

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Tamara D. Koledin

NEKE KLASE SPEKTRALNO OGRANIČENIH
GRAFOVA

DOKTORSKA DISERTACIJA

Beograd, 2013.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Tamara D. Koledin

Some Classes of Spectrally Constrained Graphs

DOCTORAL DISSERTATION

Belgrade, 2013.

Neke klase spektralno ograničenih grafova

Apstrakt:

Spektralna teorija grafova je grana matematike koja je nastala pedesetih godina prošlog veka i od tada se neprestano razvija. Njen značaj ogleda se u brojnim primenama, naročito u hemiji, fizici, računarstvu i drugim naukama. Grane matematike, kao što su linearna algebra i, posebno, teorija matrica imaju važnu ulogu u spektralnoj teoriji grafova. Postoje različite matrice reprezentacije grafa. Najviše su izučavane matrica susedstva grafa i Laplasova (*P.S. Laplace*) matrica, a zatim i Zajdelova (*J.J. Seidel*) i takozvana nenegativna Laplasova matrica. Spektralna teorija grafova u suštini uspostavlja vezu između strukturalnih osobina grafa i algebarskih osobina njegove matrice, odnosno razmatra o kojim se strukturalnim osobinama (kao što su povezanost, bipartitnost, regularnost i druge) mogu dobiti informacije na osnovu nekih svojstava sopstvenih vrednosti njegove matrice. Veliki broj dosadašnjih rezultata iz ovog širokog polja istraživanja može se naći u sledećim monografijama: [20], [21], [23] i [58].

Disertacija sadrži originalne rezultate dobijene u nekoliko podoblasti spektralne teorije grafova. Ti rezultati izloženi su u tri celine – glave, od kojih je svaka podeljena na poglavlja, a neka od njih na potpoglavlja. Na početku svake glave, u posebnom poglavlju, formulisan je problem koji se u toj glavi razmatra, kao i postojeći rezultati koji se odnose na zadati problem, a neophodni su za dalja razmatranja. U ostalim poglavljima predstavljani su originalni rezultati, koji se nalaze i u radovima [3], [4], [47], [48], [49], [50], [51] i [52].

U prvoj glavi razmatra se druga sopstvena vrednost regularnih grafova. Postoji dosta rezultata o grafovima čija je druga po veličini sopstvena vrednost ograničena odozgo nekom (relativno malom) konstantom. Posebno, druga sopstvena vrednost ima značajnu ulogu u određivanju strukture regularnih grafova. Poznata je karakterizacija regularnih grafova koji imaju samo jednu pozitivnu sopstvenu vrednost (videti [20]), a razmatrani su i regularni grafovi sa osobinom $\lambda_2 \leq 1$ (videti [64]). U okviru ove disertacije proširuju se rezultati koji se nalaze u radu [64], a predstavljaju se i neki opšti rezultati koji se odnose na vezu određenih spektralnih i strukturalnih

osobina regularnih ne bipartitnih grafova bez trouglova.

Povezani regularni grafovi sa malim brojem različitih sopstvenih vrednosti predmet su mnogih istraživanja buduci da imaju interesantnu (kombinatornu) strukturu. Problemom određivanja strukture povezanih regularnih grafova sa tačno četiri različite sopstvene vrednosti bavili su se Van Dam (*E.R. van Dam*) i Spence (*E. Spence*), i postigli značajne rezultate koji su predstavljeni u radovima [27] i [32]. Takođe, svi povezani regularni bipartitni grafovi sa četiri različite sopstvene vrednosti okarakterisani su kao grafovi incidencije uravnoteženih nekompletnih blok-šema (videti monografiju [20]), a postoje i rezultati koji se odnose na regularne bipartitne grafove sa pet sopstvenih vrednosti (videti [33]). U ovoj disertaciji posebno se razmatraju regularni bipartitni grafovi sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti, kao i regularni bipartitni grafovi bez četvorouglova. Takođe, osim što su dati opšti rezultati slični onima iz Glave 1, ali za bipartitne grafove, razmatra se i odnos regularnih bipartitnih grafova sa određenim vrstama blok-šema.

U Glavi 3 razmatraju se takozvani ugnežđeni grafovi i njihova nenegativna Laplasova matrica. Ugnežđeni grafovi imaju važnu ulogu u istraživanjima koja se odnose na grafove sa maksimalnim indeksom, u smislu matrice susedstva i u smislu nenegativne Laplasove matrice. Poznato je da graf sa maksimalnim indeksom ili maksimalnim Q -indeksom datog reda i veličine mora biti ugnežđeni graf (videti [7] i [22]). Posebno se razmatraju bipartitni ugnežđeni grafovi (takozvani duplo ugnežđeni grafovi). Dati su i rezultati slični postojećim za njihove ne bipartitne srodnike. Do sada ne postoji mnogo rezultata koji se odnose na drugu sopstvenu vrednost nenegativne Laplasove matrice grafa (videti, na primer, [6] ili [25]). Zato se razmatra veza između strukture ugnežđenih grafova i druge sopstvene vrednosti (ali i nekih drugih sopstvenih vrednosti) njihove nenegativne Laplasove matrice.

Ključne reči: matrica susedstva grafa, nenegativna Laplasova matrica grafa, spektar grafa, nenegativni Laplasov spektar grafa, druga sopstvena vrednost, regularan graf, bipartitni graf, ugnežđeni graf, uravnotežena nekompletna blok-šema, delimično uravnotežena nekompletna blok-šema

Naučna oblast: Matematika

Uža naučna oblast: Algebarska teorija grafova

UDK: 519.17:512(043.3)

Some classes of spectrally constrained graphs

Abstract:

Spectral graph theory is a branch of mathematics that emerged more than sixty years ago, and since then has been continuously developing. Its importance is reflected in many interesting and remarkable applications, especially in chemistry, physics, computer sciences and other. Other areas of mathematics, like linear algebra and matrix theory have an important role in spectral graph theory. There are many different matrix representations of a given graph. The ones that have been studied the most are the adjacency matrix and the Laplace matrix, but also the Seidel matrix and the so-called signless Laplace matrix. Basically, the spectral graph theory establishes the connection between some structural properties of a graph and the algebraic properties of its matrix, and considers structural properties that can be described using the properties of the eigenvalues of its matrix. Systematized former results from this vast field of algebraic graph theory can be found in the following monographs: [20], [21], [23] i [58].

This thesis contains original results obtained in several subfields of the spectral graph theory. Those results are presented within three chapters. Each chapter is divided into sections, and some sections into subsections. At the beginning of each chapter (in an appropriate sections), we formulate the problem considered within it, and present the existing results related to this problem, that are necessary for further considerations. All other sections contain only original results. Those results can also be found in the following papers: [3], [4], [47], [48], [49], [50], [51] and [52].

In the first chapter we consider the second largest eigenvalue of a regular graph. There are many results concerning graphs whose second largest eigenvalue is upper bounded by some (relatively small) constant. The second largest eigenvalue plays an important role in determining the structure of regular graphs. There is a known characterization of regular graphs with only one positive eigenvalue (see [20]), and regular graphs with the property $\lambda_2 \leq 1$ have also been considered (see [64]). Within this thesis we extend the results given in [64], and we also present some general results concerning the relations between some structural and spectral properties of

regular triangle-free graphs.

Connected regular graphs with small number of distinct eigenvalues have been extensively studied, since they usually have an interesting (combinatorial) structure. Van Dam and Spence considered the problem of determining the structure of connected regular graphs with exactly four distinct eigenvalues, and they achieved important results presented in papers [27] and [32]. All connected regular bipartite graphs with exactly four distinct eigenvalues are characterized as the incidence graphs of balanced incomplete block designs (see monograph [20]). There are also results concerning regular bipartite graphs with exactly five distinct eigenvalues (see [33]). In this thesis, in the second chapter, we consider regular bipartite graphs with three distinct non-negative eigenvalues, and also quadrangle-free regular bipartite graphs. Besides some general results similar to those given in the first chapter, but this time for bipartite graphs, we also present results concerning the relations between regular bipartite graphs and certain kinds of block designs.

In the third chapter we consider the so-called nested graphs and their signless Laplace matrix. Nested graphs play an important role in the research concerning graphs with maximal index, in terms of the adjacency matrix and in terms of the signless Laplace matrix. It is a known fact that a graph with maximal index, or maximal Q -index, of given order and size, must be nested graph (see [7] and [22]). Here we consider bipartite nested graphs (the so-called double nested graphs). We also present results concerning double nested graphs that are similar to the existing results concerning their non-bipartite counterparts. There are no many results concerning the second largest eigenvalue of the signless Laplace matrix of a graph (see, for example, [6] or [25]). That is why we consider the relations between the structure of nested graphs and the second largest eigenvalue (but also some other eigenvalues) of their signless Laplace matrix.

Keywords: adjacency matrix, signless Laplace matrix, graph spectrum, signless Laplace spectrum, second largest eigenvalue, regular graph, bipartite graph, nested graph, balanced incomplete block design, partially balanced incomplete block design

Scientific field: Mathematics

Narrow scientific fields: Algebraic graph theory

UDC: 519.17:512(043.3)

Podaci o mentoru i članovima komisije

Mentor: docent dr Zoran Stanić

Matematički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Članovi komisije:

akademik Dragoš M. Cvetković

Matematički institut,
SANU

redovni profesor dr Zoran Radosavljević

Elektrotehnički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

redovni profesor dr Đorđe Dugošija

Matematički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Datum odbrane:

... mojoj porodici

Ove izjave zahvalnosti nisu samo kurtoazne. Pisanje ovih nekoliko redova za mene je prijatna obaveza i veliko zadovoljstvo.

Pre svega iskrenu zahvalnost dugujem docentu dr Zoranu Staniću na poverenju koje mi je ukazao prihvativši se mentorstva ovog rada. Kao mentor pružio mi je nesebičnu pomoć, davao dragocene savete, dobronamerno me kritikovao i motivisao dok je nastajala ova teza. Zahvaljujem i na podršci i strpljenju koje mi je ukazao tokom izrade disertacije.

Zahvalnost dugujem profesoru dr Zoranu Radosavljeviću, koji me je uveo u problematiku spektralne teorije grafova, na korisnim sugestijama i svesrdnoj pomoći, ne samo pri izradi ove doktorske disertacije već i tokom rada na magistarskoj tezi.

Želela bih ovom prilikom da zahvalim Srećku Menjiću, koji je učestvovao u rešavanju softverskih problema, kao i Slavici Koledin, koja je lektorisala ovaj tekst, i tako ga ulepšala. Njima, i ostalim članovima moje porodice, kojima je ova disertacija posvećena, veliko hvala na bezrezervnoj podršci.

Sadržaj

0	Uvod	1
1	Regularni grafovi sa ograničenom drugom sopstvenom vrednošću	6
1.1	Postavka problema i pregled poznatih rezultata	6
1.2	Regularni grafovi čija je druga sopstvena vrednost najviše 1	8
1.3	Neke spektralne nejednakosti za regularne nebipartitne grafove bez trouglova	15
1.4	Regularni nebipartitni grafovi bez trouglova čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo zdatom konstantom	20
1.4.1	Regularni nebipartitni grafovi čiji je struk veći od 3 koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$	20
1.4.2	3-regularni nebipartitni refleksivni grafovi čiji je struk veći od 4	26
1.4.3	Regularni nebipartitni grafovi čiji je struk veći od 4 koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{3}$	29
1.4.4	Podaci o grafovima iz Poglavlja 1.4	31
2	Regularni bipartitni grafovi	41
2.1	Postavka problema i pregled poznatih rezultata	41
2.2	Regularni bipartitni grafovi sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti	46
2.2.1	Neka opšta svojstva regularnih bipartitnih grafova sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti	47
2.2.2	Regularni bipartitni grafovi sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti i dvoklasne simetrične DUNBŠ-e	49
2.2.3	Konstrukcije regularnih bipartitnih grafova sa šest različitih sopstvenih vrednosti	55
2.2.4	Povezani r -regularni bipartitni grafovi reda $2n$ sa šest različitih sopstvenih vrednosti koji zadovoljavaju $r = 3$ ili $n \leq 20$	59
2.3	Regularni bipartitni grafovi čiji je struk veći od 4	64

2.4	Neke spektralne nejednakosti za regularne bipartitne grafove	69
2.5	Regularni bipartitni reflektivni grafovi	74
2.5.1	r -regularni bipartitni reflektivni grafovi reda $2n$ koji zadovoljavaju $r \leq 2$ ili $r \geq n - 2$	74
2.5.2	r -regularni bipartitni reflektivni grafovi reda $2n$ koji zadovoljavaju $3 \leq r \leq n - 3$	75
2.5.3	Podaci i komentari o r -regularnim bipartitnim reflektivnim grafovima reda $2n$ koji zadovoljavaju $3 \leq r \leq n - 3$	87
3	Ugnežđeni grafovi	95
3.1	Postavka problema i pregled poznatih rezultata	95
3.2	Neke spektralne nejednakosti za bipartitne grafove sa maksimalnim Q -indeksom	99
3.2.1	Ekstremalni bipartitni grafovi	99
3.2.2	Q -sopstveni vektori duplo ugnežđenih grafova	102
3.2.3	Neke granice za Q -indeks duplo ugnežđenog grafa	105
3.2.4	Numerički rezultati	111
3.3	Ugnežđeni grafovi sa ograničenom drugom Q -sopstvenom vrednošću i ograni	115
3.3.1	Ugnežđeni grafovi sa ograničenom drugom sopstvenom vrednošću	116
3.3.2	Duplo ugnežđeni grafovi koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$	120
3.3.3	Podaci o DUG-ovima koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$ i DUG-ovi koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq 1$	127
	Literatura	136

Glava 0

Uvod

U uvodnoj glavi dajemo kratak pregled pojmova i termina, kao i postojećih rezultata koje koristimo u disertaciji. Kad god je to moguće, koristimo postojeće termine na srpskom jeziku koji su uobičajeni za spektralnu i algebarsku teoriju grafova, kao i odgovarajuće oznake. Međutim, za neke pojmove ne postoje odgovarajuće reference u našem jeziku. Budući da se ti pojmovi uglavnom javljaju u literaturi pisanoj na engleskom, dajemo njihov prevod na srpski jezik, kao i njihov naziv na engleskom jeziku, na mestu njihovog prvog pojavljivanja u tekstu, a nadalje koristimo uvedeni pojam na srpskom. Pozivanja na tvrdjenja i formule data su prema njihovoj numeraciji u tekstu.

Neka je G prost graf (neorijentisan i bez petlji i višestrukih grana) sa n čvorova. Karakteristični polinom grafa G definiše se kao karakteristični polinom njegove matrice susedstva $A_G = (a_{ij})$, gde je $a_{ij} = 1$ ako postoji grana između čvorova i i j , a 0 inače. *Sopstvene vrednosti grafa G* , u oznaci

$$\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \cdots \geq \lambda_n(G),$$

jesu sopstvene vrednosti matrice A_G , a njegov *spektar* se definiše kao kolekcija njegovih sopstvenih vrednosti (sa ponavljanjima). Prva sopstvena vrednost grafa naziva se i *indeks grafa*. Takođe, za svaki povezan graf važi $\lambda_1 > \lambda_2$.

Graf koji se sastoji od k disjunktnih kopija proizvoljnog grafa G obeležavamo sa kG . Kompletan graf sa n čvorova obeležavamo sa K_n , a konturu (put) sa n čvorova sa C_n (P_n). Komplement grafa G označavamo sa \overline{G} , a sa ' \cup ' disjunktne uniju dva grafa (ili više grafova).

Skup čvorova grafa G obeležavamo sa X_G ($= X$). Ako je $S \subset X$, tada $G[S]$ označava podgraf indukovan čvorovima koji pripadaju skupu S . Skup čvorova koji su susedni čvoru v grafa G obeležavamo sa $N(v)$. Ukoliko je potrebno, stepen regularnog grafa G obeležavamo sa r_G ($= r$), dok za odgovarajući graf kažemo da je r -regularan.

Poznata je činjenica da, ukoliko je spektar regularnog grafa G reda n : $\{r = \lambda_1(G), \lambda_2(G), \cdots, \lambda_n(G)\}$, tada je spektar njegovog komplementa $\{n-1-r, -\lambda_2(G)-1, \cdots, -\lambda_n(G)-1\}$ (Teorema 2.6 monografije [20]).

Za dati graf G , $\text{gr}(G)$ označava njegov *struk*¹, odnosno dužinu najkraće konture koja je sadržana u G , $d(u, v)$ je *rastojanje* između čvorova u i v grafa G , dok je $\text{diam}(G)$ oznaka za *dijametar* (to jest dužinu puta maksimalne dužine) grafa G .

Most grafa je grana čijim se udaljavanjem iz grafa povećava broj komponenti povezanosti grafa. *Viseća grana* grafa jeste grana koja je incidentna sa čvorom stepena jedan.

Bipartitni graf je graf čiji se čvorovi mogu podeliti na dva međusobno disjunktna skupa X_1 i X_2 , pri čemu grane povezuju samo čvorove iz različitih skupova. Budući da je takav graf 2-obojuv, to jest bihromatski (čvorovi skupa X_1 mogu se obojiti jednom bojom, a čvorovi skupa X_2 drugom), uobičajeno je da se skupovi X_1 i X_2 nazivaju *klase obojivosti*² grafa G .

(r_1, r_2) -*semiregularan bipartitan graf*, sa parametrima (n_1, n_2, r_1, r_2) , jeste bipartitan graf takav da skup X_1 sadrži n_1 čvorova, skup X_2 sadrži n_2 čvorova, i svi čvorovi koji pripadaju istom skupu imaju isti stepen (čvorovi koji pripadaju skupu X_1 su stepena r_1 , a čvorovi koji pripadaju skupu X_2 su stepena r_2). Očigledno je da tada važi $n_1 r_1 = n_2 r_2$.

k -*kompletan graf* K_{n_1, n_2, \dots, n_k} je graf čiji se skup čvorova može podeliti na k međusobno disjunktnih podskupova N_i , $1 \leq i \leq k$, koji sadrže redom n_1, n_2, \dots, n_k čvorova, tako da su svaka dva čvora iz različitih podskupova povezana granom a da nijedna grana ne povezuje čvorove iz istog podskupa. Ukoliko skupovi N_i , $1 \leq i \leq k$, sadrže jednak broj elemenata k -kompletan graf je regularan, i naziva se *kompletan regularan multipartitni graf*³, a ukoliko je $k = 2$ dobijamo bikompletne grafove, koje još nazivamo i kompletni bipartitni grafovi.

*Savršeno sparivanje*⁴ unutar grafa reda $2n$ čini n grana, među kojima ne postoje dve koje su incidentne. Ukoliko postoji, savršeno sparivanje ne mora biti jedinstveno.

*Koktelski graf*⁵ $C(n)$ je graf koji se dobija kada se u kompletnom grafu reda $2n$ ukloni jedno savršeno sparivanje. Primetimo da je $C(n)$ u stvari n -kompletan graf u kojem svi skupovi N_i , $1 \leq i \leq n$, sadrže tačno dva elementa.

Komplement kompletnog grafa naziva se *totalno nepovezan graf*.

*Graf grana*⁶ $L(G)$ grafa G jeste graf čija su temena u 1-1 korespondenciji sa granama grafa G i kod koga su dva temena susedna ako i samo ako su njima odgovarajuće grane incidentne u grafu G . U tom slučaju graf G zovemo *korenski graf*⁷.

¹Engl. *girth*.

²Engl. *colour classes*.

³Engl. *complete regular multipartite graph*.

⁴Engl. *perfect matching*.

⁵Engl. *cocktail party graph*.

⁶Engl. *line graph*.

⁷Engl. *root graph*.

*Jako regularan graf*⁸ sa parametrima (n, r, e, f) jeste graf reda n koji je r -regularan i zadovoljava sledeće osobine: bilo koja dva susedna čvora imaju tačno e zajedničkih suseda i bilo koja dva nesusedna čvora imaju tačno f zajedničkih suseda. Komplement jako regularnog grafa jeste jako regularan. Takođe, jako regularan graf je nepovezan ako i samo ako je izomorfan sa disjunktnom unijom m kopija m potpunih grafova K_r za neke prirodne brojeve m i r (ovo se dešava ako i samo ako je $f = 0$). Uočimo da je komplement nepovezanog jako regularnog grafa kompletan regularan multipartitni graf. Pomenućemo još jedno važno svojstvo jako regularnih grafova (koji nisu kompletni ili prazni), a to je da imaju tačno tri različite sopstvene vrednosti (pa je zato njihov dijametar 2 – videti Teoremu 3.13 u [20]). Postoji obimna literatura o jako regularnim grafovima, a mi ovde zainteresovanog čitaoca upućujemo na [19].

Neka su data dva niza realnih brojeva: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ i $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$ i neka važi $m < n$. Kažemo da drugi niz *prepliće*⁹ prvi ako važi

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}, \text{ za } i = 1, 2, \dots, m.$$

Preplitanje je *čvrsto*¹⁰ ukoliko postoji ceo broj $k \in [0, m]$ takav da je

$$\lambda_i = \mu_i \text{ za } 0 \leq i \leq k \text{ i } \lambda_{n-m+i} = \mu_i \text{ za } k+1 \leq i \leq m.$$

Sledeća teorema može se naći, na primer, u monografiji [20], strana 19.

Teorema 0.1 *Neka je B glavna podmatrica simetrične matrice A . Tada sopstvene vrednosti matrice B prepliću sopstvene vrednosti matrice A .*

Ukoliko je matrica A matrica susedstva proizvoljnog grafa, tada, na osnovu prethodne teoreme, sledi:

Teorema 0.2 *Neka je G proizvoljan graf čije su sopstvene vrednosti $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ i neka je G' (bilo koji) indukovani podgraf grafa G čije su sopstvene vrednosti $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$. Tada važi $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}$, $i = 1, \dots, m$.*

Nejednakosti navedene u prethodnoj teoremi nazivaju se Košijeve (A-L. Cauchy) nejednakosti. Ovu teoremu, poznatu kao *Teorema o preplitanju*, često koristimo u disertaciji.

⁸Engl. *strongly regular graph*.

⁹Engl. *interlace*.

¹⁰Engl. *tight*.

Svojstvo grafa G , koje je takode i svojstvo svakog njegovog indukovanog podgrafa, naziva se *nasledno svojstvo (osobina)*¹¹. Jasno je, na osnovu prethodne teoreme, da je osobina $\lambda_2 \leq c$, gde je c neka fiksirana konstanta, nasledna. Ukoliko graf G poseduje određenu naslednu osobinu, i ako tu osobinu ne poseduje nijedan njegov pravi nadgraf, tada se graf G naziva *maksimalan graf*¹² za uočenu naslednu osobinu. Takođe kažemo da je graf H *zabranjeni podgraf*¹³ za neku naslednu osobinu ukoliko on tu osobinu ne zadovoljava. Vidimo da tada H ne može biti podgraf nijednog grafa G koji zadovoljava posmatranu naslednu osobinu.

Neka su vrste i kolone kvadratne matrice A reda n podeljene (razbijene) na blokove u odnosu na podelu (particiju) X_1, X_2, \dots, X_m skupa $\{1, 2, \dots, n\}$ sa karakterističnom matricom \tilde{S} ($(\tilde{S})_{i,j} = 1$ ako je $i \in X_j$, a nula inače), to jest

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,m} \end{pmatrix}.$$

*Količnička matrica*¹⁴ indukovana navedenom podelom jeste matrica \tilde{B} , gde je $(\tilde{B})_{i,j}$ srednja vrednost sume u vrstama bloka $A_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, m$. Preciznije:

$$(\tilde{B})_{i,j} = \frac{1}{|X_i|} \mathbf{1}^T A_{i,j} \mathbf{1} = \frac{1}{|X_i|} (\tilde{S}^T A \tilde{S})_{i,j},$$

gde $\mathbf{1}$ označava vektor čije su sve koordinate jednake 1. Ovakva podela matrice na blokove zove se regularna (ili *pravilna*¹⁵) ukoliko je suma elemenata u svakoj vrsti (i koloni) svakog bloka $A_{i,j}$ konstantna, to jest ako važi $A\tilde{S} = \tilde{S}\tilde{B}$.

Naredna teorema takode se nalazi u radu [41].

Teorema 0.3 *Neka je \tilde{B} količnička matrica simetrične matrice A podeljene na blokove. Tada važi:*

- (i) *Sopstvene vrednosti matrice \tilde{B} prepliću sopstvene vrednosti matrice A .*
- (ii) *Ukoliko je preplitanje čvrsto, podela matrice A na blokove je regularna.*

U ovoj disertaciji često koristimo prethodnu teoremu, primenjenu na matricu susedstva regularnog grafa G ; jasno je da je u ovom slučaju količnička matrica matrice

¹¹Engl. *hereditary property*.

¹²Engl. *maximal graph*.

¹³Engl. *forbidden subgraph*.

¹⁴Engl. *quotient matrix*.

¹⁵Engl. *equitable*.

susedstva posmatranog grafa indukovana odgovarajućom podelom skupa njegovih čvorova.

Teorema koja sledi posledica je prethodne teoreme (primenjene na matricu susedstva regularnog grafa) i nalazi se u doktorskoj disertaciji [40]:

Teorema 0.4 *Neka je G r -regularan graf reda n i neka je kompletan bipartitni graf $K_{l,m}$ njegov indukovani podgraf. Neka su x_1 i x_2 , $x_1 \geq x_2$ nule polinoma*

$$(n - l - m)x^2 + (rl + rm - 2lm)x - lm(n - 2r).$$

Tada važi:

$$\lambda_2(G) \geq x_1 \quad i \quad \lambda_n(G) \leq x_2.$$

Glava 1

Regularni grafovi sa ograničenom drugom sopstvenom vrednošću

U ovoj glavi razmatramo regularne grafove čija je druga po veličini sopstvena vrednost ograničena odozgo sa 1 i predstavljamo neke njihove strukturalne osobine. Određujemo sve takve grafove čiji je stepen najviše 8. Takođe razmatramo i vezu određenih strukturalnih osobina (dijametra, stepena i reda) regularnih grafova bez trouglova i njihove druge sopstvene vrednosti. Određujemo sve takve grafove čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo sa $\sqrt{2}$. Dajamo i nejednakost koja povezuje stepen regularnog grafa bez trouglova i četvorouglova sa njegovom drugom sopstvenom vrednošću i određujemo sve takve 3-regularne grafove čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo sa 2 (grafovi koji zadovoljavaju ovu osobinu nazivaju se *refleksivni* grafovi) i sve takve grafove čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo sa $\sqrt{3}$.

Rezultati predstavljeni u ovoj glavi mogu se naći u radovima [51] (Poglavlje 1.2), [48] (Poglavlje 1.3) i [47] i [49] (Poglavlje 1.4).

1.1 Postavka problema i pregled poznatih rezultata

O problemu određivanja grafova čija je druga po veličini sopstvena vrednost ograničena odozgo nekom (relativno malom) konstantom postoji dosta rezultata. Određeni su svi grafovi čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo sa $\frac{1}{3}$, kao i sa $\sqrt{2} - 1$, dok su grafovi čija druga sopstvena vrednost zadovoljava $\lambda_2 \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ okarakterisani ali nisu u potpunosti određeni (videti [58]). Takođe postoje mnogobrojni rezultati koji se odnose na slučajeve $\lambda_2 \leq 1$ (videti [64]) i $\lambda_2 \leq 2$ (videti [58]). Više detalja o ovoj temi može se naći u [20], [58] i [26] (uključujući različite gornje granice za λ_2 , kao i njenu vezu sa algebarskom povezanošću i Markovljevim lancima, a takođe i primene u računarskim naukama). Ovde ćemo samo pomenuti da druga sopstvena vrednost ima važnu ulogu u određivanju strukture regularnih

grafova. Poznato je, naime, da regularni grafovi sa malom drugom sopstvenom vrednošću imaju "pravilniji" oblik, to jest manji dijametar i veću povezanost. Takozvani *redak*¹ graf (koji ne mora biti regularan) sa velikom vrednošću povezanosti zove se još i *raširivač*² (za više detalja videti [45]). Takvi grafovi imaju značajnu ulogu u računarstvu, dizajniranju računarskih mreža, teoriji kodova koji ispravljaju greške itd. (videti ponovo [45]). Iako se ekspanzivnost grafova može meriti na više različitih načina, njihova zajednička osobina je veliki *spektralni jaz*³, odnosno razlika između prve i druge sopstvene vrednosti. U tom smislu, regularni grafovi sa malom drugom sopstvenom vrednošću (a samim tim i velikim spektralnim jazom) mogu imati značaja u gorepomenutim oblastima istraživanja.

Poznata je karakterizacija regularnih grafova čije su sve sopstvene vrednosti veće ili jednake -2 . Naime, takvi grafovi su ili koktelski grafovi ili grafovi grana regularnih, odnosno semiregularnih bipartitnih grafova, ili se mogu predstaviti u euklidskom korenskom sistemu E8 (videti [18]). Takođe, regularni grafovi koji potiču iz korenskog sistema E8, takozvani *regularni izuzetni grafovi*,⁴ određeni su u [16]. Na osnovu tih rezultata u [23] je data još jedna opšta karakterizacija regularnih grafova čije sve sopstvene vrednosti nisu manje od -2 . Regularni grafovi čija druga sopstvena vrednost nije veća od jedan tada se mogu okarakterisati kao komplementi regularnih grafova čije sve sopstvene vrednosti nisu manje od -2 ili kao komplementi disjunktne unije takvih grafova.

Sledeća teorema može se naći u radu [64], i na njoj su zasnovani neki rezultati u sledećem poglavlju.

Teorema 1.1 *Svaki povezan regularan graf G (reda n) za koji važi $\lambda_2(G) \leq 1$ jeste komplement (ne obavezno povezanog) regularnog grafa čija je svaka komponenta ili*

(i) *povezan regularan graf grana ili*

(ii) *koktelski graf ili*

(iii) *jedan od 187 povezanih regularnih izuzetnih grafova.*

Svaki od 187 povezanih regularnih izuzetnih grafova ima između 8 i 28 čvorova, a stepen svakog od njih je između 3 i 16. U [16] (i u [23]), ovi grafovi su podeljeni u tri "sloja", i ako je n broj čvorova, a r stepen regularnog izuzetnog grafa, tada grafovi koji pripadaju prvom (odnosno drugom, odnosno trećem) sloju zadovoljavaju:

¹Engl. *sparse graph*.

²Engl. *expander*.

³Engl. *spectral gap*.

⁴Engl. *regular exceptional graphs*.

$$n = 2(r+2) \leq 28 \quad (\text{odnosno } n = \frac{3}{2}(r+2) \leq 27, \text{ odnosno } n = \frac{4}{3}(r+2) \leq 16). \quad (1.1)$$

Primetimo da svaki regularan izuzetni graf pripada tačno jednom od navedenih slojeva. Ovu klasifikaciju često koristimo u sledećem poglavlju.

Ipak, navedena karakterizacija regularnih grafova koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq 1$ suviše je gruba i ne daje mnogo informacija o njima, naročito ukoliko su im komplementi nepovezani. U radu [64] dati su neki rezultati koji pružaju bolju sliku strukture regularnih grafova sa osobinom $\lambda_2 \leq 1$, a takođe su određeni i svi takvi grafovi stepena ne većeg od 4. U sledećem poglavlju nastavljamo sa daljim istraživanjem u tom polju, i, u nekim slučajevima dajemo jasan i jednostavan opis regularnih grafova koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq 1$, i određujemo sve one čiji stepen se nalazi između 5 i 8.

1.2 Regularni grafovi čija je druga sopstvena vrednost najviše 1

U radu [64] data je karakterizacija regularnih grafova koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq 1$ (videti Teoremu 1.1), a takođe su i određeni svi takvi grafovi čiji stepen nije veći od 4. U ovom poglavlju uopštavamo neke od tih rezultata (Teorema 1.2 i Teorema 1.3). Takođe predstavljamo još neke karakterizacije regularnih grafova sa osobinom $\lambda_2 \leq 1$ (Lema 1.1 i Teorema 1.4), te na osnovu dobijenih opštih rezultata potpuno određujemo sve r -regularne grafove ($5 \leq r \leq 8$) sa osobinom $\lambda_2 \leq 1$ (Teorema 1.5 – Teorema 1.8).

Očigledno svaki r -regularan ($r \geq 2$) graf koji zadovoljava $\lambda_2 \leq 1$ mora biti povezan. Najpre dokazujemo sledeći (opšti) rezultat.

Lema 1.1 *Neka je G povezan r -regularan graf reda n . Ako je $\overline{G} = L(H)$, gde je H regularan graf, tada je $n - r$ neparan broj i $n - r + 1$ deli $4n$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je H regularan graf veličine n . Budući da je $r_{\overline{G}} = n - r - 1$, sledi da je svaka grana grafa H incidentna sa $n - r - 1$ drugih grana, te je $r_H = \frac{n-r-1}{2} + 1$. Dakle, $n - r$ je neparan broj. Dalje, ako je N red grafa H , tada $N = \frac{2n}{r_H}$, pa $\frac{n-r-1}{2}$ deli $2n$, odnosno $n - r + 1$ deli $4n$. ■

Primetimo da postoji jednostavan način za konstrukciju nekih (beskonačnih) familija regularnih grafova koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq 1$. Naime, dovoljno je da primenimo operaciju komplementiranja grafova na disjunktnu uniju regularnih grafova čije su sve sopstvene vrednosti veće ili jednake -2 (videti Teoremu 1.1 i diskusiju u Poglavlju 1.1). S druge strane, u opštem slučaju, razmatranje strukture grafa G (ili njegovog komplementa) ne predstavlja najjednostavniji način kojim dolazimo do odgovora zadovoljava li graf G osobinu $\lambda_2(G) \leq 1$. U naredne dve teoreme razmatramo neke posebne slučajeve. Neki od rezultujućih grafova takođe se pojavljuju i u radu [64].

Teorema 1.2 *Neka je G r -regularan ($r \geq 4$) graf reda $n = 2r$ koji zadovoljava $\lambda_2 \leq 1$. Tada:*

- (i) *ako je $r \neq 6, 7$, onda je $G = \overline{2K_r}$;*
- (ii) *ako je $r = 6$, onda je $G = \overline{2K_6}$ ili $G = \overline{L(K_{3,4})}$;*
- (iii) *ako je $r = 7$, onda je $G = \overline{2K_7}$ ili $G = \overline{L(H)}$, gde je H bilo koji od dva 4-regularna grafa reda 7.*

Dokaz. Važi $r_{\overline{G}} = r - 1$, pa ako je \overline{G} nepovezan, onda mora imati dve komponente sa po r čvorova u svakoj od njih. Tada je svaka od komponenti kompletan graf K_r , odakle sledi $G = \overline{2K_r}$. Time smo dokazali (i) i prvi deo tvrđenja u (ii), odnosno (iii).

Pretpostavimo sada da je \overline{G} povezan. Jasno je da on ne može biti koktelski graf. Ako je \overline{G} regularan izuzetni graf, tada on ili pripada drugom sloju i stepena je 3 i reda 6 (što je nemoguće jer regularni izuzetni grafovi koji pripadaju drugom sloju imaju bar 9 čvorova), ili pripada trećem sloju i stepena je 2 i reda 4 (što je takođe nemoguće s obzirom da regularni izuzetni grafovi koji pripadaju trećem sloju imaju bar 8 čvorova). Dakle, \overline{G} ne može biti regularan izuzetni graf.

Jedina preostala mogućnost je: $G = \overline{L(H)}$, gde je H regularan ili semiregularan bipartitan graf. Ako je H regularan tada, na osnovu Leme 1.1, r mora biti prost broj i $8r$ mora biti deljivo sa $r + 1$. Drugim rečima, $r + 1$ deli 8, odnosno $k = 7$. Dakle, H je regularan graf stepena $r_H = \frac{r-1}{2} + 1 = 4$ sa $N = \frac{2n}{r_H} = 7$ čvorova. Postoje tačno dva takva grafa H , i važi $G = \overline{L(H)}$. Ovim smo završili dokaz u slučaju (iii).

Neka je sada H semiregularan bipartitan graf sa $n = 2r$ grana. Budući da je svaka grana grafa H incidentna sa $r - 1$ drugih grana, H je (r_1, r_2) -semiregularan bipartitan, i važi $r_1 + r_2 = r + 1$. Bez gubljenja na opštosti možemo pretpostaviti da je $r_1 \geq r_2$. Ako je broj r_2 jednak 1, onda je $H = 2K_{1,r}$, ali tada $L(H)$ nije povezan.

Ukoliko važi $r_1 \geq r_2 \geq 2$, tada, budući da je $r_1, r_2 < r$ i budući da i r_1 i r_2 dele $2r$, lako vidimo da važi $r_1 = \frac{2r}{3}$ i $r_2 = \frac{r}{3} + 1$, što dalje znači da je 18 deljivo sa $r + 3$. Dakle, $r = 6$, ili $r = 15$. Ako je $r = 15$ dobijamo semiregularan bipartitan graf sa parametrima $(5, 3, 6, 10)$, a to nije moguće ($5 > 3$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom $r_1 \geq r_2$). Ukoliko je $r = 6$ dobijamo graf $\overline{G} = L(K_{3,4})$, pa je $G = \overline{L(K_{3,4})}$, čime je završen dokaz i u slučaju (ii). ■

Nastavljamo sa još jednim opštim tvrđenjem.

Teorema 1.3 *Neka je G r -regularan graf ($r > 17$) reda $n > 2r$ koji zadovoljava $\lambda_2 \leq 1$. Tada važi $G = \overline{L(K_{2,r+1})}$.*

Dokaz. Ako važi $n > 2r$, tada je \overline{G} povezan. Jednostavno se proverava da ukoliko važe uslovi teoreme, \overline{G} ne može biti ni koktelski graf, niti regularan izuzetni graf.

Pretpostavimo da važi $\overline{G} = L(H)$, gde je H regularan graf stepena r_H , i sa N čvorova. Tada važi $N = \frac{2n}{r_H}$, i budući da je $n = 2r_H + r - 1$, sledi da je $N = 4 + \frac{2r-2}{r_H}$. Takođe je $r_H > \frac{r+1}{2}$ (jer je $n > 2r$), pa je $\frac{2r-2}{r_H} < 4 - \frac{8}{r+1} < 4$. Neposredno sledi da je $N \in \{5, 6, 7\}$ (što je nemoguće budući da je $r_H > \frac{r+1}{2} > 9$).

Neka je sada $\overline{G} = L(H)$, gde je H (r_1, r_2) -semiregularan bipartitan graf veličine n , i sa n_1 i n_2 čvorova u svojim klasama obojivosti. Očigledno i r_1 i r_2 moraju biti veći od 1. Važe i sledeće činjenice:

$$(i) \quad r_1 n_1 = r_2 n_2 = n;$$

$$(ii) \quad r_1 + r_2 = n - r + 1;$$

$$(iii) \quad r_1 r_2 \leq n.$$

Bez gubitka na opštosti možemo pretpostaviti da je $r_1 \geq r_2$. Tada je $2 \leq r_2 \leq r_1 \leq n - r - 1$, odakle sledi da je $2(n - r - 1) \leq r_1 r_2 \leq n$. Budući da je $n > 2r$, imamo da je $n = 2r + 1$ ili $n = 2r + 2$.

Pretpostavimo da važi $n = 2k + 1$. Tada su i r_1 i r_2 neparni (jer dele n), i r mora biti paran (jer važi $r_1 + r_2 = r + 2$). Odatle sledi da je $r_1 r_2 \geq 3(r - 1)$, pa ako je $r > 17$ sledi $r_1 r_2 > 2r + 1 = n$, što nije moguće.

Pretpostavimo sada da važi $n = 2k + 2$. Tada je $r_1 r_2 \geq 2(r + 1) = n$, i budući da je $r_1 r_2 \leq n$, važi $r_1 = 2$ i $r_2 = r + 1$. Dakle, $H = K_{2,r+1}$, odnosno $G = \overline{L(K_{2,r+1})}$. ■

Primetimo da je graf $L(K_{2,r+1})$ u stvari izomorfan sa (nepovezanim) grafom $(r + 1)K_2$. To znači da je $G = \overline{(r + 1)K_2}$, odnosno G je izomorfan sa kompletnim

bipartitnim grafom $K_{r+1,r+1}$ iz kojeg je uklonjeno jedno savršeno sparivanje. Lako se vidi da ukoliko je $r \geq 2$, G mora biti povezan, i da je u tom slučaju spektar grafa G $\{\pm r, \pm 1^r\}$. Napominjemo da ovde (i u nastavku disertacije) eksponent označava multiplicitet sopstvene vrednosti.

Iz prethodne teoreme neposredno sledi da ako je stepen r regularnog grafa veći od 17, i ako je njegov red veći od $2r + 2$, tada njegova druga sopstvena vrednost mora biti veća od 1. Ali, takođe, ukoliko važi $2 \leq r \leq 17$ i ako je $n > 2r$, pored $L(K_{2,r+1})$, \overline{G} može biti graf grana regularnog grafa H (ako je $r \leq 11$) ili može biti regularan izuzetni graf.

U prvom slučaju, lako vidimo da je $n \leq 2r + 3$, i da jednakost u ovoj nejednakosti važi samo ako je $r = 6$. Tada je $H = K_6$ i $G = \overline{L(K_6)}$.

U drugom slučaju, iz jednakosti (1.1) sledi da ako je r -regularan graf G reda n komplement regularnog izuzetnog grafa iz prvog (odnosno drugog, to jest trećeg) sloja, tada je $n = 2(r - 1)$ (odnosno $n = 3(r - 1)$, to jest $n = 4(r - 1)$).

Imajući na umu prethodne rezultate, i koristeći listu regularnih izuzetnih grafova, dolazimo do sledeće teoreme.

Teorema 1.4 *Neka je G r -regularan graf reda n koji zadovoljava $\lambda_2 \leq 1$. Tada:*

- (i) *ako je $r > 10$ ili $r = 2$, onda je $n \leq 2r + 2$, i ako je $n = 2r + 2$, onda je $G = \overline{L(K_{2,r+1})}$;*
- (ii) *ako je $r = 10$, onda je $n \leq 27$, i ukoliko je $n = 27$, onda je G komplement Šleflijeveog (*L. Schläfli*) grafa;*
- (iii) *ako je $r = 9$, onda je $n \leq 24$, i ukoliko je $n = 24$, onda je G komplement regularnog izuzetnog grafa reda 24 iz drugog sloja;*
- (iv) *ako je $r = 8$, onda je $n \leq 21$, i ukoliko je $n = 21$, onda je G komplement jednog od dva regularna izuzetna grafa reda 21 iz drugog sloja;*
- (v) *ako je $r = 7$, onda je $n \leq 18$, i ukoliko je $n = 18$, onda je G komplement jednog od četiri regularna izuzetna grafa reda 18 iz drugog sloja;*
- (vi) *ako je $r = 6$, onda je $n \leq 15$, i ukoliko je $n = 15$, onda je G ili komplement jednog od šest regularnih izuzetnih grafova reda 15 iz drugog sloja, ili je $G = \overline{L(K_6)}$;*
- (vii) *ako je $r = 5$, onda je $n \leq 16$, i ukoliko je $n = 16$, onda je G Klebšov (*A. Clebsch*) graf;*

(viii) ako je $r = 4$, onda je $n \leq 12$, i ukoliko je $n = 12$, onda je G komplement jednog od pet regularnih izuzetnih grafova reda 12 iz drugog sloja;

(ix) ako je $r = 3$, onda je $n \leq 10$, i ukoliko je $n = 10$, onda je G Petersenov (J. Petersen) graf.

Napomena 1.1 *Primetimo da komplement Klebšovog grafa, Šleflijev i Petersenov graf pripadaju, redom, trećem, drugom i prvom sloju izuzetnih grafova. Njihov opis, kao i njihovi spektri mogu se naći u [23].*

U Teoremi 1.4 određena je gornja granica za red n r -regularnog grafa G koji zadovoljava osobinu $\lambda_2 \leq 1$, a takođe su date i sve mogućnosti za G u slučajevima kada se dostiže ta gornja granica. Sada određujemo sve r -regularne grafove sa osobinom $\lambda_2 \leq 1$ za neke fiksirane vrednosti stepena. Već smo pomenuli da su određeni svi regularni grafovi koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq 1$ ukoliko njihov stepen nije veći od 4, tako da se naš sledeći korak prirodno nameće.

Teorema 1.5 *Neka je G 5-regularan graf reda n sa osobinom $\lambda_2(G) \leq 1$. Tada je G jedan od sledećih grafova: K_6 , $\overline{C_8}$, $\overline{C_3 \dot{\cup} C_5}$, $\overline{C_4 \dot{\cup} C_4}$, $\overline{2K_5}$, komplement jednog od pet regularnih izuzetnih grafova reda 12 iz drugog sloja, Klebšov graf, $\overline{L(CP(3))}$, ili $\overline{L(K_{2,6})}$.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.4 (vii) važi $n \leq 16$ i, ako je $n = 16$, onda je G Klebšov graf.

Neka je $n < 16$ i pretpostavimo na početku da važi $n \geq 11$. Tada je \overline{G} povezan, i budući da je stepen grafa G neparan, postoje dva slučaja koja ćemo razmatrati. Ako je \overline{G} izuzetni graf, onda on mora biti reda 12 ili 14, a njegov stepen mora biti $n - 6$. Jedine mogućnosti su pet izuzetnih grafova reda 12 iz drugog sloja. Očigledno \overline{G} ne može biti koktelski graf ($n - r_{\overline{G}} = 6 > 2$).

Ako je \overline{G} graf grana regularnog grafa H , tada je (na osnovu Leme 1.1) $4n$ deljivo sa $n - 4$, što je nemoguće ako važi $n = 14$. Ukoliko je $n = 12$, onda je stepen grafa H , $r_H = \frac{12-6}{2} + 1 = 4$, a broj njegovih čvorova je $N = \frac{2n}{r_H} = 6$, pa je $H = CP(3)$, $\overline{G} = L(CP(3))$ i, konačno, $G = \overline{L(CP(3))}$.

Ako je \overline{G} graf grana semiregularnog bipartitnog grafa, budući da važi $n > 2r_G$, dobijamo (na sličan način kao i u Teoremi 1.3) da n mora biti jednako 12, i tada je $G = \overline{L(K_{2,6})}$.

Pretpostavimo sada da je $n < 11$. Ako je $n = 10$ tada, na osnovu Teoreme 1.2, mora biti $G = 2K_5$. Ukoliko je $n = 8$, tada je $r_{\overline{G}} = 2$, odakle sledi da je \overline{G} ili kontura

ili nepovezan graf čije su sve komponente povezanosti konture. Takođe važi da ako je $\overline{G} = C_{k_1} \dot{\cup} C_{k_2} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} C_{k_l}$, tada je $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$. Dakle, u ovom slučaju mora važiti $G = \overline{C_8}$, ili $G = \overline{C_3 \dot{\cup} C_5}$, ili $G = \overline{C_4 \dot{\cup} C_4}$. Konačno, ako je $n = 6$, onda je $G = K_6$.

Sumirajući dobijene rezultate, dolazimo do tvrđenja teoreme. ■

Teorema 1.6 *Neka je G 6-regularan graf reda n koji zadovoljava $\lambda_2(G) \leq 1$. Tada je G jedan od sledećih grafova: K_7 , $CP(4)$, $\overline{C_9}$, $\overline{C_3 \dot{\cup} C_6}$, $\overline{C_4 \dot{\cup} C_5}$, $\overline{C_3 \dot{\cup} C_3 \dot{\cup} C_3}$, $\overline{L(K_4) \dot{\cup} L(K_{2,3})}$, komplement jednog od pet regularnih izuzetnih grafova reda 10 iz prvog sloja, $\overline{CP(3) \dot{\cup} K_5}$, $\overline{L(K_{3,4})}$, $\overline{L(2K_{1,6})}$, komplement jednog od šest regularnih izuzetnih grafova reda 15 iz drugog sloja, $\overline{L(K_6)}$ ili $\overline{L(K_{2,7})}$.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.4 (vi), važi $n \leq 15$, i ako je $n = 15$, onda je G komplement jednog od šest regularnih izuzetnih grafova reda 18 iz drugog sloja ili je $G = \overline{L(K_6)}$.

Neka je $n < 15$ i pretpostavimo na početku našeg razmatranja da važi $n \geq 13$. Tada je \overline{G} povezan i imamo dva slučaja: $n = 13$ ili $n = 14$. Ako je \overline{G} izuzetni graf, onda je njegov stepen $r_{\overline{G}} = 6$ ukoliko je $n = 13$, ili $r_{\overline{G}} = 7$ ako je $n = 14$; međutim, ne postoje takvi regularni izuzetni grafovi. Jasno je da \overline{G} ne može biti koktelski graf budući da je $n - r_{\overline{G}} = 7 > 2$. Za $n \in \{13, 14\}$, $4n$ nije deljivo sa $n - 4$, pa prema Lemi 1.1 \overline{G} ne može biti graf grana regularnog grafa. Ako je \overline{G} graf grana semiregularnog bipartitnog grafa, budući da je $n > 2r_G$, n mora biti 14, i $G = \overline{L(K_{2,7})}$ (videti i dokaz Teoreme 1.3).

Sada pretpostavimo da je $n < 13$. Ako je $n = 12$, na osnovu Teoreme 1.2 je $G = 2K_6$ ili $G = \overline{L(K_{3,4})}$.

Ako je $n = 11$, tada je $r_{\overline{G}} = 4$. Ukoliko je komponenta grafa \overline{G} izuzetni graf, tada je broj njegovih čvorova veći ili jednak 8 (zbog $r_{\overline{G}} = 4$). Prema tome, \overline{G} bi morao biti povezan graf, ali ne postoji regularan izuzetni graf stepena 4 i reda 11.

Ukoliko je komponenta grafa \overline{G} graf grana regularnog grafa H , tada H ima $m \leq 11$ grana, a njegov stepen je $r_H = \frac{r_{\overline{G}}}{2} + 1 = 3$. Ukoliko je N broj čvorova grafa H , tada važi $3N = 2m$, pa 3 deli $2m$. Mogućnosti do kojih dolazimo su: $m = 9$ (ali bi tada ostale komponente grafa \overline{G} imale ukupno 2 ili manje čvorova), $m = 6$ (tada je $H = K_4$, pa je $L(H) = CP(3)$ i ostale komponente grafa \overline{G} imaju ukupno 5 čvorova, odakle sledi da je $G = \overline{CP(3) \dot{\cup} K_5}$), ili $m = 3$ (ali ovo nije moguće jer bi tada važilo $N = 2$ i $r_H = 3$).

Ako je komponenta grafa \overline{G} graf grana (r_1, r_2) -semiregularnog bipartitnog grafa, tada je zbir $r_1 + r_2$ jednak $r_{\overline{G}} + 2 = 6$. Ispitujući sve mogućnosti, dolazimo do

zaključka da je $K_{1,5}$ jedino rešenje. Tada druga komponenta grafa \overline{G} ima 6 čvorova, i budući da je $r_{\overline{G}} = 4$, jasno je da ta druga komponenta mora biti $CP(3)$. Ovo rešenje je isto ono koje smo dobili i u prethodnom slučaju, a isto to rešenje ćemo dobiti i ako pretpostavimo da je jedna komponenta grafa \overline{G} koktelski graf.

Ako je $n = 10$, tada je $r_{\overline{G}} = 3$. Ukoliko je komponenta grafa \overline{G} regularan izuzetni graf, tada zato što je $r_{\overline{G}} = 3$ broj čvorova u toj komponenti mora biti 10, pa je \overline{G} povezan, i mora biti jedan od pet 3-regularnih izuzetnih grafova reda 10 koji pripadaju prvom sloju.

Koktelski graf ne može biti komponenta grafa \overline{G} jer je njegov stepen neparan. Na isti način dolazimo do zaključka da \overline{G} ne može biti graf grana regularnog grafa H budući da za stepen grafa H važi $r_H = \frac{r_{\overline{G}}}{2} + 1$.

Dakle, ako je \overline{G} nepovezan, tada sve njegove komponente moraju biti grafovi grana semiregularnih bipartitnih grafova i, ako je komponenta grafa \overline{G} graf grana (r_1, r_2) -semiregularnog bipartitnog grafa, onda je zbir $r_1 + r_2$ jednak $r_{\overline{G}} + 2 = 5$. Jedino rešenje koje dobijamo ima dve komponente: jedna komponenta sa 4 čvora $(r_1 = 1, r_2 = 4)$, i druga sa 6 čvorova $(r_1 = 2, r_2 = 3)$, to jest $\overline{G} = L(K_{1,4}) \dot{\cup} L(K_{2,3})$, odnosno $G = \overline{L(K_4) \dot{\cup} L(K_{2,3})}$.

Ukoliko bi \overline{G} bio povezan graf grana (r_1, r_2) -semiregularnog bipartitnog grafa, tada bi važio $r_1 + r_2 = 5$, i oba broja r_1 i r_2 bi morala da dele 10, što nije moguće.

