

Последица 3.16.3. ([66]) *Филтрација $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ узрокује $(\mathcal{H}_t)$-адаптирани процес X унутар $\mathbf{H} = \{\mathcal{H}_t\}$, тј. $\mathbf{F}^X \models\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}; P$ ако и само ако постоји растући низ времена заустављања (T_n) (који зависи од X), такав да је $\lim_n T_n = \infty$* с.и. *и да за свако n важи $\mathbf{F}^{X^{T_n}} \models\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}; P$.*

Доказ. Под датим условима релација $\mathbf{F}^{X^{T_n}} \models\!< \mathbf{G}; \mathbf{H}; P$ је еквивалентна са $\mathcal{F}^X_{T_n} \perp \mathcal{H}_t | \mathcal{G}_t$. ■

Заправо, Теорема 2.6 и Теорема 3.16 заједно дају пет еквивалентних начина за дефинисање узрочности, а Теорема 3.17 представља тај резултат исказан у терминологији Флоренса и Фужера. Стога смо у свакој конкретној ситуацији у прилици да бирамо услов који нам највише одговара. На пример, анализа узрочности код процеса бројања углавном ослања на услов (iii) (као што је показано у [18]), док је услов (v) природно користити када је процедура локализације примењена на процес, као што је то случај код локалних мартингала.

Теорема 3.17. *Филтрација $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ не узрокује јако глобално $\mathbf{F}^Z = \{\mathcal{F}^Z_t\}$ када је дата филтрација $\mathbf{G} = \{G_t\}$ ако и само ако је задовољен један од следећих услова:*

(i) *за свако $s \in I$, $\mathcal{F}^Z_\infty \perp \mathcal{F}_s \,|\, \mathcal{G}_s$;*

(ii) *за свако $p \in \mathbb{N}$, за све $t_1, t_2, \ldots, t_p \in I$ и за сваку мерљиву и ограничену функцију φ, $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, важи*

$$E\left(\varphi(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_p} | \mathcal{F}_s)\right) = E\left(\varphi(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_p} | \mathcal{G}_s)\right) \quad \text{с.и.};$$

(iii) *за свако време заустављања S у односу на филтрацију $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ важи*

$$\mathcal{F}^Z_\infty \perp \mathcal{F}_S \,|\, \mathcal{G}_S\,;$$

(iv) *за свако време заустављања T у односу на филтрацију $\mathbf{F}^Z = \{\mathcal{F}^Z_t\}$ и за свако време заустављања S у односу на филтрацију $\mathbf{G} = \{\mathcal{G}_t\}$ важи*

$$\mathcal{F}^Z_T \perp \mathcal{F}_S \,|\, \mathcal{G}_S\,;$$

(v) *йостоји растући низ времена заустављања* (T_n) *(који зависи од* Z*), такав да је*
$$\lim_n T_n = \infty \quad \text{с.и.}$$
и да за свако n *важи*
$$\mathcal{F}^Z_{T_n} \perp \mathcal{F}_t | \mathcal{G}_t.$$

3.4 s-узрочност

Почетни радови Гренџера и Симса, као и већина других објављених радова, разматрају концепте узрочности које претпостављају познавање читаве прошлости посматраних процеса, што је веома јак захтев. Имајући у виду актуелна истраживања стохастичких система с меморијом, односно стохастичких функционалних диференцијалних једначина које укључују сегмент процесе (видети нпр. [49, 82]), постоје разлози за разматрање концепта узрочности (у непрекидном случају) који укључује само коначну прошлост, тј. део прошлости процеса коначне дужине. Поред препоруке за проширење концепта p-узрочности од стране аутора изнете у раду [21], то је и била главна мотивација за истраживање. Дакле, у овом поглављу биће изложени нови резултати који су настали пре свега као проширење идеја изложених пре свега у раду [21] Флоренса (J. P. Florens), Мушара (M. Mouchart) и Ролина (J. M. Rolin) и они представљају оригинални допринос ове дисертације, а објављени су у раду [68].

У оквиру овог поглавља под процесом X увек се подразумева вишедимензионалан случајан процес $X = \{X_t\} = \{(Y_t, Z_t)\}$, $t \in [0,T]$, $T \in \mathbb{R}$. Такође, прегледности ради користићемо следећу нотацију:

- $\mathcal{F}^X_{[0,t]} = \mathcal{F}^X_t = \sigma\{X_u, u \in [0,t]\}$ је ознака за σ-алгебру генерисану са X_u, када $u \in [0,t]$;
- $\mathcal{F}^X_{[t-s,t]} = \sigma\{X_u, u \in [t-s,t]\}$ је ознака за σ-алгебру генерисану са X_u, када $u \in [t-s,t], t > s$.

Аналогно појму процеса Маркова реда p и p-марковости у дискретном случају, следећом дефиницијом се уводи појам s-марковости у непрекидном случају. Напоменимо да специјално у следећим дефиницијама ознака X_t представља σ-алгебру генерисану са X_t.

Дефиниција 3.6. ([68]) *n-димензионалан случајан процес $X = \{X_t\}$ на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ је процес Маркова дужине s ако постоји позитиван број s такав да за свако $t > s$ важи*
$$X_t \perp \mathcal{F}^X_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^X_{[t-s,t]},$$

тј.

$$E(f(X_t)|\mathcal{F}^X_{[0,t]}) = E(f(X_t)|\mathcal{F}^X_{[t-s,t]}),$$

где је функција $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ограничена и мерљива.

Обично се, уместо $X = \{X_t\}$ је процес Маркова дужине s, каже краће X је s-марковски процес.

Следећи резултат повезује s-марковост процеса X и особине његове дискретизације X^n. Ово је битно, јер у пракси смо обично у прилици да радимо само са одговарајућим дискретизацијама случајних процеса са непрекидним параметром.

Теорема 3.18. ([68]) *Нека је на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ дат случајан процес $X = \{X_t\}$, $t \in [0,T]$, непрекидан у вероватноћи. Нека је (π_n), $\pi_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{k_n}^n = T\}$, $n \in \mathbb{N}$, низ све финијих подела интервала $[0,T]$ такав да $|\pi_n| = \max_i |t_i^n - t_{i-1}^n| \to 0$ кад $n \to \infty$ и нека је (X^n) низ случајних процеса дефинисаних на следећи начин*

$$X_t^n = X_{t_i}^n, \; t \in [t_i^n, t_{i+1}^n), \quad \text{и} \quad X_T^n = X_{t_{k_n-1}}^n.$$

Ако је за свако $n > n_0$ процес X^n s_n-марковски и $s_n \nearrow s$ кад $n \to \infty$, онда је процес X s-марковски.

Доказ. Прво треба уочити да на основу дефиниције процеса X^n и непрекидности у вероватноћи процеса X следи да за свако t

$$X_t^n \xrightarrow{P} X_t.$$

Онда за сваку ограничену и непрекидну функцију $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ имамо да

$$f(X_t^n) \xrightarrow{P} f(X_t),$$

а на основу теореме о доминантној конвергенцији, за произвољну σ-алгебру $\mathcal{M}$, важи

$$E(f(X_t^n)|\mathcal{M}) \xrightarrow{P} E(f(X_t)|\mathcal{M}). \tag{3.16}$$

На основу s_n-марковости процесса $\mathbf{X}^n$, за $n > n_0$, имамо да је

$$E(f(X_t^n)|\mathcal{F}^n_{[0,t]}) = E(f(X_t^n)|\mathcal{F}^n_{[t-s_n,t]}). \tag{3.17}$$

Коначно, на основу (3.16), (3.17), $\mathcal{F}^n_{[0,t]} \uparrow \mathcal{F}_{[0,t]}$ и $\mathcal{F}^n_{[t-s_n,t]} \uparrow \mathcal{F}_{[t-s,t]}$ следи

$$E(f(X_t)|\mathcal{F}_{[0,t]}) = E(f(X_t)|\mathcal{F}_{[t-s,t]}) \quad \text{за свако} \quad t \in [0,T],$$

тј. процес $X = \{X_t\}$ је s-марковски.

Дефиниција 3.7. ([68]) *Нека је* $X = \{X_t\} = \{(Y_t, Z_t)\}$ *вишедимензионалан процес. Онда је (под)процес* $Z = \{Z_t\}$ *процес Маркова дужине* s *условно у односу на процес* $Y = \{Y_t\}$ *ако постоји позитиван број* s *такав да за свако* $t > s$ *важи*

$$Z_t \perp \mathcal{F}^Z_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^Y_{[0,t]}, \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]}.$$

Дефиниција 3.7 формализује идеју да маргинална расподела од Z_t када је дата прошлост читавог процеса $\mathbf{X}$, тј. када је дато $\mathcal{F}^X_{[0,t]}$, зависи од сопствене прошлости, $\mathcal{F}^Z_{[0,t]}$, само преко најскорије прошлости дужине s, тј. зависи само од $\mathcal{F}^Z_{[t-s,t]}$. Дакле, Z је у том случају процес Маркова дужине s али условно у односу на информацију садржану у прошлости процеса Y, тј. у односу на информацију садржану у $\mathcal{F}^Y_{[0,t]}$.

