UNIVERZITET U BEOGRADU

MAŠINSKI FAKULTET

Nebojša J. Dimitrijević

DINAMIČKA ANALIZA POSEBNIH KLASA SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

doktorska disertacija

Beograd, 2012

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Nebojša J. Dimitrijević

DYNAMICAL ANALYSIS
OF PARTICULAR CLASS
OF TIME–DELAY CONTROL SYSTEMS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2012

Komisija za pregled i odbranu:

Mentor:	Dr Dragutin Debeljković, redovni profesor Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet
Članovi Komisije:	Dr Sreten Stojanović, vanredni profesor Univerzitet u Nišu, Tehnološki fakultet u Leskovcu
	Dr Mihailo Lazarević, redovni profesor Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Datum odbrane:

Mojoj ćerki Mini

i supruzi Oliveri

Dinamička analiza posebnih klasa sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem

Apstrakt

U disertaciji su razmatrani problemi dinamičke analize posebnih klasa sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Prošireni su osnovni rezultati na polju ljapunovske stabilnosti linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Data je Ljapunov–Krasovski metoda za vremenski diskretne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem. Prezentovani su potrebni i dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti, zavisne od čisto vremenskog kašnjenja, linearnih, vremenski kontinualnih i diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Dati su dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti, nezavisne od čisto vremenskog kašnjenja, klase linearnih, perturbovanih sistema sa višestrukim vremenskim kašnjenjem. Prezentovani su dovoljni uslovi *D*–stabilnosti klase linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Dati su dovoljni uslovi eksponencijalne stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i perturbacijama. Prezentovani su potrebni i dovoljni uslovi kvadratne stabilnosti linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju i neodređenostima. Potrebni i dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja, velikih, linearnih, vremenski kontinualnih i diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, su dati. Proučena je stabilnost velikih, intervalnih, vremenski kontinualnih i diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Izvedeni su novi dovoljni kriterijumi, zavisni i nezavisni od čisto vremenskog kašnjenja, stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i atraktivne praktične stabilnosti linearnih, vremenski kontinualnih i diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, kao i odgovarajući rezultati koji se tiču problema praktične nestabilnosti. Istražen je problema stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu za klasu linearnih, vremenski diskretnih sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem. Numerički primeri su dati da demonstriraju primenu prezentovanih metoda.

Ključne reči: Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, atraktivna praktična stabilnost, *D*–stabilnost, eksponencijalna stabilnost, kvadratna stabilnost, vremenski diskretni i kontinualni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem, veliki sistemi, intervalni sistemi, sistemi sa vremenski promenljivim kašnjenjem

Naučna oblast: Mašinstvo

Uža naučna oblast: Automatsko upravljanje

Dynamical analysis of particular class of time–delay control systems

Abstract

In this paper, the problems of dynamical analysis of particular class of time–delay control systems are considered. Some of the basic results in the area of Lyapunov stability of linear, discrete time–delay systems are extended. A Lyapunov–Krasovskii method for discrete time–delay systems is gived. Necessary and sufficient conditions for delay–dependent asymptotic stability of linear, continuous and discrete time–delay systems is offered. Sufficient conditions, independent of delay, for asymptotic stability of a particular class of linear perturbed time–delay systems with multiple delays are gived. New sufficient conditions for the *D*–stability of a particular class of linear, discrete time–delay systems are established. Sufficient conditions for the exponential stability of discrete time–delay systems with perturbations are gived. Necessary and sufficient conditions for quadratic stability of uncertain linear discrete systems with state delay are presented. New necessary and sufficient conditions for delay–dependent asymptotic stability of a particular class of large–scale, linear, continuous and discrete time–delay systems are established. The stability of continuous and discrete large–scale time–delay interval systems are considered. A new sufficient delay–dependant and delay–independent criteria for the finite time stability and attractive practical stability of linear continuous and discrete time–delay systems has been derived, as well as corresponding results concerning instability problems. Finite–time stability problem has been investigated for a class of linear discrete time–varying delay systems. Numerical examples are given to demonstrate the application of the proposed methods.

Key words: Finite time stability, attractive practical stability, *D*–stability, exponential stability, quadratic stability, discrete and continuous time–delay systems, large–scale systems, interval systems, systems with time–varying delay

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Automatic control engineering

Predgovor

Već više od pola veka sistemi sa kašnjenjem privlače pažnju naučne i stručne javnosti širom sveta. Njihovo prisustvo u svim granama nauke i tehnike više je nego evidentno i u tom smislu brojni naučni radovi i obimna publicistička delatnost u punoj meri su iskazali interes koji je za njih bio pokazan.

U matematičkom smislu, ova klasa sistema opisana je običnim diferencijalnim jednačinama sa pomerenim argumentom, što uslovljava čitav niz dodatnih poteškoća pri njihovom rešavanju. S druge strane, kao sistemi beskonačne dimenzije, njihovo proučavanje u kompleksnom domenu uslovljeno je suočavanjem sa transcedentnim prenosnim funkcijama, što u izvesnim slučajevima zahteva radikalnu preformulaciju postojećih kriterijuma i metoda razvijenih za obične linearne sisteme, a ponekada i formiranje sasvim novih prilaza i postupaka za razrešavanje postavljenih zadataka kako klasične, tako i moderne teorije automatskog upravljanja.

Nešto jednostavniji nivo matematičkog aparata neophodan je u dinamičkoj analizi vremenski diskretnih sistema sa kašnjenjem, ali odsustvo eksponencijalnog karaktera odziva ove klase sistema i nekih drugih osobina, bez obzira na činjenicu da je njihov prostor stanja konačne dimenzije, onemogućava primenu čitavog niza efikasnih rešenja i prilaza koji se mogu primeniti u prvom slučaju.

Materija ovde prezentovana, nastavlja, razvija i izlaže potojeće doprinose na polju stabilnosti i robusne stabilnosti, prvenstveno vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem prisutnim samo u stanju sistema, protežući se i na nove klase sistema koje u tom smislu obuhvataju vremenski kontinualne, kompozitne, velike i intervalne sisteme, a i sisteme sa promenljivim vremenskim kašnjenjem.

Značajan i evidentan doprinos ove doktorske disertacije leži u činjenici da je ovde data šira rekapitulacija svetski poznatih rezultata širokog spektra naučnika i stručnjaka.

Imajući u vidu da u nekim praktičnim prilikama nije uvek od interesa razmatrati stabilnost sistema u smislu Ljapunova, već je od posebne važnosti utvrditi granice do kojih dosežu trajektorije sistema pri njegovom kretanju u integralnom prostoru stanja razvijen je čitav spektar koncepata tzv. neljapunovske stabilnosti, koji prvenstveno obuhvata stabilnost na konačnom vremenskom intervalu, praktičnu stabilnost, krajnju stabilnost i tehničku stabilnost.

Dobro je poznato da sistem može da bude stabilan, pa čak i asimptotski stabilan, ali praktično neupotrebljiv zbog neprihvatljivih pokazatelja kvaliteta prelaznog procesa.

Zbog toga je od posebnog značaja razmatrati stabilnost sistema u odnosu na zadate skupove dozvoljenih i početnih stanja u faznom prostoru, koji su po pravili a priori definisani za dati problem.

Šta više, imajući u vidu veoma stroge i oprečne zahteve koji se danas nameću kvalitetu dinamičkog ponašanja realnih sistema, od posebnog je interesa razmatrati njihovo ponašanje na konačnom vremenskom intervalu.

Osobine granica do kojih dosežu rešenja sistema su veoma važne sa inženjerske tačke gledišta. Uzimajući u obzir ovu činjenicu, uvedene su mnogobrojne definicije takozvane tehničke i praktične stabilnosti.

Prema tome, analiza ovih partikularnih graničnih osobina rešenja je važan korak, koji prethodi projektovanju upravljačkih signala, kada se razmatra koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu ili praktične stabilnosti.

Sa velikim zadovoljstvom autor izražava duboku zahvalnost mentoru Dr Dragutinu Lj. Debeljkoviću, profesoru Mašinskog fakulteta Unviverziteta u Beogradu, za ideje za realizaciju doktorske disertacije i za niz sugestija koje su u velikoj meri doprinele i uticale na njen kvalitet.

Neosporna je i činjenica da je veliki deo ove doktorske disertacije bio inspirisan naučnim doprinosima Dr Sretena B. Stojanovića, vanrednog profesora, i Dr Dragutina Lj. Debeljkovića, redovnog profesora, objavljenim tokom poslednjih desetak godina, kao i zajedničkom naučnom monografijom u kojoj je učestvovao i autor ove doktorske disertacije, pa im tim povodom autor duguje veliku zahvalnost.

Dr Mihailu Lazareviću, profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, autor duguje zahvalnost na korisnim sugestijama tokom izrade doktorske disertacije.

Beograd, april, 2012. Nebojša J. Dimitrijević

SADRŽAJ

Nomenklatura

I OPŠTA RAZMATRANJA

1. UVODNA RAZMATRANJA

U ovoj doktorskoj disertaciji razmatraju se dve posebne klase linearnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem prisutnim u stanju sistema, kao i njihovo dinamičko ponašanje kako na beskonačnom tako i na konačnom vremenskom intervalu. U tom smislu proučavaju se sistemi sa konstantnim i vremenski promenljivim kašnjenjem.

Naime, već od sedamdesetih godina dvadesetog veka, sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem privlače veliku pažnju naučne i stručne javnosti. Njihova pojava u robotici, dugačkim hidrauličnim, pneumatskim i električnim vodovima, dinamici letelica i velikim sistemima, podstakla je brojne naučnike da se njima intenzivno bave.

Prisustvo čisto vremenskog kašnjenja, bez obzira da li je ono prisutno u upravljanju i/ili u stanju može da proizvede neželjene prelazne karakteristike pa čak i nestabilnost. Poslednje pomenuti slučaj veoma je čest kada su u pitanju sistemi automatskog upravljanja sa povratnom spregom. Zbog toga je ovaj problem naišao na veliko interesovanje kod mnogih istraživača. U opštem slučaju razmtranje problema koji uključuje i čisto vremensko kašnjenje povlači daleko složeniju matematičku analizu.

Ovde razmatrana klasa sistema, opisana je u matematičkom smislu u vidu sistema diferencnih jednačina, sa pomerenim argumentom, poseduje čitav niz dodatnih specifičnosti i osobina koje se ne susreću kod standardnih kontinualnih sistema automatskog upravljanja i opisana je u prostoru stanja sledećim matematičkim modelom:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h),$$

i sa odgovarajućom funkcijom početnih uslova, gde je sa h označeno čisto vremensko kašnjenje u stanju.

U postojećim kriterijumima stabilnosti klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenja dominiraju dva prilaza. Jedan koji u kriterijume ne unosi iznos čisto vremenskog kašnjenja i drugi koji to čini. U prvom slučaju veoma često se dobijaju, na izgled, veoma lepe relacije koje su obično iskazane u vidu čisto algebarskih jednačina ili nejednačina ali je manjkavost evidentna jer se ne sagledava iznos i uticaj čisto vremenskog kašnjenja na stabilnost sistema.

Čak i danas postoji samo manji broj radova koje su se bavili ljapunovskom stabilnošću posebnih klasa vremenski diskretnih sistema sa vremenski čistim i promenljivim kašnjenjem, prisutnim samo u stanju sistema.

Prvi ozbiljni rezultati o stabilnosti sistema sa kašnjenjem su dati u radu *Mori et al.* (1982). Nešto više svetla u ovu problematiku uneli su brojni radovi, *Stojanović, Debeljković* (2004–2009) iako je ostalo još mnogo otvorenih pitanja kada se recimo govori o robusnosti.

Ova klasa sistema, pored niza specifičnosti, dodatno je opterećena činjenicom da je u vektoru stanja prisutno i čisto vremensko kašnjenje, koje ovu klasu sistema uvrstava u sisteme konačne dimenzije, što složenoj problematici daje mogućnost nešto jednostavnijeg matematičkog tretmana u odnosu na odgovarajuće probleme koji se javlju kod analogne klase kontinualnih sistema sa kašnjenjem. U tom smislu pomenuti rezultati su se bavili samo stabilnošću ove klase sistema u smislu Ljapunova što drugim rečima može da se veže za izučavanje osobina njihove stabilnosti u asimptotskom smislu ili na beskonačnom vremenskom intervalu.

Pored uvek interesantnog istraživanja osobina stabilnosti ove klase sistema, koje se javlja u relevantnoj literaturi, počev negde tek od 2000. god., ne manji značaj se poklanja ispitivanjima kojima se može proceniti njihova robusnost u uslovima njihovog normalnog funkcionisanja a u prisustvu strukturnih ili nestrukturnih neizvesnosti prouzrokovanih nedovoljnom preciznošću matematičkog modeliranja, otkazu pojednih komponenti ili neprestanim delovanjem unutrašnjih i/ili spoljašnjih perturbacija.

U sferi ispitivanja stabilnosti, akcenat je još uvek na istraživanjima vezanim za ljapunovsku stabilnost, dok se nešto manji broj radova bavi takozvanom neljapunovskom (tehničkom) stabilnošću što podrazumeva najčešće koncepte stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i/ili praktične stabilnosti.

U praksi je često od posebnog interesa, ne samo ispitivati stabilnost sistema po Ljapunovu, već je od daleko većeg značaja utvrditi da li trajektorije sistema pri njegovom kretanju u prostoru stanja dosežu ili ostaju unutar ranije propisanih granica. Sistem može da bude stabilan u smislu Ljapunova a potpuno neupotrebljiv sa stanovišta njegovih pokazatelja prelaznog procesa. Tu se u prvom redu misli na nedozvoljeni preskok ili neprihvatljivo dugo vreme smirenja. Zbog toga je sasvim opravdano kretanje sistema posmatrati unutar unapred propisanih granica koje se mogu usvojiti u obliku hiper–cilindara u prostoru stanja koji mogu biti shvaćeni kao skupovi dozvoljenih stanja u kojima se sistem može zadesiti. Isti ti skupovi mogu biti stacionarni ili vremenski promenljivi i potrebno je da budu unapred definisani. Mimo toga, od posebnog je interesa da se i dinamičko ponašanje sistema posmatra na konačnom vremenskom intervalu.

Granice do kojih dostiže odziv sistema bilo u slobodnom bilo u prinudnom radnom režimu predstavlja veoma značajan problem sa inženjersko–tehničke tačke gledišta. Uvažavajući ovu činjenicu pojavio se veliki broj definicija praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu. Grubo govoreći, ove definicije se baziraju na unapred određenim granicama dozvoljenih početnih stanja sistema kao i na dozvoljenim granicama u kojima se očekuje kretanje razmatranog sistema.

U inženjerskim primenama ova činjenica dobija posebno na težini, a nekada postaje i krucijalna kada se, na primer, radi o procenama kretanja sistema u prostoru stanja i neophodnosti uvođenja adekvatnog upravljanja. Samim tim, izučavanje koncepta praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu predstavlja poseban izazov za svakog istraživača, posebno kod sistema sa kašnjenjem gde se svi ovakvi problemi izuzetno usložnjavaju.

Imajući u vidu iznete činjenice, prirodno je ovaj koncept proširiti i na ovu klasu sistema, što je i prvi put urađeno u radu *Debeljković, Aleksendrić* (2003), ali tu postoji još čitav niz otvorenih pitanja koje treba istražiti i dati konačne rezultate.

S druge strane, imajući u vidu da ova klasa sistema sadrži i čisto vremensko kašnjenje, u literaturi se izdvajaju dva osnovna pristupa ovoj problematici kada su u pitanju odgovarajući kriterijumi koji u formi ili potrebnih i dovoljnih ili samo dovoljnih uslova iskazuju osobinu stabilnosti.

Naime, prva grupa kriterijuma u svoje konačne uslove uključuje iznos čisto vremeskog kašnjenja, tako da osobina stabilnosti razmatranog sistema zavisi kako od sistemskih matrica tako i od čisto vremenskog kašnjenja.

Druga grupa kriterijuma ne uzima u obzir iznos čisto vremenskog kašnjenja i sa tog stanovišta bliža je inženjerskoj praksi, imajući u vidu da su ti kriterijumi obično dati u vidu samo dovoljnih uslova, algebarskog tipa.

II OPŠTA PITANJA DINAMIKE VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

2. VREMENSKI DISKRETNI SISTEMI SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM [1]

2.1 Preliminarna razmatranja

Iako vremenska kašnjenja u diskretnim sistemima ne stvaraju kvalitativno nov problem, ona su, iz nekoliko razloga zanimljiva. Podsetimo se da kada se traži numeričko rešenje za bilo koji problem u upravljanju koji uključuje razlomljene diferencijalne jednačine, pre ili kasnije ćemo naići na model konačnih dimenzija koji je najčešće predstavljen u vidu diferencne jednačine.

U primeni, izražena je tendencija da se problemi upravljanja postavljaju pomoću diskretnih jednačina od samog početka što se javlja iz dva razloga.

Prvo, u mnogim procesima, vrednosti promenljivih procesa su bitne samo u određenim, diskretnim trenucima (računari, relejni i digitalni uređaji, konačni automati). Drugo, diskretni vremenski modeli se preporučuju inženjeru svojom jednostavnošću, sa nadom da će se izbeći složena matematika. Ovo je uglavnom pogrešno jer se uvode nove i komplikovane aproksimacije.

[1] *Debeljković et al*. (2004.a).

Ipak, ne može se poreći da diferencne šeme korišćene u teoriji upravljanja imaju opštiji pristup, tj. one se ne odnose na posebne tipove sistema opisanih običnim, parcijalnim ili funkcionalnim diferencijalnim jednačinama. Zato diskretne jednačine nude jedinstveni pristup većini problema upravljanja.

2.2 Priroda i osobenosti fenomena kašnjenja u prenosu signala u fizičkim procesima

Sistemi sa kašnjenjem su sistemi u kojima postoji vremensko kašnjenje između ulaza ili upravljanja i ispoljavanja efekata tih dejstava na sistem. Ona su ili posledica kašnjenja svojstvenih komponentama sistema ili namernog uvođenja kašnjenja radi lakšeg upravljanja sistemom. Kašnjenja su česta u elektronskim, mehaničkim, biološkim i hemijskim sistemima. Odgovaraju vremenu potrebnom za prenos signala (seizmički talasi, hormoni u krvotoku, fluidi u hemijskom procesu) ili vremenu potrebnom za obradu signala (analiza TV slike pomoću robota, sračunavanje izlaza digitalnim upravljačkim algoritmom ili izvođenje analize hemijskog sastava nekog jedinjenja).

Uticaj *fenomena kašnjenja* je veoma bitan za pravilno kvalitativno i kvantitativno opisivanje različitih procesa. Tipični vidovi kašnjenja kod kontinualnih sistema su: *transportno*, *tehnološko* i *informaciono kašnjenje*.

Transportno kašnjenje obično se javlja u procesima prenosa materije, energije ili signala sa jednog mesta na drugo. Tipičan predstavnik ove grupe objekata sa kašnjenjem je transporter za ugalj. Transportno kašnjenje susrećemo i u termoenergetici, gde ono predstavlja vreme neophodno da mazut ili gas iz odgovarajućih rezervoara stigne u ložište parnog kotla, i tako dalje.

Tehnološko kašnjenje susreće se u hemijsko–tehnološkim procesima, kao na primer u proizvodnji sumporne kiseline, proizvodnji stakla i u različitim difuzionim procesima. Konkretno, recimo kod mešanja dve tečnosti različitih koncentracija, vreme potrebno da se postigne izjednačena koncentracija mešavine, takođe predstavlja tehnološko kašnjenje. Vreme od upaljenja nekog goriva do postizanja punog plamena spada takođe u ovu grupu kašnjenja.

Informaciono kašnjenje obično se javlja kada se merenje neke veličine i njena dalja obrada ne odvijaju na istom mestu, što je često uslovljeno tehnološkim i/ili eksploatacionim uslovima. Kao tipičan primer navodi se merenje debljine trake u valjaoničnom stanu koja se ne obavlja neposredno jer se davač debljine ne može, iz konstruktivnih razloga, nalaziti u samom zevu između valjaka, već na nekom rastojanju iza njega. Slična pojava prisutna je i kod magnetofona, imajući u vidu evidentno rastojanje između glave za snimanje i glave za reprodukciju.

Osim fenomena kašnjenja, sistemi koji su predmet ovog rada imaju još jednu važnu osobinu–diskretan prenos signala. Ako se vremenski diskretan prenos signala javlja bar u jednoj prenosnoj liniji sistema, to znači da je sistem definisan samo u određenim, diskretnim trenucima vremena. Izučavanje diskretnih sistema ima opravdanje u njihovoj velikoj praktičnoj primeni. Vremenska diskretizacija signala omogućava postizanje veće tačnosti u prenosu signala nego u slučaju kontinualnog prenosa.

Cifarski računari imaju niz prednosti nad analognim računarima i prenosnim organima. Cifarski računari mogu da obrade veliki broj podataka za kratko vreme. Na osnovu dobijenih podataka, a u skladu sa odgovarajućim algoritmom, oni mogu da donose brze i pravilne odluke, da ostvaruju pravilna upravljačka dejstva. Cifarski računari su prilagodljivi promeni algoritma upravljanja.

Vrlo značajna prednost vremenske diskretizacije signala sa stanovišta tehničke realizacije i ekonomskog efekta je mogućnost korišćenja jednog kanala veze za prenos većeg broja različitih signala, što je važno naročito pri transportu signala na veće daljine. Vremenski diskretni sistemi su pouzdaniji u radu nego analogni sistemi, kompaktniji su i manjih su gabarita.

Proučavanje diskretnih sistema je dovelo do posebnog, novog i originalnog prilaza proučavanju sistema uopšte, a posebno sistema automatskog upravljanja.

Na primer, veliki broj sistema automatskog upravljanja, u kojima postoji vremenska diskretizacija signala, su hibridni jer je upravljani proces vremenski kontinualan. Pogodno je proučavati dinamička ponašanja ovih sistema samo u trenucima odabiranja. Tada se oni posmatraju kao diskretni sistemi.

U slučaju pojave kašnjenja prilikom prenosa signala, ovi sistemi postaju diskretni sistemi sa kašnjenjem i osnovna su tema ovih razmatranja.

2.3 Klasifikacija sistema sa kašnjenjem

Podela sistema sa kašnjenjem data je u *tabeli* 2.1.

Matematičko predstavljanje vremenski diskretnih sistema sa kašnjenjem iskazuje se odgovarajućim sistemom diferencnih jednačina sa pomerenim argumentom. Vremenski kontinualni sistemi, opisani diferencijalnim jednačinama, imaju promenljive definisane u svim vremenskim trenucima na tipičnom polu–otvorenom intervalu $\left[t_0, \infty\right)$.

Diskretni sistemi su sa druge strane definisani samo u diskretnim vremenskim trenucima. Oni se opisuju diferencnim jednačinama. Hibridni sistemi (*ili mešoviti sistemi*) su delom kontinualni, a delom diskretni. Opisani su diferencijalno–diferencnim jednačinama.

Imajući u vidu sve prethodno rečeno, valja istaći da će se sva rešenja postavljenih zadataka a prema prirodi problema tražiti u klasi *linearnih*, *vremenski diskretnih*, *stacionarnih* i *nestacionarnih*, *determinističkih* sistema sa *usredsređenim parametrima*, a sa *konstantnim čistim vremenskim kašnjenjem* iskazanim u vidu isključivo *pozitivnih celih brojeva.*

Tabela 2.1 Podela sistema sa kašnjenjem

Prema formalnom matematičkom opisu	**Prema osobinama**		**Prema obliku kašnjenja**
Sistemi sa prethođenjem	Deterministički	Stohastički	Konstantno kašnjenje
Sistemi neutralnog tipa	Sa usredsređenim parametrima	Sa raspodeljenim parametrima	Vremenski promenljivo kašnjenje
Sistemi sa kašnjenjem	Kontinualni	Diskretni	Nelinearna funkcija stanja
Prema lokaciji u SAU	Linearni	Nelinearni	**Prema prirodi kašnjenja**
O	Stacionarni	Nestacionarni	Transportno kašnjenje
US	Jednostruko prenosni	Višestruko prenosni	Tehnološko kašnjenje
SAU	Statički	Dinamički	Informaciono kašnjenje

2.4 Mogućnosti rešavanja diferencnih jednačina sa pomerenim argumentom

Razmatra se sistem oblika:

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{f}(k,\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k), \quad k=k_0,\ k_0+1,\ k_0+2,\ \ldots, \tag{2.1}$$

gde je $\mathbf{x}(k)\in\mathbb{R}^n$ zavisna promenljiva (trenutno stanje), a upravljanje $\mathbf{u}(k)$ uzima vrednosti iz skupa $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{f}(\cdot)$ je u opštem slučaju nelinearna funkcija, tako da:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k&=\{\mathbf{x}(k-h_i),\ i=0,\ \ldots,\ N\}\\ \mathbf{u}_k&=\{\mathbf{u}(k-d_i),\ i=0,\ \ldots,\ N\}\end{aligned}, \tag{2.2}$$

gde su h_i i d_i nenegativni celi brojevi, koji zadovoljavaju: $0=h_0<h_1<\ldots<h_N$ i $0=d_0<d_1<\ldots<d_N$. Početni uslovi su:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k)&=\psi(k), \quad k=(k_0-h_N),(k_0-h_N+1),\ \ldots\ k_0\\ \mathbf{u}(k)&=\psi_u(k), \quad k=(k_0-d_N),(k_0-d_N+1),\ \ldots\ (k_0-1)\end{aligned}, \tag{2.3}$$

gde su ψ i ψ_u date funkcije.

Za dato upravljanje $\mathbf{u}(k)$, rešenje jed. (2.1) uz početne uslove iz jed. (2.3) definisano je nizom $\{\mathbf{x}(k),\ k=k_0-h_N,k_0-h_N+1,\ldots,k_0,k_0+1,\ldots\}$ takvim da $\mathbf{x}(k)$ zadovoljava jed. (2.3) za $k\le k_0$ i jed. (2.1) za $k>k_0$.

Očito je da nisu potrebne posebne pretpostavke po funkciji $\mathbf{f}(.,.)$ da bi rešenje postojalo i bilo jedinstveno. Takođe je lako proveriti da rešenje neprekidno zavisi od početnog uslova ψ ako je $\mathbf{f}(.,.)$ neprekidna po svom prvom argumentu za proizvoljno izabrana druga dva argumenta. Neprekidnost rešenja u odnosu na upravljanje $\mathbf{u}(k)$ zahteva da funkcija $\mathbf{f}(.,.)$ bude neprekidna i po svom drugom argumentu. Sa formalne tačke gledišta, jed. (2.1) je vremenski diskretna diferencna jednačina reda (h_N+1). Pretpostavka o skupu diskretnih vremenskih trenutaka oblika $\{k_0,k_0+1,\ldots\}$ nije ograničena s obzirom da se za bilo koji diskretni niz $\{k_i,i=0,1,\ldots\}$ i bilo koju funkciju $F:\{k_i,\ i=0,1,\ldots\}\to\mathbb{R}^k$ može definisati $\tilde{F}(k_0+i)=F(k_i), \quad i=0,1,\ldots$.

Jedna važna odlika sistema datog jed. (2.1) jeste da se uvođenjem novih zavisnih promenljivih on može pretvoriti u diferencni sistem prvog reda ili u sistem bez vremenskog kašnjenja po $\mathbf{x}(k)$. Da bi se ovo i formalno izrazilo, neka je:

$$\begin{gathered}\tilde{\mathbf{x}}_{k_0} = \mathbf{x}(k), \quad k_i = h_N - h_i + 1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_1(k+1) = \tilde{\mathbf{x}}_2(k) \\ \tilde{\mathbf{x}}_2(k+1) = \tilde{\mathbf{x}}_3(k) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}(k+1) = \mathbf{f}\left(k,\ \tilde{\mathbf{x}}_{k_0}(k), \tilde{\mathbf{x}}_{k_1}(k), \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{k_N}(k), \mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k-d_N)\right)\end{gathered} \quad . \qquad (2.4)$$

Kod vremenski kontinualnih sistema *eliminisanje kašnjenja* nije moguće.