Ako je $n = 9$, slično kao i u dokazu prethodne teoreme vidimo da \overline{G} mora biti kontura, ili nepovezan graf čije su sve komponente konture, pa G mora biti $\overline{C_9}$, ili $\overline{C_3 \dot{\cup} C_6}$, ili $\overline{C_4 \dot{\cup} C_5}$, ili $\overline{C_3 \dot{\cup} C_3 \dot{\cup} C_3}$.

Na kraju, ukoliko je $n = 8$, tada je $G = CP(4)$, a ako je $n = 7$, onda je $G = K_7$. Sumiranjem navedenih rezultata, dolazimo do tvrđenja teoreme. ■

Dokazi naredne dve teoreme veoma su slični dokazima Teoreme 1.5 i Teoreme 1.6, i stoga će biti izostavljeni.

Teorema 1.7 *Neka je G 7-regularan graf reda n koji zadovoljava $\lambda_2(G) \leq 1$. Tada je G jedan od sledećih grafova: K_8 , $\overline{C_{10}}$, $\overline{C_3 \dot{\cup} C_7}$, $\overline{C_4 \dot{\cup} C_6}$, $\overline{C_5 \dot{\cup} C_5}$, $\overline{C_3 \dot{\cup} C_3 \dot{\cup} C_4}$, komplement jednog od osam regularnih izuzetnih grafova reda 12 iz prvog sloja, $\overline{2CP(3)}$, $\overline{L(H_i)}$ (gde su H_i , $1 \leq i \leq 5$, 3-regularni grafovi reda 8), $\overline{L(B_1)}$ (gde je B_1 semiregularan bipartitni graf sa parametrima $(3, 6, 4, 2)$), $\overline{L(B_2)}$ (gde je B_2 semiregularan bipartitni graf sa parametrima $(4, 4, 3, 3)$), $G = \overline{2K_7}$, $G = \overline{L(H)}$ (gde je H jedan od dva 4-regularna grafa reda 7), komplement jednog od 38 regularnih izuzetnih grafova reda 18 iz drugog sloja, ili $\overline{L(K_{2,8})}$.*

Teorema 1.8 *Neka je G 8-regularan graf reda n koji zadovoljava $\lambda_2(G) \leq 1$. Tada je G jedan od sledećih grafova: K_9 , $CP(5)$, $\overline{C_{11}}$, $\overline{C_3 \dot{\cup} C_8}$, $\overline{C_4 \dot{\cup} C_7}$, $\overline{C_5 \dot{\cup} C_6}$, $\overline{C_3 \dot{\cup} C_3 \dot{\cup} C_5}$,*

$\overline{C_3 \dot{\cup} C_4 \dot{\cup} C_4}$, $\overline{3K_4}$, $\overline{L(2K_{2,3})}$, $\overline{H \dot{\cup} K_5}$ (gde je H regularan izuzetni graf reda 8 iz trećeg sloja), $\overline{L(K_{2,4}) \dot{\cup} K_5}$, komplement jednog od 21 regularnog izuzetnog grafa reda 14 iz prvog sloja, $\overline{CP(4) \dot{\cup} K_7}$, $\overline{L(K_{3,5})}$, $\overline{2K_8}$, komplement jednog od dva regularna izuzetna grafa reda 21 iz drugog sloja, ili $\overline{L(K_{2,9})}$.

1.3 Neke spektralne nejednakosti za regularne ne bipartitne grafove bez trouglova

U ovom poglavlju razmatramo regularne ne bipartitne grafove čiji je struk veći od 3. Predstavljamo spektralne nejednakosti koje se odnose na dijametar (Teorema 1.10), stepen (Teorema 1.11) i red (Teorema 1.12) regularnih ne bipartitnih grafova koji zadovoljavaju $\text{gr}(G) > 3$, kao i jednu takvu nejednakost koja se odnosi na stepen regularnih ne bipartitnih grafova koji zadovoljavaju $\text{gr}(G) > 4$ (Teorema 1.14). Kako dobijene nejednakosti mogu biti iskorišćene u praksi ilustrujemo u sledećem poglavlju, gde ih primenjujemo prilikom određivanja svih regularnih ne bipartitnih grafova čiji je struk veći od 3 i čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo sa $\sqrt{2}$, svih 3-regularnih ne bipartitnih refleksivnih grafova, kao i svih regularnih ne bipartitnih grafova čiji je struk veći od 4 i čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo sa $\sqrt{3}$.

Na početku dokazujemo jednostavnu, ali vrlo korisnu činjenicu. Za taj dokaz potrebno nam je jedno dodatno tvrđenje u kom je data Hajlbronerova (*E. Heilbroner*) formula (videti [20], str. 59):

Teorema 1.9 *Neka je G graf dobijen tako što je čvor v_1 grafa G_1 spojen granom sa čvorom v_2 grafa G_2 . Neka je G'_1 (G'_2) indukovan podgraf grafa G_1 (G_2) dobijen izbacivanjem čvora v_1 (v_2) iz grafa G_1 (G_2). Tada važi:*

$$P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda)P_{G_2}(\lambda) - P_{G'_1}(\lambda)P_{G'_2}(\lambda).$$

Teorema 1.10 *Neka je G povezan r -regularan graf čiji je struk veći od 3 i koji zadovoljava $\lambda_2 \leq \sqrt{r}$. Tada je $\text{diam}(G) \leq 4$, i jednakost u ovoj nejednakosti važi samo u slučaju da je $\lambda_2 = \sqrt{r}$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da važi $\text{diam}(G) = k \geq 5$, i neka je v_1, \dots, v_{k+1} put dužine k u grafu G . Uočimo podgraf H grafa G indukovan čvorovima $v_1, N(v_1), v_3, v_{k+1}, N(v_{k+1}), v_{k-1}$. Graf H je nepovezan. Sastoji se od dve (izomorfne) komponente

i obe su pravi nadgrafovi grafa $K_{1,r}$, pa je indeks svake od njih veći od \sqrt{r} . Sada na osnovu Teoreme 0.2 važi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(H) > \sqrt{r}$.

Ako važi $\lambda_2(G) < \sqrt{r}$, tada je dijаметar grafa G manji od 4 (inače G sadrži $2K_{1,r}$ kao indukovan podgraf što povlači $\lambda_2(G) \geq \sqrt{r}$). Sada pretpostavimo da važi $\lambda_2(G) \leq \sqrt{r}$ i $\text{diam}(G) = 5$. Neka je v_1, \dots, v_6 put dužine 5 u grafu G , $G_1 = G[v_1, N(v_1), v_3]$ i $G_2 = G[v_4, N(v_4), v_6]$. I G_1 i G_2 su pravi nadgrafovi grafa $K_{1,r}$, pa važi $P_{G_i}(\sqrt{r}) > 0$, za $i = 1, 2$. Neka je sada H podgraf grafa G određen čvorovima $v_1, N(v_1), v_3, v_4, N(v_4), v_6$. Vrednost karakterističnog polinoma grafa H u tački \sqrt{r} može se lako izračunati korišćenjem prethodne teoreme:

$$\begin{aligned} P_H(\sqrt{r}) &= P_{G_1}(\sqrt{r})P_{G_2}(\sqrt{r}) - P_{G_1 \setminus v_3}(\sqrt{r})P_{G_2 \setminus v_4}(\sqrt{r}) = \\ &= P_{G_1}(\sqrt{r})P_{G_2}(\sqrt{r}) - 0 > 0, \end{aligned}$$

odakle sledi da je $\lambda_2(H) > \sqrt{r}$, pa na osnovu Teoreme 0.2 važi $\lambda_2(G) > \sqrt{r}$. Dakle, $\text{diam}(G) \leq 4$, i dokaz je završen. ■

Primeri grafova za koje se granica data u prethodnoj teoremi dostiže (r -regularni grafovi bez trouglova, dijametra 4, čija je druga sopstvena vrednost jednaka \sqrt{r}) jesu: C_8 , Mebijus–Kantorov (*A.S. Möbius* i *S. Kantor*) graf, Papusov (nazvan po grčkom matematičaru *Papusu iz Aleksandrije*) graf i Adamarovi (*J.S. Hadamard*) grafovi (za opis Adamarovih grafova i njihovih spektara videti [46]).

U teoremi koja sledi predstavljamo gornju granicu za stepen r -regularnog nebi-partitnog grafa čiji je struk veći od tri i čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo sa \sqrt{r} , ali pre toga sledi pomoćna lema i njen dokaz. U oba dokaza koristimo graf F_k dobijen dodavanjem k visećih grana na čvorove stepena 1 grafa P_2 . Jednostavno je (koristeći Teoremu 1.9) videti da važi $\lambda_2(F_k) = \frac{-1 + \sqrt{1+4k}}{2}$.

Lema 1.2 *Neka je G povezan r -regularan nebi-partitan graf čiji je struk veći od 3 koji zadovoljava $\lambda_2(G) \leq c$. Ako je $r > 2c^2 + c + 1$, tada G sadrži C_5 kao indukovan podgraf.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno (da C_5 nije indukovan podgraf grafa G). Na osnovu Teoreme 1.10 važi $\text{diam}(G) \leq 3$. Budući da G nije bipartitan, C_7 mora biti njegov indukovan podgraf. Neka su v_1, \dots, v_7 čvorovi jednog takvog indukovanog podgraфа grafa G . Oba čvora v_4 i v_5 mogu imati najviše $\lfloor c^2 \rfloor$ suseda na rastojanju 3 od v_1 (u suprotnom, G sadrži $2K_{1, \lfloor c^2 \rfloor + 1}$ kao indukovan podgraf), pa oba ta čvora imaju najmanje $\lfloor c^2 + c \rfloor + 1$ suseda na rastojanju 2 od v_1 . Među susedima čvorova v_4 i v_5 moraju postojati dva susedna čvora (oba na rastojanju 2 od v_1), u suprotnom G sadrži $F_{\lfloor c^2 + c \rfloor + 1}$ kao indukovan podgraf, odakle sledi $\lambda_2(G) > c$. Ta dva susedna

čvora, njihovi zajednički susedi sa čvorom v_1 i čvor v_1 obrazuju konturu C_5 u G , što je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. ■

Teorema 1.11 *Neka je G povezan r -regularan nebipartitan graf čiji je struk veći od 3 koji zadovoljava $\lambda_2(G) \leq c$, $c > 0$. Tada važi $r \leq c^4 + 2c^3 + 4c^2 + 2c + 3$.*

Dokaz. Neka je $r > c^4 + 2c^3 + 4c^2 + 2c + 3$. Pretpostavimo da postoje dva čvora u i v grafa G na rastojanju 2 koji imaju najviše $\lfloor c^2 + c \rfloor$ zajedničkih suseda. Tada postoji barem $\lceil c^4 + 2c^3 + 3c^2 + c + 3 \rceil$ čvorova u skupu $N(u) \setminus N(v)$. Ako skup $N(u) \setminus N(v)$ podelimo na podskupove sa $\lceil c^2 \rceil$ elemenata, tada takvih podskupova ima više od $\lfloor c^2 + c \rfloor + 1$. Uočimo jedan takav podskup. Čvorovi koji mu pripadaju susedni su sa više od $\lceil c^4 + 2c^3 + 2c^2 + c + 1 \rceil$ čvorova iz $N(v)$ (u suprotnom, G sadrži kao indukovani podgraf graf koji se dobija kada se jednom čvoru stepena 1 grafa P_3 doda $\lceil c^2 \rceil$ visećih grana, i $\lceil c^2 \rceil + 1$ drugom, što povlači $\lambda_2(G) > c$).

Dakle, u svakom opisanom podskupu postoji najmanje jedan čvor koji ima barem $\lfloor c^2 + c \rfloor + 1$ suseda u $N(v)$. Uočimo tačno $\lfloor c^2 + c \rfloor + 1$ takvih čvorova, i neka je w jedan čvor iz skupa $(N(u) \cap N(v))$. Svaki od uočenih $\lfloor c^2 + c \rfloor + 1$ čvorova ima najviše $\lfloor c^2 + c \rfloor$ zajedničkih suseda sa w (u suprotnom, G sadrži graf $F_{\lfloor c^2 + c \rfloor + 1}$ kao indukovani podgraf), ali to znači da postoji više od $\lfloor c^2 + c \rfloor + 1$ čvorova u $N(w)$ koji nisu susedni nijednom od $\lfloor c^2 + c \rfloor + 1$ uočenih čvorova. Dakle, G sadrži graf $F_{\lfloor c^2 + c \rfloor + 1}$ kao indukovani podgraf. To znači da, ako važi $r > c^4 + 2c^3 + 4c^2 + 2c + 3$, svaka dva čvora na rastojanju 2 (u G) moraju imati barem $\lfloor c^2 + c \rfloor + 1$ zajedničkih suseda. Na osnovu Leme 1.2, G sadrži C_5 kao indukovani podgraf. Lako je uočiti (posmatranjem dva susedna čvora konture C_5 indukovane u G i njihovih suseda) da G mora sadržati $F_{\lfloor c^2 + c \rfloor + 1}$ kao indukovani podgraf, odakle sledi $\lambda_2(G) > c$, čime je dokaz završen. ■

Izgleda da ne postoji graf koji dostiže granicu datu u prethodnoj teoremi. Međutim, za male vrednosti λ_2 , ona daje dobru procenu maksimalne vrednosti stepena, a njen teorijski značaj ogleda se u tome što nam omogućava da dokažemo da postoji konačno mnogo povezanih r -regularnih nebipartitnih grafova bez trouglova koji zadovoljavaju $\lambda_2 < r$ (videti Teoremu 1.13).

Sada možemo formulisati dve jednostavne posledice Teoreme 1.11 i Leme 1.2, koje obezbeđuju dovoljan spektralni uslov za bipartitnost u klasi regularnih grafova bez trouglova (kao i bez trouglova i petouglova). U oba slučaja druga sopstvena vrednost je pokazatelj da li je dati regularan graf bez trouglova (bez trouglova i petouglova) bipartitan.

Posledica 1.1 *Neka je G povezan r -regularan graf bez trouglova i petouglova koji zadovoljava $r > 2\lambda_2^2 + \lambda_2 + 1$. Tada je G bipartitan.*

Posledica 1.2 *Neka je G povezan r -regularan graf bez trouglova koji zadovoljava $r > \lambda_2^4 + 2\lambda_2^3 + 4\lambda_2^2 + 2\lambda_2 + 3$. Tada je G bipartitan.*

U sledećoj teoremi dajemo gornju granicu za broj čvorova regularnog grafa čiji je struk veći od 3.

Teorema 1.12 *Neka je G r -regularan graf reda n čiji je struk veći od 3. Tada važi:*

$$n \leq \frac{r^2(\lambda_2 + 2) - r\lambda_2(\lambda_2 + 1) - \lambda_2^2}{r - \lambda_2^2}, \quad (1.2)$$

kad god je desna strana nejednakosti pozitivna.

Dokaz. Uočimo sledeću podelu skupa X_G čvorova grafa G : (i) proizvoljan čvor v , (ii) $N(v)$ i (iii) $X_G \setminus (v \cup N(v))$, pa posmatrajmo odgovarajuću podelu na blokove $A = (A_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 3$ njegove matrice susedstva. Ako je d srednja vrednost stepena čvorova u podgrafu indukovanom čvorovima koji nisu susedni čvoru v , tada je matrica čiji su elementi srednje vrednosti suma u vrstama blokova A_{ij} :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ 1 & 0 & r - 1 \\ 0 & r - d & d \end{pmatrix},$$

gde su vrednosti B_{22} i B_{23} izračunate imajući u vidu da G ne sadrži trouglove, što znači da je $G[N(v)]$ totalno nepovezan graf. Na osnovu Teoreme 0.3 sopstvene vrednosti matrice B prepliću sopstvene vrednosti matrice A . Karakteristični polinom matrice B je $(x - r)(x^2 - (d - r)x - d)$, pa zato izraz $x^2 - (d - r)x - d$ ne može biti pozitivan za $x = \lambda_2$, odnosno važi

$$\lambda_2^2 - (d - r)\lambda_2 - d \geq 0.$$

Ili, ekvivalentno prethodnoj nejednakosti,

$$d \leq \frac{\lambda_2(\lambda_2 + r)}{\lambda_2 + 1}.$$

Budući da postoji tačno r^2 grana između skupova $N(v)$ i $X_G \setminus (v \cup N(v))$, sledi

$$d = \frac{r(n - 2r)}{n - r - 1}.$$

Graf G ne sadrži trouglove, te važi $n - 2r \geq 0$. Zamenjujući navedenu jednakost u prethodnu nejednakost dolazimo do

$$r(n - 2r)(\lambda_2 + 1) \leq (n - r - 1)\lambda_2(\lambda_2 + r). \quad (1.3)$$

Rezultat sledi nakon uprošćavanja dobijene nejednakosti. ■

Jednakost u nejednakosti iz prethodne teoreme dostižu, na primer, Petersenov i Klebšov graf.

Napomena 1.2 *Nejednakost (1.3) važi za bilo koji graf koji zadovoljava uslove Teoreme 1.12, ali postoji mogućnost da je desna strana nejednakosti (1.2) negativna – najmanji (u smislu reda grafa) primer je 3-regularan graf reda 10 čija je druga sopstvena vrednost jednaka 2 (opis ovog grafa može se naći u radu [15]).*

Formulisaćemo direktnu posledicu prethodne dve teoreme.

Teorema 1.13 *Skup svih povezanih regularnih nebipartitnih grafova bez trouglova koji zadovoljavaju $\lambda_2 < \sqrt{r}$ jeste konačan.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.11, stepen r je ograničen. Zatim, na osnovu Teoreme 1.12, i red n je ograničen, odakle sledi tvrđenje. ■

U sledećoj teoremi navodimo i gornju granicu za stepen regularnog nebipartitnog grafa čiji je struk veći od 4.

Teorema 1.14 *Neka je G povezan r -regularan nebipartitan graf za koji važi $gr(G) \geq 5$. Tada je $r \leq \lambda_2^2 + \lambda_2 + 1$.*

Dokaz. Uočimo dva susedna čvora, u i v , grafa G . Graf G ne sadrži trouglove, pa je njegov podgraf $G[N(u)]$ ($G[N(v)]$) totalno nepovezan graf. Takođe, G ne sadrži ni četvorouglove, pa ne postoji nijedna grana između skupova $N(u) \setminus \{v\}$ i $N(v) \setminus \{u\}$. Indukovani podgraf $G[u \cup N(u) \cup v \cup N(v)]$ grafa G u stvari je graf F_{r-1} opisan na početku ovog poglavlja, i kao što je već rečeno, njegova druga sopstvena vrednost je $\frac{-1+\sqrt{4r-3}}{2}$. Na osnovu Teoreme 0.2 važi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(G[u \cup N(u) \cup v \cup N(v)]) = \frac{-1+\sqrt{4r-3}}{2}$. Rezultat sledi nakon sređivanja izraza. ■

Primeri grafova koji dostižu gornju granicu stepena datu u prethodnoj teoremi jesu takozvani jako regularni grafovi čiji je struk 5, to jest C_5 , Petersenov graf i Hofman–Singletonov (*A.J. Hoffman* i *R.R. Singleton*) graf.

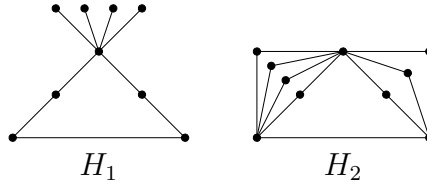
1.4 Regularni nebipartitni grafovi bez trouglova čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo zadatom konstantom

Kao što smo napomenuli u prethodnom poglavlju, ovde ćemo se posvetiti određivanju regularnih nebipartitnih grafova bez trouglova kod kojih je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo nekom datom konstantom. Naime, određujemo sve regularne nebipartitne grafove čiji je struk veći od 3 i čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo sa $\sqrt{2}$ (Teorema 1.15), sve 3-regularne nebipartitne refleksivne grafove čiji je struk veći od 4 (Teorema 1.17), kao i sve regularne nebipartitne grafove čiji je struk veći od 4 i čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo sa $\sqrt{3}$ (Teorema 1.19). Podaci o dobijenim grafovima predstavljeni su u poslednjem potpoglavlju. Da bismo predstavili grafove određene u Potpoglavlju 1.4.2 i Potpoglavlju 1.4.3 koristimo *heksadecimalnu reprezentaciju* (matrice susedstva) grafa do koje se dolazi na sledeći način: (binarni) broj dobijen nadovezivanjem vrsta gornjeg trougla matrice susedstva predstavljen je kao heksadecimalni broj.

1.4.1 Regularni nebipartitni grafovi čiji je struk veći od 3 koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$

Neka je G r -regularan nebipartitan graf čiji je struk veći od 3 koji zadovoljava $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$. Tada, očigledno, G mora biti povezan, i važi $r \geq 2$. Budući da postoje tačno dva 2-regularna grafa koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$ (C_5 i C_7), nadalje možemo pretpostaviti da važi $r \geq 3$. Sada na osnovu Teoreme 1.10 sledi da je dijametar grafa G najviše 3.

Da bismo uspostavili gornju granicu za stepen grafa G , uočimo grafove H_1 i H_2 prikazane na Slici 1. Graf H_1 je zabranjen podgraf za svojstvo $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$ u familiji regularnih grafova zato što je najmanja sopstvena vrednost njegovog komplementa $\overline{H_1}$ manja od $-1 - \sqrt{2}$. Takođe važi $\lambda_2(H_2) > \sqrt{2}$, pa je H_2 zabranjen podgraf za isto svojstvo.



Slika 1: Dva zabranjena podgrafa za regularne grafove koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$

Lema 1.3 *Neka je G r -regularan ne bipartitan graf čiji je struk veći od 3 koji zadovoljava $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$. Tada važi $r \leq 5$. Ukoliko je $r = 5$, tada je G Klebšov graf.*

Dokaz. Uočimo da G ne sadrži C_k , $k \geq 9$ kao indukovani podgraf ($\lambda_2(C_k) > \sqrt{2}$). Štaviše, ako je $r \geq 6$, tada G ne sadrži C_7 kao indukovani podgraf (u suprotnom G sadrži $K_{1,6} \dot{\cup} K_2$ kao indukovani podgraf, ali je najmanja sopstvena vrednost grafa $\overline{K_{1,6} \dot{\cup} K_2}$ manja od $-1 - \sqrt{2}$, što povlači $\lambda_2(G) > \sqrt{2}$). Budući da G nije bipartitan, on mora sadržati C_5 kao indukovani podgraf.

Jednostavno se može proveriti da je bar jedan od grafova H_i ($i = 1, 2$) indukovani podgraf grafa G ako je $r \geq 10$. Neka je zato $5 \leq r \leq 9$ i neka je v proizvoljan čvor grafa G . Označimo sa U skup čvorova grafa G koji su na rastojanju 2 od v (skup U očigledno nije prazan), i za $u \in U$ definišimo broj $d^*(u)$ kao broj zajedničkih suseda čvorova u i v (važi $d^*(u) \geq 1$). Razmotrićemo pet slučajeva.

Slučaj 1: $r = 9$. Pretpostavimo da skup U sadrži čvor u za koji važi $d^*(u) = 3$. Tada podgraf $G[N(u) \Delta N(v)]$ (gde je $N(u) \Delta N(v) = (N(u) \setminus N(v)) \cup (N(v) \setminus N(u))$) mora biti 3-regularan bipartitan (u suprotnom G sadrži ili H_1 ili H_2 kao indukovani podgraf). Postoji pet takvih povezanih grafova, i jedan nepovezan (to je graf $2K_{3,3}$). Lako se možemo uveriti da za svaki od njih važi $\lambda_2 > \sqrt{2}$.

Slično, ako U sadrži čvor u sa osobinom $d^*(u) = 4$, tada $G[N(u) \Delta N(v)]$ mora biti 2-regularan bipartitan. Jasno je da za takav graf važi ili $\lambda_2 = 2$ (ako je nepovezan), ili $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \sqrt{2}$ (ako je povezan).

Dakle, dva čvora na rastojanju 2 u G ili imaju manje od tri, ili više od četiri zajednička suseda. Pretpostavimo da postoji čvor $u \in U$, za koji važi $1 \leq d^*(u) \leq 2$, i neka je $w \in N(u) \cap N(v)$. Tada svaki sused čvora u (koji nije susedan čvoru v) ima barem pet suseda među susedima čvora v (koji nisu susedni čvoru u), i obrnuto (u suprotnom G sadrži H_1 kao indukovani podgraf). Budući da G ne sadrži H_2 kao indukovani podgraf, svaki čvor koji pripada skupu $N(u) \setminus N(v)$, kao i svaki čvor koji pripada skupu $N(v) \setminus N(u)$ može biti susedan najviše jednom čvoru skupa $N(w) \setminus \{u, v\}$, ali tada G sadrži H_1 kao indukovani podgraf. Dakle, svaka dva čvora

na rastojanju 2 u G imaju više od četiri zajednička suseda, ali tada C_5 ne može biti indukovani podgraf grafa G , što je kontradikcija.

Slučaj 2: $r = 8$. Pretpostavimo da skup U sadrži čvor u za koji važi $d^*(u) = 3$, i neka je $N(u) \setminus N(v) = \{w_1, \dots, w_5\}$. Za svaki čvor $w_i \in N(u) \setminus N(v)$ važi $2 \leq d^*(w_i) \leq 3$ (u suprotnom G sadrži ili H_1 ili H_2 kao indukovani podgraf). U skupu $N(u) \setminus N(v)$ nalazi se pet čvorova, pa među njima postoje dva koji zadovoljavaju $d^*(w_i) = 2$ i imaju barem jednog zajedničkog suseda u skupu $N(v) \setminus N(u)$, ili među njima postoje dva koji zadovoljavaju $d^*(w_i) = 3$ i imaju barem dva zajednička suseda u skupu $N(v) \setminus N(u)$. Tada se direktno može proveriti da svaki od četiri moguća podgrafa grafa G , indukovana čvorovima $u, v, N(v)$, i sa opisanim čvorovima iz skupa $N(u) \setminus N(v)$, ima drugu sopstvenu vrednost veću od $\sqrt{2}$.

S druge strane, ako U sadrži čvor u za koji važi $1 \leq d^*(u) \leq 2$, uočimo čvor $w \in N(u) \cap N(v)$, i tada je ostatak dokaza isti kao i odgovarajući deo u prethodnom slučaju.

Slučaj 3: $r = 7$. Uz pomoć računara možemo generisati sve povezane 7-regularne grafove bez trouglova reda $n \leq 20$. Postoji 751 takav graf, i nijedan od njih ne zadovoljava uslov $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$.

Ukoliko je $n \geq 28$, tada, na osnovu Teoreme 0.4, G ne sadrži $K_{2,3}$ kao indukovani podgraf, pa za svaki čvor $u \in U$ važi $d^*(u) \leq 2$. Neka je $u \in U$ čvor za koji važi $d^*(u) = 2$ (takav čvor mora postojati, inače G sadrži graf F_6 opisan u Poglavlju 1.3, a za njega važi $\lambda_2 > \sqrt{2}$). Sada vidimo da podgraf $G[N(u) \Delta N(v)]$ mora biti 2-regularan bipartitan (u suprotnom G sadrži ili H_1 ili $K_{2,3}$ kao indukovani podgraf), a druga sopstvena vrednost takvog grafa veća je od $\sqrt{2}$.

Ako je $24 \leq n \leq 26$, tada na osnovu Teoreme 0.4, G ne sadrži ni $K_{2,4}$, niti $K_{3,3}$ kao indukovani podgraf, pa postoji čvor $u \in U$ za koji važi $d^*(u) = 3$. Naravno, tri čvora u skupu $N(u) \cap N(v)$ moraju imati sve svoje susede (različite od u i v) u skupu $X \setminus (N(u) \cup N(v))$. Takođe, nijedan čvor grafa G nije susedan sa sva tri zajednička suseda čvorova u i v , pa jednostavno prebrojavanje grana (između skupova $N(u) \cap N(v)$ i $X \setminus (N(u) \cup N(v))$) implicira da, ako je $n = 26$, postoje barem dva čvora koji su susedni sa dva zajednička suseda čvorova u i v . Uočimo sledeću podelu skupa X (čvorova grafa G): $A = N(u) \cap N(v)$, B je skup koji sadrži dva opisana čvora (koji su susedni čvorovima u skupu A), $C = \{u, v\}$ i

$D = X \setminus (A \cup B \cup C)$. Ova podela indukuje količničku matricu

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ \frac{8}{19} & \frac{11}{19} & \frac{10}{19} & \frac{104}{19} \end{pmatrix}.$$

Na osnovu Teoreme 0.3, važi $\lambda_2(G) > \lambda_2(M_1) > \sqrt{2}$. Ako je $n = 24$, postoje barem četiri čvora koji ne pripadaju skupu $u \cup N(u) \cup v \cup N(v)$, i susedni su sa dva zajednička suseda čvorova u i v . Tada G sadrži graf $K_{2,4}$ kao indukovani podgraf, što je kontradikcija.

Konačno, ako je $n = 22$, tada G ne sadrži ni $K_{2,5}$, niti $K_{3,3}$ kao indukovani podgraf (na osnovu Teoreme 0.4), pa važi $d^*(u) = 3$ za svaki čvor $u \in U$, ili postoji čvor $u \in U$ koji zadovoljava $d^*(u) = 4$. U prvom slučaju jednostavno se proverava da važi $\text{diam}(G) = 2$, pa G mora biti jako regularan graf sa parametrima $(22, 7, 0, 3)$, ali takav graf ne postoji (videti Teoremu 7.3 u monografiji [20]). U drugom slučaju jednostavno se može proveriti da (pod pretpostavkom da G ne sadrži ni $K_{3,3}$, niti H_2 kao indukovani podgraf) mora postojati čvor $w \in X \setminus (N(u) \cup N(v) \cup u \cup v)$ koji je susedan sa tačno pet čvorova skupa $N(v)$ (ili $N(u)$), ali tada podgraf $G[u \cup v \cup w \cup N(v)]$ (odnosno $G[u \cup v \cup w \cup N(u)]$) ima drugu sopstvenu vrednost veću od $\sqrt{2}$.

Slučaj 4: $r = 6$. Nijedan od 4012 povezanih 6-regularnih grafova bez trouglova reda $n \leq 19$ koje smo generisali uz pomoć računara ne zadovoljava uslov $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$.

Ako je $n \geq 22$, na osnovu Teoreme 0.4, G ne sadrži $K_{2,3}$ kao indukovani podgraf. Tada postoje dva čvora u i v sa samo jednim zajedničkim susedom, ili svaka dva čvora na rastojanju 2 u G imaju tačno dva zajednička suseda. U prvom slučaju je podgraf indukovani sa deset čvorova koji nisu susedni ni sa u ni sa v 2-regularan bipartitan (u suprotnom G sadrži H_1 kao indukovani podgraf), ali očigledno takav podgraf ima drugu sopstvenu vrednost veću od $\sqrt{2}$. U drugom slučaju jednostavno uočavamo da je dijametar grafa G 2, pa G mora biti jako regularan graf sa parametrima $(22, 6, 0, 2)$, međutim takav graf ne postoji (videti opet Teoremu 7.3 monografije [20]).

Preostale su još mogućnosti $n \in \{20, 21\}$. Na osnovu Teoreme 0.4, G ne sadrži $K_{2,4}$ niti $K_{3,3}$ kao indukovani podgraf. Tada sledi da postoji čvor $u \in U$ sa osobinom $d^*(u) = 3$. Sva tri čvora skupa $N(u) \cap N(v)$ moraju imati sve svoje ostale susede u skupu $S = X \setminus (N(u) \cup N(v))$. Budući da svaki čvor iz skupa S može biti susedan sa najviše dva čvora iz skupa $N(u) \cap N(v)$, postoje barem dva čvora u S koji su susedni sa tačno dva čvora skupa $N(u) \cap N(v)$. Uočimo sledeću podelu skupa X : $A = N(u) \cap N(v)$, B je skup dva čvora koji su susedni sa tačno dva čvora skupa A ,

$C = \{u, v\}$ i $D = X \setminus (A \cup B \cup C)$. Ova podela indukuje količničku matricu

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ \frac{6}{n-7} & \frac{8}{n-7} & \frac{8}{n-7} & \frac{6n-64}{n-7} \end{pmatrix}.$$

Sada, na osnovu Teoreme 0.3, važi $\lambda_2(M_2) > \sqrt{2}$ za $n \in \{20, 21\}$, odakle sledi $\lambda_2(G) > \sqrt{2}$.

Slučaj 5: $r = 5$. Postoji tačno 405193 povezana 5-regularna ne bipartitna grafa bez trouglova reda n , $n \leq 18$, i proverom uz pomoć računara dolazimo do zaključka da samo jedan od njih zadovoljava uslov $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$. To je Klebšov graf (videti i Poglavlje 1.2).

Ako je G povezan 5-regularan ne bipartitni graf bez trouglova reda n koji zadovoljava uslov $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$, i ako je $n \geq 20$, tada, prema Teoremi 0.4, G ne sadrži $K_{2,3}$ kao indukovani podgraf.

Neka važi $n \geq 20$. Pretpostavimo da postoje dva čvora u i v , koji imaju samo jednog zajedničkog suseda w , i neka je A četvoroelementni skup $N(u) \setminus \{w\}$ i B četvoroelementni skup $N(v) \setminus \{w\}$. Podgraf $G[A \cup B]$ grafa G je bipartitan, sa četiri čvora u svakoj klasi obojivosti, svaki čvor tog podgrafa je najviše stepena 2 i dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti imaju najviše jednog zajedničkog suseda. Postoji 26 grafova sa tim osobinama. Posmatrajući podgraf grafa G indukovani sa u, v, w i čvorovima skupa $A \cup B$, vidimo da samo dva zadovoljavaju osobinu da im je druga sopstvena vrednost manja ili jednaka $\sqrt{2}$: jedan od njih se dobija ako je $G[A \cup B]$ izomorfan sa C_8 , a drugi ako je $G[A \cup B]$ izomorfan sa $C_6 \dot{\cup} K_2$. Uočimo podelu skupa X : $\{u\}, \{v\}, \{w\}, A, B, X \setminus (\{u, v, w\} \cup A \cup B)$ koja indukuje količničku matricu

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{e}{3} & 4 - \frac{e}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{e}{3} & 0 & 4 - \frac{e}{3} \\ 0 & \frac{3}{n-11} & 0 & \frac{16-e}{n-11} & \frac{16-e}{n-11} & \frac{5n+2e-90}{n-11} \end{pmatrix},$$

gde e označava broj grana u podgrafu $G[A \cup B]$. Budući da važi $7 \leq e \leq 8$, tada za $n \geq 20$, na osnovu Teoreme 0.3, sledi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(M_3) > \sqrt{2}$.

Ako svi čvorovi koji su na rastojanju 2 u G imaju tačno dva zajednička suseda i ako važi $n \geq 20$, tada postoje dva čvora u G koji su na rastojanju 3. Označimo te čvorove sa u i v , i neka je u, w_1, w_2, v put dužine 3 koji ih povezuje. Neka je C

čtetvoroelementni skup $N(u) \setminus \{w_1\}$ i D čtetvoroelementni skup $N(v) \setminus \{w_2\}$. Podgraf $G[C \cup D]$ grafa G je bipartitan, sa čtetiri čvora u svakoj klasi obojivosti i svaki čvor tog podgrafa je stepena najviše 2. Postoje 32 grafa sa tim osobinama, od kojih 28 zadovoljava osobinu da im je druga sopstvena vrednost manja ili jednaka $\sqrt{2}$. Posmatrajući sada 28 mogućih podgrafova grafa G , koji su indukovani čvorovima u, v, w i čvorovima skupa $C \cup D$, vidimo da samo dva zadovoljavaju osobinu da im je druga sopstvena vrednost manja ili jednaka $\sqrt{2}$, i tada je $G[C \cup D]$ izomorfan sa C_8 ili sa $C_6 \dot{\cup} K_2$. Ako je $G[C \cup D]$ izomorfan sa C_8 , čvor w_1 ne može imati nijednog suseda u skupu B , pa podgraf indukovan čvorovima w_1, u, v i čvorovima skupa $C \cup D$ ima drugu sopstvenu vrednost veću od $\sqrt{2}$. Ukoliko je $G[C \cup D]$ izomorfan sa $C_6 \dot{\cup} K_2$, čvor w_1 može biti susedan samo sa jednim čvorom grafa K_2 , i u oba slučaja (w_1 je susedan sa jednim čvorom grafa K_2 , odnosno w_1 nije susedan ni sa jednim čvorom grafa K_2), podgraf indukovan čvorovima w_1, u, v i čvorovima skupa $C \cup D$ ima drugu sopstvenu vrednost veću od $\sqrt{2}$.

Ovim je dokaz završen. ■

Sada ćemo ograničiti red r -regularnih, $3 \leq r \leq 4$, nebipartitnih grafova čiji je struk veći od 3 i koji zadovoljavaju uslov $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$. Koristimo i sledeći rezultat (koji se može naći u radu [35]): ako je G prost graf koji ne sadrži trouglove reda n i minimalnog stepena d , i ukoliko važi $d > \frac{2}{5}n$, tada je G bipartitan.

Lema 1.4 *Neka je G r -regularan, $3 \leq r \leq 4$, nebipartitan graf reda n čiji je struk veći od 3 koji zadovoljava $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$. Tada:*

(i) *ako važi $r = 3$, onda važi $8 \leq n \leq 18$;*

(ii) *ako važi $r = 4$, onda važi $10 \leq n \leq 17$.*

Dokaz. Budući da G nije bipartitan, donje granice u oba slučaja dobijamo iz nejednakosti $r \leq \frac{2}{5}n$, zamenjujući $r = 3$ ($r = 4$).

Ako je $r = 3$, tada na osnovu Teoreme 1.12 važi $n \leq 18$, čime je dokaz tvrđenja (i) završen.

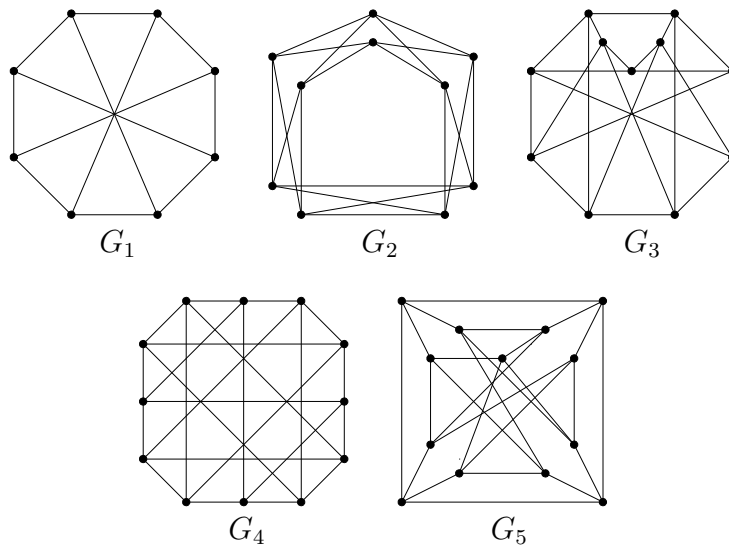
Ako je $r = 4$, na osnovu Teoreme 1.12 važi $n \leq 19$. Postoji samo jedan 4-regularan graf reda $n \leq 19$ čiji je struk veći od 4, i taj graf ima drugu sopstvenu vrednost veću od $\sqrt{2}$. Dakle, G mora sadržati $K_{2,2}$ kao indukovani podgraf, pa na osnovu Teoreme 0.4 važi $n \leq 17$, čime je završen i dokaz tvrđenja (ii). ■

Postoji tačno 8529 3-regularnih nebipartitnih grafova čiji je struk veći od 3, koje smo generisali koristeći računar. Među njima samo dva imaju osobinu $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$: Petersenov graf i graf G_1 prikazan na Slici 2.

Takođe, uz pomoć računara generisali smo tačno 212 554 4-regularna nebipartitna grafa čiji je struk veći od 3. Četiri grafa među njima zadovoljavaju uslov $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$. To su grafovi G_i , $2 \leq i \leq 5$ prikazani na Slici 2.

Dobijeni rezultati sumirani su u sledećoj teoremi.

Teorema 1.15 *Postoji tačno 9 regularnih nebipartitnih grafova čiji je struk veći od 3 koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$. To su: C_5, C_7 , Petersenov graf, Klebšov graf i pet grafova prikazanih na Slici 2.*



Slika 2: Pet grafova iz Teoreme 1.15

Podaci o grafovima iz prethodne teoreme (red, struk i spektar) nalaze se u Potpoglavlju 1.4.4, Tabela 1.

1.4.2 3-regularni nebipartitni reflektivni grafovi čiji je struk veći od 4

Svi 3-regularni nebipartitni grafovi čiji je struk veći od 3 koji zadovoljavaju osobinu $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$ određeni su u prethodnom potpoglavlju (Teorema 1.15). Među njima postoji jedan graf čiji je struk veći od 4 i to je Petersenov graf. Sada određujemo sve 3-regularne grafove čiji je struk veći od 4 koji zadovoljavaju osobinu $\sqrt{2} \leq \lambda_2 \leq 2$.

Lema 1.5 *Neka je G 3-regularan ne bipartitni refleksivan graf. Tada važi $\text{gr}(G) \leq 7$.*

Dokaz. Pretpostavimo da važi $\text{gr}(G) \geq 8$. Neka je v proizvoljan čvor grafa G . Uočimo podgraf $G[v \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3]$, gde je $D_i = \{u \in X, d(u, v) = i\}$, $1 \leq i \leq 3$. Očigledno je $|D_i| = 3 \cdot 2^{i-1}$ i svaki podgraf $G[D_i]$, $1 \leq i \leq 3$, jeste totalno nepovezan. Neka je u čvor grafa G koji je na rastojanju 4 od v . Jednostavno se proverava da važi $\lambda_2(G[v \cup u \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3]) > 2$ ako u ima jednog ili dva suseda u skupu D_3 , pa svaki čvor na rastojanju 4 od v ima sve svoje susede u skupu D_3 . Zato struk grafa G mora biti 8 i budući da je $G[D_4]$ ($D_4 = \{u \in X, d(u, v) = 4\}$) totalno nepovezan graf, G ne sadrži konturu neparne dužine. To znači da je G bipartitan, što je kontradikcija. ■

Ograničićemo i red 3-regularnog reflektivnog grafa čiji je struk veći od 4.

Lema 1.6 *Neka je G 3-regularan refleksivan graf reda n . Tada:*

(i) *ako važi $\text{gr}(G) = 5$, tada je $n \leq 20$;*

(ii) *ako važi $\text{gr}(G) = 6$, tada je $n \leq 24$;*

(iii) *ako važi $\text{gr}(G) = 7$, tada je $n \leq 28$.*

Dokaz.

(i) Neka je $n \geq 22$. Ako sa $V = \{v_1, \dots, v_5\}$ obeležimo skup čvorova podgraфа grafa G koji je izomorfan sa C_5 , tada svaki čvor skupa $X \setminus V$ ima najviše jednog suseda u skupu V , pa skup $W = \{w_i \in X \setminus V, d(v_i, w_i) = 1\}$ sadrži tačno 5 čvorova. Podela skupa $X: \{V, W, X \setminus (V \cup W)\}$ indukuje količničku matricu

$$P(e) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2e}{5} & 2 - \frac{2e}{5} \\ 0 & \frac{10-2e}{n-10} & 3 - \frac{10-2e}{n-10} \end{pmatrix},$$

gde e označava broj grana u podgrafu $G[W]$. Sada je:

$$\lambda_2(P(e)) = \frac{5n - 5e + ne - 75}{5n - 50} + \frac{\sqrt{\frac{n^2e^2}{25} - \frac{2n^2e}{5} + 2n^2 - \frac{2ne^2}{5} + 6ne - 40n + e^2 - 30e + 225}}{n - 10}.$$

Jednostavno se proverava da je za svako fiksirano $n \geq 22$ funkcija $\lambda_2(P(e))$ rastuća po promenljivoj e , pa je: $\lambda_2(P(e)) \geq \lambda_2(P(0)) = \frac{n + \sqrt{2n^2 - 40n + 225} - 15}{n - 10} > 2$, za $n \geq 22$. Na osnovu Teoreme 0.3 važi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(P(e))$. Dakle, ako je $n \geq 22$, graf G nije refleksivan, što je kontradikcija.

(ii) Neka je $n \geq 26$. Uočimo podelu skupa X : $\{V = \{v_1, \dots, v_6\}, W = \{w_i \in X \setminus V, d(v_i, w_i) = 1\}, X \setminus (V \cup W)\}$, gde je V skup čvorova podgrafa grafa G koji je izomorfan sa C_6 . Budući da važi $\text{gr}(G) = 6$, skup W sadrži tačno 6 čvorova. Opisana podela indukuje količničku matricu

$$R(e) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{e}{3} & 2 - \frac{e}{3} \\ 0 & \frac{12-2e}{n-12} & 3 - \frac{12-2e}{n-12} \end{pmatrix},$$

gde e ponovo označava broj grana u podgrafu $G[W]$. Druga sopstvena vrednost matrice $R(e)$ je:

$$\lambda_2(R(e)) = \frac{6n - 6e + ne - 108}{6n - 72} + \frac{\sqrt{\frac{n^2e^2}{9} - \frac{4n^2e}{3} + 8n^2 - \frac{4ne^2}{3} + 24ne - 192n + 4e^2 - 144e + 1296}}{2n - 24},$$

i jednostavno možemo videti da je za svako fiksirano $n \geq 26$, funkcija $\lambda_2(R(e))$ rastuća po promenljivoj e . Sledi da za $n \geq 26$ važi $\lambda_2(R(e)) \geq \lambda_2(R(0)) = \frac{n + \sqrt{2\sqrt{n^2 - 24n + 162} - 18}}{n - 12} > 2$. Sada na osnovu Teoreme 0.3 važi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(R(e))$, pa ako je $n \geq 26$, graf G nije refleksivan, što je kontradikcija.

(iii) Neka je $n \geq 30$ i posmatrajmo podelu skupa X : $\{V = \{v_1, \dots, v_7\}, W = \{w_i \in X \setminus V, d(v_i, w_i) = 1\}, X \setminus (V \cup W)\}$, gde je V skup čvorova podgrafa grafa G koji je izomorfan sa C_7 . Skup W sadrži tačno 7 čvorova i podgraf $G[W]$ je totalno nepovezan ($\text{gr}(G) = 7$). Ova podela indukuje količničku matricu

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{14}{n-14} & 3 - \frac{14}{n-14} \end{pmatrix},$$

čija je druga sopstvena vrednost $\lambda_2(S) = \frac{n + \sqrt{2n^2 - 56n + 441} - 21}{n - 14}$. Vidimo da za $n \geq 30$ važi $\lambda_2(S) > 2$, pa na osnovu Teoreme 0.3 G nije refleksivan, što je kontradikcija. ■

Na osnovu Leme 1.5 struk 3-regularnog ne bipartitnog grafa nije veći od 7, a prethodna lema nam pruža gornju granicu za broj čvorova 3-regularnog reflektivnog grafa G koji zadovoljava $5 \leq \text{gr}(G) \leq 7$. Sada možemo, uz pomoć računara, da generišemo sve 3-regularne grafove (odgovarajućeg reda) čiji je struk između 5 i 7 (postoji tačno 6260 povezanih 3-regularnih grafova čiji red nije veći od 20 i čiji je struk 5, 7997 povezanih 3-regularnih grafova čiji red nije veći od 24 i čiji je struk

6 i 25 povezanih 3-regularnih grafova čiji red nije veći od 28 i čiji je struk 7), i da potom eliminišemo bipartitne, zatim one koji nisu refleksivni i one čija druga sopstvena vrednost nije veća od $\sqrt{2}$. Rezultat je dat u sledećoj teoremi.

Teorema 1.16 *Postoje tačno 92 3-regularna nebipartitna grafa čiji je struk veći od 4 i čija druga sopstvena vrednost zadovoljava $\sqrt{2} < \lambda_2 \leq 2$, sa osobinama koje su predstavljene u Tabeli 2 i Tabeli 3 Potpoglavlja 1.4.4.*

Sada možemo sumirati rezultate prethodnog i ovog potpoglavlja.

Teorema 1.17 *Postoje tačno 93 3-regularna nebipartitna refleksivna grafa čiji je struk veći od 4. To su Petersenov graf i grafovi iz Teoreme 1.16.*

1.4.3 Regularni nebipartitni grafovi čiji je struk veći od 4 koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{3}$

Svi regularni grafovi čiji je struk veći od 3 i koji zadovoljavaju osobinu $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$ određeni su u Potpoglavlju 1.4.1 (Teorema 1.15). Među njima postoje dva grafa stepena 2 čiji je struk veći od 4, C_5 i C_7 i, kao što je već rečeno, jedan graf stepena 3 čiji je struk veći od 4, Petersenov graf. Takođe, svi 3-regularni nebipartitni refleksivni grafovi čiji je struk veći od 4 određeni su u prethodnom potpoglavlju (Teorema 1.17). Osim Petersenovog, još četiri grafa zadovoljavaju uslov $\lambda_2 \leq \sqrt{3}$, i to su grafovi L_1 , L_2 , L_9 i L_{10} iz Tabele 2, Potpoglavlje 1.4.4.

Jasno je da su C_9 i C_{11} jedini 2-regularni nebipartitni grafovi čiji je struk veći od 4 koji zadovoljavaju $\sqrt{2} < \lambda_2 \leq \sqrt{3}$. Zato se sada ograničavamo na određivanje svih regularnih nebipartitnih grafova čiji je stepen veći od 3, struk veći od 4 i koji zadovoljavaju osobinu $\sqrt{2} < \lambda_2 \leq \sqrt{3}$. Na osnovu Teoreme 1.14 stepen regularnog nebipartitnog grafa G , za koji važi $\text{gr}(G) \leq 5$ i čija druga sopstvena vrednost nije veća od $\sqrt{3}$, nije veći od 5.

Dakle, potrebno je odrediti sve r -regularne, $4 \leq r \leq 5$, nebipartitne grafove čiji je struk veći od 4 koji zadovoljavaju $\sqrt{2} < \lambda_2 \leq \sqrt{3}$. Jasno je da je svaki takav graf povezan.

Lema 1.7 *Neka je G r -regularan, $4 \leq r \leq 5$, nebipartitan graf čiji je struk veći od 4 koji zadovoljava $\lambda_2 \leq \sqrt{3}$. Tada važi $\text{gr}(G) = 5$.*

Dokaz. Pretpostavimo da važi $\text{gr}(G) \geq 6$. Tada je $\text{diam}(G) \geq 3$. Takođe je, na osnovu Teoreme 1.10, $\text{diam}(G) \leq 3$, pa je $\text{diam}(G) = 3$.

Neka je v proizvoljan čvor grafa G . Definišimo skupove $D_i = \{u \in X, d(u, v) = i\}$, $1 \leq i \leq 2$. Naravno, $|D_i| = r \cdot (r-1)^{i-1}$ i oba podgrafova $G[D_i]$, $1 \leq i \leq 2$, totalno su nepovezana.

Ako je $r = 5$, tada važi $\lambda_2(G[v \cup D_1 \cup D_2]) = 2 > \sqrt{3}$, što je kontradikcija.

Ako je $r = 4$, uočimo proizvoljan čvor u na rastojanju 3 od v . Sada se direktnom proverom možemo uveriti da važi $\lambda_2(G[v \cup u \cup D_1 \cup D_2]) > \sqrt{3}$ ako u ima manje od 4 suseda u skupu D_2 , pa svaki čvor na rastojanju 3 od čvora v ima sve svoje susede u skupu D_2 . Dakle, podgraf indukovan skupom čvorova koji se nalaze na rastojanju 3 od čvora v je totalno nepovezan, pa je G bipartitan, što je kontradikcija. ■

Naš sledeći zadatak je da postavimo gornju granicu za broj čvorova r -regularnog, $4 \leq r \leq 5$, nebipartitnog grafa čiji je struk veći od 4 i koji zadovoljava uslov $\lambda_2 \leq \sqrt{3}$.

Lema 1.8 *Neka je G r -regularan, $4 \leq r \leq 5$, nebipartitan graf reda n , čiji je struk veći od 4 i koji zadovoljava uslov $\lambda_2 \leq \sqrt{3}$. Tada:*

(i) *ako je $r = 5$, tada važi $n \leq 32$;*

(ii) *ako je $r = 4$, tada važi $n \leq 23$.*

Dokaz. Na osnovu prethodne leme važi $\text{gr}(G) = 5$. Posmatrajmo sledeću podelu skupa X : $\{V = \{v_1, \dots, v_5\}, W = \{w_i \in X \setminus V, d(v_i, w_i) = 1\}, X \setminus (V \cup W)\}$, gde V označava skup čvorova podgrafova grafa G koji je izomorfan sa C_5 . Svaki čvor skupa $X \setminus V$ susedan je sa najviše jednim čvorom skupa V , a skup W sadrži tačno $5(r-2)$ čvorova. Opisana podela indukuje količničku matricu

$$T(e) = \begin{pmatrix} 2 & r-2 & 0 \\ 1 & \frac{2e}{5(r-2)} & r-1 - \frac{2e}{5(r-2)} \\ 0 & \frac{5(r-1)(r-2)-2e}{n-5(r-1)} & r - \frac{5(r-1)(r-2)-2e}{n-5(r-1)} \end{pmatrix},$$

gde e označava broj grana u podgrafu $G[W]$.