Слично као и пре, каже се краће Z је s-марковски процес условно у односу на Y, уместо Z је марковски дужине s условно у односу на процес Y.

Следећа лема повезује појмове из Дефиниције 3.6 и Дефиниције 3.7, и биће потребна касније.

Лема 3.1. ([68]) *Ако је процес* $X = \{X_t\} = \{(Y_t, Z_t)\}$ s*-марковски, онда је процес* $Z = \{Z_t\}$ s*-марковски условно у односу на процес* $Y = \{Y_t\}$.

Доказ. Како је

$$\mathcal{F}^X_{[0,t]} = \mathcal{F}^Y_{[0,t]} \vee \mathcal{F}^Z_{[0,t]}, \quad \mathcal{F}^X_{[t-s,t]} = \mathcal{F}^Y_{[t-s,t]} \vee \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]}$$

и процес X је s-марковски, за свако $t > s$ важи

$$Z_t \perp \mathcal{F}^Y_{[0,t]} \vee \mathcal{F}^Z_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^Y_{[t-s,t]} \vee \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]}. \tag{3.18}$$

Сада из

$$\mathcal{F}^Y_{[t-s,t]} \vee \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]} \subseteq \mathcal{F}^Y_{[0,t]} \vee \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]} \subseteq \mathcal{F}^Y_{[0,t]} \vee \mathcal{F}^Z_{[0,t]}$$

и (3.18) следи

$$Z_t \perp \mathcal{F}^Y_{[0,t]} \vee \mathcal{F}^Z_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^Y_{[0,t]} \vee \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]}. \tag{3.19}$$

Коначно, на основу елементарне особине условне независности, следи

$$Z_t \perp \mathcal{F}^Z_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^Y_{[0,t]} \vee \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]} \,. \;\blacksquare$$

Следећа дефиниција је аналогна Гренџеровој дефиницији неузрочности у дискретном случају.

Дефиниција 3.8. ([68]) *Процес* $Y = \{Y_t\}$ *не узрокује процес* $Z = \{Z_t\}$ *ако је за свако* t *испуњено*

$$Z_t \perp \mathcal{F}^Y_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^Z_{[0,t]}.$$

Следећом дефиницијом се уводи концепт неузрочности када се посматра коначан хоризонт прошлости. Наиме, Дефиниција 3.9 је аналог за непрекидан случај Дефиниције 2.7 дате за дискретан случај. Такође, имајући на уму класификацију и концепте узрочности дате у [18], дати концепт спада у јако-глобалне, а главна разлика овог концепта и јаке-глобалне неузрочности Флоренса и Фужера је посматрање ограниченог дела прошлости уместо читаве прошлости.

Дефиниција 3.9. ([68]) *Ако постоји позитиван број s такав да за свако $t > s$ важи*

$$Z_t \perp \mathcal{F}^Y_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]} \tag{3.20}$$

каже се да процес $Y = \{Y_t\}$ не узрокује процес $Z = \{Z_t\}$ када је интервал (прошлости) дужине s у питању.

Релација (3.20) значи да прошлост процеса Y не садржи било какву информацију потребну за предвиђање процеса Z ако је позната најскорија прошлост дужине s процеса Z.

Обично кажемо да Y s-не узрокује процес Z, уместо процес Y не узрокује процес Z када је интервал (прошлости) дужине s у питању.

Следеће две теореме повезују управо уведене појмове, односно указују на везу између маргиналне и условне s-марковости и неузровчности у односу на ограничену или неограничену прошлост. Оне дају одговор на питање под којим условима неузрочности подпроцес Z наслеђује особину s-марковости од процеса $X = (Y, Z)$.

Теорема 3.19. ([68]) *Нека је $X = \{X_t\} = \{(Y_t, Z_t)\}$ вишедимензионналан процес. Процес $Z = \{Z_t\}$ је s-марковски условно у односу на процес $Y = \{Y_t\}$ и процес Y s-не узрокује процес Z ако и само ако је процес Z s-марковски и Y не узрокује процес Z.*

Доказ. Треба показати да је

$$Z_t \perp \mathcal{F}^Z_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^Y_{[0,t]}, \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]} \tag{3.21}$$

и

$$Z_t \perp \mathcal{F}^Y_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]} \tag{3.22}$$

еквивалентно са

$$Z_t \perp \mathcal{F}^Z_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]} \tag{3.23}$$

и

$$Z_t \perp \mathcal{F}^Y_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^Z_{[0,t]} \,. \tag{3.24}$$

Приметимо да за сваку ограничену Борелову функцију f на основу (3.21) имамо да је

$$E(f(Z_t)|\mathcal{F}^Y_{[0,t]}, \mathcal{F}^Z_{[0,t]}) = E(f(Z_t)|\mathcal{F}^Y_{[0,t]}, \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]}),$$

а на основу (3.22) за сваку ограничену Борелову функцију f имамо да је

$$E(f(Z_t)|\mathcal{F}^Y_{[0,t]}, \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]}) = E(f(Z_t)|\mathcal{F}^Z_{[t-s,t]}).$$

Дакле, (3.21) и (3.22) заједно је еквивалентно са

$$E(f(Z_t)|\mathcal{F}^Y_{[0,t]}, \mathcal{F}^Z_{[0,t]}) = E(f(Z_t)|\mathcal{F}^Y_{[0,t]}, \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]}) = E(f(Z_t)|\mathcal{F}^Z_{[t-s,t]}). \tag{3.25}$$

С друге стране, на основу (3.24) за сваку ограничену Борелову функцију f имамо да је

$$E(f(Z_t)|\mathcal{F}^Y_{[0,t]}, \mathcal{F}^Z_{[0,t]}) = E(f(Z_t)|\mathcal{F}^Z_{[0,t]}),$$

а из (3.23) имамо да је

$$E(f(Z_t)|\mathcal{F}^Z_{[0,t]}) = E(f(Z_t)|\mathcal{F}^Z_{[t-s,t]}).$$

Дакле, (3.23) и (3.24) заједно су такође еквивалентни са (3.25). Према томе, (3.21) и (3.22) је еквивалнтно са (3.23) и (3.24), и обоје је еквивалентно са

$$Z_t \perp \mathcal{F}^Y_{[0,t]}, \mathcal{F}^Z_{[0,t]} \mid \mathcal{F}^Z_{[t-s,t]},$$

чиме је доказ завршен. ■

Ако се у Теореми 3.19 дода претпоставка да је процес X s-марковски онда добијамо следеће тврђење, које се тиче маргиналне s-марковости.

Теорема 3.20. ([68]) *Ако је процес $X = \{X_t\} = \{(Y_t, Z_t)\}$ s-марковски, онда процес $Y = \{Y_t\}$ s-не узрокује процес $Z = \{Z_t\}$ ако и само ако је Z s-марковски процес и Y не узрокује Z.*

Доказ. На основу Леме 3.1 из чињенице да је $X = (X_t)$ s-марковски процес следи да је процес $Z = (Z_t)$ s-марковски условно у односу на процес $Y = (Y_t)$. Сада, тврђење следи на основу Теореме 3.19. ■

Ови резултати откривају дуалну природу моделирања стохастичким процесима: с једне стране је улога неузрочности да обезбеди да подпроцес наследи особину марковости од надпроцеса, а с друге стране је улога марковости да омогући прелаз са неузрочности у односу на неограничену прошлост на неузрочност са ограниченом прошлошћу, и обрнуто. Први аспект је пресудан у фази изградње модела, док је други кључан за фазу тестирања.

Глава 4

Узрочност и адаптиране расподеле случајних процеса

Један од циљева истраживања у оквиру ове дисретације је и повезивање резултата Статистичке теорије узрочности са сродним истраживањима. У оквиру првог поглавља ове главе изложени су основни појмови везани за концепт еквиваленције случајних процеса који су развили Алдус, Кислер, Хувер и Фахардо (D. Aldous, J. Kiesler, D. Hoover, S. Fajardo), чија се имена пре свега везују за развој Теорије модела. Они уводе појам адаптиране расподеле или адаптираног закона (engl. adapted distribution, adapted low), тј. концепт еквивалентности случајних процеса који се своди на то да посматрани процеси имају исту адаптирану расподелу (исти адаптирани закон). Управо тај концепт је у наредном поглављу повезан са узрочношћу. Презентовани резултати представљају оригиналан допринос ове дисертације и објављени су у раду [67].

Специјално, ради прегледнијег записа у оквиру ове главе случајни процеси ће бити означавани на следећи начин $\mathbf{X} = \{X_t\}$.

4.1 Адаптиране расподеле

У овом поглављу је дат преглед неколико појмова еквиваленције случајних процеса који су потребни за излагање резултата у наредном поглављу. У радовима [3, 36, 35, 37, 40, 38, 17] Алдус, Кислер, Хувер и Фахардо уводе и разматрају специфичан тип еквиваленције случајних процеса који се пре свега ослања на идентичне особине посматраних процеса у односу на одговарајуће филтрације.