Linearni diskretni modeli imaju sledeći oblik:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=0}^{N}\left(A_i(k)\mathbf{x}(k-h_i) + B_i(k)\mathbf{u}(k-d_i)\right) + \mathbf{f}(k), \quad k = k_0, k_0+1, k_0+2, \dots, \qquad (2.5)$$

gde su $A_i(k)$ i $B_i(k)$, $(n\times n)$ i $(n\times m)$ matrice, sledstveno.

Početni uslovi i pretpostavke su kao i u jed. (2.1).

Sa $\mathbf{x}(\cdot, \psi, \psi_u, \mathbf{u}, \mathbf{f})$ označiće se rešenje jed. (2.5) koje odgovara početnim uslovima datim jed. (2.3), sa $\{\mathbf{u}(k),\ k \ge k_0\}$ upravljanje i slobodni član sa $\mathbf{f}(k)$.

Naredna formula varijacije konstanti važi za sistem dat jed. (2.5):

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k_0+1+p, \psi, \psi_u, \mathbf{u}, \mathbf{f}) &= \sum_{q=0}^{h_N}\Phi_1(p,q)\psi(k_0-q) + \sum_{q=1}^{d_N}\Phi_2(p,q)\psi_u(k_0-q) \\ &+ \sum_{q=0}^{p}\Phi_3(p,q)\mathbf{u}(k_0+q) + \sum_{q=0}^{p}\Phi(p,q)\mathbf{f}(k_0+q)\end{aligned} \quad , \qquad (2.6)$$

gde je $\Phi(p,q)$ određeno sa:

$$\begin{aligned}&\Phi(p,q) = \sum_{i=0}^{N} A_i(k_0+p)\Phi(p-h_i-1, q), \quad q \le p \\ &\Phi(p,p) = I, \quad \Phi(p,q) = 0, \quad q > p\end{aligned} \quad , \qquad (2.7)$$

i:

$$\begin{aligned}\Phi_1(p,q) &= \sum_{q\le h_i \le p+q}\Phi(p, h_i - q)A_i(k_o - q + h_i) \\ \Phi_2(p,q) &= \sum_{q\le d_i \le p+q}\Phi(p, d_i - q)B_i(k_o - q + d_i). \\ \Phi_3(p,q) &= \sum_{d_i \le p-q}\Phi(p, d_i + q)B_i(k_o - q + d_i)\end{aligned} \qquad (2.8)$$

Jed. (2.6) se može proveriti direktnom zamenom u sistem jed. (2.5).

Analogija sa kontinualnim slučajem može se još više produbiti.

Dalje će biti razmatrani stacionarni diskretni sistemi oblika:

$$\mathbf{x}(k+1)=\sum_{i=0}^{N}\left(A_i(k)\mathbf{x}(k-h_i)+B_i(k)\mathbf{u}(k-d_i)\right)+\mathbf{f}(k), \quad k=k_0,k_0+1,k_0+2,\ldots \tag{2.9}$$

A_i i B_i su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija.

Proučiće se eksponencijalna rešenja slobodnog sistema i homogenog dela jednačine:

$$\mathbf{x}(k+1)=\sum_{i=0}^{N}A_i\,\mathbf{x}(k-h_i), \quad k=k_0,k_0+1,\ldots, \tag{2.10}$$

pri proizvoljnim početnim uslovima.

Neka je $\lambda \neq 0$ kompleksni broj, a $\mathbf{c}$ kompleksni nenula n–vektor.

Jed. (2.10) ima eksponencijalno rešenje $\lambda^k\mathbf{c}, \quad k=k_0-h_N,k_0-h_N+1,\ldots$ ako i samo ako je:

$$\Delta(\lambda)\mathbf{c}=\mathbf{0}, \tag{2.11}$$

gde je:

$$\Delta(\lambda)=I\lambda^{h_N+1}-\sum_{i=0}^{N}\lambda^{h_N-h_i}A_i\,. \tag{2.12}$$

Vektor $\mathbf{c}$ koji zadovoljava jed. (2.11) postoji ako i samo ako za karakterističnu jednačinu važi:

$$\det\Delta(\lambda)=0\,. \tag{2.13}$$

Determinanta $\det\Delta(\lambda)$ je polinom po λ na stepen $n(h_N+1)$ i naziva se *karakterističnim polinomom sistema*.

Nule polinome se zovu karakterističnim nulama sistema iz jed. (2.9).

Sve kompleksne nule su konjugovano–kompleksne (parne), s obzirom na činjenicu da je matrica A_i definisana nad poljem realnih brojeva.

Ovde se treba podsetiti nekoliko elementarnih činjenica iz teorije linearnih diferencijalnih jednačina.

Neka je $\lambda_i,\ i=1,\ldots q$, red svih utvrđenih karakterističnih nula, svaka sa višestrukošću p_i. Tada je $\sum_{i=1}^{k}p_i=n(h_N+1)$.

Za svako $\lambda \neq 0$ postoji tačno p_i linearno nezavisnih rešenja jed. (2.10) oblika $w_{ij}(k)\lambda_i^k$ gde je w_{ij} polinom reda manjeg od p_i, koji uzima vrednosti iz n–dimenzionalnog kompleksnog prostora.

Lako se proverava da ako je $w_{ij}(k)\lambda_i^k$ rešenje, tada je njegov konjugovano–kompleksni par $\bar{w}_{ij}(k)\lambda_i^k$ takođe rešenje, a i $\operatorname{Re}\left(w_{ij}(k)\lambda_i^k\right)$ i $\operatorname{Im}\left(w_{ij}(k)\lambda_i^k\right)$.

Tako, ako je svako λ_i, $i=1,\ldots,q$ različito od nule može se obrazovati skup od $n(h_N+1)$ linearno nezavisnih rešenja jed. (2.10) za neodređene početne uslove.

Rešenje jed. (2.10) koje odgovara bilo kojoj početnoj funkciji $\boldsymbol{\psi}$ može se konstruisati kao realna linearna kombinacija elemenata ovog skupa. Svakako, takvo realno rešenje može se dobiti i kao kompleksna linearna kombinacija $n(h_N+1)$ linearnih nezavisnih kompleksnih rešenja oblika $w_{ij}(k)\lambda_i^k$.

Dalje, ako postoji koren karakteristične jednačine jednak nuli, može se samo reći da postoji trenutak k^*, $k^* \leq k_0 + n(h_N+1)$, takav da za $k > k^*$ bilo koje rešenje jed. (2.10) je linearna kombinacija rešenja $w_{ij}(k)\lambda_i^k$.

Primer 2.1 Razmatra se jednostavan primer:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k-1), \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Ovde je $n=2,\ h_N=1,\ A_0=0,\ N=1$,

$$\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2-1 & -1 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & -1 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda^2\left(\lambda^2-1\right) = 0 .$$

Karakteristični polinom $\lambda^2\left(\lambda^2-1\right)$ ima tri različita korena: $\lambda_1=0$ višestrukosti 2, $\lambda_2=1$ i $\lambda_3=-1$ višestrukosti 1. Sopstveni vektori koji odgovaraju λ_2, λ_3 su:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Stoga se za dovoljno veliko k svako rešenje može izraziti u obliku:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} C_1 + C_2(-1)^k \\ 0 \end{bmatrix},$$

gde su C_1 i C_2 realne konstante koje zavise od početnih uslova.

Jednostavnim izračunavanjem proverava se da li ova formula važi za svako $k>0$ i da li je:

$$C_1=\frac{1}{2}\big(\psi_1(0)+\psi_2(0)+\psi_1(-1)+\psi_2(-1)\big),$$

$$C_2=\frac{1}{2}\big(\psi_1(0)+\psi_2(0)-\psi_1(-1)-\psi_2(-1)\big).$$

Analogno Laplasovoj transformaciji kod diskretnih sistema se koristi tzv. Z–transformacija.

Neka je F funkcija koja preslikava $\{0,1,2,\dots\}\to\mathbb{R}^n$. Njena Z–transformacija, označena sa zF ili $\hat{F}$, funkcija je kompleksne promenljive definisane izrazom:

$$\hat{F}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}F(k)\,z^{-k}\,. \tag{2.14}$$

Pretpostavlja se da je niz sa desne strane konvergentan za $|z|>r$, gde je r pozitivan realan broj.

Inverzna Z–transformacija od $\hat{F}$, označena sa $z^{-1}\hat{F}$, može se naći na sledeći način. Neka je C krug sa centrom u koordinatnom početku i prečnikom dovoljno velikim da sadrži sve polove polinoma $\hat{F}$, pozitivno orijentisan.

Tada iz jed. (2.14) sledi :

$$\int_c \hat{F}(z)\,z^{m-1}dz=\sum_{k=0}^{\infty}F(k)\int_c z^{m-k-1}dz\,, \tag{2.15}$$

i:

$$\left(z^{-1}F\right)(m)=F(m)=\frac{1}{2j\pi}\int_c \hat{F}(z)\,z^{m-1}dz\,. \tag{2.16}$$

Tako je, na osnovu Košijeve teoreme, $F(m)$ jednako sumi svih rezidijuma funkcije $z\to\hat{F}(z)\,z^{m-1}$.

Sada se primenjuje Z–transformacija na stacionarni sistem dat jed. (2.9) za $k_0=0$ pod pretpostavkom da su svi relevantni nizovi konvergentni u određenom delu kompleksnog prostora.

Sa $\hat{\mathbf{X}}(z)$ označiće se Z–transformacija restrikcije $x|_{[0,\infty)}$, a sa $\hat{\mathbf{U}}(z)$ Z–transformacija od $u|_{[0,\infty)}$. Za svako $k=0,1,\ldots$ množe se obe strane jed. (2.9) sa z^{-k}. Sumiranje po k od nule do beskonačnosti daje:

$$\begin{aligned} z\sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k+1)}\mathbf{x}(k+1) &= \sum_{i=0}^{N} A_i z^{-h_i}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k-h_i)}\mathbf{x}(k-h_i) \\ &+\sum_{i=0}^{N} B_i z^{-d_i}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-(k-d_i)}\mathbf{u}(k-d_i)+\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}\mathbf{f}(k) \end{aligned}, \tag{2.17}$$

i:

$$\begin{aligned} z\hat{\mathbf{X}}(z)-z\mathbf{x}(0) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=-h_i}^{-1}\left(A_i z^{-(k-h_i)}\boldsymbol{\psi}(k)+B_i z^{-(k-h_i)}\boldsymbol{\psi}_u(k)\right)\Big|_{d_i=h_i} \\ &+\sum_{i=0}^{N} A_i z^{-h_i}\hat{\mathbf{X}}(z)+\sum_{i=0}^{N} B_i z^{-d_i}\hat{\mathbf{U}}(z)+\hat{\mathbf{F}}(z) \end{aligned}. \tag{2.18}$$

Odatle je:

$$\hat{\mathbf{X}}(z)=\Delta_1^{-1}(z)\left(\hat{\mathbf{P}}(z)+H(z)\hat{\mathbf{U}}(z)+\hat{\mathbf{F}}(z)\right), \tag{2.19}$$

$$\Delta_1(z)=zI-\sum_{i=0}^{N} A_i z^{-h_i}, \tag{2.20}$$

$$\hat{\mathbf{P}}(z)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=-h_i}^{-1} z^{-(k-h_i)}\left[A_i\boldsymbol{\psi}(k)+B_i\boldsymbol{\psi}_u(k)\right]+z\boldsymbol{\psi}(0), \quad H(z)=\sum_{i=0}^{N} B_i z^{-d_i}. \tag{2.21}$$

Poredeći jed. (2.20) sa jed. (2.12) vidi se da, ako nula nije koren, svi polovi $\Delta_1^{-1}(z)$ jednaki su karakterističnim korenima sistema. Original rešenja dobija se iz jed. (2.16):

$$\mathbf{x}(k)=\frac{1}{2j\pi}\int_c \Delta_1^{-1}(z)\left(\hat{\mathbf{P}}(z)+H(z)\hat{\mathbf{U}}(z)+\hat{\mathbf{F}}(z)\right)z^{k-1}dz. \tag{2.22}$$

2.5 Mogućnosti analize vremenski diskretnih sistema sa kašnjenjem

2.5.1 Uvod

Diskretni sistemi su izuzetno rasprostranjeni u savremenoj tehnici.

Vremenskom diskretizacijom signala postiže se niz prednosti u odnosu na kontinualan prenos: često je moguća veća tačnost prenosa signala, omogućava se implementacija digitalnih računara i odgovarajućih upravljačkih algoritama, ekonomičnije i efikasnije korišćenje pojedinih instrumenata i energije u sistemu uopšte.

2.5.2 Vremenski domen

Ulogu izvoda kod diskretnih sistema preuzima *diferenca*, odnosno konačna razlika.

Kako se sistem posmatra na diskretnom vremenskom skupu određenom *periodom odabiranja*, potrebno je definisati *normalizovano diskretno vreme*: $k = \frac{t}{T}$, $t \in \mathrm{K}$, pri čemu je K vremenski diskretan skup.

Svakoj veličini $x(t)$ je pridružena funkcija f prema relaciji:

$$f(k) = \frac{1}{T} x(t), \tag{2.23}$$

odnosno:

$$f\left(\frac{t}{T}\right) = f(k) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} x(t+T) = f\left(\frac{t+T}{T}\right) = f(k+1). \tag{2.24}$$

Na ovaj način diferenca $\mathbf{D}x(t)$ može se dobiti samo u funkciji normalizovanog diskretnog vremena:

$$\mathbf{D}x(t) = \frac{x(t+T) - x(t)}{T} = f(k+1) - f(k) = \Delta f(k). \tag{2.25}$$

Za proceduru koja će biti prikazana potrebno je definisati i *operator pomeranja* $\wp(\cdot)$, na sledeći način:

$$\wp \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1), \tag{2.26}$$

pri čemu je $\mathbf{x}(k)$ proizvoljna skalarna ili vektorska veličina.

Tako se dalje dobija:

$$\Delta \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k) = \wp \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k) = (\wp - 1)\mathbf{x}(k), \tag{2.27}$$

odnosno za proizvoljnu diferencu j–tog reda:

$$\Delta^j \mathbf{x}(k) = (\wp - 1)^j \mathbf{x}(k), \tag{2.28}$$

$$\wp^j \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k+j). \tag{2.29}$$

Napominje se da se prethodna razmatranja odnose na *diskretni sistem* a ne na diskretizovani kontinualni sistem.

Ovde se posmatra sistem koji je diskretan, tako da nema potrebe da se uvode *produžavači signala* (nultog ili prvog reda), jer se sistem posmatra samo na diskretnom vremenskom skupu.

Takozvani *hibridni sistemi* nisu interesantni u svetlu problematike koja se tretira u ovoj disertaciji.

Analogno postupku sa kvazi–polinomijalnim matricama, u radu *Januševski* (1978) je razvijen pristup za predstavljanje diskretnih sistema sa kašnjenjem, koji se u nastavku izlaže.

Polazeći od diferencne jednačine ponašanja i koristeći specifičnost diskretnih sistema sa kašnjenjem kod kojih su kašnjenja celobrojni umnošci normalizovanog vremena k, dobijaju se sledeće relacije:

$$\wp\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(k+1), \tag{2.30}$$

$$\wp^{-1}\mathbf{x}(k)=\mathbf{x}(k-1), \tag{2.31}$$

odnosno kašnjenje je u ovom slučaju izraženo preko *istog* operatora kojim se predstavlja i diferenca.

Ova okolnost se obilato koristi pri analizi diskretnih sistema sa kašnjenjem jer matrice analogne prethodno uvedenim $L(p)$ *i* $G(p)$ neće biti kvazi–polinomijalne, već polinomijalne, što će biti i kada se pređe u kompleksni domen korišćenjem Z *–transformacije*.

Koristeći jed. (2.9–2.10), kao polazni sistem, u radu *Januševski* (1978) posmatra se diskretna jednačina ponašanja tipa:

$$L(\wp)\mathbf{x}_i(k)=G(\wp)\mathbf{x}_u(k),\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{2.32}$$

uz početne funkcije (koje se ovde svode na konačni broj početnih uslova):

$$\mathbf{x}_i(k)=\psi_{x_i}(k),\quad k=0,-1,\ldots,-h_l, \tag{2.33}$$

$$\mathbf{x}_u(k)=\psi_{x_u},\quad k=0,-1,\ldots,-d_r, \tag{2.34}$$

pri čemu su matrice $L(\wp)$ i $G(\wp)$ određene sa:

$$L(\wp)=\sum_{i=0}^{l}L^i(\wp)\wp^{-h_i},\quad G(\wp)=\sum_{i=0}^{r}G^i(\wp)\wp^{-d_i}, \tag{2.35}$$

$$L^i(\wp)=L_0^i\wp^q+\ldots+L_q^i,\quad G^i(\wp)=G_0^i\wp^q+\ldots+G_q^i, \tag{2.36}$$

a čista vremenska kašnjenja, po izlazu odnosno ulazu zadovoljavaju:

$$0=h_0<h_1<\ldots<h_l, \tag{2.37}$$

$$0=d_0<d_1<\ldots<d_r, \tag{2.38}$$

i celobrojni su umnošci k.

U ovom slučaju q će biti *stvarni red sistema* i to konačan, kako će se kasnije pokazati u prostoru stanja ovih sistema.

Pretpostavlja se da je period odabiranja fiksiran i da su kašnjenja celobrojni umnošci perioda odabiranja.

Jednačine stanja i izlaza biće slične onima kod vremenski kontinualnog sistema, samo će se umesto prvog izvoda vektora stanja javiti pomeranje za jedan period odabiranja:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{f}\big(&k,\mathbf{x}(k),\mathbf{x}(k-1),\mathbf{x}(k-2),\ldots,\mathbf{x}(k-N),\\ &\ldots,\mathbf{u}(k),\mathbf{u}(k-1),\mathbf{u}(k-2),\ldots,\mathbf{u}(k-R)\big),\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i(k)=\mathbf{g}\big(&k,\mathbf{x}(k),\mathbf{x}(k-1),\mathbf{x}(k-2),\ldots,\mathbf{x}(k-N),\\ &\ldots,\mathbf{u}(k),\mathbf{u}(k-1),\mathbf{u}(k-2),\ldots,\mathbf{u}(k-R)\big).\end{aligned} \tag{2.40}$$

Treba primetiti da su jed. (2.39) i jed. (2.40) čiste diferencne jednačine.

Za stacionarni, linearni diskretni sistem sa kašnjenjem jednačine stanja i izlaza biće:

$$\mathbf{x}(k+1)=A(k)\mathbf{x}(k)+\sum_{i=1}^{N}A_i(k)\mathbf{x}(k-i)+B(k)\mathbf{u}(k)+\sum_{i=1}^{R}B_i(k)\mathbf{u}(k-i), \tag{2.41}$$

$$\mathbf{x}_i(k)=C(k)\mathbf{x}(k)+\sum_{i=1}^{N}C_i(k)\mathbf{x}(k-i)+D(k)\mathbf{u}(k)+\sum_{i=1}^{R}D_i(k)\mathbf{u}(k-i). \tag{2.42}$$

Ako je sistem još i vremenski invarijantan, matrice neće zavisiti od k (tj. biće konstantne). Diskretni sistem sa kašnjenjem čiji period odabiranja nije fiksiran ili čija kašnjenja nisu celobrojni umnošci perioda odabiranja, ne mogu se opisati čistim diferencnim jednačinama. Oni su opisani diferencno–diferencijalnim jednačinama.

Nasuprot vremenski kontinualnim sistemima sa kašnjenjem čiji je prostor stanja beskonačan, prostor stanja diskretnih sistema sa kašnjenjem je konačnih dimenzija. Razlog za to je činjenica da vektor stanja diskretnog sistema, u svakom trenutku odabiranja, ima konačan broj elemenata, gde je svaki element funkcija određena samo u datom trenutku odabiranja, a ne na nekom intervalu.

2.5.3 Prostor stanja

Kod diskretnih sistema sa kašnjenjem, *postupak izbora veličina stanja* se sprovodi na potpuno analogni način, kao kod vremenski kontinualnih sistema s tim što se koristi ranije pomenuta pogodnost da je kod diferencnih jednačina konačna razlika izražena istim operatorom kao i kašnjenje.

Ovaj ranije uvedeni operator pomeranja $\wp$ pokazuje i značaj raznih ograničenja koja se uvode pri razmatranju *diskretnih sistema sa kašnjenjem* kod kojih je kašnjenje jednako *celobrojnom umnošku normalizovanog trenutka* k.

U radu *Januševski* (1978) sproveden je postupak izbora veličina stanja polazeći od diferencne vektorske jednačine ponašanja sistema u operatorskom obliku:

$$L(\wp)\mathbf{x}_i(k) = G(\wp)\mathbf{x}_u(k), \tag{2.43}$$

za $k = 0, 1, 2, \ldots$, uz početne funkcije tipa:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(k) &= \psi_{x_i}(k), \quad k = 0, -1, \ldots, -h_l \\ \mathbf{x}_u(k) &= \psi_{xu}(k), \quad k = 0, -1, \ldots, -d_r \end{aligned}, \tag{2.44}$$

pri čemu su polinomijalne matrice po argumentu $\wp$ određene sa:

$$L^i(\wp) = L_0^i \wp^q + \ldots + L_q^i, \quad G^i(\wp) = G_0^i \wp^q + \ldots + G_q^i, \tag{2.45}$$

$$L(\wp) = \sum_{i=0}^{l} L^i(\wp)\wp^{-h_i}, \quad G(\wp) = \sum_{i=0}^{r} G^i(\wp)\wp^{-d_i}, \tag{2.46}$$

dok čista vremenska kašnjenja zadovoljavaju:

$$0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_l, \quad 0 = d_0 < d_1 < \ldots < d_r. \tag{2.47}$$

Jasno je da su elementi matrica G *i* L polinomi sa konstantnim koeficijentima.

Ako se iskoristi relacija:

$$\wp^{(h_i+p)}\mathbf{x}_i(k - h_i) = \wp^p \mathbf{x}_i(k), \quad \forall p \le q, \tag{2.48}$$

postupak formiranja matematičkog modela u prostoru stanja je identičan kao za kontinualne sisteme sa kašnjenjem, *Debeljković, Milinković* (1999).

Sprovođenjem procedure do kraja, dobija se *diskretna vektorska jednačina stanja sistema sa kašnjenjem* u obliku:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=0}^{l} A_i\,\mathbf{x}(k - h_i) + \sum_{i=0}^{r} B_i\,\mathbf{x}_u(k - d_i), \tag{2.49}$$

kao i jednačina izlaza sistema:

$$\mathbf{x}_i(k) = C\,\mathbf{x}(k), \tag{2.50}$$

uz početne funkcije u obliku:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \psi(k), \quad -h_l \le k \le 0 \\ \mathbf{x}_u(k) &= \psi_u(k), \quad -d_r \le k \le 0 \end{aligned}. \tag{2.51}$$

Neka su sada komponente *novog vektora stanja* određene sledećim izrazima:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k-h_i) &= \mathbf{x}_{h_i}(k) \\ \mathbf{x}_1(k+1) &= \mathbf{x}(k) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{x}_{h_{l-1}}(k+1)) &= \mathbf{x}_{h_{l-2}}(k) \\ \mathbf{x}_{h_l}(k+1) &= \mathbf{x}_{h_{l-1}}(k) \end{aligned}, \qquad (2.52)$$

tako da je novi vektor stanja transformisanog sistema, dat sa:

$$\mathbf{x}_{eq}(k) = \left[\mathbf{x}^T(k), \mathbf{x}_1^T(k), ..., \mathbf{x}_{h_i}^T(k), ..., \mathbf{x}_{h_l}^T(k)\right]^T. \qquad (2.53)$$

Slično se transformiše i vektor ulaza, međutim to u ovom slučaju nije od posebnog interesa. Pažnja će se zadržati na transformisanom vektoru stanja i pridruženoj mu matrici. Na ovaj način povećan je red sistema, ali je on i dalje konačan.

Transformisani sistem se sada može predstaviti novom jednačinom stanja i jednačinom izlaza a sa novo definisanom matricom sistema. Ovde će se razmatrati slučaj kada nema kašnjenja po ulazu.

Tada se matrice A_{eq} i B_{eq} svode na sledeći oblik, s tim što će se nadalje *najveće kašnjenje u diskretnim sistemima* umesto sa l, kako stoji u originalnom radu *Januševskog* (1978), označavati sa N:

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & \ldots & A_i & \ldots & A_N \\ I_n & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & I_n & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & I_n \end{pmatrix}, \quad B_{eq} = \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.54)$$

Posmatra se slobodni radni režim i matrica A_{eq}. Ova kvadratna matrica ima dimenziju: $\left(n\times(N+1)\right)$ što odgovara redu *novo formiranog diskretnog sistema bez kašnjenja*.

Procedura eliminisanja kašnjenja je svojstvena *samo diskretnim sistemima* i omogućava da se umesto sistema sa kašnjenjem analizira *sistem bez kašnjenja*.

Cena koja se plaća za ovu pogodnost ogleda se u porastu dimenzionalnosti sistema, ali ona je uvek konačna, a s obzirom da digitalni računari danas gotovo trenutno vrše operacije sa matricama vrlo visokog reda, tako da je postupak sasvim prihvatljiv.

Kako je već pomenuto ranije, *sama priroda diskretnih sistema* omogućava ovakvu transformaciju. Funkcional (integral) koji se pojavljuje u rešenju vremenski kontinualnog sistema sa kašnjenjem kod *vremenski diskretnih sistema* je zamenjen sumom sa konačnim brojem sabiraka. Početna funkcija kod diskretnih sistema nije ništa drugo do konačan skup početnih vrednosti.

Dalje će se posmatrati uglavnom *diskretni sistem sa kašnjenjem*, dat vektorskom diferencnom jednačinom stanja oblika:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=0}^{N} A_i \, \mathbf{x}(k-i) , \tag{2.55}$$

uz početnu funkciju tipa:

$$\mathbf{x}(i) = \boldsymbol{\psi}(i), \quad \forall i = 0, -1, \ldots, -N . \tag{2.56}$$

U nekim daljim izlaganjima posebna pažnja će biti posvećena i na slučaj kada postoji *samo matrica* A_1.

2.5.4 Kompleksni domen

Kompleksni domen je možda najinteresantniji i najfunkcionalniji domen za predstavljanje diskretnih sistema sa kašnjenjem.

Diskretne prenosne funkcije se mogu definisati kao kod sistema bez kašnjenja. Ove funkcije imaju konačan broj polova, odnosno karakteristični polinom je sa konačnim brojem nula, koji odgovara dimenziji ekvivalentnog (proširenog) sistema bez kašnjenja.

Z–transformacija, kao što je dobro poznato, vrši preslikavanje leve s–poluravni u kružnicu jediničnog poluprečnika sa centrom u koordinatnom početku.

Pokazalo se da je matematički aparat neophodan za definisanje dovoljnih uslova stabilnosti diskretnih sistema sa kašnjenjem posebno efikasan kada se primenjuje u Z–ravni.

Ovo se pre svega odnosi na kriterijum ljapunovske stabilnosti za vremenski diskretne sisteme sa kašnjenjem, kao i druge slične kriterijume.

