Универзитет у Крагујевцу
Природно-математички факултет

Силвана Маринковић

ЈЕДНАЧИНЕ НА НЕКИМ МРЕЖАМА

Докторска дисертација

Крагујевац, 2011.

Садржај

Предговор

Основе проучавања Булових функција и једначина су поставили Boole, Schröder и Löwenheim у другој половини деветнаестог и почетком двадесетог века. Ова област се интензивно развија у другој половини двадесетог века. Тај развој се углавном одвија у два основна правца: у правцу специјализације и правцу генерализације.

Када се говори о специјализацији, мисли се на проучавање појединих врста Булових функција и једначина, као што су просте Булове функције и једначине, вредносне („switching") функције и једначине, Булове диференцијалне једначине, затим на проучавање Булових једначина на појединим врстама Булових алгебри (релационе алгебре, комплетне Булове алгебре), као и њихову примену у разним областима: у детекцији грешака у логичким мрежама, теорији кодирања, теорији аутомата, теорији графова, оптимизацији итд.

Када се говори о генерализацији мисли се на уопштавање познатих резултата о Буловим једначинама на једначине на другим мрежама, као што су ограничене дистрибутивне мреже, псеудокомплементарне дистрибутивне мреже, Стонове алгебре и др. Природно уопштење Булових једначина су једначине на вишевредносној логици. Аксиоматизацијом алгебре која одговара Постовој вишевредносној логици (назване Постовом алгебром) отвара се ново поље генерализације – Постове једначине. И резултати изложени у овом раду представљају генерализацију неких тврђења о Буловим једначинама на једначине на Стоновим алгебрама, вишевредносној логици и Постовим алгебрама.

Рад се састоји од пет поглавља.

Прво, уводно поглавље се састоји од три одељка. Све једначине које су разматране у овом раду су типа Прешићеве апстрактне једначине, па је први одељак уводног поглавља посвећен овој једначини и резултатима које су добили Прешић и његови следбеници. У другом и трећем делу увода, ради лакшег читања текста и прецизности дате су неке добро познате дефиниције и тврђења из универзалне алгебре и теорије мрежа, које ће бити коришћене у даљем тексту.

Основу за проучавање функција и једначина на свим мрежама чине Булове функције и једначине. Многа тврђења која се односе на једначине на Стоновим и Постовим алгебрама представљају генерализацију тврђења која се односе на Булове једначине. То је разлог што су у другом поглављу дати најважнији резултати у проучавању Булових функција и једначина.

У трећем поглављу посматране су једначине на Стоновим алгебрама. У првом одељку наводени су познати резултати о функцијама и једначинама на мрежама уопште. У другом одељку најпре је дата Бецерова теорема која представља уопштење Левенхајмове теореме на једначине на Стоновим алгебрама. Затим је наведена теорема којом се, применом Бецерове методе, описује класа репродуктивних решења једначине на Стоновој алгебри, под условом да је познато једно опште решење. Ова теорема представља оригинални резултат и публикована је у раду *Reproductive general solutions of equations on Stone algebra*, Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, Vol. 16, 1-2 (2010), 1–6.

Четврто поглавље је посвећено једначинама у вишевредносној логици. На крају овог поглавља је наведена теорема у којој је описано једно опште решење једначине са једном непознатом у вишевредносној логици. Овај резултат је објављен у раду *General solutions of equations in multiple-valued logic*, Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing, Vol. 16, 3-5 (2010), 421–426.

У петом поглављу проучаване су једначине на Постовим алгебрама. Ово поглавље се састоји из три одељка. У првом одељку је дата дефиниција Постове алгебре и наведена су правила за операције у Постовим алгебрама, која ће бити коришћена у другом и трећем одељку. Карактеризација Постових функција и њихове најважније особине су изложене у другом одељку. У трећем одељку су разматране Постове једначине. Најпре су наводени познати резултати Carvaillo-a, Serfati-ja и Bordat-a: свођење на једну једначину, услов конзистентности, метода елиминације непознатих, конструкција репродуктивног помоћу партикуларног решења и друго. Затим су приказани добијени резултати у проучавању отвореног проблема који је у раду *Boolean sets and most general solutions of Boolean equations* ([41]) поставио Rudeanu. Наиме, у поменутом раду Rudeanu се бави обратним проблемом од проблема решавања Булове једначине, проблемом налажења Булове функције чије су нуле познате и задате параметарски. Такође, бави се и проблемом одређивања услова које треба да испуњава низ рекурентно задатих интервала да би представљао опште решење неке Булове једначине. На крају, он поставља проблем проширења истраживања на Постове алгебре. До краја овог одељка су приказани добијени оригинални резултати у решавању овог проблема.

* * *

Захваљујем се ментору проф. др Драгићу Банковићу који ме је упутио у ову област, посветио велику пажњу мом раду и значајно допринео овој дисертацији.

Аутор

Глава 1

Увод

Како су све једначине које су проучаване у овом раду типа Прешићеве апстрактне једначине, у првом одељку су наведене најважније дефиниције и тврђења везана за ову једначину. Због прецизности и лакшег читања рада, у другом одељку су дате познате дефиниције оних појмова из универзалне алгебре који ће бити коришћени у раду. Дефиниција мреже, основна правила рачуна и класификација мрежа су наведени у трећем одељку. Посебно је наглашена веза између Булове и Стонове алгебре.

За писање овог дела рада коришћена је, углавном, монографија S. Rudeanu-a „Lattice functions and equations“.

1.1 О једначинама уопште

У разним областима математике изучавају се различите врсте једначина. На први поглед, ништа уопштено (а нетривијално) се не би могло рећи о њима. Међутим, Прешић [32] уводи појам једначине уопште, тј. једначине на скупу, као и појмове општег и репродуктивног решења такве једначине. Оваквом дефиницијом једначине обухваћене су, између осталог, све једначине на мрежама, Постовим и Буловим алгебрама.

Нека је T непразан скуп и r унарна релација на T, дакле подскуп скупа T. Због узајамно једнозначне кореспонденције између скупова $\mathcal{P}(T)$ и $\{0,1\}^T$ (0 и 1 су два различита објекта - логичке вредности), релацију r можемо сматрати и пресликавањем скупа T у скуп $\{0,1\}$.

Дефиниција 1.1. [32] *Под једначином над непразним скупом T подразумевамо једнакост облика $r(x) = 1$, где је r унарна релација на скупу T, односно пресликавање скупа T у скуп $\{0,1\}$. Елементи скупа $S = \{x \in T | r(x) = 1\}$ се зову решења једначине $r(x) = 1$. Ако је $S \neq \emptyset$ кажемо да је једначина конзистентна. Једначина за коју важи $S = T$ је идентитет.*

За овакве једначине Прешић дефинише појмове општег и репродуктивног решења, који ће представљати уопштење познатих појмова општег и репродуктивног решења једначина у разним областима математике.

Дефиниција 1.2. [32] *Нека је* $r(x) = 1$ *конзистентна једначина на скупу* T. *Формула* $x = f(t)$, *где* $f : T \to T$, *одређује опште решење једначине* $r(x) = 1$ *ако и само ако важи*

$$(\forall x \in T)(r(x) = 1 \Longleftrightarrow (\exists t) x = f(t)).$$

Дефиниција 1.3. [32] *Опште решење* $x = f(t)$ *конзистентне једначине* $r(x) = 1$ *на скупу* T, *је репродуктивно ако и само ако важи*

$$(\forall x \in T)(r(x) = 1 \Longrightarrow x = f(x)).$$

Последица 1.1. [32] *Формула* $x = f(t)$, *где* $f : T \to T$, *одређује репродуктивно решење конзистентне једначине* $r(x) = 1$ *на скупу* T *ако и само ако важи*

$$(\forall x \in T)(r(f(x)) = 1 \wedge (r(x) = 1 \Longrightarrow x = f(x))).$$

Од Прешића је потекла и идеја увођења алгебарске структуре на скупу T (не знајући да је ово већ урадио Post [30]). Он уводи елементе 0 и 1 који могу бити ван скупа T или два различита елемента скупа T и дефинише две бинарне парцијалне операције на скупу $T \cup \{0, 1\}$ на следећи начин:

$$x + 0 = 0 + x = x,\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0,\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad (x \in T \cup \{0, 1\}).$$

Такође, он дефинише $' : \{0, 1\} \to \{0, 1\}, \quad 0' = 1,\ 1' = 0$. Користећи ову структуру Прешић даје формулу за налажење свих репродуктивних решења једначине $r(x) = 1$, под условом да је познато једно опште решење.

Теорема 1.1. [32] *Нека је* r *унарна релација на непразном скупу* T *и* $f : T \to T$ *такво пресликавање да формула* $x = f(t)$ *одређује опште решење једначине* $r(x) = 1$. *Формула* $x = F(t)$ *одређује репродуктивно опште решење једначине* $r(x) = 1$ *ако и само ако постоји функција* $g : T \to T$ *таква да важи*

$$F(t) = r(t) \cdot t + r'(t) \cdot f(g(t)).$$

Након Прешића, општа и репродуктивна решења апстрактних једначина изучавали су Банковић, Кечкић, Божић и Chvalina.

Прешић је иницирао и пручавање конзистентне једначине $r(x) = 1$ на коначном скупу $T = \{t_0, \ldots, t_m\}$. Поред операција $+$ и $\cdot$ он је дефинисао и операције

$$x^y = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases} \qquad (x, y \in T \cup \{0, 1\}),$$

као и

$$\sum_{i=0}^{0} x_i = x_0,\ \sum_{i=0}^{n+1} x_i = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) + x_{n+1} \quad (n \in N).$$

Сада је могуће сваку функцију на T записати помоћу претходних операција.

Теорема 1.2. [40] *Свака функција* $f : T \to T$ *се може записати у облику*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i x^{t_i} \quad (x \in T),$$

где су коефицијенти јединствено одређени са

$$f_i = f(t_i) \quad (i = 0, \ldots, m).$$

Проучавање једначине облика

$$a_0 x^{t_0} + a_1 x^{t_1} + \cdots + a_m x^{t_m} = 0, \tag{1.1}$$

где су $a_0, \ldots, a_m \in \{0, 1\}$ а непозната $x \in T$, је такође започео Прешић. Он је дао услов конзистентности и описао њена репродуктивна решења. Банковић [3] даје једноставнији доказ тог резултата. Он такође допуњује Прешићеве резултате следећим тврђењима [8].

Теорема 1.3. [8] *Претпоставимо да је једначина* (1.1) *конзистентна. Функција* $f : T \to T$ *дефинише опште решење једначине* (1.1) *ако и само ако је облика*

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{k=0}^{m} (a^0_{i_k,0} t_{i_k,0} + a_{i_k,0} a^0_{i_k,1} t_{i_k,1} + \ldots &+ a_{i_k,0} a_{i_k,1} \cdots a^0_{i_k,m-1} t_{i_k,m-1} + \\ &+ a_{i_k,0} a_{i_k,1} \cdots a_{i_k,m-1} t_{i_k,m-1}) x^{t_k}, \end{aligned}$$

где су $(i_{k,0}, i_{k,1}, \ldots, i_{k,m})$*, за свако* $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$*, пермутације скупа* $\{0, 1, \ldots, m\}$*, а* $(i_{0,0}, i_{1,0}, \ldots, i_{m,0})$ *је пермутација скупа* $\{0, 1, \ldots, m\}$.

Теорема 1.4. [8] *Претпоставимо да је једначина* (1.1) *конзистентна. Функција* $f : T \to T$ *дефинише репродуктивно опште решење једначине* (1.1) *ако и само ако је облика*

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{k=0}^{m} (a^0_{i_k,0} t_{i_k,0} + a_{i_k,0} a^0_{i_k,1} t_{i_k,1} + \ldots &+ a_{i_k,0} a_{i_k,1} \cdots a^0_{i_k,m-1} t_{i_k,m-1} + \\ &+ a_{i_k,0} a_{i_k,1} \cdots a_{i_k,m-1} t_{i_k,m-1}) x^{t_k}, \end{aligned}$$

где су $(i_{k,0}, i_{k,1}, \ldots, i_{k,m})$*, за свако* $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$*, пермутације скупа* $\{0, 1, \ldots, m\}$*, а* $(i_{0,0}, i_{1,0}, \ldots, i_{m,0}) = (0, 1, \ldots, m)$*).*

1.2 Алгебре. Основни појмови и тврђења

Као што је познато, алгебра **A** је уређени пар (A, F), где је A непразан скуп који се назива носач (универзум, домен), а $F = (f_i)_{i \in I}$ фамилија пресликавања $f_i : A^{n_i} \to A$, $i \in I$, које се називају (основне) операције. Број $n_i \in N \cup \{0\}$ се зове арност операције f_i и обележава са $ar(f_i)$. Посебно, ако је $ar(f_i) = 0$ кажемо да је f_i нуларна операција, тј. $f_i \in A$. Ако је $F = \{f_1, \ldots, f_k\}$ коначан скуп обично се уместо (A, F) пише

$(A, f_1, \ldots, f_k)$ и каже да је алгебра $\mathbf{A}$ типа $\sigma = (ar(f_1), \ldots, ar(f_k))$. Често се алгебра $\mathbf{A}$ означава исто као и њен носач A.

Непразан подскуп B скупа A је затворен за операције из F ако и само ако

$$(\forall i \in I)(\forall x_1, \ldots, x_{n_i} \in B) f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in B,$$

$$(\forall i \in I)(n_i = 0 \Longrightarrow f_i \in B).$$

У том случају се алгебра $(B, (f_i|_{B^{n_i}})_{i \in I})$ зове подалгебра алгебре $\mathbf{A}$.

Пресликавање $\varphi : A \to B$ је хомоморфизам алгебре (A, F) у истотипну алгебру (B, G) ако и само ако за свако $i \in I$ и свако $x_1, \ldots, x_{n_i} \in A$ важи

$$\varphi(f_i(x_1, \ldots, x_{n_i})) = g_i(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_{n_i})).$$

Посебно,

$$(\forall i \in I)(n_i = 0 \Longrightarrow \varphi(f_i) = g_i).$$

Релација еквиваленције $\sim$ скупа A је конгруенција алгебре $\mathbf{A}$ ако и само ако за свако $i \in I$ и свако $x_1, y_1, \ldots, x_{n_i}, y_{n_i} \in A$ важи

$$(\forall k \in \{1, \ldots, n_i\}) x_k \sim y_k \Longrightarrow f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \sim f_i(y_1, \ldots, y_{n_i}).$$

Сада наводимо дефиницију алгебарске функције.

Дефиниција 1.4. [40]

(i) *Пројекције, тј. функције облика*

$$\pi_j(x_1, \ldots, x_n) = x_j \; (j \in \{1, \ldots, n\})$$

су алгебарске функције.

(ii) *Константне функције, тј. функције облика*

$$f_a(x_1, \ldots, x_n) = a \quad (a \text{ је фиксирани елемент из } A)$$

су алгебарске функције.

(iii) *Ако је f основна операција алгебре $\mathbf{A}$ дужине n, а $g_1, \ldots, g_n$ алгебарске функције, онда је $f(g_1, \ldots, g_n)$ алгебарска функција.*

(iv) *Алгебарске функције се добијају само коначном применом* (i), (ii) *и* (iii).

Посебну класу алгебарских функција чине полиноми. То су функције добијене применом (i), (iii) и (iv), тј. функције које се могу изразити термима језика алгебре A. Прецизније:

Дефиниција 1.5. [40]

(i) *Пројекције, тј. функције облика*

$$\pi_j(x_1,\dots,x_n)=x_j\;(j\in\{1,\dots,n\})$$

су полиноми.

(ii) *Ако је f основна операција алгебре $\mathbf{A}$ дужине n, $g_1,\dots,g_n$ полиноми, онда је $f(g_1,\dots,g_n)$ полином.*

(iii) *Полиноми се добијају само коначном применом* (i) *и* (ii).

Напомена 1.1. У дефиницијама 1.4 и 1.5 се користи терминологија коју користе Rudeanu и Beazer. Код неких аутора (Serfati) термин полином се користи за функције из Дефиниције 1.4. Grätzer за терм и полином (у Рудеановом смислу) користи изразе полином и полиномна функција.

Веза између алгебарских функција и полинома је дата у следећем тврђењу.

Теорема 1.5. [40] *Алгебарска функција $g:A^n\to A$ је свака функција облика*

$$g(x_1,\dots,x_n)=p(a_1,\dots,a_m,x_1,\dots,x_n)\quad(x_1,\dots,x_n\in A),$$

где је $m\in N\cup\{0\}$, $a_1,\dots,a_m$ су фиксирани елементи скупа A и $p:A^{m+n}\to A$ је полином.

Дакле, алгебарске функције се добијају из полинома фиксирањем неких променљивих. Одатле следи:

Последица 1.2. *Свака функција добијена из алгебарске функције фиксирањем неких променљивих је такође алгебарска функција.*

Теорема 1.6. [40] *Скуп полинома (алгебарских функција) је затворен за композицију функција.*

Дефиниција 1.6. [14] *Функција $f:A^n\to A$ има својство замене ако и само ако за сваку конгруенцију $\sim$ алгебре A важи*

$$(\forall i\in\{1,\dots,n\})x_i\sim y_i\Longrightarrow f(x_1,\dots,x_n)\sim f(y_1,\dots,y_n).$$

Из дефиниција 1.4 и 1.6 следи

Теорема 1.7. [40] *Свака алгебарска функција има својство замене.*

Да нису све функције са својством замене алгебарске показује Пример 2.1. у Глави 2.