Ако две случајне променљиве имају исту расподелу онда је то веома јак појам еквиваленције тих случајних променљивих, у том случају се те случајне променљиве могу поистоветити. Међутим, када два случајна процеса имају исту расподелу о њима знамо много мање него у случају променљивих, јер немамо никакве информације о особинама тих процеса које су везане за одговарајуће филтрације, као што су особина адаптираности у односу на неку филтрацију или мартингална особина итд. Стога се природно намеће потреба за увођењем генералнијег појма еквиваленције процеса који би укључио и ососбине процеса у односу на одговарајућу филтрацију. Алдус први разматра један овакав тип еквиваленције који назива синонимност (engl. synonymity).

Дефиниција 4.1. ([36]) *Нека је $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ случајан процес на простору $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и нека је $(Y_t, \mathcal{G}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ други случајан процес који може бити задат и на неком другом простору. Каже се да су процеси $\mathbf{X} = \{X_t\}$ и $\mathbf{Y} = \{Y_t\}$ синонимни (engl. synonytous), у ознаци*

$$\mathbf{X} \equiv_1 \mathbf{Y},$$

ако и само ако за свако $n \in \mathbb{N}$, за све $t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_n \geq 0$ и за све ограничене Борелове функције $\phi, \phi_1, \ldots, \phi_n$ из $\mathbb{R}^n$ у $\mathbb{R}$ важи

$$\begin{aligned} &E[\phi(E[\phi_1(X_{u_1}, \ldots, X_{u_n})|\mathcal{F}_{t_1}], \ldots, E[\phi_n(X_{u_1}, \ldots, X_{u_n})|\mathcal{F}_{t_n}])] \\ &= E[\phi(E[\phi_1(Y_{u_1}, \ldots, Y_{u_n})|\mathcal{G}_{t_1}], \ldots, E[\phi_n(Y_{u_1}, \ldots, Y_{u_n})|\mathcal{G}_{t_n}])]. \end{aligned}$$

Алдус је у раду [3] показао да су неколико битних особина случајних процеса, као што су адаптираност, мартингалност и марковост, сачуване под релацијом синонимности $\mathbf{X} \equiv_1 \mathbf{Y}$. Међутим, то се не може закључити за све особине случајних процеса.

Кислер и Хувер у раду [40] уводе јачи појам еквиваленције два процеса – два процеса имају исту адаптирану расподелу или адаптирани закон. Њихова хипотеза је била да два процеса са истом адаптираном расподелом имају исте вероватносне особине. Успели су да је докажу за скоро све интересантне особине процеса, као што су: адаптираност, мартингалност, марковост, локална мартингалност, семимартигалност. Најјача особина коју су доказали за концепт адаптираних расподела је постојање засићеног простора (engl. spaces with a saturation property), што није испуњено у случају синонимности.

Пре него што прецизно дефинише шта значи да два процеса имају исту адаптирану расподелу, неопходно је увести неколико наредних појмова. Нека је M пољски простор (engl. Polish space), тј. сепарабилан комплетно метризабилан тополошки простор.

Дефиниција 4.2. ([40]) *За свако n, произвољну ограничену непрекидну функцију $\Phi : M^n \to \mathbb{R}$ и произвољан случајан процес $\mathbf{X}$ са вредностима у M, са $\hat{\Phi}\mathbf{X}$ се означава n-димензионалан случајан процес дефинисан са*

$$\hat{\Phi}\mathbf{X}(t_1, \ldots, t_n) = \Phi(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}).$$

Напомена 4.1. *Приметимо да два случајна процеса* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *имају исте коначно димензионалне расподеле ако и само ако за свако* Φ *и за све* $t_1, \ldots, t_n$ *важи*

$$E[\hat{\Phi}\mathbf{X}(t_1, \ldots, t_n)] = E[\hat{\Phi}\mathbf{Y}(t_1, \ldots, t_n)].$$

Коначно димензионалне расподеле процеса $\mathbf{X}$ зависе само од (Ω, P), а не и од филтрације $(\mathcal{F}_t)$, за разлику од следећег појма. Класа CP је фамилија функција f, тзв. условних процеса (engl. conditional process), које сваком случајном процесу $\mathbf{X}$ на Ω додељује n-димензионалан случајан процес $f\mathbf{X}$ на Ω.

Дефиниција 4.3. ([40]) *Класа* CP *условних процеса (у* M*) дефифинише се индуктивно на следећи начин:*

(i) (*база*) *за свако* n *и сваку ограничену непрекидну функцију* $\Phi : M^n \to \mathbb{R}$, *имамо да је* $\hat{\Phi} \in$ CP*;*

(ii) (*композиција*) *Ако* $f_1, \ldots, f_n \in$ CP *и* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *је ограничена и непрекидна функција, онда* $\varphi(f_1, \ldots, f_n) \in$ CP, *где је* $\varphi(f_1, \ldots, f_n)X = \varphi(f_1X, \ldots, f_nX)$*;*

(iii) (*условно очекивање*) *Ако је* f n*-димензионалан условни процес* $fX(t_1, \ldots, t_n)$ *онда је* $E[f|t]$ $(n+1)$*-димензионалан условни процес, где је* $E[f|t]X(t, t_1, \ldots, t_n)$ *једна верзија условног очекивања* $E[fX(t_1, \ldots, t_n)|\mathcal{F}_t]$.

За дати условни процес f број итерација у делу (iii) из претходне дефиниције називамо рангом тог процеса.

Дефиниција 4.4. ([40]) *Ранг условног процеса дефинише се на следећи начин:*

(i) *за свако* n *и* Φ, *условни процес* $\hat{\Phi}$ *има ранг 0;*

(ii) *ранг композиције* $\varphi(f_1, \ldots, f_n)$ *је максимум рангова условних процеса* $f_1, \ldots, f_n$*;*

(iii) *ако условни процес* f *има ранг* r, *онда условни процес* $E[f|t]$ *има ранг* $r + 1$.

Сада се може увести главни појам – имати исту адаптирану расподелу.

Дефиниција 4.5. ([40]) *Два случајна процеса* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *(који могу бити задати и на различитим просторима) имају исту адаптирану расподелу (адаптирани закон), што се записује као* $\mathbf{X} \equiv_{AD} \mathbf{Y}$, *ако је*

$$E[f\mathbf{X}(t_1, \ldots, t_n)] = E[f\mathbf{Y}(t_1, \ldots, t_n)] \tag{4.1}$$

за сваки n*-димензионалан условни процес* f *и све* $(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$.

Напомена 4.2. *Приметимо да* $\mathbf{X} \equiv_0 \mathbf{Y}$ *значи да процеси* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *имају исте коначно димензионалне расподеле.*

Наравно, $\mathbf{X} \equiv_{\mathrm{AD}} \mathbf{Y}$ имплицира $\mathbf{X} \equiv_r \mathbf{Y}$ (за свако r), док обрнуто не важи.

Хувер у раду [38] разматра неколико веома интересантних појмова везаних за случајне процесе и филтрације, који имају доста сличности са особинама узрочности (у смислу Дефиниција 3.1).

Дефиниција 4.6. ([38]) *Подфилтрација* $\mathbf{G}$ *филтрације* $\mathbf{F}$ *је самостална (engl. self-contained) у* $\mathbf{F}$ *(*$\mathbf{G} \subset \mathbf{F}$*) ако су за свако* $t \in \mathbb{R}^+$ σ*-алгебре* $\mathcal{G}_\infty$ *и* $\mathcal{F}_t$ *условно независне када је дато* $\mathcal{G}_t$*, тј. ако важи*

$$(\forall A \in \mathcal{G}_\infty)\, P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{G}_t).$$

Лема 4.1. ([38]) *Пресек фамилије самосталних подфилтрација филтрације* $\mathbf{F}$ *је самостална подфилтрација од* $\mathbf{F}$.

У терминима узрочности појам *самостална филтрација* је аналоган појму *бити сопствени узрок*. Већ је напоменуто да се овај појам под различитим називима среће у разним деловима Теорије случајних процеса.

У раду [38] дат је и појам унутрашње (суштинске) филтрације (engl. intrinsic filtration) који се такође може повезати са узрочношћу. Хувер случајни процес $\mathbf{X}$ на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ посматра као уређен пар $(X, \mathbf{F})$, тј. $\mathbf{X} = (X, \mathbf{F})$, где је $\mathbf{F}$ филтрација на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, а X је $\mathcal{F}_\infty$-мерљива случајна промењљива. Наиме, тада је $X_t = E(X|\mathcal{F}_t)$, где се под једнакошћу подразумева скоро извесна једнакост.

На основу Леме 4.1 намеће се закључак да за сваки процес $\mathbf{X} = (X, \mathbf{F})$ постоји најмања самостална подфилтрација $\mathbf{I}(\mathbf{X})$ филтрације $\mathbf{F}$ таква да је X $\mathcal{I}(\mathbf{X})_\infty-$мерљива. Тада филтрацију $\mathbf{I}(\mathbf{X})$ називамо унутрашњом (суштинском) филтрацијом процеса $\mathbf{X}$.

Исказано у терминима узрочности, унутрашња филтрација процеса $\mathbf{X}$, задатог на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, је најмања филтрација која је сопствени узрок, а која узрокује природну филтрацију $\mathbf{F}^X$ процеса $\mathbf{X}$ унутар филтрације $(\mathcal{F}_t)$.