Neka je $r = 5$ i pretpostavimo da važi $n \geq 34$. Druga sopstvena vrednost matrice $T(e)$ je:

$$\lambda_2(T(e)) = \frac{15n - 5e + ne - 750}{15n - 300} + \sqrt{\frac{\frac{n^2 e^2}{225} - \frac{2n^2 e}{15} + 4n^2 - \frac{2ne^2}{45} + \frac{4ne}{3} - 160n + \frac{e^2}{9} - \frac{100e}{3} + 2500}{n - 20}}.$$

Za svaku fiksiranu vrednost broja $n \geq 34$ funkcija $\lambda_2(T(e))$ je rastuća po promenljivoj e , u šta se jednostavno možemo uveriti, pa u ovom slučaju važi $\lambda_2(T(e)) \geq \lambda_2(T(0)) = \frac{n+2\sqrt{n^2-40n+625}-50}{n-20} > \sqrt{3}$. Na osnovu Teoreme 0.3 važi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(T(e))$, a $\lambda_2(T(e)) > \sqrt{3}$ za $n \geq 34$, što je kontradikcija.

Na isti način dolazimo do kontradikcije ako važi $r = 4$.

Ovim je dokaz završen. ■

Uz pomoć računara generisali smo sve povezane 5-regularne grafove reda $n \leq 32$, čiji je struk veći od 4. Postoje 94 takva grafa, ali nijedan ne zadovoljava uslov $\sqrt{2} < \lambda_2 \leq \sqrt{3}$.

Postoji 4059 povezanih 4-regularnih grafova reda $n \leq 23$, čiji je struk veći od 4 (koje smo generisali uz pomoć računara), i samo jedan od njih nije bipartitan i zadovoljava uslov $\sqrt{2} < \lambda_2 \leq \sqrt{3}$. Ovaj graf označićemo sa M . To je 4-regularan graf reda 20, čiji je struk jednak 5, a njegov spektar je $\{4, 1.73^4, 1.56^3, 1^3, -1, -1.73^4, -2.56^3, -3\}$.

Imajući u vidu rezultate iz prethodnog potpoglavlja, možemo formulirati sledeću teoremu.

Teorema 1.18 *Postoji tačno 5 r -regularnih, $r > 2$, nebipartitnih grafova čiji je struk veći od 4 koji zadovoljavaju $\sqrt{2} < \lambda_2 \leq \sqrt{3}$. To su 4 3-regularna grafa L_1, L_2, L_9 i L_{10} čiji su spektri dati u Tabeli 2 Potpoglavlja 1.4.4, i 4-regularan graf M .*

Sada možemo sumirati dobijene rezultate.

Teorema 1.19 *Postoji tačno 10 regularnih nebipartitnih grafova čiji je struk veći od 4 koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{3}$. To su: C_5, C_7, C_9, C_{11} , Petersenov graf i grafovi iz Teoreme 1.18.*

1.4.4 Podaci o grafovima iz Poglavlja 1.4

U ovom potpoglavlju nalaze se tabele koje sadrže podatke o regularnim nebipartitnim grafovima koji su određeni u Poglavlju 1.4.

U Tabeli 1 dati su broj čvorova, struk i spektar grafova opisanih u Teoremi 1.15. Budući da se sopstvene vrednosti konture proizvoljne dužine jednostavno mogu izračunati na osnovu broja njenih čvorova, podaci o njima biće izostavljeni iz Tabele 1.

U Tabeli 2 dati su broj čvorova i spektar grafova opisanih u Teoremi 1.16. Grafovi $L_i, 1 \leq i \leq 55$ ili $58 \leq i \leq 72$ imaju struk 5, grafovi $L_i, i \in \{56, 57\}$ ili $73 \leq i \leq 89$ imaju struk 6, dok grafovi $L_i, i \in \{90, 91, 92\}$ imaju struk 7.

U Tabeli 3 data je heksadecimalna reprezentacija grafova predstavljenih u Teoremi 1.16 i grafa M koji je određen u Potpoglavlju 1.4.3. Podaci o grafu M (red, spektar i struk) mogu se naći u Potpoglavlju 1.4.3.

Tabela 1: Podaci o regularnim nebipartitnim grafovima čiji je struk veći od 3 koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$

Graf	n	Struk	Spektar
G_1	8	4	$3, 1^2, 0.41^2, -1, -2.41^2$
Petersenov graf	10	5	$3, 1^5, -2^4$
G_2	10	4	$4, 1.23^2, 0^5, -3.23^2$
G_3	11	4	$4, 1.40^2, 0.55^2, 0.37^2, -1.09^2, -3.23^2$
G_4	12	4	$4, 1^6, 0, -2^2, -3^2$
G_5	13	4	$4, 1.38^4, 0.27^4, -2.66^4$
Klebšov graf	16	4	$5, 1^{10}, -3^5$

Tabela 2: Podaci o 3-regularnim nebipartitnim reflektivnim grafovima čiji je struk veći od 4

Graf	n	Spektar
L_1	12	$3, 1.56, 1.41^2, 1^2, 0, -1.41^2, -2^2, -2.56$
L_2	12	$3, 1.53^2, 1.30^2, 0.35^2, -1, -1.88^2, -2.30^2$
L_3	14	$3, 1.86, 1.71, 1.55, 1.26, 1, 0.38, 0.08, -0.91, -1.33, -1.69, -2.10, -2.33, -2.48$
L_4	14	$3, 1.86, 1.73, 1.62, 1.30, 0.62, 0.41, 0.25, -0.62, -1.62, -1.73, -2.11, -2.30, -2.41$
L_5	14	$3, 1.87, 1.68, 1.41^2, 1, 0.54, 0, -1.21, -1.41^2, -2, -2.21, -2.66$
L_6	14	$3, 1.81, 1.68^2, 1.41, 0.54^2, 0, -0.47, -1.41, -2, -2.21^2, -2.34$
L_7	14	$3, 1.81, 1.68, 1.41^2, 1.17, 0.54, -0.47, -0.69, -1.41^2, -2.21, -2.34, -2.48$
L_8	14	$3, 1.81, 1.41^4, 0.73, -0.47, -1.41^4, -2.34, -2.73$
L_9	14	$3, 1.73, 1.62^2, 1.30^2, 0.41, -0.62^2, -1, -1.73, -2.30^2, -2.41$
L_{10}	14	$3, 1.71^2, 1.55^2, 1, 0.08^2, -0.91^2, -2.10^2, -2.33^2$
L_{11}	16	$3, 1.99, 1.83, 1.69, 1.44, 1.32, 0.83, 0.39, -0.31, -0.72, -1.08, -1.39, -1.81, -2.20, -2.43, -2.55$
L_{12}	16	$3, 2, 1.86, 1.76, 1.56, 0.82, 0.62^2, 0.25, -1, -1.14, -1.62^2, -2.11, -2.44, -2.56$
L_{13}	16	$3, 2, 1.76, 1.62, 1.56, 1.30, 0.82, 0.62, -0.62, -1^2, -1.14, -1.62, -2.30, -2.44, -2.56$
Nastavak na sledećoj strani		

Tabela 2 – nastavak

Graf	n	Spektar
L_{14}	16	3, 1.99, 1.87, 1.73, 1.56, 1, 0.77, 0.41, -0.03 , -0.60 , -1.25 , -1.61 , -1.73 , -2.14 , -2.41 , -2.54
L_{15}	16	$3, 2^2, 1.56^2, 0.62^4, -1, -1.62^4, -2.56^2$
L_{16}	16	3, 2, 1.94, 1.62, 1.56, 1, 0.62^2 , 0, -0.62 , -1.46 , -1.62^2 , -2 , -2.47 , -2.56
L_{17}	16	$3, 2, 1.62^2, 1.56^2, 0.62^2, -0.62^2, -1, -1.62^2, -2, -2.56^2$
L_{18}	16	3, 1.99, 1.83, 1.60, 1.56, 1.34, 0.78, 0.30, -0.21 , -0.71 , -1 , -1.57 , -1.92 , -1.96 , -2.48 , -2.56
L_{19}	16	3, 2, 1.93, 1.65, 1.39, 1.25, 0.71, 0.47, -0.27 , -0.45 , -1.27 , -1.50 , -1.80 , -2.19 , -2.38 , -2.54
L_{20}	16	$3, 2^2, 1.56, 1.30^2, 0.62^2, 0, -1^2, -1.62^2, -2.30^2, -2.56$
L_{21}	16	3, 2, 1.86, 1.62, 1.56, 1.30, 0.62, 0.25, 0, -0.62 , -1 , -1.62 , -2 , -2.11 , -2.30 , -2.56
L_{22}	16	3, 1.99, 1.86, 1.71, 1.49, 1.25, 0.72, 0.25, -0.23 , -0.37 , -1.08 , -1.67 , -1.90 , -2.11 , -2.37 , -2.54
L_{23}	16	$3, 1.86^2, 1.79, 1.41^2, 0.62, 0.25^2, -1, -1.41^2, -1.62, -2.11^2, -2.79$
L_{24}	16	$3, 1.86^3, 1.41^2, 0.25^3, -0.38, -1.41^2, -2.11^3, -2.62$
L_{25}	16	3, 1.87, 1.86, 1.79, 1.54, 1.27, 0.72, 0.25, -0.05 , -0.67 , -1.26 , -1.45 , -1.77 , -2.11 , -2.40 , -2.61
L_{26}	16	3, 1.87, 1.86, 1.62, 1.58, 1.41, 0.84, 0.25, -0.30 , -0.62 , -1.25 , -1.41 , -1.78 , -2.11 , -2.25 , -2.72
L_{27}	16	$3, 1.86, 1.79, 1.62, 1.41^2, 1.30, 0.25, -0.62,$ $-1^2, -1.41^2, -2.11, -2.30, -2.79$
L_{28}	16	3, 1.87, 1.84, 1.60, 1.58, 1.41, 0.88, 0.40, -0.34 , -0.89 , -1.26 , -1.41 , -1.65 , -1.95 , -2.31 , -2.79
L_{29}	16	3, 1.88, 1.85, 1.73, 1.57, 1.27, 0.64, 0.58, -0.17 , -1 , -1.11 , -1.46 , -1.73 , -1.95 , -2.37 , -2.72
L_{30}	16	3, 1.87, 1.83, 1.73, 1.48, 1.37, 1, 0.15, -0.31 , -0.80 , -1 , -1.39 , -1.73 , -2.17 , -2.45 , -2.59
L_{31}	16	$3, 1.90, 1.73^3, 1^2, 0.41, -0.19, -1^2, -1.73^3, -2.41, -2.71$
L_{32}	16	$3, 1.90, 1.73^2, 1.48^2, 1, -0.19, -0.31^2, -1, -1.73^2, -2.17^2, -2.71$
L_{33}	16	3, 1.87, 1.73^2 , 1.52, 1.37, 1, 0.55, -0.80 , $-1^2, -1.29, -1.73^2, -2.45, -2.78$
Nastavak na sledećoj strani		

Tabela 2 – nastavak

Graf	n	Spektar
L_{34}	16	$3, 1.83^2, 1.56^2, 1.34^2, -0.21^2, -1^3, -1.96^2, -2.56^2$
L_{35}	18	$3, 2^2, 1.73, 1.56, 1.48^2, 0.41, -0.31^2,$ $-1^2, -1.73, -2.17^2, -2.41, -2.56$
L_{36}	18	$3, 2, 1.96, 1.74, 1.63, 1.51, 1.35, 0.58, 0.11, -0.27, -0.71$ $-0.86, -1.17, -1.67, -1.91, -2.18, -2.45, -2.67$
L_{37}	18	$3, 2, 1.96, 1.73^2, 1.64, 1, 0.41, 0.27, 0, -0.55,$ $-1.00, -1.44, -1.73^2, -2.23, -2.41, -2.66$
L_{38}	18	$3, 2, 1.97, 1.73, 1.70, 1.57, 1.11, 0.62, 0.30, -0.24, -0.80,$ $-1, -1.22, -1.62, -1.73, -2.25, -2.46, -2.67$
L_{39}	18	$3, 2^2, 1.73^2, 1.56, 1, 0.41^2, 0, -1^3, -1.73^2, -2.41^2, -2.56$
L_{40}	18	$3, 2^2, 1.73^3, 0.41^3, 0^2, -1, -1.73^3, -2.41^3$
L_{41}	18	$3, 2^2, 1.73, 1.56, 1.48^2, 0.41, 0, -0.31^2,$ $-1^2, -1.73, -2.17^2, -2.41, -2.56$
L_{42}	18	$3, 2, 1.96, 1.73^2, 1.50, 1, 0.90, 0.09, 0, -1.00^2,$ $-1.37, -1.73^2, -1.80, -2.46, -2.82$
L_{43}	18	$3, 2, 1.96, 1.73, 1.69, 1.62, 0.90, 0.88, 0.21, -0.34, -0.62,$ $-1, -1.35, -1.59, -1.73, -2.19, -2.53, -2.64$
L_{44}	18	$3, 2, 1.96, 1.73, 1.63, 1.48, 1.31, 0.83, 0, -0.31, -0.68,$ $-1, -1.25, -1.61, -1.73, -2.17, -2.41, -2.77$
L_{45}	18	$3, 1.97^2, 1.73^2, 1.44, 1.29, 0.68, 0.18, -0.25, -0.68,$ $-1.12, -1.29, -1.73^2, -1.97, -2.40, -2.82$
L_{46}	18	$3, 1.97, 1.96, 1.87, 1.69, 1.48, 1, 0.75, 0.21, -0.10, -0.69,$ $-1.21, -1.34, -1.53, -1.83, -1.98, -2.60, -2.66$
L_{47}	18	$3, 2, 1.73^4, 1.34, 0.41, 0^2, -0.53, -1, -1.73^4, -2.41, -2.81$
L_{48}	18	$3, 1.97^2, 1.75, 1.63, 1.58, 1.15, 0.89, 0.02, -0.26, -0.75,$ $-1.05, -1.33, -1.38, -1.79, -2.26, -2.36, -2.77$
L_{49}	18	$3, 2, 1.87^2, 1.62^2, 1, 0.62^2, -0.62^2, -1.21^2, -1.62^2, -2.00, -2.66^2$
L_{50}	18	$3, 2, 1.87, 1.76, 1.62^2, 1.35, 0.62, 0.21, -0.62^2, -0.82,$ $-1.21, -1.62, -1.90, -2, -2.60, -2.66$
L_{51}	18	$3, 1.96^2, 1.87^2, 1^3, 0.21^2, -1.21^2, -1.34^2, -1.83^2, -2.66^2$
L_{52}	18	$3, 2, 1.78, 1.73^2, 1.56, 1.48, 0.59, 0, -0.31,$ $-0.72, -1^2, -1.73^2, -2.17, -2.56, -2.64$
L_{53}	18	$3, 2, 1.97, 1.73, 1.62, 1.52, 1.14, 0.88, 0.43, -0.62, -0.89,$
Nastavak na sledećoj strani		

Tabela 2 – nastavak

Graf	n	Spektar
		$-1, -1.35, -1.51, -1.73, -1.83, -2.53, -2.82$
L_{54}	18	$3, 2^2, 1.73, 1.62^2, 0.88^2, 0.41, -0.62^2,$ $-1, -1.35^2, -1.73, -2.41, -2.53^2$
L_{55}	18	$3, 2, 1.79, 1.73, 1.62^2, 1.44, 0.88, -0.11, -0.62^2,$ $-1, -1.15, -1.35, -1.73, -2.28, -2.53, -2.68$
L_{56}	18	$3, 2, 1.73^3, 1.56, 1.34, 1, 0, -0.53, -1^3, -1.73^3, -2.56, -2.81$
L_{57}	18	$3, 1.87^2, 1.62^4, 1, -0.62^4, -1.21^2, -2^2, -2.66^2$
L_{58}	20	$3, 2^2, 1.91, 1.82, 1.62, 1.42, 1.12, 0.56, 0.08, -0.55, -0.62,$ $-1^2, -1.16, -1.68, -2, -2.29, -2.53, -2.70$
L_{59}	20	$3, 2^3, 1.87, 1.70, 1.22, 0.62^2, 0.47, -0.24, -0.60,$ $-1^2, -1.62^2, -2, -2.27, -2.46, -2.70$
L_{60}	20	$3, 2^3, 1.87, 1.61, 1.18, 1, 0.56, 0.41, -0.33, -1^3,$ $-1.16, -1.64, -2, -2.38, -2.41, -2.72$
L_{61}	20	$3, 2^3, 1.84, 1.73, 1^2, 0.51, 0.41, 0, -1^3, -1.51, -1.73, -2^2, -2.41, -2.84$
L_{62}	20	$3, 2^2, 1.90, 1.81, 1.70, 1.45, 0.86, 0.62, 0.14, -0.24, -0.69,$ $-1^2, -1.62, -1.68, -1.96, -2.00, -2.46, -2.84$
L_{63}	20	$3, 2^2, 1.88^2, 1.62^2, 0.62^2, -0.09^2, -0.62^2, -1, -1.62^2, -2.26^2, -2.52^2$
L_{64}	20	$3, 2^2, 1.88^2, 1.62^2, 0.62^2, -0.09^2, -0.62^2, -1, -1.62^2, -2.26^2, -2.52^2$
L_{65}	20	$3, 2, 1.92, 1.91, 1.84, 1.73, 1.44, 1.12, 0.29, 0.19, -0.45, -0.59,$ $-0.75, -1, -1.61, -1.67, -1.89, -2.30, -2.38, -2.79$
L_{66}	20	$3, 2^3, 1.73, 1.56^2, 1, 0.41, 0^2, -1^4, -1.73, -2, -2.41, -2.56^2$
L_{67}	20	$3, 2^2, 1.92, 1.77, 1.70, 1.34, 1.15, 0.62, -0.13, -0.24,$ $-0.76, -1^2, -1.20, -1.62, -2, -2.37, -2.46, -2.72$
L_{68}	20	$3, 2^3, 1.70^2, 1.56, 0.62^2, 0, -0.24^2, -1^2, -1.62^2, -2, -2.46^2, -2.56$
L_{69}	20	$3, 2^2, 1.91, 1.81^2, 1.38, 0.62^2, 0.27, -0.47^2,$ $-0.71, -1, -1.62^2, -2.20, -2.34^2, -2.65$
L_{70}	20	$3, 2, 1.93, 1.89, 1.85, 1.71, 1.31^2, 0.43, -0.09, -0.38, -0.59,$ $-0.79, -1, -1.39, -1.62, -2.09, -2.27, -2.48, -2.72$
L_{71}	20	$3, 2, 1.93, 1.88, 1.77, 1.62^2, 1.30, 0.23, -0.09, -0.49, -0.62^2,$ $-1, -1.19, -1.66, -2.26, -2.30, -2.52, -2.59$
L_{72}	20	$3, 2, 1.88^2, 1.62^4, -0.09^2, -0.62^4, -1, -2, -2.26^2, -2.52^2$
L_{73}	20	$3, 2^3, 1.84, 1.56, 1^3, 0.51, -1^5, -1.51, -2^2, -2.56, -2.84$
L_{74}	20	$3, 2^2, 1.89, 1.77, 1.73, 1.32, 1, 0.84, 0, -0.32,$
Nastavak na sledećoj strani		

Tabela 2 – nastavak

Graf	n	Spektar
		$-1^3, -1.19, -1.73, -1.95, -2, -2.53, -2.84$
L_{75}	20	$3, 2^2, 1.90, 1.81, 1.56, 1.41, 1^2, -0.19, -0.47, -1^4, -1.41, -2, -2.34, -2.56, -2.71$
L_{76}	20	$3, 2, 1.93, 1.88, 1.82, 1.66, 1.53, 1.16, 0.35, 0.16, -0.35, -0.58, -1, -1.09, -1.53, -1.68, -1.88, -2, -2.53, -2.84$
L_{77}	20	$3, 2^2, 1.84, 1.73^2, 1.56, 1, 0.51, 0^2, -1^3, -1.51, -1.73^2, -2, -2.56, -2.84$
L_{78}	20	$3, 2^3, 1.56^3, 1^2, 0, -1^6, -2, -2.56^3$
L_{79}	20	$3, 1.94, 1.92, 1.90, 1.79, 1.62^2, 1.31, 0.39, -0.22, -0.45, -0.62^2, -1.12, -1.34, -1.65, -1.84, -2.40, -2.53, -2.70$
L_{80}	20	$3, 1.94, 1.92, 1.90, 1.86, 1.62^2, 1.18, 0.25, 0.19, -0.56, -0.62^2, -1.18, -1.46, -1.71, -1.90, -2.11, -2.47, -2.84$
L_{81}	20	$3, 1.95, 1.91, 1.90, 1.80, 1.73, 1.50, 1.25, 0.45, -0.19, -0.45, -0.49, -0.71, -1.25, -1.32, -1.73, -1.80, -2.20, -2.64, -2.71$
L_{82}	20	$3, 1.94^2, 1.86, 1.62^4, 0.25, -0.38, -0.62^4, -1.46^2, -2.11, -2.47^2, -2.62$
L_{83}	22	$3, 2^3, 1.77^2, 1.69, 1.62, 0.62, 0.33, -0.19^2, -0.38, -0.62, -1.33, -1.36^2, -1.62, -2.23^2, -2.62, -2.69$
L_{84}	22	$3, 2^3, 1.81^3, 1^2, 0.73, -0.47^3, -1^4, -2, -2.34^3, -2.73$
L_{85}	22	$3, 2^2, 1.81^3, 1.73^2, 0.73, 0^2, -0.47^3, -1^2, -1.73^2, -2.34^3, -2.73$
L_{86}	22	$3, 2^2, 1.81^4, 1.56, 1, 0, -0.47^4, -1^3, -2.34^4, -2.56$
L_{87}	24	$3, 2^5, 1.84, 1.56, 1, 0.51, 0^4, -1^3, -1.51, -2^4, -2.56, -2.84$
L_{88}	24	$3, 2^3, 1.87^2, 1.73, 1, 0.41, 0^4, -1^2, -1.21^2, -1.73, -2^2, -2.41, -2.66^2$
L_{89}	24	$3, 2^5, 1.56^3, 0^5, -1^4, -2^3, -2.56^3$
L_{90}	24	$3, 2^3, 1.81^4, 1.56, 0^3, -0.47^4, -1^2, -2, -2.34^4, -2.56$
L_{91}	26	$3, 2^5, 1.81^3, 0.73, 0^4, -0.47^3, -1^2, -2^3, -2.34^3, -2.73$
L_{92}	28	$3, 2^8, 0.41^6, -1^7, -2.41^6$

Tabela 3: Heksadecimalna reprezentacija matrice susedstva 3-regularnih ne bipartitnih refleksivnih grafova čiji je struk veći od 4 i 4-regularnog grafa M opisanog u Potpoglavlju 1.4.3

Graf	Heksadecimalna reprezentacija
L_1	E00600C0314282134
L_2	E00600C031424144C
L_3	E001800C00C140901020E1A
L_4	E001800C00C140901020D1C
L_5	E001800C00C140901020B52
L_6	E001800C00C140180980A26
L_7	E001800C00C140180980A1A
L_8	E001800C00C140180890D0C
L_9	E001800C00C110480941416
L_9	E001800C00C110480941416
L_{10}	E001800C00C1104809410D2
L_{11}	E0006000C00301400600824050830D
L_{12}	E0006000C0030140060082405082A3
L_{13}	E0006000C00301400600824050828E
L_{14}	E0006000C003014006008240508265
L_{15}	E0006000C0030140060082404A208B
L_{16}	E0006000C0030140060082404A204D
L_{17}	E0006000C0030140060082404A0A0B
L_{18}	E0006000C0030140060082404A0869
L_{19}	E0006000C00301400600824048A10D
L_{20}	E0006000C00301400600824048A08E
L_{21}	E0006000C003014006008240488A23
L_{22}	E0006000C003014006008240488929
L_{23}	E0006000C00301101200844040D05C
L_{24}	E0006000C00301101200844040C531
L_{25}	E0006000C003011012008440409958
L_{26}	E0006000C003011012008140520471
L_{27}	E0006000C00301101200814050905C
L_{28}	E0006000C003011012008140461849
Nastavak na sledećoj strani	

Tabela 3 – nastavak

Graf	Heksadecimalna reprezentacija
L_{29}	E0006000C003011012008140460C4C
L_{30}	E0006000C003011012008140449454
L_{31}	E0006000C003011012008060851641
L_{32}	E0006000C003011012008060849681
L_{33}	E0006000C003011003004126030429
L_{34}	E0006000C003011003004124428470
L_{35}	E00018000C000C0110048008018080305286300
L_{36}	E00018000C000C011004800801802091128C050
L_{37}	E00018000C000C011004800801802091124C108
L_{38}	E00018000C000C01100480080180209110CC140
L_{39}	E00018000C000C01100480080180209090CC300
L_{40}	E00018000C000C0110048008018020903258220
L_{41}	E00018000C000C011004800801802019224A880
L_{42}	E00018000C000C011000C004048500604082660
L_{43}	E00018000C000C011000C004048500602048A88
L_{44}	E00018000C000C011000C004048500304082740
L_{45}	E00018000C000C011000C004048441204082660
L_{46}	E00018000C000C011000C004048441202104A48
L_{47}	E00018000C000C011000C004048441202082A60
L_{48}	E00018000C000C011000C00404844030408A640
L_{49}	E00018000C000C011000C004048421402104A48
L_{50}	E00018000C000C011000C004048421402102A88
L_{51}	E00018000C000C011000C004048421402044B08
L_{52}	E00018000C000C011000C004048420501106C40
L_{53}	E00018000C000C011000C004048221109002C90
L_{54}	E00018000C000C011000C00404822018A00CA40
L_{55}	E00018000C000C011000C0040481201860A0340
L_{56}	E00018000C000C0018006028048420900083118
L_{57}	E00018000C000C001800602800C280182202860
L_{58}	E000060000C0003001100030004003024044030080864A08
L_{59}	E000060000C0003001100030004003024044030080864910
L_{60}	E000060000C0003001100030004003024044018100922C04
L_{61}	E000060000C0003001100030004003024044018100922540
Nastavak na sledećoj strani	

Tabela 3 – nastavak

Graf	Heksadecimalna reprezentacija
L_{62}	E000060000C0003001100030004003024044018042122540
L_{63}	E000060000C000300110003000400302400602808A0A1804
L_{64}	E000060000C000300110003000400302400602804C0A2404
L_{65}	E000060000C00030011000300040030240060280430A2900
L_{66}	E000060000C00030011000300040030210420288008A2910
L_{67}	E000060000C00030011000300040030210420280500A2C04
L_{68}	E000060000C00030011000300040030210420280500A2910
L_{69}	E000060000C0003001100030004003021012030090860A08
L_{70}	E000060000C000300110003000400302101202804A0A2804
L_{71}	E000060000C0003001100030004003021003030051068500
L_{72}	E000060000C00030011000300040030018018289088A2800
L_{73}	E000060000C0003000180018028003024028020101028238
L_{74}	E000060000C0003000180018028003024024010080A042A4
L_{75}	E000060000C000300018001802800302400C020101420238
L_{76}	E000060000C0003000180018028003024006008044480330
L_{77}	E000060000C0003000180018028003024006008044282130
L_{78}	E000060000C000300018001802800300500A020882220034
L_{79}	E000060000C0003000180018022009022006020082422130
L_{80}	E000060000C0003000180018022009022006020082123110
L_{81}	E000060000C0003000180018022009021012008402121150
L_{82}	E000060000C0003000180018022009021003010400C48228
L_{83}	E0000180000C0000C00018000600220024021008800801004028541424
L_{84}	E0000180000C0000C00018000600220024001800602002820121850900
L_{85}	E0000180000C0000C000180006002200240018006020028200A1890900
L_{86}	E0000180000C0000C00018000600220006010800600814041080840912
L_{87}	E00000600000C00003000018000180022000180108009000400A002006 060118C0840
L_{88}	E00000600000C000030000180001800220001801080018002009001202 41200C20250
L_{89}	E00000600000C0000300001800018002200018000C000C001010888042 11401401021
L_{90}	E00000600000C000030000180001800030000C00060006088022088088 04022008411
Nastavak na sledećoj strani	

Tabela 3 – nastavak

Graf	Heksadecimalna reprezentacija
L_{91}	E000001800000C00000C00001800006000030000300006000180880088 088022002004010081089090
L_{92}	E0000006000000C00000300000180000180000300000C0000600006008 0800840404010800210400228004201408404
M	F0000380003800070001C124049000708805284242242180

Glava 2

Regularni bipartitni grafovi

U ovoj glavi bavimo se regularnim bipartitnim grafovima. Na početku razmatramo takve grafove sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti. Izvodimo neke njihove strukturalne i spektralne osobine, a posebno ispitujeemo i njihovu vezu sa određenim vrstama blok-šema. Predstavljamo nekoliko uslova pod kojima regularni bipartitni grafovi sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti moraju biti grafovi incidencije navedenih blok-šema. Na osnovu tih zaključaka dajemo nekoliko mogućih konstrukcija takvih grafova i određujemo sve one čiji je stepen 3, kao i one čiji je red najviše 20.

Dalje, kao i u prethodnoj glavi, razmatramo vezu određenih strukturalnih osobina (dijametra, stepena i reda) regularnih bipartitnih grafova i njihove druge sopstvene vrednosti.

Posebno ispitujeemo regularne bipartitne grafove čiji je struk veći od 4 i izvodimo spektralne uslove pod kojima su takvi grafovi grafovi incidencije određenih blok-šema. Takođe dajemo i uslove pod kojima su regularni bipartitni grafovi čiji je struk veći od 4 razdaljinsko regularni.

Na kraju određujemo sve regularne bipartitne refleksivne grafove.

Rezultati predstavljeni u ovoj glavi mogu se naći u radovima [50] (Poglavlje 2.2), [47] (Poglavlje 2.3), [48] (Poglavlje 2.4) i [52] (Poglavlje 2.5).

2.1 Postavka problema i pregled poznatih rezultata

Povezani regularni grafovi sa malim brojem različitih sopstvenih vrednosti predmet su mnogih istraživanja. Regularni grafovi sa najviše tri različite sopstvene vrednosti ili su kompletni ili jako regularni grafovi (videti [17]). Takođe je poznato da svaki povezan regularan bipartitni graf sa četiri različite sopstvene vrednosti mora biti graf incidencije simetrične uravnotežene blok-šeme (videti [20], str. 166). Regularne nebipartitne grafove sa četiri različite sopstvene vrednosti proučavali su Van Dam i Spens u radovima [27] i [32], u kojima su date brojne karakterizacije i

konstrukcije takvih grafova i određeni svi oni čiji red nije veći od 30.

Sledeći prirodan korak je istraživanje klase regularnih grafova sa pet ili šest različitih sopstvenih vrednosti. U ovoj disertaciji razmatramo potklasu te klase, to jest regularne bipartitne grafove sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti. Kombinatorne šeme sa dve singularne sopstvene vrednosti, konstantnom replikacijom i konstantnom veličinom blokova (parcijalne geometrijske šeme) proučavali su Van Dam i Spens u [33]. Grafovi incidencije takvih šema su semiregularni ili regularni (u slučaju simetričnih šema) bipartitni grafovi sa četiri ili pet različitih sopstvenih vrednosti. Takođe, D. Stevanović je u [67] dao dve spektralne karakterizacije regularnih bipartitnih grafova sa pet različitih sopstvenih vrednosti. Proširujemo pomenuta istraživanja na regularne bipartitne grafove sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti, predstavljamo nova opšta tvrđenja i razmatramo neke posebne slučajeve.

Kao što smo već pomenuli u Poglavlju 1.1, druga sopstvena vrednost regularnog grafa postala je predmet interesovanja zbog svoje veze sa drugim grafovskim invarijantama (na primer, algebarskom povezanošću, dijametrom, strukom itd.). Pregled radova koji se odnose na istraživanja o drugoj sopstvenoj vrednosti regularnih grafova može se videti u Dodatku B.5 monografije [20]. U ovoj glavi dajemo nejednakosti koje povezuju red, stepen i drugu sopstvenu vrednost regularnih bipartitnih grafova, a potom i neke njihove direktne posledice. Posebno razmatramo odnos druge sopstvene vrednosti regularnih bipartitnih grafova čiji je struk veći od 4 i nekih njihovih strukturalnih osobina.

Među grafovima čija je druga sopstvena vrednost ograničena nekom (relativno) malom konstantom, posebnu ulogu imaju refleksivni grafovi. Njihov značaj se ogleda u direktnoj primeni na konstrukciju i klasifikaciju grupa refleksija. Najveći deo teorijskih rezultata o refleksivnim grafovima odnosi se na stabla i stablolike grafove (videti [60], ili monografiju [58], i odgovarajuće reference). U poslednjem poglavlju ove glave određujemo sve regularne bipartitne refleksivne grafove.

Sada definišemo pojmove i oznake koje koristimo u ovoj glavi.

Jediničnu matricu, matricu čiji su svi elementi 1 i matricu čiji su svi elementi 0 označavamo redom sa I , J , i 0 (ukoliko bude potrebno, biće data i dimenzija odgovarajuće matrice). S obzirom da je red regularnog bipartitnog grafa paran broj, smatramo da razmatrani grafovi imaju $2n$ čvorova. Takođe, budući da je spektar bipartitnog grafa simetričan u odnosu na nulu, često je pogodno razmatrati samo prvih (po veličini) n sopstvenih vrednosti.

*Bipartitni komplement*¹ bipartitnog grafa G sa dve klase obojivosti U i W jeste

¹Engl. *bipartite complement*.

bipartitni graf $\overline{\overline{G}}$ koji ima iste klase obojivosti kao i G i granu između U i W tačno tamo gde u grafu G ona ne postoji. Ako je G r -regularan bipartitni graf reda $2n$, čija je matrica susedstva

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & N \\ N^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

tada je $\overline{\overline{G}}$ $(n - r)$ -regularan bipartitni graf, čija je matrica susedstva

$$A_{\overline{\overline{G}}} = \begin{pmatrix} 0 & J - N \\ J - N^T & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Jednostavno je uveriti se da karakteristični polinomi grafova G i $\overline{\overline{G}}$ zadovoljavaju jednakost

$$\frac{P_G(x)}{x^2 - r^2} = \frac{P_{\overline{\overline{G}}}(x)}{x^2 - (n - r)^2},$$

pa su, osim sopstvenih vrednosti $\pm r$ grafa G i $\pm(n - r)$ grafa $\overline{\overline{G}}$, spektri grafova G i $\overline{\overline{G}}$ isti. (Ovaj rezultat je direktna posledica Teoreme 4.1 rada [68]).

Ako je G graf sa matricom susedstva A , tada je njegov *bipartitni dvojniki*², $\text{bd}(G)$, graf čija je matrica susedstva $(J_2 - I_2) \otimes A$, gde \otimes označava standardni tenzorski proizvod. (Primetimo da je u literaturi $\text{bd}(G)$ predstavljen i kao Dekartov proizvod grafa G i K_2 (videti [20])). Bipartitni dvojniki je bipartitan, a takođe je i povezan ako i samo ako je G povezan i ne bipartitan. Ukoliko G ima spektrar Φ (setimo se da je spektrar grafa multiskup, odnosno familija realnih brojeva), tada $\text{bd}(G)$ ima spektrar $(-\Phi) \cup \Phi$ (videti [14], Teorema 1.11.1).

Ako je G graf sa matricom susedstva A , tada je njegov *prošireni bipartitni dvojniki*³, $\text{ebd}(G)$, graf čija je matrica susedstva $(J_2 - I_2) \otimes (A + I)$. Prošireni bipartitni dvojniki je bipartitan, a takođe je i povezan ako i samo ako je G povezan. Ukoliko G ima spektrar Φ , tada $\text{ebd}(G)$ ima spektrar $(-\Phi - 1) \cup (\Phi + 1)$ (videti [14], Teorema 1.11.2).

Povezan graf zove se *razdaljinsko regularan*⁴ ako postoje celi brojevi $b_i, c_i, i \geq 0$ takvi da za bilo koja dva čvora u i v na rastojanju i postoji tačno c_i suseda čvora v na rastojanju $i - 1$ od u i b_i suseda čvora v na rastojanju $i + 1$ od u (videti [14]).

Ako je G povezan bipartitni graf, možemo definisati takozvani *prepolovljeni graf*⁵ grafa G , \tilde{G} , na sledeći način: čvorovi grafa \tilde{G} su čvorovi koji pripadaju jednoj od

²Engl. *bipartite double*.

³Engl. *extended bipartite double*.

⁴Engl. *distance-regular*.

⁵Engl. *halved graph*.

klasa obojivosti grafa G , i dva čvora su susedna u grafu \tilde{G} tačno onda kada su na rastojanju 2 u G . Poznato je da je prepolovljeni graf razdaljinsko regularnog grafa takođe razdaljinsko regularan (videti [14], Tvrdjenje 4.2.2).

Za graf G kažemo da je *ciklusno regularan*⁶ ako za svako $i \in \mathbb{N}$ broj zatvorenih puteva dužine i koji počinju i završavaju se u čvoru u grafa G ne zavisi od izbora čvora u (videti [39]). Budući da je broj zatvorenih puteva dužine i koji počinju i završavaju se u čvoru u jednak A_{uu}^i , gde je A matrica susedstva grafa G , vidimo da je graf G ciklusno regularan ako i samo ako matrica A^i ima konstantnu dijagonalu za svako $i \in \mathbb{N}$. Graf G je prost, pa sledi da je ciklusno regularan graf G regularan.

Neka je V konačan skup i neka je \mathcal{B} kolekcija podskupova skupa V , koji svi imaju isti broj elemenata. Uređen par (V, \mathcal{B}) zove se *blok-šema*⁷. Elementi skupova V i \mathcal{B} zovu se, redom, *tačke* i *blokovi*. *Replikacija* tačke $p \in V$ jeste broj blokova koji sadrže p , a *veličina bloka* B je broj elemenata skupa B . Neka je $V = \{p_1, p_2, \dots, p_v\}$ i $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_b\}$. *Matrica incidencije*⁸ blok-šeme (V, \mathcal{B}) jeste $v \times b$ matrica $N = (n_{ij})$, gde je $n_{ij} = 1$ ako važi $p_i \in B_j$, i $n_{ij} = 0$ ako važi $p_i \notin B_j$. Komplement blok-šeme čija je matrica incidencije N jeste blok šema sa matricom incidencije $J - N$ (dimenzija matrice J je, u ovom slučaju, naravno, $v \times b$). Ako je $v = b$, za blok-šemu kažemo da je *simetrična*. *Dualna* blok-šema šeme D sa matricom incidencije N jeste blok-šema D^* , čija je matrica incidencije N^T . Neka je N matrica incidencije blok-šeme i neka je N^T transponovana matrica matrice N . Tada je (2.1) matrica susedstva *grafa incidencije*⁹ blok-šeme. Prethodne definicije preuzete su iz monografije [19], u kojoj se može naći više detalja o različitim vrstama blok-šema. U slučaju regularnih bipartitnih grafova sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti jasno je da je odgovarajuća blok-šema simetrična, da ima konstantnu replikaciju r i konstantnu veličinu blokova b , kao i da pri tome važi $r = b$. Matrica incidencije takve blok-šeme zato zadovoljava jednačinu $N\mathbf{j} = N^T\mathbf{j} = r\mathbf{j}$, gde je \mathbf{j} vektor čije su sve koordinate jedinice. Takođe, matrica NN^T mora imati tri različite sopstvene vrednosti.

Delimično uravnotežena nekompletna blok-šema sa m ($m \geq 1$) klasa asocijacije (*m -klasna DUNBS*)¹⁰ jeste blok-šema u kojoj je v tačaka raspoređeno u b blokova veličine k , tako da:

⁶Engl. *walk-regular*.

⁷Engl. *block design*.

⁸Engl. *incidence matrix*.

⁹Engl. *incidence graph*.

¹⁰Engl. *partially balanced incomplete block design with m ($m \geq 1$) associate classes (m -class PBIBD)*.

1. Svaka od v tačaka pojavljuje se u tačno r blokova, i svaka tačka se pojavljuje najviše jednom u svakom bloku.
2. Postoji relacija asocijacije između svake dve od v tačaka koja zadovoljava sledeće uslove:
 - Svake dve tačke su ili prvi, ili drugi, ..., ili m -ti asocijati, i bilo koji par tačaka koje su s -ti asocijati zajedno se pojavljuje u tačno μ_s blokova ($s = 1, 2, \dots, m$).
 - Svaka tačka ima n_s s -tih asocijata.
 - Za bilo koji par tačaka koje su s -ti asocijati broj tačaka koje su istovremeno j -ti asocijati prve, i k -ti asocijati druge tačke jeste p_{jk}^s i ovaj broj je nezavisan od izbora para. Štaviše, važi $p_{jk}^s = p_{kj}^s$ ($j \neq k$; $s, j, k = 1, 2, \dots, m$).

U ovoj disertaciji uglavnom razmatramo dvoklasne simetrične DUNBŠ-e. Vidimo iz prethodne definicije da (ako važi $m = 2$) to jeste blok-šema sa konstantnom replikacijom i konstantnom veličinom blokova, te da njena matrica incidencije N zadovoljava jednačinu

$$NN^T = rI + \mu_1 A_H + \mu_2 (J - I - A_H), \quad (2.3)$$

gde je A_H matrica susedstva nekog jako regularnog grafa H , a μ_1 i μ_2 odgovarajući nenegativni celi brojevi. Obratno, blok-šema sa konstantnom replikacijom i konstantnom veličinom blokova, čija matrica susedstva zadovoljava jednačinu (2.3), mora biti dvoklasna DUNBŠ (videti [8] i [33]). Ako je $\mu_1 > \mu_2$ (odnosno $\mu_2 > \mu_1$), reći ćemo da je dvoklasna DUNBŠ čija matrica incidencije zadovoljava jednačinu (2.3) *zasnovana* na grafu H (odnosno \overline{H}).

Takođe, ako je N matrica incidencije povezane DUNBŠ-e sa dve klase asocijacije, tada matrica NN^T ima tačno tri različite sopstvene vrednosti (videti [8]).

Ukoliko je $m = 1$, važi $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. U ovom posebnom slučaju odgovarajuća blok-šema zove se *uravnotežena nekompletna blok-šema (UNBŠ)*¹¹. Ako je UNBŠ simetrična, važi $v = b$ i $r = k$, i kažemo da takva UNBŠ ima parametre (v, r, μ) . Red simetrične UNBŠ-e sa parametrima (v, r, μ) definiše se kao $r - \mu$.

Sada definišemo familiju dvoklasnih DUNBŠ-a, takozvane blok-šeme *deljive na grupe*¹² (skraćeno ćemo ih označavati sa *DG šeme*). Takva blok-šema je dvoklasna

¹¹Engl. *balanced incomplete block design (BIBD)*.

¹²Engl. *group divisible*.

DUNBŠ sa v tačaka, b blokova, konstantnom replikacijom r i konstantnom veličinom blokova k , čijih se v tačaka može podeliti na m grupa veličine l , tako da dve tačke koje pripadaju istoj grupi budu prvi asocijati (pojavljuju se zajedno u μ_1 blokova), a dve tačke koje pripadaju različitim grupama budu drugi asocijati (pojavljuju se zajedno u μ_2 blokova). U tom slučaju kažemo da DG šema ima parametre $(v = ml, b, r, k, m, l, \mu_1, \mu_2)$.

Transverzalna blok-šema, $TD_{\mu_2}(m, l)$, jeste DG šema u kojoj svaki blok sadrži tačno jednu tačku iz svake grupe ($\mu_1 = 0$), to jest, to je DG šema sa parametrima $(v = ml, b = l^2\mu_2, r = l\mu_2, k = m, m, l, \mu_1 = 0, \mu_2)$.

Upućujemo zainteresovanog čitaoca na knjige [42] i [19] jer se u njima može naći više detalja koji se odnose na teoriju blok-šema.

2.2 Regularni bipartitni grafovi sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti

U radu [67] dokazano je da svaki čvor regularnog bipartitnog grafa koji ima najviše šest različitih sopstvenih vrednosti pripada konstantnom broju četvorouglova tog grafa. Na početku ovog poglavlja uopštavamo taj rezultat i pokazujemo da takav graf u stvari mora biti ciklusno regularan. Takođe izvodimo neke osobine sopstvenih vrednosti povezanog regularnog bipartitnog grafa sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti. Razmatramo i odnos između regularnih bipartitnih grafova sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti i dvoklasnih delimično uravnoteženih nekompletnih blok-šema. Posebno se bavimo pitanjem da li je posmatrani povezan regularan bipartitni graf sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti graf incidencije dvoklasne DUNBŠ-e, i predstavljamo više slučajeva u kojima je odgovor pozitivan.

Prikazujemo i nekoliko posebnih familija povezanih regularnih bipartitnih grafova sa šest različitih sopstvenih vrednosti čija se konstrukcija zasniva na dvoklasnim i troklasnim DUNBŠ-ama. Na kraju određujemo sve povezane 3-regularne bipartitne grafove sa šest različitih sopstvenih vrednosti, kao i sve regularne bipartitne grafove sa šest različitih sopstvenih vrednosti reda ne većeg od 20.

2.2.1 Neka opšta svojstva regularnih bipartitnih grafova sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti

U ovom potpoglavlju izvodimo pojedine strukturalne karakterizacije, kao i određena svojstva sopstvenih vrednosti regularnih bipartitnih grafova sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti.

Poznato je da povezan regularan bipartitan graf sa tri različite sopstvene vrednosti mora biti regularan kompletni bipartitni graf (koji takođe nazivamo i bikompletni graf), pa je stoga takav graf i ciklusno regularan. Takođe, povezan regularan bipartitan graf sa četiri različite sopstvene vrednosti jeste razdaljinsko regularan, pa sledi da mora biti i ciklusno regularan. Neka je A matrica susedstva povezanog regularnog bipartitnog grafa G reda $2n$ koji ima tri različite nenegativne sopstvene vrednosti. Tada je pogodno posmatrati samo n najvećih sopstvenih vrednosti. Ova polovina spektra sastoji se od tačno 3 različita nenegativna broja, $\lambda_1 = r$, λ_2^k i λ_3^m , gde k i m označavaju višestrukosti, i važi $r > \lambda_2 > \lambda_3 \geq 0$. Takođe, ovi grafovi imaju 5 ili 6 različitih sopstvenih vrednosti, u zavisnosti od toga da li važi $\lambda_3 = 0$ ili ne; u prvom slučaju višestrukost sopstvene vrednosti $\mu_3 = 0$ jednaka je $2m$, dok u drugom slučaju k i m označavaju višestrukosti odgovarajućih sopstvenih vrednosti u čitavom spektru grafa G .

Uočimo Hofmanov (*A.J. Hoffman*) polinom grafa G (videti [44], ili [20], Teorema 3.25). Važi:

$$J = \frac{n(A^2 - \lambda_2^2 I)(A^2 - \lambda_3^2 I)(A + rI)}{r(r^2 - \lambda_2^2)(r^2 - \lambda_3^2)}.$$

Graf G je bipartitan, pa se Hofmanov polinom može podeliti na dva dela, deo sa parnim stepenima i deo sa neparnim, pa je:

$$A^4 - (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)A^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 I = \frac{(r^2 - \lambda_2^2)(r^2 - \lambda_3^2)}{n} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Budući da je G regularan, matrica A^2 ima konstantnu dijagonalu, kao i I i J , pa sledi da A^{2l} ima konstantnu dijagonalu za svako $l \in \mathbb{N}$. Graf G je bipartitan, pa je zato broj zatvorenih puteva neparne dužine koji počinju i završavaju se u proizvoljnom čvoru jednak 0, dakle G je ciklusno regularan. Na ovaj način smo dokazali sledeću teoremu.

Teorema 2.1 *Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti. Tada je G ciklusno regularan.*

Neka je (2.1) matrica susedstva r -regularnog bipartitnog grafa G sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti. Sopstvene vrednosti matrica NN^T i N^TN jednake su i imaju iste višestrukosti. Te sopstvene vrednosti jednake su kvadratima sopstvenih vrednosti matrice A . Neka je $\sigma_1 = \lambda_2^2$ i $\sigma_2 = \lambda_3^2$. Označimo sa M minimalni polinom, a sa C karakteristični polinom matrice A . Pretpostavimo da važi $k > m$. Neka je $P(x) = \frac{M(x)}{x^2 - r^2} = (x^2 - \sigma_1)(x^2 - \sigma_2)$, i $Q(x) = \frac{C(x)}{M(x)} = (x^2 - \sigma_1)^{m-1}(x^2 - \sigma_2)^{k-1}$. Budući da je $C(x) \in \mathbb{Z}[x]$ i $M(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (videti [27], Lema 2.5), važi $P(x), Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$, pa je $\frac{Q(x)}{(P(x))^{m-1}} = (x^2 - \sigma_2)^{k-m} \in \mathbb{Z}[x]$. Dakle, σ_1 i σ_2 su (nenegativni) celi brojevi.

Slučaj $m > k$ razmatramo na isti način (zamenjujući mesta brojevima σ_1 i σ_2). Ako važi $k = m$, tada je $\sigma_1\sigma_2 \in \mathbb{Z}$, i $\sigma_1 + \sigma_2 \in \mathbb{Z}$, odakle sledi da su oba broja σ_1, σ_2 celi, ili su oba oblika $\frac{a \pm \sqrt{b}}{2}$ za neke cele brojeve a i b , za koje važi $a^2 > b$. U drugom slučaju, budući da su višestrukosti sopstvenih vrednosti jednake, red grafa G mora biti $2(2k + 1)$. Primetimo da, ako je G regularan bipartitan graf sa pet različitih sopstvenih vrednosti, važi $\sigma_2 = 0$, pa je druga sopstvena vrednost grafa G prirodan broj, ili je oblika \sqrt{a} za neki prirodan broj a . Ukoliko je red regularnog bipartitnog grafa G sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti jednak $2n$, posmatrajmo njegove spektralne momente. Budući da je graf šetnja regularan, važi:

$$\begin{aligned} 1 + k + m &= n, \\ r^2 + k\sigma_1 + m\sigma_2 &= nr. \end{aligned}$$

Iz ove dve jednačine sledi još jedno svojstvo regularnih bipartitnih grafova sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti: višestrukosti sopstvenih vrednosti određene su sopstvenim vrednostima i brojem čvorova. Međutim, samo sopstvene vrednosti ne određuju višestrukosti, što potvrđuju Frenklinov (*P. Franklin*) graf koji ima 12 čvorova i spektar $\{\pm 3, \pm\sqrt{3}^2, \pm 1^3\}$, i Mebijus–Kantorov graf koji ima 16 čvorova i spektar $\{\pm 3, \pm\sqrt{3}^4, \pm 1^3\}$.

Navodimo još dve osobine sopstvenih vrednosti regularnih bipartitnih grafova sa šest različitih sopstvenih vrednosti koje su posledica prethodnih razmatranja, a koristićemo ih u ovom poglavlju.

Teorema 2.2 *Neka je G povezan r -regularan bipartitan graf reda $2n$ sa šest različitih sopstvenih vrednosti i neka su $\sigma_1 > \sigma_2$ kvadrati dve sopstvene vrednosti (različite od $\pm r$) grafa G . Tada važi $\sigma_2 < r$.*

Dokaz. Pretpostavimo da druga sopstvena vrednost grafa G ima višestrukost k , $k \in \mathbb{N}$. Tada je: $nr = r^2 + k\sigma_1 + (n - k - 1)\sigma_2$, pa je $n(r - \sigma_2) = r^2 + k(\sigma_1 - \sigma_2) - \sigma_2 > r^2 - \sigma_2 > 0$, odakle sledi $r > \sigma_2$. ■

Teorema 2.3 *Neka je G povezan r -regularan bipartitan graf reda $2n$ sa šest različitih sopstvenih vrednosti i neka su $\sigma_1 > \sigma_2$ kvadrati dve sopstvene vrednosti (različite od $\pm r$) grafa G . Ako su σ_1 i σ_2 oblika $\frac{a \pm \sqrt{b}}{2}$, za neke cele brojeve a i b (za koje važi $a^2 > b$), tada je $a = 2\frac{r(n-r)}{n-1}$.*

Dokaz. Budući da važi $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, sledi da je: $rn = r^2 + ka$, dakle $a = \frac{r(n-r)}{k} = 2\frac{r(n-r)}{n-1}$. ■

2.2.2 Regularni bipartitni grafovi sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti i dvoklasne simetrične DUNBŠ-e

U ovom potpoglavlju razmatramo vezu između regularnih bipartitnih grafova sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti i dvoklasnih simetričnih DUNBŠ-a, to jest, koja dodatna svojstva garantuju da takav regularni graf jeste graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e.

Počecemo sa lemom.