Direktnom primenom Z–transformacije na jed. (2.55), dobija se:

$$f(z) = \det\left(z I - \sum_{i=0}^{N} z^{-i} A_i \right). \tag{2.57}$$

Ovde treba pomenuti i da ranije uvedena ekvivalentna matrica zadovoljava sledeću relaciju:

$$f(z)=\det\left(z\,I_n-\sum_{i=0}^{N}z^{-i}A_i\right)=\det\left(z\,I_{n\times(N+1)}-A_{eq}\right). \tag{2.58}$$

Ova relacija je i *osnovni razlog* uvođenja ekvivalentne matrice jer je to, po dimenziji, *najmanja matrica* koja sadrži sve potrebne informacije bitne za analizu diskretnog sistema sa kašnjenjem. Njen specifičan oblik, pruža mogućnosti dekompozicije karakterističnog polinoma koji se koristiti pri proveri rezultata ili u posebnim prilazima formulisanje kriterijuma stabilnosti u smislu Ljapunova i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu.

Razmatra se stacionarni, vremenski diskretni sistem sa jednim kašnjenjem i periodom odabiranja l po stanju:

$$\mathbf{x}(k+1)=A_0\,\mathbf{x}(k)+A_1(k)\mathbf{x}(k-l)+B\mathbf{u}(k),\quad k\geq k_0, \tag{2.59}$$

$$\mathbf{x}_i(k)=C\,\mathbf{x}(k)+D\mathbf{u}(k). \tag{2.60}$$

Treba primetiti da je l ceo broj. Z–transformacija jed. (2.59–2.60) daje:

$$z\hat{\mathbf{X}}(z)-z\mathbf{x}(k_0)=A_0\,\hat{\mathbf{X}}(z)+A_1\,z^{-l}\hat{\mathbf{X}}(z)+B\,\hat{\mathbf{U}}(z), \tag{2.61}$$

$$\hat{\mathbf{X}}_i(z)=C\,\hat{\mathbf{X}}(z)+D\,\hat{\mathbf{U}}(z). \tag{2.62}$$

Ako je početno stanje nulto, tada je $\hat{\mathbf{X}}_i(z)=H(z)\hat{\mathbf{U}}(z)$ gde je:

$$H(z)=C\left(z\,I-A_0-A_1\,z^{-l}\right)^{-1}B+D. \tag{2.63}$$

Važna razlika između $H(z)$ u jed. (2.63) i analogne veličine $W(s)$ kod vremenski kontinualnih sistema sa kašnjenjem je to što je $H(z)$ racionalna funkcija kompleksno promenljive a ne transcendentna kao u $W(s)$.

Polovi sistema su definisani kao one kompleksne vrednosti z za koje diskretna prenosna funkcija $H(z)$ teži beskonačnosti.

Stoga, vrednosti z zadovoljavaju jednakost:

$$\det\left(z\,I-A_0-A_1\,z^{-l}\right)=0. \tag{2.64}$$

Jed. (2.64) ima konačan broj korenova. Ovo potvrđuje da je prostor stanja vremenski diskretnog sistema sa kašnjenjem *konačne dimenzije*.

2.5.5 Frekventni domen

O predstavljanju diskretnog sistema sa kašnjenjem u frekventnom domenu može se više saznati u radu *Grujić* (1991). Ova razmatranja nisu ovde od posebnog interesa s obzirom na osnovne doprinose disertacije koji se, kao što će se kasnije pokazati, dobijaju isključivo u vremenskom i/ili kompleksnom domenu.

2.6 Metode analize diskretnih sistema sa kašnjenjem

2.6.1 Uvod

Diskretni sistemi sa kašnjenjem, kako je već pokazano, mogu se tretirati kao obični diskretni sistemi bez kašnjenja nakon transformacije stanja. Ipak, diskretni sistemi sa kašnjenjem, u svom izvornom obliku, su interesantni iz više razloga. Gotovo uvek kada se traži numeričko rešenje neke od funkcionalno–diferencijalnih jednačina koje se dobijaju pri analizi vremenski kontinualnih sistema sa kašnjenjem, u određenom trenutku vrši se prelaz (aproksimacija) na sistem *konačne dimenzionalnosti*, koji je upravo predstavljen *diferencnim jednačinama sa kašnjenjem*. U teoriji automatskog upravljanja, štaviše, postoji tendencija da se problemi upravljanja od samog početka formulišu preko diferencnih jednačina. U mnogim procesima vrednosti procesnih promenljivih (*veličina stanja*) bitne su samo u određenim vremenskim trenucima (kada je u proces upravljanja uključen, na primer, konačni automat ili digitalni računar).

Nije potrebno posebno apostrofirati pogodnosti koje pruža implementacija digitalnog računara u upravljačkom sistemu.

Na kraju, upotreba diferencnih jednačina, samim tim i diskretnih upravljačkih algoritama omogućava pristup jednom jako širokom spektru inženjerskih problema iz prakse. Svakako da treba obratiti pažnju pod kojim se uslovima vrši diskretizacija, kao i utvrditi odnos između kašnjenja i uvedene periode odabiranja, *Grujić* (1991).

Nadalje će se razmatranja zadržati isključivo na vremenski diskretnom sistemu kao takvom i on će, u svim razmatranjima, biti polazna tačka i na koji će se primenjivati adekvatane metode i postupci.

2.6.2 Određivanje kretanja vremenski diskretnih sistema u vremenskom domenu

Jednačina ponašanja *diskretnog sistema sa kašnjenjem* može biti data u sledećem obliku:

$$\begin{aligned}&\alpha_n \mathbf{x}_i(k+n)+\alpha_{n-1}\mathbf{x}_i(k+n-1)+\ \dots\ +\alpha_0 \mathbf{x}_i(k)\\&+\alpha_{-1}\mathbf{x}_i(k-1)+\dots+\alpha_{-h_l}\mathbf{x}_i(k-N)=\mathbf{x}_u(k)\end{aligned}. \tag{2.65}$$

Moguća su dva pristupa pri rešavanju kretanja sistema definisanog prethodnom diferencnom jednačinom i oba dovode do željenih rezultata.

Prvi je direktna primena Z *–transformacije*, a drugi se sastoji u primeni proširenog vektora stanja što je već detaljno objašnjeno ranije. U tom slučaju dobija se obična diferencna jednačina povišenog reda, koja se može rešavati standardnim postupcima datim u radu. *Grujić* (1991).

Primenom Z –transformacije na jed. (2.65), uz nulte početne uslove može se pisati:

$$\begin{aligned}&\alpha_n z^n\hat{\mathbf{X}}_i(z)+\alpha_{n-1}z^{n-1}\hat{\mathbf{X}}_i(z)+\dots+\alpha_0\hat{\mathbf{X}}_i(z)\\&+\alpha_{-1}z^{-1}\hat{\mathbf{X}}_i(z)+\dots+\alpha_{-h_l}z^{-N}\hat{\mathbf{X}}_i(z)=\hat{\mathbf{X}}_u(z)\end{aligned}, \tag{2.66}$$

sređivanjem se dobija:

$$\hat{\mathbf{X}}_i(z)=\left(\sum_{i=-N}^{n}\alpha_i z^i\right)^{-1}\hat{\mathbf{X}}_u(z), \tag{2.67}$$

odnosno vraćanjem u diskretni vremenski domen:

$$\mathbf{x}_i(k)=Z^{-1}\left\{\left(\sum_{i=-N}^{n}\alpha_i z^i\right)^{-1}\hat{\mathbf{X}}_u(z)\right\}, \tag{2.68}$$

što se dalje može rešavati na primer razvijanjem u red ili drugim metodama.

Drugi pristup je promena tekuće promenljive k, uvođenjem smene tako da se formalno eliminiše kašnjenje i podigne red diferencne jednačine.

Nova promenljiva j se uvodi sa $j=(k-N)$, odnosno $k=(j+N)$, tako da se jed. (2.65) svodi na:

$$\alpha_n \mathbf{x}_i(j+n+N)+\dots+\alpha_{-N}\mathbf{x}_i(j)=\mathbf{x}_u(j+N). \tag{2.69}$$

Dalje se jed. (2.69) rešava poznatim metodama diskretne matematike.

2.6.3 Određivanje kretanja vremenski diskretnih sistema sa kašnjenjem u prostoru stanja

Vremenski diskretni sistemi sa kašnjenjem se mogu analogno predstaviti u prostoru stanja, vektorskom diferencnom jednačinom stanja, kako je već pokazano:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_N\,\mathbf{x}(k-N)\,, \tag{2.70}$$

i početnom funkcijom u obliku:

$$\mathbf{x}(k) = \psi(k), \quad \forall k = (k_0 - N), (k_0 - N + 1), \dots, k_0\,, \tag{2.71}$$

pri čemu je očigledno dopušteno jedno proizvoljno veliko *diskretno kašnjenje.*

Teorema 2.1 Rešenje jed. (2.70) može se predstaviti sumom:

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{j=k_0-N}^{k_0} \Phi(k, j)\boldsymbol{\psi}(j), \quad \forall k \geq k_0\,, \tag{2.72}$$

pri čemu diskretna fundamentalna matrica Φ zadovoljava:

$$\Phi(k+1, j) = A_0\,\Phi(k, j) + A_N\,\Phi(k-N, j), \quad \forall k \geq k_0\,, \tag{2.73}$$

$$\Phi(k, j) = I\,\delta(k-j), \quad \forall k, j \in [k_0 - N, k_0]\,, \tag{2.74}$$

Malek–Zavarei, Jamshidi (1987), *Januševski* (1978).

Najpogodniji oblik kretanja, koji će se nadalje stalno koristiti pokazaće se na jednačini stanja diskretnog sistema sa kašnjenjem, za proizvoljan broj kašnjenja.

Polazeći od jednačine stanja i početnih uslova sledećeg oblika:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + \sum_{i=1}^{N} A_i\,\mathbf{x}(k-i)\,, \tag{2.75}$$

$$\mathbf{x}(k) = \psi(k), \quad \forall k = 0, -1, \dots, -N\,, \tag{2.76}$$

u radu *Januševski* (1978) je prikazano rešenje jed. (2.75) u obliku sume:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k)\mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^{N} \Phi(k-i)\,A_i\,\mathbf{x}(-i)\,. \tag{2.77}$$

Osobine $\Phi(k)$ su sledeće:

$$\Phi(k+1) = \sum_{i=0}^{N} A_i\,\Phi(k-i)\,, \tag{2.78}$$

$$\Phi(0) = I\,. \tag{2.79}$$

Interesantno je sada uporediti rešenja vremenski kontinualnog i vremenski diskretnog sistema.

Očigledno je da fundamentalne matrice imaju vrlo slične osobine, a kada se uzme u obzir da je sumiranje u diskretnom domenu pandan integraljenju u kontinualnom domenu, analogija je potpuna.

Poznato je da je fundamentalna matrica *vremenski kontinualnih sistema sa kašnjenjem oblika*:

$$\Phi(t) = L^{-1}\left\{\left(s\,I - \sum_{i=0}^{k} A_i\, e^{-s\tau_i}\right)^{-1}\right\}. \tag{2.80}$$

Ovakav izraz očigledno se ne može direktno rešiti zbog prisustva beskonačnog broja korenova, koji potiču od transcedentnog člana $e^{-s\tau_i}$.

Kod *vremenski diskretnog sistema sa kašnjenjem* situacija je potpuno drugačija.

Primenom Z –transformacije na jed. (2.75) dobija se:

$$\Phi(k) = Z^{-1}\left\{\left(z\,I - \sum_{i=0}^{N} z^{-i} A_i\right)^{-1}\right\}. \tag{2.81}$$

Ova relacija se očigledno *može* relativno lako rešiti, imajući u vidu konačan broj korenova. Dobija se karakteristični polinom po z stepena $n\times(N+1)$, kome odgovara isto toliko korenova.

U radu *Gorecki et al.* (1989) ovaj polinom je dat sa:

$$\Delta(\lambda) = I\lambda^{N+1} + \sum_{i=0}^{N} \lambda^{N-i} A_i\,, \tag{2.82}$$

što dovodi do istog zaključka kada se ima na umu da je polazna reprezentacija sistema sa kašnjenjem bila data u matričnom zapisu jed. (2.75) reda n.

Sada se može uvesti jedna nova matrica A_{eq}. Naziva se *ekvivalentna matrica* u oznaci A_{eq}, *a* koja zadovoljava *jedinu* relaciju koja je bitna za povezivanje diskretnog sistema sa kašnjenjem sa njemu ekvivalentnom sistemu bez kašnjenja, ali povećane dimenzije.

Zahtev koji ova matrica mora da zadovolji je taj da postoji *Biunikova* korespondencija njenih sopstvenih vrednosti i sopstvenih vrednosti, odnosno rešenja jed. (2.82).

Ovo se može zapisati na sledeći način:

$$\left(z\,I_{n\times(N+1)} - A_{eq}\right)^{-1} = \left(z\,I_n - \sum_{i=0}^{N} z^{-i} A_i\right)^{-1}. \tag{2.83}$$

Očigledno je da je ova matrica upravo ona matrica A_{eq} proširenog sistema bez kašnjenja iz jed. (2.27) i da ona u sebi objedinjuje sve informacije potrebne i dovoljne da se, uz poznavanje početne funkcije (uslova), odredi kretanje sistema.

Može se zaključiti da se na ovaj način *fundamentalna matrica vremenski diskretnog sistema sa kašnjenjem*, a samim tim i kretanje, može uvek vrlo lako i brzo odrediti, čak i za sisteme višeg reda, ako se uzmu u obzir velike brzine matričnog proračuna koje danas imaju digitalni računari.

Takođe, ako se uzme u obzir činjenica da se kašnjenje najčešće javlja u samo jednoj matrici, odnosno ostale A_i su nula–matrice, proračun kao i formulacija samog problema dodatno se uprošćava.

Samim tim moguće je ispitivati, relativno jednostavno, kako *ljapunovsku* (asimptotsku) stabilnost diskretnih sistema sa kašnjenjem, tako i *stabilnost na konačnom vremenskom intervalu*.

Literatura

Aleksendrić, M., *Dinamika posebnih klasa kontinualnih i diskretnih sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu,* Dipl. rad, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 2002.

Barnett, S., *Matrices in Control Theory*, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.

Belhouari, A., E. Tissir, A. Hmamed, "Stability of Interval Matrix Polynomial in Continuous and Discrete Cases", *Systems & Control Letters*, (18), (1992) 183–189.

Bellman, R., K. L. Cooke, *Differential–difference Equations*, Academic Press, New York, 1963.

Debeljković, D. Lj., *Dinamika objekata i procesa*, Mašinski fakultet, Beograd, 1989.

Debeljković, D. Lj., *Zbirka zadataka iz dinamike objekata i procesa*, Mašinski fakultet, Beograd, 1990.

Debeljković, D. Lj., *Sistemi sa kašnjenjem*, GIP Kultura, Begrad, 1994.

Debeljković, D. Lj., T. M. Peruničić, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, *Parametarske metode analize i sinteze sistema sa kašnjenjem*, GIP Kultura, Beograd, 1997.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu*, GIP Kultura, Beograd, 1999.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, Čigoja štampa, Beograd, 2004.a.

Desoer, C. A., M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input–output Properties*, Academic Press, New York, 1975.

Đurović, M., *Robustnost stabilnosti nekih posebnih klasa sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem*, Mag. teza, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 1999.

El'sgol'ts, L. E., S. B. Norkin, *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, New York, 1973.

Gantmacher, F., *The Theory of Matrices*, Vol. 1 and Vol. 2., Chelsea, New York, 1959.

Gu, K., Kharitonov, V. L., Chen, J., *Stability of Time–delay Systems,* Burkhauser, Boston, 2003.

Goreckii, H., *Analiz i sintez sistem upravlenia s zapazdivaniem*, Mašinostroenie, Moskva, 1974.

Goreckii, H., S. Fuksa, P. Grabowski, A. Korytowski, *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, J. Wiley, New York, 1989.

Grujić, Lj., *Diskretni sistemi*, Mašinski fakultet, Beograd, 1991.

Halanay, A., *Differential Equations–stability, Oscillations, Time Lags*, Academic Press, New York, 1996.

Januševskii, R. T., *Upravlenie objektami s zapazdavaniem*, Nauka, Moskva, 1978.

Kamen, E. W., *Introduction to Signals and Systems*, MacMillan Publ. Company, New York, 1990.

Koepcke, R. W., "On the Control of Linear Systems with Pure Time Delay", *Trans. ASME* J. Basic Eng., (3), (1965) 74–80.

Krasovskii, N. N., *Nekatorii zadači teorii ustoičivosti dviženia*, Nauka, Moskva, 1959.

Kolmanovskii, V. B., V. R. Nosov, *Ustoičivost i periodičiski režimi regulireumih sistem s posledeistviem*, Nauka, Moskva, 1981.

Lakshmikantham, V., S Leela, *Differential and Integral Inequalities*, Vol 1. Academic Press, New York, 1969.

Lancaster, P., M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, Academic Press, New York, 1985.

Lazarević, P. M., *Sinteza Kalmanovog regulatora u sistemima automatskog upravljanja sa kašnjenjem*, Mag. teza, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 1993.

Lazarević, P. M., D. Lj. Debeljković, "Finite Time Stability Analysis of Linear Autonomous Fractional Order Systems with Delayed States", *Preprints 4th IFAC Workshop on Time Delay Systems,* Rocquencourt, Paris (France), September, (2003).

Malek–Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time–delay Systems*, North–Holland, Amsterdam, 1987.

Neff, H., *Continuous and Discrete Linear Systems*, Harper & Row Publishers, New York, 1984.

Ogata, K., *State Space Analysis of Control Systems,* Prentice–Hall, New Jersey, 1967.

Oguztoreli, M. M., *Time Lag Control Systems*, Academic Press, New York, 1966.

Owens, D. H., *Feedback and Multivariable Systems,* Peter Peregrinus Ltd., 1978.

Razvan, V., *Absolutaja ustučivost avtomatičeskih sistem s zapazdivaniem*, Nauka, Moskva, 1983.

Smith, O. J., *Feedback Control Systems*, McGraw–Hill, New York, 1958.

Solodov, A. V., E. A. Solodova, *Sistemi s peremenim zapazdivaniem*, Nauka, Moskva, 1980.

Tchetaev, N. G., *Stability of Motion*, Gosthizdat, Moscow, 1955.

Višnjić, N., *Dinamička analiza linearnih diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem*, Dipl. rad, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 2003.

Yoshizawa, T., *Stability Theory by Lyapunov's Second Method*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

III HRONOLOŠKI PREGLED POSTIGNUTIH REZULTATA NA POLJU IZUČAVANJA LJAPUNOVSKE STABILNOSTI VREMENSKI DISKRETNIH I KONTINUALNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

3. HRONOLOŠKI PREGLED BAZIČNIH REZULTATA

3.1 Opšta pitanja teorije stabilnosti sistema

3.1.1 Uvodna razmatranja

U savremenoj teoriji upravljanja sistemima predloženi su i koriste se različiti koncepti stabilnosti, kao na primer: ljapunovska, neljapunovska i tehnička stabilnost, stabilnost tipa "ograničeni ulaz–ograničeni izlaz", i tako dalje, od kojih se, u prvom redu očekuje da odgovore na sledeća suštinska pitanja:

- O čijoj se stabilnosti radi?
- Kako se definiše rastojanje između posmatranih stanja, odnosno kretanja u odnosu na razmatrano stanje, čija se stabilnost ispituje?
- Kako se definiše "bliskost" između stanja, odnosno kretanja?
- Pod kojim uslovima se zahteva tražena "bliskost"?
- Na kom se vremenskom intervalu zahteva tražena "bliskost"?

U standardnom kontekstu ovih razmatranja, uvažavajući usvojenu klasu sistema, uobičajeno se prvo razjašnjavaju pitanja vezana za definiciju, postojanje, jedinstvenost i stabilnost ravnotežnog stanja sistema, a zatim se, shodno predloženom konceptu, daje *definicija* i odgovarajući *uslov stabilnosti*. Na taj način, dolazi se do potrebne platforme i pozicija sa kojih je moguće efikasno analizirati dinamičko ponašanje razmatranog sistema sa željenog aspekta.

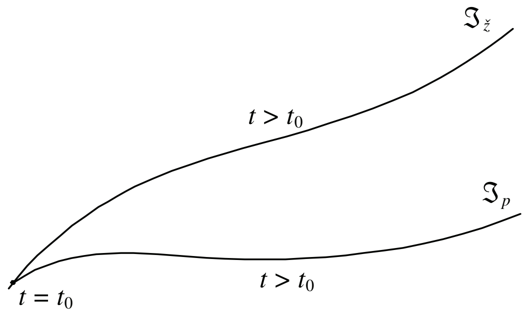
Jasno je da se, korišćenjem odgovarajućih kriterijuma, mogu dobiti odgovori po pitanju stabilnosti razmatranih sistema i bez rešavanja njihovih diferencijalnih jednačina kretanja, čime se postiže pun analitički efekat. U tom smislu, preporučuju se klasična dela: *Lyapunov* (1956), *Hahn* (1963, 1967), *Krasovskii* (1963), *Rouche et al*. (1977), *Grujić et al.* (1984), *Khalil* (1980) i *Yoshizava* (1996).

U nastavku će se izložiti deo razmatranja, u celosti preuzet iz rada *Grujić* (1970) koji na jedinstven, rigorozan i koncizan način daje najcelovitiju podlogu za traženje odgovora po svim ranije postavljenim pitanjima.

3.1.2 Stabilnost sistema

Problem ispitivanja stabilnosti je jedan od najosnovnijih i najvažnijih zadataka koji treba da se reši pri analizi i sintezi ponašanja svih, a posebno zatvorenih, sistema automatskog upravljanja. Stabilnost sistema izražava jednu od njegovih najbitnijih osobina i, najprostije rečeno, ona iskazuje da li se razmatrani sistem odlikuje stalnošću određene karakteristike svog ponašanja koje predstavlja rezultat njegovog kretanja i delovanja, pri čemu pojam kretanja treba shvatiti u najširem smislu te reči, *Grujić* (1970). Kao što je poznato, postoji veoma veliki broj definicija stabilnosti, pri čemu su one nastale ili nastaju kao rezultat različitih praktično–tehničkih zadataka i težnji da se što dublje i preciznije iskaže ova značajna osobina sistema.

Za sveobuhvatno poimanje stabilnosti i kasnije proisteklih koncepata od *suštinskog značaja* je razmatrati i uočiti sledeća pitanja i pojmove, koji se ovde izvorno prenose iz rada *Grujić* (1970). Uočimo sistem koji se do nekog trenutka $t = t_0$ kreće na željeni (zahtevan) način. Pretpostavlja se da je poznato željeno kretanje i nakon trenutka $t = t_0$, kako je to ilustrovano na *slici* 3.1.



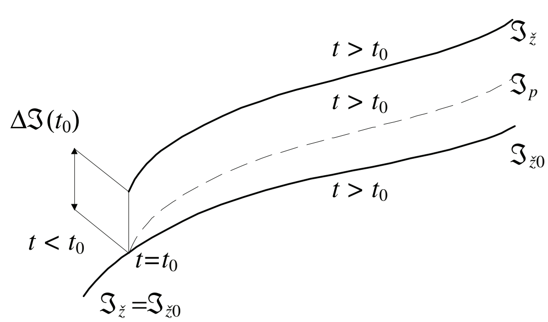
Slika 3.1 Željeno i poremećeno kretanje

Dalje se pretpostavlja da će se sistem kretati po trajektoriji $\Im_{\hat{z}}$ i za $\forall t \geq t_0$ ukoliko njegov rad ne bude poremećen iz bilo kog razloga. U tom slučaju, njegovo kretanje naziva se *neporemećenim*.

S druge strane, može se postaviti pitanje kako će se sistem kretati ako od trenutka $t = t_0$ bude podvrgnut delovanju nekog neželjenog uticaja?

Da li će stvarno kretanje, koje sada predstavlja *poremećeno* kretanje, prikazano trajektorijom $\Im_p$, *slika* 3.1, biti dovoljno blizu željenog $\Im_{\hat{z}}$ za $\forall t \geq t_0$ i da li će mu se vremenom približavati ili će se udaljavati od njega?

Odstupanje stvarnog kretanja sistema od željenog ne mora da bude posledica neželjenog uticaja samo neke spoljne veličine. U trenutku $t = t_0$ može da se promeni željeno kretanje $\Im_{\hat{z}}$ i da odstupi od prvobitno željenog kretanja, odnosno trajektorije $\Im_{\hat{z}0}$ za $t \geq t_0$. U graničnom slučaju, može se pretpostaviti da se promena željenog kretanja odvija momentalno u trenutku $t = t_0$. Ako sistem nije podvrgnut nikakvim neželjenim i nepredvidljivim spoljašnjim uticajima, može se reći da u trenutku $t = t_0$ postoji početno odstupanje $\Delta\Im(t_0)$ stvarnog od željenog kretanja $\Im_{\hat{z}}$, *slika* 3.2.

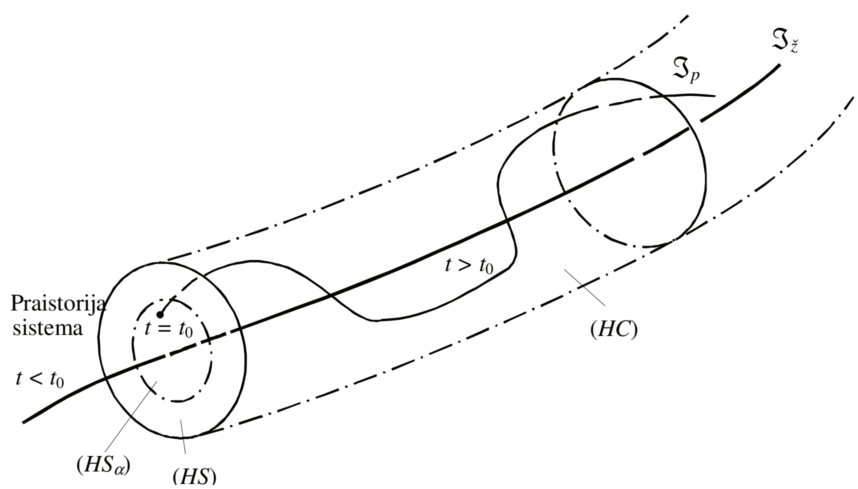


Slika 3.2 Odstupanje stvarnog od željenog kretanja

Stvarno kretanje sistema i dalje karakteriše trajektorija $\Im_p$, *slika* 3.2. Kretanju sistema, tj. njegovom stvarnom ponašanju, postavljaju se određeni zahtevi. Priroda tih zahteva zavisi od potrebe rešavanja konkretnih zadataka.

Može se, na primer, zahtevati da stvarno kretanje $\Im_p$ ne odstupa od željenog $\Im_{\check{z}}$ ni u jednom trenutku više nego što je dozvoljeno, čim je to odstupanje posledica uticaja bilo početnih odstupanja, bilo neželjenog dejstva nekih spoljašnjih veličina, a u okvirima njihovih prirodno dozvoljenih intenziteta.

Ako se prethodno razmatranje interpretira u prostoru stanja, *slika* 3.3, jasno je da se stvarna trajektorija $\Im_p$ nalazi stalno u hipercilindru (HC), čiju osu predstavlja željena trajektorija $\Im_{\check{z}}$, a bazu hipersfera (HS) sa centrom na $\Im_{\check{z}}$ u trenutku $t = t_0$, *slika* 3.3.



Slika 3.3 Kretanje sistema unutar hipercilindra

Ukoliko je poremećeno kretanje nastalo kao posledica delovanja nenultih početnih uslova, oni treba da pripadaju hipersferi (HS_α) dozvoljenih početnih stanja za koje će trajektorija $\Im_p$ sigurno, sve vreme, biti u hipercilindru (HC), *Grujić* (1970).