Нека је $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ простор вероватноћа и нека је $\mathcal{N}_P$ фамилија нула-скупова тог простора. Нека је $(\Lambda, \mathcal{G}, Q)$ неки други простор вероватноћа и нека је $\mathcal{N}_Q$ фамилија нула-скупова тог простора. Изоморфизам σ-алгебри $(\mathcal{F}, P)$ и $(\mathcal{G}, Q)$ је пресликавање $h : \mathcal{F}/\mathcal{N}_P \to \mathcal{G}/\mathcal{N}_Q$ такво да кад год је $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ и $h(F_i/N_P) = G_i/N_Q$, $G_i \in \mathcal{G}$, важи:

1) $P(F_i) = Q(G_i), i = 1, 2,$ и

2) ако је $F_1 \subseteq F_2$, онда је $G_1 \subseteq G_2$ скоро извесно.

Најчешће се врши својеврсна злоупотреба записа писањем само $h(F_i) = h(G_i)$, а изостављањем скоро извесно. Такође, краће се пише само $h(X) = Y$ подразумевајући под тим да једнакост $h(\{X \in B\}) = \{Y \in B\}$ важи за сваки отворен скуп B из њиховог заједничког простора вредности M. На основу елементарне Теорије мере добија се следећи резултат.

Теорема 4.1. ([38]) *За произвољну ограничену Борел-мерљиву реалну функцију ϕ важи:*

1) $h(\phi(X)) = \phi(h(X))$;
2) $E^P[\phi(X)] = E^Q[\phi(h(X))]$.

Нека су дате филтрација $\mathbf{F}$ на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и филтрација $\mathbf{G}$ на простору вероватноћа $(\Lambda, \mathcal{G}, Q)$. Тада се пресликавање h, које је изоморфизам σ-алгебри $(\mathcal{F}_\infty, P)$ и $(\mathcal{G}_\infty, Q)$, назива изоморфизмом филтрација $(\mathbf{F}, P)$ и $(\mathbf{G}, Q)$ ако је за свако $t \in [0, \infty)$ важи $F \in \mathcal{F}_t$ ако и само ако $h(F) \in \mathcal{G}_t$. Следећи резултат следи из Теореме 4.1 и дефиниције условног очекивања.

Теорема 4.2. ([38]) *Ако је пресликавање h изоморфизам филтрација $(\mathbf{F}, P)$ и $(\mathbf{G}, Q)$ и X је произвољна $\mathcal{F}_\infty$-мерљива интеграбилна реална случајна променљива на Ω, онда за свако $t \in [0, \infty)$ важи*

$$h(E[X|\mathcal{F}_t]) = E[h(X)|G_t].$$

У раду [38] (Теорема 2.3) је доказано да процеси $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ имају исту адаптирану расподелу ако и само ако постоји изоморфизам филтрација $h : \mathbf{I}(\mathbf{X}) \to \mathbf{I}(\mathbf{Y})$ такав да је $h(X) = Y$.

При решавању стохастичких диференцијалних једначина, када се тражи слабо решење једначине, често је потребно дати простор вероватноћа проширити. У раду [38] Хувер даје следећу веома корисну дефиницију проширења простора вероватноћа са филтрацијом $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.

Дефиниција 4.7. ([38]) *Простор вероватноћа са филтарцијом $(\dot{\Omega}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Q)$ је проширење простора вероватноћа са филтрацијом $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ ако задовољава следећа три услова:*

(i) *$\dot{\Omega} = \Lambda^1 \times \Omega \times \Lambda^2$ за неке скупове Λ^1 и Λ^2, $\mathcal{G} = \mathcal{H}^1 \times \Omega \times \mathcal{H}^2$, а филтрација $\mathbf{G} = (\mathcal{G}_t)$ је најмања филтрација таква да за свако t важи $\mathcal{G}_t \supseteq \mathcal{H}_t^1 \times F_t \times \mathcal{H}_t^2$ за σ-алгебре $\mathcal{H}_t^i$, такве да је $\mathbf{H}^i = \{\mathcal{H}_t^i\}$ филтрација на Λ^i, $i = 1, 2$;*

(ii) *за свако $F \in \mathcal{F}$ је $\dot{F} = \Lambda^1 \times F \times \Lambda^2 \in \mathcal{G}$ и $Q(\dot{F}) = P(F)$;*

(iii) *за свако s, $\dot{\mathcal{F}}_\infty$ и $\mathcal{G}_s$ су условно независне када је дато $\dot{\mathcal{F}}_s$.*

Сврха ове дефиниције је да обезбеди да индуковани процес $\dot{\mathbf{X}} = (\dot{X}, \mathbf{G})$ на $(\dot{\Omega}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Q)$, задат са

$$\dot{X}(\lambda_1, \omega, \lambda_2) = X(\omega),$$

има исте особине у односу на филтрацију $\mathbf{G} = (\mathcal{G}_t)$ као што их има процес $\mathbf{X} = (X, \mathbf{F})$ у односу на филтрацију $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$.

Теорема 4.3. ([38]) *Нека је* $(\dot{\Omega}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Q)$ *проширење простора вероватноћа са филтрацијом* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *и* $\mathbf{X}$ *случајан процес задат на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. *Тада је* $(X, \mathbf{F}) \equiv_{\mathrm{AD}} (\dot{X}, \mathbf{G})$, *где је* $\dot{\mathbf{X}}$ *одговарајући индуковани процес и при томе је* $h(\mathbf{I}(\mathbf{X})) = \mathbf{I}(\dot{\mathbf{X}})$.

У Дефиницији 4.7 од пресудног значаја је услов (iii) који у терминима узрочности гласи $\dot{\mathbf{F}} \mid\!< \dot{\mathbf{F}}; \mathbf{G}; Q$, тј. захтев да филтрација $\dot{\mathbf{F}}$ буде сопствени узрок унутар $\mathbf{G}$, а већ је указано на последице ове особине.

4.2 Веза узрочности и адаптираних расподела

Следећи резултати дају неке конкретне везе између разматраног концепта узрочности и концепта адаптираних расподела.

Теорема 4.4. ([67]) *Нека је* $\mathbf{X}$ *случајан процес на простору вероватноћа са филтрацијом* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *и нека је* $\mathbf{G} = (\mathcal{G}_t)$ *подфилтрација од* $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$. *Онда је*

$$\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}$$

ако и само ако је

$$(X, \mathbf{G}) \equiv_{\mathrm{AD}} (X, \mathbf{F}).$$

Доказ. Из $(X, \mathbf{G}) \equiv_{\mathrm{AD}} (X, \mathbf{F})$ следи

$$(\forall A \in \mathcal{F}_\infty^X)\, E(I_A|\mathcal{F}_t) = E(I_A|\mathcal{G}_t),$$

односно

$$(\forall A \in \mathcal{F}_\infty^X)\, P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{G}_t),$$

тј.

$$\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}.$$

С друге стране, на основу $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}$ имамо да је

$$(\forall A \in \mathcal{F}_\infty^X)\, P(A|\mathcal{F}_t) = P(A|\mathcal{G}_t),$$

односно

$$(\forall A \in \mathcal{F}_\infty^X)\, E(I_A|\mathcal{F}_t) = E(I_A|\mathcal{G}_t).$$

Тада и за сваку једноставну (степенасту) функцију $f_N(\omega) = \sum_{n=1}^N c_n I_{A_n}(\omega)$ важи

$$E(f_N|\mathcal{F}_t) = E(f_N|\mathcal{G}_t) < E(f_N) < +\infty.$$

За сваку ограничену непрекидну функцију f постоји низ једноставних функција (f_N) који конвергира скоро извесно ка тој функцији, па када $N \to +\infty$, према

Лебеговој теореми о доминантној конвергенцији, за сваку ограничену непрекидну функцију f имамо да је

$$E(f|\mathcal{F}_t) = E(f|\mathcal{G}_t). \tag{4.2}$$

Из једнакости (4.2) и дефиниције n-димензионалног условног процеса f следи да једнакост попут (4.2) важи и за сваки n-димензионалан условни процес f. ■

Последица 4.4.1. ([67]) *Нека је* $\mathbf{X}$ *случајан процес на простору вероватноћа са филтрацијом* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *и нека су* $\mathbf{G}$ *и* $\mathbf{H}$ *подфилтрације филтрације* $\mathbf{F}$ *такве да је* $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{H} \subseteq \mathbf{F}$. *Онда из* $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{G}; \mathbf{F}$ *следи* $(X, \mathbf{G}) \equiv_{\mathrm{AD}} (X, \mathbf{H})$.