Lema 2.1 *Ako je D dvoklasna DUNBŠ zasnovana na jako regularnom grafu H , tada je njen komplement takođe dvoklasna DUNBŠ zasnovana na istom jako regularnom grafu.*

Dokaz. Označimo sa N $n \times m$ matricu incidencije dvoklasne DUNBŠ-e D , sa r njenu konstantnu replikaciju i sa A matricu susedstva grafa H . Tada je: $NN^T = rI_n + \mu_1 A + \mu_2(J_n - I_n - A)$ za neke nenegativne cele brojeve $\mu_1 > \mu_2$. Komplementarna šema ima matricu incidencije $J_{n \times m} - N$. Jednostavno je videti da važi: $(J_{n \times m} - N)(J_{n \times m} - N)^T = (J_{n \times m} - N)(J_{n \times m}^T - N^T) = J_{n \times m} J_{n \times m}^T - J_{n \times m} N^T - N J_{n \times m}^T + NN^T = (n-r)I_n + (n-2r+\mu_1)A + (n-2r+\mu_2)(J_n - I_n - A)$. Drugim rečima, matrica incidencije komplementa dvoklasne DUNBŠ-e D zadovoljava jednačinu (2.3) (za pogodno izabrane parametre). Takođe, komplement DUNBŠ-e D ima konstantnu veličinu blokova (jer D ima konstantnu veličinu blokova) i konstantnu replikaciju $n - r$. Dakle, komplement DUNBŠ-e D je takođe dvoklasna DUNBŠ zasnovana na istom jako regularnom grafu kao i D . ■

Iz prethodne leme sledi da je bipartitni komplement regularnog bipartitnog grafa sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti koji je graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e takođe graf incidencije (komplementarne) dvoklasne simetrične DUNBŠ-e.

Setimo se da razdaljinsko regularan bipartitni graf sa četiri različite sopstvene vrednosti mora biti graf incidencije neke simetrične UNBŠ-e. U sledećoj teoremi posmatramo razdaljinsko regularne bipartitne grafove sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti.

Teorema 2.4 *Neka je G razdaljinsko regularan bipartitni graf sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti. Tada je G graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na (jako regularnom) prepolovljenom grafu grafa G .*

Dokaz. Neka je (2.1) matrica susedstva grafa G . Budući da je G razdaljinsko regularan i da ima tri različite nenegativne sopstvene vrednosti, njegov dijametar je 5 ili 4, pa su dva čvora koji pripadaju istoj klasi obojivosti na rastojanju 4 (u tom slučaju je broj njihovih zajedničkih suseda jednak nuli), ili 2. Primetimo takođe da je broj zajedničkih suseda dva čvora koji su na rastojanju 2 u G konstantan, i označimo taj broj sa c . Na osnovu ovih činjenica sledi da je $NN^T = rI + cB$, gde je B matrica susedstva prepolovljenog razdaljinsko regularnog grafa \tilde{G} grafa G . Po pretpostavci, NN^T ima tačno tri različite sopstvene vrednosti, pa i B ima tačno tri različite sopstvene vrednosti, odakle sledi da je \tilde{G} jako regularan graf. Ovim je dokaz završen. ■

Poznato je da u regularnom bipartitnom grafu sa pet različitih sopstvenih vrednosti druga sopstvena vrednost ne može biti prosta, to jest višestrukosti jedan (videti [33]). Sada ćemo videti da to ne važi ako je u pitanju regularan bipartitni graf sa šest različitih sopstvenih vrednosti. Takav graf može imati prostu sopstvenu vrednost različitu od $\pm r$, i zapravo, ako je to slučaj, ta prosta sopstvena vrednost mora biti druga.

Teorema 2.5 *Neka je G povezan r -regularan bipartitan graf reda $2n$ sa šest različitih sopstvenih vrednosti, od kojih je jedna, različita od $\pm r$, prosta. Tada je ta sopstvena vrednost druga po veličini, n je paran broj, i G je graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na disjunktnoj uniji dva kompletna grafa sa $\frac{n}{2}$ čvorova.*

Dokaz. Spektralna dekompozicija matrice NN^T je: $NN^T = \frac{r^2}{n}J + \sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2$, gde su $\sigma_1 > \sigma_2$ kvadrati dve različite sopstvene vrednosti grafa G (koje su različite od $\pm r$).

Pretpostavimo prvo da je σ_1 prosta sopstvena vrednost matrice NN^T (odnosno da je λ_2 prosta sopstvena vrednost grafa G). Ortogonalne projekcije P_i , $1 \leq i \leq 2$, imaju konstantnu dijagonalu jer se mogu predstaviti kao linearna kombinacija

jedinične matrice i matrica NN^T i $(NN^T)^2$, koje na osnovu Teoreme 2.1 imaju konstantnu dijagonalu. Važi $P_1 = v_1 v_1^T$, gde je v_1 sopstveni vektor koji pripada ortonormiranoj bazi sopstvenih vektora matrice NN^T , i koji odgovara sopstvenoj vrednosti σ_1 . P_1 je matrica ranga jedan sa konstantnom dijagonalom $\frac{1}{n}$, pa su njeni elementi van dijagonale jednaki $\pm\frac{1}{n}$. S obzirom da je zbir elemenata u vrstama matrice P_1 jednak nuli, zaključujemo da je n paran broj. Odatle sledi i da su elementi van dijagonale matrice P_2 jednaki 0 ili $-\frac{2}{n}$, a kako je zbir u svakoj vrsti (i koloni) matrice P_1 (i P_2) jednak nuli, postoji permutaciona matrica \hat{P} takva da je:

$$\hat{P}P_1\hat{P} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} J & -J \\ -J & J \end{pmatrix},$$

i

$$\hat{P}P_2\hat{P} = -\frac{2}{n} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \hat{P}NN^T\hat{P} &= \frac{r^2}{n} \begin{pmatrix} J & J \\ J & J \end{pmatrix} + \frac{\sigma_1}{n} \begin{pmatrix} J & -J \\ -J & J \end{pmatrix} - \\ &\quad - \frac{2\sigma_1}{n} \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} + \sigma_2 \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \\ &\quad r \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + (r - \sigma_2) \begin{pmatrix} J - I & 0 \\ 0 & J - I \end{pmatrix} + \frac{r^2 - \sigma_1}{n} \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Važi da je $nr = r^2 + \sigma_1 + (n-2)\sigma_2$, pa je $r - \sigma_2 = \frac{r^2 + \sigma_1 - 2\sigma_2}{n} > 0$, i $r - \sigma_2 > \frac{r^2 - \sigma_1}{n}$. Matrica $\hat{P}NN^T\hat{P}$ je celobrojna, i r i $r - \sigma_2$ su celi brojevi, pa je $\frac{r^2 - \sigma_1}{n}$ takođe ceo broj. Sada je jasno da je N matrica incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na disjunktnoj uniji dva kompletna grafa sa $\frac{n}{2}$ čvorova, u kojoj su tačke koje odgovaraju čvorovima u istom kompletnom grafu sadržane u $\mu_1 = r - \sigma_2$ blokova, a tačke koje odgovaraju čvorovima iz različitih kompletnih grafova sadržane u $\mu_2 = \frac{r^2 - \sigma_1}{n}$ blokova.

Pretpostavimo sada da je σ_2 prosta sopstvena vrednost matrice NN^T . Na isti način kao i u prethodnom slučaju može se pokazati da je N matrica incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na disjunktnoj uniji dva kompletna grafa sa $\frac{n}{2}$ čvorova, i da su brojevi $\mu_1 = r - \sigma_1$ i $\mu_2 = \frac{r^2 - \sigma_2}{n}$ celi. Odatle sledi da je broj $\frac{r^2 - \sigma_2}{n}$ deljiv brojem n . Iz $nr = r^2 + (n-2)\sigma_1 + \sigma_2$ sledi da je broj $(r^2 - \sigma_2) - 2(\sigma_1 - \sigma_2)$ takođe deljiv brojem n . Dakle, n deli $2(\sigma_1 - \sigma_2)$, pa je $\sigma_1 = k\frac{n}{2} + \sigma_2 > \frac{n}{2}$. Sada je $\frac{n^2}{4} > r(n-r) = (n-2)\sigma_1 + \sigma_2 > \frac{n}{2}(n-2)$, odakle sledi da je $n = 2$ ili $n = 4$, što je kontradikcija. ■

Ako ciklusno regularan bipartitni graf ima prostu sopstvenu vrednost λ različitu od $\pm r$, možemo reći nešto više o njegovoj strukturi. Takav graf omogućava takozvanu *regularnu podelu na dva jednaka dela* sa stepenima $(\frac{1}{2}(r + \lambda), \frac{1}{2}(r - \lambda))$, odnosno, čvorovi takvog grafa mogu se podeliti na dva dela jednake veličine tako da svaki čvor ima $\frac{1}{2}(r + \lambda)$ suseda u delu kojem pripada i $\frac{1}{2}(r - \lambda)$ suseda u drugom delu (videti Teoremu 3.3, [27]). Odatle sledi da je broj λ ceo broj oblika $r - 2\alpha$ za neki ceo broj α , što su dokazali Godsil (*C.D. Godsil*) i Makej (*B.D. McKay*) (videti [39]).

Teorema 2.6 *Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti, i neka G ne sadrži četvorouglove. Tada je G graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e.*

Dokaz. Budući da je struk grafa G najmanje 6, dva čvora mogu imati najviše jednog zajedničkog suseda, pa je $NN^T = rI + A$, gde je A matrica susedstva $(r^2 - r)$ -regularnog grafa. Graf A ima tačno tri različite sopstvene vrednosti zato što matrica NN^T ima tri različite sopstvene vrednosti, pa je A jako regularan graf. ■

Posledica 2.1 *Neka je G povezan r -regularan bipartitan graf reda $2n$ sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti, i neka su $\sigma_1 > \sigma_2 \geq 0$ kvadrati dve različite sopstvene vrednosti grafa G (različite od $\pm r$). Ako važi*

$$(\sigma_1 + \sigma_2 - 2r + 1)r - \sigma_1\sigma_2 + \frac{(r^2 - \sigma_1)(r^2 - \sigma_2)}{n} = 0,$$

G je graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e.

Dokaz. Broj trivijalnih zatvorenih puteva (onih koji ne sadrže konturu) dužine 4 koji sadrže proizvoljan čvor grafa G jeste $2r^2 - r$. Ukupan broj zatvorenih puteva dužine 4 koji sadrže proizvoljan čvor i jeste A_{ii}^4 , gde je A matrica susedstva grafa G . Budući da je G ciklusno regularan, A^4 ima konstantnu dijagonalu, pa je broj netrivialnih zatvorenih puteva koji sadrže proizvoljan čvor $(\sigma_1 + \sigma_2)r - \sigma_1\sigma_2 + \frac{(r^2 - \sigma_1)(r^2 - \sigma_2)}{n} - 2r^2 + r$, a taj broj je po pretpostavci jednak nuli. Rezultat sada sledi na osnovu prethodne teoreme. ■

Ovde možemo pomenuti još jednu spektralnu osobinu koja važi u razmatranoj klasi grafova, a koju ćemo koristiti u nastavku ovog poglavlja. Naime, broj četvorouglova koji sadrže proizvoljan čvor jednog takvog grafa jednak je polovini netrivialnih zatvorenih puteva dužine 4 koji sadrže taj čvor, pa zato broj $(\sigma_1 + \sigma_2 - 2r + 1)r - \sigma_1\sigma_2 + \frac{(r^2 - \sigma_1)(r^2 - \sigma_2)}{n}$ mora biti paran. Slično, broj netrivialnih zatvorenih puteva dužine 6 koji sadrže proizvoljan čvor razmatranog grafa takođe mora biti paran broj. Broj takvih puteva jednak je razlici između ukupnog broja zatvorenih

puteva dužine 6 koji sadrže proizvoljan čvor i broja trivijalnih zatvorenih puteva dužine 6 koji sadrže taj čvor. Jednostavno se može izračunati da je broj trivijalnih zatvorenih puteva dužine 6 koji sadrže proizvoljni čvor jednak $r(5r^2 - 6r + 2)$. Sada zaključujemo da broj $\frac{r^6 + k\sigma_1^3 + (n-k-1)\sigma_2^3}{n} - r(5r^2 - 6r + 2)$, gde k označava višestrukost druge sopstvene vrednosti razmatranog grafa, mora biti nenegativan paran ceo broj.

U radu [33] je dokazano da, pod određenim uslovima, blok-šema sa dve singularne vrednosti, konstantnom replikacijom i konstantnom veličinom blokova (*parcijalna geometrijska šema*¹³), mora biti takozvana *posebna*¹⁴ DUNBŠ. Ovde ćemo iskoristiti ideju tog dokaza i videti da slično tvrđenje važi i za regularne bipartitne grafove sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti.

Teorema 2.7 *Neka je G povezan r -regularan bipartitan graf reda $2n$ sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti, i neka je (2.1) matrica susedstva grafa G . Neka su $\sigma_1 > \sigma_2$ kvadrati dve različite sopstvene vrednosti grafa G (različite od $\pm r$). Ako postoje nenegativni celi brojevi μ_1 i μ_2 takvi da važi*

$$\begin{aligned} (\sigma_1 + \sigma_2)r - \sigma_1\sigma_2 + \frac{(r^2 - \sigma_1)(r^2 - \sigma_2)}{n} - r^2 + \mu_2((n-1)\mu_2 - 2r(r-1)) = \\ = (\mu_1 - \mu_2)(r(r-1) - \mu_2(n-1)), \end{aligned}$$

i da je svaki element matrice $Y = NN^T - rI - \mu_2(J - I)$ umnožak broja $\mu_1 - \mu_2$, tada je G graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e.

Dokaz. Uočimo matricu $Y^2 = (NN^T)^2 + r^2I + \mu_2^2(J - I)^2 - 2rNN^T - 2\mu_2NN^T(J - I) + 2r\mu_2(J - I)$. Elementi dijagonale matrice Y^2 su:

$$Y_{ii}^2 = (\sigma_1 + \sigma_2)r - \sigma_1\sigma_2 + \frac{(r^2 - \sigma_1)(r^2 - \sigma_2)}{n} - r^2 + \mu_2((n-1)\mu_2 - 2r(r-1)),$$

i po pretpostavci važi $Y_{ii}^2 = (\mu_1 - \mu_2)(r(r-1) - \mu_2(n-1))$. Zbir elemenata u svakoj vrsti (i koloni) matrice Y jednak je $r^2 - r - \mu_2(n-1)$.

Budući da je, po pretpostavci, svaki element matrice Y umnožak broja $\mu_1 - \mu_2$, sledi $Y_{ij}^2 \geq (\mu_1 - \mu_2)Y_{ij}$. Jednakost u ovoj nejednakosti važi ako i samo ako je $Y_{ij} = 0$, ili $Y_{ij} = \mu_1 - \mu_2$. Sada važi $n(\mu_1 - \mu_2)(r(r-1) - \mu_2(n-1)) = \text{tr}(Y^2) = \sum_{i,j} (Y_{ij})^2 \geq \sum_{i,j} (\mu_1 - \mu_2)Y_{ij} = n(\mu_1 - \mu_2)(r(r-1) - \mu_2(n-1))$, dakle $Y_{ij} = 0$, ili $Y_{ij} = \mu_1 - \mu_2$, pa je $Y = (\mu_1 - \mu_2)A$, gde je A matrica susedstva regularnog grafa sa tri različite sopstvene vrednosti. Graf A je zato jako regularan graf. Sledi da je $NN^T = rI + \mu_1A + \mu_2(J - I - A)$, čime je dokaz završen. ■

¹³Engl. *partial geometric design*.

¹⁴Engl. *special*.

Primetimo da u prethodnoj teoremi mora važiti $\mu_1 \neq \mu_2$, inače je $NN^T = rI + \lambda_1(J - I)$, pa bi matrica NN^T imala samo dve različite sopstvene vrednosti, odnosno graf G bi tada bio graf incidencije simetrične UNBŠ-e, i broj njegovih različitih sopstvenih vrednosti bio bi četiri. Takođe, ako je $\mu_1 = \mu_2 + 1$, onda je pretpostavka da je svaki element matrice Y umnožak broja $\mu_1 - \mu_2$ automatski zadovoljena, pa dolazimo do sledećeg zaključka.

Posledica 2.2 *Neka je G povezan r -regularan bipartitan graf reda $2n$ sa tri različite nenegativne sopstvene vrednosti, i neka su $\sigma_1 > \sigma_2$ kvadrati dve različite sopstvene vrednosti grafa G (različite od $\pm r$). Ako postoji nenegativan ceo broj μ_2 , takav da je*

$$\begin{aligned} (\sigma_1 + \sigma_2)r - \sigma_1\sigma_2 + \frac{(r^2 - \sigma_1)(r^2 - \sigma_2)}{n} - r^2 + \mu_2((n-1)\mu_2 - 2r(r-1)) &= \\ &= r(r-1) - \mu_2(n-1), \end{aligned}$$

tada je G graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e, i važi $\mu_1 = \mu_2 + 1$.

Podsetimo čitaoca da je *konferencijski graf*¹⁵ jako regularan graf sa parametrima (n, r, e, f) koji zadovoljavaju: $r = \frac{n-1}{2}$, $e = \frac{n-5}{4}$ i $f = \frac{n-1}{4}$ (videti [17]). Jedna od osobina takvog grafa jeste da su višestrukosti dve sopstvene vrednosti različite od r jednake. Takođe, za konferencijski graf važi i $f = e + 1$.

Teorema 2.8 *Neka je G povezan r -regularan bipartitan graf reda $2n$ sa šest različitih sopstvenih vrednosti, i neka je jedna od njih iracionalan broj oblika $\frac{-1+\sqrt{b}}{2}$ (ili $\frac{-1-\sqrt{b}}{2}$) za neko $b \in \mathbb{N}$, i neka je stepen grafa G jednak $\frac{n-1}{2}$ (ili $\frac{n+1}{2}$). Tada je G graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e koja je zasnovana na odgovarajućem konferencijskom grafu.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da važi $r = \frac{n-1}{2}$. Ako je $\frac{-1+\sqrt{b}}{2}$ (ili $\frac{-1-\sqrt{b}}{2}$) sopstvena vrednost grafa G , tada je i $\frac{-1-\sqrt{b}}{2}$ (ili $\frac{-1+\sqrt{b}}{2}$) takođe njegova sopstvena vrednost (videti [27]). Budući da je G bipartitan i da ima tačno šest različitih sopstvenih vrednosti, njegove sopstvene vrednosti različite od $\pm r$ jesu $\frac{-1+\sqrt{b}}{2}$ i $\frac{1+\sqrt{b}}{2}$, a njihovi kvadrati su: $\sigma_1 = \frac{b+1}{4} + \frac{\sqrt{b}}{2}$ i $\sigma_2 = \frac{b+1}{4} - \frac{\sqrt{b}}{2}$. Imajući u vidu osobine sopstvenih vrednosti koje su navedene u prethodnom potpoglavlju, zaključujemo da je $b+1$ paran broj i da je $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Dakle, $(2k+1)k = k^2 + k\frac{b+1}{2}$, pa je $b = 2k+1 (= n)$. Takođe, broj $\sigma_1\sigma_2 = \frac{k^2}{4}$ mora biti prirodan, stoga je k paran, odnosno $k = 2l$ za neki prirodan broj l . Neka je $\mu_2 = l-1$. Tvrdjenje sada sledi na osnovu Posledice 2.2 (jako regularni graf na kojem je DUNBŠ zasnovana očigledno

¹⁵Engl. *conference graph*.

je konferencijski graf budući da su višestrukosti njegovih sopstvenih vrednosti koje su različite od $\pm r$ jednake).

Ako je stepen grafa G jednak $\frac{n+1}{2}$, tada je stepen njegovog bipartitnog komplementa $\frac{n-1}{2}$. Tvrđenje sada sledi na osnovu Leme 2.1. ■

Bipartitni dvojniki bilo kog jako regularnog ne bipartitnog grafa sa parametrima (n, r, e, f) za koje važi $f \neq r$ (to jest jako regularnog grafa koji nije izomorfan sa regularnim kompletnim multipartitnim grafom) naravno je r -regularan bipartitni graf reda $2n$ sa šest različitih sopstvenih vrednosti, a takođe je i graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na tom istom jako regularnom grafu, i važi $\mu_1 = e$ i $\mu_2 = f$. Budući da bipartitni dvojnici konferencijskog grafa sa parametrima $(n, \frac{n-1}{2}, \frac{n-5}{4}, \frac{n-1}{4})$ mora imati sopstvenu vrednost oblika $\frac{-1+\sqrt{n}}{2}$, važi sledeće tvrđenje.

Posledica 2.3 *Neka je G povezan r -regularan bipartitan graf reda $2n$ sa šest različitih sopstvenih vrednosti, kospektralan sa bipartitnim dvojnikom nekog konferencijskog grafa (ili sa bipartitnim komplementom bipartitnog dvojnika nekog konferencijskog grafa). Tada je G graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na (ne obavezno istom) konferencijskom grafu.*

Dokaz. Ukoliko n nije kvadrat prirodnog broja, tvrđenje sledi na osnovu Teoreme 2.8. Ako je n kvadrat prirodnog broja, neka je $\mu_2 = \frac{n-5}{4}$, i sada rezultat sledi na osnovu Posledice 2.2. ■

Primetimo da ako je A matrica susedstva samokomplementarnog konferencijskog grafa G , tada je matrica susedstva grafa $\text{ebd}(G)$ $(J_2 - I_2) \otimes (A + I)$. Nije teško videti da graf $\overline{\text{bd}(G)}$ ima matricu susedstva $(J_2 - I_2) \otimes (J - A)$, pa su zato grafovi $\text{ebd}(G)$ i $\overline{\text{bd}(G)}$ izomorfni. Na osnovu prethodne posledice, $\overline{\text{bd}(G)}$ je graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e, pa isto važi i za $\text{ebd}(G)$. Drugim rečima, prošireni bipartitni dvojnici bilo kog samokomplementarnog konferencijskog grafa jeste graf incidencije neke dvoklasne simetrične DUNBŠ-e. Na primer, ovo važi za bilo koji Pejlijev (*R. Paley*) graf budući da su Pejlijevi grafovi samokomplementarni konferencijski grafovi (ako je potrebno, za definiciju i svojstva ovih grafova videti [19]).

2.2.3 Konstrukcije regularnih bipartitnih grafova sa šest različitih sopstvenih vrednosti

Koristeći rezultate iz prethodna dva potpoglavlja, predstavljamo nekoliko familija regularnih bipartitnih grafova sa šest različitih sopstvenih vrednosti. Konstrukcije ovih grafova zasnovane su na nekim postojećim rezultatima iz literature, kao

i na nekim pojmovima koje koristimo samo u ovom potpoglavlju. Stoga pretpostavljamo da je čitalac upoznat sa nekim od ovih pojmova (kao što su, na primer, konferencijske matrice, Adamarovi turniri, itd.) – naravno, za svaki takav pojam dajemo i odgovarajuću referencu u literaturi.

Počinjemo sa najjednostavnijim Primerom 1. Grafovi opisani u Primerima 2–6 jesu grafovi incidencije različitih vrsta simetričnih DG šema. U Primeru 6 opisana je beskonačna familija grafova incidencije troklasnih simetričnih DUNBŠ-a.

Primer 1: Jednostavno se uočava da je bipartitni komplement disjunktne unije izomorfni grafova incidencije simetričnih UNBŠ-a uvek regularan bipartitni graf sa šest različitih sopstvenih vrednosti. Takođe, bipartitni dvojnici bilo kog jako regularnog ne bipartitnog grafa sa parametrima (n, r, e, f) , $f \neq r$, ili prošireni bipartitni dvojnici bilo kog jako regularnog grafa jeste regularan bipartitni graf sa šest različitih sopstvenih vrednosti.

Primer 2: Blok-šeme DG tipa za koje važi $r = \mu_1 + 1$ potpuno su okarakterisane pomoću Adamarovih turnira (videti [46]) i jako regularnih grafova, a takođe je poznato da one moraju biti simetrične i regularne (videti, na primer, [2]). Graf incidencije jedne takve blok-šeme (sa parametrima $v = ml = b$, $(m, l \geq 2)$, $r = k = \mu_1 + 1$, μ_2) uvek u spektru sadrži broj 1, sa višestrukošću $m(l - 1)$. Pretpostavimo da je N matrica incidencije DG blok-šeme D , za koju je $r = \mu_1 + 1$, i neka je G njen graf incidencije. Tada, prema [2] važi:

1. Ako je $l \geq 3$ i $\mu_2 \equiv 2 \pmod{l}$, tada je $N = I_m \otimes I_l + (J_m - I_m) \otimes J_l$. Jednostavno je videti da je graf G upravo bipartitni komplement m disjunktih kopija grafa koji je izomorfan sa kompletnim bipartitnim grafom reda $2l$ iz kojeg je uklonjeno jedno savršeno sparivanje, pa je spektar grafa G $\{\pm((m - 1)l + 1), \pm(l - 1)^{m-1}, \pm 1^{m(l-1)}\}$.
2. Ako je $l \geq 2$ i $\mu_2 \equiv 1 \pmod{l}$ (to jest, $v = b = ml$, $r = k = l(m - 1)/2 + 1$, $\mu_1 = l(m - 1)/2$, $\mu_2 = l(m - 3)/4 + 1$), postojanje blok-šeme ekvivalentno je postojanju Adamarovog turnira reda $m \equiv 3 \pmod{4}$. U ovom slučaju je $N = I_m \otimes I_l + H_m \otimes J_l$, gde je H_m matrica Adamarovog turnira. Graf incidencije G ovakve blok-šeme ima spektar $\{\pm(\frac{l(m-1)}{2} + 1), \pm\sqrt{1 + l^2\frac{m+1}{4} - l^{(m-1)}}, \pm 1^{m(l-1)}\}$.
3. Ako je $l = 2$ i μ_2 paran broj (to jest, $v = b = 2m$, $r = k = 2s + 1$, $\mu_1 = 2s$, $\mu_2 = \frac{2s^2}{m-1}$), postojanje blok-šeme ekvivalentno je postojanju jako regularnog grafa H sa parametrima $(m, s, x, x + 1)$, gde je $s^2 = (x + 1)(m - 1)$. U ovom slučaju je $\mu_2 = 2(x + 1)$, i $N = I_m \otimes I_2 + A \otimes J_2$, gde je A matrica susedstva grafa H . Graf incidencije G ovakve blok-šeme ima spektar

$\{\pm(2s+1), \pm\sqrt{1+l(2s-\frac{2s^2}{m-1})}^{(m-1)}, \pm 1^{m(l-1)}\}$. U ovom slučaju G je prošireni bipartitni dvojniki regularnog grafa čija je matrica susedstva $A \otimes J_2$, i koji ima četiri različite sopstvene vrednosti: $r = 2s > \lambda_2 = \sqrt{1+l(2s-\frac{2s^2}{m-1})}-1 > \lambda_3 = 0 > \lambda_4 = -\sqrt{1+l(2s-\frac{2s^2}{m-1})}-1$.

Primer 3: Uočimo regularnu DG blok-šemu sa parametrima $v = ml = b$, $l = 2$, gde je m paran broj, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \frac{m}{2} - 1$. Njena matrica incidencije N može se konstruisati na sledeći način: u konferencijskoj matrici C reda m (videti [19]), zamenimo svaki element koji je jednak nuli sa O_2 , svaki element koji je jednak $+1$ sa I_2 i svaki element koji je jednak -1 sa $J_2 - I_2$. Jednostavno se proverava da je matrica reda $2m \times 2m$ konstruisana na ovaj način matrica incidencije željene blok-šeme i da graf incidencije takve blok-šeme ima spektar $\{\pm(m-1), \pm\sqrt{m-1}^m, \pm 1^{(m-1)}\}$.

Primer 4: Geometrijski metod konstrukcije simetričnih regularnih DG blok-šema dat je u radu [63]: ako je s prost broj ili stepen prostog broja, postoji regularna simetrična DG blok-šema sa parametrima $v = b = s(s-1)(s^2+s+1)$, $m = s^2+s+1$, $l = s(s-1)$, $r = k = s^2$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$. Grafovi incidencije ovakvih blok-šema jesu regularni bipartitni grafovi sa šest različitih sopstvenih vrednosti i spektrom $\{\pm s^2, \pm s^{s(s+1)}, \pm\sqrt{s^{s^4-s^2-2s-1}}\}$. Na osnovu spektra ovakvog grafa zaključujemo da je njegov struk veći od 4 (videti i Posledicu 2.1).

Primer 5: Posmatrajmo regularnu simetričnu blok-šemu D sa v tačaka, konstantnom replikacijom r , tri različite sopstvene vrednosti: r , $\sigma_1 > \sigma_2$, gde je σ_1 višestrukosti jedan, i neka je N matrica incidencije blok-šeme D . Zaključujemo da je takva blok-šema DG tipa (naime, tačke se mogu podeliti u dve grupe veličine $\frac{v}{2}$, tako da su dve tačke koje pripadaju istoj grupi sadržane u $r - \sigma_2$ blokova, a dve tačke koje pripadaju različitim grupama u $\frac{r^2 - \sigma_1}{v}$ blokova). Takođe nije teško uočiti da takva blok-šema mora biti samodualna (videti [59]). Jasno je kako se može konstruisati blok-šema D sa navedenim osobinama: ona je komplement disjunktne unije dve simetrične UNBŠ-e koje imaju iste parametre, na primer (p, t, α) . Tada su parametri blok šeme D $v = b = 2p$, $r = k = 2p - t$, $m = 2$, $l = p$, $\mu_1 = 2(p - t) + \alpha$, $\mu_2 = 2(p - t)$. Graf incidencije G takve blok-šeme jeste bipartitni komplement disjunktne unije dva grafa incidencije tih simetričnih UNBŠ-a, pa je njegov spektar $\{\pm(2p - t), \pm t, \pm\sqrt{t - \alpha}^{2p-2}\}$.

Još su interesantnije četiri beskonačne familije samodualnih regularnih simetričnih DG blok-šema za koje je $m = 2$, i čiji su komplementi povezani (ove četiri familije su konstruisane u radu [59]). Grafovi incidencije G takvih blok-šema jesu regularni bipartitni grafovi sa šest različitih sopstvenih vrednosti, njihova druga

sopstvena vrednost je višestrukosti 1, i oba grafa G , kao i njegov bipartitni komplement, povezani su. Grafovi incidencije blok-šema koje pripadaju prvoj familiji opisanoj u [59] imaju spektar $\{\pm(q^2 + q), \pm q(q - 1), \pm q^{2q^3-2}\}$, a grafovi incidencije blok-šema koje pripadaju drugoj familiji opisanoj u istom radu spektar $\{\pm q^2(q^3 + q + 1), \pm q^2(q + \frac{1+\sqrt{5}}{2})(q + \frac{1-\sqrt{5}}{2}), \pm (q^2)^{2q^3-2}\}$, gde je q stepen prostog broja veći od dva. Preostale dve familije grafova mogu se dobiti uzimanjem bipartitnih komplementa grafova koji pripadaju već opisanim dvema familijama (pa su i njihovi spektri isti, sa izuzetkom stepena).

Primer 6: Ovde ćemo predstaviti familiju \mathcal{S} povezanih $(2k + 1)$ -regularnih bipartitnih grafova reda $8k$ ($k \geq 2$) sa šest različitih sopstvenih vrednosti, i čija druga sopstvena vrednost ima višestrukost 2. Da bismo ih konstruisali, uočimo matricu incidencije (neke blok-šeme) koja ima sledeći oblik:

$$N = \begin{pmatrix} I_k & J_k & O_k & J_k \\ J_k & I_k & J_k & O_k \\ J_k & O_k & I_k & J_k \\ O_k & J_k & J_k & I_k \end{pmatrix}.$$

Sada je:

$$\begin{aligned} NN^T &= \begin{pmatrix} I_k + 2kJ_k & 2J_k & (k+1)J_k & (k+1)J_k \\ 2J_k & I_k + 2kJ_k & (k+1)J_k & (k+1)J_k \\ (k+1)J_k & (k+1)J_k & I_k + 2kJ_k & 2J_k \\ (k+1)J_k & (k+1)J_k & 2J_k & I_k + 2kJ_k \end{pmatrix} = \\ &= I_{4k} + \begin{pmatrix} 2k & 2 & k+1 & k+1 \\ 2 & 2k & k+1 & k+1 \\ k+1 & k+1 & 2k & 2 \\ k+1 & k+1 & 2 & 2k \end{pmatrix} \otimes J_k. \end{aligned}$$

Očigledno je da je N matrica incidencije troklasne simetrične DUNBŠ-e, kao i da matrica NN^T ima tačno tri različite sopstvene vrednosti: $4k(k+1) + 1$, $2k(k-1) + 1$, 1. Dakle, graf incidencije ove blok-šeme pripada skupu \mathcal{S} i njegov spektar je $\{\pm(2k+1), \pm \sqrt{2k^2 - 2k + 1}^2, \pm 1^{(4k-3)}\}$.

2.2.4 Povezani r -regularni bipartitni grafovi reda $2n$ sa šest različitih sopstvenih vrednosti koji zadovoljavaju $r = 3$ ili $n \leq 20$

Sada određujemo sve grafove opisane u naslovu ovog potpoglavlja. U oba slučaja najpre opisujemo postupak kojim smo došli do željenih grafova, zatim sumiramo rezultate unutar adekvatnih tvrđenja, a na kraju dajemo komentar o dobijenim rezultatima.

Koristićemo sledeće uslove:

1. n deli $(r^2 - \sigma_1)(r^2 - \sigma_2)$.

2. Brojevi:

$$\Theta_4 = \frac{r^4 + k\sigma_1^2 + (n - k - 1)\sigma_2^2}{n} - 2r^2 + r,$$

$$\Theta_6 = \frac{r^6 + k\sigma_1^3 + (n - k - 1)\sigma_2^3}{n} - r(5r^2 - 6r + 2)$$

moraju biti pozitivni parni celi brojevi.

3. $rn = r^2 + k\sigma_1 + (n - k - 1)\sigma_2$, $1 \leq k \leq n - 3$.

Prvi uslov sledi iz jednakosti (2.4), dok smo do druga dva uslova došli koristeći odgovarajuće spektralne momente za ciklusno regularne grafove.

Neka je G povezan 3-regularan bipartitni graf sa šest različitih sopstvenih vrednosti reda $2n$ i matricom susedstva (2.1). Neka su $\sigma_1 > \sigma_2$ kvadrati dve njegove sopstvene vrednosti (različite od ± 3), i sa k označimo višestrukost njegove druge sopstvene vrednosti. Dijametar grafa G najviše je 5 (budući da ima šest različitih sopstvenih vrednosti – videti Teoremu 3.13 monografije [20]). Izvešćemo odgovarajuću gornju granicu za broj n kako bismo suzili našu pretragu.

Elementi na glavnoj dijagonali matrice NN^T jednaki su 3. Ako još važi i da je dijametar grafa G jednak 3, tada su ostali elementi matrice NN^T jednaki 1, 2, ili 3, i zbir elemenata u svakoj vrsti jednak je 9. Zaključujemo da tada red n matrice NN^T može biti najviše 7.

Pretpostavimo da je dijametar grafa G veći od 3. Tada je, na osnovu Teoreme 1.10, $\sigma_1 \geq 3$, a na osnovu Teoreme 2.2 važi $\sigma_2 < 3$. Sada razlikujemo dva slučaja (u zavisnosti od σ_1 i σ_2).

Prvo, ako su i σ_1 i σ_2 prirodni brojevi, postoji 12 mogućnosti koje bi trebalo razmotriti (sve moguće kombinacije u kojima je $\sigma_1 = 3, 4, \dots, 8$, i $\sigma_2 = 1, 2$). Koristeći uslove (1)–(3), dolazimo do zaključka da važi $n \leq 10$, osim ako je $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 1$,

Tabela 4: Podaci o povezanim 3-regularnim bipartitnim grafovima sa 6 različitih sopstvenih vrednosti

	n	Spektar (nenegativni deo)	Graf
1.	5	$3, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\overline{C_{10}}$
2.	6	$3, \sqrt{3}, 1^3$	Frenklinov graf
3.	8	$3, \sqrt{3}, 1^3$	Mebijus–Kantorov graf
4.	8	$3, \sqrt{5}, 1^5$	bd(3-regularan šibica-graf)
5.	10	$3, 2^4, 1^5$	Dezargov (<i>G. Desargues</i>) graf
6.	10	$3, 2^4, 1^5$	graf kospektralan sa Dezargovim
7.	13	$3, \sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}, \sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}$	<i>F26A</i>
8.	16	$3, \sqrt{5}, 1^9$	Dikov graf

$n = 16, k = 6$, ali tada, na osnovu Posledice 2.1, G mora biti graf incidencije dvo-klasne simetrične DUNBŠ-e, a nju su odredili Boze (*R.C. Bose*) i Nair (*K.R. Nair*) u radu [10]. Graf incidencije ove blok-šeme poznat je pod nazivom Dikov (*W. von Dyck*) graf.

Neka su sada σ_1 i σ_2 oblika $\frac{a \pm \sqrt{b}}{2}$ za neke cele brojeve a i b , $a^2 > b$, tada, na osnovu Teoreme 2.2, važi $0 < a < 6$. Takođe je $n = 2k + 1$ i $k(6 - a) = 6$. Budući da $\sigma_1 \sigma_2 = \frac{a^2 - b}{4}$ mora biti ceo broj, ponovo zaključujemo da važi $n \leq 10$, osim u slučaju $\sigma_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}, \sigma_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, n = 13, k = 6$, ali tada, prema Posledici 2.1, G mora biti graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e, a ovu DUNBŠ-u je odredio Šrikande (*S.S. Shrikhande*) u radu [62]. Graf incidencije ove šeme poznat je pod nazivom *F26A* (3-regularan simetrični) graf (videti [37]).

Koristeći navedene granice za n i uslove (1)–(3), možemo da odredimo sve preostale moguće spektre koji odgovaraju povezanim 3-regularnim bipartitnim grafovima sa šest različitih sopstvenih vrednosti. Razmatranjem ovih spektara, dolazimo do rezultata koji su sumirani u Teoremi 2.9.

Teorema 2.9 *Postoji tačno osam povezanih 3-regularnih bipartitnih grafova sa 6 različitih sopstvenih vrednosti. Podaci o ovim grafovima dati su u Tabeli 4. Graf u četvrtoj vrsti Tabele 4 jeste graf incidencije troklasne simetrične DUNBŠ-e, dok su svi ostali grafovi iz Tabele 4 grafovi incidencije dvoklasnih simetričnih DUNBŠ-a. U poslednjoj koloni Tabele 4 nalaze se ime ili opis odgovarajućeg grafa.*

Napomena 2.1 Graf čiji se podaci nalaze u četvrtoj vrsti Tabele 4 bipartitni je dvojniki takozvanog (jedinstvenog) 3-regularnog šibica-grafa. Šibica-graf¹⁶ je graf koji se može nacrtati u ravni tako da sve njegove grane imaju dužinu 1, pri čemu mu se grane ne seku. Ukoliko je šibica-graf r -regularan, tada se on naziva r -regularan šibica-graf. Za više detalja o regularnim šibica-grafovima videti [53].

Napomena 2.2 Na osnovu Posledice 2.2, grafovi iz prve i druge vrste Tabele 4 jesu grafovi incidencije dvoklasnih simetričnih DUNBŠ-a. Prema Posledici 2.1, isto važi i za grafove u vrstama 3 i 5. Graf koji se nalazi u četvrtoj vrsti Tabele 4 graf je incidencije troklasne simetrične DUNBŠ-e, a ta blok-šema je komplement blok-šeme koja pripada beskonačnoj familiji \mathcal{S} troklasnih simetričnih DUNBŠ-a opisanih u prethodnom poglavlju, u Primeru 6. Opisi preostala dva grafa (Dikovog grafa i grafa F26A) već su dati.

Sada određujemo sve povezane regularne bipartitne grafove reda ne većeg od $2n = 20$ sa šest različitih sopstvenih vrednosti. Sve takve grafove stepena 3 već smo odredili (videti Tabelu 4). Oni koji zadovoljavaju uslov $2n \leq 20$, ponovo se pojavljuju u Tabeli 5 (vrste 2–6). Graf koji se nalazi u trećoj vrsti Tabele 4 izomorfan je svom bipartitnom komplementu, dok se bipartitni komplementi ostala četiri grafa nalaze u prvoj, jedanaestoj, dvanaestoj i dvadesetj vrsti Tabele 5.

Razmatramo dve mogućnosti.

Slučaj 1: graf i njegov bipartitni komplement su povezani. Neka je G graf sa navedenom osobinom. Tada je $\overline{\overline{G}}$ takođe povezan regularan bipartitni graf sa šest različitih sopstvenih vrednosti, pa je dovoljno razmatrati samo grafove za koje važi $r \leq \frac{n}{2}$. Dakle, budući da smo odredili sve povezane 3-regularne grafove sa šest različitih sopstvenih vrednosti, parovi (n, r) koje razmatramo jesu: $(8, 4)$, $(9, 4)$, $(10, 4)$ i $(10, 5)$.

Koristeći uslove (1)–(3), dolazimo do mogućih spektara, a zatim, uz pomoć računara, i do svih odgovarajućih grafova. Ovi grafovi nalaze se u osmoj, devetoj, desetoj i šesnaestoj vrsti Tabele 5. Grafovi koji se nalaze u šesnaestoj vrsti Tabele 5 izomorfni su svojim bipartitnim komplementima, dok se podaci o bipartitnim komplementima ostalih grafova nalaze u četrnaestoj, petnaestoj i osamnaestoj vrsti.

Slučaj 2: graf je povezan, a njegov bipartitni komplement nije. Neka je G graf sa navedenom osobinom. Povezane komponente grafa $\overline{\overline{G}}$ moraju biti regularni bipartitni grafovi sa četiri različite sopstvene vrednosti i njihov red mora biti manji od 20, pa su oni grafovi incidencije simetričnih UNBŠ-a. Svaka komponenta grafa $\overline{\overline{G}}$ mora

¹⁶Engl. *matchstick*.

imati iste četiri sopstvene vrednosti, u suprotnom G nije regularan, ili ima više od šest različitih sopstvenih vrednosti. Jedini regularni bipartitni grafovi sa četiri različite sopstvene vrednosti reda ne većeg od 20, a koji nisu izomorfni sa kompletnim regularnim bipartitnim grafom iz kojeg je uklonjeno jedno savršeno sparivanje, jesu Hivudov (*P.J. Heawood*) graf i njegov bipartitni komplement, oba reda 14. Dakle, \overline{G} je disjunktna unija j disjunktnih grafova koji su svi izomorfni sa kompletnim regularnim bipartitnim grafom reda $2s$ ($s \geq 3$), iz kojeg je uklonjeno jedno savršeno sparivanje, i pri tome važi $js = n$ i $n \leq 10$. Sada je jednostavno uveriti se da postoje četiri uređena para (j, s) koji zadovoljavaju navedene uslove: $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$ i $(3, 3)$, i svaki par određuje jedan povezan regularan bipartitni graf sa šest različitih sopstvenih vrednosti. Uočimo da ovi grafovi pripadaju beskonačnoj familiji grafova opisanoj u prvom delu Primera 2 u prethodnom poglavlju. Podaci o ovim grafovima dati su u sedmoj, trinaestoj, sedamnaestoj i devetnaestoj vrsti Tabele 5.

Rezultati do kojih smo došli sumirani su u Teoremi 2.10.

Teorema 2.10 *Postoji tačno 31 povezan regularan bipartitni graf reda ne većeg od 20 sa 6 različitih sopstvenih vrednosti. Podaci o ovim grafovima dati su u Tabeli 5. Grafovi u petoj i dvanaestoj vrsti Tabele 5 jesu grafovi incidencije troklasnih simetričnih DUNBŠ-a, jedan od dva grafa iz šesnaeste vrste Tabele 5 nije graf incidencije DUNBŠ-e, dok su svi ostali grafovi grafovi incidencije dvoklasnih simetričnih DUNBŠ-a.*

Napomena 2.3 *Pored spektara koji se nalaze u Tabeli 5, i spektar $\{\pm 4, \pm\sqrt{13}, \pm 1^7\}$ zadovoljava uslove (1)–(3), ali budući da n mora biti paran broj (na osnovu Teoreme 2.5), grafovi sa tim spektrom ne postoje. Na osnovu Posledice 2.3, grafovi koji odgovaraju osmoj vrsti Tabele 5 jesu grafovi incidencije dvoklasnih simetričnih DUNBŠ-a, a isto važi i za grafove koji su predstavljeni u devetoj i desetoj vrsti. Grafovi koji odgovaraju petoj, dvanaestoj i šesnaestoj vrsti Tabele 5 opisani su u formulaciji Teoreme 2.10, dok je opis preostalih grafova koji su predstavljeni u Tabeli 5 dat neposredno pre iskaza iste teoreme.*

Tabela 5: Podaci o povezanim regularnim bipartitnim grafovima reda ne većeg od 20 sa 6 različitih sopstvenih vrednosti

	n	Spektar (nenegativni deo)	Broj neizomorfnih grafova
1.	5	$2, \frac{1+\sqrt{5}^2}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}^2}{2}$	1
2.	5	$3, \frac{1+\sqrt{5}^2}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}^2}{2}$	1
3.	6	$3, \sqrt{3}^2, 1^3$	1
4.	8	$3, \sqrt{3}^4, 1^3$	1
5.	8	$3, \sqrt{5}^2, 1^5$	1
6.	10	$3, 2^4, 1^5$	1
7.	6	$4, 2, 1^4$	1
8.	9	$4, 2^4, 1^4$	3
9.	9	$4, \sqrt{7}^2, 1^6$	1
10.	10	$4, 2^5, 1^4$	4
11.	8	$5, \sqrt{3}^4, 1^3$	1
12.	8	$5, \sqrt{5}^2, 1^5$	1
13.	8	$5, 3, 1^6$	1
14.	9	$5, 2^4, 1^4$	3
15.	9	$5, \sqrt{7}^2, 1^6$	1
16.	10	$5, \sqrt{5}^4, 1^5$	2
17.	10	$6, 4, 1^8$	1
18.	10	$4, 2^5, 1^4$	4
19.	9	$7, 2^2, 1^6$	1
20.	10	$7, 2^4, 1^5$	1

2.3 Regularni bipartitni grafovi čiji je struk veći od 4

U ovom poglavlju proučavamo regularne bipartitne grafove čiji je struk veći od 4. Predstavljamo gornju granicu za stepen takvog grafa u funkciji od njegove druge sopstvene vrednosti. Dokazujemo da svaki r -regularan bipartitni graf čiji je struk veći od 4, i čija druga sopstvena vrednost nije veća od \sqrt{r} , mora biti graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e ili simetrične UNBŠ-e. Razmatramo odnos između grafova incidencije dvoklasnih simetričnih DUNBŠ-a i razdaljinsko regularnih grafova. Takođe predstavljamo gornju granicu za red regularnog bipartitnog grafa čiji je struk veći od 4.

Počinjemo sa teoremom u kojoj je data gornja granica za stepen r -regularanog bipartitnog grafa čiji je struk veći od 4.

Teorema 2.11 *Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf čiji je struk veći od 4. Tada je $r \leq \lambda_2^2 + 1$.*

Dokaz. Posmatrajmo dva čvora, u i v , koji su na rastojanju 2 u G . Budući da je struk grafa G najmanje 6, postoji jedinstveni čvor koji je zajednički sused čvorova u i v , označimo ga sa w . Podgraf $G[(u \cup N(u) \cup v \cup N(v)) \setminus \{w\}]$ je izomorfan sa $2K_{1,r-1}$, i stoga je $\lambda_2(2K_{1,r-1}) = \lambda_1(K_{1,r-1}) = \sqrt{r-1}$. Dakle, na osnovu Teoreme 0.2, $\lambda_2(G) \geq \sqrt{r-1}$, pa je $r \leq \lambda_2^2 + 1$. ■

Jedini grafovi čiji stepen dostiže ovu gornju granicu jesu grafovi incidencije konačnih projektivnih ravni (videti Posledicu 2.4 i Napomenu 2.4).

Sledeća teorema daje više podataka o strukturi poveznog r -regularnog bipartitnog grafa G , za koji važi $\text{gr}(G) \geq 6$ i čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo sa \sqrt{r} .

Teorema 2.12 *Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf za koji važi $r \geq 2$ i $\text{gr}(G) \geq 6$ i čija druga sopstvena vrednost zadovoljava $\lambda_2^2 \leq r$. Tada je G graf incidencije simetrične UNBŠ-e sa parametrima $(r^2 - r + 1, r, 1)$, ili graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na $(r^2 - r)$ -regularnom kompletnom multipartitnom grafu.*

Dokaz. Neka je (2.1) matrica susedstva grafa G . Budući da važi $\text{gr}(G) \geq 6$, dva čvora iz iste klase obojivosti mogu imati najviše jednog zajedničkog suseda, pa je $NN^T = rI + B$, gde je B matrica susedstva nekog $(r^2 - r)$ -regularnog grafa H . Sada

je: $\lambda_2^2(G) = \lambda_2(NN^T) = r + \lambda_2(B)$, a po pretpostavci važi $r \geq \lambda_2^2(G)$, odakle sledi $\lambda_2(B) \leq 0$. Uočimo da graf H mora biti povezan (u suprotnom, $\lambda_2(H) = r^2 - r \leq 0$, što povlači $r = 0$, ili $r = 1$), a povezan graf sa tačno jednom pozitivnom sopstvenom vrednošću mora biti kompletan multipartitni graf (Teorema 6.7, [20]). Postoje dve mogućnosti: H je kompletan graf K_{r^2-r+1} , ili je H regularan kompletan multipartitni graf.

Ako je H kompletan graf K_{r^2-r+1} , tada je $NN^T = (r-1)I + J$. Zaključujemo da G ima tačno četiri sopstvene vrednosti: $\pm r$ i $\pm\sqrt{r-1}$, pa je G graf incidencije simetrične UNBŠ-e sa parametrima $(r^2 - r + 1, r, 1)$ (videti [20], str. 166).

Ukoliko je H $(r^2 - r)$ -regularan kompletan multipartitni graf, onda je jednačina (2.3) očigledno zadovoljena, pa je G graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na $(r^2 - r)$ -regularnom kompletnom multipartitnom grafu. ■

Posledica 2.4 *Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf za koji važi $r \geq 2$ i $\text{gr}(G) \geq 6$ i čija druga sopstvena vrednost zadovoljava $\lambda_2^2 < r$. Tada je G graf incidencije simetrične UNBŠ-e sa parametrima $(r^2 - r + 1, r, 1)$.*

Dokaz. Ako je $r > \lambda_2^2$, iz dokaza prethodne teoreme sledi da je $\lambda_2(H) < 0$. To znači da je H kompletan graf K_{r^2-r+1} , čime je dokaz završen. ■

Napomena 2.4 *Kao što je već rečeno, povezan r -regularan bipartitni graf G sa četiri različite sopstvene vrednosti mora biti graf incidencije simetrične UNBŠ-e. Ako važi još i $\text{gr}(G) \geq 6$, tada svaka dva čvora iz iste klase obojivosti moraju imati tačno jednog zajedničkog suseda, pa je parametar μ odgovarajuće UNBŠ-e jednak 1. Takve UNBŠ-e nazivaju se konačne projektivne ravni. Poznato je da postoje kad god je njihov red prost broj ili stepen prostog broja, i čine jedinu poznatu beskonačnu familiju (sa konstantnom vrednošću μ) simetričnih UNBŠ-a.*

Posledica 2.5 *Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf za koji važi $r \geq 2$ i $\text{gr}(G) \geq 6$ i čija druga sopstvena vrednost zadovoljava $\lambda_2^2 = r$. Tada je G graf incidencije simetrične DG šeme sa parametrima $(v = b = ml, r = k, m, l, 0, 1)$ koji zadovoljavaju $(m-1)l = r(r-1)$.*

Dokaz. Neka je notacija ista kao i u dokazu prethodne teoreme. Tada odmah sledi da G mora biti graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na $(r^2 - r)$ -regularnom kompletnom multipartitnom grafu H . Dakle, $H = \overline{mK_l}$ za neke prirodne brojeve m i l , pri čemu su oba veća od 1.

Matrica incidencije N ove dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zadovoljava jednačinu $NN^T = rI + B$. Zbir elemenata u svakoj njenoj vrsti (koloni) jeste r , pa je $v = ml$,

replikacija svake tačke je r , veličina svakog bloka je takođe r . Jasno je, takođe, da se tačke ove šeme mogu podeliti na m grupa veličine l , tako da su dve tačke koje pripadaju istoj grupi (tačke koje odgovaraju čvorovima koji se nalaze u istoj kopiji grafa K_l u H) sadržane u nula blokova ($\mu_1 = 0$), a dve tačke koje pripadaju različitim grupama (tačke koje odgovaraju čvorovima koji se nalaze u različitim kopijama grafa K_l u H) sadržane su u jednom bloku ($\mu_2 = 1$). Dakle, dvoklasna simetrična DUNBŠ je DG šema sa parametrima ($v = b = ml, r = k, m, l, 0, 1$), i budući da je stepen grafa $\overline{mK_l}$ jednak $(m - 1)l$, važi $(m - 1)l = r(r - 1)$. Ovim je dokaz završen. ■

Primeri grafova koji zadovoljavaju uslove Posledice 2.5 jesu grafovi incidencije simetričnih DG šema sa parametrima ($v = b = s(s - 1)(s^2 + s + 1), m = s^2 + s + 1, n = s(s - 1), r = k = s^2, \mu_1 = 0, \mu_2 = 1$), gde je s prost broj ili stepen prostog broja. Metod konstrukcije ovakvih DG šema opisan je u radu [63]. Spektar grafa incidencije ovakve DG šeme je $\{\pm s^2, \pm s^{s(s+1)}, \pm \sqrt{s^{s^4 - s^2 - 2s - 1}}\}$ (videti Primer 4, Potpoglavlje 2.2.3).