Поменимо још „лепу“ особину функција са својством замене да се оне „чувају“ хомоморфизмима.

Лема 1.1. [24, 14] *Нека су* $(A,(f_i)_{i\in I})$ *и* $(B,(g_i)_{i\in I})$ *истотипне алгебре,* $\varphi : A \to B$ *сирјективни хомоморфизам и* $f : A^n \to A$ *функција са својством замене. Дефинишимо функцију* $g : B^n \to B$ *на следећи начин*

$$g(\varphi(x_1),\ldots,\varphi(x_n)) = \varphi(f(x_1,\ldots,x_n)) \quad (\forall x_1,\ldots,x_n \in A).$$

Тада је g *функција са својством замене.*

Дефиниција 1.7. [40] *Алгебарска једначина над алгебром* $\mathbf{A}$ *је једначина облика*

$$f(X) = g(X),$$

где су $f,g : A^n \to A$ *алгебарске функције алгебре* $\mathbf{A}$*, а* $X = (x_1,\ldots,x_n)$ n*-торка непознатих.*

1.3 Мреже. Дефиниција, особине и класификација.

Најпре наводимо дефиниције мреже (као парцијално уређеног скупа и као алгебре) и дајемо неке њене особине. Затим дефинишемо неке поткласе класе мрежа као што су дистрибутивне мреже, ограничене мреже, Стонове алгебре и Булове алгебре. Посебно ћемо се задржати на Буловим алгебрама као најпроучаванијим мрежама.

Дефиниција 1.8. *Парцијално уређени скуп* $(L,\leq)$ *је мрежа ако и само ако за свако* $x,y \in L$ *постоји* $\sup\{x,y\}$ *и* $\inf\{x,y\}$.

Другу, алгебарску дефиницију мреже је увео Дедекинд.

Дефиниција 1.9. *Нека су* $\wedge$ *и* $\vee$ *бинарне операције на непразном скупу* L*. Уређена тројка* $(L,\wedge,\vee)$ *је мрежа ако и само ако важи:*

$$\begin{array}{lrcll}
(M1) & (x\wedge y)\wedge z &=& x\wedge(y\wedge z), & \\
 & (x\vee y)\vee z &=& x\vee(y\vee z) & (\textit{асоцијативност}),\\
(M2) & x\wedge y &=& y\wedge x, & \\
 & x\vee y &=& y\vee x & (\textit{комутативност}),\\
(M3) & x\wedge(x\vee y) &=& x, & \\
 & x\vee(x\wedge y) &=& x & (\textit{апсорптивност}),\\
(M4) & x\wedge x &=& x, & \\
 & x\vee x &=& x & (\textit{идемпотентност}).
\end{array}$$

Ове две дефиниције мреже су еквивалентне. Ако на мрежи у смислу Дефиниције 1.8 дефинишемо бинарне операције $\vee$ и $\wedge$ на следећи начин

$$x\vee y = \sup\{x,y\}, \quad x\wedge y = \inf\{x,y\},$$

лако се проверава да оне имају особине (M1)-(M4). Обрнуто, ако на мрежи у смислу Дефиниције 1.9 дефинишемо релацију $\leq$ на следећи начин

$$x \leq y \Longleftrightarrow x\vee y = y$$

може се проверити да је $(L, \leq)$ парцијално уређен скуп у коме за свако x и y постоји $\sup\{x, y\} = x \wedge y$ и $\inf\{x, y\} = x \vee y$, па је $(L, \leq)$ мрежа у смислу Дефиниције 1.8. Такође се лако проверава да важи

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y = x. \tag{1.2}$$

Из дефиниције је очигледно да сваки ланац (линеарно уређени скуп) представља мрежу.

Дефиниција 1.10. [40] *Мрежа $(L, \wedge, \vee)$ која има најмањи елеменӣ, означен са 0, и највећи елеменӣ, означен са 1, се зове оīраничена мрежа.*

У ограниченој мрежи $(L, \wedge, \vee)$ за свако x, y важи:

$$0 \leq x, \quad x \leq 1,$$

$$x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1,$$

$$x \wedge 1 = x, \quad x \vee 0 = x,$$

$$x \wedge y = 1 \Leftrightarrow x = y = 1, \quad x \vee y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Напомена 1.2. У ограниченој мрежи важи принцип дуалности, што значи да заједно са неким тврђењем важи и њему дуално тврђење добијено из њега узајамном заменом $\vee$ и $\wedge$, 0 и 1.

Дефиниција 1.11. [40] *Нека је $(L, \wedge, \vee)$ мрежа са најмањим елеменӣом 0 и нека је $x \in L$. Ако ӣосӣоји елеменӣ*

$$x^* = \max\{y \in L | x \wedge y = 0\}$$

онда се x^* зове ӣсеудокомӣлеменӣ елеменӣа x. За елеменӣ x кажемо да је ӣсеудокомӣлеменӣаран. Мрежа L је ӣсеудокомлеменӣарна ако су сви њени елеменӣи ӣсеудокомӣлеменӣарни.

Аналоīно се у мрежи са 1 може дефинисаӣи дуални ӣсеудокомӣлеменӣ x^+ елеменӣа x:

$$x^+ = \min\{y \in L | x \vee y = 1\}.$$

Уколико ӣосӣоји дуални ӣсеудокомӣлеменӣ елеменӣа x кажемо да је елеменӣ x дуално ӣсеудокомӣлеменӣаран. Мрежа је дуално ӣсеудокомӣлеменӣарна ако су сви њени елеменӣи дуално ӣсеудокомӣлеменӣарни.

Очигледно, уколико елемент x има псеудокомплемент, онда је он јединствен. Исто важи и за дуални псеудокомплемент.

Пример 1.1. Сваки ограничени ланац је псеудокомплементаран и дуално псеудокомплементаран јер важи

$$0^* = 1, \quad x^* = 0 \text{ за свако } x \neq 0, \quad 1^+ = 0, \quad x^+ = 1 \text{ за свако } x \neq 1.$$

Приметимо да је свака псеудокомплементарна мрежа ограничена. Заиста, имамо да важи $0^* = 1$ због $\{y \in L | 0 \wedge y = 0\} = L$.

Дефиниција 1.12. *Мрежа* $(L, \wedge, \vee)$ *је дистрибутивна ако и само ако за свако* x, y *и* $z \in L$ *важи*

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z).$$

Лема 1.2. [40] *У псеудокомплементарној дистрибутивној мрежи* L*, за свако* $x, y \in L$ *важи:*

$$x \wedge y = 0 \Leftrightarrow y \leq x^*,$$

$$x \wedge x^* = 0,$$

$$x^* = 1 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$0^* = 1,\ 1^* = 0,$$

$$x \leq x^{**},$$

$$x^{***} = x^*,$$

$$x \leq y \Rightarrow y^* \leq x^*,$$

$$(x \wedge y)^{**} = x^{**} \wedge y^{**},$$

$$(x \vee x^*)^* = 0,$$

$$(x \vee y)^* = x^* \wedge y^*,$$

$$(x \vee y)^{**} = (x^{**} \vee y^{**})^{**}.$$

Лема 1.3. [40] *Следећи идентитети су еквивалентни у свакој псеудокомплементарној дистрибутивној мрежи:*

$$x^* \vee x^{**} = 1,$$

$$(x \wedge y)^* = x^* \vee y^*,$$

$$(x \vee y)^{**} = x^{**} \vee y^{**}.$$

Дефиниција 1.13. [40] *Псеудокомплементарна дистрибутивна мрежа у којој важи било који од еквивалентних услова из Леме* 1.3 *се зове Стонова алгебра. Мрежа која је Стонова алгебра и дуална Стонова алгебра се зове двострука Стонова алгебра.*

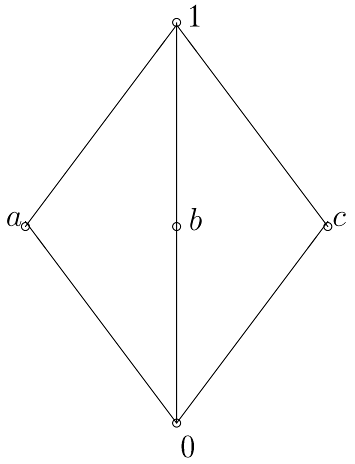
Дефиниција 1.14. [40] *Елемент* x *ограничене мреже* L *је Булов ако постоји елемент* $x' \in L$ *такав да важи*

$$x \wedge x' = 0 \quad \text{и} \quad x \vee x' = 1.$$

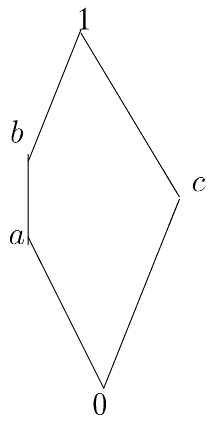
У том случају се елемент x' *зове комплемент од* x*. Мрежа у којој је сваки елемент Булов зове се комплементарна мрежа. Скуп свих комплементарних елемената ограничене мреже* L *ћемо означавати са* $B(L)$*.*

Напомена 1.3. У свакој ограниченој мрежи 0 и 1 су јединствени комплементи једно другом. Остали елементи ограничене мреже не морају имати јединствен комплемент. Елемент ограничене мреже може имати јединствен комплемент, може имати више комплемената а могуће је и да нема комплемент, што се види из следећих примера:

Пример 1.2. У петоелементној ограниченој мрежи „дијамант“ (Сл. 1) чији су најмањи и највећи елемент 0 и 1, а елементи a, b и c међусобно неупоредиви, сваки од елемената a, b, c је комплемент преостала два. Једини псеудокомплементарни елементи су 0 и 1.



Слика 1



Слика 2

Пример 1.3. У петоелементној ограниченој мрежи „петоугао“ (Сл. 2) чији су најмањи и највећи елемент 0 и 1, а за преостале елементе a, b, c важи $a < b$ и c је неупоредиво са преостала два, елементи a и b имају јединствен комплемент (у оба случаја је то c), који је истовремено и њихов псеудокомплемент. Елемент c има два комплемента a и b. Псеудокомплемент од c је b.

Пример 1.4. У ограниченом ланцу ниједан елемент, различит од 0 и 1, нема комплемент.

Међутим, у дистрибутивној мрежи нема свих ових могућности.

Теорема 1.8. [40] *У ограниченој дистрибутивној мрежи сваки Булов елемент има јединствен комплемент.*

Доказ. Нека су y_1 и y_2 комплементи од x. Тада

$$\begin{aligned} y_1 = y_1 \wedge 1 = y_1 \wedge (x \vee y_2) &= (y_1 \wedge x) \vee (y_1 \wedge y_2) = 0 \vee (y_1 \wedge y_2) = \\ &(x \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge y_2) = (x \vee y_1) \wedge y_2 = 1 \wedge y_2 = y_2. \end{aligned}$$

□

Постоји више еквивалентних дефиниција појма Булове алгебре.

Дефиниција 1.15. [40] *Булова алгебра је комплементарна дистрибутивна мрежа.*

Имајући у виду претходне дефиниције и тврђења, Булова алгебра се може дефинисати и на следећи начин:

Дефиниција 1.16. [37] *Алгебра* $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ *типа* $(2,2,1,0,0)$ *је Булова алгебра ако и само ако у њој важе следећи идентитети:*

$$\begin{array}{rclrcl}
(x \wedge y) \wedge z & = & x \wedge (y \wedge z), & (x \vee y) \vee z & = & x \vee (y \vee z), \\
x \wedge y & = & y \wedge x, & x \vee y & = & y \vee x, \\
x \wedge (x \vee y) & = & x, & x \vee (x \wedge y) & = & x, \\
x \wedge (y \vee z) & = & (x \wedge y) \vee (x \wedge z), & x \vee (y \wedge z) & = & (x \vee y) \wedge (x \vee z), \\
x \vee 1 & = & 1, & x \wedge 0 & = & 0, \\
x \vee x' & = & 1, & x \wedge x' & = & 0.
\end{array}$$

Напомена 1.4. Из претходне дефиниције следи да за Булове алгебре важи принцип дуалности. Принцип дуалности такође важи и за двоструке Стонове алгебре.

Теорема 1.9. [40] *У свакој Буловој алгебри* $(B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$*, за свако* $x, y, z \in B$*, важи:*

$$x \wedge x = x, \quad x \vee x = x,$$

$$x \wedge x' = 0, \quad x \vee x' = 1,$$

$$0' = 1, \quad 1' = 0,$$

$$x'' = x,$$

$$(x \wedge y)' = x' \vee y', \quad (x \vee y)' = x' \wedge y',$$

$$x \wedge (x' \vee y) = x \wedge y, \quad x \vee (x' \wedge y) = x \vee y,$$

$$x \leq y \Longrightarrow y' \leq x',$$

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y' = 0 \Longleftrightarrow x' \vee y = 1,$$

$$x = y \Longleftrightarrow (x' \vee y) \wedge (x \vee y') = 1 \Longleftrightarrow (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = 0.$$

Теорема 1.10. [40] *Свака Булова алгебра* B *је двострука Стонова алгебра у којој за свако* $x \in B$ *важи*

$$x^* = x^+ = x'.$$

Доказ. Докажимо најпре да сваки елемент x Булове алгебре $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ има псеудокомплемент $x^* = x'$. Из $x \wedge x' = 0$ следи да $x' \in \{y | x \wedge y = 0\}$. Нека је $y \in B$ такав да је $x \wedge y = 0$. Тада

$$y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee x') = (y \wedge x) \vee (y \wedge x') = 0 \vee (y \wedge x') = y \wedge x',$$

одакле следи $y \leq x'$, па је

$$x' = \max\{y \in B | x \wedge y = 0\} = x^*.$$

Дакле, свака Булова алгебра је псеудокомплементарна дистрибутивна мрежа. Како је $x^* \vee x^{**} = x' \vee x'' = x' \vee x = 1$ следи да је B Стонова алгебра. Из принципа дуалности следи да је B двострука Стонова алгебра. $\square$

Ако у Буловој алгебри $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ дефинишемо операције $+$ и $\cdot$ на следећи начин

$$x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y), \quad x \cdot y = x \wedge y,$$

лако можемо проверити да је алгебра $(B, +, \cdot, 0, 1)$ комутативан прстен са јединицом. Овај прстен се зове Булов прстен. Он је карактеристике 2 ($x + x = 0$, за свако x). У њему је сваки елемент идемпотентан ($x \cdot x = x$, за свако x).

Важи и обратно, сваки Булов прстен са јединицом $(B, +, \cdot, 0, 1)$ постаје Булова алгебра $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$, ако операције дефинишемо на следећи начин:

$$x \wedge y = x \cdot y, \quad x \vee y = x + y + x \cdot y, \quad x' = x + 1.$$

ТЕОРЕМА 1.11. [40] *Ако је L ограничена дистрибутивна мрежа онда је $B(L)$ Булова алгебра.*

ДЕФИНИЦИЈА 1.17. [40] *Елемент x псеудокомплементарне мреже L је регуларан ако и само ако важи $x^{**} = x$. Скуп регуларних елемената мреже L ћемо означавати са $R(L)$.*

Напомена 1.5. Елемент x псеудокомплементарне мреже је регуларан ако и само ако је псеудокомплемент неког елемента, тј. $x = y^*$ за неко $y \in L$.

ЛЕМА 1.4. [40] *Ако је L Стонова алгебра онда је $B(L) = R(L)$ и $x' = x^*$, за свако $x \in B(L)$.*

Доказ. Нека је x' комплемент елемента $x \in B(L)$. Тада из $x \wedge x' = 0$ следи $x' \leq x^*$, па је $1 = x \vee x' \leq x \vee x^*$. Из $x \vee x^* = 1$ добијамо

$$x^{**} = x^{**} \wedge (x \vee x^*) = x^{**} \wedge x \leq x \leq x^{**},$$

па је $x = x^{**}$, односно $x \in R(L)$. Дакле, $B(L) \subseteq R(L)$. Ако $x \in R(L)$ онда $x \wedge x^* = 0$ и $x \vee x^* = x^{**} \vee x^* = 1$ што значи да је x^* комплемент елемента x, тј. $x \in B(L)$. $\square$

Следећа теорема даје везу између Стонове и Булове алгебре.

ТЕОРЕМА 1.12. *Нека је $(L, \wedge, \vee, *, 0, 1)$ Стонова алгебра. Тада*

(i) $(B(L), \wedge, \vee, *, 0, 1)$ *је Булова алгебра.*

(ii) *Пресликавање $\varphi : L \to L$, дефинисано са $\varphi(x) = x^{**}$, је хомоморфизам и важи $\varphi(L) = B(L)$.*

(iii) $L / ker\varphi \cong B(L)$, *при чему* $x \ker\varphi\, y \iff x^* = y^*$, *за* $x, y \in L$.