Теорема 4.5. ([67]) *Нека је* $\mathbf{X}$ *случајан процес на простору вероватноћа са филтрацијом* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. *Нека је* $(\dot{\Omega}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Q)$ *проширење од* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *у смислу Дефиниције 4.7 и нека је* $\dot{\mathbf{X}}$ *процес индукован процесом* $\mathbf{X}$ *на* $(\dot{\Omega}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Q)$. *Тада, из*

$$\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P$$

следи

$$\mathbf{F}^{\dot{X}} \mid\!< \mathbf{F}^{\dot{X}}; \mathbf{G}; Q.$$

Доказ. На основу $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P$ закључујемо да је $\mathbf{I}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^X$. Како је простор $(\dot{\Omega}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Q)$ проширење простора $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ имамо да је $(X, \mathbf{F}) \equiv_{\mathrm{AD}} (\dot{X}, \mathbf{G})$. Дакле, постоји изоморфизам филтрација $h : \mathbf{F}^X \to \mathbf{I}(\dot{\mathbf{X}})$. Такође, $h(\mathbf{F}^X) = \mathbf{F}^{\dot{X}}$, јер је $\dot{\mathbf{X}}$ индукован процесом $\mathbf{X}$. Дакле, $\mathbf{I}(\dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{F}^{\dot{X}}$, тј. $\mathbf{F}^{\dot{X}} \mid\!< \mathbf{F}^{\dot{X}}; \mathbf{G}; Q$. ■

У радовима [40] и [38] већ је показано да се многе особине случајних процеса задржавају под релацијом $\equiv_{\mathrm{AD}}$, и то се може доказали за особине узрочности.

Теорема 4.6. ([67]) *Нека је* $\mathbf{X}$ *процес на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, *а* $\mathbf{Y}$ *процес на* $(\bar{\Omega}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Q)$, *и нека је* $(X, \mathbf{F}) \equiv_{\mathrm{AD}} (Y, \mathbf{G})$. *Тада*

$$\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P$$

имплицира

$$\mathbf{F}^Y \mid\!< \mathbf{F}^Y; \mathbf{G}; Q.$$

Доказ. Из $(X, \mathbf{F}) \equiv_{\mathrm{AD}} (Y, \mathbf{G})$ следи да постоји изоморфизам филтрација $\mathbf{I}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{I}(\mathbf{Y})$, $h : \mathbf{I}(\mathbf{X}) \to \mathbf{I}(\mathbf{Y})$. Из $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P$ се добија да је $\mathbf{I}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}^X$. Онда, на основу теореме утапања (engl. Amalgamation Theorem, Теорема 3.2 у [38]), постоји заједничко проширење $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\mathcal{H}}_t, \widetilde{P})$ простора $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ и $(\bar{\Omega}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Q)$. На том проширењу постоје процеси $h_1(\mathbf{X}) = \dot{\mathbf{X}} = (\dot{X}, \widetilde{\mathbf{H}})$ и $h_2(\mathbf{Y}) = \dot{\mathbf{Y}} = (\dot{Y}, \widetilde{\mathbf{H}})$ такви да је

$$(\dot{X}, \widetilde{\mathbf{H}}) \equiv_{\mathrm{AD}} (X, \mathbf{F}) \quad \text{и} \quad (\dot{Y}, \widetilde{\mathbf{H}}) \equiv_{\mathrm{AD}} (Y, \mathbf{G}). \tag{4.3}$$

Из (4.3) и $(X,\mathbf{F}) \equiv_{\mathrm{AD}} (Y,\mathbf{G})$ следи да је $(\dot{X},\widetilde{\mathbf{H}}) \equiv_{\mathrm{AD}} (\dot{Y},\widetilde{\mathbf{H}})$ и да постоји изоморфизам филтрација $\dot{h} : \mathbf{I}(\dot{\mathbf{X}}) \to \mathbf{I}(\dot{\mathbf{Y}})$. Онда за сваки скуп $A_Y \in \mathcal{F}^Y_\infty$ важи

$$\begin{aligned} Q(A_Y|\mathcal{G}_t) &= \widetilde{P}(\dot{A}_Y|\widetilde{\mathcal{H}}_t) = \widetilde{P}(\dot{A}_X|\widetilde{\mathcal{H}}_t) \\ &= P(A_X|\mathcal{F}_t) = P(A_X|\mathcal{F}^X_t) \\ &= Q(h(A_X)|\mathcal{F}^Y_t) = Q(A_Y|\mathcal{F}^Y_t), \end{aligned}$$

што значи да је $\mathbf{F}^Y \mid\!< \mathbf{F}^Y;\mathbf{G};Q$. ■

Следећа теорема директно следи из теореме додавања (engl. Adjunction Theorem, Теорема 3.3 у [38]).

Теорема 4.7. ([67]) *Нека су* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *процеси дефинисани на* $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ *и нека важи* $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^Y;\mathbf{F};P$. *Нека је* $\overline{\mathbf{X}}$ *процес дефинисан на* $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathcal{F}_t},\overline{P})$ *и нека важи* $(X,\mathbf{F}) \equiv_{\mathrm{AD}} (\overline{X},\overline{\mathbf{F}})$. *Тада постоји проширење* $(\dot{\Omega},\dot{\mathcal{F}},\dot{\mathcal{F}}_t,\dot{P})$ *простора вероватноћа са филтрацијом* $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mathcal{F}_t},\overline{P})$ *и на њему дефинисани индуковани процеси* $\dot{\mathbf{X}}$ *и* $\dot{\mathbf{Y}}$ *такви да је* $(X,Y,\mathbf{F}) \equiv_{\mathrm{AD}} (\dot{X},\dot{Y},\dot{\mathbf{F}})$ *и* $\mathbf{F}^{\dot{X}} \mid\!< \mathbf{F}^{\dot{Y}};\dot{\mathbf{F}};\dot{P}$.

Један од циљева рада [40] је био указивање на класе случајних процеса за које се релација $\equiv_{\mathrm{AD}}$ може добити на основу мање рестриктивних услова него у општем случају. Теорема 4.8 је допринос у том правцу, и може се сматрати главним резултатом овог поглавља. Следећа лема ће бити потребна за извођење доказа Теореме 4.8.

Лема 4.2. ([67]) *Нека су* $\mathbf{X} = (X_t)$ *и* $\mathbf{Y} = (Y_t)$ *случајни процеси. Ако за сваку ограничену непрекидну функцију* $\overline{h} : M^n \to \mathbb{R}$, *за свако* $n \in \mathbb{N}$ *и сваку* n*-торку* $(t_1,t_2,\ldots,t_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ *важи*

$$E[\overline{h}(X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n})] = E[\overline{h}(Y_{t_1},Y_{t_2},\ldots,Y_{t_n})],$$

онда за сваку ограничену непрекидну функцију $h : M^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ *и сваки низ* $(t_1,t_2,\ldots,t_n,\ldots) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ *важи*

$$E[h(X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n},\ldots)] = E[h(Y_{t_1},Y_{t_2},\ldots,Y_{t_n},\ldots)].$$

Доказ. Ради једноставнијег записа користићемо следеће ознаке:

- $h^X = h(X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n},\ldots)$,
- $h^Y = h(Y_{t_1},Y_{t_2},\ldots,Y_{t_n},\ldots)$,
- $h^X_n = h(X_{t_1},X_{t_2},\ldots,X_{t_n},0,0,\ldots)$,
- $h^Y_n = h(Y_{t_1},Y_{t_2},\ldots,Y_{t_n},0,0,\ldots)$.

Како је функција h ограничена, постоји константа M таква да за свако n важи

$$h_n^X \leq M \quad \text{и} \quad h_n^Y \leq M.$$

Такође, имамо да низ $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}, 0, 0, \ldots)$ конвергира скоро извесно, тј. да важи

$$x_n = (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}, 0, 0, \ldots) \xrightarrow{\text{с.и.}} x = (X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}, \ldots),\ n \to +\infty.$$

Аналогно важи и за процес $\mathbf{Y}$. Како је функција h непрекидна, имамо и скоро извесну конвергенцију низова (h_n^X) и (h_n^Y), тј.

$$h_n^X \xrightarrow{\text{с.и.}} h^X, n \to +\infty,$$

и

$$h_n^Y \xrightarrow{\text{с.и.}} h^Y, n \to +\infty.$$

Сада, на основу Лебегове теореме о доминантној конвергенцији, следи

$$\lim_{n\to+\infty} E[h_n^X] = E[h^X] \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty} E[h_n^Y] = E[h^Y]. \tag{4.4}$$

Дефинишимо функције $\overline{h}_n^X : M^n \to \mathbb{R}$, $\overline{h}_n^Y : M^n \to \mathbb{R}$ са

$$\overline{h}_n^X(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) = h_n^X = h(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}, 0, 0, \ldots)$$

и

$$\overline{h}_n^Y(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}) = h_n^Y = h(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}, 0, 0, \ldots).$$

Сада, због $\mathbf{X} \equiv_0 \mathbf{Y}$ имамо да је за свако n испуњено

$$E[h_n^X] = E[\overline{h}_n^X(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})] = \overline{h}_n^Y(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n})] = E[h_n^Y].$$

На основу последње једнакости и (4.4) закључујемо да је

$$E[h^X] = E[h^Y]. \blacksquare$$

Теорема 4.8. ([67]) *Нека је процес* $\mathbf{X}$ *дефинисан на простору* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *сопствени узрок у оквиру филтрације* $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)$*, тј. нека је* $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P$*, и нека је процес* $\mathbf{Y}$ *дефинисан на простору* $(\overline{\Omega}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, Q)$ *сопствени узрок унутар филтрације* $\mathbf{G} = (\mathcal{G}_t)$*, тј. нека је* $\mathbf{F}^Y \mid\!< \mathbf{F}^Y; \mathbf{G}; Q$*. Тада је* $\mathbf{X} \equiv_{\mathrm{AD}} \mathbf{Y}$ *ако и само ако је* $\mathbf{X} \equiv_1 \mathbf{Y}$.