Na osnovu Teoreme 2.4, razdaljinsko regularan bipartitni graf G sa ne više od šest različitih sopstvenih vrednosti mora biti graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e. Bilo bi interesantno saznati kada je i obrat ovog tvrđenja tačan, odnosno kada je graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e razdaljinsko regularan. Autori rada [1] pokazali su da svaki r -regularan bipartitan graf G dijametra 4 sa 5 različitih sopstvenih vrednosti, čiji svaki par čvorova na rastojanju 2 ima c zajedničkih suseda mora biti razdaljinsko regularan (videti Posledicu 4.3(b) u radu [1]). Neka je G graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e. Neka G ima dijametar 4, pet različitih sopstvenih vrednosti i neka je (2.1) matrica susedstva grafa G . Tada je jednačina (2.3) zadovoljena, i jedan od parametara μ_1 ili μ_2 jednak je nuli. Dakle, dva čvora na rastojanju 2 u G imaju konstantan broj zajedničkih suseda, pa je, na osnovu pomenute Posledice 4.3(b) iz rada [1], G razdaljinsko regularan. Na ovaj način dokazali smo sledeću teoremu.

Teorema 2.13 *Neka je G graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e. Ako G ima pet različitih sopstvenih vrednosti i dijametar 4, tada je G razdaljinsko regularan.*

Nijedna od dve pretpostavke (o dijametru i o broju različitih sopstvenih vrednosti) ne može se izostaviti iz prethodne teoreme. Mebijus–Kantorov graf je graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e (videti Tabelu 4 i Napomenu 2.2 Potpoglavlja 2.2.4), njegov dijametar je 4, ali ima šest sopstvenih vrednosti. Bipartitni dvojniki kompletnog multipartitnog grafa $\overline{mK_l}$, za $l > 1$ i $m > 2$, jeste $l(m - 1)$ -regularan bipartitni graf reda $2ml$ sa 5 različitih sopstvenih vrednosti (njegov spektar je $\{\pm l(m - 1), \pm l^{m-1}, 0^{2m(l-1)}\}$). Jednostavno se proverava da je takav graf

takođe i graf incidencije simetrične DG šeme sa parameterima $(v = b = ml, r = k = l(m - 1), m, l, l(m - 2), l(m - 1))$, pa je njegov dijametar 3 ($\mu_i > 0$ za $i \in \{1, 2\}$).

Očigledno, graf incidencije DG šeme ne mora biti razdaljinsko regularan. Ipak, poznato je da graf incidencije TDG šeme mora biti razdaljinsko regularan. Ako je N matrica incidencije DG šeme sa parameterima $(v = ml, b, r, k, m, l, \mu_1, \mu_2)$, tada su sopstvene vrednosti matrice NN^T : rk , $r - \mu_1$, $rk - v\mu_2$, sa višestrukostima: 1, $m(l-1)$ i $m-1$, redom (videti, na primer, [9]). Pretpostavimo da je G graf incidencije simetrične $TDG_{\mu_2}(m, l)$ šeme i označimo njenu matricu incidencije sa N . Sopstvene vrednosti matrice NN^T su $\mu_2^2 l^2$, $\mu_2 l$ i 0, sa višestrukostima 1, $\mu_2 l(l-1)$ i $\mu_2 l - 1$, redom, pa je spektar grafa G : $\{\pm\mu_2 l, \pm\sqrt{\mu_2 l}^{\mu_2 l(l-1)}, 0^{2(\mu_2 l-1)}\}$. Zaključujemo da G ima pet različitih sopstvenih vrednosti, pa važi $\text{diam}(G) \leq 4$. Takođe, $NN^T = \mu_2 l I + \mu_2 B$, gde je B matrica susedstva grafa $\overline{\mu_2 l K_l}$. Budući da graf $\overline{\mu_2 l K_l}$ nije kompletan graf ako važi $l > 1$, dijametar grafa G je 4. Na osnovu prethodne teoreme G je razdaljinsko regularan. Ovim je dokazana sledeća posledica.

Posledica 2.6 *Graf incidencije simetrične transverzalne blok-šeme $TDG_{\mu_2}(m, l)$, $l > 1$, jeste razdaljinsko regularan bipartitan graf čiji je spektar $\{\pm\mu_2 l, \pm\sqrt{\mu_2 l}^{\mu_2 l(l-1)}, 0^{2(\mu_2 l-1)}\}$.*

Primetimo da je struk grafova opisanih u prethodnoj posledici jednak 4 ako je parametar μ_2 TDG šeme veći od 1, odnosno 6 ako je $\mu_2 = 1$. Više o grafovima incidencije simetričnih TDG šema može se naći u radu [31].

Napomena 2.5 *Poznato je da se simetrična TDG šema za koju važi $\mu_2 = 1$ ($TDG_1(l, l)$) može konstruisati tako što se iz konačne projektivne ravni reda l ukloni jedna linija i sve tačke koje se na njoj nalaze (na taj način dobija se konačna afina ravan reda l), a zatim se iz dobijene konačne afine ravni ukloni jedna klasa paralelnih linija (za eksplicitnu konstrukciju videti [12]). Ovo znači da svaki razdaljinsko regularan bipartitni graf G čiji je spektar $\{\pm r, \pm\sqrt{r-1}^{r(r-1)}\}$ (odnosno graf incidencije konačne projektivne ravni reda $r-1$) poseduje kao indukovani podgraf razdaljinsko regularan graf čiji je spektar $\{\pm(r-1), \sqrt{r-1}^{(r-1)(r-2)}, 0^{2(r-2)}\}$ (odnosno graf incidencije TDG šeme $TD_1(r-1, r-1)$), a koji se može konstruisati tako što se iz grafa G ukloni proizvoljna grana i sve tačke koje su sa njom incidentne.*

Ako je G graf koji zadovoljava uslove Teoreme 2.12, tada on ima najviše šest različitih sopstvenih vrednosti. Dakle, na osnovu Teoreme 2.1, G je ciklusno regularan. Ukoliko povezan regularan bipartitni graf čiji je struk veći od 4 ima najviše pet različitih sopstvenih vrednosti, možemo reći i više o njegovoj strukturi.

Teorema 2.14 *Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf za koji važi $r \geq 2$ i $\text{gr}(G) \geq 6$. Ako G ima najviše pet različitih sopstvenih vrednosti, onda je G razdaljinsko regularan.*

Dokaz. Ako G ima najviše pet različitih sopstvenih vrednosti, tada važi $\text{diam}(G) \leq 4$ (Teorema 3.13 [20]). Jedini povezan r -regularan bipartitni graf dijametra 2 jeste kompletan bipartitni graf $K_{r,r}$, ali je njegov struk 4.

Pretpostavimo da važi $\text{diam}(G) = 3$. Tada svaka dva čvora iz iste klase obojivosti imaju tačno jednog zajedničkog suseda. Dakle, ako je (2.1) matrica susedstva grafa G , $NN^T = (r-1)I + J$, i zaključujemo da G ima tačno četiri različite sopstvene vrednosti. U radu [1], Posledica 4.3(a), dokazano je da svaki r -regularan bipartitni graf G dijametra 3 sa 4 različite sopstvene vrednosti mora biti razdaljinsko regularan.

Pretpostavimo sada da važi $\text{diam}(G) = 4$. Tada G ima tačno pet različitih sopstvenih vrednosti pa, na osnovu Teoreme 2.6, G mora biti graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e. Tvrđenje sada sledi na osnovu Teoreme 2.13. Ovim je dokaz završen. ■

Primetimo da u tvrđenju prethodne teoreme ne možemo povećati broj različitih sopstvenih vrednosti grafa G : jedan od primera je graf kospektralan sa Dezargovim grafom (Dezargov graf jeste razdaljinsko regularan). Taj graf je 3-regularan bipartitni graf sa šest različitih sopstvenih vrednosti, njegov struk je 6, ali nije razdaljinsko regularan (opisi oba grafa mogu se naći u [58]). Pretpostavka da je struk veći od 4 takođe je neophodna: jedan od primera je Folkmanov (*J.H. Folkman*) graf. To je 4-regularan bipartitni graf čiji je spektar $\{\pm 4, \pm \sqrt{6}^4, 0^{10}\}$, njegov struk je 4, i nije razdaljinsko regularan.

Struk regularnog grafa određen je njegovim spektrom (videti [20]), pa važi sledeća posledice prethodne teoreme.

Posledica 2.7 *Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf reda $2n$ za koji važi $r \geq 2$ i neka su $\pm r$, $\pm \lambda_2$ i 0 njegove (različite) sopstvene vrednosti. Ako važi $(\lambda_2^2 - 2r + 1)r + \frac{r^2(r^2 - \lambda_2^2)}{n} = 0$, tada je G razdaljinsko regularan.*

Dokaz. Budući da G ima pet različitih sopstvenih vrednosti, on je ciklusno regularan (na osnovu Teoreme 2.1). Dakle, ako je A matrica susedstva grafa G , matrica A^4 ima konstantnu dijagonalu, pa je ukupan broj zatvorenih puteva dužine 4 koji počinju i završavaju se u proizvoljnom čvoru grafa G jednak $A_{vv}^4 = \lambda_2^2 r + \frac{r^2(r^2 - \lambda_2^2)}{n}$. Nije teško videti da je broj trivijalnih zatvorenih puteva (odnosno onih koji ne sadrže konturu) dužine 4 koji počinju i završavaju se u proizvoljnom čvoru grafa G jednak $2r^2 - r$. Zato, ako je $(\lambda_2^2 - 2r + 1)r + \frac{r^2(r^2 - \lambda_2^2)}{n} = 0$, važi da je struk grafa G najmanje 6. Na osnovu Teoreme 2.14 G je razdaljinsko regularan. ■

Napomena 2.6 Na drugačiji način, prethodnu posledicu dokazali su Van Dam i Hamers (W. Haemers) u radu [28]. Štaviše, oni su pokazali da graf koji zadovoljava uslove prethodne posledice mora biti graf incidencije delimične geometrije, $dg(s, t, \alpha)$ ¹⁷, čiji parametri s , t i α zadovoljavaju uslove: $s = t = r - 1$ i $\alpha = 2r - 1 - \lambda_2^2$.

U sledećoj teoremi predstavljamo gornju granicu za red r -regularnog bipartitnog grafa čiji je struk veći od 4 i čija druga sopstvena vrednost zadovoljava $\lambda_2^2 \leq r$.

Teorema 2.15 Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf reda $2n$ za koji važi $r \geq 2$ i $\text{gr}(G) \geq 6$ i čija druga sopstvena vrednost zadovoljava $\lambda_2^2 \leq r$. Tada je $n \leq r^2$.

Dokaz. Neka je (2.1) matrica susedstva grafa G . Setimo se dokaza Teoreme 2.12: $NN^T = rI + B$, gde je B matrica susedstva grafa K_{r^2-r+1} , ili matrica susedstva $(r^2 - r)$ -regularnog kompletnog multipartitnog grafa H .

U prvom slučaju važi $n = r^2 - r + 1$, pa očigledno važi i $n \leq r^2$.

U drugom slučaju broj n je jednak redu grafa H . Budući da je $H = \overline{mK_l}$ za neke prirodne brojeve m i l ($m, l \geq 2$), važi $n = ml$ i $(m - 1)l = r^2 - r$, odakle sledi $n = r^2 - r + l$. Na osnovu Teoreme 2.6 [20] važi $\lambda_n(H) = -1 - \lambda_2(mK_l) = -1 - (l - 1) = -l$, pa je $0 \leq \lambda_n(NN^T) = r + \lambda_n(B) = r + \lambda_n(H) = r - l$. Dakle, $l \leq r$, i zato je $n \leq r^2$. Ovim je dokaz završen. ■

Jednostavno je uočiti da jednakost u prethodnoj teoremi važi ako i samo ako je $l = m = r$, u kom slučaju je G graf incidencije TDG šeme $TDG_1(r, r)$. Ovo znači da su jedini grafovi za koje se dostiže nejednakost prikazana u prethodnoj teoremi razdaljinsko regularni grafovi čiji je spektar $\{\pm r, \sqrt{r}^{r(r-1)}, 0^{2(r-1)}\}$. Ovakvi grafovi postoje kad god je r prost broj ili stepen prostog broja (videti Napomenu 2.4 i Napomenu 2.5).

2.4 Neke spektralne nejednakosti za regularne bipartitne grafove

U ovom poglavlju razmatramo regularne bipartitne grafove, na sličan način kao što smo u Poglavlju 1.3 razmatrali regularne bipartitne grafove čiji je struk veći od 3. Predstavljamo spektralne nejednakosti koje se odnose na red regularnih bipartitnih

¹⁷Engl. *partial geometry*, $pg(s, t, \alpha)$.

grafova (Teorema 2.16, Teorema 2.17 i Teorema 2.18), kao i neke njihove posledice (Posledica 2.8, Teorema 2.19, Teorema 2.20, Teorema 2.21 i Teorema 2.22). Kako ovi rezultati mogu biti iskorišćeni u praksi ilustrujemo u sledećem poglavlju, gde određujemo sve regularne bipartitne refleksivne grafove.

U prvoj teoremi predstavljamo gornju granicu za λ_2 .

Teorema 2.16 *Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf reda $2n$. Tada je $\lambda_2 \leq n - r$.*

Dokaz. Bipartitni komplement grafa G je $(n - r)$ -regularan bipartitni graf, pa je njegova druga sopstvena vrednost najviše $n - r$. Budući da su druga sopstvena vrednost regularnog bipartitnog grafa i njegovog bipartitnog komplementa jednake, dokaz je završen. ■

Grafovi čija druga sopstvena vrednost dostiže jednakost u nejednakosti koja je data u prethodnoj teoremi jesu, na primer: $K_{n,n}$, za $n \geq 2$, ili grafovi $\overline{(r+1)K_2}$, $r \geq 1$, kao i grafovi $\overline{2G}$, gde je G bilo koji regularan bipartitni graf.

U radu [34] dokazano je da zbir najveće i druge po veličini sopstvene vrednosti r -regularnog grafa G reda n nije veći od $n - 2$. Štaviše, u istom radu je pokazano da se jednakost dostiže, odnosno da važi $r + \lambda_2 = n - 2$, ako i samo ako komplement grafa G ima komponentu povezanosti koja je bipartitni graf (videti Posledicu 3.2 [34]). Direktna posledica prethodne teoreme jeste slična spektralna nejednakost za r -regularne bipartitne grafove.

Posledica 2.8 *Zbir $r + \lambda_2$, dve najveće sopstvene vrednosti r -regularnog bipartitnog grafa G reda $2n$, jeste najviše n . Štaviše, važi $r + \lambda_2 = n$ ako i samo ako je bipartitni komplement grafa G nepovezan.*

U sledećoj teoremi predstavljamo gornju granicu za red r -regularnog bipartitnog grafa čiji je dijametar jednak 3.

Teorema 2.17 *Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf reda $2n$ za koji važi $\text{diam}(G) = 3$. Tada je $n \leq \frac{r^2 - \lambda_2^2(G)}{r - \lambda_2^2(G)}$ kad god je desna strana nejednakosti pozitivna.*

Dokaz. Neka je v proizvoljan čvor grafa G . Uočimo sledeću podelu skupa X čvorova grafa G : $A = \{v\}$, $B = \{u \in X, d(u, v) = 1\}$, $C = \{u \in X, d(u, v) = 2\}$, $D = \{u \in X, d(u, v) = 3\}$. Nije teško uočiti da je ova podela regularna, a naziva se još i *podela u odnosu na rastojanje*¹⁸ (videti [41], str. 13). Opisana podela indukuje količničku matricu

¹⁸Engl. *distance partition*.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 & 0 \\ 1 & 0 & r-1 & 0 \\ 0 & \frac{2r(r-1)}{n-2} & 0 & \frac{r(n-2r)}{n-2} \\ 0 & 0 & r & 0 \end{pmatrix}.$$

Na osnovu Teoreme 0.3 sopstvene vrednosti matrice A prepliću sopstvene vrednosti grafa G . Zato važi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(A) = \sqrt{\frac{r(n-2r)}{n-2}}$. Tvrđenje sledi nakon uprošćavanja izraza. ■

Grafovi čiji red dostiže jednakost u nejednakosti datoj u prethodnoj teoremi jesu, na primer: $\overline{(r+1)K_2}$, $r \geq 1$, ili Hivudov graf, odnosno njegov bipartitni komplement.

Desna strana nejednakosti iz tvrđenja prethodne teoreme može biti i negativna: jedan od primera je graf prikazan na Slici 1 u radu [15]. To je 3-regularan bipartitan graf reda 10 i dijametra 3, a njegova druga sopstvena vrednost jednaka je 2. Direktna posledica prethodne teoreme i Teoreme 1.10 jeste da za red $2n$ svakog r -regularnog bipartitnog grafa čija druga sopstvena vrednost zadovoljava uslov $\lambda_2 < \sqrt{r}$ važi $n \leq \frac{r^2 - \lambda_2^2}{r - \lambda_2^2}$.

Teorema 2.18 *Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf reda $2n$ čija druga sopstvena vrednost zadovoljava $\lambda_2^4 < r$. Tada važi $r + \lambda_2 \leq n \leq r + \lambda_2^2$. Ako je $n = r + \lambda_2^2$, onda je $r \leq \lambda_2^2(\lambda_2^2 - 1)^2$.*

Dokaz. Prva nejednakost posledica je Teoreme 2.16. Posmatrajmo zato drugu nejednakost. Na osnovu prethodne teoreme važi: $n \leq \frac{r^2 - \lambda_2^2}{r - \lambda_2^2} = \left(r + \lambda_2^2 + \frac{\lambda_2^4 - \lambda_2^2}{r - \lambda_2^2} \right)$, pa ako je $r > \lambda_2^4$, sledi da važi $n \leq r + \lambda_2^2$.

Pretpostavimo da je $n = r + \lambda_2^2$ i uočimo jedan proizvoljan čvor v grafa G . Jedna klasa obojivosti V grafa G sastoji se od r čvorova koji su susedni čvoru v i od preostalih λ_2^2 čvorova koji se nalaze na rastojanju 3 od čvora v , a druga klasa obojivosti U grafa G sastoji se od čvora v i preostalih $r + \lambda_2^2 - 1$ čvorova. Označimo sa C podskup onih čvorova skupa U koji su susedni sa svim onim čvorovima skupa V koji nisu susedni sa v . Važi:

$$r\lambda_2^2 \leq \lambda_2^2|C| + (\lambda_2^2 - 1)(r + \lambda_2^2 - 1 - |C|),$$

odakle sledi $|C| \geq r - (\lambda_2^2 - 1)^2$.

Posmatrajmo sada graf $\overline{\overline{G}}$: to je povezan λ_2^2 -regularan bipartitni graf čija je druga sopstvena vrednost jednaka λ_2 pa, na osnovu Teoreme 1.10, važi $\text{diam}(\overline{\overline{G}}) \leq 4$. Zato

svaki sused čvora v u grafu G , u grafu \overline{G} može biti susedan sa najviše $\lambda_2^2 - 1$ čvorova koji pripadaju skupu C . Dakle,

$$|C|(r - \lambda_2^2) \geq r(|C| - (\lambda_2^2 - 1)),$$

odakle sledi $|C| \leq \frac{\lambda_2^2 - 1}{\lambda_2^2} r$.

Takođe važi

$$r - (\lambda_2^2 - 1)^2 \leq |C| \leq \frac{\lambda_2^2 - 1}{\lambda_2^2} r,$$

odakle sledi $r \leq \lambda_2^2(\lambda_2^2 - 1)^2$. Ovim je dokaz završen. ■

Jednakost važi u obe nejednakosti koje su date u prethodnoj teoremi ukoliko je $G = \overline{(r+1)K_2}$, $r \geq 1$. Takođe, primetimo da jednakost u drugoj nejednakosti važi ako je G bipartitni komplement Papusovog grafa, ili bipartitni komplement Mebijus–Kantorovog grafa.

Napomena 2.7 U Poglavlju 1.3 dokazali smo da regularni nebipartitni grafovi čiji je struk veći od 3 i koji imaju ograničenu drugu sopstvenu vrednost imaju i ograničen stepen (videti Teoremu 1.11). Ovo ne važi za regularne bipartitne grafove. Štaviše, moguće je konstruisati mnogo primera. Pomenimo samo da važi $\lambda_2(K_{n,n}) = 0$ i $r_{K_{n,n}} = n$ za svako $n \geq 2$. U sledećoj teoremi predstavljamo još jednu ovakvu familiju grafova.

Teorema 2.19 Za svaki broj $k \in \mathbb{N}$, i svako $r > k, r \in \mathbb{N}$, postoji povezan r -regularan bipartitni graf dijametra 3 čija je druga sopstvena vrednost jednaka k .

Dokaz. Uočimo nepovezan graf čija je jedna komponenta kompletan bipartitni graf $K_{k,k}$, a druga bilo koji k -regularan bipartitni graf reda $2r$ (takav graf se uvek može konstruisati uklanjanjem $r - k$ odgovarajućih savršenih sparivanja iz grafa $K_{r,r}$). Sada je jasno da je bipartitni komplement uočenog grafa r -regularan bipartitni graf čiji je dijametar jednak 3, a druga sopstvena vrednost jednaka k . ■

U onome što sledi razmatramo intervale za λ_2 koji ne sadrže cele brojeve. Prvo dokazujemo lemu.

Lema 2.2 Neka je G povezan r -regularan bipartitni graf za koji je $\text{diam}(G) \geq 5$. Tada je $\text{diam}(\overline{G}) = 3$.

Dokaz. Budući da je $\text{diam}(G) \geq 5$, važi $n \geq 4r + 2$ (videti [13]), pa za svaka dva čvora iz iste klase obojivosti grafa G mora postojati barem jedan čvor (koji ne pripada toj klasi obojivosti) koji nije susedan ni sa jednim od njih. Odavde sledi da svaka dva čvora koji pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G imaju barem jednog zajedničkog suseda u grafu \overline{G} . Zato je graf \overline{G} povezan i važi $\text{diam}(\overline{G}) \leq 3$. Na kraju primetimo da ako važi $\text{diam}(\overline{G}) < 3$, tada G mora biti nepovezan. Ovim je dokaz završen. ■

Označimo sa \mathcal{B} skup svih povezanih regularnih bipartitnih grafova.

Teorema 2.20 *Neka je k bilo koji broj veći od 1 koji nije ceo. Skup $\mathcal{S} = \{G \in \mathcal{B} : \lambda_2 \in ([k], k], r > \lambda_2^2\}$ je konačan ako i samo ako je skup $\mathcal{T} = \{G \in \mathcal{B} : \lambda_2 \in ([k], k], r \leq \lambda_2^2\}$ konačan.*

Dokaz. Uočimo sledeće skupove: $\mathcal{X} = \{G \in \mathcal{B} : \lambda_2 \in ([k], k], \lambda_2^2 < r \leq \lambda_2^4\}$, $\mathcal{Y} = \{G \in \mathcal{B} : \lambda_2 \in ([k], k], r > \lambda_2^4\}$, $\mathcal{Z} = \{G \in \mathcal{B} : \lambda_2 \in ([k], k], r \leq \lambda_2^2\}$.

Grafovi koji pripadaju skupu \mathcal{X} imaju ograničen stepen: $[k]^2 < r \leq k^4$, njihov dijametar jednak je 3 (na osnovu Teoreme 1.10), pa je zato i njihov red ograničen (na osnovu Teoreme 2.17). Dakle, skup \mathcal{X} je konačan.

Grafovi koji pripadaju skupu \mathcal{Y} imaju ograničen red (na osnovu Teoreme 2.18): $n \leq (r + \lambda_2^2)$. Dakle, stepen bipartitnog komplementa bilo kog grafa $G \in \mathcal{Y}$ jeste najviše λ_2^2 , što znači da bipartitni komplementi grafova koji pripadaju skupu \mathcal{Y} pripadaju skupu \mathcal{Z} , i ako je \mathcal{Z} konačan, konačan je i skup \mathcal{Y} . Dakle, ukoliko je skup \mathcal{T} konačan, konačan je i skup \mathcal{S} .

Na osnovu Leme 2.2 zaključujemo da se skup \mathcal{Z} može podeliti na četiri disjunktna skupa: $\mathcal{Z}_1 = \{G \in \mathcal{Z} : \text{diam}(G) \leq 4\}$, $\mathcal{Z}_2 = \{G \in \mathcal{Z} : \text{diam}(G) \geq 5, \overline{G} \in \mathcal{X}\}$, $\mathcal{Z}_3 = \{G \in \mathcal{Z} : \text{diam}(G) \geq 5, \overline{G} \in \mathcal{Z}_1\}$ i $\mathcal{Z}_4 = \{G \in \mathcal{Z} : \text{diam}(G) \geq 5, \overline{G} \in \mathcal{Y}\}$. Skup \mathcal{Z}_1 je konačan zato što grafovi koji pripadaju skupu \mathcal{Z}_1 imaju stepen ograničen odozgo sa k^2 , i njihov dijametar je 4 ili 3. Skupovi \mathcal{Z}_2 i \mathcal{Z}_3 takođe su konačni (zato što sadrže grafove čiji bipartitni komplementi pripadaju konačnim skupovima \mathcal{X} ili \mathcal{Z}_1). Dakle, ako je skup \mathcal{Y} konačan, onda je i skup \mathcal{Z}_4 konačan, pa je i skup \mathcal{Z} konačan. Sledi da ako je skup \mathcal{S} konačan, onda je takav i skup \mathcal{T} . Ovim je dokaz završen. ■

Sledeći rezultat je direktna posledica prethodne teoreme.

Teorema 2.21 *Neka je k bilo koji broj veći od 1 koji nije ceo. Skup $\{G \in \mathcal{B} : \lambda_2 \in ([k], k]\}$ je konačan kad god je jedan od skupova $\{G \in \mathcal{B} : \lambda_2 \in ([k], k], r > \lambda_2^2\}$ ili $\{G \in \mathcal{B} : \lambda_2 \in ([k], k], r \leq \lambda_2^2\}$ konačan.*

Ako je $k < 2$, dolazimo do sledeće teoreme.

Teorema 2.22 *Neka je $k \in (1, 2)$. Tada je skup $\{G \in \mathcal{B} : 1 < \lambda_2 \leq k\}$ konačan.*

Dokaz. Neka je $G \in \mathcal{B}$. Ako važi $\lambda_2(G) \leq k$, sledi da je $\lambda_2(P_{\text{diam}(G)+1}) \leq k$, pa je $\text{diam}(G) \leq \frac{2\pi}{\arccos \frac{k}{2}} - 2$. Skup $\{G \in \mathcal{B} : 1 < \lambda_2 \leq k, r \leq \lambda_2^2\}$ je konačan zato što je broj r ograničen odozgo sa k^2 , i dijametar svakog grafa koji mu pripada ograničen je odozgo sa $\left\lfloor \frac{2\pi}{\arccos \frac{k}{2}} - 2 \right\rfloor$. Rezultat sada sledi na osnovu Teoreme 2.21. ■

2.5 Regularni bipartitni reflektivni grafovi

U ovom poglavlju rezultate koje smo do sada predstavili u ovoj glavi koristimo za određivanje regularnih bipartitnih grafova sa zadatim spektralnim ograničenjima. Zato određujemo sve regularne bipartitne reflektivne grafove.

2.5.1 r -regularni bipartitni reflektivni grafovi reda $2n$ koji zadovoljavaju $r \leq 2$ ili $r \geq n - 2$

Svaki regularan bipartitni graf G (povezan, ili ne) čiji je stepen najviše 2 refleksivan je. Takvi grafovi su disjunktne unije kompletnih grafova reda 1 ili 2, ili disjunktne unije kontura parnog reda. Takođe, stepen svakog nepovezanog regularnog bipartitnog reflektivnog grafa najviše je 2 (budući da je nepovezan, njegova druga sopstvena vrednost jednaka je njegovom stepenu). Dakle, dovoljno je odrediti sve povezane regularne bipartitne reflektivne grafove. Označimo skup svih takvih grafova sa \mathcal{R} .

Teorema 2.23 *Svaki povezan regularan bipartitni graf reda $2n$ čiji stepen nije manji od $n - 2$ jeste refleksivan.*

Dokaz. Stepem r svakog grafa G opisanog u tvrđenju najviše je n . To znači da je G bipartitni komplement nekog regularnog bipartitnog grafa čiji je stepen najviše 2. Koristeći jednačinu (2.2), uočavamo da važi $\lambda_2(G) = \lambda_2(\overline{G})$, čime je tvrđenje dokazano. ■

Takođe, ako je

$$\mathcal{R}^* = \left\{ G \in \mathcal{R}, 3 \leq r_G \leq \frac{n}{2} \right\},$$

tada je svaki graf koji pripada skupu $\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}^*$ bipartitni komplement grafa koji pripada skupu \mathcal{R}^* , ili je obavezno refleksivan (budući da je tada njegov stepen najviše 2 ili nije manji od $n - 2$). Stoga je dovoljno odrediti sve grafove koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* .

2.5.2 r -regularni bipartitni refleksivni grafovi reda $2n$ koji zadovoljavaju $3 \leq r \leq n - 3$

U prethodnom potpoglavlju uverili smo se da postoji beskonačno mnogo r -regularnih bipartitnih refleksivnih grafova reda $2n$ koji zadovoljavaju $r \leq 2$ ili $r \geq n - 2$. Sada razmatramo r -regularne bipartitne refleksivne grafove reda $2n$ koji zadovoljavaju uslov $3 \leq r \leq n - 3$. Najpre dokazujemo da takvih grafova ima konačno mnogo, a zatim ih sve određujemo koristeći se teorijskim rezonovanjem i računaram.

Prvo određujemo neke osobine grafova koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* .

Teorema 2.24 *Stepen svakog grafa koji pripada skupu \mathcal{R}^* jeste najviše 7.*

Dokaz. Neka je G graf koji pripada skupu \mathcal{R}^* i čiji je stepen r veći od 7. Na osnovu Teoreme 1.10, važi $\text{diam}(G) \leq 3$. Jedini povezan regularan bipartitni graf dijametra 2 jeste kompletan bipartitni graf, pa važi $\text{diam}(G) = 3$. Ako je red grafa G jednak $2n$, na osnovu Teoreme 2.17 važi $n \leq \frac{r^2 - \lambda_2^2(G)}{r - \lambda_2(G)}$. Jednostavno je uveriti se da je za svaku fiksiranu vrednost $r \geq 8$ funkcija $\frac{r^2 - \lambda_2^2(G)}{r - \lambda_2(G)}$ pozitivna i rastuća po $\lambda_2(G)$, pa je $2r \leq n \leq \frac{r^2 - 4}{r - 4}$. Zato mora biti $r^2 - 8r + 4 \leq 0$, što nije moguće ako je $r \geq 8$. Dakle, stepen svakog grafa koji pripada skupu \mathcal{R}^* nije veći od 7. ■

Lema 2.3 *Svaki 3-regularan bipartitni refleksivni graf ima najviše 30 čvorova. Ako postoji 3-regularan bipartitni refleksivni graf reda 30, tada je njegova druga sopstvena vrednost jednaka 2.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji 3-regularan bipartitni refleksivni graf reda $2n \geq 30$ i neka je G njegov bipartitni komplement. Tada je G $(n - 3)$ -regularan graf i, na osnovu Teoreme 1.10, njegov dijametar je 3. Neka je v proizvoljan čvor grafa G . Uočimo sledeću poddelu skupa X čvorova grafa G : $\{A = \{v\}, B = \{u \in X, d(u, v) = 1\}, \hat{C} = \{u \in X, d(u, v) = 2\}, D = \{u \in X, d(u, v) = 3\}\}$.

Važi: $|B| = n - 3$, $|\hat{C}| = n - 1$, $|D| = 3$. Takođe, svaki čvor koji pripada skupu D ima tačno $n - 3$ suseda u skupu \hat{C} , pa zaključujemo da postoji barem $n - 7$ čvorova

koji pripadaju skupu \hat{C} i susedni su sa sva tri čvora u skupu D . Ako je \hat{C}_1 skup tih $n - 7$ čvorova koji pripadaju skupu \hat{C} , neka je $\hat{C}_2 = \hat{C} \setminus \hat{C}_1$, pa je $|\hat{C}_2| = 6$. Sada sledeća podela skupa X čvorova grafa G : $\{A, B, \hat{C}_1, \hat{C}_2, D\}$, indukuje količničku matricu:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & n-3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{n^2-13n+42}{n-3} & \frac{6(n-5)}{n-3} & 0 \\ 0 & n-6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & n-5 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & n-7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na osnovu Teoreme 0.3 važi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(Q_1) = \sqrt{\frac{5n-27}{n-3}}$. Dakle, ako je $n > 15$, tada je $\lambda_2(Q_1) > 2$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je G refleksivan, a ukoliko je $n = 15$, onda je $\lambda_2(Q_1) = 2$. Ovim je dokaz završen. ■

Lema 2.4 *Svaki 4-regularan bipartitni refleksivni graf ima najviše 32 čvora.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji 4-regularan bipartitni refleksivni graf reda $2n \geq 34$ i neka je G njegov bipartitni komplement. Tada je G $(n-4)$ -regularan bipartitni refleksivni graf i, na osnovu Teoreme 1.10, njegov dijametar je 3. Neka je v proizvoljan čvor grafa G . Uočimo sledeću podelu skupa X čvorova grafa G : $\{A = \{v\}, B = \{u \in X, d(u, v) = 1\}, \hat{C} = \{u \in X, d(u, v) = 2\}, D = \{u \in X, d(u, v) = 3\}\}$. Važi: $|B| = n - 4$, $|\hat{C}| = n - 1$, $|D| = 4$. Takođe, svaki čvor koji pripada skupu D ima tačno $n - 4$ suseda u skupu \hat{C} , pa zaključujemo da postoji barem $n - 13$ čvorova koji pripadaju skupu \hat{C} i susedni su sa sva četiri čvora u skupu D . Ako je \hat{C}_1 skup tih $n - 13$ čvorova koji pripadaju skupu \hat{C} , neka je $\hat{C}_2 = \hat{C} \setminus \hat{C}_1$, pa je $|\hat{C}_2| = 12$. Sada sledeća podela skupa X čvorova grafa G : $\{A, B, \hat{C}_1, \hat{C}_2, D\}$, indukuje količničku matricu:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & n-4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{n^2-21n+104}{n-4} & \frac{12(n-7)}{n-4} & 0 \\ 0 & n-8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & n-7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & n-13 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na osnovu Teoreme 0.3 važi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(Q_2) = \sqrt{\frac{7n-64}{n-4}}$. Dakle, ako je $n > 16$, tada je $\lambda_2(Q_2) = \sqrt{\frac{7n-64}{n-4}} > 2$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je G refleksivan. Ovim je dokaz završen. ■

U nastavku ovog potpoglavlju često koristimo sledeću podelu skupa čvorova X (odgovarajućeg grafa):

$$\left. \begin{array}{l} A = \{v\}, B = \{u \in X, d(u, v) = 1\}, \\ D = \{u \in X, d(u, v) = 3\}, \\ \hat{C}_i = \{u \in X, d(u, v) = 2, |N(u) \cap Y| = i\}, i \in I, \\ \text{gde je } v \text{ proizvoljan \u010dvor skupa } X, \\ I \text{ je skup nekih nenegativnih celih brojeva,} \\ \text{a } Y \text{ ozna\u010dava skup } B \text{ ili } D. \text{ Tako\u010de, } |\hat{C}_i| = c_i. \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

Lema 2.5 *Neka r i $2n$ ozna\u010davaju stepen i red regularnog bipartitnog grafa G . Ako je $G \in \mathcal{R}^*$, onda:*

1. *ako je $r = 5$, tada je $n \leq 21$,*
2. *ako je $r = 6$, tada je $n \leq 16$,*
3. *ako je $r = 7$, tada je $n \leq 15$.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.10, dijametar grafa G je 3. Uo\u010dimo funkciju $\frac{r^2 - \lambda_2^2(G)}{r - \lambda_2^2(G)}$: budu\u0107i da je $0 < \lambda_2(G) \leq 2$ (jedini regularni bipartitni grafovi \u010dija je druga sopstvena vrednost manja ili jednaka 0 jesu kompletni bipartitni grafovi, i njihovi bipartitni komplementi, ali oni ne pripadaju skupu \mathcal{R}^*), ona je pozitivna i strogo rastu\u0107a po promenljivoj $\lambda_2(G)$ za svaku fiksiranu vrednost r , $5 \leq r \leq 7$. Na osnovu Teoreme 2.17 va\u017ei $n \leq \frac{r^2 - \lambda_2^2(G)}{r - \lambda_2^2(G)} \leq \frac{r^2 - 4}{r - 4}$. Sada mo\u017eemo zameniti redom $r = 5$, $r = 6$ i $r = 7$ u prethodnoj nejednakosti, i na taj na\u010din se uveriti da va\u017ee tri nejednakosti navedene u tvr\u011denju teoreme. Ovim je dokaz zavr\u0161en. ■

Teorema 2.25 *Skup \mathcal{R}^* je kona\u010dan.*

Dokaz. Stepem svakog grafa koji pripada skupu \mathcal{R}^* nalazi se izme\u0111u brojeva 3 i 7. Na osnovu Leme 2.3, Leme 2.4 i Leme 2.5, red svakog grafa koji pripada skupu \mathcal{R}^* jeste ograni\u010den, odakle sledi da je skup \mathcal{R}^* kona\u010dan. ■

Budu\u0107i da svaki r -regularan bipartitni reflektivni graf reda $2n$ koji zadovoljava $3 \leq r \leq n - 3$ pripada skupu \mathcal{R}^* , ili je bipartitni komplement grafa koji pripada skupu \mathcal{R}^* , dolazimo do slede\u0107eg rezultata, koji je neposredna posledica prethodne teoreme.

Teorema 2.26 *Skup svih r -regularnih bipartitnih reflektivnih grafova reda $2n$ koji zadovoljavaju $3 \leq r \leq n - 3$ jeste kona\u010dan.*

Sada određujemo sve grafove koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* .

Najpre određujemo 3-regularne grafove koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* .

Lema 2.6 *Tat–Kokseterov (W.T. Tutte i H.S.M. Coxeter) graf je jedinstveni 3-regularan bipartitni refleksivni graf reda 30. Ne postoji 3-regularan bipartitni refleksivni graf reda 28.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji 3-regularan bipartitni refleksivni graf reda $2n$, $n \in \{14, 15\}$, i neka je G njegov bipartitni komplement. Tada je G $(n-3)$ -regularan graf i, na osnovu Teoreme 1.10, njegov dijametar je 3. Uočimo podelu (2.5) skupa X čvorova grafa G , za koju je $I = \{0, 1, 2, 3\}$ i $Y = D$. Važi: $|B| = n-3$, $|D| = 3$, $\sum_{i=0}^3 c_i = n-1$. Setimo se dokaza Leme 2.3: svaki čvor koji pripada skupu D ima tačno $n-3$ suseda u skupu \hat{C} , pa postoji barem $n-7$ čvorova koji pripadaju skupu \hat{C} i susedni su sa sva tri čvora u skupu D , odnosno $c_3 \geq n-7$. Ako prebrojimo grane koje povezuju čvorove u skupovima $\bigcup_{i=0}^3 \hat{C}_i$ i B , zaključujemo da važi $(n-3)c_0 + (n-4)c_1 + (n-5)c_2 + (n-6)c_3 = (n-3)(n-4)$. Iz ove i prethodne jednakosti sledi:

$$3c_0 + 2c_1 + c_2 = 6. \quad (2.6)$$

Podela skupa X čvorova grafa G : $\{A, B, \bigcup_{i=0}^2 \hat{C}_i, \hat{C}_3, D\}$, indukuje količničku matricu:

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & n-3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{n^2-(7+c_3)n+12+6c_3}{n-3} & \frac{c_3(n-6)}{n-3} & 0 \\ 0 & \frac{n^2-(7+c_3)n+12+6c_3}{n-1-c_3} & 0 & 0 & \frac{3(n-3-c_3)}{n-1-c_3} \\ 0 & n-6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & n-3-c_3 & c_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Njena druga sopstvena vrednost je $\lambda_2(Q_3) = \sqrt{3} \sqrt{\frac{n^2-(6+c_3)n+9(1+c_3)}{n^2-(4+c_3)n+3(1+c_3)}}$. Na osnovu Teoreme 0.3 važi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(Q_3)$, a budući da je $\lambda_2(G) \leq 2$, sledi da je $c_3 \leq \frac{(n+5)(n-3)}{(n+15)}$.

Neka je $n = 15$. Tada je $c_3 \leq 8$, a znamo da u ovom slučaju mora biti $c_3 \geq 15 - 7 = 8$, pa je $c_3 = 8$. Zato važi $\sum_{i=0}^2 c_i = 6$. Kombinujući ovu jednačinu i jednačinu (2.6), zaključujemo da mora biti: $c_3 = 8$, $c_2 = 6$, $c_1 = c_0 = 0$. Ovo znači da za svaki čvor v grafa G postoji tačno šest čvorova koji imaju deset suseda u skupu $N(v)$, i tačno osam čvorova koji imaju devet suseda u skupu $N(v)$. Dakle, ako je (2.1) matrica susedstva grafa G , važi sledeća dekompozicija:

$$NN^T = 12I + 10M + 9(J - I - M) = 3I + 9J + M, \quad (2.7)$$

gde je M matrica susedstva nekog 6-regularnog grafa reda 15. Budući da je $\lambda_2(NN^T) = \lambda_2^2(G) = 4$, na osnovu jednačine (2.7) sledi da je $\lambda_2(M) = 1$. U Poglavlju 1.2, Teorema 1.6, određeni su svi 6-regularni grafovi čija je druga sopstvena vrednost najviše 1. Postoji sedam takvih grafova reda 15, i svi oni imaju drugu sopstvenu vrednost jednaku 1. Sve sopstvene vrednosti matrice NN^T su nenegativne, pa se direktnom proverom možemo uveriti da šest od sedam mogućih kandidata za graf čija je matrica susedstva M ne ispunjava ovo svojstvo matrice NN^T . Sedmi graf prolazi i ovaj test: to je jako regularan graf sa spektrom $\{6, 1^9, -3^5\}$. Dakle, spektar grafa G morao bi biti $\{\pm 12, \pm 2^9, 0^{10}\}$, a spektar njegovog bipartitnog komplementa $\{\pm 3, \pm 2^9, 0^{10}\}$. Postoji jedinstven 3-regularan graf sa navedenim spektrom, poznat pod nazivom Tat–Kokseterov graf (ovaj graf predstavljen je kao graf G_6 na stranici 113 monografije [58]).

Ako je $n = 14$, tada je $c_3 \leq \frac{209}{29} < 8$, a znamo da u ovom slučaju mora biti $c_3 \geq 14 - 7 = 7$, pa je $c_3 = 7$. Zato važi $\sum_{i=0}^2 c_i = 6$. Kombinujući ovu jednačinu i jednačinu (2.6), zaključujemo da je: $c_3 = 7, c_2 = 6, c_1 = c_0 = 0$. Ako je (2.1) matrica susedstva grafa G , na isti način kao i u slučaju $n = 15$, dolazimo do zaključka da važi $NN^T = 11I + 9M + 8(J - I - M)$, gde je M matrica susedstva nekog 6-regularnog grafa reda 14, čija je druga sopstvena vrednost najviše 1. Na osnovu Teoreme 1.6 postoji samo jedan takav graf, i to je graf $\overline{7K_2}$, ali on ne može biti traženo rešenje (zato što su sve sopstvene vrednosti matrice NN^T nenegativne). Ovim je dokaz završen. ■

Sada, uz pomoć računara, možemo generisati sve povezane 3-regularne bipartitne grafove čiji red nije veći od 26. Postoji tačno 280250 takvih grafova. Koristeći se ponovo računatom, među njima možemo izdvojiti one koji su reflektivni i pripadaju skupu \mathcal{R}^* (odnosno one čiji je red veći od 10). Rezultat do kojeg smo došli dajemo u sledećoj teoremi.

Teorema 2.27 *Postoji tačno 20 3-regularnih grafova koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* . Podaci o ovim grafovima dati su u Tabeli 6.*

Prelazimo na određivanje svih 4-regularnih grafova koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* . Počinjemo sa lemom koja nam daje dodatne informacije o 4-regularnim grafovima koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* , i čiji je red veći od 22.

Lema 2.7 *Neka je G 4-regularan graf reda $2n$ koji pripada skupu \mathcal{R}^* . Tada:*

- (i) ako je $n \geq 14$, tada je $\text{gr}(G) \geq 6$,

(ii) ako je $n = 13$, tada je $\lambda_2(G) = \sqrt{3}$,

(iii) ako je $n = 12$, tada dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G mogu imati najviše dva zajednička suseda.

Dokaz. Na osnovu Leme 2.4 važi $n \leq 16$. Pretpostavimo da je $n \geq 12$, i neka je (2.2) matrica susedstva grafa \overline{G} . Stepen grafa \overline{G} je $(n - 4)$ i, na osnovu Teoreme 1.10, njegov dijametar je 3.

Uočimo podelu (2.5) skupa X čvorova grafa \overline{G} , gde je $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i $Y = D$. Važi: $|B| = n - 4$, $|D| = 4$, $\sum_{i=0}^4 c_i = n - 1$. Ako prebrojimo grane koje povezuju čvorove u skupovima $\bigcup_{i=0}^4 \hat{C}_i$ i B , zaključujemo da važi $(n - 4)c_0 + (n - 5)c_1 + (n - 6)c_2 + (n - 7)c_3 + (n - 8)c_4 = (n - 4)(n - 5)$.

Iz ove i prethodne jednakosti sledi:

$$4c_0 + 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 12. \quad (2.8)$$

Podela skupa X čvorova grafa G : $\{A, B, \bigcup_{i=0}^3 \hat{C}_i, \hat{C}_4, D\}$, indukuje količničku matricu:

$$Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & n - 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{n^2 - (9 + c_4)n + 20 + 8c_4}{n - 4} & \frac{c_4(n - 8)}{n - 4} & 0 \\ 0 & \frac{n^2 - (9 + c_4)n + 20 + 8c_4}{n - 1 - c_4} & 0 & 0 & \frac{4(n - 4 - c_4)}{n - 1 - c_4} \\ 0 & n - 8 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & n - 4 - c_4 & c_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Njena druga sopstvena vrednost je $\lambda_2(Q_4) = 2\sqrt{\frac{n^2 - (8 + c_4)n + 16(1 + c_4)}{n^2 - (5 + c_4)n + 4(1 + c_4)}}$. Na osnovu Teoreme 0.3 važi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(Q_4)$, a budući da je $\lambda_2(G) \leq 2$, sledi da je $c_4 \leq \frac{n}{4} - 1$.

Razmotrimo najpre tvrđenje (i). Neka je $n = 16$. Tada je $c_4 \leq 3$, pa je $\sum_{i=0}^3 c_i \geq 12$. Kombinujući ovu nejednakost i jednakost (2.8), zaključujemo da važi $c_4 = 3$, $c_3 = 12$, $c_2 = c_1 = c_0 = 0$. To znači da za svaki čvor v grafa \overline{G} postoje tačno tri čvora koji imaju osam suseda u skupu $N(v)$, i tačno dvanaest čvorova koji imaju devet suseda u skupu $N(v)$. Dakle, važi sledeća dekompozicija:

$$(J - N)(J - N^T) = 12I + 9M + 8(J - I - M),$$

gde je M matrica susedstva nekog 12-regularnog grafa reda 16. Sledi da je $NN^T = 4I + M$, odakle zaključujemo da dva čvora koji pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G mogu imati najviše jednog zajedničkog suseda, što zapravo znači da graf G ne sadrži četvorouglove, odnosno da je $\text{gr}(G) \geq 6$.

Neka je $n = 15$. Tada je $c_4 \leq 2$ i, slično kao u prethodnom slučaju, zaključujemo da je $c_4 = 2$, $c_3 = 12$, $c_2 = c_1 = c_0 = 0$. Dakle, za svaki čvor v grafa \overline{G} postoje tačno dva čvora koji imaju sedam suseda u skupu $N(v)$, i tačno dvanaest čvorova koji imaju osam suseda u skupu $N(v)$. Na isti način kao i u slučaju $n = 16$ možemo se uveriti da je $NN^T = 4I + M$, gde je M matrica susedstva nekog 12-regularnog grafa reda 15. Odatle sledi da je struk grafa G veći od 4.

Ako je $n = 14$, tada je $c_4 \leq 2$, i imamo dve mogućnosti: $c_4 = 2$, $c_3 = 10$, $c_2 = 1$, $c_1 = c_0 = 0$, ili $c_4 = 1$, $c_3 = 12$, $c_2 = c_1 = c_0 = 0$. U prvom slučaju uočimo podelu skupa X čvorova grafa G : $\{A, B, \hat{C}_2, \hat{C}_3, \hat{C}_4, D\}$, i količničku matricu indukovanu ovom podelom:

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{4}{5} & 7 & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{15}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Druga sopstvena vrednost ove matrice jeste $\frac{\sqrt{410}}{10} > 2$, što je, na osnovu Teoreme 0.3, u suprotnosti sa pretpostavkom da je graf \overline{G} refleksivan. U drugom slučaju jednostavno se možemo uveriti da je $NN^T = 4I + M$, gde je M matrica susedstva nekog 12-regularnog grafa reda 14, pa je $\text{gr}(G) \geq 6$.

Razmotrimo sada tvrđenje (ii). Budući da je $n = 13$, važi $c_4 \leq 2$, pa imamo četiri mogućnosti: $c_4 = 2$, $c_3 = 8$, $c_2 = 2$, $c_1 = c_0 = 0$, ili $c_4 = 2$, $c_3 = 9$, $c_1 = 1$, $c_2 = c_0 = 0$, ili $c_4 = 1$, $c_3 = 10$, $c_2 = 1$, $c_1 = c_0 = 0$, ili $c_4 = 0$, $c_3 = 12$, $c_2 = c_1 = c_0 = 0$. Direktnim izračunavanjem možemo se uveriti da podela skupa X čvorova grafa G : $\{A, B, \hat{C}_2, \hat{C}_3, \hat{C}_4, D\}$, i u prvom i u trećem slučaju indukuje količničku matricu čija je druga sopstvena vrednost veća od 2.

Isto važi i u drugom slučaju ako posmatramo podelu: $\{A, B, \hat{C}_1, \hat{C}_3, \hat{C}_4, D\}$.

Poslednja mogućnost implicira da je $(J - N)(J - N^T) = 9I + 6M$, gde je M matrica susedstva grafa K_{13} . Zato je $M = J - I$, pa je $NN^T = 4I + (J - I)$. Dakle, svaka dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G imaju tačno jednog zajedničkog suseda, što znači da je G graf incidencije simetrične UNBŠ-e sa parametrima $(13, 4, 1)$, odnosno konačne projektivne ravni reda 3 (videti Poglavlje 2.3). Postoji samo jedna konačna projektivna ravan reda 3 (videti [19]). Zato je graf G jedinstven, i nije teško izračunati (koristeći jednakost $NN^T = 4I + (J - I)$) da je njegova druga sopstvena vrednost jednaka $\sqrt{3}$.

Razmotrimo na kraju tvrđenje (iii). Budući da je $n = 12$, važi $c_4 \leq 2$, pa imamo

sledeće mogućnosti: $c_4 = 2, c_3 = 8, c_2 = c_1, c_0 = 1$, ili $c_4 = 2, c_3 = 7, c_2 = c_1 = 1, c_0 = 0$, ili $c_4 = 2, c_3 = 6, c_2 = 3, c_1 = c_0 = 0$, ili $c_4 = 1, c_3 = 9, c_2 = 0, c_1 = 1, c_0 = 0$, ili $c_4 = 1, c_3 = 8, c_2 = 2, c_1 = c_0 = 0$, ili $c_4 = 0, c_3 = 10, c_2 = 1, c_1 = c_0 = 0$. Slično kao i u prethodnim slučajevima, možemo se uveriti da u obzir dolaze samo poslednje dve mogućnosti. Obe impliciraju $c_1 = c_0 = 0$. To upravo znači da za bilo koja dva čvora u i v , koja pripadaju istoj klasi obojenosti grafa \overline{G} , postoje najviše 2 čvora u drugoj klasi obojivosti koji nisu susedni ni sa u , ni sa v . Dakle, svaka dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G mogu imati najviše 2 zajednička suseda.