ПОСЛЕДИЦА 1.3. *Стонова алгебра $(L, \wedge, \vee, *, 0, 1)$ је Булова алгебра ако и само ако је пресликавање $* : L \to L$ инјективно.*

Доказ. Нека је Стонова алгебра $(L, \wedge, \vee, *, 0, 1)$ и Булова алгебра. Тада је $L = B(L)$. Нека су $x, y \in L$ такви да је $x^* = y^*$. Из Леме 1.4 и особина комплементирања и псеудокомплементирања следи да је

$$x = x'' = x^{**} = y^{**} = y'' = y,$$

па је пресликавање $*$ инјективно. Претпоставимо сада да је $*$ инјективно. Докажимо да је $L \subseteq B(L)$. Нека је $x \in L$. Како у Стоновој алгебри важи $x^* = x^{***}$ (за свако $x \in L$), из инјективности $*$ следи да је $x = x^{**}$, па је x регуларан. Према Леми 1.4 следи да $x \in B(L)$. $\square$

Глава 2

Функције и једначине на Буловим алгебрама

Како су од свих једначина на мрежама најпре и највише проучаване алгебарске једначине на Буловим алгебрама (Булове једначине) и како су многа тврђења која се односе на једначине на ширим класама мрежа генерализација одговарајућих тврђења која се односе на Булове једначине, природно је најпре навести најважније резултате у проучавању Булових функција и једначина. За писање овог дела углавном је коришћена монографија S. Rudeanua „Boolean functions and equations“.

2.1 Булове функције

Основе проучавању Боолових функција и једначина су у другој половини деветнаестог и почетком двадесетог века поставили Boole, Schröder и Löwenheim.

Булове функције су алгебарске функције на Буловој алгебри. Прецизније:

Дефиниција 2.1. *Булове функције од n вариабли на Буловој алгебри $(B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ су одређене по следећим правилима:*

1° *Константне функције, тј. функције $f_a : B^n \to B$, $a \in B$, дефинисане са*

$$f_a(x_1, \ldots, x_n) = a \quad (\textit{за свако } x_1, \ldots, x_n \in B)$$

су Булове функције.

2° *Пројекције, тј. функције $\pi_i : B^n \to B$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, дефинисане са*

$$\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i \quad (\textit{за свако } x_1, \ldots, x_n \in B)$$

су Булове функције.

3° *Ако су* $f, g : B^n \to B$ *Булове функције онда су функције* $f \wedge g$, $f \vee g$, $f' : B^n \to B$ *дефинисане са*

$$(f \wedge g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \wedge g(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{за свако } x_1, \dots, x_n \in B),$$

$$(f \vee g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) \vee g(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{за свако } x_1, \dots, x_n \in B),$$

$$f'(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1, \dots, x_n))' \quad (\text{за свако } x_1, \dots, x_n \in B)$$

такође Булове функције.

4° *Свака Булова функција се добија применом правила* $1°, 2°$ *и* $3°$ *коначан број пута.*

Дефиниција 2.2. *Булове функције које се добијају применом правила* $2°$, $3°$ *и* $4°$ *се зову просте Булове функције.*

Уведимо следеће ознаке:

Операцију $\wedge$ ћемо означавати са $\cdot$ или ћемо изоставити знак за операцију. За $x \in B$ и $\alpha \in \{0, 1\}$ нека је

$$x^1 = x, \quad x^0 = x',$$

а за $X = (x_1, \dots, x_n) \in B^n$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$ нека је

$$X^A = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Карактеризацију Булових функција даје следећа теорема.

Теорема 2.1. *Нека је* $(B, \cdot, \vee, ', 0, 1)$ *Булова алгебра и* n *природан број. Функција* $f : B^n \to B$ *је Булова ако и само ако се може написати у облику*

$$f(X) = \bigvee_{A \in \{0,1\}^n} c_A X^A \quad (\forall X \in B^n), \tag{2.1}$$

где су коефицијенти c_A *јединствено одређени са*

$$c_A = f(A) \quad (\forall A \in \{0, 1\}^n).$$

Десна страна једнакости (2.1) се зове канонска дисјунктивна форма функције f.

Дефиниција 2.3. *Нека је* $B_2 = \{0, 1\}$ *двоелементна Булова алгебра и* $n \in N$. *Свака функција* $f : B_2{}^n \to B_2$ *се зове вредносна функција.*

Лако се може проверити да је свака вредносна функција проста Булова функција, а самим тим и Булова функција. Међутим, на Буловој алгебри $B \neq B_2$ постоје функције које нису Булове. На пример, дефинишимо $f : B^n \to B$ тако да $f(A) = 0$, за свако $A \in \{0, 1\}^n$, и $f(\Xi) = 1$, за неко $\Xi \in B^n \setminus \{0, 1\}^n$. Ако би ова функција била Булова, онда би се могла написати у канонској дисјунктивној форми (Теорема 2.1), одакле би следило $f(\Xi) = 0$, контрадикција.

Теорема 2.2. [23] *Нека је* B *Булова алгебра. Функција* $f : B^n \to B$ *је Булова ако и само ако има својство замене.*

2.2 Булове једначине

Булове једначине дефинишемо као алгебарске једначине (Дефиниција 1.7) на Буловим алгебрама:

Дефиниција 2.4. *Булова једначина (неједначина) са n непознатих на Буловој алгебри B је једначина (неједначина) облика*

$$f(X) = g(X) \quad (f(X) \leq g(X)), \tag{2.2}$$

где су $f, g : B^n \to B$ Булове функције, а $X = (x_1, \ldots, x_n)$ n-торка непознатих. Ако за $A \in B^n$ важи $f(A) = g(A)$ $(f(A) \leq g(A))$ онда је A партикуларно решење једначине (неједначине) (2.2). *Решити Булову једначину (неједначину) значи одредити скуп свих њених решења. Ако је тај скуп решења непразан кажемо да је једначина (неједначина) конзистентна. Две једначине (неједначине) су еквивалентне ако имају једнаке скупове решења.*

Теорема 2.3. *Свака Булова једначина или неједначина или систем једначина и/или неједначина је еквивалентна једној Буловој једначини облика $f(X) = 0$.*

Нека је $X = (x_1, \ldots, x_n), T = (t_1, \ldots, t_n)$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : B^n \to B$ Булове функције.

Дефиниција 2.5. *Формула*

$$X = (\varphi_1(T), \ldots, \varphi_n(T))$$

дефинише опште решење конзистентне Булове једначине $f(X) = 0$ ако и само ако

$$(\forall X \in B^n)\left(f(X) = 0 \Leftrightarrow (\exists T) X = (\varphi_1(T), \ldots, \varphi_n(T))\right).$$

Дефиниција 2.6. *Формула*

$$X = (\varphi_1(T), \ldots, \varphi_n(T))$$

дефинише репродуктивно решење конзистентне Булове једначине $f(X) = 0$ ако и само ако

$$(\forall X \in B^n)\left(f(X) = 0 \Leftrightarrow X = (\varphi_1(X), \ldots, \varphi_n(X))\right).$$

Приметимо да су ове дефиниције сагласне Дефиницији 1.2 општег и Дефиницији 1.3 репродуктивног општег решења једначине уопште.

Посматрајмо најпре Булове једначине са једном непознатом, тј. једначине облика $f(x) = 0$, где је $f : B \to B$ Булова функција. Из Теореме 2.1 следи да је свака Булова једначина са једном непознатом облика

$$ax \vee bx' = 0, \quad a, b \in B.$$

Услов конзистентности ове једначине, решење у облику интервала, као и репродуктивно параметарско решење је дао Schröder.

Теорема 2.4. *Нека је* $(B, \cdot, \vee, ', 0, 1)$ *Булова алгебра и* $a, b, x \in B$. *Следећи услови су еквивалентни*

(i) $ax \vee bx' = 0$;

(ii) $b \leq x \leq a'$.

Теорема 2.5. *Булова једначина* $ax \vee bx' = 0$ *је конзистентна ако и само ако* $ab = 0$. *У том случају формула*

$$x = b \vee a't$$

или, еквивалентно,

$$x = a't \vee bt'$$

дефинише репродуктивно опште решење ове једначине.

Посматрајмо сада Булову једначину са n непознатих $f(X) = 0$, где је $f : B^n \to B$ Булова функција. Проблем њене конзистентности су решили Boole и Schröder.

Теорема 2.6. *Нека је* $f : B^n \to B$ *Булова функција. Једначина*

$$f(X) = 0 \tag{2.3}$$

је конзистентна ако и само ако

$$\prod_A f(A) = 0.$$

Решавање једначине (2.3) се методом сукцесивних елиминација непознатих своди на решавање n једначина са једном непознатом. Решење се може изразити или рекурентним неједнакостима или параметарски.

Дефиниција 2.7. [18] *Нека је* $f : B^n \to B$ *Булова функција. Пресликавања* $f_i : B^{n-i} \to B$, $(i = 1, \ldots n)$ *дефинисана са*

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= f(x_1, \ldots, x_n) \\ f_i(x_i, \ldots, x_n) &= f_{i-1}(1, x_i, \ldots, x_n) f_{i-1}(0, x_i, \ldots, x_n) \quad (i = 2, \ldots, n) \\ f_{n+1} &= f_n(1) f_n(0) \end{aligned}$$

ћемо звати елиминантама функције f.

Теорема 2.7. [18] *Нека је* $f : B^n \to B$ *Булова функција. Ако је* $f_{n+1} = 0$ *онда је једначина*

$$f(X) = 0$$

конзистентна и скуп решења је описан рекурентним неједнакостима

$$\begin{aligned} f_n(0) \leq \quad & x_n \quad \leq f_n'(1) \\ f_i(0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \leq \quad & x_i \quad \leq f_i'(1, x_{i+1}, \ldots, x_n) \quad (i = n-1, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Следећа теорема (Löwenheim) даје формулу за добијање репродуктивног решења Булове једначине уколико је познато једно партикуларно решење те једначине.

ТЕОРЕМА 2.8. [26] *Нека је ξ партикуларно решење Булове једначине $f(X) = 0$. Тада формула*

$$X = \xi f(T) \vee T f'(T)$$

дефинише репродуктивно опште решење једначине $f(X) = 0$.

Дакле, за примену ове теореме потребно је познавање једног партикуларног решења. У неким случајевима је оно унапред дато или се лако може погодити. Сам Löwenheim је предложио налажење једног партикуларног решења из канонске дисјунктивне форме функције f: ако терм X^A недостаје у њој то значи да је $f(A) = 0$, па је $X = A$ једно решење једначине $f(X) = 0$. Наравно, може се десити да ова једначина, иако је конзистентна, нема решење у скупу $\{0,1\}^n$. Тада се партикуларно решење може добити из рекурентних неједнакости (2.4) са n узастопних избора. Бирајући увек најмање x_i добијамо партикуларно решење $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ за које важи $\xi_i = f_i(0, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)$ $(i = 1, \ldots n)$.

Применом Löwenheim-ове теореме доказује се следећа, Müller- Löwenheim-ова теорема, која се веома користи приликом доказивања идентитета који важе у Буловим алгебрама. Она каже да неки идентитет важи на Буловој алгебри ако и само ако важи на подалгебри $\{0,1\}$.

ТЕОРЕМА 2.9. [26, 29] *Нека је $(B, \cdot, \vee, ', 0, 1)$ Булова алгебра. Тада важи*

$$(\forall X \in B^n) f(X) = 0 \Longleftrightarrow (\forall A \in \{0,1\}^n) f(A) = 0.$$

ПОСЛЕДИЦА 2.1. *Нека су $f, g : B^n \to B$ Булове функције и нека је бар једна од једначина $f(X) = 0$, $g(X) = 0$ конзистентна. Тада*

$$(\forall X \in B^n))(f(X) = 0 \Longleftrightarrow g(X) = 0) \quad \text{ако и само ако} \quad f = g.$$

Банковић у [4] даје генерализацију Левенхајмове теореме. Наиме, он даје формулу за одређивање свих репродуктивних решења конзистентне Булове једначине под условом да је познато једно опште решење.

ТЕОРЕМА 2.10. [4] *Нека је B Булова алгебра и $f, g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n : B^n \to B$ Булове функције. Нека је формулама*

$$x_i = g_i(T) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

одређено опште решење конзистентне Булове једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Формуле

$$x_i = h_i(T) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

дефинишу опште репродуктивно решење једначине $f(X) = 0$ ако и само ако постоје Булове функције $p_1, \ldots p_n : B^n \to B$ тако да је

$$h_i(T) = t_i f'(T) \vee f(T) g_i(p_1(T), \ldots, p_n(T)) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Глава 3

Једначине на Стоновим алгебрама

Алгебарским једначинама на ограниченим дистрибутивним мрежама је први почео да се бави Goodstein [21]. Он је дао услов конзистенности и алгоритам за налажење решења, ако оно постоји. Касније је Beazer показао да се у Стоновим алгебрама неки од ових резултата могу уопштити на ширу класу функција и једначина од алгебарских, на класу функција са својством замене.

3.1 Функције и једначине на мрежама

Алгебарске функције на мрежи $(L, \wedge, \vee)$ су (Дефиниција 1.4) функције добијене од константних функција и пројекција коначном применом операција $\wedge$ и $\vee$.

Теорема 3.1. [21] *Нека је $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ ограничена дистрибутивна мрежа, $n \in N$ и $M = \{1, \ldots, n\}$. Функција $f : L^n \to L$ је алгебарска ако и само ако се може записати у облику*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{S \subseteq M} f(\delta_{S_1}, \ldots, \delta_{S_n}) \wedge \bigwedge_{h \in S} x_h,$$

где је

$$\delta_{S_h} = \begin{cases} 1, & h \in S \\ 0, & h \notin S \end{cases} \text{ за свако } S \subseteq M.$$

Последица 3.1. *Алгебарска функција $f : L^n \to L$ на ограниченој дистрибутивној мрежи L је потпуно одређена својом рестрикцијом на $\{0, 1\}^n$.*

Алгебарске једначине на мрежи $(L, \wedge, \vee)$ су једначине облика $f(X) = g(X)$, где су f и g алгебарске функције на мрежи L. Из еквиваленција

$$f = g \Longleftrightarrow f \wedge g = f \vee g \Longleftrightarrow f \vee g \leq f \wedge g,$$

$$f \leq g \Longleftrightarrow f \wedge g = f \Longleftrightarrow f \vee g = g$$

следи да је у свакој мрежи проблем решавања неке једначине еквивалентан проблему решавања неке неједначине [21]. Међутим, за разлику од Булових једначина, у оштем случају се решавање алгебарске једначине $f(X) = g(X)$ на мрежи не може свести на решавање алгебарске једначине облика $h(X) = 0$. Услов конзистентности алгебарске неједначине (а самим тим и једначине) на ограниченој дистрибутивнојн мрежи је дао Goodstein [21].

Теорема 3.2. [21] *Нека је L ограничена дистрибутивна мрежа, $n \in N$ и $f, g : L^n \to L$ функције мреже. Тада неједначина*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \le g(x_1, \ldots, x_n) \tag{3.1}$$

је конзистентна ако и само ако

$$f(0, \ldots, 0) \le g(1, \ldots, 1).$$

У том случају свака $n-$торка $(x_1, \ldots, x_n)$ за коју важи

$$\begin{aligned} f(0, \ldots, 0) \le & \quad x_1 \quad \le g(1, \ldots, 1), \\ f(x_1, \ldots x_{h-1}, 0, \ldots, 0) \le & \quad x_h \quad \le g(x_1, \ldots, x_{h-1}, 1, \ldots, 1) \quad (2 \le h \le n), \end{aligned}$$

је решење једначине 3.1.

3.2 Репродуктивна решења једначина на Стоновим алгебрама

У овом одељку ће се разматрати функције и једначине на Стоновим алгебрама. Биће наведени неки Beazer-ови резултати (уопштење Löwenheim-ове теореме на Стонове алгебре и уопштење Müller-Löwenheim-ове теореме на Стонове алгебре са најмањим густим елементом). Последња теорема у овом одељку представља оригинални резултат добијен коришћењем Beazer-ове методе.

Дефиниција 3.1. *Стонове функције су алгебарске функције на Стоновој алгебри* $(L, \wedge, \vee, *, 0, 1)$.

На основу Дефиниције 1.4 Стонове функције су функције на Стоновој алгебри добијене од константних функција и пројекција суперпозицијом основних операција: $\wedge$, $\vee$ и $*$. Подсетимо се да су функције са својством замене на некој алгебри оне функције које се „слажу“ са сваком конгруенцијом те алгебре. Јасно је да свака алгебарска функција има својство замене. Grätzer је показао да свака функција на Буловој алгебри $f : B^n \to B$ која има својство замене је Булова функција. Слично је и у Постовим алгебрама. Међутим, није свака функција са својством замене на Стоновој алгебри, алгебарска (Стонова). То показује следећи пример.

Пример 3.1. Нека је $L_3 = \{0, p, 1\}$ троелементни ланац. Како је сваки ланац Стонова алгебра то је и L_3 Стонова алгебра. Операције ове алгебре можемо приказати таблицама:

$$
\begin{array}{c|ccc}
\wedge & 0 & p & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 \\
p & 0 & p & p \\
1 & 0 & p & 1
\end{array}\,,
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
\vee & 0 & p & 1 \\
\hline
0 & 0 & p & 1 \\
p & p & p & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\,,
\qquad
\begin{array}{c|c}
 & * \\
\hline
0 & 1 \\
p & 0 \\
1 & 0
\end{array}\,.
$$

Једина нетривијална конгруенција ове алгебре је конгруенција чије су класе $\{1, p\}$ и $\{0\}$. Функција $f : L_3 \to L_3$ дефинисана са $f(0) = 1$, $f(p) = 1$, $f(1) = p$ има својство замене. Покажимо да ова функција није алгебарска. Ако би ова функција била алгебарска, онда индукцијом по сложености функције f можемо доказати да се она може изразити у облику

$$f(x) = (a \wedge x) \vee (b \wedge x^*) \vee (c \wedge x^{**}).$$

Тада из $f(p) = 1$ и $f(1) = p$ добијамо

$$(a \wedge p) \vee c = 1 \quad \text{и} \quad a \vee c = p,$$

па је

$$p = p \vee (p \wedge c) = (a \vee c) \wedge (p \vee c) = (a \wedge p) \vee c = 1,$$

контрадикција. Дакле, f није алгебарска функција.