Доказ. Очигледно је да $\mathbf{X} \equiv_{\mathrm{AD}} \mathbf{Y}$ имплицира $\mathbf{X} \equiv_1 \mathbf{Y}$.

Да се докаже супротно, прво индукцојом треба показати да за сваки n-димензионалан условни процес f и свако $\vec{t} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ постоји ограничена Борелова функција $\psi_{f,\vec{t}} : M^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ таква да је

$$f\mathbf{X}(\vec{t}) = \psi_{f,\vec{t}}(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}, \ldots) \quad \text{с.и.} \tag{4.5}$$

и

$$f\mathbf{Y}(\vec{t}) = \psi_{f,\vec{t}}(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}, \dots) \quad \text{с.и.} \tag{4.6}$$

За сваку ограничену функцију $\Phi : M^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, функција $\psi_{\hat{\Phi},\vec{t}} = \Phi$ има захтеване особине (4.5) и (4.6). Ако је $f \in \mathrm{CP}$ облика $f = \varphi(f_1, \dots, f_m)$ онда је

$$\psi_{f,\vec{t}} = \varphi(\psi_{f_1,\vec{t}}, \dots, \psi_{f_m,\vec{t}}) \, .$$

Ово обезбеђује доказивање индукцојом за ставке база и композиција из Дефиниције 4.3. Остаје да докажемо ставку условно очекивање из Дефиниције 4.3. Нека је $g = E[f|s]$, где је f n-димензионалан условни процес, и претпоставимо да $s \in \mathbb{R}^+$, $\vec{t} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ и $\psi_{f,\vec{t}}$ задовољава (4.5). Како је процес $\mathbf{X}$ сопствени узрок унутар филтрације $\mathbf{F}$ и $\psi_{f,\vec{t}}$ је ограничена, добијамо да је

$$E[\psi_{f,\vec{t}}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \dots)|\mathcal{F}_s] = E[\psi_{f,\vec{t}}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \dots)|\mathcal{F}^X_s].$$

Како је $E[\psi_{f,\vec{t}}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}))|\mathcal{F}^X_s]$ мерљиво у односу на $\mathcal{F}^X_s$, имамо да је

$$E[\psi_{f,\vec{t}}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \dots)|\mathcal{F}^X_s] = h(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}, \dots) \quad \text{с.и.}$$

где је $s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \in [0, s]$ и h је $\mathcal{B}_s$-мерљива функција (видети [45], стр. 22). Стога постоји ограничена Борелова функција $\psi_{g,\vec{s}}$ таква да је

$$g\mathbf{X}(s\vec{t}) = E[\psi_{f,\vec{t}}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \dots)|\mathcal{F}_s] = \psi_{g,\vec{s}}(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}, \dots). \tag{4.7}$$

Из $\mathbf{X} \equiv_1 \mathbf{Y}$ и релација узрочности $\mathbf{F}^X \mid\!< \mathbf{F}^X; \mathbf{F}; P$ и $\mathbf{F}^Y \mid\!< \mathbf{F}^Y; \mathbf{G}; Q$ следи

$$E[h(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \dots)|\mathcal{F}^X_s] = E[h(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}, \dots)|\mathcal{F}^Y_s].$$

Услед последње једнакости ($\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ имају исту транзициону функцију), једнакости (4.6) и (4.7) важе за $\mathbf{Y}$ са истим избором функције $\psi_{g,\vec{s}}$. Ово комплетира индукцију. Коначно, користећи Лему 4.2, добијамо да за свако $f \in \mathrm{CP}$ и све $\vec{t}$ важи

$$E[f\mathbf{X}(\vec{t})] = E[\psi_{f,\vec{t}}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, \dots)] = E[\psi_{f,\vec{t}}(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}, \dots)] = E[f\mathbf{Y}(\vec{t})],$$

тј. $\mathbf{X} \equiv_{\mathrm{AD}} \mathbf{Y}$. ■

У [40] је доказано да за процесе Маркова $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ из $\mathbf{X} \equiv_0 \mathbf{Y}$ следи $\mathbf{X} \equiv_{\mathrm{AD}} \mathbf{Y}$. Претходна теорема даје сличан закључак за ширу класу случајних процеса - процесе који су сопствени узрок. Дакле, за два процеса $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ који су сопствени узрок из $\mathbf{X} \equiv_1 \mathbf{Y}$ следи $\mathbf{X} \equiv_{\mathrm{AD}} \mathbf{Y}$.

4.2.1 Примена узрочности на стохастичке диференцијалне једначине

У оквиру овог одељка разматраће се неке стохастичке диференцијалне једначине и биће дато неколико резултата који повезују њихова слаба решења, узрочност и адаптиране расподеле.

Када се нека једначина решава на задатом простору са филтрацијом и када је познат процес у односу на који се врши интеграција (engl. driving process), тражи се строго (јако) решење те једначине. Али ако се за неку једначину знају само неантиципирајући функционали, и тражи се простор вероватноћа са филтрацијом у којем постоје процес решења $\mathbf{X}$ и процес у односу на који се врши интеграција, а који ће задовољавати једначину, онда је реч о слабом решењу дате једначине.

Нека је $\mathbf{B}^H = \{B_t^H,\, t \in [0,T]\}$ процес фракталног Брауновог кретања са Хурстовим параметром $H \in (0,1)$ дефинисан на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, тј. $\mathbf{B}^H$ је центрирани Гаусовски процес са коваријансом

$$R_H(t,s) = E(B_t^H B_s^H) = \frac{1}{2}\left\{|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right\}.$$

Ако је $H = \frac{1}{2}$, процес $\mathbf{B}^H$ је стандардно Брауново кретање.

Природна филтрација процеса $\mathbf{B}^H = \{B_t^H,\, t \in [0,T]\}$ означава се са $\mathbf{F}^{B^H} = \{\mathcal{F}_t^{B^H}, t \in [0,T]\}$, где је $\mathcal{F}_t^{B^H}$ σ-алгебра генерисана случајним промењивама B_s^H, $s \in [0,t]$, и скуповима вероватноће нула.

Посматраћемо стохастичку диференцијалну једначину

$$X_t = x + B_t^H + \int_0^t b(s, X_s)ds,\ t \in [0,T] \tag{4.8}$$

где је b Борелова функција на $[0,T] \times \mathbb{R}$.

Под слабим решењем једначине (4.8) подразумева се уређени пар $(\mathbf{B}^H, \mathbf{X})$ адаптираних непрекидних процеса дефинисаних на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, таквих да је:

(i) $\mathbf{B}^H$ је $(\mathcal{F}_t)$-фрактално Брауново кретање,

(ii) процеси $\mathbf{X}$ и $\mathbf{B}^H$ задовољавају једначину (4.8).

Понекад се краће каже да је процес $\mathbf{X}$ слабо решење једначине (4.8). Више о оваквим стохастичким једначинама може се наћи на пример у [55].

Теорема 4.9. ([67]) *Нека су процеси $\mathbf{B}^H$ и $\mathbf{X}$ дефинисани на простору $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, а процеси $\overline{\mathbf{B}^H}$ и $\mathbf{Y}$ на простору $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}_t, \overline{P})$ и нека су уређени парови $(\mathbf{B}^H, \mathbf{X})$ и $(\overline{\mathbf{B}^H}, \mathbf{Y})$ слаба решења једначине (4.8). Онда из $(\mathbf{B}^H, \mathbf{X}) \equiv_1 (\overline{\mathbf{B}^H}, \mathbf{Y})$ следи $\mathbf{X} \equiv_{\mathrm{AD}} \mathbf{Y}$ и $\mathbf{B}^H \equiv_{\mathrm{AD}} \overline{\mathbf{B}^H}$.*

Доказ. У раду [65] (Теорема 2.1) је доказано да је сваки процес фракталног Брауновог кретања сопствени узрок и да је свако слабо решење (процес $\mathbf{X}$) једначине (4.8) сопствени узрок (Теорема 1.3). Сада, на основу $\mathbf{B}^H \equiv_1 \overline{\mathbf{B}^H}$ и чињенице да су процеси $\mathbf{B}^H$ и $\overline{\mathbf{B}^H}$ сопствени узроци, према Теореми 4.8, закључујемо да је $\mathbf{B}^H \equiv_{\mathrm{AD}} \overline{\mathbf{B}^H}$. На сличан начин добијамо да је $\mathbf{X} \equiv_{\mathrm{AD}} \mathbf{Y}$. ■

Напомена 4.3. Суштина претходне теореме је да ако су слаба решења једначине (4.8) јединствена до на синонимност, онда су она јединствена до на адптиране расподеле.

Последица 4.9.2. ([67]) *Ако су свака два слаба решења једначине (4.8) синонимна, онда постоји строго решење те једначине, и оно има исту адаптирану расподелу.*

Доказ. Тврђење је директна последица чињенице да је свако строго решење и слабо решење. ■

За сличне једначине са Винеровим процесом (процесом Брауновог кретања) добија се још бољи резултат.