Za dalja razmatranja, usvaja se da ponašanje sistema ne zavisi od njegove "*praistorije*", što praktično znači da stanje sistema $\mathbf{X}(t)$ u trenutku t, zavisi samo od početnog stanja sistema $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(t)$, početnog trenutka t_0 i trenutka t.

Neka je stvarno ponašanje sistema opisano vektorskom diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1(t, \mathbf{X}(t)), \tag{3.1}$$

a željeno ponašanje sa :

$$\dot{\mathbf{X}}_{\check{z}}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1(t, \mathbf{X}_{\check{z}}(t)). \tag{3.2}$$

Na osnovu jed. (3.1) i jed. (3.2) dobija se vektorska diferencijalna jednačina ponašanja u odstupanjima kao:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}(t)), \tag{3.3}$$

gde je:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_{\check{z}}(t), \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{X}(t)) = \boldsymbol{\varphi}_1(t, \mathbf{X}(t)) - \boldsymbol{\varphi}_1(t, \mathbf{X}_{\check{z}}(t)) \\ \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0} \end{gathered}. \tag{3.5}$$

Jasno je da jed. (3.1) opisuje *stvarno kretanje* $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, t_0)$ prikazano trajektorijom $\Im_p$, *slika* 3.3, da jed. (3.2) opisuje *neporemećeno kretanje* $\mathbf{X}_{\check{z}}(t, \mathbf{X}_{\check{z}0}, t_0)$ kome odgovara trajektorija $\Im_{\check{z}}$, *slika* 3.3, a da jed. (3.3) opisuje *poremećeno* kretanje.

U početnom trenutku $t = t_0$, važi:

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(t_0), \quad \mathbf{X}_{\check{z}0} = \mathbf{X}(t_0), \tag{3.6}$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0). \tag{3.7}$$

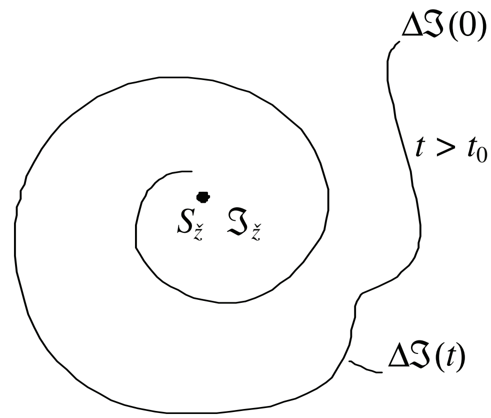
Za odstupanja se dobija, na osnovu jed. (3.4):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0). \tag{3.8}$$

Kada je $\Im_{\check{z}}$ geometrijsko mesto tačaka u prostoru stanja, govori se o *stabilnosti procesa*. Ako se željena trajektorija $\Im_{\check{z}}$ degeneriše u tačku $S_{\check{z}}$, koja predstavlja određeno stanje, govori se stabilnosti *ravnotežnog stanja*. Željeno stanje kretanja tada je *stanje mirovanja*, *slika* 3.4.

Razmatranje stabilnosti kretanja (sistema, procesa) može se svesti na ispitivanje *stabilnosti ravnotežnog položaja* ako se za željenu trajektoriju $\Im_{\check{z}}$ veže *pokretan koordinatni sistem*.

Tada se dobijaju *jednačine poremećenog kretanja*, jed. (3.3) do jed. (3.5), iz kojih se vidi da je željeno odstupanje $\mathbf{x}_{ž}(t)=\mathbf{0}$, što znači da se *željeno stanje nalazi u koordinatnom početku tog pokretnog koordinatnog sistema*, *Grujić* (1970), pa se ispitivanje stabilnosti sistema svodi na ispitivanje stabilnosti ravnotežnog položaja njegovog poremećenog kretanja.



Slika 3.4 Stabilnost ravnotežnog položaja

Ovde razmatrana pitanja, uz jasno razgraničavanje pojmova poremećenog i neporemećenog kretanja sistema, kao i mogući odgovori na ranije postavljena pitanja, omogućila su i dalje omogućavaju da se predloži veliki broj definicija stabilnosti iz kojih proističu i brojni koncepti ove značajne osobine sistema.

3.1.3 Pregled nekih bazičnih koncepata stabilnosti sistema

U radu *Grujić* (1970) date su brojne definicije stabilnosti, primenljive kako na sisteme u slobodnom, tako i u prinudnom radnom režimu. Pored već klasične *ljapunovske* definicije stabilnosti, spomenute su i navedene definicije stabilnosti u *smislu Lagrange–a, totalne, apsolutne, orbitalne* i *hiperstabilnosti*. Mimo toga, iznete su i definicije osobine privlačenja i asimptotske stabilnosti, kao i ravnomerne i globalne stabilnosti.

Zbog potrebe poznavanja brzine kojom se poremećeno kretanje približava neporemećenom, spomenute su i date definicije *eksponencijalne stabilnosti* ravnotežnog stanja, kao i moguća rešenja razmatranih sistema.

Priroda većine realnih sistema je takva da na njih deluju poremećaji čiji su trenuci nastajanja i intenziteti, u opštem slučaju, nepoznati, što im s punim pravom daje sva obeležja stohastičkih procesa.

Jasno je da se stabilnost takvih sistema razmatra u prinudnom radnom režimu, a uobičajeno se takvi poremećaji tretiraju kao *Markovljevi procesi*. Samim tim, sve uvedene definicije stabilnosti moraju se iskazati na *probabilistčki način*, odnosno kroz odgovarajuću meru verovatnoće, što je takođe dato u ranije navedenoj referenci.

I konačno, razmatran je izvestan broj definicija koje se odnose na neke osobine stabilnosti *stacionarnih skupova*, *Grujić* (1970).

Lako se uviđa da se izvesni koncepti stabilnosti međusobno niti uslovljavaju, niti isključuju, što praktično znači da pozitivan zaključak po jednom primenjenom konceptu ne znače afirmativan zaključak po drugom, i obrnuto.

Neka opšta pitanja teorije stabilnosti sistema u smislu Ljapunova

Kapitalno delo A. M. Ljapunova nastalo je 1982. god. inspirisano idejom i delom A. Puankarea o kvalitativnoj analizi nelinearnih diferencijalnih jednačina drugog reda.

Kroz svoju drugu metodu, Ljapunov je uspeo da odgovori i reši fundamentalno pitanje opšte teorije stabinosti. U tom smislu, dobijen je odgovor i rešenje zadatka ispitivanja stabilnosti *neporemećenog kretanja*, a bez rešavanja, odnosno integraljenja sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina, koje opisuju dinamiku razmatranog sistema, odnosno bez pojedinačnog određivanja i proučavanja *poremećenih kretanja* za svako početno stanje iz datog skupa stanja, *Grujić* (1974) i *Grujić et al*. (1984).

U svojoj doktorskoj disertaciji, Ljapunov je utemeljio princip kvalitativne analize odnosa između *poremećenog* (stvarnog) i *neporemećenog* (željenog) kretanja. Pri tome, on je posmatrao ponašanje odgovarajućih funkcija duž kretanja tih sistema. Te funkcije mogu da predstavljaju različite oblike energije i/ili materijalnih tokova u sistemu, što jasno ukazuje na njihov pun fizički smisao. Oslanjajući se dalje na pojam neprekidnosti funkcija, Ljapunov je uveo suštinsku definiciju stabilnosti neporemećenog kretanja u odnosu na neke funkcije, potčinjene zahtevu $(\varepsilon-\delta)$ bliskosti vrednosti tih funkcija, uzetih duž poremećenog i neporemećenog kretanja, *Grujić et al*. (1984).

S druge strane, neposredni odgovor i uvid u stabilnost sistema dobija se neposredno iz jednačina *poremećenog kretanja*, a na osnovu uvedenih *funkcija određenih po znaku*. Pomoću tih funkcija i njihovih totalnih izvoda, sračunatih saglasno jednačinama poremećenog kretanja, osnovni zadatak ispitivanja stabilnosti neporemećenog kretanja svodi se na ispitivanje ponašanja funkcija određenih po znaku duž kretanja sistema. Znak totalnog izvoda te funkcije proverava se u svim tačkama koje pripadaju okolini neporemećenog kretanja. Jasni zahtevi koje treba da ispunjava agregaciona funkcija i određenost (znak) njenog totalnog izvoda sračunatog duž rešenja poremećenog kretanja, bili su dati u pomenutoj disertaciji za slučajeve: ravnomerne stabilnosti i ravnomerne asimptotske stabilnosti, kao i za nestabilnost neporemećenog kretanja.

Iako sam Ljapunov nije tačno odredio pojmove privlačenja i asimptotske stabilnosti, u odnosu na uvedene funkcije određene po znaku ovi značajni pojmovi javljaju se kasnije u radovima velikog broja naučnika i nedvosmisleno i više nego očigledno su povezani sa idejama koje je predočio Ljapunov, *Grujić et al*. (1984).

Neka opšta pitanja teorije praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu

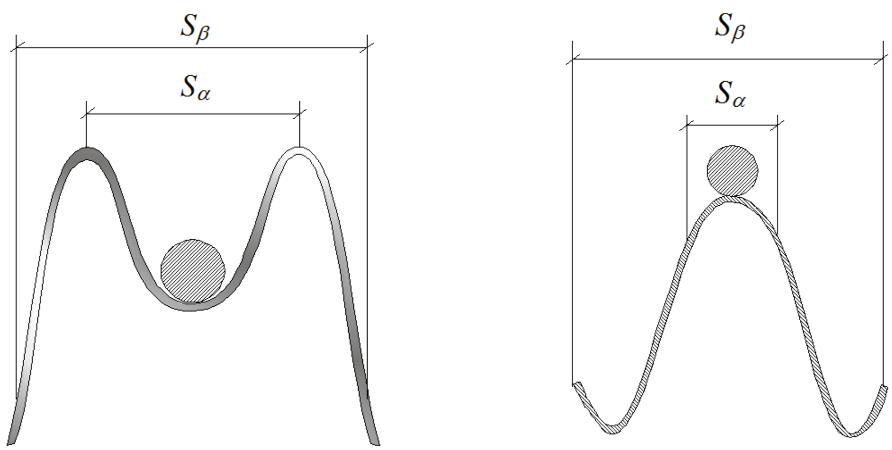
U praktičnim prilikama nije uvek od interesa razmatrati stabilnost sistema u smislu Ljapunova, već je ponekad od posebne važnosti utvrditi granice do kojih dosežu trajektorije sistema pri njegovom kretanju u integralnom prostoru stanja. Sistem može da bude stabilan, pa čak i asimptotski stabilan, ali praktično neupotrebljiv zbog neprihvatljivih pokazatelja kvaliteta prelaznog procesa. Zbog toga je od posebnog značaja razmatrati stabilnost sistema u odnosu na *zadate skupove dozvoljenih i početnih stanja* u faznom prostoru, koji su po pravili *a priori* definisani za dati problem.

S druge strane, imajući u vidu veoma stroge i oprečne zahteve koji se danas nameću kvalitetu dinamičkog ponašanja realnih sistema, od posebnog je interesa razmatrati njihovo ponašanje i na *konačnom vremenskom intervalu*.

Prethodna izlaganja valja potkrepiti nekim primerom iz prakse i u tom cilju razmatra se ponašanje jednog čisto mehaničkog sistema, prikazanog na *slici* 3.5, u dve svoje moguće fizičke realizacije. Istovetna razmatranja i objašnjenja mogu se bez ikakvih poteškoća proširiti i na sve ostale sisteme drugačije fizičke prirode.

Sa stanovišta ljapunovske stabilnosti, ravnotežno stanje sistema sa *slike* 3.5.a je *asimptotski stabilno*. Za sva dovoljno mala početna odstupanja, loptica će se vraćati u svoj prvobitni ravnotežni položaj.

Međutim, sa stanovišta *praktične stabilnosti*, ono je nestabilno jer je očigledno da će se za njegova pojedina stanja uzeta iz *skupa početnih stanja* S_α, njegovo dalje kretanje odvijati u smislu napuštanja *skupa dozvoljenih stanja* S_β.



a) b)

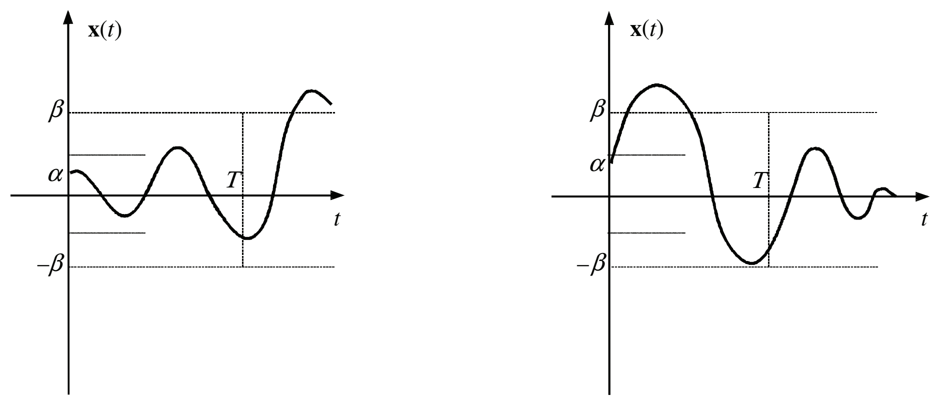
Slika 3.5 Prikaz mehaničkog sistema u dve moguće fizičke realizacije

U drugom slučaju, *slika* 3.5.b, za bilo koja mala odstupanja od ravnotežnog položaja, dalje kretanje sistema (loptice) će se stalno udaljavati od njegovog ravnotežnog položaja, tako da je ravnotežno stanje ovog sistema, u smislu Ljapunova *nestabilno*.

Ako je skup dozvoljenih stanja S_β definisan kao na slici, očigledno je da je sistem, odnosno njegovo ravnotežno stanje, *praktično stabilno* za sva početna stanja iz skupa početnih stanja S_α, jer se kretanje sistema *ne može* udaljiti od prvobitnog ravnotežnog stanja više nego što su propisane (dozvoljene) granice skupa S_β.

Sumarno rečeno, sistem je *praktično stabilan* ako njegovo kretanje, koje je u početnom trenutku nastalo ili usled promene početnog stanja u skupu dozvoljenih početnih stanja S_α, i/ili usled dejstva spoljašnjih, dozvoljenih uticaja S_ε, treba na posmatranom vremenskom intervalu da ostane u unapred zadatom skupu dozvoljenih stanja sistema S_β.

Grafička interpretacija kretanja u prostoru stanja ova dva sistema, ilustrovana je na *slici* 3.6, a vezano za njihova ponašanja na konačnom vremenskom intervalu[2], $\Im = \left[t_0,\ (t_0+T)\right[$.



a) b)
Slika 3.6 Grafička interpretacija kretanja u prostoru stanja

Iz prethodnog primera lako se uočava suštinska razlika koncepta praktične stabilnosti i stabilnosti u smislu Ljapunova, a koja se, vezano za pitanje skupova $\mathcal{S}_\alpha$, $\mathcal{S}_\beta$ i $\mathcal{S}_\varepsilon$ može sumarno izreći na sledeći način.

U konceptu ljapunovske stabilnosti *zahteva se postojanje* skupova $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\varepsilon$, uzetih u obliku hiperkugli u prostoru stanja, *za svaki otvoreni skup* $\mathcal{S}_\beta$ *dozvoljenih stanja*, koji garantuju da će ravnotežno stanje razmatranog sistema biti *totalno stabilno*.

U konceptu praktične stabilnosti ovi skupovi $\mathcal{S}_\alpha$ i $\mathcal{S}_\varepsilon$, kao i skup $\mathcal{S}_\beta$ koji je *zatvoren* su *proizvoljnog oblika* i *unapred poznati ili zadati*, *Grujić* (1970).

Pored toga, koncept praktične stabilnosti nema *lokalni karakter*, a koordinatni početak *ne mora* da bude ravnotežno stanje sistema. Koncept praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu poseduje izvesnu "relativnost", što se odražava u činjenici da su do sada izvedeni rezultati uvek iskazani *dovoljnim uslovima* ove vrste stabilnosti.

[2] Koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu samo je poseban slučaj koncepta praktične stabilnosti.

To se može relativno lako objasniti činjenicom da se pomenuti uslovi ne izražavaju samo relevantnim osobinama samog sistema, već da se tu nalaze i podaci koji zavise od nametnutih ogrničenja kretanju sistema, kao i dužina vremenskog intervala na kome se ova osobina ispituje.

Sasvim je jasno da jedan te isti sistem u odnosu na neki skup $\{\tau,\alpha_1,\beta_1\}$ može biti praktično stabilan, a da se ta ista osobina ne može pokazati za neki drugi skup $\{\tau,\alpha_2,\beta_2\}$. Slični zaključci mogu se izvesti ako se fiksiraju vrednosti $\alpha_{(.)}$ i $\beta_{(.)}$, a menja dužina vremenskog intervala $T_{(.)}$.

Još neka značajna pitanja ljapunovske teorije stabilnosti

Izlaganja koja slede u celosti su preuzeta iz rada *Khalil* (1992).

U savremenoj teoriji automatskog upravljanja, dinamika stvarnih, fizičkih sistema opisuje se verodostojnim matematičkim modelima, koji za *nestacionarne*, *autonomne* sisteme mogu da imaju uobičajeni oblik:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0 . \tag{3.9}$$

Da bi se odredilo ponašanje sistema, datog jed. (3.9), u budućnosti, a na osnovu njegovog tekućeg stanja u trenutku t_0, *problem početnih uslova* mora da ima *jedinstveno rešenje*. Ovo pitanje *postojanja i jedinstvenosti rešenja* razrešava se i obezbeđuje se nametanjem određenih ograničenja desnoj strani jed. (3.9), odnosno funkciji $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$.

Pokazuje se da ključnu ulogu u tome ima tzv. *Lipschitz*–ov *uslov*, koji treba da zadovolji funkcija $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ za sve vrednosti $(t,\mathbf{x})$ i $(t,\mathbf{y})$ u nekoj okolini $(t_0,\mathbf{x}_0)$.

Drugo pitanje, ne manjeg značaja, je procena verodostojnosti modela sadržana u njegovoj *neprekidnosti rešenja* u odnosu na *početne uslove*.

Ono što se najmanje očekuje od matematičkog modela jeste da proizvoljno male greške u podacima ne rezultiraju u pojavu velikih grešaka u rešenju koje se dobija na osnovu matematičkog modela.

Podaci koji određuju *problem početnih uslova* su početno stanje $\mathbf{x}_0$, početni trenutak t_0 i funkcija $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$.

Osobina neprekidnosti rešenja u odnosu na početne uslove $(t_0, \mathbf{x}_0)$ i parametre funkcije $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$, takođe je od suštinskog značaja pri iznalaženju rešenja sistema, datog jed. (3.9), i određena je odgovarajućim rezultatom.

Vratimo se sada pitanjima *postojanja i jedinstvenosti rešenja*. Za funkciju, koja zadovoljava jed. (3.10), kaže se da je *Lipschitz*–ova po $\mathbf{x}$, a pozitivna konstanta L naziva se *Lipschitz*–ovom konstantom. Sada se može dati sledeći rezultat.

Teorema 3.1 Neka je funkcija $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ u delovima neprekidna i neka zadovoljava *Lipschitz*–ov uslov:

$$\left\| \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{f}(t,\mathbf{y}) \right\| \leq L \left\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \right\|, \tag{3.10}$$

za:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{S}_\rho = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \left\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \right\| \leq \rho \right\}, \quad \forall t \in [t_0, t_*]. \tag{3.11}$$

Tada, postoji neki realan, pozitivan broj $\delta > 0$, takav da jednačina stanja sistema (3.9) sa pripadajućim početnim uslovom, ima *jedinstveno* rešenje na vremenskom intervalu $[t_0, t_0 + \delta]$.

Matematička teorija koja se bavi ovim pitanjima razlikuje *lokalni* i *globalni* *Lipschitz*–ov uslov, a što se vezuje za *domen prostora stanja* u kome taj uslov važi.

Naime, pođimo prvo od funkcije $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, koja je *lokalno Lipschitz–ova* na domenu $\mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$, ako svaka tačka u $\mathcal{Q}$ ima okolinu $\mathcal{Q}_0$ tako da $\mathbf{f}(\cdot)$ zadovoljava *Lipschitz*–ov uslov, dat jed. (3.10), za svaku tačku iz $\mathcal{Q}_0$ sa nekom *Lipschitz*–ovom konstantom L_0. Dalje, funkcija $\mathbf{f}(\cdot)$ je *Lipschitz*–ova na skupu $\mathcal{W}$, ako zadovoljava jed. (3.10) za sve tačke iz $\mathcal{W}$ sa istom *Lipschitz*–ovom konstantom L.

Funkcija $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je *globalno Lipschitz–ova* ako je *Lipschitz*–ova na $\mathbb{R}^n$.

Istovetna terminologija koristi se kada je u pitanju i nestacionarna funkcija $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$. Tada se podrazumeva da se *Lipschitz*–ov uslov odnosi ravnomerno po t za sve trenutke t uzete sa razmatranog vremenskog intervala.

Važno je napomenuti da je *Lipschitz*–ov uslov nametnut funkciji jači od zahteva za njenom neprekidnošću. S druge strane, taj zahtev je blaži od zahteva za neprekidnošću izvoda te funkcije, što je oličeno u sledećem rezultatu.

Lema 3.1 Neka je funkcija $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ neprekidna na $[a,b]\times\mathcal{Q}$, za neki domen $\mathcal{Q}\subset\mathbb{R}^n$. Ako $(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x})$ postoji i neprekidan je na $[a,b]\times\mathcal{Q}$, tada je $\mathbf{f}(\cdot)$ *lokalno Lipschitz–ova* po $\mathbf{x}$ na $[a,b]\times\mathcal{Q}$.

Lema 3.2 Neka je funkcija $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ neprekidna na $[a,b]\times\mathbb{R}^n$. Ako $(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x})$ postoji i neprekidan je na $[a,b]\times\mathbb{R}^n$, tada je $\mathbf{f}(\cdot)$ *globalno Lipschitz–ova* po $\mathbf{x}$ na $[a,b]\times\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je $(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x})$ ravnomerno ograničen na $[a,b]\times\mathbb{R}^n$.

I konačno, uvažavajući prethodne rezultate, navodi se sledeći koji uspostavlja uslove postojanja jedinstvenog rešenja na vremenskom intervalu $[t_0,t_*]$, gde t_* može biti proizvoljno veliko.

Teorema 3.2 Neka je $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ u delovima neprekidna po t i neka zadovoljava:

$$\left\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x})-\mathbf{f}(t,\mathbf{y})\right\|\leq L\left\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right\|, \tag{3.12}$$

$$\left\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0)\right\|\leq\wp_0, \tag{3.13}$$

za:

$$\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,\quad\forall t\in[t_0,t_*]. \tag{3.14}$$

Tada, sistem, dat jed. (3.9), sa pripadajućim početnim uslovom ima *jedinstveno rešenje* ne vremenskom intervalu $[t_0,t_*]$.

Neprekidnost rešenja u odnosu na početno stanje i parametre funkcije $\mathbf{f}(\cdot)$ može se dati sledećim rezultatima.

Teorema 3.3 Neka je funkcija $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ u delovima neprekidna po t i *Lipschitz*–ova po $\mathbf{x}$ na $[t_0,t_*]\times\mathcal{W}$ sa *Lipschitz*–ovom konstantom L, gde je $\mathcal{W}\subset\mathbb{R}^n$ otvoren i povezan skup. Neka su $\mathbf{y}(t)$ i $\mathbf{q}(t)$ rešenja:

$$\dot{\mathbf{y}}(t)=\mathbf{f}(t,\mathbf{y}),\quad\mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y}_0, \tag{3.15}$$

i:

$$\dot{\mathbf{q}}(t)=\mathbf{f}(t,\mathbf{q})+\mathbf{g}(t,\mathbf{q}),\quad\mathbf{q}(t_0)=\mathbf{q}_0, \tag{3.16}$$

tako da $\mathbf{y}(t),\mathbf{q}(t)\in\mathcal{W}$, $\forall t\in[t_0,t_*]$.

Pretpostavlja se i da je:

$$\left\| \mathbf{g}(t,\mathbf{x}) \right\| \le \eta, \quad \forall (t,\mathbf{x}) \in [t_0, t_*] \times \mathcal{W}, \tag{3.17}$$

za neko $\eta > 0$ i neka je još:

$$\left\| \mathbf{y}_0 - \mathbf{q}_0 \right\| \le \gamma. \tag{3.18}$$

Tada je:

$$\left\| \mathbf{y}(t) - \mathbf{q}(t) \right\| \le \gamma \exp\left(L(t-t_0)\right) + \frac{\eta}{L}\left(\exp\left(L(t-t_0)\right) - 1\right), \quad \forall t \in [t_0, t_*] \lim_{\delta x \to 0}. \tag{3.19}$$

Prethodna *Teorema* daje uslove neprekidnosti rešenja u odnosu na početne uslove.

3.2 Pregled rezultata

Interesovanje za dinamičko ponašanje sistema sa kašnjenjem okupira pažnju velikog broja autora već više od pola veka. Međutim sa sigurnošću se može reći da je to interesovanje bilo u daleko većoj meri zastupljeno kada su u pitanju bili kontinualni a daleko manje kada je bila reč o *vremenski diskretnim sistemima* sa kašnjenjem.

Jedan od glavnih razloga za to je što *diskretni sistemi sa kašnjenjem* imaju konačnu dimenziju, pa se kao takvi mogu iskazati preko odgovarajućeg *ekvivalentnog sistema bez kašnjenja*. Red ovog sistema srazmeran je proizvodu vrednosti kašnjenja i reda matrica sistema. Pri velikim iznosima čisto vremenskog kašnjenja, red ekvivalentnog sistema postaje izuzetno veliki, pa je to u prošlosti, stvaralo znatne matematičke poteškoće.

U tom smislu *osnovni doprinosi* autora išli su u pravcu da se ovaj problem prevaziđe analizirajući osobine vremenski diskretnog sistema sa kašnjenjem na polaznim matricama sistema i bez nužnih prevođenja istog na *ekvivalentni sistem*.

Prvi značajniji rad, koji se bavio problematikom *ljapunovske stabilnosti* ove klase sistema pojavio se tek 1982. godine, *Mori et al.*(1982.b).

Među prvim koji su izložili definicije, odredili kretanje diskretizovanog sistema i dali uslove njegove stabilnosti je rad *Koepcke* (1965). Iako se ne bavi problemom klasičnih diskretnih sistema sa kašnjenjem, već diskretnim nastalih diskretizacijom kontinualnih, rad *Koepcke* (1965) daje osnovu za određivanje njihovog kretanja, definicije i teoreme stabilnosti čiji su dokazi poslužili kao glavna inspiracija ovde, po prvi put iznesenih rezultata. Prilično opširna analiza kretanja diskretnog sistema sa kašnjenjem i optimizacija njihovog ponašanja data je u radu *Januševskog* (1978).

U radu *Mori et al.* (1982.b) dati su jednostavni dovoljni uslovi stabilnosti, ove klase sistema, zasnovani na korišćenju normi matrica i njihovih funkcija. Izveden dovoljan uslov asimptotske stabilnosti, posebne klase ovih sistema, ne uzima u obzir iznos čisto vremenskog kašnjenja ali pruža efikasan rezultat za testiranje ove važne osobine sistema. Mimo toga, konačni rezultati ovog rada, bili su i snažan podsticaj za ovde iznete rezultate a posebno logične zaključke koji se, na bazi istih, prirodno nameću.