Користећи помоћну Булову функцију на центру $B(L)$ Стонове алгебре L, Beazer даје услов конзистентности и описује решења једначине $f(x_1, \dots, x_n) = 0$, где је f функција са својством замене.

Теорема 3.3. [15] *Нека је L Стонова алгебра и $n \in N$. Претпоставимо да функција $f : L^n \to L$ има својство замене и да је функција $\bar{f} : B(L)^n \to B(L)$ дефинисана на следећи начин*

$$\bar{f}(x_1^{**}, \dots, x_n^{**}) = (f(x_1, \dots, x_n))^{**} \quad (x_1, \dots, x_n \in L).$$

Тада

(i) *$\bar{f}$ је Булова функција;*

(ii) $f(x_1, \dots, x_n) = 0 \Leftrightarrow \bar{f}(x_1^{**}, \dots, x_n^{**}) = 0$.

(iii) *$f(x_1, \dots, x_n) = 0$ важи идентички ако и само ако $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ за свако $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$;*

(iv) *једначина $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ има решење ако и само ако*

$$\bigwedge_{A \in \{0,1\}^n} f(A) = 0.$$

У том случају, $(x_1, \dots, x_n)$ је решење ако и само ако важи

$$x_j = \bigwedge_{(a_{j+1}, \dots, a_n) \in \{0,1\}^{n-j}} f(x_1, \dots, x_{j-1}, 0, a_{j+1}, \dots, a_n) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Наведимо дефиниције појмова општег и репродуктивног општег решења једначине на Стоновој алгебри.

Нека је $(L, \wedge, \vee, *, 0, 1)$ Стонова алгебра, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $T = (t_1, \ldots, t_n) \in L^n$.

Дефиниција 3.2. [15] *Нека је L Стонова алгебра и $f, h_1, \ldots, h_n : L^n \to L$. Формуле*

$$x_i = h_i(t_1, \ldots, t_n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

дефинишу опште решење конзистентне једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ако и само ако

$$(\forall X \in L^n)\,(f(X) = 0 \Leftrightarrow (\exists T \in L^n) X = (h_1(T), \ldots, h_n(T)))\,.$$

Дефиниција 3.3. [15] *Нека је L Стонова алгебра и $f, h_1, \ldots, h_n : L^n \to L$. Формуле*

$$x_i = h_i(t_1, \ldots, t_n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

одређују репродуктивно опште решење конзистентне једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ако и само ако

$$(\forall X \in L^n)\,(f(X) = 0 \Leftrightarrow X = (h_1(X), \ldots, h_n(X)))\,.$$

Следећа теорема представља уопштење Löwenheim-ове теореме (Теорема 2.8) на једначине на Стоновим алгебрама.

Теорема 3.4. [15] *Нека је L Стонова алгебра и $f : L^n \to L$ функција са својством замене. Нека је $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in L^n$ партикуларно решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Тада је формулама*

$$x_i = (\xi_i \wedge f(t_1, \ldots, t_n)) \vee (t_i \wedge (f(t_1, \ldots, t_n))^*) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

одређено репродуктивно решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Напомена 3.1. Како у Стоновој алгебри важи

$$f \leq g^* \Longleftrightarrow f \wedge g^{**} = 0$$

то се претходна теорема може применити и приликом решавања неједначина облика $f \leq g^*$.

Дефиниција 3.4. *Нека је $(L, \wedge, \vee, *, 0, 1)$ Стонова алгебра. Ако постоји елемент $d = \min\{x \in L | x^* = 0\}$ онда се он зове најмањи густ елемент.*

Класа Стонових алгебри са најмањим густим елементом се може посматрати и као једнакосна класа алгебри облика $(L, \wedge, \vee, *, 0, 1, d)$, где је $(L, \wedge, \vee, *, 0, 1)$ Стонова алгебра и важе једнакости

$$d^* = 0,$$
$$(\forall x \in L)\, d \wedge (x \vee x^*) = d.$$

У Стонове алгебре са најмањим густим елементон спадају, између осталог, коначне Стонове алгебре, добро уређени скупови са највећим елементом итд.

Beazer је уопштио и Müller-Löwenheim-ову теорему на функције са својством замене у Стоновим алгебрама са најмањим густим елементом.

Теорема 3.5. [15] *Нека је L Стонова алгебра са најмањим густим елементом d и нека су $f, g : L^n \to L$ функције са својством замене. Тада*

$$f = g \iff (\forall(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \{0, d, 1\}^n)\; f(\delta_1, \ldots, \delta_n) = g(\delta_1, \ldots, \delta_n).$$

Следећа теорема је оригинални публикован резултат. У њој је описана класа репродуктивних решења једначине на Стоновој алгебри, под условом да је познато једно опште решење.

Теорема 3.6. [27] *Нека је L Стонова алгебра и $f, g_1, \ldots, g_n : L^n \to L$ функције са својством замене. Нека је формулама*

$$x_i = g_i(T) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

одређено опште решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Ако су $p_1, \ldots, p_n : L^n \to L$ функције са својством замене онда је формулама

$$x_i = (t_i \wedge (f(T))^*) \vee (f(T) \wedge g_i(p_1(T), \ldots, p_n(T))) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

дефинисано репродуктивно опште решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Доказ. Нека је формулама $x_i = g_i(t_1, \ldots, t_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ одређено опште решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ на Стоновој алгебри $(L, \wedge, \vee, *, 0, 1)$. Дефинишимо функције $\bar{f}, \bar{g}_i : (B(L))^n \to B(L)$ $(i = 1, \ldots, n)$ на следећи начин

$$\bar{f}(x_1^{**}, \ldots, x_n^{**}) = (f(x_1, \ldots, x_n))^{**}$$

$$\bar{g}_i(x_1^{**}, \ldots, x_n^{**}) = (g_i(x_1, \ldots, x_n))^{**},$$

за свако $(x_1, \ldots, x_n) \in L^n$. Према Теореми 3.3, $\bar{f}, \bar{g}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ су Булове функције. Најпре ћемо доказати да је са $x_i^{**} = \bar{g}_i(t_1^{**}, \ldots, t_n^{**})$ дефинисано опште решење помоћне Булове једначине $\bar{f}(x_1^{**}, \ldots, x_n^{**}) = 0$ у Буловој алгебри $B(L)$. Из

$$f(g_1(X), \ldots, g_n(X)) = 0, \quad \text{за свако } X \in L^n,$$

добијамо $(f(g_1(X), \ldots, g_n(X)))^{**} = 0$. Према Теореми 3.3 следи да је

$$\bar{f}((g_1(X))^{**}, \ldots, (g_n(X))^{**}) = 0$$

и

$$\bar{f}(\bar{g}_1(X^{**}), \ldots, \bar{g}_n(X^{**})) = 0 \text{ за свако } X^{**} \in (B(L))^n.$$

Претпоставимо да је $\bar{f}(Y) = 0$ за неко $Y \in (B(L))^n$. Према Теореми 1.12 следи да постоји $X \in L^n$ тако да је $Y = X^{**}$. Одавде је $\bar{f}(X^{**}) = 0$ што, према Теореми 3.3 даје $f(X) = 0$. Из претпоставке да је формулама $x_i = g_i(T)$ $(i = 1, \ldots, n)$ одређено опште решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ следи да постоји $T \in L^n$ тако да је $x_i = g_i(T)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тада је

$$x_i^{**} = (g_i(T))^{**} = \bar{g}_i(T^{**}),$$

одакле следи да је формулама $x_i^{**}=\bar{g}_i(T^{**}) \quad (i=1,\ldots,n)$ дефинисано опште решење Булове једначине $\bar{f}(x_1^{**},\ldots,x_n^{**})=0.$ Означимо десну страну једнакости (3.2) са $h_i(T)$ тј.

$$h_i(T)=(t_i\wedge(f(T))^*)\vee(f(T)\wedge g_i(p_1(T),\ldots,p_n(T))) \quad (i=1,\ldots,n).$$

Из Леме 1.2 и Леме 1.3 следи

$$(h_i(T))^{**}=\left(t_i^{**}\wedge((f(T))^{**})^*\right)\vee\left((f(T))^{**}\wedge(g_i\left(p_1(T),\ldots,p_n(T)\right))^{**}\right),\ T\in L^n.$$

Дефинишимо пресликавања $\bar{h}_i:(B(L))^n\to B(L)$, $\bar{h}_i(X^{**})=(h_i(X))^{**},\ X\in L^n.$ Тада је

$$\bar{h}_i(T^{**})=\left(t_i^{**}\wedge(\bar{f}(T^{**}))^*\right)\vee\left(\bar{f}(T^{**})\wedge\bar{g}_i\left((p_1(T))^{**},\ldots,(p_n(T))^{**}\right)\right),\ T\in L^n.$$

Пошто су $p_1,\ldots,p_n$ функције са својством замене, према Теореми 3.3 следи да су $\bar{p}_i:(B(L))^n\to B(L),\ \bar{p}_i(T^{**})=(p_i(T))^{**}$ Булове функције и да важи

$$\bar{h}_i(T^{**})=\left(t_i^{**}\wedge(\bar{f}(T^{**})^*)\right)\vee\left(\bar{f}(T^{**})\wedge\bar{g}_i\left(\bar{p_1}(T^{**}),\ldots,\bar{p_n}(T^{**})\right)\right),\ T^{**}\in(B(L))^n.$$

Према Теореми 2.10 имамо да је формулама $x_i^{**}=\bar{h}_i(T^{**})$ $(i=1,\ldots,n)$ одређено опште репродуктивно решење Булове једначине $\bar{f}(x_1^{**},\ldots,x_n^{**})=0.$

Тада је

$$\begin{aligned}
\bar{f}\left(\bar{h}_1(X^{**}),\ldots,\bar{h}_n(X^{**})\right)=0 \quad &\Rightarrow \quad \bar{f}\left((h_1(X))^{**},\ldots,(h_n(X))^{**}\right)=0\\
&\Rightarrow \quad (f(h_1(X),\ldots,h_n(X)))^{**}=0\\
&\Rightarrow \quad f(h_1(X),\ldots,h_n(X))=0.
\end{aligned}$$

Претпоставимо сада да је $f(X)=0.$ Тада

$$\begin{aligned}
h_i(X) &= (x_i\wedge(f(X))^*)\vee(f(X)\wedge g_i(p_1(X),\ldots,p_n(X)))\\
&= (x_i\wedge 1)\vee(0\wedge g_i(p_1(X),\ldots,p_n(X)))\\
&= x_i.
\end{aligned}$$

Дакле, формуле $x_i=h_i(T)$, $(i=1,\ldots,n)$ одређују репродуктивно опште решење једначине $f(x_1,\ldots,x_n)=0.$ $\square$

Глава 4

Једначине у вишевредносној логици

Почеци вишевредносне логике налазе се још у радовима Аристотела, а њени оснивачи у данашњем смислу су Lukasiewicz и Post. Данас је ова област у великој експанзији, пре свега због своје примене у компјутерској технологији.

Вишевредносна логика је настала као уопштење исказне (двовредносне) логике из потребе за исказима који могу имати више од две вредности. У алгебарском смислу, Булову алгебру $B_2 = \{0,1\}$ (која одговара исказној логици) замењујемо линеарно уређеним скупом (ланцем) $K = \{0,1,\ldots,k-1\}$ целих бројева, који у односу на операције $\min$ и $\max$ представља дистрибутивну мрежу. Функције и једначине на овој мрежи представљају уопштење Булових функција и једначина на двоелементној Буловој алгебри B_2.

4.1 Основни појмови

У овом одељку ће бити наведене дефиниције и неке особине елементарних операција на скупу $K = \{0,1,\ldots,k-1\}$ логичких вредности k-вредносне логике, а затим и важна теорема репрезентације k-вредносних операција на скупу K. За писање овог дела коришћена је монографија S. Jablonskij „Introduction to discrete mathematics".

Дефиниција 4.1. *Нека је k позитиван цео број и $K = \{0,1,\ldots,k-1\}$. Елементе скупа K ћемо звати логичке вредности. Свако пресликавање $f : K^n \to K$ ћемо звати $n-$арна $k-$вредносна операција.*

Неке од елементарних операција на K су:

1. $I_i(x) = \begin{cases} k-1, & \text{за } x = i \\ 0, & \text{за } x \neq i, \end{cases}$

2. $\min(x_1, x_2)$ (уопштење конјункције),

3. $\max(x_1, x_2)$ (уопштење дисјункције),

4. $\overline{x} = x + 1(mod k)$,

5. $Nx = k - 1 - x$ (Lukasiewicz-ева негација, уопштење комплемента).

Операције $\min(x_1, x_2)$ и $\max(x_1, x_2)$ су комутативне, асоцијативне и задовољавају дистрибутивни закон, па је $(K, \min, \max)$ дистрибутивна мрежа са најмањим елементом 0 и највећим елементом $k-1$. Уместо $\min(x_1, x_2)$ писаћемо $x_1 \cdot x_2$ или $x_1 x_2$, док ћемо уместо $\max(x_1, x_2)$ писати $x_1 \vee x_2$. Из

$$x^* = \max\{y | x \wedge y = 0\} = \left\{ \begin{array}{rl} 0, & x \neq 0 \\ k-1, & x = 0 \end{array} \right. = I_0(x)$$

следи да је $(K, \cdot, \vee, I_0, 0, k-1)$ псеудокомплементарна мрежа. Како је још

$$I_0(x) \vee I_0(I_0(x)) = k - 1,$$

поменута псеудокомплементарна мрежа је Стонова алгебра. Из

$$I_0(I_0(x)) = \left\{ \begin{array}{rl} I_0(k-1), & x = 0 \\ I_0(0), & x \neq 0 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{rl} 0, & x = 0 \\ k-1, & x \neq 0 \end{array} \right.$$

следи да је

$$I_0(I_0(x)) = x \Longleftrightarrow x \in \{0, k-1\},$$

па су једини регуларни, а самим тим и Булови елементи 0 и $k-1$. Јасно је, такође, да је $(K, \cdot, \vee, I_0, \ldots, I_{k-1}, 0, 1, \ldots, k-1)$ Постова алгебра, при чему су дисјунктивне компоненте произвољног елемента $i \in K$ дате са

$$i^h = I_h(i) = \left\{ \begin{array}{rl} k-1, & h = i \\ 0, & h \neq i \end{array} \right. .$$

Лако се може проверити да се свака $n-$арна $k-$вредносна функција може приказати у форми сличној дисјунктивној нормалној форми за Булове функције.

Теорема 4.1. [25] *Нека је $f : K^n \to K$ $n-$арна $k-$вредносна функција. Тада*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in K^n} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) I_{\sigma_1}(x_1) \ldots I_{\sigma_n}(x_n),$$

тј. свака k-вредносна функција се може изразити помоћу $\cdot$, $\vee$ и $I_i(x)$.

4.2 Општа решења једначина са једном непознатом у вишевредносној логици

Једначине на вишевредносној логици су први почели да проучавају Itoh, Goto и Carvallo. Они су (независно један од других) дали услов конзистентности једначине са једном непознатом, методу сукцесивне елиминације, уопштење Löwenheim-ове теореме и друго. Банковић је описао сва репродуктивна решења једначине са једном непознатом. Наводимо неке од ових резултата. Такође ће бити описана сва општа решења оваквих једначина. Напомињемо да је, имајући у виду Теорему 4.1 и чињеницу да је $(K, \cdot, \vee, I_0, \ldots, I_{k-1}, 0, 1, \ldots, k-1)$ Постова алгебра, овакве једначине могуће посматрати и као Постове једначине.

Дефиниција 4.2. *Једначина облика*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n), \tag{4.1}$$

где су $f, g : K^n \to K$ $k-$вредносне функције, се зове $k-$вредносна једначина.

Дефиниција 4.3. *Партикуларно решење, или само решење, једначине* (4.1)*, је свака $n-$торка $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ која задовољава једначину* (4.1)*. Решити $k-$вредносну једначину значи одредити скуп S свих њених решења.*

Сада ће бити разматране $k-$вредносне једначине са једном непознатом.

Теорема 4.2. [9] *Свака $k-$вредносна једначина са једном непознатом или систем $k-$вредносних једначина са једном непознатом је еквивалентан једној $k-$вредносној једначини облика $h(x) = 0$.*

Из Теореме 4.2 и Теореме 4.1 следи да је свака једначина са једном непознатом у вишевредносној логици облика

$$a_0 I_0(x) \vee a_1 I_1(x) \vee \cdots \vee a_{k-1} I_{k-1}(x) = 0 \quad (a_0, \ldots, a_{k-1} \in K). \tag{4.2}$$

Дефиниција 4.4. [9] *Нека је $f(x) = 0$ конзистентна $k-$вредносна једначина. Формула $x = g(t)$, где $g : K \to K$, дефинише опште решење једначине $f(x) = 0$ ако и само ако*

$$(\forall x \in K)(f(x) = 0 \Leftrightarrow (\exists t \in K) x = g(t)).$$

Дефиниција 4.5. [9] *Нека је $f(x) = 0$ конзистентна $k-$вредносна једначина. Формула $x = g(t)$, где $g : K \to K$, дефинише репродуктивно опште решење једначине $f(x) = 0$ ако и само ако*

$$(\forall x \in K)(f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)).$$

Теорема 4.3. [9] *Вредност $n \in \{0, \ldots, k-1\}$ је решење једначине*

$$a_0 I_0(x) \vee \cdots \vee a_{k-1} I_{k-1}(x) = 0$$

ако и само ако $a_n = 0$.