За дати интервал реалне осе $[0,T]$ нека је пресликавање $\alpha : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ мерљива неантиципирајућа функција, а $\mathbf{W} = \{W_t, \mathcal{F}_t, 0 \le t \le T\}$ Винеров процес.

Стохастичка диференцијална једначина

$$dX_t = \alpha(t,X)dt + dW_t \tag{4.9}$$

са почетним условом η, са задатом функцијом расподеле, има слабо решење ако постоји:

(i) простор вероватноће $(\Omega, \mathcal{F}, P)$,

(ii) неопадајућа фамилија под-σ-алгебри $(\mathcal{F}_t), 0 \le t \le T$,

(iii) непрекидан случајан процес $\mathbf{X} = (X_t, \mathcal{F}_t)$,

(iv) Винеров процес $\mathbf{W} = (W_t, \mathcal{F}_t)$ такав да је

$$P\left(\int_0^T |\alpha(t,X)|dt < \infty = 1\right),$$

(v) са вероватноћом 1 за свако t, $0 \le t \le T$, важи

$$X_t = \eta + \int_0^t \alpha(s,X)ds + W_t\,.$$

Често се само процес $\mathbf{X}$ назива слабим решењем једначине (4.9). Више о оваквим стохастичким једначинама може се наћи на пример у [45].

Теорема 4.10. ([67]) *Ако за свака два слаба решења* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *једначине (4.9) важи* $\mathbf{X} \equiv_0 \mathbf{Y}$*, онда сва слаба решења те једначине имају исту адаптирану расподелу.*

Доказ. Свако слабо решење једначине (4.9) је Винеров процес (последица теореме Гирсанова), па има особину марковости. Стога су $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ процеси Маркова са особином $\mathbf{X} \equiv_0 \mathbf{Y}$. На основу Теореме 3.8 имамо да је сваки процес Маркова на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ сопствени узрок унутар $(\mathcal{F}_t)$. Сада, према Теореми 2.8. из рада [40], закључујемо да је $\mathbf{X} \equiv_{\mathrm{AD}} \mathbf{Y}$. ■

Напомена 4.4. Суштина претходне теореме је да су слабо јединствена слаба решења (имају исту расподелу) једначине (4.9) јединствена у AD смислу (имају исту адаптирану расподелу).

Последица 4.10.3. ([67]) *Ако за свака два слаба решења* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *једначине (4.9) важи* $\mathbf{X} \equiv_0 \mathbf{Y}$*, онда постоји строго решење те једначине и оно има исту адаптирану расподелу.*

Доказ. Тврђење следи, јер је свако строго решење уједно и слабо решење. ■

Литература

[1] O. Aalen, Dynamic modelling and causality, Scand. Actuar. J. (1987), 177–190.

[2] O. Aalen, A. Frigressi, What can statistics contribute to a causal understanding?, Scand. J. Statist. 34 (2007), 155–168.

[3] D. Aldous, Weak convergence and the general theory of proccesses, preprint (1981).

[4] M. B. Bouissou, J. J. Laffont, Q. H. Vuong, Tests of non-causality under markov assumptions for qualitative panel data, Econometrica 54 (1986), 395-414.

[5] P. Bremaud, M. Yor, Changes of Filtration and of Probability Measures, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 45 (1978), 269–295.

[6] M. Bunch, Causality, Meridian books, Cleveland (1963).

[7] D. Commenges, A. Gégout-Petit, A general dynamical statistical model with causal interpretation, J. R. Statist. Soc. B 71 (2009), 719–736.

[8] F. Comte, E. Renault, Noncausality in Continuous Time Models, Econometric Theory 12 (1996), 215–256.

[9] F. Coquet, J. Mémin, L. Slominski, On weak convergence of filtrations, Seminare de probabilites (Strasbourg), tome 35 (2001), 306–328.

[10] S. Demiralp, K. D. Hoover, Searching for the causal structure of a vector autoregresion, Oxford Bulletin of Economics and Statistics 65 (2003), 745–767.

[11] S. Dimitrijević, Uzročnost i stohastičke diferencijalne jednačine, magistarska teza, Univerzitet u Kragujevcu, (2005).

[12] J. L. Doob, Stochastic Processes, John Wiley & Sons, New York (1953).

[13] M. Eichler, Granger causality and path diagram for multivariate time series, Journal of Econometrics 137 (2007), 334–353.

[14] M. Eichler, Causal inference in time series analysis, Causality, Statistical Perspectives and Applications, Wiley, Chichester (2012).

[15] M. Eichler and V. Didelez, On Granger-causality and the effect of interventions in time series, Life time data analysis 16 (2010), 3–32.

[16] R. J. Elliott, Stochastic Calculus and Applications. Springer-Verlag, New York, (1982).

[17] S. Fajardo, J. Keisler, Model Theory of Stochastic Processes, Lecture Notes in Logic 14, Association for Symbolic Logic. (2002).

[18] J. P. Florens, D. Fougères, Noncausality in Continuous Time, Econometrica 64 (1996), 1195-1212.

[19] J. P. Florens, M. Mouchart, A Note on Noncausality, Econometrica 50 (1982), 583-591.

[20] J. P. Florens, M. Mouchart, J. M. Rolin, Elements of Bayesian statistics, Dekker, New York, (1990).

[21] J. P. Florens, M. Mouchart, J. M. Rolin, Noncausality and Marginalization of Markov Process, Econometric Theory 9 (1993), 241–262.

[22] A. Gégout-Petit, D. Commenges, A general definition of influence between stochastic processes, Lifetime Data Anal. 16 (2010), 33–44.

[23] J. B. Gill, Lj. Petrović, Causality and Stochastic Dynamic Systems, SIAM J. Appl. Math. 47 (1987), 1361–1366.

[24] I. J. Good, A causal calculus I, British Journal for the Philosophy of Science 11 (1961), 305–318.

[25] I. J. Good, A causal calculus I, Journal of Statistical Computation and Simulation 12 (1980), 77–78.

[26] C. Gourieroux, A. Monfort, E. Renault, Kullback causality measures, Annales d'Economie et de Statistique 6/7 (1987), 369–410.

[27] C. W. J. Granger, Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross Spectral Methods, Econometrica 37 (1969), 424–438.

[28] C. W. J. Granger, P. Newbold, Forecasting economic time series, Academic Press, New York, (1977)

[29] C. W. J. Granger, Testing for Causality - A Personal Viewpoin, Journal of Economic, Dynamics and Control 2 (1980), 329–352.

[30] C. W. J. Granger, Some recent developments in a concept of causality, J. Econometrics 39 (1988), 199–211.

[31] R. S. Hacker, A. J. Hatemi, Tests for causality between integrated variables using asymptotic and bootstrap distributions, theory and application, Applied Economics 38 (2006), 1489-1500

[32] A. J. Hatemi, M. Irandoust, A bootstrap-corrected causality test, another look at the moneyincome relationship, Empirical Economics 31 (2006), 207–216.

[33] C. Hiemstra, J. D. Jones, Testing for linear and nonlinear Granger causality in the stock price - volume relation, Journal of Finance 49 (1994), 1639–1664.

[34] R. Hoffmann, C. Lee, B. Ramasamy, M. Yeung, FDI and pollution, a granger causality test using panel data, Journal of International Development 17 (2005) 311–317.

[35] D. Hoover, Adapted distribution, Probability theory and applications, Proc. World Congr. Bernoulli Soc., Tashkent/USSR 1986, Vol. 1, 201-204 (1987).

[36] D. Hoover, Synonimity, generalized martingales, and subfiltrations, Ann. Probab. 12 (1984), 703–713.

[37] D. Hoover, A characterization of adapted distribution, Ann. Probab. 15 (1987), 1600–1611.

[38] D. Hoover, Extending probability spaces and adapted distribution, Séminare de probabilitités XXVI, Lecture notes in Mathematics 1526 (1992), Springer, Berlin - Heidelberg, 560–574.

[39] D. Hoover, Convergence in distribution and Schorokhod Convergence for the general theory of processes, Probab. Theory Related Fields 89 (1991), 239–259.

[40] D. Hoover, J. Keisler, Adapted probability distributions, Trans. Amer. Math. Soc. 286 (1984), 159–201.

[41] K. D. Hoover, Causality in Macroeconomics, Cambridge University Press, Cambridge (2001).

[42] Y. Hosoya, On the Granger Condition for Non-Causality, Econometrica 45 (1977), 1735–1736.

[43] J. Jacod, A. Shiryaev, Limit Theorem for Stochastic Processes, Springer-Verlag, Berlin - New York - Heidelberg (2002).

[44] S. L. Lauritzen, Causal inference from grafical models, Complex Stochastic Sistems (2001), 63–107.

[45] R. S. Liptser, A. N. Shiryaev, *Statistics of Random Processes I*, Springer-Verlag, New York, (1977).

[46] J. Mališić, Slučajni procesi. Teorija i primene, Građevinska knjiga, Beograd, (1989).

[47] B. Mandelbrot, J. Van Ness, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, SIAM Review 10 (1968), 422–437.

[48] J. R. McCrorie, M. J. Chambers, Granger causality and sampling of economic processes, Journal of Econometrics 132 (2006), 311–336.