U radu *Trinh*, *Aldeen* (1995.a) razmatrana je asimptotska i D–stabilnost *diskretnih sistema sa kašnjenjem* i predloženi su dovoljni uslovi koji su manje konzervativni u odnosu na uslove u radu *Mori et al.* (1982.b).

U lit. *Debeljković et al.* (2004.b, 2005) poboljšani su postojeći rezultati koji se tiču asimptotske stabilnosti partikularne klase linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Ovi radovi proširuju jedan od osnovnih rezultata na polju ljapunovske (asimptotske) stabilnosti linearnih, vremenski invarijantnih, diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Rezultati su dati u formi samo dovoljnih uslova i predstavljaju poboljšanje postojećih rezultati koji se tiču asimptotske stabilnosti sistema opisanih vektorskom jednačinom stanja u formi $\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-1)$. Izvedeni rezultati su manje konzervativni u odnosu na rezultate u postojećoj literaturi.

Osnovni rezultati na polju ljapunovske (asimptotske) stabilnosti linearnih, vremenski invarijantnih, diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem su prošireni u lit. *Stojanović, Debeljković* (2004.a, 2004.c, 2004.i, 2004.k). Rezultati su dati u formi samo dovoljnih uslova i predstavljaju generalizaciju nekih prethodnih rezultata ili potpuno nove rezultate. Za izvedene rezultate se lako može pokazati da su, u većini slučajeva, manje konzervativni u odnosu na rezultate u postojećoj literaturi.

Potrebni i dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja, velikih, linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, su dati u lit. *Stojanović, Debeljković* (2004.b, 2004.e). Pokazano je da asimptotska stabilnost ove klase sistema svodi na asimptotsku stabilnost odgovarajućeg *i*–tog *ekvivalentnog* diskretnog sistema. Red *ekvivalentnog sistema*, je znatno niži u odnosu na red razmatranog velikog sistema. Potrebno je rešiti sistem matričnih jednačina čije rešenje uvek postoji. Korišćenjem osobine da je razmatrani veliki sistem konačno dimenzionalan, izvedeni su potrebni i dovoljni uslovi stabilnosti, nezavisni od čisto vremenskog kašnjenja, koji se zasnivaju na ekvivalentnoj matrici sistema, čiji je red znatno veći od reda odgovarajućeg *ekvivalentnog* sistema.

Lit. *Stojanović, Debeljković* (2004.d, 2004.h) prezentuje dovoljne uslove asimptotske stabilnosti, nezavisne od čisto vremenskog kašnjenja, partikularne klase linearnih, perturbovanih sistema sa višestrukim vremenskim kašnjenjem. Prezentovani kriterijumi uvode mali broj pretpostavki i izraženi su jednostavnim matematičkim formama. Osim toga njihova primena je efikasnija u odnosu na primene kriterijuma u postojećoj literaturi.

Rad *Stojanović et al.* (2004.f) daje dovoljne uslove *D*–stabilnosti partikularne klase linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Kriterijumi nezavisni od čisto vremenskog kašnjenja su izvedeni pomoću karakteristične jednačine.

Dovoljan uslov stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i nelinearnim perturbacijama je dat u radu *Stojanović et al.* (2004.g). Uslov, nezavisan od kašnjenja, je izveden korišćenjem prilaza koji se zasniva na Ljapunovljevoj direktnoj metodi.

U lit. *Stojanović, Debeljković* (2004.j, 2005.d) dati su potrebni i dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja, velikih, linearnih, vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Dobijeni uslovi stabilnosti su izraženi pomoću Ljapunovljeve matrične jednačine za običan (klasičan), linearan, vremenski kontinualan sistem bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja, gde postoji nepoznata matrica dobijena rešavanjem određenog sistema matričnih jednačina.

Stabilnost velikih, intervalnih, vremenski kontinualnih i diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem je razmatrana u lit. *Stojanović, Debeljković* (2005.a, 2005.b). Dovoljni uslovi stabilnosti su prezentovani korišćenjem *Gersgorin*–ove teoreme.

Rad *Stojanović, Debeljković* (2005.c) daje dovoljne uslove stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u formi $\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h)$. Izvedeni su uslovi, nezavisni od kašnjenja, korišćenjem prilaza koji se zasniva na Ljapunovljevoj direktnoj metodi. Prezentovani rezultati su manje konzervativni u odnosu na rezultate u postojećoj literaturi.

U lit. *Stojanović, Debeljković* (2006a, 2006.c) dati su dovoljni uslovi eksponencijalne stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i nelinearnim perturbacijama. Uslovi, zavisni od kašnjenja, su izvedeni korišćenjem prilaza koji se zasniva na Ljapunovljevoj direktnoj metodi.

Rad *Stojanović, Debeljković* (2006.b) poboljšava postojeće rezultati koji se tiču asimptotske stabilnosti partikularne klase linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. U tom smislu, ovaj rad daje dovoljan uslov asimptotske stabilnosti, nezavisan od čisto vremenskog kašnjenja, sistema u formi $\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h)$. Metodologija korišćenja u ovom radu se zasniva na Ljapunovljevom prilazu.

Potrebni i dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti partikularne klase velikih, linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem su dati u lit. *Stojanović, Debeljković* (2007.a, 2007.b, 2008.b). Uslovi zavisni od kašnjenja su izvedeni korišćenjem Ljapunovljeve direktne metode i zasnivaju se na tačnom rešenju partukularnog sistema matričnih jednačina.

Lit. *Stojanović, Debeljković* (2008.a, 2009.b) daje potrebne i dovoljne uslove asimptotske stabilnosti, zavisne od čisto vremenskog kašnjenja, linearnih, vremenski kontinualnih i vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Kriterijumi zavisni od čisto vremenskog kašnjenja su izvedeni korišćenjem Ljapunovljeve direktne metode i isključivo se zasnivaju na maksimalnim i dominantnim solventima partikularne matrične jednačine. Dobijeni uslovi stabilnosti nemaju konzervatizam.

Rad *Stojanović, Debeljković* (2008.c) prezentuje potrebne i dovoljne uslove kvadratne stabilnosti linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju i neodređenostima. Razmatrani sistem sadrži čisto vremensko kašnjenje u stanju i vremenski promenljive parametarske neodređenosti, ograničene norme, koje se pojavljuju u svim matricama modela u prostoru stanja. Rezultati su dobijeni u vidu linearnih matričnih nejednakosti. U ovom radu su prošireni postojeći rezultati kvadratne stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i neodređenostima.

Nova *Ljapunov–Krasovski* metoda za vremenski diskretne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem je data u radu *Stojanović, Debeljković* (2009.a). Na osnovu metode, izvedeni su uslovi nezavisni od kašnjenja.

U radovima *Debeljković*, *Nestorović*, *Buzurović*, *Dimitrijević* (2010.a) i *Debeljković*, *Buzurović*, *Nestorović*, *Stojanović*, *Dimitrijević*, *Aleksendrić* (2011.b) prezentovani su dovoljni uslovi praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu linearnih, vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Klasa linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem je razmatrana u radovima *Debeljković*, *Buzurović*, *Dimitrijević* (2011.a) i *Debeljković*, *Stojanović*, *Dimitrijević*, *Popov* (2012.a), u kojima su izvedeni dovoljni uslovi praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu razmatranih sistema, kao i uslovi praktične nestabilnosti.

U radu *Debeljković*, *Stojanović*, *Dimitrijević*, *Popov* (2012.b) prezentovani su dovoljni uslovi stabilnosti, u vidu linearnih matričnih nejednakosti, pod kojima je linearan, vremenski diskretan sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem stabilan na konačnom vremenskom intervalu.

Uslovi stabilnosti, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja, za klasu vremenski diskretnih sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem, izraženi u vidu linearnih matričnih nejednakosti, su izvedeni u radu *Stojanović*, *Debeljković*, *Dimitrijević* (2012.b) i definisan je novi *Ljapunov–Krasovski* funkcional, zavisan od intervala čisto vremenskog kašnjenja, podelom intervala na dva nejednaka podintervala pomoću podesivog parametra α.

Problem stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu za klasu linearnih, vremenski diskretnih sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem je istražen u radu *Stojanović*, *Debeljković*, *Dimitrijević* (2012.a), u kome su na osnovu Ljapunovljevih funkcija i korišćenjem odgovarajućeg transformisanog modela originalnog sistema izvedeni dovoljni uslovi koji garantuju stabilnost na konačnom vremenskom intervalu razmatrane klase sistema. Kriterijum stabilnosti je prezentovan u formi linearnih matričnih nejednakosti, koje su zavisne od minimalne i maksimalne granice čisto vremenskog kašnjenja.

Literatura

Abgarijan, K. A., “Ustoičivost dviženia na konečnom intervale” v knjigi *Itogi nauki i tehniki*, VINITI AN SSSR, Obščaja mehanika, Moskva, (1976) 43–124.

Abdullin, R. Z., Yu. L. Anapoljskii, “K zadačam praktičeskoj ustoičivosti” v kjigi *Vektor–funkcii Ljapunova i ih postoenie*, Nauka, Novosibirsk, (1980) 34–91.

Barabashin, E. A, *Lyapunov Functions*, Nauka, Moscow, 1970.

Debeljković, D. Lj., *Stabilnost sistema automatskog upravljanja na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, Mašinski fakultet, Beograd, 2009.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, “A Short Note to the Lyapunov Stability of $\mathbf{x}(k+1) = A_0 \mathbf{x}(k) + A_1 \mathbf{x}(k-1)$”, *Proc. of* CDCOC, Shenyang (China), August 22–24, (2004) CD–Rom.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, “Discrete Time Delayed System Stability Theory in the Sense of Lyapunov: New Results”, *Proc. ISIC* 2004, Taipei (Taiwan), September 1–4, (2004.b) CD–Rom.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, “Discrete Time Delayed System Stability Theory in the Sense of Lyapunov: New Results”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 12, Series B: Numerical. Analysis, (2005) 433–442.

Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, I. M. Buzurović, N. J. Dimitrijević, “A New Approach to the Stability of Time–Delay Systems in the Sense of Non–Lyapunov Delay–Independent and Delay–Dependent Criteria”, *Proc*. of 8^{th} *International Symposium on Intelligent Systems and Informatics,* Subotica (Serbia), September 10–11, (2010.a), 213–218.

Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, N. J. Dimitrijević, “On Finite Time and Practical Stability of Linear Discrete Time Delay Systems”, *9^{th} IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY)*, Subotica (Serbia), September 8–10, (2011.a) 119–124.

Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, T. Nestorović, S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, M. S. Aleksendrić, "Time Delayed System Stability Theory in the sense of Non–Lyapunov Delay Independent and Delay Dependent Approach: New Results", *IEEE Multi–Conference on Systems and Control*, No. 36, Denver, CO, (USA), September 28–30, (2011.b) 1410–1417.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, D. Popov, "The Stability of Linear Discrete Time Delay Systems Over a Finite Time Interval: New Results", *The 10^th^ World Congress on Intelligent Control and Automation* (*WCICA* 2012), Beijing (Chine), July 6–8, (2012.a), accepted.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, D. Popov, "On Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems: LMIs Approach", *The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation* (*WCICA* 2012), Beijing (Chine), July 6–8, (2012.b), accepted.

Gajić, Z., M. Qureshi, *Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control*, Academic Press, San Diego (USA), 1995.

Grujić, Lj. T., *Automatic Control System Syntehesis of Rigid Body Motion though a Fluid*, M. Sc. Thesis (in Serbian), Electrical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, October 1970.

Grujić, Lj. T., *Large–Scale Systems Stability*, (in Serbian), Faculty of Mechanical Eng., Belgrade, 1974.

Grujić, Lj. T., A. A. Martinjuk, M. Ribbens–Pavella, *Stability of Large Scale Systems under Structural and Singular Disturbances*, Naukova Dumka, Kiev, 1984.

Hahn, W., *Theory and Application of Lyapunov's Direct Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1963.

Hahn, W., *Stability of Motion*, Spinger–Verlag, Berlin, 1967.

Januševskii, R. T., *Upravlenie objektami s zapazdavaniem*, Nauka, Moskva, 1978.

Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, MacMillan Publ. Company, New York, 1990.

Koepcke, R. W., "On the Control of Linear Systems with Pure Time Lag", *Trans. ASME J. Basic Eng*., (3), (1965) 74–80.

Krasovskii, N. N., *Problems in the Theory of Stability of Motion*, Stanford University Press, 1963.

Lyapunov, A. M., *General Problem of Stability of Motion*, Moscow, Leningrad (USSR), Academy of Science, 1956.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Delay–Independent Stability Criteria for Discrete–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC–27 (4), (1982.b) 946–966.

Rouche, N., P. Haberts, M. Laloy, *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*, Spinger–Verlag, New–York, 1977.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delayed System", *7th Biennial ASME Conference Engineering Systems Design and Analysis*, *ESDA* 2004, Manchester (UK), July 19–22, (2004.a) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Large Scale Time Delay Autonomous System", *7th Biennial ASME Conference Eng. Systems Design and Analysis*, *ESDA* 2004, Manchester (UK), July 19–22, (2004.b) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *CDIC* 2004, Nanjing (China), August 18–20, (2004.c) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On Stability of Perturbed Linear Discrete–Delay Systems with Multiple Delays", *CDIC* 2004, Nanjing (China), August 18–20, (2004.d) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Large Scale Time Delay Autonomous System", *CDIC* 2004, Nanjing (China), August 18–20, (2004.e) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, M. Lazić, V. Veljković, "D–stability Analysis of Time Delay Technological Systems with Multiple Time Delays", *Proc. CHISA* 2004, Prague (Czech Republic), Avgust 28–31, (2004.f) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, M. Lazić, V. Veljković, "Stability of Time Delay Technological Systems with Nonlinear Perturbations", *Proc. CHISA* 2004, Prague (Czech Republic), Avgust 28–31, (2004.g) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On Stability of Perturbed Linear Discrete–Delay Systems with Multiple Delays", *ICARCV* 2004, Kunming (China), December 06–09, (2004.h) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems”, *ICARCV* 2004, Kunming (China), December 06–09, (2004.i) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Continuous Large Scale Time Delay Autonomous System”, *Preprints* 2nd *IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Oaxaca (Mexico), December 8–10, (2004.j) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems”, *Facta Universitatis*, Vol. 2, No. 1, (2004.k) 25–48.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “The Sufficient Conditions for Stability of Continuous and Discrete Large–Scale Time Delay Interval Systems”**,** *The fifth International Conference on Control and Automation,* ICCA 05, Budapest (Hungary), June 26–29, (2005.a) 347–352.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “The Sufficient Conditions for Stability of Continuous and Discrete Large–Scale Time Delay Interval Systems”, *International Journal of Information & System Science,* (Canada), Vol. 1, No. 1, (2005.b) 61–74.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 1, No. 3–4, (2005.c) 413–420.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Continuous Large Scale Time Delay Autonomous Systems”, *Asian Journal of Control*, (Taiwan), Vol. 7., No. 4, (2005.d) 414–418.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Exponential Stability of Discrete Time Delay Systems with Nonlinear Perturbations”, 8*th* *Biennial ASME Conference Eng Systems Design and Analysis*, ESDA 2006, Torino (Italy), July 04–07, (2006), also in *Proc. Asian Control Conference*, Bali (Indonesia), July 18–21, (2006.a) 1–4.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Further Results on Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 1, (2006.b) 117–123.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Exponential Stability of Discrete Time Delay Systems with Nonlinear Perturbations”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 3, (2006.c) 428–435.

Stojanović S. B., D. Lj. Debeljković, “Stability of Large Scale Linear Discrete Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions”, *Proc. The 5th Edition of IFAC Knowledge and Technology Transfer Conference Series on Automation for Buliding the Infrastructure in Developing Countries* (DECOM 2007), Cesme–Izmir (Turkey), May 17–19, (2007.a) CD–Rom.

Stojanović S. B., D. Lj. Debeljković, “Delay–Dependent Criteria for Stability of Large–Scale Linear Discrete Time–Delay Systems”, *Proc. European Control Conference* 2007 (ECC 2007), Kos (Greece), July 2–5, (2007.b) CD–Rom.

Stojanović S. B., D. Lj. Debeljković, “Simple Stability Criteria of Linear Discrete Time Delay Systems: Lyapunov–Krasovskii Approach”, *Proc. European Control Conference* 2007 (ECC 2007), Kos (Greece), July 2–5, (2007.c).

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems” *Proc*. of 17*th IFAC World Congress*, Seoul (Korea), July 06–10, (2008.a) 2613–2618.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Delay–Dependent Stability of Linear Large Scale Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 4, No. 2, (2008.b) 241–250.

Stojanović, S. B, D. Lj. Debeljković, “Quadratic Stability and Stabilization of Uncertain Linear Discrete Time Systems with State Delay: A LMI Approach”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, Series B: Applications and Algorithms, No. 2, (2008.c) 195–206.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Stability Criteria of Linear Discrete Time Delay Systems: Lyapunov–Krasovskii Approach”, *Proc. ICIEA,* Xian (China), May 25–27, (2009.a) 2497–2501.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Delay–Dependent Stability of Linear Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions”, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Series B: Applications and Algorithms. Vol. 16, No. 6, (2009.b) 887–900.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, N. Dimitrijević, "Finite–Time Stability of Discrete–Time Systems with Time–Varying Delay", *Chemical Industry & Chemical Engineering Quarterly*, (2012.a), DOI:10.2298/CICEQ120126026S.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, N. Dimitrijević, "Delay–Dependent Stability of Discrete–Time Systems with Time–Varying Delay: Delay Decomposition Approach", *International Journal of Computers, Communications & Control*, Vol. 7, No. 4, (2012.b) 242–250.

Tchetaev, N. G., *Stability of Motion*, Gosthizdat, Moscow, 1955.

Trinh, H., M. Aldeen, "D–Stability Analysis of Discrete–Delay Perturbed Systems", *International Journal of Control*, 61 (2), (1995.a) 493–505.

Valeev, G. K., G. S. Finin, *The Construction of Lyapunov Functions*, Naukova Dumka, Kiev, 1981.

Yoshizawa, T., *Stability Theory by Lyapunov's Second Method*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

IV REKAPITULACIJA NEKIH OSNOVNIH REZULTATA NA POLJU PROUČAVANJA LJAPUNOVSKE STABILNOSTI VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

4. REKAPITULACIJA OSNOVNIH REZULTATA

Izlaže se završni deo rada *Koepcke* (1965), koji je relevantan u svetlu problematike *vremenski diskretnih sistema sa kašnjenjem*. Diskretizacijom *vremenski kontinualnog* sistema, *Koepcke* (1965), dobija sistem jednačina u sledećoj formi:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i^D \mathbf{x}(k-i). \tag{4.1}$$

Definicija 4.1 Sistem opisan matričnom, diferencnom jednačinom:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(k, \mathbf{x}), \tag{4.2}$$

ima *stabilno nulto ravnotežno stanje*, $\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_x$, ako za svaki pozitivni broj ε, $\varepsilon > 0$, postoji pozitivni broj $\delta = \delta(\varepsilon, k)$ i norma takva da ako je $\|\mathbf{x}(k)\| \leq \delta$ to povlači $\|\mathbf{x}(i)\| \leq \varepsilon$, za svako $i > k$. Ako δ ne zavisi od normalizovanog vremena k, tada je ravnotežno stanje sistema *ravnomerno stabilno*, *Koepcke* (1965).

Definicija 4.2 Nulto ravnotežno stanje sistema, datog jed. (4.2), je *asimptotski stabilno* ako je *ravnomerno stabilno* i ako za bilo koji pozitivan broj M postoji broj $q(M)$ i norma takva da ispunjenje $\|\mathbf{x}(k)\| \leq r$ povlači $\|x(p)\| \leq M$ za svako $p > q$ pri čemu r ne zavisi od M ili $\mathbf{x}(k)$, *Koepcke* (1965).

Lema 4.1 Sistem, dat jed. (4.1) je *ravnomerno stabilan* ako je ispunjeno:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\| A_i^D \right\| \leq 1, \tag{4.3}$$

Koepcke (1965).

Teorema 4.1 Ako za sistem, dat jed. (4.1), pri čemu za bilo koju usvojenu normu postoje pozitivne konstantne μ i $\gamma < 1$ takve da je ispunjeno:

$$\left\| A_i^D \right\| \leq \mu \gamma^i, \tag{4.4}$$

važi i:

$$\left\| A_i^D \right\| \leq const. < 1, \tag{4.5}$$

razmatrani sistem je *ravnomerno asimptotski stabilan, Koepcke* (1965).

Prvi rezultat, kada su u pitanju *dovoljni uslovi* asimptotske stabilnosti *vremenski diskretnih sistema sa kašnjenjem*, dat je u radu *Mori et al.* (1982.b). Tamo izloženi razultat spada u grupu kriterijuma koji ne uzima u obzir iznos čisto vremenskog kašnjenja na stabilnost razmatranog sistema.

Neka je *linearni*, *autonomni*, *vremenski diskretni sistem sa kašnjenjem* dat svojom vektorskom jednačinom stanja:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0 \, \mathbf{x}(k) + A_N \, \mathbf{x}(k-N), \tag{4.6}$$

uz početne uslove u formi:

$$\mathbf{x}(j) = \psi(j), \quad j = 0, -1, \ldots, -N. \tag{4.7}$$

Jasno je da:

$$\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n, \quad A_0, \ldots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{4.8}$$

Očigledno je, da se u sistemu javlja *samo jedno* čisto vremensko kašnjenje, tako da transformisani sistem, u ovom posebnom slučaju, izgleda ovako:

$$\mathbf{x}_{eq}(k+1) = A_{eq} \, \mathbf{x}_{eq}(k), \tag{4.9}$$

$$\mathbf{x}_{eq}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k) & \mathbf{x}^T(k-1) & \ldots & \mathbf{x}^T(k-N) \end{bmatrix}^T, \tag{4.10}$$

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & \ldots & 0 & A_N \\ I_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n(N+1) \times n(N+1)}. \tag{4.11}$$

Potrebni i dovoljni uslovi svode se tako na ispitivanje *diskretnog sistema bez kašnjenja*, odnosno na jednostavnu proveru da li korenovi karakterističnog polinoma sistema:

$$\det\left(z\, I_{n(N+1)} - A_{eq}\right) = 0\,, \tag{4.12}$$

leže unutar jedinične kružnice, u kompleksnoj z *ravni.*

Teorema 4.2 Ako važi uslov:

$$1 - \left\| A_0 \right\| > \left\| A_N \right\|, \tag{4.13}$$

tada je sistem, dat jed. (4.6), *asimptotski stabilan*, *Mori et al.* (1982.b).

Komentar 4.1 Naime, imajući u vidu kultni rad *Mori et al.* (1981) koji se bavi identičnom problematikom, ali za *vremenski kontinualne sisteme sa kašnjenjem,* lako se uočava suštinska razlika u oba izvedena rezultata.

Dok se u *kontinualnoj verziji* prosto imperativno nameće potreba za postojanjem stabilne (*Hurvicove*) matrice A_0 *i praktično ne dozvoljava njeno nepostojanje,* ovde je očigledno da njena egzistencija *čak nije ni poželjna*.

Ovakav zaključak je i logičan jer A_0 matrica kao *nula matrica* samo *poboljšava rezervu stabilnosti razmatranog sistema* imajući u vidu da su sve njene sopstvene vrednosti locirane u ishodištu kompleksne z *ravni*.

Ukoliko se uslov *Teoreme* 4.2, dat jed. (4.13), napiše u pogodnijoj formi:

$$\left\| A_0 \right\| + \left\| A_N \right\| < 1\,, \tag{4.14}$$

lako se nameće sledeći zaključak.

Naime, što je *sistem bez kašnjenja* stabilniji, odnosno što je manji prvi sabirak, to sistem može da "*izdrži*" veću prisutnost kašnjenja, oličenu u drugom sabirku.

Postavlja se kao osnovno pitanje da li je moguće uopštiti ovaj rezultat na sisteme sa *više nezavisnih kašnjenja*.

Teorema 4.3 Linearni, vremenski diskretni sistem sa kašnjenjem:

$$\mathbf{x}\left(k+1\right) = A_0\, \mathbf{x}\left(k\right) + \sum_{i=1}^{N} A_1\, \mathbf{x}\left(k-i\right)\ , \tag{4.15}$$

je *asimptotski stabilan* ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\sum_{i=0}^{N} \left\| A_i \right\| < 1\,, \tag{4.16}$$

Debeljković, *Aleksendrić* (2003.a).

Literatura

Aleksendrić, M., *Dinamika posebnih klasa kontinualnih i diskretnih sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, Dipl. rad, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 2002.

Aleksendrić, M., D. Lj. Debeljković, "Finite Time Stability of Linear Discrete Time Delayed Systems", *Proc. HIPNEF* 2002, Niš (Yu), October 2–5, (2002) 333–340.

Amir–Moez, A., "Extreme Properties of a Hermitian Transformations and Singular Values of Sum and Product of Linear Transformations", *Duke Math J.*, 23, (1956) 463–476.

Amemiya, T., "Delay–Independent Stability of High–order Systems", *Int. J. Control*, 50 (1), (1989) 139–149.

Baker, R. A., A. R. Bergen, "Lyapunov Stability and Lyapunov Functions of Infinite Dimensional Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–14 (4), (1969) 325–334.

Belhouari, A., E. Tissir, A. Hmamed, "Stability of Interval Matrix Polynomial in Continuous and Discrete Cases", *Systems and Control Letters*, (18), (1992) 183–189.

Bourlés, J., " α–Stability of Systems Governed by a Functional Differential Equation–Extension of Results Concerning Linear Delay Systems", *Int. J. Control*, 45 (6), (1987) 2233–2234.

Brierley, S. D., J. N. Chiasson, E. B. Lee, S. H. Zak, "On Stability Independent of Delay for Linear Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–27, (1982) 252–254.

Chyung, D. H., "Discrete Optimal Systems with Time Delay", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, (1967) 117–119.

Chyung, D. H., "Discrete Systems with Delays in Control", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, (1969) 196–197.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Stability in the Sense of Lyapunov of Linear Discrete Time Delayed Systems", *Proc. HIPNEF* 2002, Niš (Yugoslavia), October 2–5, (2002) 325–332.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Proc. ACC* 03, Denver, Colorado (USA), June 4–6, (2003) 4450–4451.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, N. Yi–Yong, Q. L. Zhang, "Lyapunov and Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Proc. The Fourth Inter. Conference on Control and Automation*, Montreal (Canada), June 9–12, (2003) 296–300.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, "A Short Note to the Lyapunov Stability of $\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-1)$", *Proc. of CDCOC*, Shenyang (China), August 22–24, (2004).

Dennis, J. E., J. F. Traub, R. P. Weber, "The Algebraic Theory of Matrix Polynomials," *SIAM J. Numer. Anal.*, 13 (6), (1976) 831–845.

Dennis, J. E., J. F. Traub, R. P. Weber, "Algorithms for Solvents of Matrix Polynomials", *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 (3), (1978) 523–533.

Đurović, K., *Robusnost stabilnosti singularnih sistema*, Magistarski rad, Mašinski fakultet, Beograd, 1996.

Golub, G. H., C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Jons Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

Goreckii, H., S. Fuksa, P., P. Grabowski, A. Korytowski, *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, J. Wiley, New York, 1989.

Januševskii, R. T., *Upravlenie objektami s zapazdavaniem*, Nauka, Moskva, 1978.

Kim, H., *Numerical Methods for Solving a Quadratic Matrix Equation*, Ph. D. University of Manchester, Faculty of science and engineering, 2000.

Koepcke, R. W., "On the Control of Linear Systems with Pure Time Delay", *Trans. ASME J. Basic Eng*, (3), (1965) 74–80.

Lee, T. N., S. Diant, "Stability of Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–26 (4), (1981) 951–953.