Ovim je dokaz završen. ■

Lema 2.8 *Postoje tačno četiri 4-regularna bipartitna reflektivna grafa čiji je struk veći od 4.*

Dokaz. Neka je G 4-regularan bipartitni reflektivni graf reda $2n$ čiji je struk veći od 4. Na osnovu Leme 2.4 znamo da red svakog 4-regularnog bipartitnog reflektivnog grafa nije veći od 32. Takođe, koristeći se računom, možemo se uveriti da ne postoji nijedan 4-regularan graf čiji je struk veći od 4 i koji ima manje od 26 čvorova. Dakle, važi $13 \leq n \leq 16$.

Pretpostavimo najpre da važi $\lambda_2 < 2$. Tada, na osnovu Posledice 2.4, G mora biti graf incidencije simetrične UNBŠ-e sa parametrima $(13, 4, 1)$, odnosno konačne projektivne ravni reda 3. Postoji tačno jedan takav graf (videti dokaz prethodne leme, slučaj $n = 13$). Nije teško uočiti da je njegov spektar $\{\pm 4, \pm 1.73^{12}\}$.

Sada pretpostavimo da važi $\lambda_2 = 2$. Tada, na osnovu Posledice 2.5, G mora biti graf incidencije simetrične DG šeme sa parametrima $(v = b = ml, r = k, m, l, 0, 1)$ koji zadovoljavaju $(m-1)l = r(r-1)$. Budući da je $v = n \leq 16$, mogući (m, l) parovi su: $(4, 4)$, $(5, 3)$ i $(7, 2)$. Ako je $m = l = 4$, možemo izračunati sopstvene vrednosti grafa G i videti da je njegov spektar $\{\pm 4, \pm 2^{12}, 0^6\}$. Na osnovu Teoreme 2.14 G je razdaljinsko regularan. Postoji samo jedan takav graf (videti [31]). Za svaku od preostale dve mogućnosti postoji po jedna DG šema. Obe šeme određene su u radu [11], a njihovi grafovi incidencije imaju spektre $\{\pm 4, \pm 2^{10}, \pm 1^4\}$ i $\{\pm 4, \pm 2^7, \pm 1.41^6\}$. Ovim je dokaz završen. ■

Sada smo u situaciji da odredimo sve 4-regularne grafove koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* .

Koristeći računar generisali smo tačno 26 173 071 povezan 4-regularan bipartitni graf reda 24, sa osobinom da dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti imaju najviše 2 zajednička suseda. Među njima postoji osam reflektivnih grafova.

Nakon što smo, uz pomoć računara, generisali tačno 2 871 210 povezanih 4-regularnih bipartitnih grafova reda $2n$, $8 \leq n \leq 11$, utvrdili smo da među njima postoji 18 reflektivnih.

Napomena 2.8 *Za generisanje grafova upotrebljavali smo javno dostupnu datoteku programa nauty, koju je razvio Brendan Makej [56]. Kad god je bilo moguće koristili smo program geng, sa opcijom -b (ovaj program generiše neizomorfne regularne bipartitne grafove datog stepena i reda), ali kada se ispostavilo da za grafove koje smo želeli da generišemo važi još i neko dodatno svojstvo (kao što je, na primer, osobina da dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti mogu imati najviše k zajedničkih suseda), primenili smo program genbg budući da on uključuje i nekoliko različitih ograničavajućih opcija za generisanje grafova. Taj program generiše bipartitne grafove, sa dve klase obojivosti, i uzima u obzir jedino izomorfizme kojima se čuvaju te klase obojivosti. Zato smo morali da među određenim reflektivnim grafovima eliminišemo sve (moguće) izomorfne.*

Sad možemo formulisati dobijeni rezultat.

Teorema 2.28 *Postoji tačno 30 4-regularnih grafova koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* . Podaci o ovim grafovima dati su u Tabeli 6.*

Prelazimo na određivanje svih 5-regularnih grafova koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* .

Teorema 2.29 *Postoji tačno šest 5-regularnih grafova koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* . Podaci o ovim grafovima dati su u Tabeli 6.*

Dokaz. Neka je G 5-regularan bipartitni graf reda $2n$ koji pripada skupu \mathcal{R}^* . Na osnovu Leme 2.5 važi $n \leq 21$. Takođe, na osnovu Teoreme 1.10, $\text{diam}(G) = 3$, pa svaka dva čvora koji pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G imaju bar jednog zajedničkog suseda. Neka je v proizvoljan čvor grafa G , i uočimo podelu (2.5) skupa X čvorova grafa G , gde je $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $Y = B$. Važi: $|B| = 5$, $|D| = n - 5$ i $\sum_{i=1}^5 c_i = n - 1$. Ako prebrojimo grane koje povezuju čvorove u skupovima $\bigcup_{i=1}^5 \hat{C}_i$ i B , zaključujemo da je $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 + 5c_5 = 20$, a iz ove i prethodne jednakosti sledi $c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 4c_5 = 21 - n$.

Ako je $n = 21$, tada je $|D| = 16$, $\sum_{i=1}^5 c_i = 20$ i $c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 4c_5 = 0$, pa je $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$, $c_1 = 20$. Ovo znači da svaka dva čvora koji pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G imaju tačno jednog zajedničkog suseda, pa graf G mora biti graf incidencije UNBŠ-e sa parametrima $(21, 5, 1)$, odnosno konačna projektivna ravan reda 4. Postoji tačno jedna konačna projektivna ravan reda 4 (videti [19]), pa stoga i tačno jedan refleksivan 5-regularan graf reda 42.

Neka sada važi $11 \leq n \leq 20$. Tada je $|D| \leq 15$, i podela skupa X čvorova grafa G : $\{A, B, \hat{C}_1, \bigcup_{i=2}^5 \hat{C}_i, D\}$, indukuje količničku matricu:

$$Q_6 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{c_1}{5} & 4 - \frac{c_1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{20-c_1}{n-c_1-1} & 0 & 0 & \frac{5n-25-4c_1}{n-c_1-1} \\ 0 & 0 & \frac{4c_1}{n-5} & \frac{5n-25-4c_1}{n-5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Njena druga sopstvena vrednost je $\lambda_2(Q_6) = \sqrt{\frac{(25+c_1)n^2 - (250+66c_1)n + 625(1+c_1)}{5(n^2 - (6+c_1)n + 5(1+c_1))}}$. Na osnovu Teoreme 0.3 važi $\lambda_2(G) \geq \lambda_2(Q_6)$, i budući da je G refleksivan, važi $c_1 \leq \frac{-5(n^2 - 26n + 105)}{n^2 - 46n + 525}$.

Slučajeve $13 \leq n \leq 20$ jednostavno razrešavamo. Naime, ako je $n = 20$, tada je $c_1 \leq 15$, pa je $\sum_{i=2}^5 c_i \geq 4$ i $c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 4c_5 = 1$, što nije moguće. Ako je $n = 19$, onda je $c_1 \leq 11$ i stoga je $\sum_{i=2}^5 c_i \geq 7$ i $c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 4c_5 = 2$, što nije moguće. Ako je $n = 18$, tada je $c_1 \leq 9$, pa je $\sum_{i=2}^5 c_i \geq 8$ i $c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 4c_5 = 3$, što nije moguće. Ako je $13 \leq n \leq 17$, koristeći navedenu gornju granicu za c_1 , zaključujemo da važi $\sum_{i=2}^5 c_i \geq 9$, a takođe je i $c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 4c_5 = 21 - n \leq 8$, što nije moguće.

Ako je $n = 12$, tada je $c_1 \leq 2$, pa je $\sum_{i=2}^5 c_i \geq 9$ i $c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 4c_5 = 9$. Odavde sledi da je $c_1 = 2$, $c_2 = 9$, $c_3 = c_4 = c_5 = 0$, što znači da dva čvora koji pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G imaju jednog ili dva zajednička suseda. Sada možemo generisati sve povezane 5-regularne bipartitne grafove reda 24 koji zadovoljavaju osobinu da svaka dva čvora koji pripadaju istoj klasi obojivosti imaju najviše dva zajednička suseda. Postoji 9 takvih grafova, a 4 među njima su reflektivna.

Ako je $n = 11$, tada je $c_1 \leq 2$, $\sum_{i=2}^5 c_i \geq 8$, $c_2 + 2c_3 + 3c_4 + 4c_5 = 10$, i imamo četiri mogućnosti: $c_5 = c_3 = 0$, $c_4 = 1$, $c_2 = 7$, $c_1 = 2$, ili $c_5 = c_4 = 0$, $c_3 = c_1 = 2$, $c_2 = 6$, ili $c_5 = c_4 = 0$, $c_3 = c_1 = 1$, $c_2 = 8$, ili $c_5 = c_4 = c_3 = c_1 = 0$, $c_2 = 10$. Direktnom proverom uveravamo se da u prvom (odnosno drugom) slučaju podela skupa X čvorova grafa G : $\{A, B, \hat{C}_4, \hat{C}_2, \hat{C}_1, D\}$ (odnosno $\{A, B, \hat{C}_3, \hat{C}_2, \hat{C}_1, D\}$) indukuje količničku matricu čija je druga sopstvena vrednost veća od 2, što je, na osnovu Teoreme 0.3, u suprotnosti sa pretpostavkom da je graf G refleksivan.

U trećem slučaju skupovi \hat{C}_3 i \hat{C}_1 sadrže po jedan čvor, svaki. Razmatrajući svih šest mogućnosti za podgraf grafa G indukovani skupom čvorova $A \cup B \cup \hat{C}_1 \cup \hat{C}_3 \cup D$ (direktno proveravajući drugu sopstvenu vrednost svakog od šest mogućih indukovanih podgrafova), možemo se uveriti da samo ako dva čvora koji pripadaju skupu $\hat{C}_1 \cup \hat{C}_3$ imaju jednog zajedničkog suseda u skupu B i dva zajednička suseda u skupu D , graf G može biti refleksivan (u preostalim pet slučajeva razmatrani indukovani podgraf ima drugu sopstvenu vrednost veću od 2 odakle, na osnovu

Teoreme 0.2, sledi $\lambda_2(G) > 2$). Sada možemo skupove B i D podeliti na sledeći način: $B = \bigcup_{i=1}^3 B_i$ i $D = \bigcup_{i=1}^3 D_i$, $B_1 = \{u \in B, u \text{ je zajednički sused čvora koji pripada skupu } \hat{C}_1 \text{ i čvora koji pripada skupu } \hat{C}_3\}$, $B_2 = \{u \in B, u \text{ je sused čvora koji pripada skupu } \hat{C}_3 \text{ i nije sused čvora koji pripada skupu } \hat{C}_1\}$, $B_3 = \{u \in B, u \text{ nema suseda u skupu } \hat{C}_1 \cup \hat{C}_3\}$, $D_1 = \{u \in D, u \text{ je zajednički sused čvora koji pripada skupu } \hat{C}_1 \text{ i čvora koji pripada skupu } \hat{C}_3\}$, $D_2 = \{u \in D, u \text{ je sused čvora koji pripada skupu } \hat{C}_1 \text{ i nije sused čvora koji pripada skupu } \hat{C}_3\}$, $D_3 = \{u \in D, u \text{ nema suseda u skupu } \hat{C}_1 \cup \hat{C}_3\}$. Sada je $|B_1| = 1$, $|B_2| = 2$, $|B_3| = 2$, $|D_1| = 2$, $|D_2| = 2$, $|D_3| = 2$. Direktnim izračunavanjem može se proveriti da sledeća podela skupa X čvorova grafa G : $\{A, B_1, B_2, B_3, \hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{C}_3, D_1, D_2, D_3\}$, indukuje količničku matricu čija je druga sopstvena vrednost jednaka $\sqrt{\frac{21+\sqrt{185}}{8}} > 2$. Na osnovu Teoreme 0.3, to je u suprotnosti sa pretpostavkom da je graf G refleksivan.

U četvrtom slučaju graf G je očigledno graf incidencije simetrične UNBŠ-e (svaka dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G imaju tačno 2 zajednička suseda), sa parametrima $(11, 5, 2)$. Poznato je da postoji tačno jedna takva simetrične UNBŠ (videti [19]) pa zato postoji i tačno jedan 5-regularan bipartitan reflektivni graf reda 22. Nije teško videti da je njegov spektar $\{\pm 5, \pm 1.73^{10}\}$.

Ako je $n = 10$, možemo generisati svih 304 495 povezanih 5-regularnih bipartitnih grafova reda 20, a zatim se, uz pomoć računara, uveriti da nijedan od njih nije refleksivan. Ovim je dokaz završen. ■

Sada određujemo sve 6-regularne grafove koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* .

Teorema 2.30 *Postoji tačno devet 6-regularanih grafova koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* . Podaci o ovim grafovima dati su u Tabeli 6.*

Dokaz. Neka je G 6-regularan graf reda $2n$ koji pripada skupu \mathcal{R}^* . Na osnovu Leme 2.5 je $n \leq 16$, a na osnovu Teoreme 1.10 važi $\text{diam}(G) = 3$. Svaka dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G moraju imati barem dva zajednička suseda (u suprotnom, G sadrži kao indukovani podgraf graf $2K_{1,5}$, a $\lambda_2(2K_{1,5}) = \sqrt{5} > 2$, što je, na osnovu Teoreme 0.2, u suprotnosti sa pretpostavkom da je G refleksivan). Neka je v proizvoljan čvor grafa G . Uočimo podelu (2.5) skupa X čvorova grafa G , gde je $I = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ i $Y = B$. Važi: $|B| = 6$, $|D| = n - 6$ i, slično kao u prethodnoj teoremi, zaključujemo da je $c_3 + 2c_4 + 3c_5 + 4c_6 = 32 - 2n$.

Ako je $n = 16$, iz prethodne jednakosti sledi da važi $c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$, pa je $c_2 = 15$. Dakle, svaka dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G imaju tačno dva zajednička suseda, pa G mora biti graf incidencije simetrične UNBŠ-e sa parametrima $(16, 6, 2)$. Postoje tri neizomorfne takve šeme (videti [19]). Nije teško

uveriti se (na osnovu vrednosti parametara UNBŠ-e) da sva tri odgovarajuća grafa imaju drugu sopstvenu vrednost jednaku 2.

Pretpostavimo da važi $12 \leq n \leq 15$. Tada je $|D| \leq 9$ i podela skupa X čvorova grafa G : $\{A, B, \hat{C}_2, \bigcup_{i=3}^6 \hat{C}_i, D\}$, indukuje količničku matricu:

$$Q_7 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{c_2}{3} & 5 - \frac{c_2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{30-2c_2}{n-c_2-1} & 0 & 0 & \frac{6n-36-4c_2}{n-c_2-1} \\ 0 & 0 & \frac{4c_2}{n-6} & \frac{6n-36-4c_2}{n-6} & 0 \end{pmatrix}.$$

Njena druga sopstvena vrednost je $\lambda_2(Q_7) = \sqrt{\frac{(18+2c_2)n^2 - (216+80c_2)n + 648(1+c_2)}{3(n^2 - (7+c_2)n + 6(1+c_2))}}$, odakle sledi $c_2 \leq \frac{-3(n^2-22n+96)}{n^2-34n+288}$.

Ako je $n = 15$, tada je $c_2 \leq 9$, pa važi $\sum_{i=3}^6 c_i \geq 5$. Takođe je $c_3 + 2c_4 + 3c_5 + 4c_6 = 2$, što nije moguće. Ukoliko je $n = 14$, onda je $c_2 \leq 6$, pa važi $\sum_{i=3}^6 c_i \geq 7$, a znamo da je $c_3 + 2c_4 + 3c_5 + 4c_6 = 4$, što nije moguće. Ako je $n = 13$, tada je $c_1 \leq 4$, pa je $\sum_{i=3}^6 c_i \geq 8$, a znamo da je $c_3 + 2c_4 + 3c_5 + 4c_6 = 6$, što nije moguće.

Ukoliko je $n = 12$, tada je $c_2 \leq 3$, pa je $\sum_{i=3}^6 c_i \geq 8$. Takođe je $c_3 + 2c_4 + 3c_5 + 4c_6 = 8$, odakle sledi $c_2 = 3$, $c_3 = 8$, $c_4 = c_5 = c_6 = 0$. Sada zaključujemo da dva čvora koji pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G imaju ili 2 ili 3 zajednička suseda. Možemo generisati sve povezane regularne bipartitne grafove reda 24 sa osobinom da čvorovi koji pripadaju istoj klasi obojivosti imaju najviše tri i najmanje 2 zajednička suseda. Postoji 73 takva grafa, a među njima je šest refleksivnih.

Ovim je dokaz završen. ■

Ostalo nam je još da odredimo sve 7-regularne grafove koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* .

Teorema 2.31 *Postoji tačno pet 7-regularanih grafova koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* . Podaci o ovim grafovima dati su u Tabeli 6.*

Dokaz. Neka je G 7-regularan bipartitni graf reda $2n$ koji pripada skupu \mathcal{R}^* . Na osnovu Leme 2.5 je $n \leq 15$, a na osnovu Teoreme 1.10 važi $\text{diam}(G) = 3$. Svaka dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G moraju imati barem tri zajednička suseda (u suprotnom, G sadrži kao indukovani podgraf graf $2K_{1,5}$, što je, slično kao i u dokazu prethodne teoreme, u suprotnosti sa pretpostavkom da je G refleksivan).

Neka je v proizvoljan čvor grafa G . Uočimo podelu (2.5) skupa X čvorova grafa G , gde je $I = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ i $Y = B$. Važi: $|B| = 7$, $|D| = n - 7$ i $c_4 + 2c_5 + 3c_6 + 4c_7 = 45 - 3n$.

Ako je $n = 15$, tada iz prethodne jednakosti sledi da je $c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = 0$, pa je $c_3 = 14$. Dakle, svaka dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G imaju tačno tri zajednička suseda, te stoga G mora biti graf incidencije simetrične UNBŠ-e sa parametrima $(15, 7, 3)$. Postoji tačno 5 neizomornih takvih blok-šema (videti [19]). Na osnovu njihovih parametara zaključujemo da odgovarajući grafovi incidencije imaju drugu sopstvenu vrednost jednaku 2.

Neka je sada $n = 14$. Iz jednakosti $\sum_{i=3}^7 c_i = 13$ i $c_4 + 2c_5 + 3c_6 + 4c_7 = 3$ sledi da postoje samo tri mogućnosti: $c_7 = c_5 = c_4 = 0$, $c_6 = 1$, $c_3 = 12$, ili $c_7 = c_6 = 0$, $c_5 = c_4 = 1$, $c_3 = 11$, ili $c_7 = c_6 = c_5 = 0$, $c_4 = 3$, $c_3 = 10$.

U prvom slučaju možemo se direktnom proverom uveriti da podela skupa X čvorova grafa G : $\{A, B, \hat{C}_6, \hat{C}_3, D\}$, indukuje količničku matricu čija je druga sopstvena vrednost $\frac{\sqrt{301}}{7} > 2$. To je, na osnovu Teoreme 0.3, u suprotnosti sa pretpostavkom da je graf G refleksivan. Slično, u drugom slučaju podela skupa X čvorova grafa G : $\{A, B, \hat{C}_5, \hat{C}_4, \hat{C}_3, D\}$, indukuje količničku matricu čija je druga sopstvena vrednost $\sqrt{5} > 2$. U trećem slučaju posmatramo podelu $\{A, B, \hat{C}_4, \hat{C}_3, D\}$, koja indukuje količničku matricu čija je druga sopstvena vrednost $\frac{\sqrt{217}}{7} > 2$. Dakle, zaključujemo da ne postoji 7-regularan bipartitni refleksivni graf reda 28.

Ovim je dokaz završen. ■

U sledećim dvema teoremama sumirani su rezultati do kojih smo došli u ovom potpoglavlju.

Teorema 2.32 *Postoji tačno 70 regularnih grafova koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* . To su grafovi opisani u Tabeli 6.*

Takođe, 53 grafa koji su bipartitni komplementi grafova koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* ne pripadaju skupu \mathcal{R}^* , pa važi sledeća teorema.

Teorema 2.33 *Postoji tačno 123 r -regularna bipartitna refleksivna grafa reda $2n$ koji zadovoljavaju $3 \leq r \leq n - 3$.*

2.5.3 Podaci i komentari o r -regularnim bipartitnim refleksivnim grafovima reda $2n$ koji zadovoljavaju $3 \leq r \leq n - 3$

Ovo poglavlje zaključujemo dodatnim podacima o r -regularnim bipartitnim refleksivnim grafovima reda $2n$ koji zadovoljavaju $3 \leq r \leq n - 3$.

U prethodnom potpoglavlju, Teorema 2.29, dokazano je da dva čvora koja pripadaju istoj klasi obojivosti 5-regularnog bipartitnog grafa G reda 24 moraju imati jednog ili dva zajednička suseda. To znači da, ako je (2.1) matrica susedstva grafa G , tada važi $NN^T = 5I + 2M + (J - I - M)$, gde je M matrica susedstva nekog 9-regularnog grafa H reda 12. Budući da je $\lambda_2(NN^T) = \lambda_2^2(G)$, i da važi $\lambda_2^2(G) \leq 4$, sledi $-1 < \lambda_2(M) \leq 0$. Drugim rečima, graf H ima tačno jednu pozitivnu sopstvenu vrednost, što znači da je izomorfan sa jako regularnim kompletnim multipartitnim grafom (videti Teoremu 6.7 monografije [20]). Jasno je da je $H = \overline{4K_3}$, pa je G graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na $\overline{4K_3}$ (videti Poglavlje 2.1). Slično rezonovanje se može primeniti i za još neke od grafova koje smo odredili u prethodnom potpoglavlju, i ti podaci biće uključeni u tabelu čiji opis sledi.

U Tabeli 6 predstavljeni su svi grafovi koji pripadaju skupu \mathcal{R}^* . U njoj su, u prve četiri kolone, dati sledeći podaci: redni broj grafa, broj n , struk i spektar (njegov nenegativni deo). U petoj koloni dat je, ukoliko postoji, dodatni opis odgovarajućeg grafa, to jest naziv pod kojim je on poznat u literaturi, odnosno napomena ukoliko je odgovarajući graf graf incidencije simetrične UNBŠ-e, odnosno dvoklasne simetrične DUNBŠ-e. Ako je odgovarajući graf graf incidencije simetrične UNBŠ-e sa parametrima (v, r, μ) , u petoj koloni piše UNBŠ (v, r, μ) , a ukoliko je odgovarajući graf graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na jako regularnom grafu H , u petoj koloni zapisano je DUNBŠ $_{\mu_1, \mu_2}(H)$.

U Tabeli 7 data je *heksadecimalna reprezentacija* svakog grafa koji je predstavljen u Tabeli 6. Do ove reprezentacije dolazimo na sledeći način: podmatrica N matrice susedstva (2.1) posmatra se kao binarni broj (njene vrste se nadovezuju jedna na drugu), a zatim se taj binarni broj predstavi u heksadecimalnom zapisu.

Tabela 6: Podaci o grafovima koji pripadaju skupu \mathcal{R}^*

Graf	$2n$	Struk	Spektar (nenegativni deo)	Opis
J_1	12	4	$3, 1.73^2, 1^3$	Frenklinov graf, $DUNB\check{S}_{2,1}(3K_2)$
J_2	12	4	$3, 2^2, 1, 0^4$	
J_3	12	4	$3, 2, 1.41^2, 1, 0^2$	
J_4	14	4	$3, 2, 1.41^4, 0^2$	
J_5	14	4	$3, 1.93^2, 1.41^2, 0.52^2$	
J_6	14	6	$3, 1.41^6$	Hivudov graf, $UNB\check{S}(7, 3, 1)$
Nastavak na sledećoj strani				

Tabela 6 – nastavak

Graf	$2n$	Struk	Spektar (nenegativni deo)	Opis
J_7	16	6	$3, 1.73^4, 1^3$	Mebijus–Kantorov graf, $DUNB\check{S}_{1,0}(\overline{4K_2})$
J_8	16	4	$3, 2^2, 1.73^2, 1, 0^4$	
J_9	16	4	$3, 2, 1.73^2, 1.41^2, 1, 0^2$	
J_{10}	18	6	$3, 1.73^6, 0^4$	Papusov graf, $DUNB\check{S}_{1,0}(\overline{3K_3})$
J_{11}	18	6	$3, 2, 1.73^4, 1^2, 0^2$	
J_{12}	18	6	$3, 1.97^2, 1.73^2, 1.29^2, 0.68^2$	
J_{13}	20	6	$3, 2^4, 1^5$	Dezargov graf, $DUNB\check{S}_{1,0}(\overline{(\text{Petersen})})$
J_{14}	20	6	$3, 2^4, 1^5$	$DUNB\check{S}_{1,0}(\overline{(\text{Petersen})})$
J_{15}	20	6	$3, 2^3, 1.73^2, 1^3, 0^2$	
J_{16}	20	6	$3, 2^2, 1.88^2, 1.53^2, 1, 0.35^2$	
J_{17}	20	6	$3, 2^3, 1.73^2, 1^3, 0^2$	
J_{18}	20	6	$3, 2^2, 1.88^2, 1.53^2, 1, 0.35^2$	
J_{19}	24	6	$3, 2^6, 1^3, 0^4$	
J_{20}	30	8	$3, 2^9, 0^{10}$	Tat–Kokseterov graf, $DUNB\check{S}_{1,0}(\text{jrg}(15, 6, 1, 3))$
J_{21}	16	4	$4, 2^4, 0^6$	$DUNB\check{S}_{2,0}(\overline{4K_2})$
J_{22}	16	4	$4, 2^4, 0^6$	$DUNB\check{S}_{2,0}(\overline{4K_2})$
J_{23}	16	4	$4, 2^3, 1.41^2, 0^4$	
J_{24}	16	4	$4, 2^3, 1.41^2, 0^4$	
J_{25}	16	4	$4, 2^2, 1.73^2, 1^2, 0^2$	
J_{26}	16	4	$4, 2^2, 1.73^2, 1^2, 0^2$	
J_{27}	16	4	$4, 2^2, 1.41^4, 0^2$	
J_{28}	16	4	$4, 2, 1.85^2, 1.41^2, 0.77^2$	
J_{29}	18	4	$4, 2^4, 1^4$	$DUNB\check{S}_{2,1}(9 - \text{Pejli})$
J_{30}	18	4	$4, 2^4, 1^4$	$DUNB\check{S}_{2,1}(9 - \text{Pejli})$
J_{31}	18	4	$4, 2^4, 1^4$	$DUNB\check{S}_{2,1}(9 - \text{Pejli})$
J_{32}	18	4	$4, 2^3, 1.73^2, 1^2, 0^2$	
J_{33}	18	4	$4, 2^3, 1.73^2, 1^2, 0^2$	
J_{34}	18	4	$4, 2^2, 1.88^2, 1.53^2, 0.35^2$	
J_{35}	20	4	$4, 2^5, 0^4$	$DUNB\check{S}_{2,1}(\text{Petersen})$
				Nastavak na sledećoj strani

Tabela 6 – nastavak

Graf	$2n$	Struk	Spektar (nenegativni deo)	Opis
J_{36}	20	4	$4, 2^5, 0^4$	$DUNB\check{S}_{2,1}$ (Petersen)
J_{37}	20	4	$4, 2^5, 0^4$	$DUNB\check{S}_{2,1}$ (Petersen)
J_{38}	20	4	$4, 2^5, 0^4$	$DUNB\check{S}_{2,1}$ (Petersen)
J_{39}	24	4	$4, 2^8, 0^6$	
J_{40}	24	4	$4, 2^8, 0^6$	
J_{41}	24	4	$4, 2^7, 1.41^2, 0^4$	
J_{42}	24	4	$4, 2^7, 1.41^2, 0^4$	
J_{43}	24	4	$4, 2^6, 1.41^4, 0^2$	
J_{44}	24	4	$4, 2^6, 1.41^4, 0^2$	
J_{45}	24	4	$4, 2^6, 1.41^4, 0^2$	
J_{46}	24	4	$4, 2^5, 1.41^6$	$DUNB\check{S}_{2,1}(6K_2)$
J_{47}	26	6	$4, 1.73^{12}$	$UNB\check{S}(13, 4, 1)$
J_{48}	28	6	$4, 2^7, 1.41^6$	$UNB\check{S}_{1,0}(\overline{7K_2})$
J_{49}	30	6	$4, 2^{10}, 1^4$	$DUNB\check{S}_{1,0}(\overline{5K_3})$
J_{50}	32	4	$4, 2^{12}, 0^6$	$DUNB\check{S}_{1,0}(\overline{4K_4})$
J_{51}	22	4	$5, 1.73^{10}$	$UNB\check{S}(11, 5, 2)$
J_{52}	24	4	$5, 2^8, 1^3$	$DUNB\check{S}_{2,1}(\overline{4K_3})$
J_{53}	24	4	$5, 2^8, 1^3$	$DUNB\check{S}_{2,1}(\overline{4K_3})$
J_{54}	24	4	$5, 2^8, 1^3$	$DUNB\check{S}_{2,1}(\overline{4K_3})$
J_{55}	24	4	$5, 2^8, 1^3$	$DUNB\check{S}_{2,1}(\overline{4K_3})$
J_{56}	42	6	$5, 2^{20}$	$UNB\check{S}(21, 5, 1)$
$J_{57}(\overline{J_{58}})$	24	4	$6, 2^9, 0^4$	$DUNB\check{S}_{3,2}(\overline{3K_4})$
$J_{59}(\overline{J_{60}})$	24	4	$6, 2^9, 0^4$	$DUNB\check{S}_{3,2}(\overline{3K_4})$
$J_{61}(\overline{J_{62}})$	24	4	$6, 2^9, 0^4$	$DUNB\check{S}_{3,2}(\overline{3K_4})$
J_{63}	32	4	$6, 2^{15}$	$UNB\check{S}(16, 6, 2)$
J_{64}	32	4	$6, 2^{15}$	$UNB\check{S}(16, 6, 2)$
J_{65}	32	4	$6, 2^{15}$	$UNB\check{S}(16, 6, 2)$
J_{66}	30	4	$7, 2^{14}$	$UNB\check{S}(15, 7, 3)$
J_{67}	30	4	$7, 2^{14}$	$UNB\check{S}(15, 7, 3)$
J_{68}	30	4	$7, 2^{14}$	$UNB\check{S}(15, 7, 3)$
J_{69}	30	4	$7, 2^{14}$	$UNB\check{S}(15, 7, 3)$
J_{70}	30	4	$7, 2^{14}$	$UNB\check{S}(15, 7, 3)$

Napomena 2.9 *Tat–Kokseterov graf, koji je predstavljen u dvadesetoj vrsti Tabele 6, jeste graf incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na (jedinственom) jako regularnom grafu čiji su parametri $(15, 6, 1, 3)$, stoga u koloni u kojoj dajemo opis grafa piše $DUNBŠ_{1,0}(jrg(15, 6, 1, 3))$.*

Slično, grafovi J_{29} , J_{30} i J_{31} jesu grafovi incidencije dvoklasne simetrične DUNBŠ-e zasnovane na (jedinственom) jako regularnom 9-Pejlijevom grafu, pa u koloni u kojoj dajemo njihov opis piše $DUNBŠ_{2,1}(9 - Pejli)$. Jako regularan 9-Pejlijev graf ima parametre $(9, 4, 1, 2)$.

Interesantno je da su neki od grafova datih u Tabeli 6 bipartitni dvojnici odgovarajućih nebipartitnih grafova. Na primer, Dezargov graf je bipartitni dvojniki Petersenovog grafa, graf J_{34} je bipartitni dvojniki 4-regularnog izuzetnog grafa reda 9 iz drugog sloja (videti Poglavlje 1.1), čiji je spektar $\{4, 1.88^2, -0.35^2, -1.53^2, -2^2\}$ (videti [23], str. 227), graf J_{27} je bipartitni dvojniki 4-regularnog izuzetnog grafa reda 8 iz trećeg sloja čiji je spektar $\{4, 1.41^2, 0, -1.41^2, -2^2\}$ (videti [23], str. 227).

Tabela 7: Heksadecimalna reprezentacija matrice susedstva grafova koji pripadaju skupu \mathcal{R}^*

Graf	Heksadecimalna reprezentacija
J_1	E0B56C8D6
J_2	E0772356A
J_3	E0B566723
J_4	1C09AA39154C6
J_5	1C0AAA330E32C
J_6	1C11998AB0B4A
J_7	E0293446138A8558
J_8	E02A51168C238558
J_9	E02334461A89518C
J_{10}	1C02A48886318C2241CA4
J_{11}	1C0071920A3228A0D5118
J_{12}	1C08A0B2142349224E045
J_{13}	E014425130064078A08A18642
J_{14}	E0089940234160C4483430868
J_{15}	E0049414345802A830C284891
J_{16}	E006188906824D0444341288C
J_{17}	E004C10C32219215421422628
Nastavak na sledećoj strani	

Tabela 7 – nastavak

Graf	Heksadecimalna reprezentacija
J_{18}	E004C10C32219215422422618
J_{19}	E004140439801060702051182284C0822089
J_{20}	1C000048822408A0300A081188010180E01004802320C100500A42600
J_{21}	F03C0F5AC3A56996
J_{22}	F00FAA63C9559C36
J_{23}	F02B1E6CC59359A6
J_{24}	F00F9C35A95366CA
J_{25}	F02D1E6A93C559A6
J_{26}	F08E552D66A3995A
J_{27}	F01E99536CC52BA6
J_{28}	F03A2DA3CC954B56
J_{29}	1E092E609C781B44D8A8B
J_{30}	1E019D15B0A51E42C9D92
J_{31}	1E02C8B93847A9495638A
J_{32}	1E03A48D0F19270E99394
J_{33}	1E0662CA172517560A695
J_{34}	1E03A50D0EA9171663594
J_{35}	F00B1239544AA9211E251E309
J_{36}	F00B1239524969411E2A1E309
J_{37}	F007111F14A0CD82B10D4CA2A
J_{38}	F030A170A925A19899855C063
J_{39}	F0032229814544AC841892540A6831413868
J_{40}	F00322294149446C8811C2C10AA831413864
J_{41}	F0014903518393029860584C22A8864524E0
J_{42}	F000C523480B8311A8AC050519246245820E
J_{43}	F0084903518393029860514C22A8864524E0
J_{44}	F0004D43448A138291541A0C2231868528E0
J_{45}	F008C423480B8311A82C150519246245820E
J_{46}	F0024C43448A13829154180D2231868528E0
J_{47}	1E0019108345A084680D22A0A904838C224460C2434
J_{48}	F0009424C408A411C0588413081988A0606408E10582482C1
J_{49}	1E000501844641A026108512620242900B060C4340421512048248131
J_{50}	F000005C81881209402510868411221209038062489025041C4006A02
Nastavak na sledećoj strani	

Tabela 7 – nastavak

Graf	Heksadecimalna reprezentacija
	8284340
J_{51}	1F019298EC543A4B925C96911D49D19
J_{52}	F808A94A62CA19554C61313A943A1CC70265
J_{53}	F80C52A499158AA1CC3230F148766453821E
J_{54}	F80C52A499158AA1CC1632B148766453821E
J_{55}	F80C0EA158C39381CC1274B22A955166425A
J_{56}	1F0000802C1400836090A10B020410A2215801000662831022094040B 808212848441108250490604C1021C0061061210A8091111011901
$J_{57}(\overline{J_{58}})$	FC065615DA2738E6693B18F44BA8CBD2CD13
$J_{59}(\overline{J_{60}})$	FC0C5C88F2751E6969B13595E266A953A2DA
$J_{61}(\overline{J_{62}})$	FC0D1C15BA2D3876553B84E9D234B68CEA72
J_{63}	FC00303A0C6318D48A8A492C160D2B11A26446B0258691A18558C0175 34260C9
J_{64}	FC00302B17A0921C18C55152A1C824742B118926450DC0B10C9A4A686 2868643
J_{65}	FC00300F1B48C22C907151A2256428B848C5451916940E23891684CAA 3816252
J_{66}	1FC02A4CD8744DE03658B270D69C84EC4E98E2AA1D87590D4CD51E8CA
J_{67}	1FC02525AAB1263B32729532656C38B14CCCE91C65525C1FA383C348B
J_{68}	1FC0154D1A719878C47562399A6C54B85CAA4987D40E57272692734E8
J_{69}	1FC00AE932B8B0368C5CCD2B44D879314F29330E711D1D928D4B568D4
J_{70}	1FC014EA292B878657A26534C594D629938D39433CE0CA6A34A8BF09A

Na kraju, dodajmo i sledeće zapažanje.

Za graf G kažemo da je *integralan* ako se njegov spektar sastoji samo od celih brojeva. Podsetimo čitaoca da su svi povezani 3-regularni integralni grafovi određeni u radu [15], odnosno nezavisno u radu [61]. Postoji tačno 13 takvih grafova. Svi povezani 4-regularni integralni grafovi koji ne sadrže brojeve ± 3 u svom spektru određeni su u radu [66]. Postoji tačno 24 takva grafa.

Autori rada [15] došli su do rezultata kombinujući teorijsko rezonovanje sa računarskom pretragom. S druge strane, jasno je da je bipartitni dvojniki svakog povezanog r -regularnog nebipartitnog integralnog grafa povezan r -regularni bipartitni integralni graf. Zato je ključna ideja u radovima [61] i [66] bila da se odrede

svi povezani regularni bipartitni integralni grafovi (stepena 3 u radu [61], odnosno stepena 4 koji ne sadrže brojeve ± 3 u svom spektru u radu [66]): postoji 8 povezanih 3-regularnih bipartitnih integralnih grafova i 16 povezanih 4-regularnih integralnih grafova koji u svom spektru nemaju brojeve ± 3 . Primetimo da su svi ti grafovi takođe i refleksivni, a budući da smo upravo odredili sve regularne bipartitne refleksivne grafove, svi pomenuti grafovi nalaze se među njima i mogu se lako uočiti i izdvojiti iz tog skupa.

Glava 3

Ugnežđeni grafovi

U ovoj glavi razmatramo takozvane ugnežđene grafove i njihov Q -spektar. Dokažujemo da su, u skupu svih povezanih bipartitnih grafova fiksiranog reda i veličine, grafovi sa maksimalnim Q -indeksom upravo duplo ugnežđeni grafovi. Predstavljamo i niz (ne)jednakosti koje se odnose na glavni sopstveni vektor (sopstveni vektor koji odgovara najvećoj sopstvenoj vrednosti) nenegativne Laplasove matrice duplo ugnežđenih grafova, a dobijene rezultate koristimo za postavljanje nekih gornjih i donjih granica za Q -indeks tih grafova.

U nastavku razmatramo ugnežđene grafove sa ograničenom drugom sopstvenom vrednošću (odnosno, drugom sopstvenom vrednošću nenegativne Laplasove matrice). Utvrđujemo kakva veza postoji između strukture ugnežđenih grafova i sopstvenih vrednosti njihove nenegativne Laplasove matrice. Na kraju određujemo sve duplo ugnežđene grafove čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo sa $\sqrt{2}$.

Rezultati predstavljeni u ovoj glavi objavljeni su u radovima [3] (Poglavlje 3.2) i [4] (Poglavlje 3.3).

3.1 Postavka problema i pregled poznatih rezultata

Neka je $G = (V, E)$ prost graf reda $n = |V|$ i veličine $m = |E|$. *Nenegativna Laplasova matrica*¹ grafa G definiše se kao $Q = A + D$, gde je $A (= A(G))$ matrica susedstva grafa G , a $D (= D(G))$ dijagonalna matrica stepena njegovih čvorova, dok je $Q_G(\lambda) = \det(\lambda I - Q)$ karakteristični polinom matrice $Q = A + D$ (koji se naziva i Q -polinom grafa G). Sopstvene vrednosti matrice Q (odnosno nule njenog karakterističnog polinoma) i njen spektar (to jest, multiskup njenih sopstvenih vrednosti) nazivamo redom *sopstvene vrednosti nenegativne Laplasove matrice* i *spektar nenegativne Laplasove matrice* (nadalje ćemo koristiti termine *Q -sopstvene vrednosti* i *Q -spektar*) grafa G .

¹Engl. *signless Laplacian matrix*.

Budući da je matrica Q simetrična pozitivna semidefinitna, Q -spektar sadrži realne nenegativne vrednosti. Štaviše, najmanja sopstvena vrednost matrice Q povezanog grafa jednaka je nuli ako i samo ako je taj graf bipartitan; u tom slučaju nula je jednostruka sopstvena vrednost (videti [24], Stav 2.1). Sopstvene vrednosti matrice Q označavaćemo sa $\kappa_1(G), \kappa_2(G), \dots, \kappa_n(G)$, uz pretpostavku da važi $\kappa_i \geq \kappa_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Najveća sopstvena vrednost matrice Q naziva se Q -indeks grafa G i označava se sa $\kappa (= \kappa(G))$. Ova važna spektralna invarijanta je u skorije vreme postala predmet mnogih proučavanja. Setimo se da je

$$\Delta + 1 \leq \kappa \leq 2(n - 1), \quad (3.1)$$

gde Δ označava maksimalan stepen čvora datog grafa. Jednakost u levoj nejednakosti važi za zvezda grafove (kompletne bipartitne grafove čija se jedna klasa obojivosti sastoji od samo jednog čvora), a u desnoj za kompletne grafove (videti [24]).

Cvetković, Roulinson (*P. Rowlinson*), i Simić su u radu [25] postavili sledeću hipotezu:

$$\kappa \leq n - 1 + \bar{d}, \quad (3.2)$$

gde je \bar{d} srednja vrednost stepena čvorova datog grafa. Kasnije su Feng i Ju u radu [36] dokazali da je hipoteza tačna (videti takođe i [5]). Mnoge druge granice za Q -indeks proizvoljnog (povezanog) grafa mogu se naći u [22].

Kao što smo već napomenuli u prethodne dve glave, mnoga istraživanja motivisana su željom da se određene familije grafova na neki način klasifikuju, ili da se opiše struktura pripadajućih grafova na osnovu njihovih spektralnih osobina (posebno mesto ovde zauzima proučavanje druge sopstvene vrednosti). S druge strane, do sada ne postoji mnogo rezultata koji se odnose na drugu Q -sopstvenu vrednost (videti, na primer, [25] ili [6]).

Sada dajemo kratak opis strukture grafova koje razmatramo u ovoj glavi, takozvanih *ugneždenih grafova*².

Grafovi koji ne sadrže kao indukovan podgraf nijedan od grafova $2K_2, P_4$ ili C_4 zovu se, po Hansenu (*P. Hansen*), *podeljeno ugneždeni grafovi* (*PUG-ovi*)³. Čvorovi proizvoljnog PUG-a mogu se podeliti na $2h$ ćelija (gnezda) $\bigcup_{i=1}^h U_i$ i $\bigcup_{i=1}^h V_i$, tako da je podgraf indukovan skupom čvorova $\bigcup_{i=1}^h U_i$ (odnosno skupom čvorova $\bigcup_{i=1}^h V_i$) kompletan (odnosno totalno nepovezan) graf, i svi čvorovi koji pripadaju skupu U_i susedni su svim čvorovima koji pripadaju skupu V_j ako je $i \leq j$.

²Engl. *nested graphs*.

³Engl. *nested split graphs (NSGs)*.

Bipartitni ekvivalenti PUG-ova su takozvani *duplo ugneždeni grafovi* (*DUG-ovi*)⁴. Čvorovi proizvoljnog povezanog DUG-a mogu se podeliti na dve klase obojivosti (takozvane *ko-klike*)⁵ i svaka od te dve klase može se podeliti na h nepraznih ćelija $\bigcup_{i=1}^h U_i$ i $\bigcup_{i=1}^h V_i$ tako da su svi čvorovi koji pripadaju skupu U_i susedni svim čvorovima koji pripadaju skupu $\bigcup_{j=1}^{h+1-i} V_j$, za $i = 1, 2, \dots, h$.

Obe klase grafova imaju važnu ulogu u istraživanjima koja se odnose na grafove sa maksimalnim (Q -)indeksom. Naime, poznato je da je graf sa maksimalnim indeksom ili maksimalnim Q -indeksom datog reda i veličine upravo PUG (videti, na primer, [22], str. 231), odnosno DUG ukoliko je bipartitan (videti [7], kao i Potpoglavlje 3.2.1)

Za PUG-ove i DUG-ove koristimo zajednički naziv ugneždeni grafovi. Neka je (u oba slučaja) $m_i = |U_i|, n_i = |V_i|, i = 1, \dots, h$. Tada je skup čvorova odgovarajućeg ugneždenog grafa G skup $V = \bigcup_{i=1}^h U_i \cup \bigcup_{i=1}^h V_i$, i važi $n = |V| = \sum_{i=1}^h (m_i + n_i)$. Proizvoljan PUG (odnosno DUG) označavamo sa:

$$PUG(m_1, m_2, \dots, m_h; n_1, n_2, \dots, n_h)$$

(odnosno $DUG(m_1, m_2, \dots, m_h; n_1, n_2, \dots, n_h)$).

Uopšte uzev, proizvoljan ugneždeni graf označavamo sa $UG(m_1, m_2, \dots, m_h; n_1, n_2, \dots, n_h)$. Primetimo da je PUG (odnosno DUG) povezan kad god je parametar m_1 (odnosno kad su parametri m_1 i n_1) veći od nule. Ako je bilo koji od preostalih parametara jednak nuli, ponovo imamo ugneždeni graf sa manjom vrednošću parametra h , pa ubuduće važi pretpostavka da su sve vrednosti parametara veće od nule.

Sada definišemo takozvani *princip delitelja*⁶. Neka je skup čvorova grafa G podeljen na neprazne podskupove X_1, X_2, \dots, X_s tako da je za svako $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ svaki čvor koji pripada skupu X_i susedan sa tačno d_{ij} čvorova koji pripadaju skupu X_j . Neka je D matrica formata $s \times s$, definisana sa $D = (d_{ij})$. Multigraf H čija je matrica susedstva D naziva se *čelni delitelj* grafa G , ili, kraće, *delitelj* grafa G (videti [21], Definicija 2.4.4). Primetimo da Q -matricu proizvoljnog grafa možemo posmatrati kao matricu susedstva odgovarajućeg multigrafa imajući u vidu da je svaki element na dijagonali jednak broju petlji odgovarajućeg čvora, pa stoga možemo primenjivati opisani princip.

Za (Q -)sopstvenu vrednost grafa G kažemo da je *glavna* (Q -)sopstvena vrednost ako i samo ako odgovarajući (Q -)sopstveni vektor nije ortogonalan na vektor

⁴Engl. *double nested graphs (DNGs)*.

⁵Engl. *co-cliques*.

⁶Engl. *divisor concept*.

$(1, 1, \dots, 1)^T$ (videti [21], str. 25 i Teoremu 2.2.3). U suprotnom, kažemo da odgovarajuća (Q) -sopstvena vrednost grafa G nije glavna (Q) -sopstvena vrednost. Takođe se glavni deo (Q) -spektra grafa G sastoji samo od njegovih glavnih (Q) -sopstvenih vrednosti.

Poznato je da karakteristični polinom delitelja deli karakteristični polinom (i Q -polinom) proizvoljnog grafa (videti [21], str. 38) a, na osnovu Teoreme 2.4.5 monografije [21], (Q) -spektar bilo kog delitelja H proizvoljnog grafa G sadrži glavni deo (Q) -spektra tog grafa.

Kao i u prethodnoj glavi, ako je u proizvoljan čvor grafa G , sa $N(u)$ označavamo skup svih njegovih suseda, dok je $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. Za dva čvora u i v grafa G kažemo da su *duplikati*⁷ (odnosno *koduplikati*⁸) ako važi $N(u) = N(v)$ (odnosno $N[u] = N[v]$). Poznato je da svakom paru čvorova u i v koji su duplikati (odnosno koduplikati) odgovara sopstveni vektor grafa G koji odgovara sopstvenoj vrednosti 0 (odnosno -1). Taj sopstveni vektor se može definisati na sledeći način: sve njegove koordinate su nula, osim onih koje odgovaraju čvorovima u i v ; te dve koordinate su 1 i -1 , ili obratno. Dakle, svakom skupu koji se sastoji od k čvorova koji su svi međusobno duplikati (odnosno koduplikati) odgovara $k - 1$ linearno nezavisnih sopstvenih vektora koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti 0 (odnosno -1). Slično, bilo kom skupu koji se sastoji od k čvorova stepena d u grafu G koji su svi međusobno duplikati (odnosno koduplikati) odgovara $k - 1$ Q -sopstvenih vrednosti grafa G koje su sve jednake d (odnosno $d - 1$), a odgovarajući Q -sopstveni vektori se mogu definisati na opisani način. Takođe, sve opisane sopstvene vrednosti (i Q -sopstvene vrednosti) nisu glavne.

Ovo poglavlje završavamo sledećom formulom (videti [20], Teorema 2.17):

$$P_{S(G)}(x) = x^{m-n}Q_G(x^2), \quad (3.3)$$

gde graf G ima red n , veličinu m , a $S(G)$ označava njegovu *potpodelu*⁹ (graf koji je dobijen umetanjem po jednog novog čvora unutar svake od njegovih grana).

⁷Engl. *duplicate*.

⁸Engl. *coduplicate*.

⁹Engl. *subdivision*.

3.2 Neke spektralne nejednakosti za bipartitne grafove sa maksimalnim Q -indeksom

U ovom poglavlju dokazujemo da su u skupu povezanih bipartitnih grafova datog reda i veličine grafovi koji imaju maksimalan Q -indeks upravo DUG-ovi. Takođe predstavljamo nekoliko jednakosti i nejednakosti koje se odnose na glavni sopstveni vektor (sopstveni vektor čije su sve koordinate pozitivne) nenegativne Laplasove matrice DUG-a. Potom te jednakosti i nejednakosti koristimo da bismo došli do nejednakosti koje predstavljaju gornje, odnosno donje granice za njihov Q -indeks. Na kraju poglavlja predstavljamo nekoliko primera kako bismo mogli da ocenimo koliko su te granice dobre i da bismo ih uporedili.

Pretpostavimo da je $m_s = |U_s|$ i $n_s = |V_s|$, za $1 \leq s \leq h$, i neka je graf G $DUG(m_1, m_2, \dots, m_h; n_1, n_2, \dots, n_h)$.

U ovom poglavlju često koristimo sledeću notaciju. Ako je

$$M_s = \sum_{i=1}^s m_i \quad \text{i} \quad N_t = \sum_{j=1}^t n_j, \quad \text{za } 1 \leq s, t \leq h,$$

tada je red grafa G jednak $n = M_h + N_h$, a njegova veličina $m = \sum_{s=1}^h m_s N_{h+1-s}$. Uočimo da je N_{h+1-s} stepen proizvoljnog čvora $u \in U_s$; stepen proizvoljnog čvora $v \in V_t$ jednak je M_{h+1-t} . Takođe koristimo i oznaku $M_{s,t} = M_t - M_{s-1}$, kao i $M_{1,t} = M_t$.

3.2.1 Ekstremalni bipartitni grafovi

Neka je G bipartitni graf čije su klase obojivosti U i V . Najpre ćemo formulisati glavni rezultat u ovom potpoglavlju.

Teorema 3.1 *Neka je G graf sa maksimalnim Q -indeksom u skupu svih povezanih bipartitnih grafova reda n i veličine m . Tada je G DUG i sve njegove viseće grane imaju zajednički čvor.*

Ova teorema tvrdi da DUG-ovi imaju istu ulogu u skupu svih bipartitnih grafova (u odnosu na Q -indeks) koju imaju PUG-ovi u skupu svih nebipartitnih grafova. Dokaz Teoreme 3.1 počiva na sledećim lemmama. Prva od njih preuzeta je iz rada [25]. Setimo se da postoji jedinstveni sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\kappa(G)$ i čije su sve koordinate pozitivne (glavni sopstveni vektor grafa G).

Lema 3.1 *Neka je G' graf dobijen tako što je u povezanom grafu G (u kojem su čvorovi r i s susedni, a čvorovi r i t nisu) grana rs rotirana oko čvora r do pozicije rt . Neka je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ glavni sopstveni vektor grafa G . Ako važi $x_t \geq x_s$, tada je $\kappa(G') > \kappa(G)$.*

Sledeća lema je veoma korisna u situacijama u kojima imamo most u grafu za čiji indeks smo pretpostavili da jeste maksimalan. Za uređen par (G, u) , gde je G proizvoljan povezan graf, a u proizvoljan čvor grafa G , kažemo da je *korenski graf* i koristimo oznaku G_u . Ukoliko je G_u korenski graf, tada se čvor u naziva *koren* grafa G_u . Ako su data dva korenska grafa G_u i H_u , tada je *sjedinjenje*¹⁰ grafova G_u i H_u graf koji se dobija identifikovanjem čvorova u i v , $u = v = w$. Neka su data dva korenska grafa $P(= P_u)$ i $Q(= Q_v)$, sa čvorovima u i v kao korenima, i neka je G graf dobijen tako što je u disjunktnoj uniji $P \cup Q$ dodata grana uv . Označimo sa G' graf dobijen tako što je sjedinjenju grafova P_u i Q_v dodata viseća grana na čvor koji je identifikovan sa čvorovima u i v .