[49] S. A. Mohammed, Stochastic differential Systems with Memory, Stochastic Analysis and Related Topics. VI The Geilo Workshop (1996)

[50] M. Mouchart, J. M. Rolin, A Note on Conditional Independence (with Statistical Applications), Statistica 4 (1984), 557–584.

[51] P. A. Mykland, Statistical Causality, University of Bergen (1986).

[52] P. A. Mykland, Stable subspaces over regular solutionsof Martingale problems, University of Bergen (1986).

[53] D. Nualart, Stochastic Processes (Lecture notes), University of Barcelona (1997).

[54] D. Nualart, Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications-lectures. Facultat de Matemàtiques, Universitat de Barcelona, Barcelona (2004).

[55] D. Nualart, Y. Ouknine, Regularization of differential equations by fractal noise, Stochastic Process. Appl. 102 (2002), 103–116.

[56] J. Pearl, Causal diagrams for empirical research (with discussion), Biometrica 82 (1995), 669–710.

[57] J. Pearl, Causality, Models, Reasoning and Inference, Cambridge University Press, Cambridge (2000).

[58] Lj. Petrović, Uzročnost i markovsko svojstvo slučajnog procesa, doktorska disertacija, Prirodno-matematički fakultet u Kragujevcu, (1988).

[59] Lj. Petrović, Causality and Stochastic Realization Problem, Publ. Inst. Math. 45 (1989), 203–210.

[60] Lj. Petrović, Causality and Markovian Representations, Statist. Probab. Lett. 29 (1996), 223–227.

[61] Lj. Petrović, Causality and Markovian Reductions and Extensions of a Family of Hilbert Spaces, Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control 8 (1998), 495-498.

[62] Lj. Petrović, Uzrocnost i markovsko svojstvo - monografija, Ekonomski fakultet, Beograd (2001).

[63] Lj. Petrović, Causality and Realization Problem, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 3 (2005), 349–356.

[64] Lj. Petrović, Markovian extensions of a stochastic process, Statistics and Probability Letters 78 (2008), 810-814.

[65] Lj. Petrović, S. Dimitrijević, Some Models of Causality and Stochastic Differential Equations driven by Fractional Brownian Motion, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 20 (2005), 113–122.

[66] Lj. Petrović, S. Dimitrijević, Invariance of statistical causality under convergence, Statist. Probab. Lett. 81 (2011), 1445-1448.

[67] Lj. Petrović, S. Dimitrijević, Statistical causality and adapted distribution, Czechoslovak Math. J. 61 (2011), 827-843.

[68] Lj. Petrović, S. Dimitrijević, Causality with finite horizon of the past in continuous time, Statist. Probab. Lett. 82 (2012), 1219-1223.

[69] Lj. Petrović, S. Dimitrijević, D. Valjarević, Some Generalizations of Granger Causality in Continuous Time, submitted

[70] Lj. Petrović, D. Stanojević, Some models of causality and weak solutions of stochastic differential equations with driving semimartingales, Facta Univ. Ser. Math. Inform. 20 (2005), 103–112.

[71] Lj. Petrović, D. Stanojević, Statistical Causality, Extremal Measures and Weak Solutions of Stochastic Differential Equations with Driving Semimartingales, J. Math. Model. Algor. 9 (2010), 113–128.

[72] Lj. Petrović, D. Valjarević, Statistical causality and stable subspaces of H^p, Bulletin of the Australian Mathematical Society, available on CJO 2012 doi,10.1017/S0004972712000482

[73] A. Roebroeck, E. Formisano, R. Goebel, Mapping directed influence over the brain using Granger causality and fMRI, Neuroimage 25 (2005), 230-42.

[74] Yu. A. Rozanov, Innovation Processes, V. H. Winston and Sons, New York (1977).

[75] Yu. A. Rozanov, Markov Random Fields, Springer-Verlag, Berlin - New York - Heidelberg (1982).

[76] C. A. Sims, Money, Income and Causality, American Economic Review 62 (1970), 540–562.

[77] A. V. Skorohod, Limit theorems for stochastic processes, Theor. Probability Appl. 1 (1956), 261–290.

[78] D. V. Strook, M. Yor, On extremal solutions of martingale problems, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 13 (1980), 95–164.

[79] P. Suppes, A Probabilistic Theory of Causality, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1970).

[80] N. R. Swanson, C. W. J. Granger, Impulse response function based on a causal approavh to residual ortogonalization in vector autoregressions, Journal of the American Statistical Association 92 (1997), 357–367

[81] D. Valjarević, Lj. Petrović, Statistical causality and orthogonality of local martingales, Statist. Probab. Lett. 82 (2012), 1326-1330.

[82] F. Yan, S. Mohammed, A Stochastic Calculus for Systems with Memory, Stochastic Analysis and Applications 23 (2005), 613-657.

[83] M. Yor, Sur L'Etude des Martingales Continues Extremales, Stochastics 2 (1979), 191–196.

[84] N. Wiener, The theory of prediction, McGraw Hill, New York, (1956).

[85] E. Wong, Stochastic Processes in Information and Dinamical Sistem, McGraw Hill, New York, (1971).

[86] S. Wright, Correlation and causation, Journal of Agricultural Research 20 (1921), 557–585.

Додатак

Summary

Finding the cause or determining what is the cause and what is the consequence are probably one of the eldest problems of science. Philosophy from the beginning deals with these issues in the most general way, but other sciences also try to solve this kind of problems within their object of interest. Based on the results of Probability theory, Theory of random processes and Statistics, *Statistical theory of causality* originated as one of mathematical answers to the problem of determining causality in an arbitrary system.

After the seminal papers of Granger (1969) and Sims (1972) many authors considered different types of stochastically defined causality. These researches mainly belong to predicting theory. Namely, the question of interest is: whether we can predict with the same accuracy in case of reduction of available information. At first, the researches were focused on discrete time stochastic processes (time series). However, as it is pointed out, there is a need for defining causality for continuous time stochastic processes, because many processes of interest have continuous time parameter. Namely, for financial time series is explained that even though the agents have only perceptions in discrete time, the underlying stochastic process of interest is in continuous time. Thus, the development of continuous time modeling in finance is important motivation for considering causality in continuous time. Also, the observed causality in a discrete time model may depend on the length of interval between each two successive samplings.

Mykland (1986) and Florens and Fougères (1996) were the authors of first papers in which we can find definitions of causality in continuous time, given in terms of σ-algebras, i.e. natural filtrations of stochastic processes. Also, in Gill and Petrović (1987) and in Petrović (1996) definition of causality was given in continuous time, but in term of Hilbert spaces, i.e. L^2-framework. Recently, there have been several papers which deal with these themes.

The field of research in this dissertation is consideration of some causality concepts that are generalizations of Granger causality adopted for stochastic processes with continuous time. Also, same relationships of developed concept of causality and already existed related theories (adopted distributions) are considered.

This dissertation, beside *Preface* and *References* with 86 items, consists of four chapters 1. *Theory of random processes - basic notions*; 2. *Theory of causality - review of known results*; 3. *Generalization of Granger causality for stochastic processes with continuous time*; 4. *Causality and adopted distribution of stochastic processes.*

Chapter 1 is a brief overview of notions of theory of probability and stochastic processes that will be use later.

Some known concepts of causality, both in discrete and in continuous case, are presented in Chapter 2. We followed the chronological development of the Statistical theory of causality, and special attention is given to the concepts that have contributed to our researches.

Chapter 3 presents some generalizations of Granger causality adopted for stochastic processes with continuous time. Our original results, related to properties of developed concepts of causality, are given there. Specially we focused our attention to integration of stoping times into considered concept of causality, to invariance of causality under convergence and to relationship between causality and markovianity.

Finally, in Chapter 4, we give connections between considered concept of causality and concept of adapted distribution of stochastic processes (specific concept of equivalence of stochastic processes), which introduced mathematicians from Model theory, Kiesler and Hoover.

Биографија

Слађана Димитријевић (рођ. Јовановић) је рођена 1975. године у Крагујевцу. Основну школу и гимназију завршила је у Крагујевцу.

Природно-математички факултет у Крагујевцу, група Математика, смер Рачунарство и информатика, уписала је 1994. године, а дипломирала у фебруару 1999. године са просечном оценом 9,48.

По дипломирању уписује последипломске магистарске студије на групи Математика, смер Вероватноћа и статистика, на Природно-математичком факултету у Крагујевцу. Магистарску тезу *„Узрочност и стохастичке диференцијалне једначине"*, под менторством проф. др Љиљане Петровић, одбранила је у марту 2005. године.

У Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу 1999. године изабрана је за истраживача приправника, 2000. за асистента приправника, 2005. за асистента за ужу научну област Вероватноћа и статистика, а 2009. године за асистента за ужу научну област Математичка анализа са применама.

Учествовала у раду Семинара из стохастике на Математичком институту Српски академије наука и уметности.

Активни је члан Друштва математичара Србије.

Бави се научно-истраживачким радом у области Теорије вероватноће, Теорије фиксне тачке и Методике наставе математике.

Ангажована је на пројекту основних истраживања Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије (2010-2014).

Коаутор је једне универзитетске збирке и више уџбеника за основну школу.

Учествовала је на седам међународних конференција.

Објавила је седам научних радова, од чега су четири из области дисертације.