Malek–Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time Delay Systems*, North–Holland, Amsterdam, 1987.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Simple Stability Criteria for Single and Composite Linear Systems with Time Delays", *Int. J. Control*, 34 (6), (1981) 1175–1184.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Delay Independent Stability Criteria for Discrete–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC–27 (4), (1982.b) 964–966.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delayed System", *7th Biennial ASME Conference Engineering Systems Design and Analysis*, ESDA 2004, Manchester (UK), July 19–22, (2004.a) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *CDIC* 2004, Nanjing (China), August 18–20, (2004.c) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *ICARCV* 2004, Kunming (China), December 06–09, (2004.i) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Facta Universitatis*, Vol. 2, No. 1, (2004.k) 25–48.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 1, No. 3–4, (2005.c) 413–420.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Further Results on Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 1, (2006.b) 117–123.

Trinh, H., M. Aldeen, "D–Stability Analysis of Discrete Perturbed Systems", *Int. J. Control*, 61 (2), (1995.a) 493–505.

Trinh, H., M. Aldeen, "Robust Stability of Singularly Perturbed Discrete Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Cont*., AC–40 (9), (1995.b) 1620–1623.

Trinh, H., M. Alden, "A Memoryless State Observer for Discrete Time–Delay Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr*., AC–42 (9), (1997) 1572–1577.

Wang, W. J., R. J. Wang, "New Stability Criteria for Linear Time–Delay Systems", *Control Theory and Advanced Technology*, 10 (4), (1995) 1213–1222.

Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Quadratic Stability and Stabilization of Uncertain Linear Discrete–Time Systems with State Delay," *Systems Control Lett*. 43, (2001) 77–84.

V STABILNOST U SMISLU LJAPUNOVA VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM: KRITERIJUMI KOJI NE UZIMAJU U OBZIR IZNOS ČISTO VREMENSKOG KAŠNJENJA

5. ASIMPTOTSKA STABILNOST VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

Mnogobrojni radovi koji se tiču stabilnosti sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem su objavljeni, sa posebnim naglašavanjem na primenu Ljapunovljeve druge metode ili korišćenje koncepta matričnih mera, *Lee, Diant* (1981), *Mori et al*. (1981), *Mori* (1985), *Hmamed* (1986.a, 1986.b), *Lee et al*. (1986), *Alastruey*, *De La Sen* (1996).

Očigledno je da postoji više radova objavljenih na polju vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem nego na polju vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Sigurno je da jedan od osnovnih razloga leži u činjenici da su vremenski diskretni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem konačnih dimenzija, tako da se lako mogu formirati ekvivalentni sistemi znatno velikog reda, *Mori et al*. (1982.b), *Maleu–Zavarei, Jamshidi* (1987), *Gorecki et al.* (1989).

Pod pretpostavkom da je matrica ekvivalentnog sistema poznata moguće je, korišćenjem standardnih postupaka razvijenih za obične (klasične), linearne, vremenski diskretne sisteme, odrediti osobinu stabilnosti vremenski diskretnog sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Razmatrajući problem ispitivanja linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i njihove ljapunovske stabilnosti, potrebno je ukazati da ne postoje mnogo rezultata koji se bave ovim problemom.

U radu *Premier*, *Vacroux* (1969) metoda ortogonalne projekcije je korišćena za izvođenje jednačine za optimalno ocenjivanje stanja linearnog, vremenski promenljivog, diskretnog sistema sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem. Izveden je takođe *Kalman*–ov filter sa potrebnom rekurzivnom greškom i unakrsnom greškom matrične jednačine.

Problem linearnog–kvadratnog praćenja je razmatran, prvi put, u radu *Pindyck* (1972), za vremenski diskretne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem prisutnim u ulazima.

U radu *Mori et al*. (1982.b), ovaj problem je prevaziđen prezentovanjem nekoliko kriterijuma stabilnosti, nezavisnih od čisto vremenskog kašnjenja, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Međutim, ovi uslovi su konzervativniji i mogu se primeniti samo na sisteme bez perturbacija.

Rad *Trinh*, *Aldeen* (1995.a) prezentuje dovoljne uslove robusnosti i D–stabilnosti perturbovanih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Može se pokazati da su ovi rezultati manje konzervativni u odnosu na rezultate u navedenoj literaturi, naročito u radu *Mori et. al* (1982.b).

U nekim kasnijim radovima, razmatrana je analiza robusne stabilnosti sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem sa parametarskim neodređenostima. Za vremenski kontinualne sisteme, u smislu algebarske *Riccati*–eve jednačine i linearne matrične nejednakosti (linear matrix inequatity–LMI), dobijeni su dovoljni uslovi, *Esfahani et al.* (1998) i *Su, Chu* (1999).

Za vremenski diskretne sisteme, istovetni rezultati su prezentovani u radu *Verriest, Ivanov* (1995).

Označavanje. Neka je $\|\mathbf{x}\|_{(\cdot)}$ norma nekog vektora (gde je $\cdot = 1, 2, \infty$), a $\|(\cdot)\|$ je matrična norma tog vektora. Ovde će se koristiti oznake $\|\mathbf{x}\|_2 \triangleq \left(\mathbf{x}^T \mathbf{x}\right)^{1/2}$ i $\|(\cdot)\|_2 = \lambda_{\max}^{1/2}\left(A^* A\right)$. Prethodno navedeni indeksi * i ^{T} označavaju konjugovano–transponovanu i transponovanu matricu, sledstveno. Apsolutna vrednost matrice A označena je sa $|A|$, dok $\rho(A)$ i $\det(A)$ označavaju spektralni radijus i determinantu matrice A. M označava klasu realnih kvadratnih matrica sa nepozitivnim nedijagonalnim elementima i pozitivnim glavnim minorima.

Linearni, autonomni, vremenski diskretni sistem sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem može se predstaviti diferencnom jednačinom:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{N} A_j\,\mathbf{x}(k-h_j), \tag{5.1}$$

gde je: $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrica odgovarajućih dimenzija i $0 = h_0 \le h_1 \le h_2 \le \ldots \le h_N$ su celi brojevi koji predstavljaju čista vremenska kašnjenja sistema.

Stav 5.1 Linearni, autonomni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (5.1), je *asimptotski stabilan* ako i samo ako sve nule njegovog karakterističnog polinoma leže unutar jediničnog kruga.

Sistem, dat jed. (5.1), može da se napiše na sledeći način:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = A_{eq}\,\hat{\mathbf{x}}(k), \tag{5.2}$$

gde je:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \left[\mathbf{x}^T(k) \quad \mathbf{x}^T(k-1) \quad \ldots \quad \mathbf{x}^T(k-h_N)\right]^T \in \mathbb{R}^{n(h_N+1)}, \tag{5.3}$$

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} \hat{A}_0 & \hat{A}_1 & \ldots & \hat{A}_{h_N-1} & \hat{A}_{h_N} \\ I_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

$$\hat{A}_i = \begin{cases} A_j, & i = h_j,\ \mathrm{j} = 0,1,\ldots,N \\ 0, & i \ne h_j,\ \mathrm{j} = 0,1,\ldots,N \end{cases}, \quad \forall i = 0,1,\ldots,h_N. \tag{5.5}$$

Neophodni i dovoljni uslovi za asimptotsku stabilnost sistema, datog jed. (5.1), su:

$$\det\left(z\,I_{n(h_N+1)} - A_{eq}\right) \ne 0, \quad |z| \ge 1. \tag{5.6}$$

Lema 5.1 Za bilo koju *Hermitsku* matricu $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i bilo koji kompleksni vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n / \{0\}$ važi:

$$\lambda_{\min}(X) \le \frac{\mathbf{v}^* X\,\mathbf{v}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}} \le \lambda_{\max}(X), \tag{5.7}$$

tako da se donja i gornja granica ove nejednakosti mogu dostići ako sopstveni vektor $\mathbf{v}$ odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda_{\min}(X)$, ili $\lambda_{\max}(X)$, sledstveno.

Lema 5.2 Za bilo koju kvadratnu matricu $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i za bilo koji kompleksni vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n / \{0\}$, polje vrednosti:

$$\frac{\mathbf{v}^* X \, \mathbf{v}}{\mathbf{v}^* \, \mathbf{v}}, \tag{5.8}$$

uvek je u pravougaoniku u kompleksnoj ravni čije su četiri strane date sa:

$$\left[\lambda_i \left(H \right), j \lambda_k \left(K \right) \right], \quad i,k = \text{"min","max"}, \tag{5.9}$$

gde je:

$$H = \frac{1}{2}\left(X + X^T \right), \quad K = \frac{1}{2j}\left(X - X^T \right), \quad j^2 = -1. \tag{5.10}$$

Matrična funkcija:

$$d\left(X \right) = \max_{i,k} \sqrt{\lambda_i^2 \left(H\left(X \right) \right) + \lambda_k^2 \left(K\left(X \right) \right)} = \sqrt{\rho^2 \left(H \right) + \rho^2 \left(K \right)}, \tag{5.11}$$

predstavlja najveće rastojanje u kompleksnoj ravni između koordinatnog početka i četiri tačke definisane jed. (5.9).

Teorema 5.1 Sistem, dat jed. (5.1), je *asimptotski stabilan* ako je:

$$\sum_{j=0}^{N} \left\| A_j \right\| < 1, \tag{5.12}$$

Stojanović, Debeljković, (2004.a, 2004.c, 2004.i, 2004.k).

Zaključak 5.1 Ako je $N = 1$, uslov, dat nejed. (5.12), svodi se na uslov dat u radu *Mori et al.* (1982.b).

Teorema 5.2 Sistem, dat jed. (5.1), je *asimptotski stabilan* ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\sum_{j=0}^{N} d\left(A_j \right) < 1, \tag{5.13}$$

gde je matrična funkcija $d\left(\cdot \right)$ data jed. (5.11), *Stojanović, Debeljković*, (2004.a, 2004.c, 2004.i, 2004.k).

Zaključak 5.2 Ako je $N = 1$, uslov, dat nejed. (5.13), svodi se na uslov dat u radu *Mori et al.* (1982.b).

Teorema 5.3 Ako matrica D, definisana sa:

$$D \hat{=} I_n - \sum_{j=0}^{N} \left| A_j \right|, \tag{5.14}$$

$$d_{ik} \hat{=} \begin{cases} d_{ii} = 1 - \sum_{j=0}^{N} \left| a_{ii}^{j} \right| \\ d_{ik} = -\sum_{j=0}^{N} \left| a_{ik}^{j} \right| \end{cases}, \tag{5.15}$$

pripada klasi matrica M, tada je sistem, dat jed. (5.1), *asimptotski stabilan*, *Stojanović, Debeljković*, (2004.a, 2004.c, 2004.i, 2004.k).

Zaključak 5.3 Iz osnovnog uslova *Teoreme* 5.3, za $N=1$, sledi uslov dat u radu *Mori et al.* (1982.b).

Lema 5.3 Matrica $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pripada klasi matrica M ako i samo ako:

$$\exists C \in \mathbb{R}^{n \times n} \geq 0, \quad \exists r \in \mathbb{R}^{+} > \rho(C), \quad D = r I_n - C. \tag{5.16}$$

Zaključak 5.4 Ako se upotrebi norma, $\left\| (\,\cdot\,) \right\|_{(\bullet)}$, $(\,\bullet\,) = 1, \infty$, u *Teoremi* 5.1, tada sledi:

$$1 > \sum_{j=0}^{N} \left\| A_j \right\|_{(\bullet)} = \sum_{j=0}^{N} \left\| \, \left| A_j \right| \, \right\|_{(\bullet)} \geq \left\| \sum_{j=0}^{N} \left| A_j \right| \right\|_{(\bullet)} \geq \rho\left(\sum_{j=0}^{N} \left| A_j \right| \right). \tag{5.17}$$

Ako se definiše:

$$C = \sum_{j=0}^{N} \left| A_j \right| \geq 0, \tag{5.18}$$

$$r = 1 > \rho\left(\sum_{j=0}^{N} \left| A_j \right| \right) = \rho(C), \tag{5.19}$$

$$D = I_n - \sum_{j=0}^{N} \left| A_j \right|, \tag{5.20}$$

tada se iz *Leme* 5.3 može zaključiti da matrica D pripada klasi matrica M.

Ovo pokazuje da iz *Teoreme* 5.1 sledi *Teorema* 5.3 i da je uslov *Teoreme* 5.1 restriktivniji od uslova *Teoreme* 5.3 kada je $\left\| (\cdot) \right\| = \left\| (\cdot) \right\|_1$ ili $\left\| (\cdot) \right\|_\infty$.

Teorema 5.4 Sistem, dat jed. (5.1), je *asimptotski stabilan*, ako je zadovoljen jedan od sledeća dva uslova:

$$\sum_{j=0}^{N} \rho\left(H_j\right) < 1, \tag{5.21}$$

$$\sum_{j=0}^{N} \left\|H_j\right\|_2 < 1, \tag{5.22}$$

gde su matrice H_j definisane sa:

$$H_j = \frac{A_j + A_j^T}{2}, \quad j = 0,1,\ldots,N, \tag{5.23}$$

Stojanović, Debeljković (2004.a, 2004.c, 2004.i, 2004.k).

Uslov, dat nejed. (5.22), sledi direktno iz nejed. (5.21) imajući u vidu da su matrice H_j simetrične, tako da se može napisati:

$$\rho\left(H_j\right) = \left\|H_j\right\|_2, \quad j = 0,1,\ldots,N. \tag{5.24}$$

Zaključak 5.5 Na osnovu elementarnih algebarskih operacija važe sledeći izrazi:

$$\begin{aligned} \rho(A) = \rho(H + jK) &= \max_i \left|\lambda_i(H + jK)\right| \le \max_i \left|\lambda_i(H) + j\lambda_i(K)\right| \\ &\le \max_i \left|\lambda_i(H)\right| + \max_i \left|j\lambda_i(K)\right| = \rho(H) + \rho(K) = \|H\|_2 + \|K\|_2 \end{aligned}, \tag{5.25}$$

$$\rho(H) = \|H\|_2 = \frac{1}{2}\left\|A + A^T\right\|_2 \le \frac{1}{2}\left(\|A\|_2 + \left\|A^T\right\|_2\right) = \|A\|_2. \tag{5.26}$$

Iz *Bendixsons*–ove nejednakosti:

$$\lambda_{\min}(H) \le \operatorname{Re}\lambda(A) \le \lambda_{\max}(H), \tag{5.27.a}$$

$$\lambda_{\min}(K) \le \operatorname{Im}\lambda(A) \le \lambda_{\max}(K), \tag{5.27.b}$$

sledi:

$$\left|\lambda(A)\right| \le \sqrt{\lambda_H^2 + \lambda_K^2}, \tag{5.28}$$

$$\lambda_H = \max\left\{\left|\lambda_{\min}(H)\right|, \quad \left|\lambda_{\max}(H)\right|\right\} = \max_i \left|\lambda_i(H)\right| = \rho(H), \tag{5.29}$$

$$\lambda_K = \max\left\{\left|\lambda_{\min}(K)\right|, \quad \left|\lambda_{\max}(K)\right|\right\} = \max_i \left|\lambda_i(K)\right| = \rho(K), \tag{5.30}$$

i konačno:

$$\max_i \left|\lambda_i(A)\right| \triangleq \rho(A) \le \sqrt{\rho^2(H) + \rho^2(K)} = \max_{i,k} \sqrt{\lambda_i^2(H) + \lambda_k^2(K)} \triangleq d(A). \tag{5.31}$$

Tako da iz jed. (5.26) i jed. (5.31) sledi:

$$\rho(H)=\|H\|_2 \le d(A), \quad \rho(H)\le\|H\|_2 \le \|A\|_2 . \tag{5.32}$$

Zaključak 5.6 Nije teško dokazati, imajući u vidu jed. (5.55), da važi sledeći izraz:

$$\sum_{j=0}^{h_N}\rho(H_j)\le\sum_{j=0}^{h_N}d(A_j)<1, \quad \sum_{j=0}^{h_N}\|H_j\|_2 \le \sum_{j=0}^{h_N}\|A_j\|<1 , \tag{5.33}$$

tako da su uslovi dati *Teoremom* 5.1 i *Teoremom* 5.2 restriktivniji od onih datih *Teoremom* 5.4.

Shodno dovoljnim uslovima, datim nejed. (5.21–5.22), može da se izvede sledeći zaključak:

– laki su za korišćenje s obzirom da se koriste samo norme matrica,

– rešenja su manje restriktivna u odnosu na ona data nejed. (5.12) i nejed. (5.13), što predstavlja uopštenje uslova koje je dat u radu *Mori et al.* (1982.b).

Lema 5.4 Neka je:

$$G(z)=(zI_n-A)^{-1}, \tag{5.34}$$

tada je:

$$\left|G(z)z^{-h}\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}\left|G(k)\right|=L, \quad |z|\ge 1 , \tag{5.35}$$

$G(k)$ je niz matrica impulsnog odziva od $G(z)$ pri čemu je $G(0)=0$, *Trinh, Aldeen* (1995.a).

Lema 5.5 Za bilo koju $(n\times n)$ kvadratnu matricu X , važi sledeće:

$$\rho(X)<1 \quad\Rightarrow\quad \det(I_n-X)\ne 0 , \tag{5.36}$$

Trinh, *Aldeen* (1995.a).

Lema 5.6 Za bilo koje kvadratne matrice $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ i $Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$, važi sledeće:

$$|X|\le|Y| \quad\Rightarrow\quad \rho(X)\le\rho(|X|)\le\rho(Y) . \tag{5.37}$$

Teorema 5.5 Sistem, dat jed. (5.1), je *asimptotski stabilan*, nezavisno od kašnjenja, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\rho(A_0)<1 , \tag{5.38.a}$$

$$\rho\left(L\sum_{j=1}^{N}\left|A_j\right|\right)<1 , \tag{5.38.b}$$

gde je L definisano jed. (5.35), a $G(k)$ se dobija iz:

$$G(k) = A_0^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \infty, \quad G(0) = 0, \tag{5.39}$$

Stojanović, Debeljković, (2004.a, 2004.c, 2004.i, 2004.k).

Zaključak 5.7 Fundamentalna matrica sistema, datog jed. (5.1), bez čisto vremenskog kašnjenja je:

$$\Phi(z) = (zI_n - A_0)^{-1} z = G(z)z, \tag{5.40}$$

tako da je:

$$G(z) = z^{-1}\Phi(z) \quad \Rightarrow \quad G(k) = \Phi(k-1) = A_0^{k-1}, \quad G(0) = 0. \tag{5.41}$$

Ako je A_0 diskretno stabilna matrica, $\rho(A_0) < 1$, tada je beskonačni niz:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} |G(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |G(k)| = \sum_{k=0}^{\infty} \left|A_0{}^k\right| \le \sum_{j=0}^{\infty} |A_0|^k = \left(I_n - |A_0|\right)^{-1}, \tag{5.42}$$

konvergentan, tako da se matrica L može direktno izračunati.

Zaključak 5.8 Uslovi dati nejed. (5.38) su manje restriktivni od uslova datih nejed. (5.12). Razlog leži u činjenici da uslovi dati nejed. (5.38) uzimaju u obzir strukturu kašnjenja u matrici A_j, dok uslov iz nejed. (5.12) uzima u obzir samo normu matrica.

Primer 5.1 Razmatra se vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-1) + A_2\mathbf{x}(k-2),$$

gde su:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & -0,15 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \gamma\begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,15 & 0,1 \end{pmatrix},$$

a γ je parametar.

Primenjujući *Teoreme* 5.1–5.5 dobijaju se uslovi asimptotske stabilnosti prikazani u *tabeli* 5.1.

Tabela 5.1 Uslovi asimptotske stabilnosti

Teorema 5.1	$\sum_{j=0}^{N} \lVert A_j \rVert < 1$	$\lVert(\cdot)\rVert_1 : \lvert\gamma\rvert < 0,5$ $\lVert(\cdot)\rVert_2 : \lvert\gamma\rvert < 0,9673$ $\lVert(\cdot)\rVert_\infty : \lvert\gamma\rvert < 0,6667$
Teorema 5.2	$\sum_{j=0}^{N} d\left(A_j\right) < 1$	$\lvert\gamma\rvert < 1,1704$
Teorema 5.3	$D \hat{=} I_n - \sum_{j=0}^{N} \lvert A_j \rvert$ je M –matrica	$\lvert\gamma\rvert < 1,1055$
Teorema 5.4	$\sum_{j=0}^{N} \rho\left(H_j\right) < 1$ $\sum_{j=0}^{N} \lVert H_j \rVert_2 < 1$	$\lvert\gamma\rvert < 1,2719$
Teorema 5.5	$\rho\left(L \sum_{j=1}^{N} \lvert A_j \rvert \right) < 1$	$\lvert\gamma\rvert < 1,2440$

Na osnovu rezultata prikazanih u *tabeli* 5.1, može da se zaključi sledeće:

– rezultati dobijeni *Teoremom* 5.4 su manje restriktivni od onih dobijenih primenom *Teoreme* 5.1 i *Teoreme* 5.2, što je i dokazano u *Zaključku* 5.6,

– s obzirom da se uslovi *Teoreme* 5.1 i *Teoreme* 5.2, u slučaju sistema sa samo jednim vremenskim kašnjenjem, svode na rezultate date u radu *Mori et al.* (1982.b), sledi da su uslovi *Teoreme* 5.4 manje restruktivni u odnosu na odgovarajuće uslove date u radu *Mori et al.* (1982.b),

– najbolji rezultat postiže se primenom *Teoreme* 5.4, pa zatim *Teoremom* 5.5,

– uslov dat *Teoremom* 5.4 je vrlo jednostavan za praktičnu primenu.

Ako se usvoji vrednost $\gamma = 1,2719$, tada je spektralni radijus ekvivalentne matrice A_{eq} sistema bez čisto vremenskog kašnjenja $\rho\left(A_{eq}\right) = 0,9823$.

S obzirom da je manji od jedan, rezultat iz *tabele* 5.1 garantuje asimptotsku stabilnost razmatranog sistema. Gornja granica za vrednost parametra γ iznosi 1,3746 i sistem je, za tu vrednost, *granično stabilan*.

Linearni, autonomni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, prisutnim u stanju sistema, može se predstaviti vektorskom diferencnom jednačinom stanja:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h), \tag{5.43}$$

sa pridruženom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\theta) = \boldsymbol{\psi}(\theta), \quad \theta \in \{-h, -h+1, \ldots, 0\} \tag{5.44}$$

Jed. (5.43) se naziva homogenom ili jednačinom stanja u slobodnom radnom režimu. $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ je vektor stanja, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je konstantna matrica odgovarajućih dimenzija, a čisto vremensko kašnjenje je izraženo celim brojevima $h = 1, 2, \ldots$.

Neka je data skalarna funkcija $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tako da je ista $V(\mathbf{x}(t))$ ograničena za sve vrednosti svog argumenta $\mathbf{x}$ za koje je njegova norma $\|\mathbf{x}\|$, takođe, ograničena.

Lema 5.7 Za bilo koje dve matrice istih dimenzija F i G i za neku pozitivnu konstantu ε važi sledeće:

$$(F+G)^T (F+G) \le (1+\varepsilon) F^T F + \left(1+\varepsilon^{-1}\right) G^T G\,. \tag{5.45}$$

Teorema 5.6 Ako za bilo koju matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ takva da je ispunjena sledeća matrična jednačina:

$$(1+\varepsilon_{\min}) A_0^T P A_0 + \left(1+\varepsilon_{\min}^{-1}\right) A_1^T P A_1 - P = -Q\,, \tag{5.46}$$

gde je:

$$\varepsilon_{\min} = \frac{\|A_1\|_2}{\|A_0\|_2}, \tag{5.47}$$

tada je sistem, dat jed. (5.43), *asimptotski stabilan*, *Stojanović*, *Debeljković*, (2005.c).

Lema 5.8 Ako za bilo koju matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ koja je rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$A_0^T P A_0 - P = -\frac{\varepsilon_{\min}}{1+\varepsilon_{\min}} Q\,, \tag{5.48}$$

gde je $\varepsilon_{\min} = \dfrac{\sigma_{\max}(A_1)}{\sigma_{\max}(A_0)} = \dfrac{\|A_1\|_2}{\|A_0\|_2}$ i ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\rho(A_0) < \sqrt{1+\left(\frac{\|A_1\|_2}{2}\right)^2} - \frac{\|A_1\|_2}{2}, \tag{5.49}$$

tada je:

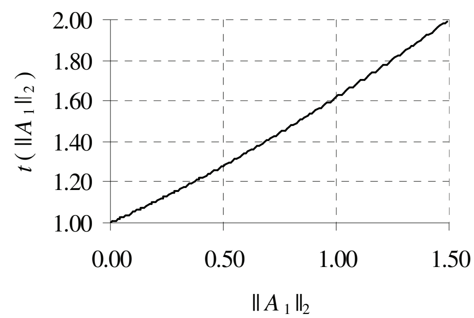
i) matrica $(Q-P)$ pozitivno određena, i

ii) matrica: A_0 *diskretno stabilna*, *Stojanović*, *Debeljković* (2005.c).

Primedba 5.1 Iz nejed.(5.49) sledi:

$$\rho(A_0)+\|A_1\|_2 < \sqrt{1+\left(\frac{\|A_1\|_2}{2}\right)^2} - \frac{\|A_1\|_2}{2} + \|A_1\|_2 \le \sqrt{1+\left(\frac{\|A_1\|_2}{2}\right)^2} + \frac{\|A_1\|_2}{2} \triangleq t\left(\|A_1\|_2\right). \tag{5.50}$$

Grafik funkcije $t\left(\|A_1\|_2\right)$ je prikazan na *slici* 5.1.



Slika 5.1 Grafik funkcije $t\left(\|A_1\|_2\right)$

Sa grafika se vidi da je funkcija uvek rastuća i veća ili jednaka jedinici, pa je:

$$\inf_{\|A_1\|_2}\left(\sup\left(\rho(A_0)+\|A_1\|_2\right)\right)=1^-, \tag{5.51}$$

gde je: $1^- = \lim_{\delta\to 0}(1-\delta)$.

S obzirom na nejednakost $\rho(A_0) \le \|A_0\|_2$, iz jed. (5.51) proizilazi sledeće:

$$\inf_{\|A_1\|_2}\left(\sup\left(\|A_0\|_2+\|A_1\|_2\right)\right)=1^-, \tag{5.52}$$

$$\sup\left(\|A_0\|_2+\|A_1\|_2\right) \ge \sup\left(\rho(A_0)+\|A_1\|_2\right) \ge 1. \tag{5.53}$$

Drugim rečima, *najmanji maksimalno dozvoljen zbir normi matrica* A_0 i A_1 iznosi 1. Ovaj uslov je svakako bolji od uslova $\|A_0\|_2 + \|A_1\|_2 < 1$, koji je prezentovan u radu *Mori* (1982.b).

Posledica 5.1 Ako za bilo koju matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ koja je rešenje Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$A_0^T P A_0 - P = -\frac{\varepsilon_{\min}}{1+\varepsilon_{\min}} Q , \tag{5.54}$$

gde je $\varepsilon_{\min} = \dfrac{\sigma_{\max}(A_1)}{\sigma_{\max}(A_0)} = \dfrac{\|A_1\|_2}{\|A_0\|_2}$ i ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\sigma_{\max}(A_0) + \sigma_{\max}(A_1) < \frac{\lambda_{\min}(Q-P)}{\sigma_{\max}(A_0)\lambda_{\max}(P)}, \tag{5.55}$$

tada je sistem, dat jed. (5.43), *asimptotski stabilan*, *Stojanović, Debeljković* (2005.c).