Lema 3.2 *Neka važi goreopisana notacija. Ako su P i Q dva netrivialna povezana grafa, tada je $\kappa(G) < \kappa(G')$.*

Dokaz. Označimo sa $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ glavni sopstveni vektor grafa G . Bez gubljenja na opštosti možemo pretpostaviti da važi $x_u \leq x_v$. Neka je $N_P(u)$ skup suseda čvora u u grafu P ; budući da je graf P netrivialan, $N_P(u) \neq \emptyset$. Graf G' dobijen je tako što su u grafu G sve grane uw , za koje je $w \in N_P(u)$, zamenjene granama vw pa, na osnovu Leme 3.1, važi $\kappa(G) < \kappa(G')$. ■

Lema 3.3 *Neka je G graf koji ima maksimalan Q -indeks u skupu svih povezanih bipartitnih grafova datog reda i veličine, i neka je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ glavni sopstveni vektor grafa G . Ako su v i w čvorovi koji pripadaju istoj klasi obojivosti grafa G za koje važi $x_v \geq x_w$, tada je $\deg(v) \geq \deg(w)$.*

Dokaz. Neka su U i V klase obojivosti grafa G , a v i w čvorovi koji pripadaju skupu V za koje važi $x_v \geq x_w$ i $\deg(v) < \deg(w)$. Tada je $\deg(w) > 1$ i postoji čvor $u \in U$ koji je susedan čvoru w i nije susedan čvoru v . Na osnovu Leme 3.2 možemo rotirati granu uw do položaja uv kako bismo dobili graf G' za koji važi $\kappa(G') > \kappa(G)$. Ako je grana uw most, tada je $\deg(u) = 1$, pa je, na osnovu Leme 3.2, graf G' povezan, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da graf G ima maksimalan Q -indeks u skupu svih povezanih bipartitnih grafova datog reda i veličine. ■

¹⁰Engl. *coalescence*.

Od sada pa do kraja ovog potpoglavlja smatramo da su klase obojivosti grafa G skupovi $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ i $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ takvi da važi $x_{u_1} \geq x_{u_2} \geq \dots \geq x_{u_m}$ i $x_{v_1} \geq x_{v_2} \geq \dots \geq x_{v_n}$. Na osnovu Leme 3.3 ovakav način uređenja skupova U i V podudara se sa njihovim uređenjem na osnovu stepena čvorova u odgovarajućoj klasi obojivosti. U sledećoj lemi zabeležene su neke posledice ove činjenice.

Lema 3.4 *Neka je G graf koji ima maksimalan Q -indeks u skupu svih povezanih bipartitnih grafova datog reda i veličine, i neka su njegove klase obojivosti uređene na gore opisani način. Tada:*

- (i) čvorovi u_1 i v_1 su susedni;
- (ii) čvor u_1 susedan je svakom čvoru koji pripada skupu V , i čvor v_1 je susedan svakom čvoru koji pripada skupu U ;
- (iii) ako je čvor u susedan čvoru v_k , tada je on susedan i čvoru v_j , za sve $j < k$, i ako je čvor v susedan čvoru u_k , onda je on susedan i čvoru u_j , za sve $j < k$.

Dokaz. Prvo razmatramo mostove u grafu G . Na osnovu Leme 3.2, svaki most grafa G jeste njegova viseća grana. Na osnovu Leme 3.1, sve viseće grane grafa G imaju zajednički čvor, i taj čvor w ima osobinu da je broj x_w maksimalan. Bez gubljenja na opštosti, možemo pretpostaviti da važi $x_{u_1} \geq x_{v_1}$ i $w = u_1$. Sada zaključujemo da tvđenje važi ako je G stablo, pa u tom slučaju G mora biti zvezda. Pretpostavimo zato da graf G nije stablo.

Pretpostavimo da čvorovi u_1 i v_1 nisu susedni. Tada je čvor v_1 susedan nekom čvoru $u \in U$, i grana uv_1 nije most. Na osnovu Leme 3.1 možemo rotirati granu v_1u do položaja v_1u_1 kako bismo dobili povezan bipartitni graf G' koji zadovoljava $\kappa(G') > \kappa(G)$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da graf G ima maksimalan Q -indeks u skupu svih povezanih bipartitnih grafova datog reda i veličine. Na ovaj način dokazali smo tvđenje (i).

Da bismo dokazali tvđenje (ii), pretpostavimo da je u čvor koji pripada skupu U i koji nije susedan čvoru v_1 . Tada, na osnovu (i), važi $u \neq u_1$. Takođe, grana uv nije most i čvor u je susedan nekom čvoru v koji pripada skupu V i koji je različit od v_1 . Sada možemo rotirati granu uv do položaja uv_1 i, na taj način, kao i u prethodnom slučaju, dolazimo do kontradikcije. Pretpostavimo sada da je v čvor koji pripada skupu V i koji nije susedan čvoru u_1 . Tada je $v \neq v_1$ na osnovu (i), grana vu_1 nije most grafa G , i čvor v je susedan nekom čvoru u koji pripada skupu U i koji je različit od u_1 . Rotacijom grane uv oko čvora v do položaja vu_1 , na isti način kao i u prethodna dva slučaja, dolazimo do kontradikcije.

Dokažimo sada tvrđenje (iii). Pretpostavimo da važi: $u \in U$, čvor u je susedan čvoru v_k i nije susedan čvoru v_j za neke j i k za koje je $j < k$. Sada je na osnovu (ii) $u \neq u_1$, pa grana uv_k nije most. To znači da možemo rotirati granu uv_k do položaja uv_j kako bismo došli do kontradikcije. Na kraju, pretpostavimo da važi: $v \in V$, čvor v je susedan čvoru u_k i nije susedan čvoru u_j za neke j i k za koje je $j < k$. U ovom slučaju grana vu_k nije most, zato što je $k > 1$, i njena rotacija do položaja vu_j dovodi do kontradikcije. Ovim je dokaz završen. ■

Dokaz Teoreme 3.1. Na osnovu Leme 3.4 i definicije DUG-a sledi prvi deo tvrđenja Teoreme 3.1. Ostaje samo da se proveri da sve viseće grane razmatranog DUG-a imaju zajednički čvor, a ovo neposredno sledi iz Leme 3.2. ■

3.2.2 Q -sopstveni vektori duplo ugnežđenih grafova

Sada razmatramo neke osobine glavnog sopstvenog vektora nenegativne Laplaseove matrice DUG-a. U ovom i u sledećem potpoglavlju (ukoliko nije drugačije napomenuto)

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$$

označava Q -sopstveni vektor grafa G čije su sve koordinate pozitivne. Uobičajeno je da taj Q -sopstveni vektor bude normalizovan, odnosno da važi:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Koordinate vektora \mathbf{x} zovu se još i *težine* odgovarajućih čvorova. Primetimo da svi čvorovi koji pripadaju skupu U_s (odnosno V_t), za $1 \leq s \leq h$ (odnosno za $1 \leq t \leq h$), imaju iste težine budući da pripadaju istoj orbiti grafa G . Neka je $x_u = a_s$ ako je $u \in U_s$, i $x_v = b_t$ ako je $v \in V_t$.

Ukoliko u skupu jednačina koje povezuju sopstvenu vrednost κ sa sopstvenim vektorom \mathbf{x} uočimo one koje odgovaraju bilo kom čvoru koji pripada skupu U_s ili skupu V_t , zaključujemo da važi:

$$\kappa a_s = N_{h-s+1} a_s + \sum_{j=1}^{h+1-s} n_j b_j, \quad \text{za } s = 1, \dots, h, \quad (3.4)$$

i

$$\kappa b_t = M_{h-t+1} b_t + \sum_{i=1}^{h+1-t} m_i a_i, \quad \text{za } t = 1, \dots, h. \quad (3.5)$$

Budući da je vektor \mathbf{x} normalizovan, važi:

$$\sum_{i=1}^h m_i a_i + \sum_{j=1}^h n_j b_j = 1. \quad (3.6)$$

Iz jednakosti (3.4) jednostavno sledi

$$a_s = \frac{1}{\kappa - N_{h-s+1}} \sum_{j=1}^{h+1-s} n_j b_j, \quad \text{za } s = 1, \dots, h, \quad (3.7)$$

i slično, iz jednakosti (3.5) sledi

$$b_t = \frac{1}{\kappa - M_{h-t+1}} \sum_{i=1}^{h-t+1} m_i a_i, \quad \text{za } t = 1, \dots, h. \quad (3.8)$$

Sada, koristeći jednakost (3.6), zaključujemo da je

$$a_s = \frac{1}{\kappa - N_{h-s+1}} \left(1 - \sum_{i=1}^h m_i a_i - \sum_{j=h+2-s}^h n_j b_j \right), \quad \text{za } s = 1, \dots, h, \quad (3.9)$$

ili, koristeći jednakost (3.5) za $t = 1$,

$$a_s = \frac{1}{\kappa - N_{h-s+1}} \left(1 - (\kappa - M_h) b_1 - \sum_{j=h+2-s}^h n_j b_j \right), \quad \text{za } s = 1, \dots, h.$$

Slično,

$$b_t = \frac{1}{\kappa - M_{h-t+1}} \left(1 - (\kappa - N_h) a_1 - \sum_{i=h+2-t}^h m_i a_i \right), \quad \text{za } t = 1, \dots, h.$$

Postavljajući $a_{h+1} = b_{h+1} = 0$ i $N_0 = 0$, iz jednakosti (3.7) i jednakosti (3.9), koristeći i jednakost (3.6) redom, dolazimo do zaključka da je

$$(\kappa - N_{h-s}) a_{s+1} - (\kappa - N_{h+1-s}) a_s = -n_{h+1-s} b_{h+1-s} \quad \text{za } s = 1, \dots, h-1,$$

i

$$(\kappa - n_1) a_h = n_1 b_1 \quad \text{za } s = h.$$

Budući da su sve koordinate vektora \mathbf{x} pozitivne i da je $\kappa \geq \Delta + 1$ (3.1), sledi da je

$$a_{s+1} \leq a_s, \quad \text{za } s = 1, \dots, h-1, \quad (3.10)$$

i

$$b_{t+1} \leq b_t, \quad \text{za } t = 1, \dots, h-1. \quad (3.11)$$

Takođe, zamenjujući $s = h$ u jednakost (3.5), dolazimo do

$$(\kappa - m_1)b_h = m_1a_1. \quad (3.12)$$

Štaviše, zamenjujući $s = 1$ u jednakosti (3.4) i $t = 1$ u jednakosti (3.5) i kombinujući dobijene jednakosti sa jednakošću (3.6), dolazimo do

$$(\kappa - N_h)a_1 + (\kappa - M_h)b_1 = 1,$$

i na kraju:

$$a_s = \frac{1}{\kappa - N_{h+1-s}} \left((\kappa - N_h)a_1 - \sum_{j=h+2-s}^h n_j b_j \right). \quad (3.13)$$

Sada pažnju usredsređujemo na ograničavanje koordinata a_i i b_j .

Lema 3.5 *Za svako $s = 1, \dots, h$ važi*

$$\frac{N_{h+1-s}b_{h+1-s}}{\kappa - N_{h+1-s}} \leq a_s \leq \frac{N_{h+1-s}b_1}{\kappa - N_{h+1-s}}. \quad (3.14)$$

Dokaz. Iz jednakosti (3.7) očigledno važi

$$a_s = \frac{1}{\kappa - N_{h+1-s}} \sum_{j=1}^{h+1-s} n_j b_j.$$

Dakle, nejednakost (3.14) neposredno sledi budući da se iz nejednakosti (3.11) vidi da je niz b_j opadajući. ■

Lema 3.6 *Za svako $s = 1, \dots, h$ važi*

$$a_s \leq a_1 \left(1 - \frac{N_{h+2-s,h}}{\kappa - N_{h+1-s}} \left(1 + \frac{m_1}{\kappa - m_1} \right) \right). \quad (3.15)$$

Dokaz. Nejednakost (3.15) sledi iz jednakosti (3.13) (budući da je niz b_i opadajući), kao i korišćenjem jednakosti (3.12). ■

Lema 3.7 *Za svako $s = 1, \dots, h$ važi*

$$a_s \geq \frac{a_1}{\kappa - N_{h-s+1}} \left(1 - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{n_{h-i+1}M_i}{\kappa - M_i} \right).$$

Dokaz. Dokaz se sprovodi matematičkom indukcijom po s . Za $s = 1$, nejednakost je očigledno tačna. Pretpostavimo da važi

$$a_s \geq \frac{a_1}{\kappa - N_{h-s+1}} \left(1 - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{n_{h-i+1}M_i}{\kappa - M_i} \right),$$

za $s > 1$. Tada je

$$\begin{aligned}
a_{s+1} &= \frac{1}{\kappa - N_{h-s}} \sum_{j=1}^{h-s} n_j b_j \\
&= \frac{1}{\kappa - N_{h-s}} ((\kappa - N_{h-s+1})a_s - n_{h-s+1}b_{h-s+1}) \\
&\geq \frac{a_1}{\kappa - N_{h-s}} \left(1 - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{n_{h-i+1}M_i}{\kappa - M_i} \right) - \frac{n_{h-s+1}M_s a_1}{(\kappa - N_{h-s})(\kappa - M_s)} \\
&= \frac{a_1}{\kappa - N_{h-s}} \left(1 - \sum_{i=1}^s \frac{n_{h-i+1}M_i}{\kappa - M_i} \right).
\end{aligned}$$

■

Lema 3.8 Za svako $s = 1, \dots, h$ važi

$$a_s \leq \frac{b_1}{\kappa - N_{h-s+1}} \left(N_{h-s+1} - \frac{\kappa f_{h+1-s}}{(\kappa - n_1)(\kappa - M_s)} \right), \quad (3.16)$$

gde je

$$f_{h+1-s} = \sum_{j=1}^{h+1-s} n_j M_{h+2-j,h}.$$

Dokaz. Iz jednakosti (3.7) i nejednakosti (3.15) primenjene na koordinate b_j sledi

$$\begin{aligned}
a_s &= \frac{1}{\kappa - N_{h-s+1}} \sum_{j=1}^{h-s+1} n_j b_j \\
&\leq \frac{1}{\kappa - N_{h-s+1}} \sum_{j=1}^{h-s+1} n_j b_1 \left(1 - \frac{M_{h+2-j,h}}{\kappa - M_{h+1-j}} \left(1 + \frac{n_1}{\kappa - n_1} \right) \right) \\
&\leq \frac{b_1}{\kappa - N_{h-s+1}} \left(N_{h-s+1} - \frac{\kappa f_{h+1-s}}{(\kappa - n_1)(\kappa - M_s)} \right).
\end{aligned}$$

■

3.2.3 Neke granice za Q -indeks duplo ugnežđenog grafa

U ovom potpoglavlju predstavljamo neke gornje i donje granice za Q -indeks DUG-a. Koristimo tehniku sopstvenih vektora i matičnu tehniku. Na početku iznosimo nekoliko činjenica.

Ako je $h = 1$, DUG je kompletan bipartitni graf K_{m_1, n_1} , i nije teško uveriti se da je njegov Q -indeks jednak $m_1 + n_1 = n$. Takođe, budući da Q -indeks proizvoljnog grafa raste ako se tom grafu dodaju nove grane (videti [25]), važi:

$$\kappa \leq n, \quad (3.17)$$

za svaki (ne obavezno povezan) DUG.

U suprotnom, ako je broj $h > 1$ fiksiran, ali veličina grafa nije, koristeći istu argumentaciju zaključujemo da maksimalan Q -indeks ima $DUG(m_1, 1, \dots, 1; n_1, 1, \dots, 1)$. Direktnim izračunavanjem možemo se uveriti da se u ovom slučaju maksimalan Q -indeks dostiže ako je $|m_1 - n_1| \leq 1$. Ovi slučajevi, stoga, nisu interesantni za naše istraživanje, pa nadalje pretpostavljamo da je $h > 1$ i da je veličina grafova fiksirana.

Najpre utvrđujemo neka ograničenja Q -indeksa DUG-a koristeći tehniku sopstvenih vektora. Počinjemo sa donjim ograničenjima.

Teorema 3.2 *Ako je G povezan DUG, tada je*

$$\kappa \geq \max_{1 \leq k \leq h} \{M_{h+1-k} + N_k\}.$$

Dokaz. S jedne strane, iz jednakosti (3.5) sledi

$$b_k = \frac{1}{\kappa - M_{h+1-k}} \sum_{i=1}^{h+1-k} m_i a_i \geq \frac{M_{h+1-k} a_{h+1-k}}{\kappa - M_{h+1-k}}$$

budući da iz nejednakosti (3.10) sledi da je niz a_i opadajući. S druge strane, iz jednakosti (3.4) sledi

$$a_{h+1-k} = \frac{1}{\kappa - N_k} \sum_{j=1}^k n_j b_j \geq \frac{N_k b_k}{\kappa - N_k}$$

budući da iz nejednakosti (3.11) sledi da je niz b_j opadajući. Iz prethodne dve nejednakosti sledi da je

$$\kappa(\kappa - (M_{h+1-k} + N_k)) \geq 0,$$

što je ekvivalentno sa

$$\kappa \geq M_{h+1-k} + N_k.$$

Ovim je dokaz završen. ■

Posebno, ako je $k = h$ i $k = 1$, dobijamo narednu posledicu prethodne teoreme.

Posledica 3.1 *Ako je G povezan DUG, tada važi*

$$\kappa \geq m_1 + N_h \quad i \quad \kappa \geq n_1 + M_h.$$

Teorema 3.3 *Ako je G povezan DUG, tada je*

$$\kappa \geq \frac{1}{2} \left(t + \frac{m}{N_h} + \sqrt{\left(t - \frac{m}{N_h} \right)^2 + 4\hat{e}_h^*} \right),$$

gde je

$$t = \frac{\sum_{i=1}^h m_i N_{h+1-i}^3}{\sum_{i=1}^h m_i N_{h+1-i}^2} \quad i \quad \hat{e}_h^* = \sum_{i=1}^h m_i \frac{N_{h+1-i}^2}{N_h}.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ vektor čije su koordinate indeksirane čvorovima grafa G , i neka je $y_u = N_{h+1-i}$ ako je $u \in U_i$ za neko $i \in \{1, \dots, h\}$, odnosno, $y_v = q = \kappa - t$ za neko t ako je $v \in V_j$ za neko $j \in \{1, \dots, h\}$. Koristeći Rejljeve koeficijente (*J.W. Strutt, 3rd Baron Rayleigh*) za vektor y (videti, na primer, [22], str. 49), zaključujemo da je

$$\kappa \geq \frac{2 \sum_{i=1}^h m_i N_{h+1-i}^2 q + \sum_{i=1}^h m_i N_{h+1-i}^3 + \sum_{i=1}^h n_i M_{h-1+i} q^2}{\sum_{i=1}^h m_i N_{h+1-i}^2 + N_h q^2}.$$

Budući da je $q = \kappa - t$, važi

$$N_h q^3 + (N_h t - m) q^2 - \sum_{i=1}^h m_i N_{h+1-i}^2 q \geq \sum_{i=1}^h m_i N_{h+1-i}^3 - t \sum_{i=1}^h m_i N_{h+1-i}^2.$$

Birajući

$$t = \frac{\sum_{i=1}^h m_i N_{h+1-i}^3}{\sum_{i=1}^h m_i N_{h+1-i}^2}$$

i imajući u vidu da je $N_1 \leq t \leq N_h$, jednostavno dolazimo do kvadratne nejednakosti po q , iz koje tvrdjenje neposredno sledi. \blacksquare

Teorema 3.4 *Ako je G povezan DUG, tada je*

$$\kappa \leq \frac{1}{2} \left(n + \sqrt{n^2 - 4(M_h N_h - m)} \right). \quad (3.18)$$

Dokaz. Iz jednakosti (3.4), za $s = h$, i iz jednakosti (3.6), koristeći desnu nejednakost u (3.14), sledi

$$(\kappa - M_h) b_1 = \sum_{i=1}^h m_i a_i \leq \sum_{i=1}^h m_i \frac{N_{h+1-i}}{\kappa - N_{h+1-s}} b_1.$$

Sada je

$$(\kappa - M_h)(\kappa - N_h) \leq m,$$

i stoga, iz kvadratne nejednačine po κ :

$$\kappa^2 - (M_h + N_h)\kappa + M_h N_h - m \leq 0,$$

dolazimo do zaključka da je $\kappa_1 \leq \kappa \leq \kappa_2$, gde su κ_1 i κ_2 rešenja odgovarajuće kvadratne jednačine. Ovim je dokaz završen. ■

Sledeća dva ograničenja predstavljaju poboljšanja granice date nejednakošću (3.18). Setimo se da su brojevi f_{h-i+1} definisani u Lemi 3.8.

Teorema 3.5 *Ako je G povezan DUG, tada je*

$$\kappa \leq \frac{1}{2} \left(n + \sqrt{n^2 - 4(M_h N_h - m')} \right),$$

gde je

$$m' = m - \frac{n(n - N_h)}{(n - n_1)^2(n - m_1)} \sum_{i=1}^h m_i f_{h-i+1}.$$

Dokaz. Na isti način kao i u dokazu Teoreme 3.4 dolazimo do zaključka da važi

$$(\kappa - M_h)b_1 = \sum_{i=1}^h m_i a_i.$$

Koristeći nejednakost (3.15), zaključujemo da je

$$\kappa - M_h \leq \sum_{i=1}^h \frac{m_i}{\kappa - N_{h-i+1}} \left(N_{h-i+1} - \frac{\kappa f_{h-i+1}}{(\kappa - n_1)(\kappa - M_i)} \right),$$

pa zato važi

$$(\kappa - M_h)(\kappa - N_h) \leq m - \frac{\kappa(\kappa - N_h)}{(\kappa - n_1)^2(\kappa - m_1)} \sum_{i=1}^h m_i f_{h-i+1}.$$

Imajući u vidu da je $\kappa \leq n$, na osnovu Teoreme 3.4 sledi

$$(\kappa - M_h)(\kappa - N_h) \leq m',$$

čime je dokaz završen. ■

Sledeća teorema može se dokazati na sličan način.

Teorema 3.6 *Ako je G povezan DUG, tada je*

$$\kappa \leq \frac{1}{2} \left(n + \sqrt{n^2 - 4(M_h N_h - m'')} \right),$$

gde je

$$m'' = m - \frac{\kappa'(\kappa' - N_h)}{(\kappa' - n_1)^2(\kappa' - m_1)} \sum_{i=1}^h m_i f_{h-i+1}$$

za

$$\kappa' = \frac{1}{2} \left(n + \sqrt{n^2 - 4(M_h N_h - m')} \right).$$

Sada utvrđujemo neka ograničenja Q -indeksa DUG-a koristeći se matičnom tehnikom.

Sledeća podela skupa čvorova DUG-a G

$$V = \bigcup_{k=1}^h U_k \cup \bigcup_{k=1}^h V_k \quad (3.19)$$

jeste regularna (videti Potpoglavlje 1.1) zato što svaki čvor koji pripada skupu U_i i svaki čvor koji pripada skupu V_i ima isti broj suseda u skupovima U_j i V_j , za sve vrednosti $i, j \in \{1, 2, \dots, h\}$. Neka je matrica A_D delitelj grafa $\text{DUG}(m_1, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)$ u odnosu na njegovu Q -matricu, indukovana podelom (3.19). Matrica A_D ima sledeći oblik:

$$A_D = \left(\begin{array}{cccccc|ccccc} N_h & & & & & & n_1 & n_2 & \cdots & n_{h-1} & n_h \\ & N_{h-1} & & & & & n_1 & n_2 & \cdots & n_{h-1} & \\ & & \ddots & & & & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & & & N_2 & & & n_1 & n_2 & & & \\ & & & & N_1 & & n_1 & & & & \\ \hline m_1 & m_2 & \cdots & m_{h-1} & m_h & M_h & & & & & \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{h-1} & & & M_{h-1} & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \ddots & & & \\ m_1 & m_2 & & & & & & & M_2 & & \\ m_1 & & & & & & & & & M_1 & \end{array} \right),$$

pri čemu smatramo da su svi elementi koji nisu navedeni u gornjem zapisu jednaki nuli. Ako je:

$$N = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \cdots & n_{h-1} & n_h \\ n_1 & n_2 & \cdots & n_{h-1} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ n_1 & n_2 & & & \\ n_1 & & & & \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \cdots & m_{h-1} & m_h \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{h-1} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ m_1 & m_2 & & & \\ m_1 & & & & \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} N_h & & & & \\ & N_{h-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & N_2 & \\ & & & & N_1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} M_h & & & & \\ & M_{h-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & M_2 & \\ & & & & M_1 \end{pmatrix},$$

tada matricu A_D možemo zapisati u blokovskom obliku na sledeći način:

$$A_D = \begin{pmatrix} D_1 & N \\ M & D_2 \end{pmatrix}.$$

Neka je

$$P = \begin{pmatrix} 0 & xI \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

za neko $x \neq 0$. Matrice

$$PA_D P^{-1} = \begin{pmatrix} D_2 & xM \\ x^{-1}N & D_1 \end{pmatrix}$$

i A_D jesu slične, pa imaju jednake indekse. Izaberimo x tako da sume u prvoj i u $(h+1)$ -oj vrsti budu jednake. Sada je $M_h x^2 - (N_h - M_h)x - N_h = 0$, odnosno $x = \frac{N_h}{M_h}$. Sada na osnovu Frobenijusove (*F. G. Frobenius*) teoreme (videti [55], Teorema 3.1.1, str. 152–153) sledi naredna teorema.

Teorema 3.7 *Ako je G povezan DUG, tada je*

$$\min \left\{ n_1 \left(\frac{N_h}{M_h} + 1 \right), n_1 \left(\frac{M_h}{N_h} + 1 \right) \right\} \leq \kappa \leq N_h + M_h = n. \quad (3.20)$$

Jasno je, međutim, da gornja granica navedena u prethodnoj teoremi ne predstavlja značajan napredak u potrazi za ograničenjima Q -indeksa DUG-a (setimo se nejednakosti (3.17)). Zato sada poboljšavamo gorenavedeno ograničenje.

Neka je R_i suma elemenata u i -toj vrsti matrice A_D . Jednostavno je uveriti se da važi

$$\begin{aligned} R_i &= 2N_{h-i+1}, & \text{za } i \in \{1, \dots, h\} \\ &= 2M_{h-i+1}, & \text{za } i \in \{h+1, \dots, 2h\}, \end{aligned}$$

pa je zato

$$\max R_i = \max\{2N_h, 2M_h\}.$$

Na osnovu Frobenijusove teoreme je

$$\min\{2n_1, 2m_1\} \leq \kappa \leq \max\{2N_h, 2M_h\}. \quad (3.21)$$

Dobijene gornje granice ne predstavljaju poboljšanje jer je $\max\{2N_h, 2M_h\} \geq n$ (uporediti i sa nejednakošću (3.17)), pa zato koristimo sledeće nejednakosti (videti [55]):

$$\min_i \frac{\sum_{j=1}^h (A_D)_{ij} R_j}{R_i} \leq \kappa \leq \max_i \frac{\sum_{j=1}^h (A_D)_{ij} R_j}{R_i}.$$

Teorema 3.8 *Ako je G povezan DUG, tada je*

$$\min\{n_1 + M_h, m_1 + N_h\} \leq \kappa \leq \max \left\{ \frac{m}{N_h} + N_h, \frac{m}{M_h} + M_h \right\}. \quad (3.22)$$

Ograničenja data nejednakostima (3.22) jesu očigledno poboljšanje nejednakosti (3.20) i nejednakosti (3.21), ali je donja granica i dalje lošija u poređenju sa donjom granicom datom u Posledici 3.1.

3.2.4 Numerički rezultati

U ovom potpoglavlju prikazujemo nekoliko primera koji služe da se stekne bolji uvid u kvalitet ograničenja do kojih smo došli u prethodnom potpoglavlju.

Izračunavamo donje granice koje su predstavljene u Teoremi 3.2 i Teoremi 3.3, kao i gornje granice predstavljene u Teoremi 3.4, Teoremi 3.5, Teoremi 3.6 i Teoremi 3.8. Primitimo da je granica data u Teoremi 3.2 uvek celobrojna. U svakom primeru prikazan je i red odgovarajućeg DUG-a budući da on predstavlja još jednu gornju granicu (videti nejednakost (3.17)). Jednostavno se može proveriti da su sve donje granice koje su uvedene u Posledici 3.1, Teoremi 3.7 i Teoremi 3.8, date jednostavnim izrazima, i da su ta ograničenja u nekim slučajevima gruba, pa stoga neće biti uključene u naše primere. Takođe u svakom od primera izračunavamo i relativnu grešku.

Primer 1. Prvo razmatramo slučajno izabran DUG malog reda, kao i neke DUG-ove većeg reda koji su konstruisani na osnovu prethodno pomenutog:

$$G_1 = DUG(2, 2, 5, 3; 2, 3, 1, 1);$$

$$G_2 = DUG(10, 10, 25, 15; 10, 15, 5, 5);$$

$$G_3 = DUG(200, 200, 500, 300; 200, 300, 100, 100).$$

	G_1	G_2	G_3
Teorema 3.3	13.6785 -12.57%	68.3923 -12.57%	1367.8452 -12.57%
Teorema 3.2	14 -10.52%	70 -10.52%	1400 -10.52%
κ	15.6451	78.2257	1564.5133
Teorema 3.8	16.7500 7.06%	83.7500 7.06%	1675.0000 7.06%
Teorema 3.6	17.0210 8.79%	85.1052 8.79%	1702.1030 8.79%
Teorema 3.5	17.0550 9.01%	85.2749 9.01%	1705.4985 9.01%
Teorema 3.4	17.4530 11.56%	87.2649 11.56%	1745.2987 11.56%
n	19 21.44%	95 21.44%	1900 21.44%

Primetimo da je broj $\kappa(G_2)$ (odnosno $\kappa(G_3)$) veoma blizak broju $5\kappa(G_1)$ (odnosno broju $100\kappa(G_3)$); zaključujemo da je $5\kappa(G_1) - \kappa(G_2) \approx 10^{-7}$. Budući da slične činjenice važe za sve granice koje ispitujemo (uporediti i odgovarajuće odnose), dobijamo i iste rezultate za relativne greške.

Primer 2. Ovde razmatramo DUG-ove koje smo dobili tako što smo u DUG-u G_1 umnožili neke od parametara:

$$H_1 = DUG(20000, 2, 5, 3; 2, 3, 1, 10000);$$

$$H_2 = DUG(20000, 2, 5, 3; 2, 3, 10000, 1);$$

$$H_3 = DUG(20000, 2, 5, 3; 2, 30000, 1, 1);$$

$$H_4 = DUG(20000, 2, 5, 3; 20000, 3, 1, 1).$$

	H_1	H_2	H_3	H_4
Teorema 3.3	3006.0284 $-8 \cdot 10^{-6}\%$	3008.0175 $-5 \cdot 10^{-6}\%$	5010.9908 $-5 \cdot 10^{-7}\%$	4014.9731 $-3 \cdot 10^{-6}\%$
Teorema 3.2	3006 $-1 \cdot 10^{-3}\%$	3007 -0.03%	5009 -0.04%	4010 -0.12%
κ	3006.0287	3008.0177	5010.9909	4014.9732
Teorema 3.8	3011.0164 0.17%	3012.0104 0.13%	5010.9980 $1 \cdot 10^{-4}\%$	4014.9866 $3 \cdot 10^{-4}\%$
Teorema 3.6	3008.2682 0.07%	3009.8145 0.06%	5011.7199 0.15%	4014.9800 $2 \cdot 10^{-4}\%$
Teorema 3.5	3008.2960 0.08%	3009.8323 0.06%	5011.7199 0.15%	4014.9800 $2 \cdot 10^{-4}\%$
Teorema 3.4	3012.6750 0.22%	3013.3388 0.18%	5012.2008 0.02%	4014.9933 $5 \cdot 10^{-4}\%$
n	3016 0.33%	3016 0.27%	5014 0.06%	4015 $7 \cdot 10^{-4}\%$

U ovom primeru su sve granice (više ili manje) bliske tačnoj vrednosti Q -indeksa. Već smo naglasili da granice koje su predstavljene u Teoremi 3.5 i Teoremi 3.6 poboljšavaju one koje su predstavljene u Teoremi 3.4. Zaključujemo da se granica predstavljena u Teoremi 3.8 ne može porediti sa njima. Suprotno prethodnom primeru, ovde Teorema 3.2 daje bolju procenu nego Teorema 3.3.

Primer 3. Parametri ovih DUG-ova dobijeni su množenjem parametara DUG-a G_1 sa 1, 10, 100 ili 1000 *ad hoc*.

$$I_1 = DUG(2, 2, 5, 3; 2000, 300, 10, 1);$$

$$I_2 = DUG(2, 2, 5, 3; 2, 30, 100, 1000);$$

$$I_3 = DUG(2000, 200, 50, 30; 2000, 300, 10, 1).$$

	I_1	I_2	I_3
Teorema 3.3	2255.0867 -2.65%	1118.5026 -1.37%	4562.6064 -0.28%
Teorema 3.2	2314 -0.10%	1134 $-6 \cdot 10^{-5}\%$	4550 $-1 \cdot 10^{-3}\%$
κ	2316.3632	1134.0007	4562.6584
Teorema 3.8	2322.5716 0.26%	1134.3799 0.03%	4563.2717 0.01%
Teorema 3.6	2322.5716 0.27%	1134.4002 0.04%	4563.1367 0.01%
Teorema 3.5	2322.5733 0.27%	1134.4000 0.04%	4563.1369 0.01%
Teorema 3.4	2322.5737 0.27%	1134.4002 0.04%	4563.6312 0.02%
n	2012 0.29%	1144 0.88%	4253 0.03%

Imajući u vidu donju granicu predstavljenu u Teoremi 3.3, mogli bismo doći do zaključka da do njenog odstupanja od tačne vrednosti dolazi kod grafa I_1 (i drugih sličnih grafova). Primitimo da Teorema 3.6 često daje bolju procenu nego Teorema 3.5, ali ne uvek – videti grafove I_2 i J_2 u sledećem primeru.

Primer 4. Konačno, posmatrajmo proširenja originalnih grafova:

$$J_1 = DUG(2, 2, 5, 3, 2, 3, 1, 1; 2, 3, 1, 1, 2, 2, 5, 3);$$

$$J_2 = DUG(20000, 2, 5, 3, 10, 10, 10, 10; 2, 3, 1, 10000, 10, 10, 10, 10);$$

$$J_3 = DUG(2, 2, 5, 3, 1, 1, 1, 1; 2000, 300, 10, 1, 1, 1, 1, 1).$$

	J_1	J_2	J_3
Teorema 3.3	23.1888 -15.56%	30065.9176 $-6 \cdot 10^{-7}\%$	2313.0140 -0.62%
Teorema 3.2	23 -16.24%	30046 -0.07%	2324 -0.15%
κ	27.4601	30065.9178	2327.5409
Teorema 3.8	29.0526 5.80%	30080.9446 0.05%	2330.8445 0.14%
Teorema 3.6	32.3032 17.64%	30072.6747 0.02%	2330.8452 0.14%
Teorema 3.5	32.3022 17.64%	30072.7003 0.02%	2330.8452 0.14%
Teorema 3.4	32.8203 19.52%	30085.9668 0.07%	2330.8456 0.14%
n	21 38.38%	30096 0.10%	2331 0.15%

Primetimo da se ovi rezultati mogu porediti sa odgovarajućim postojećim ograničenjima u smislu spektra matrice susedstva.

3.3 Ugnežđeni grafovi sa ograničenom drugom Q -sopstvenom vrednošću i ograni

U ovom poglavlju predstavljamo neka opšta tvrđenja koja se odnose na spektar nenegativne Laplasove matrice grafa.

Razmatramo i ugnežđene grafove čija je druga Q -sopstvena vrednost ograničena odozgo proizvoljnom celobrojnom konstantom; dajemo dovoljne uslove za ovo svojstvo, a potom razmatramo i neke posebne slučajeve. Dajemo i neke strukturalne osobine grafova čija je druga Q -sopstvena vrednost ograničena odozgo proizvoljnom celobrojnom konstantom.

Na kraju, određujemo sve DUG-ove čija je druga sopstvena vrednost matrice susedstva ograničena odozgo sa $\sqrt{2}$.

3.3.1 Ugnežđeni grafovi sa ograničenom drugom sopstvenom vrednošću

U prethodnim dvema glavama ove disertacije razmatrali smo drugu sopstvenu vrednost matrice susedstva regularnih grafova. Pomenuli smo da druga sopstvena vrednost proizvoljnog grafa može biti korisna prilikom klasifikacije grafova unutar neke razmatrane familije, a može poslužiti i za opisivanje nekih strukturalnih osobina pomenutih grafova. U ovom potpoglavlju razmatramo ugnežđene grafove sa ograničenom drugom Q -sopstvenom vrednošću. Ispostavlja se da se ugnežđeni grafovi mogu lakše klasifikovati u odnosu na svoju drugu Q -sopstvenu vrednost nego u odnosu na drugu sopstvenu vrednost svoje matrice susedstva. Štaviše, neke strukturalne osobine ovih grafova usko su povezane sa njihovom drugom Q -sopstvenom vrednošću (ali i sa nekim drugim Q -sopstvenim vrednostima).

Kompletan proizvod $G_1 \nabla G_2$ dva (disjunktna) grafa G_1 i G_2 jeste graf koji se dobija tako što se u disjunktnoj uniji grafova G_1 i G_2 svaki čvor grafa G_1 spoji granom sa svakim čvorom grafa G_2 . Sledeća teorema, koja se može naći u radovima [38] i [4], pa je zato navodimo bez dokaza, govori o Q -polinomu kompletnog proizvoda dva regularna grafa.

Teorema 3.9 *Ako je G_1 r_1 -regularan graf reda n_1 i G_2 r_2 -regularan graf reda n_2 , tada je:*

$$Q_{G_1 \nabla G_2}(x) = \frac{Q_{G_1}(x - n_2)Q_{G_2}(x - n_1)}{(x - 2r_1 - n_2)(x - 2r_2 - n_1)}((x - 2r_1 - n_2)(x - 2r_2 - n_1) - n_1n_2).$$

Koristeći formulu (3.3) dolazimo do posledice prethodne teoreme.

Posledica 3.2 *Ako je G_1 r_1 -regularan graf reda n_1 i G_2 r_2 -regularan graf reda n_2 , tada je:*

$$P_{S(G_1 \nabla G_2)}(x) = x^{\frac{n_1(r_1-2)+n_2(r_2-2)}{2}+n_1n_2} Q_{G_1 \nabla G_2}(x^2).$$

Koristeći Teoremu 3.9 možemo izračunati Q -polinome dve posebne vrste grafova: kompletnih bipartitnih grafova K_{n_1, n_2} i grafova $K_{n_1} \nabla n_2 K_1$ (ovi grafovi mogu se dobiti tako što se u kompletnom grafu $K_{n_1+n_2}$ ukloni klika reda n_2).

Posledica 3.3

$$Q_{K_{n_1, n_2}}(x) = (x - n_1 - n_2)(x - n_1)^{n_2-1}(x - n_2)^{n_1-1}x; \quad (3.23)$$

$$Q_{K_{n_1} \nabla_{n_2} K_1}(x) = (x - n_1)^{n_2-1} (x - n_1 - n_2 + 2)^{n_1-1} \times \quad (3.24)$$

$$(x^2 - (3n_1 + n_2 - 2)x + 2n_1(n_1 - 1)).$$

Sada predstavljamo nekoliko rezultata koji se odnose na ugneždene grafove. Nije teško uočiti da proizvoljan nepovezan UG sadrži najviše jednu netrivialnu komponentu i skup izolovanih čvorova. Zato naše istraživanje ograničavamo na povezane UG-ove, a sa jednostavnim izmenama svi dobijeni rezultati mogu se proširiti na slučajeve nepovezanih UG-ova.

Lema 3.9 *Neka je $G = UG(m_1, \dots, m_j, m_{j+1}, \dots, m_h; n_1, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_h)$ povezan UG reda n , i neka su $G' = UG(m_1, \dots, m_j + 1, m_{j+1} - 1, \dots, m_h; n_1, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_h)$ i $G'' = UG(m_1, \dots, m_j, m_{j+1}, \dots, m_h; n_1, \dots, n_k + 1, n_{k+1} - 1, \dots, n_h)$. Tada važi:*

$$\begin{aligned} \kappa_i(G) &\leq \kappa_i(G'), i = 1, \dots, n; \\ \kappa_i(G) &\leq \kappa_i(G''), i = 1, \dots, n \text{ kad god je graf } G \text{ DUG}; \\ \kappa_i(G) &\geq \kappa_i(G''), i = 1, \dots, n \text{ kad god je graf } G \text{ PUG}. \end{aligned}$$

Dokaz. Uočimo da se graf G' može dobiti tako što se u grafu G doda odgovarajući broj grana koje su sve incidentne sa istim čvorom, dok se graf G'' može dobiti na isti način ukoliko je graf G DUG, ili uklanjanjem odgovarajućih grana ako je graf G PUG. Rezultat sada sledi na osnovu činjenice da dodavanje novih grana bilo kom grafu implicira povećanje (koje ne mora biti strogo) svih njegovih Q -sopstvenih vrednosti. ■

Lema 3.10 *Neka je $G = UG(m_1, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)$ povezan UG. Tada važi:*

$$\begin{aligned} \kappa_2(G) &\leq \max \left\{ \sum_{i=1}^h m_i, \sum_{i=1}^h n_i \right\} \text{ kad god je graf } G \text{ DUG}; \\ \kappa_2(G) &\leq n - 2 \text{ kad god je graf } G \text{ PUG}. \end{aligned}$$

Dokaz. Koristeći prethodnu lemu i jednakosti (3.23) i (3.24) (Posledica 3.3), zaključujemo da važi:

$$\begin{aligned} \kappa_2(DUG(m_1, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)) &\leq \kappa_2 \left(DUG \left(\sum_{i=1}^h m_i, \sum_{i=1}^h n_i \right) \right) = \\ &\kappa_2 \left(K_{\sum_{i=1}^h m_i, \sum_{i=1}^h n_i} \right) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^h m_i, \sum_{i=1}^h n_i \right\}. \end{aligned}$$

Slično,

$$\begin{aligned} \kappa_2(PUG(m_1, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)) &\leq \kappa_2 \left(PUG \left(\sum_{i=1}^h m_i, \sum_{i=1}^h n_i \right) \right) = \\ &\kappa_2 \left(K_{\sum_{i=1}^h m_i} \nabla \sum_{i=1}^h n_i K_1 \right) = \sum_{i=1}^h (m_i + n_i) - 2 = n - 2. \end{aligned}$$

■

Primetimo da je odgovarajuće ograničenje za PUG-ove dato u radu [69], ali za grafove koji se mogu dobiti tako što se u potpunom grafu K_n ukloni najviše $n - 2$ grana. Proizvoljan PUG može se dobiti na takav način, međutim broj uklonjenih grana može biti i veći od $n - 2$. Rezultat predstavljen u prethodnoj teoremi takođe se može uporediti sa Teoremom 3.1 i Posledicom 3.7 rada [6].

Pre nego što dokažemo jednu posledicu prethodne leme, razmotrimo i preostale Q -sopstvene vrednosti. Koristimo princip delitelja (videti Poglavlje 3.1), odnosno određujemo delitelje za oba tipa ugnežđenih grafova. Jednostavno je uveriti se da delitelj povezanog grafa $UG(m_1, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)$ ima $2h$ glavnih Q -sopstvenih vrednosti (ili možda $2h - 1$ ako je $n_h = 0$ u slučaju PUG-a). Ostatak Q -spektra sastoji se od Q -sopstvenih vrednosti koje nisu glavne. Njih određujemo u sledećoj teoremi.

Teorema 3.10 *Ako je $G = UG(m_1, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)$ povezan ugnežđeni graf, tada je $2h$ njegovih Q -sopstvenih vrednosti određeno njegovim deliteljem. Ostale Q -sopstvene vrednosti su:*

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{h+1-i} m_j \text{ sa višestrukošću } m_i - 1 \text{ (} i = 1, \dots, h \text{)} \text{ i} \\ &\sum_{j=1}^{h+1-i} n_j \text{ sa višestrukošću } n_i - 1 \text{ (} i = 1, \dots, h \text{)} \end{aligned}$$

ako je G DUG, ili

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^h m_j + \sum_{j \geq i} n_j - 2 \text{ sa višestrukošću } m_i - 1 \text{ (} i = 1, \dots, h \text{)} \text{ i} \\ &\sum_{j \geq i} m_j \text{ sa višestrukošću } n_i - 1 \text{ (} i = 1, \dots, h \text{)} \end{aligned}$$

ako je G PUG.

Dokaz. Pretpostavimo da je graf G DUG. Tada svaki od skupova U_i , ili V_i , $i = 1, \dots, h$, sadrži čvorove koji su međusobni duplikati (videti Poglavlje 3.1). Ovim čvorovima odgovaraju navedene Q -sopstvene vrednosti.

Ako je graf G PUG, tada svaki od skupova U_i (odnosno V_i) sadrži čvorove koji su međusobni koduplikati (odnosno duplikati), a njima odgovaraju navedene Q -sopstvene vrednosti u slučaju PUG-a. ■

Naredna teorema je neposredna posledica Leme 3.10.

Teorema 3.11 *Neka je G povezan ugneždeni graf, i neka $\Delta(G)$ označava maksimalan stepen čvora u grafu G . Tada je $\kappa_2(G) \leq \Delta(G)$ ako je graf G DUG, i $\kappa_2(G) \leq \Delta(G) - 1$ ako je G PUG.*

Dokaz. Ako je graf G DUG, onda važi $\Delta(G) = \max \left\{ \sum_{i=1}^h m_i, \sum_{i=1}^h n_i \right\}$, a ukoliko je G PUG, tada je $\Delta(G) = n - 1$. Rezultat sledi iz činjenice da $\kappa_2(G)$ ne može biti veće od granica koje su date u Lemi 3.10. ■

U suštini, prethodna teorema predstavlja dovoljne uslove pod kojima je druga Q -sopstvena vrednost ugneždenog grafa ograničena odozgo brojem $\alpha \in \mathbb{N}$ (može se proveriti da navedeno tvrđenje ne važi za proizvoljan graf). U narednoj posledici određujemo sve PUG-ove koji zadovoljavaju uslov $\kappa_2 \leq 4$. Sličan postupak može se primeniti i u bilo kom drugom slučaju. U ovom i u sledećem poglavlju '*' označava bilo koji prirodan broj.

Posledica 3.4 *Neka je $G = PUG(m_1, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)$ povezan graf. Ukoliko važi $\kappa_2(G) \leq 4$, tada je maksimalan stepen čvora u grafu G ograničen odozgo brojem 5, ili je G indukovan podgraf nekog od sledećih PUG-ova: $PUG(1, 3; 3)$, $PUG(1, 1, 1; 2, 2)$, $PUG(1, 2; 3, 1)$, $PUG(1, 1, 1; *, 1)$, $PUG(1, 1; *, 2)$, $PUG(1, 1; 2, 3)$.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 3.11 važi $\kappa_2(G) \leq 4$ kad god je $\Delta(G) \leq 5$. Ostaje da razmotrimo PUG-ove čiji je maksimalan stepen čvora veći od 5. To znači da svaki čvor koji pripada skupu U_1 ima stepen veći od 5, ali sada, na osnovu Teoreme 3.10, zaključujemo da parametar m_1 mora biti jednak 1 (inače je $\kappa_1 > 4$). Imajući na umu da i ostale Q -sopstvene vrednosti koje su navedene u istoj teoremi moraju biti ograničene odozgo brojem 4, dobijamo vrlo ograničavajuće uslove za ostale parametre. Na kraju, direktnim izračunavanjem dolazimo do navedenih PUG-ova. ■

Sada utvrđujemo neke relacije koje postoje između strukturalnih osobina ugneždenih grafova i njihovih Q -sopstvenih vrednosti. Pretpostavimo (bez gubitka opštosti) da za neki DUG G važi $\sum_{i=1}^h n_i = \max \left\{ \sum_{i=1}^h m_i, \sum_{i=1}^h n_i \right\}$. Tada je $\kappa_2(G) =$

$\Delta(G)$ kad god je $m_1 \geq 2$ (videti Teoremu 3.10). Štaviše, u ovom slučaju je $\kappa_2(G) = \kappa_3(G) = \dots = \kappa_{m_1}(G) = \Delta(G)$. Slično, ako je G povezan PUG, tada je $\kappa_2(G) = \Delta(G) - 1$ kad god je $m_1 \geq 2$. U ovom slučaju važi i $\kappa_2(G) = \kappa_3(G) = \dots = \kappa_{m_1}(G) = \Delta(G)$.

Takođe, ostale Q -sopstvene vrednosti koje nisu glavne, navedene u Teoremi 3.10, celobrojne su i usko su povezane sa vrednostima m_i i n_i ($i = 1, \dots, h$), pa na taj način određuju strukturu grafa.

Kao što je rečeno, graf fiksiranog reda i veličine sa maksimalnim Q -indeksom jeste PUG. Sada predstavljamo sledeći rezultat.

Teorema 3.12 *Neka je graf $G = PUG(m_1, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)$ reda $n > 2h$, i neka važi $m_i, n_i > 0, i = 1, \dots, h$. Tada su sve Q -sopstvene vrednosti koje nisu glavne, pomenute u Teoremi 3.10, ograničene odozgo sa $n - 2$. Sve one dostižu ovu granicu ako je $m_1 = n - 2h + 1$.*

Dokaz. Budući da je $\sum_{i=1}^h (m_i + n_i) = n$, zaključujemo da su navedene Q -sopstvene vrednosti ograničene odozgo sa $n - 2$, i da dostižu ovu granicu ako broj m_1 ima maksimalnu moguću vrednost (to jest ako je $m_1 = n - 2h + 1$), a svi ostali parametri imaju vrednost 1. ■

Primetimo, na kraju, da se, koristeći formulu (3.3) i Teoremu 2.19 monografije [20], rezultati koji su predstavljeni u ovom poglavlju mogu preneti na spektar matrice susedstva grafova potpodele i grafova grana.

3.3.2 Duplo ugnežđeni grafovi koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$

U ovom potpoglavljju razmatramo spektar matrice susedstva DUG-a. Određujemo sve povezane DUG-ove čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo brojem $\sqrt{2}$. Budući da je svaki nepovezan DUG disjunktna unija najviše jedne netrivialne komponente i određenog broja izolovanih čvorova, na ovaj način određujemo sve DUG-ove koji zadovoljavaju pomenutu spektralnu osobinu. Najpre predstavljamo rezultate koji se odnose na strukturu i spektralne osobine ovih grafova. Dokazi tvrđenja koja su navedena posle Teoreme 3.14 tehničke su prirode, a sama tvrđenja su veoma slična rezultatima navedenim u radovima [65] i [57], pa ovde u celini prikazujemo samo dokaz pomenute teoreme. Ostala tvrđenja se dokazuju na sličan način. Svi određeni DUG-ovi, predstavljeni su u tabelama u Potpoglavljju 3.3.3, u kojem takođe prikazujemo i jednu posledicu koja se odnosi na DUG-ove koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq 1$.

Kako bismo pojednostavili zapise pojedinih izraza koji se nadalje pojavljuju, uvodimo sledeću notaciju: $(a_1, a_2, \dots, a_i^{k+1}, a_{i+k+1}, \dots, a_n)$ kad god n -torka (a_1, a_2, \dots, a_n) zadovoljava uslov $a_i = a_{i+1} = \dots = a_{i+k}, 1 \leq i, i+k \leq n$.

Neka je G proizvoljan povezan DUG. Jednostavno je videti da podela skupa čvorova grafa G na neprazne podskupove $U_1, U_2, \dots, U_h, V_1, V_2, \dots, V_h$ određuje delitelj H grafa G . Matrica susedstva A_H multigrafa H jeste formata $2h \times 2h$ i ima sledeći oblik:

$$A_H = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} & & & & & n_1 & n_2 & \dots & n_{h-1} & n_h \\ & & & & & n_1 & n_2 & \dots & n_{h-1} & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & n_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \hline m_1 & m_2 & \dots & m_{h-1} & m_h & & & & & \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{h-1} & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & \\ m_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & & \end{array} \right).$$

Teorema 3.13 *Neka je λ sopstvena vrednost proizvoljnog povezanog DUG-a G različita od 0, i neka je H delitelj grafa G . Tada broj λ pripada spektru multigrafa H .*

Dokaz. Postoji tačno $2h$ sopstvenih vrednosti grafa G koje su takođe i sopstvene vrednosti njegovog delitelja; ostale sopstvene vrednosti nisu glavne i odgovaraju skupu čvorova koji su međusobno duplikati. Zato je svaka od tih sopstvenih vrednosti jednaka nuli. ■

Naredni rezultat je direktna posledica prethodne teoreme.