Теорема 4.4. [9] *Једначина*

$$a_0 I_0(x) \vee \cdots \vee a_{k-1} I_{k-1}(x) = 0$$

је конзистентна ако и само ако

$$a_0 a_1 \ldots a_{k-1} = 0. \tag{4.3}$$

Сва репродуктивна општа решења једначине (4.2) је описао Банковић.

ТЕОРЕМА 4.5. [9] *Нека је* (4.2) *конзистентна једначина и нека су*

$$(i_{m,0}, i_{m,1}, \ldots, i_{m,k-1}) \text{ пермутације скупа } K \quad (m = 0, 1, \ldots, k-1)$$

такве да је

$$(i_{0,0}, i_{1,0}, \ldots, i_{k-1,0}) = (0, 1, \ldots, k-1).$$

Формула $x = \phi(t)$ *дефинише репродуктивно опште решење једначине* (4.2) *ако и само ако*

$$\begin{aligned}\phi(t) \quad = \quad & I_0(a_{i_{t,0}})i_{t,0} \vee I_0(I_0(a_{i_{t,0}}))I_0(a_{i_{t,1}})i_{t,1} \vee I_0(I_0(a_{i_{t,0}}))I_0(I_0(a_{i_{t,1}}))I_0(a_{i_{t,2}})i_{t,2} \vee \ldots \\ & \vee I_0(I_0(a_{i_{t,0}}))I_0(I_0(a_{i_{t,1}})) \ldots I_0(I_0(a_{i_{t,k-2}}))I_0(a_{i_{t,k-1}})i_{t,k-1}.\end{aligned}$$

Сва општа решења једначине (4.2) су описана у следећој теореми (оригинални публикован резултат).

ТЕОРЕМА 4.6. [28] *Нека је* (4.2) *конзистента једначина и нека су*

$$(i_{m,0}, i_{m,1}, \ldots, i_{m,k-1}) \text{ пермутације скупа } K \quad (m = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{4.4}$$

такве да је

$$(i_{0,0}, i_{1,0}, \ldots, i_{k-1,0}) \text{ пермутација скупа } K \quad (m = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{4.5}$$

Формула $x = \phi(t)$ *дефинише опште решење једначине* (4.2) *ако и само ако*

$$\begin{aligned}\phi(t) \quad = \quad & I_0(a_{i_{t,0}})i_{t,0} \vee I_0(I_0(a_{i_{t,0}}))I_0(a_{i_{t,1}})i_{t,1} \\ & \vee I_0(I_0(a_{i_{t,0}}))I_0(I_0(a_{i_{t,1}}))I_0(a_{i_{t,2}})i_{t,2} \vee \ldots \\ & \vee I_0(I_0(a_{i_{t,0}}))I_0(I_0(a_{i_{t,1}})) \ldots I_0(I_0(a_{i_{t,k-2}}))I_0(a_{i_{t,k-1}})i_{t,k-1}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Доказ. Доказаћемо да формула $x = \phi(t)$, дата у (4.6), дефинише опште решење једначине (4.2). Нека је $t \in K = \{0, 1 \ldots, k-1\}$. Услови (4.3) и (4.4) дају

$$a_{i_{t,0}} a_{i_{t,1}} \ldots a_{i_{t,k-1}} = 0,$$

из чега следи да постоји елемент низа $a_{i_{t,0}}, a_{i_{t,1}}, \ldots, a_{i_{t,k-1}}$ који је једнак 0. Нека је $a_{i_{t,s}}$ први такав елемент у низу. Тада

$$I_0(a_{i_{t,n}}) = 0, \text{ за } n < s,$$

$$I_0(I_0(a_{i_{t,0}}))I_0(I_0(a_{i_{t,1}})) \ldots I_0(a_{i_{t,s}})i_{t,s} = (k-1)(k-1) \ldots (k-1)i_{t,s} = i_{t,s},$$

$$I_0(I_0(a_{i_{t,0}}))I_0(I_0(a_{i_{t,1}})) \ldots I_0(I_0(a_{i_{t,s}})) \ldots I_0(a_{i_{t,n}})i_{t,n} = 0, \text{ за } n > s,$$

$$(\text{због } I_0(I_0(a_{i_{t,s}})) = I_0(k-1) = 0).$$

Дакле $\phi(t) = i_{t,s}$. Пошто је $a_{i_{t,s}} = 0$, према Теореми 4.4 следи да $i_{t,s}$ задовољава (4.2) тј. $x = \phi(t)$ је решење једначине (4.2).

Нека је r решење једначине (4.2). Доказаћемо да постоји елемент $t \in K$ такав да је $r = \phi(t)$. Пошто је $(i_{0,0}, i_{1,0}, \dots, i_{k-1,0})$ пермутација скупа K, постоји $s \in K$ тако да је $i_{s,0} = r$. Узимајући $t = s$ добијамо

$$\begin{aligned}\phi(s) \;\; = \;\; & I_0(a_{i_{s,0}})i_{s,0} \vee I_0(I_0(a_{i_{s,0}}))I_0(a_{i_{s,1}})i_{s,1} \vee I_0(I_0(a_{i_{s,0}}))I_0(I_0(a_{i_{s,1}}))I_0(a_{i_{s,2}})i_{s,2} \vee \dots \\ & \vee I_0(I_0(a_{i_{s,0}}))I_0(I_0(a_{i_{s,1}}))\dots I_0(I_0(a_{i_{s,k-2}}))I_0(a_{i_{s,k-1}})i_{s,k-1}.\end{aligned}$$

Како је $a_{i_{s,0}} = a_r = 0$ имамо да важи $I_0(a_{i_{s,0}}) = k-1$ и $I_0(I_0(a_{i_{s,0}})) = I_0(k-1) = 0$. Одавде је $\phi(s) = (k-1)\cdot i_{s,0} \vee 0 \cdot i_{s,1} \vee \dots \vee 0 \cdot i_{s,k-1} = i_{s,0} = r$.

Сада ћемо показати да се свако опште решење једначине (4.2) може написати у облику (4.6). Нека

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k-1 \\ y_0 & y_1 & \dots & y_{k-1} \end{pmatrix}$$

представља опште решење једначине (4.2). Нека је $R = \{i | a_i = 0\}$. Према Теореми 4.3, R је скуп свих решења једначине (4.2). Како F представља опште решење, имамо да је $R = \{y_0, \dots y_{k-1}\}$. Свакако је $a_{y_i} = 0$ за свако $i \in K$. Нека је $A \subset K$ такав да је $F : A \to R$ бијекција. Пошто је $card(A) = card(R)$ и $card(K \setminus A) = card(K \setminus R)$, следи да постоји функција $g : K \setminus A \to K \setminus R$ која је бијекција. Очигледно је да је функција $h : K \to K$, одређена са

$$h(x) = \begin{cases} F(x), & x \in A \\ g(x), & x \notin A \end{cases}$$

такође бијекција. За свако $m \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ дефинишимо пермутацију $(i_{m,0}, i_{m,1}, \dots i_{m,k-1})$ на следећи начин:

- $i_{m,0} = h(m)$,
- ако $i_{m,0} \neq y_m$ онда $i_{m,1} = y_m$,
- ако $i_{m,0} = y_m$ онда $i_{m,1} = z$, за неко $z \neq y_m$,
- остали чланови пермутације $(i_{m,0}, i_{m,1}, \dots, i_{m,k-1})$ су произвољни, али такви да је (4.5) задовољено.

Показаћемо да је $F = \phi$. Нека је t произвољан елемент скупа K. Тада је $i_{t,0} = h(t)$.

(i) Ако $t \in A$ онда $i_{t,0} = h(t) = F(t) = y_t$. Пошто је y_t односно $i_{t,0}$ решење једначине (4.2), по Теореми 4.3 следи да је $a_{i_{t,0}} = 0$. Одатле је $I_0(a_{i_{t,0}}) = k-1$ и $I_0(I_0(a_{i_{t,0}})) = 0$, из чега следи

$$\phi(t) = (k-1)i_{t,0} \vee 0 \cdot i_{t,1} \vee \dots \vee 0 \cdot i_{t,k-1} = i_{t,0} = y_t = F(t).$$

(ii) Ако $t \notin A$ онда $i_{t,0} = h(t) = g(t) \in K \setminus R$ и $i_{t,1} = y_t$. Дакле $i_{t,0}$ није решење једначине (4.2), а $i_{t,1}$ је решење једначине (4.2), па је $a_{i_{t,0}} \neq 0$ и $a_{i_{t,1}} = 0$, по Теореми 4.3. Даље је

$$I_0(a_{i_{t,0}}) = 0, \;\; I_0(I_0(a_{i_{t,0}})) = k-1, \;\; I_0(a_{i_{t,1}}) = k-1, \;\; I_0(I_0(a_{i_{t,1}})) = 0,$$

из чега следи

$$\phi(t) = 0 \cdot i_{t,0} \vee (k-1)(k-1) \cdot i_{t,1} \vee \cdots \vee (k-1) \cdot 0 \cdots i_{t,k-1} = i_{t,1} = y_t = F(t).$$

□

Напомена 4.1. Лако се проверава да је вредност n $(0 \leq n \leq k-1)$ решење једначине

$$I_0(I_0(a_0))I_0(x) \vee \cdots \vee I_0(I_0(a_{k-1}))I_{k-1}(x) = 0 \tag{4.7}$$

ако и само ако $a_n = 0$. Имајући у виду Теорему 4.3, једначине (4.2) и (4.7) су еквивалентне. Приметимо да је $I_0(I_0(a_0)), \ldots, I_0(I_0(a_{k-1})) \in \{0, k-1\}$. Може се показати да је једначина (4.7) специјалан случај Прешићеве једначине (1.1). Узимајући за T скуп K, за истакнуте елементе (0 и 1) елементе 0 и $k-1$, а за операције $+, \circ$ и x^y на скупу $T \cup \{0, 1\}$ операције $\vee, \cdot$ и $I_x(y)$ проверавамо да је

$$x \vee 0 = 0 \vee x = x,\ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0,\ x \cdot (k-1) = (k-1) \cdot x = x,\ I_x(y) = \begin{cases} k-1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}.$$

Стављајући још $(s_0, s_1, \ldots, s_m) = (I_0(I_0(a_0)), I_0(I_0(a_1)), \ldots, I_0(I_0(a_{k-1})))$, закључујемо да је једначина (4.7) облика (1.1). Сва општа решења једначине (1.1) су описана у Теореми 1.3.

Пример 4.1. Решити једначину $a_0 I_0(x) \vee a_1 I_1(x) \vee a_2 I_2(x) = 0$ у 3-вредносној логици. Према Теореми 4.6, опште решење је одређено са

$$\phi(t) = I_0(a_{i_{t,0}}) i_{t,0} \vee I_0(I_0(a_{i_{t,0}})) I_0(a_{i_{t,1}}) i_{t,1} \vee I_0(I_0(a_{i_{t,0}})) I_0(I_0(a_{i_{t,1}})) I_0(a_{i_{t,2}}) i_{t,2},$$

где су $(i_{t,0}, i_{t,1}, i_{t,2})$ пермутације скупа $\{0, 1, 2\}$, (за $t \in \{0, 1, 2\}$), такве да је $(i_{1,0}, i_{2,0}, i_{3,0})$ такође пермутација скупа $\{0, 1, 2\}$.

Ако, на пример, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ и $a_2 = 2$, узимајући пермутације $(1, 0, 2)$, $(0, 2, 1)$ и $(2, 0, 1)$, добијамо опште решење

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Узимајући пермутције $(0, 2, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(2, 0, 1)$ добијамо репродуктивно решење

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Глава 5

Једначине на Постовим алгебрама

Проблемом једначина у дистрибутивним мрежама, у које спадају и Постове алгебре, први су почели да се баве Goodstein (мреже са 0 и 1) и Rudeanu (мреже без 0 и 1). У [43] Serfati објављује неке резултате о параметарским решењима једначина, неједначина и система једначина у Постовим алгебрама. До најважнијих резултата у овој области су дошли Serfati, Bordat и Carvallo, независно један од другог. Већина тврђења представља генерализацију одговарајућих тврђења у теорији Булових алгебри.

5.1 Дефиниција и основне особине Постових алгебри

Први систем аксиома за алгебре које одговарају вишевредносној Постовој логици је дао Rosenbloom [35] 1924. године, који их је и назвао Постовим алгебрама. Међутим, његов систем аксиома је био веома неразумљив и компликован за примену у даљем проучавању ових алгебри. Epstein [22] даје много једноставнију и оперативнију аксиоматизацију Постових алгебри. Овде ће бити коришћена Epstein-ова дефиниција, коју је донекле модификовао Rudeanu [40]. Поред дефиниције, у овом одељку ће бити наведене и основне особине рачуна у Постовим алгебрама.

Нека је r фиксиран цео број, $r \geq 2$.

Дефиниција 5.1. [40] *Низ елемената $x^0, x^1, \ldots, x^{r-1}$ ограничене дистрибутивне мреже $(P, \wedge, \vee, 0, 1)$ чини ортонормалан систем ако и само ако важи*

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} x^i = 1, \qquad x^i \wedge x^j = 0 \quad (i, j = 0, \ldots, r-1,\ i \neq j).$$

Лема 5.1. [40] *Сваки елемент x^i ортонормалног система $(x^0, x^1, \ldots, x^{r-1})$ је Булов елемент.*

Доказ. Из

$$x^j \vee \bigvee_{i=0, i\neq j}^{r-1} x^i = 1, \quad (\bigvee_{i=0, i\neq j}^{r-1} x^i) \wedge x^j = \bigvee_{i=0, i\neq j}^{r-1} (x^i \wedge x^j) = 0 \quad (j = 0, \ldots, r-1)$$

следи
$$(x^j)' = \bigvee_{i=0, i\neq j}^{r-1} x^i \quad (j = 0, \dots, r-1).$$
$\square$

ТЕОРЕМА 5.1. [40] *Нека је $(P, \wedge, \vee, 0, 1)$ ограничена дистрибутивна мрежа и нека елементи $e_0, e_1, \dots, e_{r-1}$ задовољавају услов $e_0 = 0 < e_1 < e_2 < \cdots < e_{r-1} = 1$. Тада су следећи услови еквивалентни*

(i) *сваки елемент $x \in P$ има јединствену репрезентацију у облику*
$$x = \bigvee_{k=1}^{r-1} (x_{(k)} \wedge e_k),$$
где су $x_{(k)} \in B(P)$ $(k = 1, \dots, r-1)$ и важи $x_{(1)} \geq x_{(2)} \geq \cdots \geq x_{(r-1)}$.

(ii) *сваки елемент $x \in P$ има јединствену репрезентацију у облику*
$$x = \bigvee_{i=0}^{r-1} (x^i \wedge e_i),$$
где $x^0, x^1, \dots, x^{r-1}$ чине ортонормалан систем.

ПОСЛЕДИЦА 5.1. *Ако у ограниченој дистрибутивној мрежи $(P, \wedge, \vee, 0, 1)$ важе еквивалентни услови (i) и (ii) из Теореме 5.1 онда су коефицијенти $x_{(k)}$ и x^i из репрезентација (i) и (ii) повезани следећим релацијама:*
$$x^0 = x'_{(1)}, \quad x^i = x_{(i)} \wedge x'_{(i+1)} \ (i = 1, \dots, r-2), \quad x^{r-1} = x_{(r-1)},$$
$$x_{(k)} = \bigvee_{j=k}^{r-1} x^j \quad (k = 1, \dots, r-1).$$

ДЕФИНИЦИЈА 5.2. [40] *Постова алгебра реда r је алгебра $(P, \wedge, \vee, e_0, e_1, \dots, e_{r-1})$, где је $(P, \wedge, \vee, 0, 1)$ ограничена дистрибутивна мрежа, елементи e_i задовољавају услов $e_0 = 0 < e_1 < \cdots < e_{r-1} = 1$ и важе еквивалентни услови (i) и (ii) из Теореме 5.1. Низ $e_0, \dots, e_{r-1}$ се зове ланац константи Постове алгебре P, $x^o, \dots, x^{r-1}$ су дисјунктивне или Постове компоненте елемента x, а $x_{(1)}, \dots, x_{(r-1)}$ монотоне компоненте елемента x.*

Овако дефинисана алгебра је типа $(2, 2, (0)_r)$. Међутим, ако дисјунктивне компоненте посматрамо као низ унарних операција на скупу P, што нам омогућава Теорема 5.1 (ii), Постову алгебру можемо сматрати алгебром типа $(2, 2, (1)_r, (0)_r)$.

У свакој Постовој алгебри монотоне и дисјунктивне компоненте елемената e_i су дате формулама
$$(e_i)_{(k)} = \begin{cases} 1, & k \leq i \\ 0, & k > i \end{cases}, \quad \text{за } k = 1, \dots, r-1$$

и

$$(e_i)^h = \begin{cases} 1, & h = i \\ 0, & h \neq i \end{cases}, \qquad \text{за } h = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{5.1}$$

Пример 5.1. Сваки $r-$елементни ланац $C_r = \{e_0 = 0, e_1, \ldots, e_{r-1} = 1\}$, $e_0 < e_1 < \cdots < e_{r-1}$, постаје $r-$Постова алгебра, ако се $\vee$ и $\wedge$ дефинишу као max и min, а за ланац константи узме цео скуп C_r. Једини Булови елементи у овој Постовој алгебри су 0 и 1 (Пример 1.4).