Posledica 5.2 Ako za bilo koju matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$, koja je rešenje sledeće matrične jednačine:

$$(1+\varepsilon_{\min}) A_0^T P A_0 - P = -\varepsilon_{\min} Q , \tag{5.56}$$

gde je $\varepsilon_{\min} = \dfrac{\sigma_{\max}(A_1)}{\sigma_{\max}(A_0)} = \dfrac{\|A_1\|_2}{\|A_0\|_2}$ i ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\sigma_{\max}(A_0) + \sigma_{\max}(A_1) < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\sigma_{\max}(A_0)\lambda_{\max}(P)}, \tag{5.57}$$

tada je sistem, dat jed. (5.43), *asimptotski stabilan*, *Stojanović, Debeljković* (2005.c).

Teorema 5.7 Ako za bilo koju matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$, tako da je zadovoljena sledeća matrična jednačina:

$$2 A_0^T P A_0 + 2 A_1^T P A_1 - P = -Q , \tag{5.58}$$

tada je sistem, dat jed. (5.43), *asimptotski stabilan*, *Stojanović, Debeljković*, (2006.b).

Posledica 5.3 Sistem, dat jed. (5.43), je *asimptotski stabilan*, nezavisno od kašnjenja, ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\sigma_{\max}^2(A_1) < \frac{\lambda_{\min}(2Q-P)}{2\sigma_{\max}^2(P^{1/2})}, \tag{5.59}$$

i ako za datu matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ kao rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$A_0^T P A_0 - P = -Q, \tag{5.60}$$

Stojanović, *Debeljković* (2006.b).

Posledica 5.4 Sistem, dat jed. (5.43), je *asimptotski stabilan*, nezavisno od kašnjenja, ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\sigma_{\max}^2 \left(A_1 \right) < \frac{\lambda_{\min} \left(Q \right)}{2 \sigma_{\max}^2 \left(P^{1/2} \right)}, \tag{5.61}$$

i ako za datu matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ kao rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$2 A_0^T P A_0 - P = -Q, \tag{5.62}$$

Stojanović, *Debeljković* (2006.b).

Zaključak 5.9 U prethodnim posledicama uslov iz jed. (5.58) je podeljen na dva dela. Prvi uslov, dat jed. (5.60) ili jed. (5.62), je eliminatoran i ako je on zadovoljen, drugi uslov, dat nejed. (5.59) ili nejed. (5.61), daje konačan zaključak o asimptotskoj stabilnosti.

Uslovi dati jed. (5.60) i jed. (5.62) su zadovoljeni ako i samo ako su A_0, odnosno $\sqrt{2} A_0$, *diskretno stabilne* matrice, sledstveno.

Odavde sledi da je *Posledica* 5.4 restriktivnija od *Posledice* 5.3 u pogledu prvog uslova. Međutim, ovo je tačno samo ako je:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \left| \lambda_i \left(A_0 \right) \right| < 1. \tag{5.63}$$

Neka je ispunjen sledeći uslov:

$$\left| \lambda_i \left(A_0 \right) \right| < \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{5.64}$$

Sve sopstvene vrednosti matrice A_0 ispunjavaju uslov dat nejed. (5.64).

Sada se uzima da se u *Posledici* 5.3 i *Posledici* 5.4, pri ispitivanju stabilnosti koristi ista matrica Q.

Tada iz $0 < (2Q - P) \le Q$ sledi:

$$\lambda_{\min} \left(2Q - P \right) \le \lambda_{\max} \left(2Q - P \right) \le \lambda_{\min} \left(Q \right), \tag{5.65}$$

to jest, može se reći da minimalna sopstvena vrednost matrice Q nikada neće biti manja od minimalne sopstvene vrednosti matrice $(2Q-P)$.

Kada je $P=Q$, trebalo bi koristiti znak iz nejed. (5.63). Ovo je moguće kada je A_0 nula matrica. Sledi da su uslovi stabilnosti iz nejed. (5.61) i jed. (5.62), dati *Posledicom* 5.4, manje restriktivni u odnosu na uslove iz nejed. (5.59) i jed. (5.60), *Posledice* 5.3.

S obzirom da iz *Teoreme* 5.7, uz dodatna ograničenja, slede *Posledica* 5.3 i *Posledica* 5.4, uslovi stabilnosti ove teoreme su manje restriktivni od uslova stabilnosti koji su iskazani preko *Posledice* 5.3 i *Posledice* 5.4.

Primer 5.2 Razmatra se sledeći vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem*:*

$$\mathbf{x}(k+1)=A_0\,\mathbf{x}(k)+\wp\,A_1\,\mathbf{x}(k-h),$$

$$A_0=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3\\ 0,1 & \alpha\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix}0,3 & 0\\ 0,2 & 0,1\end{pmatrix},$$

gde je $\wp$ podešljivi parametar, a skalarni parametar α uzima vrednosti – 0,15 i 0,50.

Uslov asimptotske stabilnosti, *nezavisan od kašnjenja,* dobija se u funkciji od parametra $\wp$, predstavljen je u *tabeli* 5.2 i upoređen sa rezultatima datim u lit. *Mori et al.* (1982.b) i *Trinh, Aldeen* (1995.a).

Tabela 5.2 Uslovi asimptotske stabilnosti

Kriterijum	α	
	−0,15	+ 0,50
Mori et al. (1982.b)	$\lvert\wp\rvert<1,73$	$\lvert\wp\rvert<0,72$
Trinh, Aldeen (1995.a)	$\lvert\wp\rvert<2,08$	$\lvert\wp\rvert<1,51$
Teorema 5.6	$\lvert\wp\rvert<2,09$	$\lvert\wp\rvert<1,50$
Posledica 5.1	$\lvert\wp\rvert<1,78$	$\lvert\wp\rvert<1,08$
Posledica 5.2	$\lvert\wp\rvert<1,84$	$\lvert\wp\rvert<1,10$
Teorema 5.7	$\lvert\wp\rvert<1,95$	$\lvert\wp\rvert<1,47$
Posledica 5.3	$\lvert\wp\rvert<1,68$	$\lvert\wp\rvert<1,01$
Posledica 5.4	$\lvert\wp\rvert<1,70$	$\lvert\wp\rvert<1,06$
Granica stabilnosti	$\lvert\wp\rvert<2,11$	$\lvert\wp\rvert<1,52$

Literatura

Amir–Moez, A. "Extreme Properties of a Hermitian Transformations and Singular Values of Sum and Product of Linear Transformations", *Duke Math. J.*, 23, (1956) 463–476.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems", *Proc. ECC97*, Brussels (Belgium), July 2–6, (1997.a) 307–311.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical Stability of Time–Delay Systems: New Results", *Proc. 2nd ASCC 97*, Seoul (Korea), III, July 22–25, (1997.c) 543–546.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. Tomašević, "On Practical Stability of Time Delay System under Perturbing Forces", *Proc. AMSE 97*, Melbourne (Australia), October 29–31, (1997.d) 442–446.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. CDC 97*, San Diego, California (USA), December 21–23, (1997.e) 2771–2772.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A Jacić, "Further Results on Non–Lyapunov Stability of Time Delay Systems", *Proc. MELECON 98*, Tel–Aviv (Israel), Vol. 1, May 18–20, (1998.a) 509–512.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Non–Lyapunov Stability Analysis of Linear Time Delay Systems", *Preprints DYCOPS 5, 5th IFAC Symposium on Dynamics and Process Systems*, Corfu (Greece), June 8–10, (1998.b) 549–553.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman–Gronwall Approach", *Preprints IFAC Workshop on linear time delay systems*, Grenoble (France), July 6–7, (1998.c) 107–112.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, Đ. Koruga, "Finite Time Stability of Linear Discrete Descriptor Systems", *Preprints 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China), TS13, September 8–10, (1998.d) 1–5.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, Đ. Koruga, "Further Results on Non–Lyapunov Stability of Time Delay Systems", *Preprints 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China), TS13, September 8–10, (1998.e) 6–10.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Further Results on the Stability of Linear Non–autonomous Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. APCCM*, Guilin (China), July 9–12, (2000) D.9.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Proc. ACC 03*, Denver (Colorado), FM05, June 4–6, (2003.a) 4450–4451.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, N. Y. Yong, Q. L. Zhang, "Lyapunov and Non–Lyapunov of Linear Discrete Time Systems with Delayed State", *Proc. ICCA 2003*, Montreal (Canada), (2003.b) 296–301.

Esfahani, S. H., S. O. R. Moheimani, I. R. Petersen, "LMI Approach Suboptimal Quadratic Guaranteed Cost Control for Uncertain Time–Delay Systems", *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 145, (1998) 491–498.

Gorecki, H., S. Fuksa, P. Grabovski, A. Korytowski, *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, John Wiley & Sons, Warszawa, 1989.

Hmamed, A., "On the Stability of Time Delay Systems: New Results", *Int. J. Control*, 43 (1), (1986.a) 321–324.

Hmamed, A., "Stability Conditions of Delay–Differential Systems", *Int. J. Control*, 43 (2), (1986.b) 455–463.

Januševskii, R. T. *Upravlenie objektami s zapazdavanijem*, Nauka, Moskva, 1978.

Koepcke, R. W., "On the Control of Linear Systems with Pure Time Delay", *Trans. ASME J. Basic Eng.*, 3 (1965) 74–80.

Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, "Finite Time Stability of Time Delay Systems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Vol. 17, No. 3, (1999) 101–109.

Lee, H. C., T. H. S. Li, F. C. Kung, "D–Stability Analysis for Discrete Systems with a Time Delay", *Systems and Control Letters*, 19, (1992) 213–219.

Maleu–Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time–delay Systems*, North–Holland Systems and Control Series, Vol. 9, Amsterdam, 1987.

Meyer, C. D., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2001.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Delay–Independent Stability Criteria for Discrete–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC–27 (4), (1982.b) 946–966.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, "On Practical Stability of Time Delay Systems", *Proc. AACC*, Alberquerque, New Mexico (USA), June 4–6, (1997) 3235–3236.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delayed System", *7th Biennial ASME Conference Engineering Systems Design and Analysis*, *ESDA* 2004, Manchester (UK), July 19–22, (2004.a) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *CDIC* 2004, Nanjing (China), August 18–20, (2004.c) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *ICARCV* 2004, Kunming (China), December 06–09, (2004.i) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Facta Universitatis*, Vol. 2, No. 1, (2004.k) 25–48.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 1, No. 3–4, (2005.c) 413–420.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Further Results on Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 1, (2006.b) 117–123.

Su, H., J. Chu, "Robust H_∞ Control for Linear Time–Varying Uncertain Time–Delay Systems via Dynamic Output Feedback", *Internat. J. Systems Sci.*, **30**, (1999) 1093–1107.

Trinh, H., M. Aldeen, "D–Stability Analysis of Discrete–Delay Perturbed Systems", *Int. J. Control*, 61 (2), (1995.a) 493–505.

Trinh, H., M. Aldeen, “Robust Stability of Singularly Perturbed Discrete–Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr*., AC–40 (9), (1995.b) 1620–1623.

Trinh, H., M. Aldeen, “A Memoryless State Observer for Discrete Time–Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr*., AC–42 (11), (1997.b) 1572–1577.

Verriest, E. I., A. F. Ivanov, “Robust Stability of Delay–Difference Equations”, *Proceedings of the 34th IEEE Conference Decision and Control*, New Orleans, LA, (1995) 386–391.

6. STABILNOST SISTEMA $\mathbf{x}(k+1)=A_0\,\mathbf{x}(k)+A_1\,\mathbf{x}(k-1)$ U SMISLU LJAPUNOVA

U ovoj glavi razmatra se asimptotska stabilnost partikularne klase vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Biće prezentovani dovoljni uslovi, u formi kriterijuma, nezavisnih od čisto vremenskog kašnjenja.

Ovi rezultati su analogni rezultatu izvedenom u radu *Tissir*, *Hmamed* (1996) za vremenski kontinualne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem, a manje su konzervativni u odnosu na uslov prezentovan u radu *Jacić et al*. (2004).

U literaturi koja obrađuje stabilnost sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, često se koristi matrična mera. Matrična mera μ za bilo koju matricu $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ je definisana na sledeći način:

$$\mu(A)\overset{\Delta}{=}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\|I+\varepsilon A\|-1}{\varepsilon}. \tag{6.1}$$

Označavanje. Za realne simetrične matrice F i G, oznaka $F\geq G$ (sledstveno, $F>G$) znači da je matrica $(F-G)$ pozitivno poluodređena (sledstveno, pozitivno određena). Ako su obe matrice F i G poluodređene, tada je i matrica $(F+G)$ poluodređena, i ako je jedna od ovih matrica pozitivno određena, tada je i matrica $(F+G)$ pozitivno određena. Ako je matrica F pozitivno određena, tada je i matrica $F^{1/2}$ pozitivno određena.

Linearni, autonomni, višestruko prenosni, vremenski diskretni sistem sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem može se predstaviti vektorskom diferencnom jednačinom stanja:

$$\mathbf{x}(k+1)=A_0\,\mathbf{x}(k)+\sum_{j=1}^{N}A_j\,\mathbf{x}\left(k-h_j\right), \tag{6.2}$$

gde su: $\mathbf{x}(k)\in\mathbb{R}^n$ vektor stanja, $A_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ matrice, a $0=h_0\leq h_1\leq h_2\leq\ldots\leq h_N$ su celi brojevi koji predstavljaju čista vremenska kašnjenja u sistemu.

Kao specijalan slučaj razmatra se linearni, autonomni, višestruko prenosni, diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u formi:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-1)\,. \tag{6.3}$$

Jednačina (6.3) se naziva homogenom ili jednačinom stanja u slobodnom radnom režimu. $\mathbf{x}(k)$ je vektor stanja, A_0 i A_1 su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija.

Pretpostavlja se da jed. (6.2) zadovoljava uslove glatkosti tako da njena rešenja uvek postoje, i jedinstvena su i neprekidna u odnosu na k i početne uslove, i ograničena su za sve ograničene vrednosti njihovih argumenata.

U cilju poređenja rezultata, *vremenski kontinualni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem* u prostoru stanja je predstavljen sa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\,\mathbf{x}(t) + A_1\,\mathbf{x}(t-\tau)\,, \tag{6.4}$$

gde je $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, A_0 i A_1 su $(n \times n)$ realne matrice.

Vremenski kontinualni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem

Teorema 6.1 Sistem, dat jed. (6.4), je *asimptotski stabilan* ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\mu(A_0) + \| A_1 \| < 0\,, \tag{6.5}$$

Mori et al. (1982.b).

Teorema 6.2 Sistem, dat jed. (6.4), je *asimptotski stabilan*, nezavisno od čisto vremenskog kašnjenja, ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\| A_1 \| < \frac{\sigma_{\min}\left(Q^{\frac{1}{2}}\right)}{\sigma_{\max}\left(Q^{-\frac{1}{2}}P\right)}\,, \tag{6.6}$$

gde je matrica P rešenje Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$A^T P + P\,A = -2\,Q\,, \tag{6.7}$$

gde su $\sigma_{\min}(\cdot)$ i $\sigma_{\max}(\cdot)$ minimalna i maksimalna singularna vrednost matrice $(\cdot)$, *Tissir*, *Hmamed* (1996).

Vremenski diskretni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem

Teorema 6.3 Sistem, dat jed. (6.3), je *asimptotski stabilan* ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\| A_0 \| + \| A_1 \| < 1, \tag{6.8}$$

Mori et al. (1982.b).

Teorema 6.4 Sistem, dat jed. (6.2), je *asimptotski stabilan* ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\sum_{i=0}^{N} \| A_i \| < 1, \tag{6.9}$$

Debeljković, *Aleksendrić* (2003).

Teorema 6.5 Sistem**,** dat jed. (6.3), je *asimptotski stabilan*, nezavisno od čisto vremenskog kašnjenja, ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\| A_1 \| < \frac{\sigma_{\min}\left(Q^{-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma_{\max}\left(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P\right)}, \tag{6.10}$$

gde je pozitivno određena matrica P rešenje diskretne Ljapunovljeve matrične jednačine*:*

$$A_0^T P A_0 - P = -\left(2Q + A_1^T P A_1\right), \tag{6.11}$$

gde su $\sigma_{\min}(\cdot)$ i $\sigma_{\max}(\cdot)$ minimalna i maksimalna singularna vrednost matrice $(\cdot)$, *Debeljković, Stojanović* (2004).

Teorema 6.6 Pretpostavlja se da je matrica $\left(Q - A_1^T P A_1\right)$ regularna. Tada je sistem, dat jed. (6.3), *asimptotski stabilan*, nezavisno od čisto vremenskog kašnjenja, ako je:

$$\| A_1 \| < \frac{\sigma_{\min}\left(\left(Q - A_1^T P A_1\right)^{-1/2}\right)}{\sigma_{\max}\left(Q^{-1/2} A_0^T P\right)}, \tag{6.12}$$

gde je matrica P rešenje diskretne Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$A_0^T P A_0 - P = -2Q, \tag{6.13}$$

gde su $\sigma_{\min}(\cdot)$ i $\sigma_{\max}(\cdot)$ minimalna i maksimalna singularna vrednost matrice $(\cdot)$, *Debeljković et al.* (2004.b, 2005).

Teorema 6.7 Sistem, dat jed. (6.3), je *asimptotski stabilan*, nezavisno od čisto vremenskog kašnjenja, ako je:

$$\left\| A_1 \right\| < \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sigma_{\min}\left(Q^{\frac{1}{2}}\right)}{\sigma_{\max}\left(P^{\frac{1}{2}}\right)}, \tag{6.14}$$

gde je matrica P rešenje diskretne Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$2A_0^T P A_0 - P = -Q\,, \tag{6.15}$$

gde su $\sigma_{\min}$ i $\sigma_{\max}$ minimalna i maksimalna singularna vrednost matrice, *Debeljković et al.* (2004.a).

Literatura

Amir–Moez, A. R., "Extreme Properties of Eigenvalues of Hermitian Transformations and Singular Value of the Sum and Product of Linear Transformation", *Duke Math. Journal*, 23, (1956) 463–467.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems", *Proc. ECC97*, Brussels (Belgium), July 2–6, (1997.a) 307–311.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical Stability of Time–Delay Systems: New Results", *Proc. 2nd ASCC 97*, Seoul (Korea), III, July 22–25, (1997.c) 543–546.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. Tomašević, "On Practical Stability of Time Delay System under Perturbing Forces", *Proc. AMSE 97*, Melbourne (Australia), October 29–31, (1997.d) 442–446.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. CDC 97*, San Diego, California (USA), December 21–23, (1997.e) 2771–2772.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A Jacić, "Further Results on Non–Lyapunov Stability of Time Delay Systems", *Proc. MELECON 98*, Tel–Aviv (Israel), Vol. 1, May 18–20, (1998.a) 509–512.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Non–Lyapunov Stability Analysis of Linear Time Delay Systems", *Preprints DYCOPS 5, 5th IFAC Symposium on Dynamics and Process Systems*, Corfu (Greece), June 8–10, (1998.b) 549–553.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman–Gronwall Approach", *Preprints IFAC Workshop on linear time delay systems*, Grenoble (France), July 6–7, (1998.c) 107–112.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, Đ. Koruga, "Finite Time Stability of Linear Discrete Descriptor Systems", *Preprints 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China), TS13, September 8–10, (1998.d) 1–5.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, Đ. Koruga, "Further Results on Non–Lyapunov Stability of Time Delay Systems**",** *Preprints 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China), TS13, September 8–10, (1998.e) 6–10.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Further Results on the Stability of Linear Non–autonomous Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. APCCM*, Guilin (China), July 9–12, (2000) D.9.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Proc. ACC 03*, Denver (Colorado), FM05, June 4–6, (2003.a) 4450–4451.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, N. Y. Yong, Q. L. Zhang, "Lyapunov and Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Systems with Delayed State", *Proc. ICCA 2003*, Montreal (Canada), (2003.b) 296–301.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, "A Short Note to the Lyapunov Stability of $\mathbf{x}(k+1)=A_0\,\mathbf{x}(k)+A_1\,\mathbf{x}(k-1)$", *Proc. of* CDCOC, Shenyang (China), August 22–24, (2004) CD–Rom.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, Čigoja štampa, Beograd, 2004.a.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, "Discrete Time Delayed System Stability Theory in the Sense of Lyapunov: New Results", *Proc. ISIC* 2004, Taipei (Taiwan), September 1–4, (2004.b) CD–Rom.

Jacić, Lj. A., D. Lj. Debeljković, S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, "Further Results On Asymptotic Stability of $\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-1)$", *HIPNEF* 2004, Vrnjačka Banja, 2004.

Januševskii, R. T., *Upravlenie objektami s zapazdavanijem*, Nauka, Moskva, 1978.

Koepcke, R. W., "On the Control of Linear Systems with Pure Time Delay", *Trans. ASME J. Basic Eng*., (3), (1965) 74–80.

Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, "Finite Time Stability of Time Delay Systems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Vol. 17, No.3, (1999) 101–109.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Simple Stability Criteria for Single and Composite Linear Systems with Time Delays", *IEEE Trans. Automat. Contr*., AC–27 (4), (1981) 1175–1184.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Delay–Independent Stability Criteria for Discrete–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr*., AC–27 (4), (1982.b) 946–966.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, "On Practical Stability of Time Delay Systems", *Proc. AACC* 97, Alberquerque, New Mexico (USA), June 4–6, (1997) 3235–3236.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delayed System", *7^th^ Biennial ASME Conference Engineering Systems Design and Analysis*, *ESDA* 2004, Manchester (UK), July 19–22, (2004.a) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On Stability of Perturbed Linear Discrete–Delay Systems with Multiple Delays", *CDIC* 2004, Nanjing (China), August 18–20, (2004.d) CD–Rom.

Tissir, E., A. Hmamed, "Further Results on Stability of $\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-1)$", *Automatica,* Vol. 32, No. 12, (1996) 1723–1726.

Trinh, H., M. Aldeen , "D–Stability Analysis of Discrete–Delay Perturbed Systems", *Int. J. Control*, 61 (2), (1995.a) 493–505.

Trinh, H., M. Aldeen, “Robust Stability of Singularly Perturbed Discrete–Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr*., AC–40 (9), (1995.b) 1620–1623.

Trinh, H., M. Aldeen, “A Memoryless State Observer for Discrete Time–Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr*., AC–42 (11), (1997.b) 1572–1577.

7. STABILNOST LINEARNIH DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM: PRILAZ LJAPUNOV–KRASOVSKI

Tokom nekoliko poslednjih godina, značajna pažnja je poklonjena problemu analize stabilnosti sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

S obzirom da su većina fizičkih sistema vremenski kontinualni, normalno je da su teorije analize stabilnosti uglavnom razvijene za vremenski kontinualne sisteme. Uprkos značajnosti pomenutog, manje pažnje se poklanja vremenski diskretnim sistemima sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem, lit. *Mori et al*. (1985), *Kapila, Haddad* (1998), *Song et al.* (1999), *Mahmoud* (2000.a, 2000.b), *Lee, Kwon* (2002), *Fridman, Shaked* (2003. 2005.a, 2005.b). Glavni razlog leži u činjenici da se diferencne jednačine sa poznatim višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem mogu pretvoriti u sistem sa kašnjenjem velikog reda primenom prilaza proširenja. Međutim, za sisteme sa velikim iznosom vremenskog kašnjenja, ovo vodi do sistema velike dimenzije. Osim toga, za sisteme sa nepoznatim čistim vremenskim kašnjenjem šema proširenja nije primenljiva.

U ovoj glavi prezentovaće se uslovi stabilnosti, nezavisni od čisto vremenskog kašnjenja, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju.

Ovi uslovi su izvedeni korišćenjem nove *Ljapunov–Krasovski* metode za vremenski diskretne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Linearni, autonomni, višestruko prenosni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem prisutnim u stanju sistema, može se predstaviti vektorskom diferencnom jednačinom stanja:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h), \tag{7.1}$$

sa pridruženom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\theta) = \boldsymbol{\psi}(\theta), \quad \theta \in \{-h, -h+1, \dots, 0\} \triangleq \Delta, \tag{7.2}$$

gde je: $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konstantna matrica odgovarajućih dimenzija, a $h \in \mathbb{Z}^+$ nepoznato čisto vremensko kašnjenje.

$\mathbf{x}_k \triangleq \{x(k-h), x(k-h+1), \ldots, x(k)\}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, je vektor stanja, $\mathbb{D}(\Delta, \mathbb{R}^n)$–prostor kontinualnih funkcija označava diskretan interval Δ na $\mathbb{R}^n$ i $\|\phi\|_D = \sup_{\Theta \in \Delta} \|\phi(\Theta)\|$, $\mathbb{D} \ni \phi(\Theta) : \Delta \mapsto \mathbb{R}^n$ norma elementa ϕ u $\mathbb{D}$.

Dalje je, $\mathbb{D}^{\Upsilon} = \{\phi \in \mathbb{D} : \|\phi\|_D < \Upsilon, \Upsilon \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{D}$. Za početno stanje, pretpostavlja se sledeći uslov:

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_D \in \mathbb{D}^{\infty}. \tag{7.3}$$

Očigledno, $\mathbf{x}_k : \Delta \ni \theta \quad \to \quad \mathbf{x}_k(\theta) \triangleq \mathbf{x}(k+\theta) \in \mathbb{D}$ i $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k, \boldsymbol{\psi})$.

Definicija 7.1 Ravnotežno stanje $\mathbf{x} = 0$ sistema, datog jed. (7.1), je *globalno asimptotski stabilno* ako za bilo koju početnu funkciju $\boldsymbol{\psi}(\theta)$ koja zadovoljava:

$$\boldsymbol{\psi}(\theta) \in \mathbb{D}^{\infty}, \tag{7.4}$$

važi:

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{x}(k, \boldsymbol{\psi}) \to 0. \tag{7.5}$$

Teorema 7.1 Ako postoje pozitivni brojevi α i β i kontinualna funkcija $V : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ tako da je:

$$0 < V(\mathbf{x}_k) \le \alpha \|\mathbf{x}_k\|_D^2, \quad \forall \mathbf{x}_k \ne 0, \quad V(0) = 0, \tag{7.6}$$

$$\Delta V(\mathbf{x}_k) \triangleq V(\mathbf{x}_{k+1}) - V(\mathbf{x}_k) \le -\beta \|\mathbf{x}(k)\|^2, \tag{7.7}$$

$\forall \mathbf{x}_k \in \mathbb{D}$ koje zadovoljava jed. (7.1), rešenje $\mathbf{x} = 0$ jednačina (7.1–7.2) je *globalno asimptotski stabilno, Stojanović, Debeljković* (2009.a).

Definicija 7.2 Vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (7.1), je *globalno asimptotski stabilan* ako i samo ako je njegovo rešenje $\mathbf{x} = 0$ globalno asimptotski stabilno.

Lema 7.1 Za bilo koje dve matrice F i G dimenzije $(n \times m)$ i za bilo koju kvadratnu matricu $P = P^T > 0$ dimenzije n, važi sledeće:

$$(F+G)^T P (F+G) \le (1+\varepsilon) F^T P F + (1+\varepsilon^{-1}) G^T P G, \tag{7.8}$$

gde je ε pozitivna konstanta.

Teorema 7.2 Ako za bilo koju matricu $Q = Q^T > 0$ postoji matrica $P = P^T > 0$ tako da je ispunjena sledeća matrična jednačina:

$$\left(1+\frac{\|A_1\|_2}{\|A_0\|_2}\right)A_0^{\,T}PA_0+\left(1+\frac{\|A_0\|_2}{\|A_1\|_2}\right)A_1^{\,T}PA_1-P=-Q\,, \tag{7.9}$$

tada je, sistem, dat jed. (7.1), za $\|A_0\|_2 \neq 0$ i $\|A_1\|_2 \neq 0$, *asimptotski stabilan*, *Stojanović, Debeljković* (2009.a).