Posledica 3.5 *Neka je G proizvoljan DUG, neka je H njegov delitelj, i neka je $k \in \mathbb{R}, k > 0$. Tada je:*

- (i) $\lambda_2(G) \leq k$ ako i samo ako je $\lambda_2(H) \leq k$;
- (ii) $P_G(k) \leq 0$ (odnosno $P_G(k) > 0$) ako i samo ako je $P_H(k) \leq 0$ (odnosno $P_H(k) > 0$).

Ova posledica nam omogućava da razmatramo spektar delitelja H grafa G umesto spektra samog grafa G . Nije teško videti da ako važi $P_H(\sqrt{2}) > 0$, tada je druga sopstvena vrednost multigrafa H veća od $\sqrt{2}$, pa je i druga sopstvena vrednost grafa G takođe veća od $\sqrt{2}$. Važi i sledeća lema.

Lema 3.11 *Neka je G proizvoljan DUG, $G = DUG(m_1, \dots, m_i, \dots, m_h; n_1, \dots, n_j, \dots, n_h)$, neka je H njegov delitelj i neka je $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$. Tada:*

- (i) *Ako je $\lambda_2(DUG(m_1, \dots, m_{i-1}, 1, m_{i+1}, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)) < k$ i $P_H(k) < 0$ za svako $m_i \in \mathbb{N}$, tada je $\lambda_2(DUG(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)) < k$ za svako $m_i \in \mathbb{N}$;*
- (ii) *Ako je $\lambda_2(DUG(m_1, \dots, m_{i-1}, 1, m_{i+1}, \dots, m_h, n_1, \dots, n_{j-1}, 1, n_{j+1}, \dots, n_h)) < k$, i $P_H(k) < 0$ za svako $m_i, n_j \in \mathbb{N}$, tada je $\lambda_2(DUG(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \dots, m_h, n_1, \dots, n_{j-1}, n_j, n_{j+1}, \dots, n_h)) < k$ za svako $m_i, n_j \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. (i) Na osnovu prethodne posledice, iz $P_H(k) < 0$ sledi da je $P_G(k) < 0$. Pretpostavimo suprotno, to jest, neka je $\lambda_2(DUG(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)) < k$, i $\lambda_2(DUG(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)) \geq k$. Najpre, ako je $\lambda_2(DUG(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)) = k$, tada važi $P_H(k) = P_G(k) = 0$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom datom u teoremi. Takođe, iz $\lambda_2(DUG(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)) > k$ i $P_G(k) < k$ sledi da postoje barem 3 sopstvene vrednosti grafa $DUG(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)$ koje su veće od k . S druge strane, najviše jedna sopstvena vrednost podgraфа tog graфа (koji je dobijen uklaњanjem tačno jednog čvora) $DUG(m_1, \dots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)$ zadovoljava pomenuti uslov, što nije moguće na osnovu Teoreme 0.2.

Sličnim rasuđivanjem, ali razmatrajući sada dva parametra, m_i i n_j , jednostavno možemo dokazati i tvrđenje (ii). ■

U narednoj lemi predstavljamo gornje ograničenje za parametar h povezanog DUG-a koji zadovoljava $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$.

Lema 3.12 *Neka je $G = DUG(m_1, \dots, m_h; n_1, \dots, n_h)$ povezan DUG koji zadovoljava $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$. Tada je $h \leq 6$.*

Dokaz. Pretpostavimo da važi $h > 6$. Uočimo indukovani podgraf G' graфа G dobijen tako što su u grafu G uklonjene ćelije $U_2, \dots, U_{h-3}, V_3, \dots, V_{h-4}$ kao i svi osim jednog čvora u svih preostalih deset ćelija. Druga sopstvena vrednost graфа G' veća je od $\sqrt{2}$ (što možemo direktno izračunati), pa je na osnovu Teoreme 0.2 i druga sopstvena vrednost graфа G veća od $\sqrt{2}$, što je kontradikcija. ■

Sada određujemo sve povezane DUG-ove koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$. Na osnovu Leme 3.12, $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2}$ implicira $h \leq 6$. Prirodno je, dakle, razmatrati sve dopuštene vrednosti h . Setimo se da je osobina $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2}$ nasledna. Dakle, svakom

maksimalnom DUG-u za osobinu $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$ odgovara skup njegovih indukovanih podgrafova – DUG-ova koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$.

Jasno je da za svaki DUG za koji je $h = 1$ važi i $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$ (druga sopstvena vrednost kompletnog bipartitnog grafa jednaka je nuli). Razmotrimo sada sledeći slučaj.

Teorema 3.14 *Neka je $G = DUG(m_1, m_2; n_1, n_2)$ povezan DUG koji zadovoljava $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2}$. Tada je G indukovani podgraf jednog od grafova B_1 – B_{26} predstavljenih u Tabeli 8.*

Dokaz. Direktnim izračunavanjem možemo se uveriti da važi

$$P_H(\sqrt{2}) = 4 - 2(n_1m_2 + m_1n_1 + m_1n_2) + m_1n_1m_2n_2. \quad (3.25)$$

Zamenjujući $m_2 = 2, n_2 = 1$ u ovaj izraz, zaključujemo da je $P_D(\sqrt{2}) = 4 - 4n_1 - 2m_1$, pa je u ovom slučaju $P_H(\sqrt{2}) < 0$ za svako $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$. Takođe jednostavno proveravamo da je $\lambda_2(DUG(1, 2; 1, 1)) \leq \sqrt{2}$. Dakle, na osnovu Leme 3.11 važi $\lambda_2(DUG(m_1, 2; n_1, 1)) \leq \sqrt{2}$ za svako $m_1, n_1 \in \mathbb{N}$. Odgovarajuća familija grafova je u Tabeli 8 predstavljena kao familija B_1 . Takođe, vrednosti parametara m_2 i n_2 ne mogu se povećavati ako je $m_1 \geq 15$ i $n_1 \geq 3$. Ta činjenica se može jednostavno proveriti direktnim izračunavanjem spektara grafova $DUG(15, 3; 3, 1)$ i $DUG(15, 2; 3, 2)$ – za ova dva grafa važi $\lambda_2 > \sqrt{2}$. Možemo na sličan način, primenjujući opet Lemu 3.11, zaključiti da familije grafova B_2 i B_3 predstavljene u Tabeli 8 takođe zadovoljavaju uslov $\lambda_2 < \sqrt{2}$, za svako $m_1, n_2 \in \mathbb{N}$; za grafove koji pripadaju familiji B_2 važi $P_H(\sqrt{2}) = -2m_1$, a za grafove koji pripadaju familiji B_3 važi $P_D(\sqrt{2}) = -4m_1$. Ponovo nije moguće (za dovoljno velike vrednosti parametara m_1 i n_2) povećavati vrednosti parametara m_2 i n_1 ukoliko želimo da očuvamo osobinu $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$ kod grafova koji pripadaju familijama B_2 i B_3 . Graf B_4 predstavljen u Tabeli 8 obezbeđuje gornje ograničenje za vrednosti parametara m_2 i n_2 , odnosno za graf B_4 važi $\lambda_2 = \sqrt{2}$, i taj graf je maksimalan za posmatranu osobinu (što smo proverili direktnim izračunavanjem).

Tri familije grafova i jedan konačan maksimalan graf koje smo opisali određuju granice unutar kojih ćemo tragati za ostalim maksimalnim DUG-ovima (ili familijama DUG-ova) za osobinu $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$.

Počecemo sa familijom B_1 tako što povećavamo vrednost parametra m_2 i fiksiramo vrednost parametra $n_2 = 1$, ali ako je $m_1 \leq 2$, tada za svako $n_1 \in \mathbb{N}$ i svako $m_2 \in \mathbb{N}$ dobijamo grafove koji pripadaju familiji B_3 (ako je $m_1 = 2$) ili podgrafove grafova koji pripadaju familiji B_2 (ako je $m_1 = 1$). Dakle, važi $m_1 \geq 3, n_2 = 1$ i $m_2 \geq 3$. Zamenjujući $m_1 = 3, n_1 = n_2 = 1$ u jednakost (3.25), uočavamo da je

$P_H(\sqrt{2}) = m_1 - 8$, pa važi i $m_1 \leq 8$. Sada je konačno jasno koje slučajeve bi trebalo razmotriti. To su slučajevi $(m_2, n_2) \in \{(i, 1), i = 3, \dots, 8\}$:

(i) $m_2 = 3, n_2 = 1$, $P_D(\sqrt{2}) = (m_1 - 6)(n_1 - 2) - 8$. Ako je $3 \leq m_1 \leq 6$, $P_H(\sqrt{2}) < 0$ važi za svako $n_1 \in \mathbb{N}$ i $\lambda_2(DUG(6, 3; 1, 1)) < \sqrt{2}$, pa imamo familiju $B_5 = DUG(6, 3; n_1, 1)$ predstavljenu u Tabeli 1. Ako je $n_1 \leq 2$, $P_H(\sqrt{2}) < 0$ važi za svako $m_1 \in \mathbb{N}$ i $\lambda_2(DUG(1, 3; 2, 1)) < \sqrt{2}$, pa imamo familiju $B_6 = DUG(m_1, 3; 2, 1)$ predstavljenu u Tabeli 8. Ako je $m_1 \geq 15$ i $n_1 \geq 3$, zaključujemo da je $P_H(\sqrt{2}) \geq 1$, pa se parametri (konačnih) maksimalnih grafova nalaze unutar tih granica. U tom slučaju je:

(i.1) $m_1 = 7$, i tada je $P_H(\sqrt{2}) = n_1 - 10$, pa dolazimo do grafa $B_7 = DUG(7, 3; 10, 1)$;

(i.2) $m_1 = 8$, i tada je $P_H(\sqrt{2}) = 2n_1 - 12$, pa dolazimo do grafa $B_8 = DUG(8, 3; 6, 1)$;

(i.3) $n_1 = 4$, i tada je $P_H(\sqrt{2}) = 2m_1 - 20$, pa dolazimo do grafa $B_9 = DUG(10, 3; 4, 1)$;

(i.4) $n_1 = 3$, i tada je $P_H(\sqrt{2}) = m_1 - 14$, pa dolazimo do grafa $B_{10} = DUG(14, 3; 3, 1)$.

Grafovi B_7 – B_{10} prikazani su u Tabeli 8 i za sve njih važi $\lambda_2 = \sqrt{2}$, činjenica koja se jednostavno može proveriti direktnim izračunavanjem spektara.

(ii) $m_2 = 4, n_2 = 1$, $P_H(\sqrt{2}) = 2((m_1 - 4)(n_1 - 1) - 2)$. Ako je $3 \leq m_1 \leq 4$, $P_H(\sqrt{2}) < 0$ važi za svako $n_1 \in \mathbb{N}$ i $\lambda_2(DUG(4, 4; 1, 1)) < \sqrt{2}$, pa imamo familiju $B_{11} = DUG(4, 4; n_1, 1)$ predstavljenu u Tabeli 8. Ukoliko je $n_1 = 1$, $P_H(\sqrt{2}) < 0$ važi za svako $m_1 \in \mathbb{N}$ i $\lambda_2(DUG(1, 4; 1, 1)) < \sqrt{2}$, pa imamo familiju $B_{12} = DUG(m_1, 4; 1, 1)$ predstavljenu u Tabeli 8. Ako je $m_1 \geq 7$ i $n_1 \geq 2$, važi $P_H(\sqrt{2}) \geq 1$, pa se parametri (konačnih) maksimalnih grafova nalaze unutar tih granica. Slučajevi koji su nam ostali za razmatranje su $m_1 = 5$ i $m_1 = 6$:

(ii.1) $m_1 = 5$, i tada je $P_H(\sqrt{2}) = 2(n_1 - 3)$, pa dolazimo do grafa $B_{13} = DUG(5, 4; 3, 1)$;

(ii.2) $m_1 = 6$, i tada je $P_H(\sqrt{2}) = 2(2n_1 - 4)$, pa dolazimo do grafa $B_{14} = DUG(6, 4; 2, 1)$.

Ponovo se proverom možemo uveriti da za grafove B_{13} i B_{14} važi $\lambda_2 = \sqrt{2}$.

(iii) $m_2 = 5, n_2 = 1$, i u ovom slučaju zaključujemo da je graf $DUG(7, 5; 1, 1)$ zabranjen za osobinu $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$, pa važi $3 \leq m_1 \leq 6$, i sada su mogući slučajevi:

(iii.1) $m_1 = 3$, i tada je $P_H(\sqrt{2}) = -2 - n_1$, i važi $\lambda_2(DUG(3, 5; 1, 1)) < \sqrt{2}$, pa dolazimo do familije $DUG(3, 5; n_1, 1)$, ali je svaki graf koji pripada ovoj familiji indukovani podgraf odgovarajućeg grafa koji pripada familiji $B_{17} = DUG(3, 6; n_1, 1)$;

(iii.2) $m_1 = 4$, i tada je $P_H(\sqrt{2}) = 2n_1 - 4$, pa dolazimo do grafa $B_{15} = DUG(4, 5; 2, 1)$;

(iii.3) $m_1 = 5$ ili $m_1 = 6$, ali budući da je $n_1 = 1$, u oba slučaja važi $P_H(\sqrt{2}) = m_1 - 6$, i rezultujući maksimalni graf je $B_{16} = DUG(6, 5; 1, 1)$.

Za oba grafa, B_{15} i B_{16} , važi $\lambda_2 = \sqrt{2}$.

(iv) $m_2 = 6, n_2 = 1$, i sada je $DUG(5, 6; 1, 1)$ zabranjen podgraf, pa je $3 \leq m_1 \leq 4$. Ako je $m_1 = 3$, važi $P_H(\sqrt{2}) = -2$ i $\lambda_2(DUG(3, 6; 1, 1)) < \sqrt{2}$, pa dolazimo do familije $B_{17} = DUG(3, 6; n_1, 1)$ predstavljene u Tabeli 8, a ako je $m_1 = 4$, tada važi $P_H(\sqrt{2}) = 4n_1 - 4$, pa dolazimo do grafa $B_{18} = DUG(4, 6; 1, 1)$.

(v) $m_2 = 7, n_2 = 1$, graf $DUG(4, 7; 1, 1)$ zabranjen je podgraf, i jedina mogućnost je $m_1 = 3$. Ako je $m_1 = 3$, važi $P_H(\sqrt{2}) = n_1 - 2$, pa dolazimo do grafa $B_{19} = DUG(3, 7; 2, 1)$.

(vi) $m_2 = 8, n_2 = 1$, tada važi $m_1 \leq 3$, ali je u ovom slučaju graf $DUG(3, 8; 2, 1)$ zabranjen podgraf, pa kao jedinu mogućnost imamo graf $B_{20} = DUG(3, 8; 1, 1)$.

Za grafove $B_{18} - B_{20}$ važi $\lambda_2 = \sqrt{2}$. Neka je sada $n_2 = 2$. Tada važi $m_1 \geq 2$ (u suprotnom, dolazimo do familije B_2). Takođe, ako je $n_2 = 2$ i $m_1 \geq 2$, onda je $m_2 \leq 4$ zato što je graf $DUG(2, 5; 1, 2)$ zabranjen podgraf za osobinu $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$. Postoje tri slučaja:

(i) $m_2 = 2, n_2 = 2, P_H(\sqrt{2}) = 2((m_1 - 2)(n_1 - 2) - 2)$, pa ako je $m_1 \geq 5$ i $n_1 \geq 3$, važi $P_H(\sqrt{2}) \geq 1$. Razmatranjem svih mogućnosti, unutar datog opsega, dolazimo do jedne beskonačne familije grafova $B_{21} = DUG(m_1, 2; 2, 2)$ i jednog maksimalnog grafa $B_{22} = DUG(3, 2; 4, 2)$ (važi $\lambda_2(B_{22}) = \sqrt{2}$).

(ii) $m_2 = 3, n_2 = 2, P_H(\sqrt{2}) = 2((2m_1 - 3)(n_1 - 1) - 1)$, pa ako je $m_1 \geq 3$ i $n_1 \geq 2$, važi $P_H(\sqrt{2}) \geq 4$. Razmatranjem svih mogućnosti dolazimo do jedne familije grafova $B_{23} = DUG(m_1, 3; 1, 2)$ i jednog maksimalnog grafa $B_{24} = DUG(2, 3; 2, 2)$ (važi $\lambda_2(B_{24}) = \sqrt{2}$).

(iii) $m_2 = 4$, $n_2 = 2$, i u ovom slučaju je graf $DUG(3, 4; 1, 2)$ zabranjeni podgraf, pa mora biti $m_1 = 2$. Tada je $P_H(\sqrt{2}) = 4n_1 - 4$, i dolazimo do jednog maksimalnog grafa $B_{25} = DUG(2, 4; 1, 2)$ za koji je $\lambda_2 = \sqrt{2}$.

Neka sada važi $n_2 = 3$. Graf B_4 je maksimalan, pa je $m_2 = 3$, ili $m_2 = 4$. Ako je $m_2 = 4$, dolazimo upravo do grafa B_4 . Ukoliko je $n_2 = m_2 = 3$, zaključujemo da je $m_1 \leq 2$ ($n_1 \leq 2$), i graf $DUG(2, 3; 2, 3)$ je zabranjeni podgraf, pa u ovom slučaju imamo jedan maksimalni graf: $B_{26} = DUG(2, 3; 1, 3)$.

Ovim su iscrpljene sve mogućnosti i dokaz je završen. ■

Primetimo da svaki DUG za koji važi $h = 1$ mora biti indukovani podgraf odgovarajućeg grafa koji pripada familiji B_1 prikazanoj u Tabeli 8 (odnosno takav DUG nije maksimalan za osobinu $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$). Sada razmatramo slučaj $h = 3$.

Teorema 3.15 *Neka je $G = DUG(m_1, m_2, m_3; n_1, n_2, n_3)$ povezan DUG koji zadovoljava $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2}$. Tada je G indukovani podgraf jednog od grafova F_1 – F_{69} predstavljenih u Tabeli 9.*

Dokaz. Ponovo možemo izračunati vrednost karakterističnog polinoma delitelja H grafa G u tački $\lambda = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} P_H(\sqrt{2}) &= 8 - 4n_1m_1 - 4n_1m_2 - 4n_1m_3 - 4n_3m_1 - 4n_2m_1 - 4n_2m_2 \\ &\quad + 2n_3m_1n_1m_2 + 2n_3m_1n_1m_3 + 2n_2m_1n_1m_3 + 2n_1m_2n_2m_3 \\ &\quad + 2n_3m_2n_2m_1 - n_3m_2n_2m_3m_1n_1. \end{aligned}$$

Kao i u dokazu prethodne teoreme, analizirajući ovaj izraz, najpre određujemo beskonačne familije DUG-ova (koji zadovoljavaju $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2}$), i na taj način određujemo okvir u kojem će se kretati naše dalje istraživanje. Te familije su:

- (i) $F_1 = DUG(m_1, 1, 2; 1, n_2, 2)$, $m_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $P_H(\sqrt{2}) = -4$;
- (ii) $F_2 = DUG(m_1, 2, 1; 2, n_2, 1)$, $m_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $P_H(\sqrt{2}) = -16$;
- (iii) $F_3 = DUG(m_1, 1, 1; 2, n_2, 2)$, $m_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $P_H(\sqrt{2}) = -8$;
- (iv) $F_4 = DUG(m_1, 2, 2; 1, n_2, 1)$, $m_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $P_H(\sqrt{2}) = -8$;
- (v) $F_5 = DUG(2, m_2, 1; 2, n_2, 1)$, $m_2, n_2 \in \mathbb{N}$, $P_H(\sqrt{2}) = -16$;
- (vi) $F_6 = DUG(1, m_2, 1; 1, n_2, 2)$, $m_2, n_2 \in \mathbb{N}$, $P_H(\sqrt{2}) = -4$;
- (vii) $F_7 = DUG(2, m_2, 2; 1, n_2, 1)$, $m_2, n_2 \in \mathbb{N}$, $P_H(\sqrt{2}) = -8$.

Možemo takođe odrediti granice u kojima se moraju nalaziti vrednosti parametara m_3 i n_3 , zamenjujući $m_1 = m_2 = n_1 = n_2 = 1$ (u izrazu kojim je data vrednost karakterističnog polinoma delitelja H grafa G u tački $\lambda = \sqrt{2}$): $P_H(\sqrt{2}) = m_3 n_3 - 8$. Dakle, postoji tačno jedanaest slučajeva: $n_3 = 1, m_3 = 1, \dots, 8$ ili $n_3 = 2, m_3 = 2, 3, 4$. Proverom (čiji je postupak opisan u dokazu Teoreme 3.14) svih mogućnosti u svakom od ovih slučajeva, i vodeći računa da se krećemo unutar postavljenih ograničenja, dolazimo do maksimalnih konačnih grafova (ili beskonačnih familija grafova) predstavljenih u Tabeli 9. ■

Sledeća dva tvrđenja mogu se dokazati na sličan način.

Teorema 3.16 *Neka je $G = DUG(m_1, m_2, m_3, m_4; n_1, n_2, n_3, n_4)$ povezan DUG koji zadovoljava $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2}$. Tada je G indukovan podgraf jednog od grafova H_1 – H_{77} predstavljenih u Tabeli 10.*

Teorema 3.17 *Neka je $G = DUG(m_1, \dots, m_5; n_1, \dots, n_5)$ povezan DUG koji zadovoljava $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2}$. Tada je G indukovan podgraf jednog od grafova I_1 – I_{27} predstavljenih u Tabeli 11.*

Na kraju, važi i sledeće tvrđenje.

Teorema 3.18 *Graf $G = DUG(1^6; 1^6)$ jeste jedinstveni DUG sa osobinama $h = 6$ i $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2}$.*

Dokaz. Direktnim računanjem spektra uveravamo se da važi $\lambda_2(G) < \sqrt{2}$. Takođe se na isti način možemo uveriti da povećavanje vrednosti bilo kog parametra kojim je graf G određen povlači $\lambda_2(G) > \sqrt{2}$. ■

Sumiranjem prethodnih rezultata dolazimo do sledećeg tvrđenja.

Teorema 3.19 *Neka je G proizvoljan DUG koji zadovoljava $\lambda_2(G) \leq \sqrt{2}$. Tada je G indukovan podgraf jednog od grafova predstavljenih u Tabelama 8–11 ili je $G = DUG(1^6; 1^6)$.*

3.3.3 Podaci o DUG-ovima koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$ i DUG-ovi koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq 1$

Ovde dajemo podatke o duplo ugneždenim grafovima koje smo odredili u prethodnom potpoglavlju. Svaki duplo ugneždeni graf predstavljen je nizom odgovarajućih parametara. Podaci su prikazani u Tabelama 8–11. U Tabeli 8 predstavljeni

Tabela 8: Maksimalni duplo ugnežđeni grafovi koji zadovoljavaju $h = 2$ i $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$

G	m_1	m_2	n_1	n_2	G	m_1	m_2	n_1	n_2	G	m_1	m_2	n_1	n_2
B_1	*	2	*	1	B_{10}	14	3	3	1	B_{19}	3	7	2	1
B_2	*	2	1	*	B_{11}	*	4	1	1	B_{20}	3	8	1	1
B_3	*	1	2	*	B_{12}	4	4	*	1	B_{21}	*	2	2	2
B_4	1	4	1	3	B_{13}	5	4	3	1	B_{22}	3	2	4	2
B_5	6	3	*	1	B_{14}	6	4	2	1	B_{23}	*	3	1	2
B_6	*	3	2	1	B_{15}	4	5	2	1	B_{24}	2	3	2	2
B_7	7	3	10	1	B_{16}	6	5	1	1	B_{25}	2	4	1	2
B_8	8	3	6	1	B_{17}	3	6	*	1	B_{26}	2	3	1	3
B_9	10	3	4	1	B_{18}	4	6	1	1					

su parametri duplo ugnežđenih grafova koji zadovoljavaju $h = 2$ i $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$, u Tabeli 9 prikazani su parametri duplo ugnežđenih grafova koji zadovoljavaju $h = 3$ i $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$, u Tabeli 10 predstavljeni su parametri duplo ugnežđenih grafova koji zadovoljavaju $h = 4$ i $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$, a u Tabeli 11 predstavljeni su parametri duplo ugnežđenih grafova koji zadovoljavaju $h = 5$ i $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$.

Na samom kraju, ukratko, na još jednom primeru dajemo ilustraciju metode za određivanje duplo ugnežđenih grafova čija je druga sopstvena vrednost ograničena odozgo nekom zatom konstantom. Taj primer prikazuje koliko je metoda opisana u prethodnom potpoglavlju jednostavnija za primenu u poređenju sa nekim drugim pristupima istom problemu.

Tabela 9: Maksimalni duplo ugnežđeni grafovi koji zadovoljavaju $h = 3$ i $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$

G	m_1	m_2	m_3	n_1	n_2	n_3
F_1	*	1	2	1	*	2
F_2	*	2	1	2	*	1
F_3	*	1	1	2	*	2
F_4	*	2	2	1	*	1
F_5	2	*	1	2	*	1
Nastavak na sledećoj strani						

Tabela 9 – nastavak

G	m_1	m_2	m_3	n_1	n_2	n_3
F_6	1	*	2	1	*	2
F_7	2	*	2	1	*	1
F_8	6	1	1	*	1	1
F_9	7	1	1	38	1	1
F_{10}	8	1	1	22	1	1
F_{11}	9	1	1	16	1	1
F_{12}	10	1	1	14	1	1
F_{13}	11	1	1	12	1	1
F_{14}	4	2	1	*	1	1
F_{15}	5	2	1	10	1	1
F_{16}	6	2	1	6	1	1
F_{17}	8	2	1	4	1	1
F_{18}	12	2	1	3	1	1
F_{19}	4	3	1	6	1	1
F_{20}	3	4	1	*	1	1
F_{21}	3	5	1	6	1	1
F_{22}	3	2	1	10	2	1
F_{23}	4	2	1	6	2	1
F_{24}	3	3	1	8	2	1
F_{25}	4	3	1	4	2	1
F_{26}	3	4	1	6	2	1
F_{27}	3	5	1	4	2	1
F_{28}	3	4	1	4	3	1
F_{29}	3	5	1	3	4	1
F_{30}	7	3	1	1	8	1
F_{31}	8	3	1	1	4	1
F_{32}	10	3	1	1	2	1
F_{33}	14	3	1	1	1	1
F_{34}	5	4	1	1	1	1
F_{35}	6	3	1	2	*	1
F_{36}	4	4	1	2	*	1
F_{37}	3	6	1	2	*	1
F_{38}	6	3	2	1	*	1
F_{39}	4	4	2	1	*	1
Nastavak na sledećoj strani						

Tabela 9 – nastavak

G	m_1	m_2	m_3	n_1	n_2	n_3
F_{40}	3	6	2	1	*	1
F_{41}	1	2	2	3	2	1
F_{42}	1	1	2	4	2	1
F_{43}	6	1	2	2	1	1
F_{44}	4	2	2	2	1	1
F_{45}	3	2	2	3	1	1
F_{46}	3	4	2	2	1	1
F_{47}	1	4	3	*	1	1
F_{48}	1	12	3	3	1	1
F_{49}	1	8	3	4	1	1
F_{50}	1	6	3	7	1	1
F_{51}	1	5	3	10	1	1
F_{52}	2	*	3	2	1	1
F_{53}	3	4	3	1	1	1
F_{54}	4	2	3	1	1	1
F_{55}	6	1	3	1	1	1
F_{56}	2	*	3	1	2	1
F_{57}	1	4	4	2	1	1
F_{58}	1	3	4	3	1	1
F_{59}	1	2	4	*	1	1
F_{60}	2	*	4	1	1	1
F_{61}	1	4	5	1	1	1
F_{62}	1	1	6	*	1	1
F_{63}	1	2	6	2	1	1
F_{64}	1	1	7	2	1	1
F_{65}	1	1	8	1	1	1
F_{66}	2	2	2	1	*	2
F_{67}	1	*	3	1	2	2
F_{68}	1	*	3	2	1	2
F_{69}	1	*	4	1	1	2

Tabela 10: Maksimalni duplo ugnežđeni grafovi koji zadovoljavaju $h = 4$ i $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$

G	m_1	m_2	m_3	m_4	n_1	n_2	n_3	n_4
H_1	2	*	2	1	2	*	1	1
H_2	2	*	2	2	1	*	1	1
H_3	2	*	1	2	1	*	2	1
H_4	1	*	2	2	1	*	1	2
H_5	*	1	1	1	1	4	1	1
H_6	*	1	1	1	1	1	4	1
H_7	*	1	1	1	1	2	2	1
H_8	4	2	1	1	1	*	1	1
H_9	5	2	1	1	1	8	1	1
H_{10}	6	2	1	1	1	4	1	1
H_{11}	8	2	1	1	1	2	1	1
H_{12}	12	2	1	1	1	1	1	1
H_{13}	4	3	1	1	1	4	1	1
H_{14}	3	4	1	1	1	*	1	1
H_{15}	3	5	1	1	1	4	1	1
H_{16}	7	1	1	1	1	36	1	1
H_{17}	8	1	1	1	1	20	1	1
H_{18}	9	1	1	1	1	13	1	1
H_{19}	10	1	1	1	1	12	1	1
H_{20}	11	1	1	1	1	10	1	1
H_{21}	12	1	1	1	1	9	1	1
H_{22}	14	1	1	1	1	8	1	1
H_{23}	16	1	1	1	1	7	1	1
H_{24}	22	1	1	1	1	6	1	1
H_{25}	38	1	1	1	1	5	1	1
H_{26}	3	4	1	1	2	*	1	1
H_{27}	4	2	1	1	2	*	1	1
H_{28}	6	1	1	1	2	*	1	1
H_{29}	3	1	1	1	3	1	1	1
H_{30}	3	2	2	1	1	1	1	1
H_{31}	1	2	2	1	*	1	1	1
H_{32}	1	3	2	1	10	1	1	1

Nastavak na sledećoj strani

Tabela 10 – nastavak

G	m_1	m_2	m_3	m_4	n_1	n_2	n_3	n_4
H_{33}	1	4	2	1	6	1	1	1
H_{34}	1	6	2	1	4	1	1	1
H_{35}	1	10	2	1	3	1	1	1
H_{36}	1	1	2	1	10	2	1	1
H_{37}	1	2	2	1	3	5	1	1
H_{38}	1	4	2	1	3	4	1	1
H_{39}	1	6	2	1	3	3	1	1
H_{40}	1	8	2	1	3	2	1	1
H_{41}	1	4	2	1	4	2	1	1
H_{42}	1	2	2	1	4	3	1	1
H_{43}	1	2	2	1	6	2	1	1
H_{44}	1	12	3	1	1	1	1	1
H_{45}	1	4	3	1	2	1	1	1
H_{46}	1	2	3	1	6	1	1	1
H_{47}	1	1	3	1	8	2	1	1
H_{48}	1	5	3	1	1	8	1	1
H_{49}	1	6	3	1	1	4	1	1
H_{50}	1	8	3	1	1	2	1	1
H_{51}	1	4	3	1	2	*	1	1
H_{52}	1	2	3	1	3	4	1	1
H_{53}	1	2	3	1	4	2	1	1
H_{54}	1	3	4	1	1	1	1	1
H_{55}	1	2	4	1	2	1	1	1
H_{56}	1	1	4	1	3	5	1	1
H_{57}	1	1	4	1	4	3	1	1
H_{58}	1	1	4	1	6	2	1	1
H_{59}	1	2	4	1	2	*	1	1
H_{60}	1	1	5	1	3	4	1	1
H_{61}	1	1	5	1	4	2	1	1
H_{62}	1	1	6	1	2	*	1	1
H_{63}	1	2	2	1	1	2	2	1
H_{64}	6	1	1	2	1	*	1	1
H_{65}	4	2	1	2	1	*	1	1
H_{66}	3	4	1	2	1	*	1	1
Nastavak na sledećoj strani								

Tabela 10 – nastavak

G	m_1	m_2	m_3	m_4	n_1	n_2	n_3	n_4
H_{67}	1	4	1	2	2	1	1	1
H_{68}	1	1	2	1	3	1	1	1
H_{69}	1	2	2	2	2	1	1	1
H_{70}	1	1	2	2	3	1	1	1
H_{71}	1	4	3	2	1	*	1	1
H_{72}	1	2	4	2	1	*	1	1
H_{73}	1	1	4	2	2	1	1	1
H_{74}	1	1	6	2	1	*	1	1
H_{75}	1	1	4	3	1	1	1	1
H_{76}	1	2	2	3	1	1	1	1
H_{77}	1	4	1	3	1	1	1	1

Tabela 11: Maksimalni duplo ugnežđeni grafovi koji zadovoljavaju $h = 5$ i $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$

G	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
I_1	1	36	1	1	1	1	5	1	1	1
I_2	1	20	1	1	1	1	6	1	1	1
I_3	1	14	1	1	1	1	7	1	1	1
I_4	1	12	1	1	1	1	8	1	1	1
I_5	1	10	1	1	1	1	9	1	1	17
I_6	2	*	1	1	1	1	4	1	1	1
I_7	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1
I_8	1	2	2	1	1	2	*	1	1	1
I_9	1	3	2	1	1	1	8	1	1	1
I_{10}	1	4	2	1	1	1	4	1	1	1
I_{11}	1	6	2	1	1	1	2	1	1	1
I_{12}	1	8	2	1	1	1	1	1	1	1
I_{13}	1	2	3	1	1	1	4	1	1	1
I_{14}	1	1	4	1	1	2	*	1	1	1
I_{15}	1	1	5	1	1	1	4	1	1	1
I_{16}	1	8	2	1	1	1	1	2	1	1

Nastavak na sledećoj strani

Tabela 11 – nastavak

G	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
I_{17}	1	4	2	1	1	1	2	2	1	1
I_{18}	1	2	3	1	1	1	2	2	1	1
I_{19}	1	1	3	1	1	1	6	2	1	1
I_{20}	1	1	4	1	1	1	4	2	1	1
I_{21}	1	1	5	1	1	1	2	2	1	1
I_{22}	1	2	4	1	1	1	1	3	1	1
I_{23}	1	1	5	1	1	1	1	4	1	1
I_{24}	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1
I_{25}	1	4	1	1	2	1	*	1	1	1
I_{26}	1	2	2	1	2	1	*	1	1	1
I_{27}	1	1	4	1	2	1	*	1	1	1

Zaključicemo ovo potpoglavlje primerom opisane tehnike (za određivanje DUG-ova sa ograničenom drugom sopstvenom vredošću), koju ćemo sada primeniti u jednom jednostavnijem slučaju. Postoji više načina za određivanje svih povezanih DUG-ova koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq 1$. Naime, nakon što smo odredili sve DUG-ove koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$, mogli bismo među njima (i njihovim podgrafovima) odrediti one koji zadovoljavaju jači uslov $\lambda_2 \leq 1$, ali ovakav postupak podrazumeva pretraživanje velikog broja grafova, kao i pretraživanje nekih beskonačnih familija grafova. S druge strane, DUG-ovi su bipartitni grafovi, a sve bipartitne grafove koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq 1$ okarakterisao je 1991. godine M. Petrović koristeći metodu minimalnih zabranjenih podgrafova (videti, na primer, monografiju [58], str. 53–57). Ali opet, određivanje DUG-ova koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq 1$ korišćenjem ovih rezultata uključuje upoređivanje strukture svakog određenog zabranjenog podgrafa sa strukturom duplo ugneždenog grafa. Zato ovde koristimo isti metod koji smo koristili i za određivanje DUG-ova koji zadovoljavaju $\lambda_2 \leq \sqrt{2}$, jer su ceo postupak i krajnji rezultat mnogo jednostavniji.

Teorema 3.20 *Povezan DUG koji zadovoljava $\lambda_2(G) \leq 1$ jeste indukovan podgraf jednog od DUG-ova čiji su parametri:*

- $(*, 1; 1, *)$, $(*, 1; *, 1)$, $(1, 2; 1, 2)$, $(2^2; *, 1)$, $(*, 2; 1^2)$, $(3, 2; 2, 1)$, $(2, 3; 1^2)$,
- $(*, 1^2; 1, *, 1)$, $(1, *, 1; 1, *, 1)$, $(2^2, 1; 1, *, 1)$, $(2, 1^2; 2, 1^2)$, $(1, *, 2; 1^3)$,
- $(1, *, 1^2; 1, *, 1^2)$.

Dokaz. Važi (videti dokaz Leme 3.12) $h \leq 4$.

Ako je $h = 2$, tada je $P_H(1) = 1 - m_2 n_1 - m_1 n_1 - m_1 n_2 + m_1 n_1 m_2 n_2$. Zamenjujući $m_1 = n_2 = 1$ u ovaj izraz, zaključujemo da je $P_H(1) = -m_1 < 0$, pa primenjujući Lemu 3.11 dolazimo do prvog rešenja. Drugo rešenje dobijamo zamenjujući $m_2 = n_2 = 1$ u isti izraz ($P_H(1) = 1 - m_1 - n_1$) i potom primenjujući Lemu 3.11. Do trećeg rešenja dolazimo direktnim izračunavanjem spektra odgovarajućeg grafa i direktnom proverom da dobijeni graf jeste maksimalan. Neka je sada $n_2 = 1$ i $m_2 \geq 2$. U tom slučaju važi $m_1 \geq 2$ (u suprotnom, dolazimo do prvog dobijenog rešenja za bilo koji izbor prirodnih brojeva n_1, m_2). Takođe, ako je $m_1 \geq 2$, tada važi $m_2 \leq 3$ (do ovog uslova dolazimo direktnim izračunavanjem). Dakle, razlikujemo sledeće slučajeve (u zavisnosti od vrednosti parametara m_2 i n_2):

- (i) $m_2 = 2, n_2 = 1, P_H(1) = (m_1 - 2)(n_1 - 1) - 1$. Ako je $m_1 = 2$ i $n_1 \in \mathbb{N}$, primenom Leme 3.11 dolazimo do četvrtog rešenja. Ukoliko je $n_1 = 1$ i $m_1 \in \mathbb{N}$, primenom Leme 3.11 dolazimo do petog rešenja. Šesto rešenje dobijamo direktnom proverom da za graf $G = DUG(3, 2; 2, 1)$ važi $\lambda_2(G) \leq 1$. Ako je $m_1 > 3$ i $n_1 \geq 2$ ili $m_1 \geq 3$ i $n_1 > 2$, tada je $P_H(1) > 0$.
- (ii) $m_2 = 3, n_2 = 1$, i sada su grafovi $DUG(3, 3; 1^2)$ i $DUG(2, 3; 2, 1)$ zabranjeni (za osobinu $\lambda_2(G) \leq 1$), a za graf $G = DUG(2, 3; 1^2)$ važi $\lambda_2(G) \leq 1$, pa na taj način dolazimo do sedmog rešenja.

Na sličan način razmatramo i slučaj $h = 3$ i dolazimo do pet odgovarajućih rešenja.

Na kraju, direktnim izračunavanjem možemo se uveriti da su sledeći grafovi: $DUG(1^3, 2; 1^4)$, $DUG(1^2, 2, 1; 1^4)$ i $DUG(2, 1^3; 1^4)$ zabranjeni za osobinu $\lambda_2(G) \leq 1$. S druge strane, važi $P_H(1) = -m_2 n_2 - 4(m_2 + n_2 + 2)$, što znači da važi $P_H(1) < 0$ za bilo koji izbor prirodnih brojeva m_2 i n_2 . Sada primenom Leme 3.11 dolazimo do poslednjeg rešenja, i time zaključujemo naše razmatranje. ■

Bibliografija

- [1] A. Abiad, C. Dalfó, M. A. Fiol, Algebraic characterizations of regularity properties in bipartite graphs, [arXiv:1205.5913 \[math.CO\]](#).
- [2] T. Adachi, Combinatorial structure of group divisible designs and their constructions, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 1437 (2005), 87–96.
- [3] M. Anđelić, C. M. da Fonseca, T. Koledin, Z. Stanić, Spectral inequalities on bipartite graphs of fixed order and size with maximal Q -index, *Ars Math. Contemp.*, 6 (2013), 171–185.
- [4] M. Anđelić, T. Koledin, Z. Stanić, Nested graphs with bounded second largest (signless Laplacian) eigenvalue, *Electron. J. Linear Algebra*, 24 (2012), 181–201.
- [5] M. Anđelić, S. K. Simić, Some notes on the threshold graphs, *Discrete Math.* 310 (17–18) (2010), 2241–2248.
- [6] M. Aouchiche, P. Hansen, C. Lucas, On the extremal values of the second largest Q -eigenvalue, *Linear Algebra Appl.* 435 (2011), 2591–2606.
- [7] F. K. Bell, D. M. Cvetković, P. Rowlinson, S. K. Simić, Graphs for which the least eigenvalue is minimal II, *Linear Algebra Appl.* 429 (2008), 2168–2179.
- [8] R. C. Bose, Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs, *Pacific. J. Math.* 13 (2) (1963), 389–419.
- [9] R. C. Bose, W. S. Connor, Combinatorial properties of group divisible incomplete block designs, *Ann. Math. Statist.* 23 (3) (1952), 367–383.
- [10] R. C. Bose, K. R. Nair, Partially balanced incomplete block designs, *Sankhya*, 4 (1939), 337–372.

- [11] R. C. Bose, T. Shimamoto, Classification and analysis of partially balanced incomplete block designs with two associate classes, *J. Amer. Statist. Assoc.* 47 (258) (1952), 151–184.
- [12] R. C. Bose, S. S. Shrikhande, K. N. Bhattacharya, On the construction of group divisible incomplete block designs, *Ann. Math. Statist.* 24 (2) (1953), 167–195.
- [13] H. J. Broersma, F. Göbel, Bipartite regular graphs with fixed diameter, *Networks*, 26 (1995), 139–144.
- [14] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer, Heidelberg, 1989.
- [15] F. C. Bussemaker, D. M. Cvetković, There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs, *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.*, 544-576 (1976), 43–48.
- [16] F. C. Bussemaker, D. M. Cvetković, J. J. Seidel, Graphs related to exceptional root systems. T.H.-Report 76-WSK-05, Technological University Eindhoven, 1976. *Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976)*, Vol. I, pp. 185–191, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 18, North-Holland, Amsterdam–New York, 1978.
- [17] P. J. Cameron, Strongly regular graphs, in *Topics in Algebraic Graph Theory* (L.W. Beineke and R.J. Wilson, eds.), Cambridge Univ. Press, 2004, 203–221.
- [18] P. J. Cameron, J. M. Goethals, J. J. Seidel, E. E. Shult, Line graphs, root systems, and elliptic geometry, *J. Algebra*, 43 (1976), 305–327.
- [19] C. J. Colbourn, J. H. Dinitz, *Handbook of Combinatorial Designs*, 2nd edition, Chapman and Hall-CRC, 2006.
- [20] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs – Theory and Application*, 3rd edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg–Leipzig, 1995.
- [21] D. M. Cvetković, P. Rowlinson, S. K. Simić, *Eigenspaces of Graphs*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [22] D. M. Cvetković, P. Rowlinson, S. K. Simić, *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, Cambridge University Press, 2009.

- [23] D. M. Cvetković, P. Rowlinson, S. K. Simić, Spectral Generalizations of Line Graphs – On Line Graphs with Least Eigenvalue -2 , London Math. Soc., Lecture Notes Series 314, Cambridge University Press, 2004.
- [24] D. M. Cvetković, P. Rowlinson, S. K. Simić, Signless Laplacians of finite graphs, *Linear Algebra Appl.*, 423 (2007), 155–171.
- [25] D. M. Cvetković, P. Rowlinson, S. K. Simić, Eigenvalue bounds for the signless Laplacian, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, 81(95) (2007) 11–27.
- [26] D. M. Cvetković, S. K. Simić, The second largest eigenvalue of a graph (a survey), *Filomat*, 9 (1995), 449–472.
- [27] E. R. van Dam, Regular graphs with four eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* 226-228 (1995), 139–162.
- [28] E. R. van Dam, W. H. Haemers, Spectral characterizations of some distance-regular graphs, *J. Algebra Combin.*, 15 (2002), 189–202.
- [29] E. R. van Dam, W. H. Haemers, Which graphs are determined by their spectrum?, *Linear Algebra Appl.* 373 (2003), 241–272.
- [30] E. R. van Dam, W. H. Haemers, Developments on spectral characterizations of graphs, *Discrete Math.*, 309 (2009), 576–586.
- [31] E. R. van Dam, W. H. Haemers, J. H. Koolen, E. Spence, Characterizing distance-regularity of graphs by the spectrum, *J. Combin. Theory Ser. A* 113 (2006), 1805–1820.
- [32] E. R. van Dam, E. Spence, Small regular graphs with four eigenvalues, *Discrete Math.* 189 (1998), 233–257.
- [33] E. R. van Dam, E. Spence, Combinatorial designs with two singular values. II. Partial geometric designs, *Linear Algebra Appl.* 396 (2005), 303–316.
- [34] J. Ebrahimi, B. Mohar, V. Nikiforov, A. S. Ahmady, On the sum of two largest eigenvalues of a symmetric matrix, *Linear Algebra Appl.*, 429 (2008), 2781–2787.
- [35] P. Erdős, S. Fajtlowits, W. Staton, Degree sequences in triangle-free graphs, *Discrete Math.*, 92 (1991), 85–88.

- [36] L.-H. Feng, G. -H. Yu, On three conjectures involving the signless Laplacian spectral radius of graphs, *Publ. Inst. Math. (Beograd)*, 85(99) (2009), 35–38.
- [37] R. M. Foster, I. Z. Bouwer, W. W. Chernoff, B. Monson, Z. Star, *The Foster Census: R.M. Foster’s Census of Connected Symmetric Trivalent Graphs*, Winnipeg, Canada: Charles Babbage Research Centre, 1988.
- [38] M.A.A. de Freitas, N.M.M. de Abreu, R.R. Del-Vecchio, S. Jurkiewicz, Infinite families of Q -integral graphs, *Linear Algebra Appl.* 432 (2010), 2352–2360.
- [39] C. D. Godsil, B. D. McKay, Feasibility conditions for the existence of walk-regular graphs, *Linear Algebra Appl.* 30 (1980), 51–61.
- [40] W. H. Haemers, *Eigenvalue Techniques in Design and Graph Theory*. (Ph.D. thesis Technical University Eindhoven 1979.), *Math. Centre Tract 121*, Mathematical Centre, Amsterdam, 1980.
- [41] W. H. Haemers, Interlacing eigenvalues and graphs, *Linear Algebra Appl.*, 226/228 (1995), 593–616.
- [42] M. Hall Jr., *Combinatorial Theory*, 2nd edition, John Wiley and Sons Inc., New York, 1986.
- [43] F. Harary, *Graph Theory*. Addison–Wesley Publ. Comp., Reading, 1969.
- [44] A. J. Hoffman, On the polynomial of a graph, *Amer. Math. Monthly* 70 (1963), 30–36.
- [45] S. Hoory, N. Linial, A. Wigderson, Expander graphs and their applications, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 43 (2006), 439–561.
- [46] N. Ito, Hadamard graphs. I, *Graphs Combin.*, 1 (1985), 57–64.
- [47] T. Koledin, Regular graphs with girth at least 5 and small second largest eigenvalue, *Linear Algebra Appl.* (2013). <http://dx.doi.org:10.1016/j.laa.2013.04.006>
- [48] T. Koledin, Z. Stanić, Some spectral inequalities for triangle-free regular graphs, na recenziji.

- [49] T. Koledin, Z. Stanić, Regular graphs with small second largest eigenvalue, na recenziji.
- [50] T. Koledin, Z. Stanić, Regular bipartite graphs with exactly three distinct non-negative eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* 438 (2013), 3336–3349.
- [51] T. Koledin, Z. Stanić, Regular graphs whose second largest eigenvalue is at most 1, *Novi Sad Journal of Mathematics*, prihvaćen za publikovanje.
- [52] T. Koledin, Z. Stanić, Reflexive regular bipartite graphs, na recenziji.
- [53] S. Kurz, R. Pinchasi, Regular matchstick graphs, *Am. Math. Mon.* 118 (3) (2011), 264–267.
- [54] S.-L. Liu, Bounds for the greatest characteristic root of a nonnegative matrix, *Linear Algebra Appl.*, 239 (1996), 151–160.
- [55] M. Marcus, H. Minc, *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities*, Dover Publications Inc., New York, 1992; unabridged reprint of the corrected 1969 printing, Prindle, Weber & Schmidt, Boston.
- [56] B. D. McKay, *Nauty user's guide (version 2.2)*, Technical Report, <http://cs.anu.edu.au/bdm/nauty>, 2006.
- [57] M. Milatović, Z. Stanić, The nested split graphs whose second largest eigenvalue is equal to 1, *Novi Sad J. Math.*, 42 (2) (2012), 33–42.
- [58] M. Petrović, Z. Radosavljević, *Spectrally Constrained Graphs*, Faculty of Science, Kragujevac, Yugoslavia, 2001.
- [59] A. J. Rahilly, Semiregular group divisible designs whose duals are semiregular group divisible, *Australas. J. Combin.* 2 (1990), 157–179.
- [60] M. Rašajski, Z. Radosavljević, B. Mihajlović, Maximal reflexive cacti with four cycles: The approach via Smith graphs, *Linear Algebra Appl.*, 435 (2011), 2530–2543.
- [61] A. J. Schwenk, Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra, In: *Theory and Applications of Graphs*, *Lecture Notes in Mathematics* Vol. 642 (Y. Alavi, D. Lick, eds.), pp. 516–533, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1978.

- [62] S. S. Shrikhande, *Some Combinatorial Problems in the Design of Experiments*, University of North Carolina, Chapel Hill, 1950.
- [63] D. A Sprott, A series of symmetric group divisible designs, *Ann. Math. Statist.*, 30 (1959) 249–251.
- [64] Z. Stanić, On regular graphs and coronas whose second largest eigenvalue does not exceed 1, *Linear Multilinear Algebra*, 58 (2010), 545–554.
- [65] Z. Stanić, On nested split graphs whose second largest eigenvalue is less than 1, *Linear Algebra Appl.*, 430 (2009), 2200–2211.
- [66] D. Stevanović, 4-regular integral graphs avoiding 3 in the spectrum, *Univ. Beograd. Publ. Elektr. Fak, Ser. Mat.*, 14 (2003), 99–110.
- [67] D. Stevanović, Two spectral characterizations of regular, bipartite graphs with five eigenvalues, *Linear Algebra Appl.*, 435 (2011), 2612–2625.
- [68] Y. Teranishi, F. Yasuno, The second largest eigenvalues of regular bipartite graphs, *Kyushu J. of Math.*, 54 (2000), 39–54.
- [69] J. Wang, F. Belardo, Q. Huang, B. Borovćanin, On the two largest Q -eigenvalues of graphs, *Discrete Math.*, 310 (2010), 2858–2866.

Podaci o autoru

Tamara Koledin rođena je u Beogradu 1976. godine gde je završila osnovnu školu „Petar Petrović Njegoš” 1991. godine. Iste godine upisala je Matematičku gimnaziju u Beogradu, koju je završila sa odličnim uspehom 1995. godine. Zatim se upisala na Matematički fakultet u Beogradu, odsek za teorijsku matematiku i primene, i diplomirala 2000. godine sa prosečnom ocenom 9,14.

Tamara Koledin je decembra 2001. godine izabrana za asistenta-pripravnika na Katedri za primenjenu matematiku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu.

Novembra 2005. godine Tamara Koledin je upisala postdiplomske studije na smeru za matematičke metode u elektrotehnici i računarstvu Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, a decembra 2007. godine odbranila je magistarski rad pod naslovom „Refleksivni grafovi sa malim brojem kontura”, čime je stekla zvanje magistra elektrotehničkih nauka, oblast matematičke metode u elektrotehnici i računarstvu.

Tamara Koledin na Katedri za primenjenu matematiku Elektrotehničkog fakulteta drži vežbe iz predmeta Matematika 1 i Matematika 2 na prvoj godini osnovnih studija, vežbe iz predmeta Složenost algoritama i odabrane metode optimizacije na drugoj godini osnovnih studija, kao i vežbe iz predmeta Odabrana poglavlja iz diskretne matematike na studijama drugog stepena.

Trenutno je zaposlena u zvanju asistenta na Katedri za primenjenu matematiku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu. Izabrana je u to zvanje 1. 11. 2011. godine.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а ТАМАРА КОЛЕДИН

број уписа _____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

НЕКЕ КЛАСЕ СПЕКТРАЛНО
ОГРАНИЧЕНИХ ГРАФОВА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 30. 5. 2013.

Тамара Коледин

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ТАМАРА КОЛЕДИН

Број уписа _____

Студијски програм _____

Наслов рада _____

Ментор ДР. ЗОРАН СТАНИЋ

Потписани ТАМАРА КОЛЕДИН

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 30.5.2013.

Тамара Коледин

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ТАМАРА КОЛЕДИН

Број уписа _____

Студијски програм _____

Наслов рада _____

Ментор ДР. ЗОРАН СТАНИЋ

Потписани ТАМАРА КОЛЕДИН

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 30.5.2013.

Тамара Коледин

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

НЕКЕ КЛАСЕ СПЕКТРАЛНО
ОГРАНИЧЕНИХ ГРАФОВА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 30.5.2013.

Јована Коларић

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.