Теорема 5.2. [40] *Нека је P Постова алгебра и $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$. За елемент $x \in P$ следећи услови су еквивалентни:*

(i) $x^i = 1$;

(ii) $x^j = 0$ *за свако* $j \neq i$;

(iii) $x_{(1)} = \cdots = x_{(i)} = 1, x_{(i+1)} = \ldots x_{(r-1)} = 0$;

(iv) $x = e_i$.

Теорема 5.3. [40] *Следећи услови су еквивалентни за сваки елемент x Постове алгебре P:*

(i) $x \in B(P)$;

(ii) $x_{(k)} = x$ *за свако* $k \in \{1, \ldots, r-1\}$;

(iii) $x_{(k)} = x$ *за неко* $k \in \{1, \ldots, r-1\}$;

(iv) $x^0 = x'$, $x^i = 0\ (i = 1, \ldots, r-2)$, $x^{r-1} = x$;

(v) $x^i = 0\ (i = 1, \ldots, r-2)$.

Теорема 5.4. [40] *Свака Постова алгебра је Стонова алгебра и дуална Стонова алгебра. При томе, за свако $x \in P$, псеудокомплемент је*

$$x^* = x'_{(1)} = x^0,$$

док је дуални псеудокомплемент једнак

$$x^+ = x'_{(r-1)} = (x^{r-1})'.$$

Ради једноставнијег записа уведимо следеће ознаке:

1) Операцију $\wedge$ означимо са $\cdot$ или је једноставно изоставимо. Дакле, писаћемо $x \cdot y$ или xy уместо $x \wedge y$.

2) За $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ и $x \in P$ писаћемо $x^i = x^{e_i}$.

3) За $X = (x_1, \ldots, x_n) \in P^n$ и $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in C_r^n$ уводимо

$$X^A = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Из Теореме 5.2 и једнакости (5.1) следи да за $\alpha, \beta \in C_r$ важи

$$\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases},$$

што даље, за $A, B \in C_r^n$, даје

$$A^B = \begin{cases} 1, & A = B \\ 0, & A \neq B \end{cases}.$$

ТЕОРЕМА 5.5. [16, 46] *Нека је P Постова алгебра и $x, y \in P$. Тада важи*

$$x = y \Longleftrightarrow \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i (y^i)' = 0 \Longleftrightarrow \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i y^i = 1. \tag{5.2}$$

ПОСЛЕДИЦА 5.2. *Нека је P Постова алгебра и $x, y \in P$. Тада*

$$x \leq y \Longleftrightarrow \bigvee_{i=0}^{r-1} \bigvee_{h=i}^{r-1} x^i y^h = 1 \Longleftrightarrow \bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} x^h y^i = 0.$$

Напомена 5.1. Ако се дефинише бинарна операција $+$ на следећи начин

$$x + y = \bigvee_{i=0}^{r-1} x^i (y^i)', \quad x, y \in P,$$

онда се (5.2) може записати у облику

$$x = y \Longleftrightarrow x + y = 0.$$

5.2 Постове функције

Под Постовом функцијом подразумева се алгебарска функција (у смислу Дефиниције 1.4) на Постовој алгебри $(P, \wedge, \vee, (^i)_{i=0,\dots,r-1}, (e_i)_{i=0,\dots,r-1})$. Дакле, Постова функција је свака функција саграђена од константних функција и пројекција коначном применом операција $\wedge, \vee, (^i)_{i=0,\dots,r-1}$. Под простом Постовом функцијом подразумева се полином над Постовом алгебром, тј. алгебарска функција у којој не фигуришу константе.

Карактеризацију Постових функција даје следећа теорема.

ТЕОРЕМА 5.6. [22, 43] *Нека је P Постова алгебра, $n \in N$ и $f : P^n \to P$. Функција f је Постова ако и само ако се може записати у облику*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in C_r^n} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}. \tag{5.3}$$

Једнакост (5.3) је позната као дисјунктивна нормална форма Постове функције f.

Последица 5.3. *Свака Постова функција по n променљивих је потпуно одређена својом рестрикцијом на скуп C_r^n.*

Последица 5.4. *Свака функција $f : C_r^n \to P$ се на јединствен начин може раширити у Постову функцију $f : P^n \to P$.*

Последица 5.5. *Ако су $f, g : P^n \to P$ Постове функције онда важи*

$$f = g \iff (\forall A \in C_r^n) f(A) = g(A).$$

Јасно је из претходних тврђења да идентитети који важе на свим Постовим алгебрама су они који важе у C_r^n.

Теорема 5.7. [43] *Скуп свих Постових функција $f : P^n \to P$ је Постова алгебра у односу на операције дефинисане на следећи начин:*

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)(A) &= \bigvee_{A \in C_r^n} (f(A) \cdot g(A)) X^A, \\
(f \vee g)(A) &= \bigvee_{A \in C_r^n} (f(A) \vee g(A)) X^A, \\
f^i(X) &= \bigvee_{A \in C_r^n} (f(A))^i X^A \quad (i = 0, \ldots, r-1), \\
e_i(X) &= e_i \quad (i = 0, 1, \ldots, r-1).
\end{aligned}$$

Последица 5.6. *За сваку Постову функцију $f : P^n \to P$ следећи услови су еквивалентни:*

(i) *f је Булов елемент алгебре Постових функција дефинисане у Теореми* 5.7*;*

(ii) $f(X) \in B(P)$ *за свако* $X \in P^n$*;*

(iii) $f(A) \in B(P)$ *за свако* $A \in C_r^n$.

Познато је да свака алгебарска функција има својство замене, а да обратно, у општем случају, не важи. За случај Булових функција Grätzer је доказао да су функције са својством замене исто што и Булове функције. Следећа теорема даје генерализацију те теореме на Постове алгебре.

Теорема 5.8. [15] *Нека је P r-Постова алгебра. Функција $f : P^n \to P$ има својство замене ако и само ако је Постова функција.*

5.3 Постове једначине

Најважнији резултати у теорији Постових једначина (свођење на једну једначину, услов конзистентности, метода елиминације непознатих, конструкција репродуктивног помоћу партикуларног решења) представљају генерализацију одговаварајућих резултата из теорије Булових једначина. До основних тврђења су, независно један од других, дошли Carvallo, Serfati и Bordat. Carvallo је први објавио своје резултате, они су, углавном, били без доказа и односили су се на Постову алгебру C_r, али се испоставило да важе у произвољној Постовој алгебри.

Постове једначине су једначине које се могу изразити помоћу Постових функција. Прецизније:

Дефиниција 5.3. *Постова једначина (неједначина) са n непознатих на Постовој алгебри P је једначина (неједначина) облика*

$$f(X) = g(X) \quad (f(X) \leq g(X)), \tag{5.4}$$

где су $f, g : P^n \to P$ Постове функције. Ако за $A \in P^n$ важи $f(A) = g(A)$ $(f(A) \leq g(A))$ онда је A партикуларно решење једначине (неједначине) (5.4). *Решити Постову једначину (неједначину) значи одредити скуп свих њених решења. Ако је тај скуп решења непразан кажемо да је једначина (неједначина) конзистентна. Две једначине (неједначине) су еквивалентне ако имају једнаке скупове решења.*

Теорема 5.9. [19, 43, 16] *Сваки систем Постових једначина и/или неједначина еквивалентан је једној Постовој једначини облика $f = 0$, а такође и једној Постовој једначини облика $g = 1$.*

Доказ. Посматрајмо систем од m једначина и неједначина

$$f_k(X)\, R_k\, g_k(X),\ R_k \in \{=, \leq\}, \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{5.5}$$

где је $X \in P^n$ и f_k и g_k су Постове функције $(k = 1, \ldots, m)$. Како важи

$$f_k \leq g_k \Longleftrightarrow f_k \cdot g_k = f_k \quad (\text{из } 1.2)$$

и $f_k \cdot g_k$ је Постова функција следи да је свака Постова неједначина еквивалентна некој Постовој једначини, па систем (5.5) можемо посматрати као систем једначина. Из

$$f_k = g_k \Longleftrightarrow \bigvee_{i=0}^{r-1} (f_k)^i((g_k)^i)^i = 0 \ (\text{према Теореми } 5.5)$$

и чињенице да је $h_k = \bigvee_{i=0}^{r-1} (f_k)^i((g_k)^i)^i$ Постова функција следи да је дати систем еквивалентан систему једначина

$$h_k(X) = 0 \quad (k = 1, \ldots, m).$$

На крају, из

$$(\forall k \in \{1, \ldots, m\}) h_k = 0 \Longleftrightarrow \bigvee_{k=1}^{m} h_k = 0$$

и чињенице да је $h = \bigvee_{k=1}^{m} h_k$ Постова функција, следи да је систем (5.5) еквивалентан једној Постовој једначини

$$h(X) = 0.$$

Свођење на облик $g = 1$ се изводи на сличан начин. $\square$

Као и код Булових једначина природно је тражити параметарску репрезентацију скупа решења. Зато се дефинишу појмови општег (параметарског) решења и репродуктивног општег решења. Ове дефиниције су сагласне Дефиницији 1.2 и Дефиницији 1.3.

Дефиниција 5.4. *Нека су $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n : P^n \to P$ Постове функције и нека је $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Формуле*

$$x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_n)\ (i = 1, \ldots, n), \tag{5.6}$$

или у векторској форми $X = \Phi(T)$, одређују параметарско опште решење једначине $f(X) = 0$ ако и само ако

$$(\forall X)\,(f(X) = 0 \Longleftrightarrow (\exists T \in P^n) X = \Phi(T))\,. \tag{5.7}$$

Дефиниција 5.5. *Нека су $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n : P^n \to P$ Постове функције и нека је $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Формуле*

$$x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_n)\ (i = 1, \ldots, n),$$

или у векторској форми $X = \Phi(T)$, одређују репродуктивно опште решење једначине $f(X) = 0$ ако и само ако

$$(\forall X)\,(f(X) = 0 \Longleftrightarrow X = \Phi(X))\,. \tag{5.8}$$

Најпре ћемо посматрати једначине са једном непознатом. Из Теореме 5.9 и Теореме 5.6 следи

Последица 5.7. *Сваки систем Постових једначина и/или неједначина са једном непознатом је еквивалентан једначини облика*

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} c_i x^i = 0$$

где је x непозната и $c_i \in P$ $(i = 0, \ldots, r-1)$.

Наводимо најважније резултате до којих су дошли Carvallo, Serfati и Bordat.

Теорема 5.10. [19, 43, 16] *Постова једначина*

$$\bigvee_{i=0}^{r-1} c_i x^i = 0 \tag{5.9}$$

је конзистентна ако и само ако

$$\prod_{i=0}^{r-1} c_i = 0.$$

У том случају скуп решења је подмрежа од P са најмањим елементом

$$\eta = \prod_{i=0}^{r-1}(c_i^{**} \vee e_i)$$

и највећим елементом

$$\zeta = \bigvee_{i=1}^{r-1} c_i^* e_i.$$

Иако је скуп решења конзистентне Постове једначине ограничена мрежа, за разлику од Булових једначина, то не мора бити интервал, што показује следећи пример.

Пример 5.2. За свако $k \in \{1, \ldots, n\}$, једначина $x = x_{(k)}$ има као скуп решења скуп $B(P)$ свих Булових елемената алгебре P (Теорема 5.3), тако да је $\eta = 0$ и $\zeta = 1$, али $[0, 1] = P \neq B(P)$.

Неке Постове једначине имају за скуп решења интервал. Њихову карактеризацију даје следећа теорема.

Теорема 5.11. [16, 17] *Скуп решења конзистентне Постове једначине* (5.9) *је интервал* $[\eta, \zeta]$ *ако и само ако важи*

$$\left(\bigvee_{h=0}^{i-1} c_h^*\right)\left(\bigvee_{j=i+1}^{r-1} c_j^*\right) \leq c_i^* \quad (i = 1, \ldots, r-2).$$

Може се дефинисати и обратни проблем: ако је дат интервал $[u, v]$ у Постовој алгебри P да ли постоји Постова функција f таква да скуп решења једначине $f(x) = 0$ буде дати интервал? Одговор даје следећа теорема.

Теорема 5.12. *Нека су u, v елементи Постове алгебре P такви да је $u \leq v$. Тада постоји Постова функција $f : P \to P$ таква да важи*

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow u \leq x \leq v.$$

Доказ. Нека су $u, v \in P$ такви да је $u \leq v$. Тада је

$$\begin{aligned}
& u \leq x \leq v \\
\Longleftrightarrow\quad & u \leq x \,\&\, x \leq v \\
\Longleftrightarrow\quad & \bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1} u^h x^i = 0 \,\&\, \bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1} x^h v^i = 0 \qquad \text{(на основу Последице 5.2)} \\
\Longleftrightarrow\quad & \bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u^h x^i \vee x^h v^i) = 0.
\end{aligned}$$

Нека је

$$f(x) = \bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u^h x^i \vee x^h v^i).$$

Тада добијамо $f(x)=0 \Leftrightarrow u \leq x \leq v$. Како је $u \leq v$, постоји елемент $x \in P$ такав да важи $u \leq x \leq v$, па је једначина $f(x)=0$ свакако конзистентна. $\square$

Напомена 5.2. У специјалном случају када је $r=2$, важи $P=B(P)$, тј. Постова алгебра је Булова алгебра. Тада функција f постаје

$$f(x)=u^1x^0 \vee x^1v^0 = ux' \vee xv'.$$

Еквиваленција $u \leq x \leq v \iff \bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1}(u^hx^i \vee x^hv^i)=0$ постаје позната релација $u \leq x \leq v \iff ux' \vee xv' = 0$ која важи у свакој Буловој алгебри.

Неки облици општег и репродуктивног решења Постове једначине са једном непознатом су дати у радовима Serfati-ја [43, 44], Bordat-а [16, 17] и Банковића [8].

Теорема 5.13. [16, 17] *Ако је једначина* (5.9) *конзистентна онда формула*

$$x=\eta \vee \bigvee_{i=0}^{r-1} c_i^* t^i e_i,$$

где је η *партикуларно решење дато у Теореми* 5.10*, дефинише репродуктивно опште решење једначине* (5.9).

Сада ћемо посматрати Постове једначине са n непознатих.

Теорема 5.14. [46, 16, 14] *Постова једначина*

$$f(x_1,\ldots,x_n)=0$$

је конзистентна ако и само ако важи

$$\prod_{A\in C_r^n} f(A)=0.$$

Као и код Булових једначина, решавање Постових једначина са n непознатих се може методом сукцесивних елиминација свести на решавање n једначина са једном непознатом. Код Булових једначина овај метод има две варијанте: прву, код које се скуп решења описује системом рекурентних неједнакости и другу, код које се решење даје у параметарском облику. Због познате чињенице да решење Постове једначине са једном непознатом не мора бити интервал код Постових једначина се, у општем случају, може применити само друга варијанта.

Елиминанте Постове функције $f : P^n \to P$ се дефинишу рекурзивно на следећи начин

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,\ldots,x_n) &= f(x_1,\ldots,x_n),\\
f_k(x_k,\ldots,x_n) &= \prod_{i=0}^{r-1} f_{k-1}(e_i,x_k,\ldots,x_n)\ (k=2,\ldots,n),\\
f_{n+1} &= \prod_{i=0}^{r-1} f_n(e_i).
\end{aligned}$$

Очигледно је да је за свако $k \in \{1, \ldots, n\}$ елиминанта f_k Постова функција. Ако је $f_{n+1} \neq 0$ онда једначина $f_n(x_n) = 0$ није конзистентна, следи да за свако $k \in \{n, n-1, \ldots, 1\}$ једначина $f_k(x_k, \ldots, x_n) = 0$ није конзистентна, а самим тим и једначина $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ није конзистентна (за $k = 1$). Ако је $f_{n+1} = 0$, имамо да су све једначине $f_k(x_k, \ldots, x_n) = 0$ конзистентне, за $k \in \{n, n-1, \ldots, 1\}$. „Троугаони“систем једначина

$$f_k(x_k, \ldots, x_n) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

се решава у обрнутом редоследу, полазећи од последње једначине $f_n(x_n) = 0$. По Теореми 5.13 ова једначина има параметарско решење облика $x_n = \varphi_n(t_n)$, где је φ_n Постова функција. Заменом добијеног x_n у преосталим једначинама елиминише се једна непозната, тј. систем се своди на троугаони систем од $n-1$ једначине са $n-1$ непознатом. Понављањем поступка још $n-1$ пута добијамо решење у облику

$$x_k = \varphi_k(t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n),\ (k = 1, \ldots, n). \tag{5.10}$$

Carvaillo, Bordat и Serfati су доказали да параметарско решење (5.10) система Постових једначина $f_k(x_k, \ldots, x_n) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ представља и опште решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Теорема 5.15. [16, 19, 20, 43, 44] *Једначина $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ је конзистентна ако и само ако је $f_{n+1} = 0$. У том случају формуле* (5.10) *одређују опште решење ове једначине.*

Следећа теорема представља генерализацију познате Löwenheim-ове теореме из теорије Булових једначина. Она даје формулу за добијање репродуктивног решења ако је познато једно партикуларно решење Постове једначине.

Теорема 5.16. [19, 16, 45] *Нека је $\Xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in P^n$ партикуларно решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Тада формуле*

$$x_k = \xi_k f^{**}(t_1, \ldots, t_n) \vee t^k f^*(t_1, \ldots, t_n) \quad (k = 1, \ldots, n),$$

или, у векторском облику

$$X = \Xi f^{**}(T) \vee f^*(T)T,$$

дефинишу репродуктивно решење ове једначине.

Теорема 5.17. [46] *Нека су $f, g : P^n \to P$ Постове функције. Ако је једначина $f(X) = 0$ конзистентна, онда важи*

$$(\forall X \in P^n)(f(X) = 0 \Longleftrightarrow g(X) = 0) \Longleftrightarrow g^* = f^*.$$

Следећа теорема представља уопштење Теореме 5.16. Она даје формулу за одређивање свих репродуктивних решења Постове једначине под условом да је познато једно опште решење.

Теорема 5.18. [10] *Нека су $f, g_k, h_k : P^n \to P$ $(k = 1, \ldots, n)$ Постове функције и $G = (g_1, \ldots, g_n)$, $H = (h_1, \ldots, h_n)$. Претпоставимо да је G опште решење једначине $f(X) = 0$. Тада је H репродуктивно опште решење ове једначине ако и само ако постоји $n-$торка $P = (p_1, \ldots, p_k)$ Постових функција $p_k : P^n \to P$ $(k = 1, \ldots, n)$ тако да важи*

$$H(X) = f^*(X)X \vee f^{**}(X)G(P(X)) \quad (\textit{за свако } X \in P^n).$$

У раду [41] Rudeanu се бави обратним проблемом од проблема решавања Булове једначине, проблемом налажења Булове функције са n промењивих чије су нуле познате и задате параметарски. Такође, бави се и проблемом одређивања услова које треба да испуњава низ рекурентно задатих интервала да би представљао опште решење неке Булове једначине. На крају, он поставља проблем проширења истраживања на Постове алгебре. До краја овог одељка приказујемо добијене резултате у решавању овог проблема.

Дефиниција 5.6. *Нека је $k \in \{1, \dots, n\}$ и $(b_k, \dots, b_n) \in P^{n-k+1}$. Постова функција $f : P^n \to P$ је нулабилна у односу на $(b_k, \dots, b_n) \in P^{n-k+1}$ ако и само ако једначина $f(x_1, \dots, x_{k-1}, b_k, \dots, b_n) = 0$ има решење $(x_1, \dots, x_{k-1}) \in B^{k-1}$. Функција f је нулабилна ако и само ако је једначина $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ конзистентна.*

Теорема 5.19. *Нека је $f : P^n \to P$ Постова функција, $k \in \{1, \dots, n\}$ и $(x_k, \dots, x_n) \in P^{n-k+1}$. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(i) *f је нулабилна у односу на $(x_k, \dots, x_n)$;*

(ii) *$f_k(x_k, \dots, x_n) = 0$.*

Доказ.

$$\begin{aligned}
f_k(x_k, \dots, x_n) = 0 \quad &\iff \quad \prod_{i=0}^{r-1} f_{k-1}(e_i, x_k, \dots, x_n) = 0 \\
&\iff \quad (\exists x_{k-1}) f_{k-1}(x_{k-1}, x_k, \dots, x_n) = 0 \\
&\iff \quad \dots \iff (\exists x_{k-1}) \dots (\exists x_1) f_1(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n) = 0 \\
&\iff \quad f \text{ је нулабилна у односу на } (x_k, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

□

За неке Постове једначине (оне које имају решење у облику интервала) можемо дефинисати појам општег интервалног решења. Заправо, овај појам се може дефинисати у вези са било којом Постовом једначином, али има значаја само за једначине са интервалним решењем.

Дефиниција 5.7. *Нека је $f : P^n \to P$ нулабилна Постова функција и нека су*

$$u_k, v_k : P^{n-k} \to P \quad (k = 1, \dots, n-1),\ u_n, v_n \in P, \tag{5.11}$$

Постове функције. Систем неједнакости

$$\begin{aligned}
u_j(x_{j+1}, \dots, x_n) \leq \quad x_j \quad &\leq v_j(x_{j+1}, \dots, x_n) \quad (j = 1, \dots, n-1), \\
u_n \leq \quad x_n \quad &\leq v_n
\end{aligned} \tag{5.12}$$

одређује опште интервално решење једначине $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ ако и само ако за свако $k \in \{1, \dots, n\}$ и свако $(x_k, \dots, x_n) \in P^{n-k+1}$ следећи услови су еквивалентни:

(i) *f је нулабилна у односу на $(x_k, \ldots, x_n)$;*

(ii) *формуле* (5.12) *важе за свако $j = k, \ldots, n$.*

ДЕФИНИЦИЈА 5.8. *Нека је $f : P^n \to P$ Постова функција и $f_1, \ldots, f_{n+1}$ њене елиминанте. Низ $g_1, \ldots, g_{n+1}$ Постових функција*

$$g_k : P^{n-k+1} \to P \quad (k = 1, \ldots, n), \quad g_{n+1} \in P$$

је рекурентно покривање функције f ако и само ако важи

$$\bigvee_{i=k}^{n+1} g_i = f_k \quad (k = 1, \ldots, n+1).$$

ТЕОРЕМА 5.20. *Нека су $f : P^n \to P$ и $u_j, v_j : P^{n-j} \to P$ $(j = 1, \ldots, n)$ Постове функције. Ако низ функција $g_1, \ldots, g_n$ дефинисаних са*

$$g_j(x_j, \ldots, x_n) = \bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u_j^h(x_{j+1}, \ldots, x_n)x_j^i \vee x_j^h v_j^i(x_{j+1}, \ldots, x_n)), \quad (j = 1, \ldots, n-1), \tag{5.13}$$

$$g_n(x_n) = \bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u_n^h x_n^i \vee x_n^h v_n^i), \tag{5.14}$$

$$g_{n+1} = 0, \tag{5.15}$$

представља рекурентно покривање од f, онда систем (5.12) *одређује опште интервално решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.*

Доказ. Нека је низ $(g_1, \ldots, g_{n+1})$ дефинисан са (5.13), (5.14) и (5.15) рекурентно покривање функције f. Тада важи $f_{n+1} = g_{n+1} = 0$, па је f нулабилна, по Теореми 5.15. Нека је $k \in \{1, \ldots, n\}$ и $(x_k, \ldots, x_n) \in P^{n-k+1}$. Тада је тачан следећи низ еквиваленција

$$\begin{aligned}
& f \text{ је нулабилна у односу на } (x_k, \ldots, x_n) \\
\iff\ & f_k(x_k, \ldots, x_n) = 0 \\
\iff\ & \bigvee_{j=k}^{n} g_j(x_j, \ldots, x_n) = 0 \\
\iff\ & g_j(x_j, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = k, \ldots, n) \\
\iff\ & \bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u_j^h(x_{j+1}, \ldots, x_n)x_j^i \vee x_j^h v_j^i(x_{j+1}, \ldots, x_n)) = 0\ (j = k, \ldots, n-1) \\
& \qquad \& \bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u_n^h x_n^i \vee x_n^h v_n^i) = 0 \\
\iff\ & u_j(x_{j+1}, \ldots, x_n) \le x_j \le v_j(x_{j+1}, \ldots, x_n)\ (j = k, \ldots, n-1)\ \&\ u_n \le x_n \le v_n. \\
& \quad \text{(на основу доказа Теореме 5.12).}
\end{aligned}$$

Сагласно Дефиницији 5.7 систем (5.12) одређује опште интервално решење једначине $f(x_1,\ldots,x_n)=0$. $\square$

Теорема 5.21. *Нека су* $u_j, v_j : P^{n-j} \to P$ $(j=1,\ldots,n)$ *Постове функције. Постоји нулабилна Постова функција* f *таква да низ Постових неједнакости* (5.12) *одређује опште интервално решење једначине* $f(X)=0$ *ако и само ако су испуњени следећи услови*

$$\bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1} u_k^h v_k^i \le \bigvee_{j=k+1}^{n}\left(\bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1}(u_j^h x_j^i \vee x_j^h v_j^i)\right) \quad (k=1,\ldots,n-1), \tag{5.16}$$

$$\bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1} u_n^h v_n^i = 0. \tag{5.17}$$

Доказ. Нека за дате Постове функције u_j, v_j $(j=1,\ldots,n)$ важе услови (5.16) и (5.17). Тада важи следећи низ еквиваленција:

$$\begin{aligned}
& u_j(x_{j+1},\ldots,x_n) \le x_j \le v_j(x_{j+1},\ldots,x_n)\ (j=1,\ldots,n-1),\ u_n \le x_n \le v_n \\
\iff\ & u_j(x_{j+1},\ldots,x_n) \le x_j \,\&\, x_j \le v_j(x_{j+1},\ldots,x_n)\ (j=1,\ldots,n-1) \\
& \qquad\qquad \& \, u_n \le x_n \,\&\, x_n \le v_n \\
\iff\ & \bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1} u_j^h x_j^i = 0 \,\&\, \bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1} x_j^h v_j^i = 0 \quad (j=1,\ldots,n) \\
& \qquad \text{(на основу Последице 5.2)} \\
\iff\ & \bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1}(u_j^h x_j^i \vee x_j^h v_j^i) = 0 \quad (j=1,\ldots,n) \\
\iff\ & \bigvee_{j=1}^{n}\bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1}(u_j^h x_j^i \vee x_j^h v_j^i) = 0.
\end{aligned}$$

Дефинишимо функције $f : P^n \to P$ и $g_k : P^{n-k+1} \to P$ $(k=1,\ldots,n)$, $g_{n+1} \in P$, на следећи начин

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{j=1}^{n}\bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1}(u_j^h x_j^i \vee x_j^h v_j^i), \tag{5.18}$$

$$g_j(x_j,\ldots,x_n) = \bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1}(u_j^h(x_{j+1},\ldots,x_n)x_j^i \vee x_j^h v_j^i(x_{j+1},\ldots,x_n)) \tag{5.19}$$

$$(j=1,\ldots,n-1),$$

$$g_n(x_n) = \bigvee_{i=0}^{r-2}\bigvee_{h=i+1}^{r-1}(u_n^h x_n^i \vee x_n^h v_n^i), \tag{5.20}$$

$$g_{n+1} = 0. \tag{5.21}$$

Из (5.18)-(5.21) добијамо

$$f = \bigvee_{k=1}^{n+1} g_k. \tag{5.22}$$

Услов (5.16) сада можемо записати у следећем облику

$$\bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} u_k^h v_k^i \le \bigvee_{j=k+1}^{n} g_j \quad (k = 1, \ldots, n-1). \tag{5.23}$$

Доказаћемо да низ (5.12) одређује опште интервално решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Најпре покажимо да за свако $k \in \{1, \ldots, n\}$ важи следећи низ једнакости:

$$\prod_{s=0}^{r-1} g_k(e_s, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{s=0}^{r-2} \bigvee_{h=s+1}^{r-1} u_k^h v_k^s. \tag{5.24}$$

Уведимо ознаку $\omega_s = \bigvee_{h=s+1}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{h=0}^{s-1} v_k^h$ $(s = 1, \ldots, r-2)$. Тада из (5.19) и (5.20) добијамо

$$\begin{aligned}
&\prod_{s=0}^{r-1} g_k(e_s, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \\
&= \left(\bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u_k^h e_0^i \vee e_0^h v_k^i) \right) \prod_{s=1}^{r-2} \left(\bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u_k^h e_s^i \vee e_s^h v_k^i) \right) \cdot \\
&\qquad \cdot \left(\bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u_k^h e_{r-1}^i \vee e_{r-1}^h v_k^i) \right) = \\
&= \left(\bigvee_{h=1}^{r-1} u_k^h \right) \prod_{s=1}^{r-2} \omega_s \left(\bigvee_{i=0}^{r-2} v_k^i \right).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Сада докажимо да важи

$$\left(\bigvee_{h=1}^{r-1} u_k^h \right) \omega_1 = \bigvee_{h=2}^{r-1} u_k^h \vee u_k^1 v_k^0, \tag{5.26}$$

$$\left(\bigvee_{h=s}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{t=0}^{s-2} \bigvee_{h=t+1}^{s-1} u_k^h v_k^t \right) \omega_s = \bigvee_{h=s+1}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{t=0}^{s-1} \bigvee_{h=t+1}^{s} u_k^h v_k^t, \quad (s = 2, \ldots, r-2). \tag{5.27}$$

Применом дистрибутивности, апсорпције и ортогоналности дисјунктивних компоненти добијамо

$$
\begin{aligned}
\left(\bigvee_{h=1}^{r-1} u_k^h\right)\omega_1 &= \left(u_k^1 \vee \bigvee_{h=2}^{r-1} u_k^h\right)\left(\bigvee_{h=2}^{r-1} u_k^h \vee v_k^0\right) \\
&= \bigvee_{h=2}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{h=2}^{r-1} u_k^h v_k^0 \vee u_k^1 v_k^0 \\
&= \bigvee_{h=2}^{r-1} u_k^h \vee u_k^1 v_k^0.
\end{aligned}
$$

Слично,

$$
\begin{aligned}
&\left(\bigvee_{h=s}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{t=0}^{s-2} \bigvee_{h=t+1}^{s-1} u_k^h v_k^t\right)\omega_s = \left(\bigvee_{h=s}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{t=0}^{s-2} \bigvee_{h=t+1}^{s-1} u_k^h v_k^t\right)\left(\bigvee_{l=s+1}^{r-1} u_k^l \vee \bigvee_{t=0}^{s-1} v_k^t\right) \\
&= \bigvee_{h=s+1}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{h=s}^{r-1} \bigvee_{t=0}^{s-1} u_k^h v_k^t \vee \bigvee_{t=0}^{s-2} \bigvee_{h=t+1}^{s-1} \bigvee_{l=s+1}^{r-1} u_k^l u_k^h v_k^t \vee \bigvee_{t=0}^{s-2} \bigvee_{h=t+1}^{s-1} \bigvee_{l=0}^{s-1} v_k^l u_k^h v_k^t \\
&= \bigvee_{h=s+1}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{h=s+1}^{r-1} \bigvee_{t=0}^{s-1} u_k^h v_k^t \vee \bigvee_{t=0}^{s-1} u_k^s v_k^t \vee \bigvee_{t=0}^{s-2} \bigvee_{h=t+1}^{s-1} u_k^h v_k^t \\
&= \bigvee_{h=s+1}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{t=0}^{s-1} u_k^s v_k^t \vee \bigvee_{t=0}^{s-2} \bigvee_{h=t+1}^{s-1} u_k^h v_k^t \\
&= \bigvee_{h=s+1}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{t=0}^{s-2} u_k^s v_k^t \vee \bigvee_{t=0}^{s-2} \bigvee_{h=t+1}^{s-1} u_k^h v_k^t \vee u_k^s v_k^{s-1} \\
&= \bigvee_{h=s+1}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{t=0}^{s-2} \bigvee_{h=t+1}^{s} u_k^h v_k^t \vee u_k^s v_k^{s-1} \\
&= \bigvee_{h=s+1}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{t=0}^{s-1} \bigvee_{h=t+1}^{s} u_k^h v_k^t.
\end{aligned}
$$

Даље, применом (5.26) и (5.27) у (5.25) добијамо

$$\begin{aligned}
\prod_{s=0}^{r-1} g_k(e_s, x_{k+1}, \ldots, x_n) &= \left(\bigvee_{h=1}^{r-1} u_k^h\right) \prod_{s=1}^{r-2} \omega_s \left(\bigvee_{i=0}^{r-2} v_k^i\right) \\
&= \left(\bigvee_{h=1}^{r-1} u_k^h)\right) \omega_1 \prod_{s=2}^{r-2} \omega_s \left(\bigvee_{i=0}^{r-2} v_k^i\right) \\
&= \left(\bigvee_{h=2}^{r-1} u_k^h \vee u_k^1 v_k^0\right) \omega_2 \prod_{s=3}^{r-2} \omega_s \left(\bigvee_{i=0}^{r-2} v_k^i\right) \\
&= \left(\bigvee_{h=3}^{r-1} u_k^h \vee \bigvee_{t=0}^{1} \bigvee_{h=t+1}^{2} u_k^h v_k^t\right) \omega_3 \prod_{s=4}^{r-2} \omega_s \left(\bigvee_{i=0}^{r-2} v_k^i\right) \\
&= \cdots = \left(u_k^{r-1} \vee \bigvee_{t=0}^{r-3} \bigvee_{h=t+1}^{r-2} u_k^h v_k^t\right) \left(\bigvee_{i=0}^{r-2} v_k^i\right) \\
&= \bigvee_{t=0}^{r-2} \bigvee_{h=t+1}^{r-1} u_k^h v_k^t.
\end{aligned}$$

Сада ћемо индукцијом по k доказати да низ функција $g_1, \ldots, g_{n+1}$ представља рекурентно покривања функције f, тј. да важи $f_k = \bigvee_{j=k}^{n+1} g_j$ за свако $k = 1, \ldots, n+1$, где су f_k елиминанте функције f. Очигледно, једнакост је тачна за $k = 1$. Претпоставимо да је тачна за неко $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Тада

$$\begin{aligned}
f_{k+1}(x_{k+1}, \ldots, x_n) &= \prod_{s=0}^{r-1} f_k(e_s, x_{k+1}, \ldots, x_n) \\
&= \prod_{s=0}^{r-1} \bigvee_{j=k}^{n} g_j(e_s, x_{k+1}, \ldots, x_n) \text{ (по индукцијској хипотези)} \\
&= \prod_{s=0}^{r-1} \left(g_k(e_s, x_{k+1}, \ldots, x_n) \vee \bigvee_{j=k+1}^{n} g_j\right) \\
&= \left(\prod_{s=0}^{r-1} g_k(e_s, x_{k+1}, \ldots, x_n)\right) \vee \bigvee_{j=k+1}^{n} g_j \\
&= \bigvee_{s=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} u_k^h v_k^s \vee \bigvee_{j=k+1}^{n} g_j \text{ (из (5.24))} \\
&= \bigvee_{j=k+1}^{n} g_j \text{ (из (5.23))}.
\end{aligned}$$

Најзад, за $k = n + 1$ имамо

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= \prod_{s=0}^{r-1} f_n(e_s) \\
&= \prod_{s=0}^{r-1} g_n(e_s) \\
&= \bigvee_{s=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} u_n^h v_n^s \\
&= 0 \text{ (из (5.17))}.
\end{aligned}$$

Тиме је доказано да низ $g_1, \ldots, g_{n+1}$ представља рекурентно покривање Постове функције f, па по Теореми 5.20 следи да систем (5.12) одређује опште интервално решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Претпоставимо сада да постоји Постова функција $f : P^n \to P$ таква да систем (5.12) одређује опште интервално решење једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Нека су $f_1, \ldots, f_{n+1}$ њене елиминанте, а функције g_k $(k = 1, \ldots, n+1)$ нека су дате формулама (5.16), (5.17) и (5.18). Докажимо да важе (5.13) и (5.14). Најпре ћемо доказати да је

$$f_k^{**} = \bigvee_{j=k}^{n+1} g_j \; (k = 1, \ldots, n+1).$$

Функције $g_1, \ldots, g_{n+1}$ су Постове, јер су такве функције u_k, v_k $(k = 1, \ldots, n)$. Из конзистентности једначине $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ следи да је $f_{n+1} = 0$ и даље $f_{n+1}^{**} = 0^{**} = 0$. Из (5.21) добијамо да је $g_{n+1} = f_{n+1}^{**}$. Нека је $k \in \{1, \ldots, n\}$. Тада важи

$$\begin{aligned}
& f_k(x_k, \ldots, x_n) = 0 \\
\Longleftrightarrow\; & f \text{ је нулабилна у односу на } (x_k, \ldots, x_n) \text{ (према Теореми 5.19)} \\
\Longleftrightarrow\; & u_j(x_{j+1}, \ldots, x_n) \le x_j \le v_j(x_{j+1}, \ldots, x_n) \; (j = k, \ldots, n-1),\; u_n \le x_n \le v_n \\
& \qquad \text{(јер (5.12) одређује опште интервално решење једначине } f(X) = 0) \\
\Longleftrightarrow\; & \bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u_j^h x_j^i \vee x_j^h v_j^i) = 0 \quad (j = k, \ldots, n) \qquad \text{(према Теореми 5.12)} \\
\Longleftrightarrow\; & g_j(x_j, \ldots, x_n) = 0 \; (j = k, \ldots, n) \\
\Longleftrightarrow\; & \bigvee_{j=k}^{n} g_j(x_j, \ldots, x_n) = 0 \\
\Longleftrightarrow\; & \bigvee_{j=k}^{n+1} g_j(x_k, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{(увођењем фиктивних варијабли)}.
\end{aligned}$$

Из $f_{n+1} = 0$ следи да је f_k нулабилна. На основу Теореме 5.17 имамо да је

$$f_k^* = \left(\bigvee_{j=k}^{n+1} g_j \right)^* .$$

Пошто је свака Постова алгебра и Стонова алгебра, а елементи $g_j(x_j, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, n+1)$ су Булови (из (5.19)-(5.21)), добијамо да је

$$f_k^{**} = \left(\bigvee_{j=k}^{n+1} g_j \right)^{**} = \bigvee_{j=k}^{n+1} g_j^{**} = \bigvee_{j=k}^{n+1} g_j .$$

Из конзистентности једначине $f_n(x_n) = 0$ следи конзистентност једначине $f_n^{**}(x_n) = 0$. Једнакост $g_n = f_n^{**}$ имплицира конзистентност једначине $g_n(x_n) = 0$. Дакле, постоји $y \in P$ такво да је $g_n(y) = 0$. Пошто је $g_n(x_n) = \bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u_n^h x_n^i \vee x_n^h v_n^i)$, добијамо да је

$$\begin{aligned}
\bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u_n^h y^i \vee y^h v_n^i) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} u_n^h y^i = 0 \,\&\, \bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} y^h v_n^i = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad u_n \leq y \,\&\, y \leq v_n \\
&\Leftrightarrow \quad u_n \leq v_n \\
&\Leftrightarrow \quad \bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} u_n^h v_n^i = 0.
\end{aligned}$$

Дакле, важи услов (5.17).

Ако је $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ онда

$$\begin{aligned}
(f_{m+1}(x_{m+1}, \ldots, x_n))^{**} &= \left(\prod_{s=0}^{r-1} f_m(e_s, x_{m+1}, \ldots, x_n) \right)^{**} \\
&= \prod_{s=0}^{r-1} (f_m(e_s, x_{m+1}, \ldots, x_n))^{**} \\
&= \prod_{s=0}^{r-1} \bigvee_{j=m}^{n} g_j(e_s, x_{m+1}, \ldots, x_n) \\
&\geq \prod_{s=0}^{r-1} g_m(e_s, x_{m+1}, \ldots, x_n) \\
&= \bigvee_{s=0}^{r-2} \bigvee_{h=s+1}^{r-1} u_m^h(x_{m+1}, \ldots, x_n) v_m^s(x_{m+1}, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

па добијамо

$$\bigvee_{s=0}^{r-2} \bigvee_{h=s+1}^{r-1} u_m^h v_m^s \leq (f_{m+1}(x_{m+1}, \ldots, x_n))^{**}.$$

Како је

$$f_{m+1}^{**} = \bigvee_{j=m+1}^{n} g_j = \bigvee_{j=m+1}^{n} \left(\bigvee_{i=0}^{r-2} \bigvee_{h=i+1}^{r-1} (u_j^h x_j^i \vee x_j^h v_j^i) \right)$$

следи да важи (5.16). □

Напомена 5.3. Као специјалан случај, за $r = 2$, добијамо одговарајућу Рудеанову теорему за Булове алгебре ([41]).

У поменутом раду [41] Rudeanu показује да за сваку Булову трансформацију постоји Булова једначина чије је опште параметарско решење дато том трансформацијом:

ТЕОРЕМА 5.22. [41] *За сваку Булову трансформацију* Φ, *формула* $X = \Phi(T)$ *одређује параметарско опште решење једначине*

$$\prod_{A\in\{0,1\}^n} \bigvee_{i=1}^{n} (x_i + \varphi_i(A)) = 0.$$

Уопштићемо претходну теорему на Постове алгебре.

ТЕОРЕМА 5.23. *За сваку трансформацију* $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, *где су* $\varphi_i : P^n \to P$ *Постове функције, формула* $X = \Phi(T)$ *одређује параметарско опште решење једначине*

$$\prod_{A\in C_r^n} \bigvee_{i=1}^{n} (x_i + \varphi_i(A)) = 0.$$

Доказ. Нека је $f(X) = \prod_{A\in C_r^n} \bigvee_{i=1}^{n} (x_i + \varphi_i(A))$. Тада је f Постова функција и важи

$$\begin{aligned} f(X) = 0 \iff & \prod_{A\in C_r^n} \bigvee_{i=1}^{n} (x_i + \varphi_i(A)) = 0 \\ \iff & (\exists T) \bigvee_{i=1}^{n} (x_i + \varphi_i(T)) = 0 \\ \iff & (\exists T)(\forall i \in \{1, \dots, n\}) x_i + \varphi_i(T) = 0 \\ \iff & (\exists T)(\forall i \in \{1, \dots, n\}) x_i = \varphi_i(T) \\ \iff & (\exists T) X = \Phi(T). \end{aligned}$$

Конзистентност једначине $f(X) = 0$ следи из

$$(\exists X) f(X) = 0 \iff (\exists X)(\exists T) X = \Phi(T),$$

јер важи $(\exists X)(\exists T) X = \Phi(T)$.

□

Литература

[1] Banković D., *On general and reproductive solutions of arbitrary equations*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 26(40)(1979), 31–33.

[2] Banković D., *All general solutions of finite equations*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 47(61)(1990), 5–12.

[3] Banković D., *A new proof of of Prešić's theorem on finite equations*, Publ. Inst. Math. (Beograd) 51(65)(1992), 22–24.

[4] Banković D., *A generalization of Löwenheim's theorem*, Bull. Soc. Math. Belgique Ser. B 44(1992), 59–65.

[5] Banković D., *Formulas of general reproductive solutions of Boolean equations*, Fuzzy Sets and Systems 75(1995), 203–207.

[6] Banković D., *All general solutions of Prešić's equations*, Discrete Mathematics 137(1995), 1–6.

[7] Banković D., *Formulas of general solutions of Boolean equations*, Discrete Mathematics 152(1996), 25–32.

[8] Banković D., *All solutions of finite equations*, Discrete Mathematics 169(1997), 163–168.

[9] Banković D., *Equations on multiple-valued logic*, Multi. Val. Logic 3(1998),89–95.

[10] Banković D., *All reproductive general solutions of Postian equations*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 45(2000), 925–930.

[11] Banković D., *A note on Postian equations*, Mult.-Val. Logic 6(2001), 1–10.

[12] Banković D., *General reproductive solutions of Postian equation*, Facta universitatis, Ser. Math. Inform. 17(2002), 1–4.

[13] Banković D., *Distance in Post algebras*, Discrete Mathematics 263(2003), 269–274.

[14] Beazer R., *Functions and equations in classes of distributive lattices with pseudocomplementation*, Proc. Edinburgh Math. Soc. II Ser.19(1974), 191–203.

[15] Beazer R., *Some remarks on Post algebras*, Coll. Math. 29(1974), 167–178.

[16] Bordat J.P., *Treillis de Post. Application aux fonctions et aux équations de la logique à p valeurs*, Thèse, Univ. Sci. Tech. Languedoc, Montpellier, 1975.

[17] Bordat J.P., *Résolution des équations de la logique à p valeurs*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 23(1978), 507–531.

[18] Brown F.M, Rudeanu S., *Recurrent covers and Boolean equations*, Coll. Math. Soc. János Bolyai 33 (Lattice Theory), Szeged(Hungary), 1980, 55–86.

[19] Carvallo M., *Sur la résolution des équations de Post*, C. R. Acad. Sci., Paris, 265(1967), 601–602.

[20] Carvallo M., *Sur la résolution des équations de Post à ν valeurs*, C. R. Acad. Sci., Paris, 267(1968), 628–630.

[21] Goodstein L., The solutions of equations in a lettice, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 67(1967),231-242.

[22] Epstein G., *The lattice theory of Post algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 95(1960), 300–317.

[23] Grätzer G., *On Boolean functions (Notes on lattice theory II)*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 7(1962), 693–697.

[24] Grätzer G., *Universal algebra*, Springer–Verlag, New York, 1968.

[25] Jablonskij S.V., *Introduction to discrete mathematics*, Nauka, Moskow, 1979.

[26] Löwenheim L., *Über das Auflösungsproblem im logische Klassenkalkul*, Sitzungsber. Berl. Math. Geselschaft. 7(1908), 89–94.

[27] Marinković S., Banković D., *General solutions of equations in multiple-valued logic*, J. Mult.-Valued Logic Soft Comput., Vol. 16, 3-5(2010),421–426.

[28] Marinković S., *Reproductive general solutions of equations on Stone algebra*, J. Mult.-Valued Logic Soft Comput., Vol. 16, 1-2(2010),1–6.

[29] Müller E., *Abriss der algebra der logik* I,II (Appendix to Schröder) (1909-1910).

[30] Post E.L., *Introduction to a general theory of elementary propositions*, Amer. J. Math. 43(1921), 163–185.

[31] Prešić S., *Une méthode de résolution des équations dont toutes les solutions appartiennent à un ensemble fini donné*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A 272(1971) 654–657.

[32] Prešić S., *Ein Satz über reproducktive Lösungen*, Publ. Inst. Math. Beograd 14(28)(1972), 133–136.

[33] Prešić S., *All reproductive solutions of finite equations*, Publ. Inst. Math. Beograd 44 (58)(1988), 3–7.

[34] Reischer C., Simovici D.A., Stojmenovic I., Tošić, *A characterization of Boolean collections of set-valued functions*, Inform. Sci. 99(1997), 195–204.

[35] Rosenbloom P.C., *Post algebras. Postulates and the general theory.* Amer. J. Math. 64(1924), 167–188.

[36] Rudeanu S., *On functions and equations in distributive lattices*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 16(1968), 49–54.

[37] Rudeanu S., *Boolean functions and equations*, North Holland, Amsterdam, 1974.

[38] Rudeanu S., *On the range of a Boolean transformation*, Publ. Inst. Math. (Belgrade) 19 (33)(1975), 139–145.

[39] Rudeanu S., *On equations in bounded lattices*, An. St. Univ. Ovidius Constanta 9(1)(2001), 101–106.

[40] Rudeanu S., *Lattice functions and equations*, Springer, Berlin, 2001.

[41] Rudeanu S., *Boolean sets and most general solutions of Boolean equations*, Inform. Sci. 180(2010), 2440–2447.

[42] Ruso G., *Post algebras and pseudo–Post algebras* Fundamenta Mathematicae 67(1970), 133–145

[43] Serfati M., *Introduction aux algèbres de Post et à leurs applications*, Inst. Statistique Univ. Paris, Cahiers du Bureau Univ. de Rech. Opérationnelle, Cahier no.21, Paris, 1973.

[44] Serfati M., *Sur les polynomes postiens*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série A 276(1973), 677–679.

[45] Serfati M., *Une méthode de résolution des équations postiennes à partir d'une solution particulière*, Discrete Math. 17(1977), 187-189.

[46] Serfati M., *On Postian algebraic equations*, Discrete Math. 152(1996), 269-285.

Додатак

Summary

This doctoral dissertation belongs to the scientific discipline Algebra and logic.

General solutions of an equation are present in various fields of mathematics. Especially, the general solutions were extensively studied in Boolean algebras. In this doctoral dissertation some known results about Boolean equations are generalized to equations on Stone algebras, equations on multiple-valued logic and to equations on Post algebras.

The dissertation consists of five chapters divided in sections, Appendix and References.

In Introduction some basic notations which will be used in next chapters are given.

Because of many theorems from this field represent generalizations of the corresponding results for Boolean equations, main results on Boolean functions and equations are exposed in Chapter 2.

In Chapter 3, assuming that a general solution is known, the class of reproductive general solutions of the equation $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, where L is a Stone algebra and $f : L^n \to L$ is the function with substitution property, is described.

All general solutions of equations in one variable on multiple-valued logic are described in Chapter 4.

S. Rudeanu in [41] determined the most general form of the subsumptive general solution of a Boolean equation. He also proved that every Boolean transformation was the parametric general solution of a consistent Boolean equation. He stated an open problem: extend this research to Post algebras. Chapter 5 contains some results related this problem. A necessary and sufficient conditions for the existence of a Post function $f : P^n \to P$ (P is a Post algebra) such that the given set of reccurent inequalities be the solution of equation $f(x) = 0$, are given. We also proved that every Post transformation was the parametric solution of some consistent Post equation.

Биографија

Силвана Маринковић је рођена 6. априла 1960. године у Рачи, где је завршила основну школу и гимназију.

Природно-математички факултет у Крагујевцу, студијска група математика, уписала је 1978. године, а дипломирала 1982. године са просечном оценом 8.60.

Последипломске магистарске студије завршила је на Математичком факултету Универзитета у Београду 27.8.1997. године, одбраном магистарске тезе под насловом „Алгебризација једне вероватносне логике са бесконачним предикатима“.

Од 1982. до 1988. године радила је у средњим школама Мешовита гимназија у Рачи и „Гоша“у Смедеревској Паланци, а затим у радној организацији „Романија“из Крагујевца. Од септембра 1990. године ради у Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета у Крагујевцу, најпре у звању асистента приправника, а од 1998. године у звању асистента за ужу научну област Алгебра и логика.

У периоду 2001.-2007. године радила је у Вишој техничкој школи у Крагујевцу у звању предавача.

У досадашњем раду у Институту за математику и информатику Природно-математичког факултета држала је вежбе из предмета: Алгебра, Математичка логика и скупови, Линеарна алгебра и полиноми, Алгебарске структуре, Теоријске основе информатике 2, Математика 1 и Математика 2 (за студенте Физике) и Математика 1 (за студенте Хемије). У Вишој техничкој школи у Крагујевцу држала је предавања из предмета Математика, Математика 1 и Математика 2.

Силвана Маринковић се бави научно истраживачким радом у области логике и алгебре. Резултате истраживања објавила је у следећим научним радовима:

1. Marinković S., Rašković M. and Đorđević R., *Weak probability logic with infinitary predicates,* Publ. Inst. Math., Nouv. Ser. 65(79) (1999), 8-17.

2. Marinković S., Rašković M. and Đorđević R., *Weak probability polyadic algebras*, Facta Universitatis Ser. Math. Inform. 16(2001), 1-12.

3. Marinković S., Banković D., *General solutions of equations in multiple-valued logic*, J. Mult.-Valued Logic Soft Comput., Vol. 16, 3-5(2010),421–426.

4. Marinković S., *Reproductive general solutions of equations on Stone algebra*, J. Mult.-Valued Logic Soft Comput., Vol. 16, 1-2(2010),1–6.