Teorema 7.3 Vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (7.1), je *asimptotski stabilan* ako postoje matrice $P > 0$ i $Q > 0$ tako da važi sledeća linearna matrična nejednakost:

$$\begin{pmatrix} Q-P & 0 & A_0^T P \\ * & -Q & A_1^T P \\ * & * & -P \end{pmatrix} < 0\,, \tag{7.10}$$

Stojanović, *Debeljković* (2009.a).

Primer 7.1 Razmatra se vremenski diskretni sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h)\,,$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & a \end{pmatrix}, \quad A_1 = \wp\begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix},$$

gde je $\wp$ podešljiv parametar a skalarni parametar a ima sledeće vrednosti: – 0,15 i 0,50. Uslovi asimptotske stabilnosti, nezavisni od kašnjenja, su dobijeni u funkciji parametra $\wp$ i predstavljeni su u *tabeli* 7.1. Za $Q = I_2$, *Teorema* 7.3 daje rezultate koji odgovaraju granici stabilnosti, dok *Teorema* 7.2 daje rezultate koji su veoma blizu granici stabilnosti. Prema tome, izvedeni rezultati su sasvim precizni.

Tabela 7.1 Uslovi stabilnosti

Kriterijum	Parametar a	
	– 0,15	+ 0,50
Teorema 7.2	$\lvert\wp\rvert < 2,09$	$\lvert\wp\rvert < 1,50$
Teorema 7.3	$\lvert\wp\rvert < 2,11$	$\lvert\wp\rvert < 1,51$
Granica stabilnosti	$\lvert\wp\rvert = 2,11$	$\lvert\wp\rvert = 1,51$

Literatura

Amir–Moez, A., “Extreme Properties of a Hermitian Transformations and Singular Values of Sum and Product of Linear Transformations”, *Duke Math. J.*, Vol. 23, (1956) 463–476.

Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, “Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory”, *SIAM*, Philadelphia, PA, 1994.

Chen, J., H. A. Latchman, “Asymptotic Stability Independent of Delays: Simple Necessary and Sufficient Conditions”, *Proceedings of American Control Conference*, Baltimore (USA), (1994) 1027–1031.

Chen, J., G. Gu, C. N. Nett, “A New Method for Computing Delay Margins for Stability of Linear Delay Systems”, *Proceedings of 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, Florida (USA), (1994) 433–437.

Chiasson, J., “A Method for Computing the Interval of Delay Values for Which a Differential–Delay System is Stable”, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 33, (1988) 1176–1178.

Fridman, E., U. Shaked, “An LMI Approach to Stability of Discrete Delay Systems”, *Proceedings of European Control Conference*, Cambridge, (2003).

Fridman, E., U. Shaked, “Delay–Dependent H_∞ Control of Uncertain Discrete Delay Systems”, *European Journal of Control*, Vol. 11, (2005.a) 29–37.

Fridman, E., U. Shaked, “Stability and Guaranteed Cost Control of Uncertain Discrete Delay Systems”, *Int. J. Control*, Vol. 78, No. 4, (2005.b) 235–246

Fu, M., H. Li, S. I. Niculescu, “Robust Stability and Stabilization of Time–Delay Systems via Integral Quadratic Constraint Approach”, *Stability and Control of Time–Delay Systems* (L. Dugard, E. Verriest, Eds.), Springer–Verlag, London, (1998) 101–116.

Goubet–Bartholomeus, A., M. Dambrine, J. P. Richard, “Stability of Perturbed Systems with Time–Varying Delay”, *Systems and Control Letters*, Vol. 31, (1997) 155–163.

Kapila, V., W. M. Haddad, “Memoryless H_∞ Controllers for Discrete–Time Systems with Time Delay”, *Automatica*, 34 (9), (1998) 1141–1144.

Kim, J. H., E. T. Jeung, H. B. Park, “Robust Control for Parameter Uncertain Delay Systems in State and Control Input”, *Automatica*, 32 (9), (1996) 1337–1339.

Mahmoud, M. S., "Robust H_∞ Control of Discrete Systems with Uncertain Parameters and Unknown Delays", *Automatica*, Vol. 36, (2000.a) 627–635.

Mahmoud, M. S., "Linear Parameter–Varying Discrete Time–Delay Systems: Stability and 12–Gain Controllers", *Int. J. Control*, Vol. 73, No. 6, (2000.b) 481–494.

Meyer, C. D., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2001.

Mori, T., "Criteria for Asymptotic Stability of Linear Time Delay Systems", *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 30, (1985) 158–160.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara. "Delay–Independent Stability Criteria for Discrete–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr*., 27, No. 4, (1982.b) 946–966.

Niculescu, S., C. E. De Souza, J. Dion, L. Dugard, "Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Systems with State Delay: Single Delay Case", *IFAC Symp. Robust Control Design*, Rio de Janeiro (Brazil), (1994).

Song, S., J. Kim, C. Yim, H. Kim, "H_∞ Control of Discrete–Time Linear Systems with Time–Varying Delays in State", *Automatica*, Vol. 35, (1999) 1587–1591.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Stability Criteria of Linear Discrete Time Delay Systems: Lyapunov–Krasovskii Approach", *Proc. ICIEA*, Xian (China), May 25–27, (2009.a) 2497–2501.

VI STABILNOST U SMISLU LJAPUNOVA VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM: KRITERIJUMI KOJI UZIMAJU U OBZIR IZNOS ČISTO VREMENSKOG KAŠNJENJA

8. POTREBNI I DOVOLJNI USLOVI ASIMPTOTSKE STABILNOSTI ZAVISNI OD IZNOSA ČISTO VREMENSKOG KAŠNJENJA VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA

Većina uslova stabilnosti vremenski kontinualnih i diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, su dovoljni uslovi, nezavisni od čisto vremenskog kašnjenja. Samo mail broj radova daje potrebne i dovoljne uslove, lit. *Lee, Diant* (1981), *Boutayeb, Darouach* (2001), *Xu et al.* (2001.b), *Stojanović, Debeljković* (2005.d, 2008.a, 2008.c), *Stojanović* (2006), koji su zavisni od čisto vremenskog kašnjenja i uopšteno ti uslovi su manje konzervativni u odnosu na uslove nezavisne od čisto vremenskog kašnjenja.

Osnovna inspiracija u ovoj glavi se zasniva na radu *Lee, Diant* (1981) koji izučava problem potrebnih i dovoljnih uslova stabilnosti linearnih, vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Suprotno pomenutom radu, u ovoj glavi se razmatraju linearni, vremenski diskretni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem i prezentovaće se potrebni i dovoljni uslovi stabilnosti, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja.

Najpre će se razmatrati uslovi stabilnosti vremenski kontinualnih i diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

U radu *Lee, Diant* (1981) postoje greške u formulisanju određenih teorema za vremenski kontinualne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem, tako da se u ovoj glavi daje tačna formulacija u vidu potrebnih i dovoljnih uslova stabilnosti, zavisnih od čisto vremenskog kašnjenja. Izvedeni rezultati će biti prošireni na vremenski diskretne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Vremenski kontinualni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem

U ovom odeljku prezentuju se rezultati iz rada *Lee, Diant* (1981). Pokazaće se da postoje greške u formulisanju određenih teorema i daće se njihova korekcija.

Razmatra se klasa vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem opisana sledećom jednačinom:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\,\mathbf{x}(t) + A_1\,\mathbf{x}(t-\tau), \quad \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), \quad -\tau \le t < 0\,. \tag{8.1}$$

Teorema 8.1 Razmatra se sistem dat jed. (8.1). Ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P = P^* > 0$, tako da je:

$$P\big(A_0 + T(0)\big) + \big(A_0 + T(0)\big)^T P = -Q\,, \tag{8.2}$$

gde je $T(t)$ kontinualna i diferencijabilna matrična funkcija koja zadovoljava:

$$\dot{T}(t) = \begin{cases} \big(A_0 + T(0)\big)T(t), & 0 \le t \le \tau, \quad T(\tau) = A_1 \\ 0, & t > \tau \end{cases}, \tag{8.3}$$

tada je sistem, dat jed. (8.1), *asimptotski stabilan*, *Lee, Diant* (1981).

U radu *Lee, Diant* (1981) istaknuto je da je ključ u uspešnom formulisanju Ljapunovljeve funkcije koja odgovara sistemu, datom jed. (8.1), postojanje najmanje jednog rešenje $T(t)$ jed. (8.3) sa graničnim uslovom $T(\tau) = A_1$. Drugim rečima, zahteva se da nelinearna algebarska matrična jednačina:

$$e^{\left(A_0 + T(0)\right)\tau}\, T(0) = A_1\,, \tag{8.4}$$

ima *najmanje jedno* rešenje za $T(0)$.

Zaključak 8.1 Ako se uvede nova matrica:

$$R \triangleq A_1 + T(0) \tag{8.5}$$

tada uslov, dat jed. (8.2), postaje:

$$P\,R + R^* P = -Q\,, \tag{8.6}$$

što predstavlja dobro poznatu Ljapunovljevu jednačinu za sistem bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja.

Ovaj uslov će biti ispunjen ako i samo ako je R stabilna matrica, to jest ako važi:

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i\left(R\right) < 0 . \tag{8.7}$$

Ω_T i Ω_R označavaju skupove svih rešenja jed. (8.4) po $T\left(0\right)$ i jed. (8.6) po R, sledstveno, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Zaključak 8.2 Jednačina (8.4), izražena preko matrice R, se može napisati u drugačijoj formi na sledeći način:

$$R - A_0 - e^{-R\,\tau} A_1 = 0 , \tag{8.8}$$

odakle sledi:

$$\det\left(R - A_0 - e^{-R\,\tau} A_1\right) = 0 . \tag{8.9}$$

Zamenjujući matricu R skalarnom promenljivom s u jed. (8.9), karakteristična jednačina sistema, datog jed. (8.1), se dobija kao:

$$f\left(s\right) = \det\left(s\,I - A_0 - e^{-s\tau} A_1\right) = 0 . \tag{8.10}$$

Označimo sa:

$$\Sigma \triangleq \left\{ s \mid f\left(s\right) = 0 \right\} , \tag{8.11}$$

skup svih karakterističnih korena sistema, datog jed. (8.1).

Na osnovu *Teoreme* 8.1, asimptotska stabilnost sistema može se odrediti poznavanjem *samo jednog* ali *bilo kog* rešenja partikularne, nelinearne matrične jednačine.

Međutim, korišćenjem sledećih primera pokazaće se da je prethodna teorema netačna zato što ne uzima u obzir sva moguća rešenja jed. (8.2), *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Primer 8.1 Razmatra se sistem u formi:

$$\dot{\mathbf{x}}\left(t\right) = A_0\,\mathbf{x}\left(t\right) + A_1\,\mathbf{x}\left(t-1\right) . \tag{8.12}$$

Ispituje se stabilnost sistema, datog jed. (8.12), za $A_1 = -\,2e^{-1}$.

Za ovaj primer lako se pokazuje da jed. (8.4) ima beskonačan broj rešenja, koja se, korišćenjem *Lambert*–ove funkcije[3] $W_k(\cdot)$, mogu izraziti na sledeći način:

$$T(0)_k = W_k\left(-2e^{-2}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Za $k = 0, -1,\ 1$ i -2, rešenja po matrici $T(0)_k$ jed. (8.12) su: $-0,40637$, -2, $-3,40710 \pm j\,7,42371$ sledstveno. Druga rešenja (za $k = \pm 3, \pm 4, \ldots$) imaju realni deo manji od $-3,40710$. Za $k = -1$ sledi:

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left(R_{-1}\right) = \operatorname{Re}\lambda_i\left(A_1 + T(0)_{-1}\right) = \operatorname{Re}\lambda_i(1-2) = -1 < 0,$$

prema tome za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P = P^* > 0$, tako da je zadovoljena jed. (8.2). Prema tome, u radu *Lee, Diant* (1981) dat je netačan zaključak da je sistem, dat jed. (8.12), asimptotski stabilan.

Sa druge strane, za $k = 0$ sledi:

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left(R_0\right) = \operatorname{Re}\lambda_i\left(A_1 + T(0)_0\right) = \operatorname{Re}\lambda_i(1-0,40637) = 0,593624 > 0,$$

prema tome, za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ ne postoji matrica $P = P^* > 0$, tako da je zadovoljena jed. (8.2). Sledi da sistem, dat jed. (8.12), nije asimptotski stabilan, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Zbog potrebe za korekcijom rezultata, prezentuju se nove formulacije *Teoreme* 8.1.

Teorema 8.2 Pretpostavlja se da postoji (postoje) rešenje (rešenja) $T(0) \in \Omega_T$ jed. (8.4). Tada je sistem, dat jed. (8.1), *asimptotski stabilan* ako i samo ako važi jedan od sledeća dva uslova:

i) za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P = P^* > 0$ tako da važi jed. (8.2) za sva rešenja $T(0) \in \Omega_T$ jed. (8.4),

ii) uslov, dat nejed. (8.7), važi za sva rešenja $R = A_1 + T(0) \in \Omega_R$ jed. (8.8), *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.b).

[3] *Lambert*–ova funkcija $W_k(\cdot), k \in \mathbb{Z}$ je definisana kao inverzna funkcija od $w \to we^w$. Ako jednačina $we^w = z$ ima beskonačan broj rešenja w za svaku (nenultu) vrednost od z, $W_k(\cdot)$ ima beskonačan broj grana k.

Zaključak 8.3 Iskaz *Teoreme* 8.2 zahteva da je uslov, dat jed. (8.2), ispunjen za sva rešenja $T(0) \in \Omega_T$ jed. (8.4). Drugim rečima, zahteva se da uslov, dat nejed. (8.7), važi za sva rešenja R jed. (8.8) (posebno za $R = R_{\max}$, gde je matrica $R_m \in \Omega_R$ maksimalni solvent jed. (8.8) koji sadrži sopstvenu vrednost sa maksimalnim realnim delom $\lambda_m \in \Sigma$: $\operatorname{Re}\lambda_m = \max\limits_{s\in\Sigma} \operatorname{Re} s$). Prema tome, iz nejed. (8.7) sledi uslov $\operatorname{Re}\lambda_i(R_m) < 0$, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Na osnovu *Zaključka* 8.3*,* moguće je preformulisati *Teoremu* 8.2 na sledeći način.

Teorema 8.3 Pretpostavlja se da postoji maksimalni solvent R_m jed. (8.8). Tada je sistem, dat jed. (8.1), *asimptotski stabilan* ako i samo ako važi jedan od sledeća dva ekvivalentna uslova:

i) za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P = P^* > 0$ tako da važi jed. (8.6) za rešenje $R = R_{\mathrm{m}}$ jed. (8.8),

ii) $\operatorname{Re}\lambda_i(R_{\mathrm{m}}) < 0$, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.b).

Teorema 8.3, slično *Teoremi* 8.2, koristi samo jedno rešenje jed. (8.8) (maksimalni solvent) ako ono postoji.

U sledećem odeljku proširuju se rezultati *Teoreme* 8.2 i *Teoreme* 8.3 na vremenski diskretne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem. Izvešće se kriterijumi, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja, korišćenjem Ljapunovljeve direktne metode, a koji se isključivo zasnivaju na maksimalnim i dominantnim solventima partikularne, polinomne matrične jednačine.

Vremenski diskretni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem

Linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, može se predstaviti vektorskom diferencnom jednačinom stanja:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h), \tag{8.13}$$

sa pridruženom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\theta) = \boldsymbol{\psi}(\theta), \quad \theta \in \{-h, -h+1, \ldots, 0\}. \tag{8.14}$$

Jednačina (8.13) se naziva homogenom ili jednačinom stanja u slobodnom radnom režimu. $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ je vektor stanja, $A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija, a čisto vremensko kašnjenje je izraženo celim brojevima $h \in \mathbb{Z}^+$.

Sistem, dat jed. (8.13), može se iskazati sledećim modelom bez čisto vremenskog kašnjenja:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}_{eq}(k+1) = A_{eq}\,\mathbf{x}_{eq}(k), \qquad N \triangleq n \times (h+1) \\ \mathbf{x}_{eq}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k-h) & \mathbf{x}^T(k-h+1) & \ldots & \mathbf{x}^T(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N , \\ A_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n \\ A_1 & 0 & \cdots & A_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \end{gathered} \tag{8.15}$$

Gorecki et al. (1989), *Malek–Zavarei*, *Jamshidi* (1987), *Mori et al*. (1982.b).

Sistem, dat jed. (8.15), naziva se *uvećani* sistem a A_{eq} matrica uvećanog sistema. Karakteristični polinom sistema, datog jed. (8.13), je:

$$\begin{aligned} & f(\lambda) \triangleq \det M(\lambda) = \sum_{j=0}^{n(h+1)} a_j\,\lambda^j, \quad a_j \in \mathbb{R} \\ & M(\lambda) = I_n\,\lambda^{h+1} - A_0\,\lambda^h - A_1 \end{aligned} . \tag{8.16}$$

Označimo sa:

$$\Omega \triangleq \left\{ \lambda \mid f(\lambda) = 0 \right\} = \lambda\left(A_{eq}\right), \tag{8.17}$$

skup svih karakterističnih korena sistema, datog jed. (8.1). Broj ovih korenova je $n(h+1)$. Koren λ_m skupa Ω sa maksimalnim modulom:

$$\lambda_m \in \Omega: \left|\lambda_m\right| = \max\left|\lambda\left(A_{eq}\right)\right|, \tag{8.18}$$

se naziva *maksimalni koren* (sopstvena vrednost). Ako se skalarna promenljiva λ u karakterističnom polinomu zameni matricom $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$, dobijaju se sledeća dva matrična polinoma:

$$M(X) = X^{h+1} - A_0\,X^h - A_1, \tag{8.19}$$

$$F(X) = X^{h+1} - X^h A_0 - A_1. \tag{8.20}$$

Očigledno je da je $F(\lambda) = M(\lambda)$. Za matrični polinom $M(X)$, matrica A_{eq} proširenog sistema predstavlja *blok matricu pratilju*, *Dennis et al.* (1976).

Matrica $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je *desni solvent* matričnog polinoma $M(X)$ ako je:

$$M(S) = 0, \tag{8.21}$$

Dennis et al. (1976).

Ako je:

$$F(R) = 0, \tag{8.22}$$

tada je $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *levi solvent* matričnog polinoma $M(X)$, *Dennis et al.* (1976).

Oznaka S se koristi za označavanje desnog solventa, a R za označavanje levog solventa matričnog polinoma $M(X)$. U prezentovanom radu većina rezultata se zasniva na levim solvenatima matričnog polinoma $M(X)$. Nasuprot tome, u postojećoj literaturi se uglavnom izučavaju desni solventi matričnog polinoma $M(X)$. Pomenuto razilaženje se može prevazići sledećom lemom.

Lema 8.1 Konjugovano transponovana vrednost levog solventa matričnog polinoma $M(X)$ je, istovremeno, desni solvent sledećeg matričnog polinoma:

$$M_T(X) = X^{h+1} - A_0^T X^h - A_1^T, \tag{8.23}$$

Stojanović, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Zaključak 8.4 Na osnovu *Leme* 8.1, sve karakteristike levih solvenata matričnog polinoma $M(X)$ mogu se dobiti analizom konjugovano transponovane vrednosti desnih solvenata matričnog polinoma $M_T(X)$, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Prezentovana faktorizacija matrice $M(\lambda)$ služi za bolje razumevanje veze između sopstvenih vrednosti levih i desnih solvenata i korenova sistema.

Lema 8.2 Matrica $M(\lambda)$ se može predstaviti u faktorizovanom obliku na sledeći način:

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \left(\lambda^h I_n + (S - A_0) \sum_{i=1}^{h} \lambda^{h-i} S^{i-1} \right)(\lambda I_n - S) \\ &= (\lambda I_n - R)\left(\lambda^h I_n + \sum_{i=1}^{h} \lambda^{h-i} R^{i-1} (R - A_0) \right) \end{aligned}, \tag{8.24}$$

Stojanović, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Zaključak 8.5 Iz jed. (8.16) i jed. (8.24) sledi da je $f(S) = f(R) = 0$, to jest, karakteristični polinom $f(\lambda)$ je *anhilirajući polinom* za desne i leve solvente matričnog polinoma $M(X)$. Prema tome, važi $\lambda(S) \subset \Omega$ i $\lambda(R) \subset \Omega$, *Stojanović, Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori matrice imaju presudan uticaje na postojanje, brojnost i karakterizaciju solvenata matrične jednačine (8.21), *Dennis et al.* (1976), *Pereira* (2003).

Definicija 8.1 $M(\lambda)$ je matrični polinom po λ. Ako $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tako da je $\det(M(\lambda_i)) = 0$, tada je λ_i *latentni koren* ili *sopstvena vrednost* matričnog polinoma $M(\lambda)$. Ako nenulti vektor $\mathbf{v}_i \in \mathbb{C}^n$ tako da je:

$$M(\lambda_i)\mathbf{v}_i = 0, \tag{8.25}$$

tada je $\mathbf{v}_i$ (desni) *latentni vektor* ili (desni) *sopstveni vektor* matričnog polinoma $M(\lambda)$, koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ_i, *Dennis et al.* (1976), *Pereira* (2003).

Sopstvene vrednosti matrice $M(\lambda)$ se podudaraju sa karakterističnim korenima sistema, to jest sopstvenim vrednostima njegove blok matrice pratilje A_{eq}, *Dennis et al.* (1976). Njihov broj je $n(h+1)$.

S obzirom da važi $F^*(\lambda) = M_T(\lambda^*)$, nije teško pokazati da matrice $M(\lambda)$ i $M_T(\lambda)$ imaju isti spektar.

U lit. *Dennis et al.* (1976, 1978), *Lancaster, Tismenetsky* (1985), *Kim* (2000), *Pereira* (2003), su izvedeni dovoljni uslovi postojanja, brojnosti i karakterizacije desnih solvenata matričnog polinoma $M(X)$. Pokazano je da broj solvenata može biti *nula*, *konačan* ili *beskonačan*.

Za ispitivanje stabilnosti sistema, datog jed. (8.13), upotrebljivi su samo maksimalni solventi, čiji spektar sadrži maksimalnu sopstvena vrednost λ_m.

Specijalan slučaj maksimalnog solventa je *dominantni* solvent, *Dennis et al.* (1978), *Kim* (2000), koji se, za razliku od maksimalnog solventa, može izračunati na jednostavan način.

Definicija 8.2 Svaki solvent S_m matričnog polinoma $M(X)$, čiji spektar $\sigma(S_m)$ sadrži maksimalnu sopstvenu vrednost λ_m skupa Ω je *maksimalni solvent*.

Definicija 8.3 Matrica A dominira matricom B ako su sve sopstvene vrednosti matrice A veće, po apsolutnoj vrednosti, u odnosu na sopstvene vrednosti matrice B. U posebnom slučaju, ako solvent S_1 matričnog polinoma $M(X)$ dominira solventima $S_2,\ldots,S_l$, tada je S_1 *dominantni solvent* (potrebno je uočiti da dominantni solvent ne može biti singularan), *Dennis et al.* (1978), *Kim* (2000).

Zaključak 8.6 Broj maksimalnih solvenata može biti veći od jedan. Dominantni solvent je istovremeno maksimalni solvent, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Dominantni solvent S_1 matričnog polinoma $M(X)$, pod određenim uslovima može se odrediti pomoću *Traub*–ove, *Dennis et al.* (1978), i *Bernoulli*–eve *iteracije, Dennis et al.* (1978), *Kim* (2000).

Uslovi stabilnosti

U nastavku se daje poboljšanje postojećih dovoljnih uslova koje se odnose na nesingularnost blok *Vandermonde*–ove matrice i postojanje dominantnog solventa.

Sledeća lema daje dovoljan uslov regularnosti blok *Vandermonde*–ove matrice i ima slabiju hipotezu u odnosu na *Teorema* 6.1 datu u radu *Dennis et al*. (1976). Ova lema predstavlja generalizaciju odgovarajućih rezultata prezentovanih u radu *Kim* (2000).

Lema 8.3 Ako su $S_1,\ldots,S_{h+1}$ solventi matričnog polinoma $M(X)$, gde je $\sigma(S_1)\cap\ldots\cap\sigma(S_{h+1})=\varnothing$, tada je matrica $V(S_1,\ldots,S_{h+1})$ nesingularna.

U radu *Dennis et al*. (1978) pokazano je sledećom lemom da je uslov nesingularnosti matrice $V(S_2,\ldots,S_{h+1})$ suvišan, s obzirom da sledi direktno iz nesingularnosti matrice $V(S_1,\ldots,S_{h+1})$.

Lema 8.4 Ako je blok *Vandermonde*–ova matrica $V(S_1,\ldots,S_{h+1})$ nesingularna, tada je matrica $V(S_2,\ldots,S_{h+1})$ takođe nesingularna.

Kombinovanjem *Leme* 8.3 i *Leme* 8.4 mogu se modifikovati postojeći uslovi konvergencije *Traub*–ovog i *Bernoulli*–evog algoritma prezentovanih u radu *Dennis et al*. (1978). Ovi uslovi imaju slabiju hipotezu u odnosu na uslove date u radu *Dennis et al*. (1978).

Lema 8.5 Ako je $M(X)$ matrični polinom stepena $(h+1)$ tako da:

i) ima solvente $S_1, \ldots, S_{h+1}$,

ii) S_1 je dominantni solvent,

iii) $\sigma(S_1) \cap \ldots \cap \sigma(S_{h+1}) = \varnothing$,

tada *Traub*–ov i *Bernoulli*–ev algoritam konvergiraju, *Dennis et al*. (1978).

Istovetno definiciji desnih solvenata S_m i S_1 matričnog polinoma $M(X)$, mogu se definisati maksimalni levi solvent, R_m, i dominantni levi solvent, R_1, matričnog polinoma $M(X)$. Levi solventi matričnog polinoma $M(X)$ se više koriste u teoremama koje slede. Pomoću *Leme* 8.1, oni se mogu odrediti pomoću odgovarajućih desnih solvenata matričnog polinoma $M_T(X)$. U opštem slučaju, sve što je pomenuto o postojanju, brojnosti i karakterizaciji desnih solvenata matričnog polinoma $M(X)$, važi i za desne solvente matričnog polinoma $M_T(X)$, kao i za leve solvente matričnog polinoma $M(X)$.

Potrebni i dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti linearnog, vremenski diskretnog sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, datog jed. (8.13), su kao što sledi, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Teorema 8.4 Pretpostavlja se da postoji najmanje jedan maksimalni levi solvent matričnog polinoma $M(X)$ i sa R_m se označava jedan od njih. Tada je linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (8.13), *asimptotski stabilan* ako i samo ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji *Hermitska* matrica $P = P^* > 0$ tako da:

$$R_m^* P R_m - P = -Q, \tag{8.26}$$

Stojanović, *Debeljković* (2008.a, 2009.b).

Posledica 8.1 Pretpostavlja se da postoji najmanje jedan maksimalni solvent matričnog polinoma $M(X)$ i sa R_m se označava jedan od njih. Tada je sistem, dat jed. (8.13), *asimptotski stabilan* ako i samo ako $\rho(R_m)<1$, *Stojanović, Debeljković* (2008.a, 2009.b).

Zaključak 8.7 *Posledica* 8.1 se može dokazati na sledeći način. Iz *Zaključka* 8.5 sledi $\sigma(R)\subset\Omega=\lambda(A_{eq})$ a na osnovu osobina maksimalnog solventa R_m sledi $\rho(R_m)=\rho(A_{eq})$. Prema tome, ako je maksimalni solvent diskretno stabilan tada je A_{eq} diskretno stabilna matrica i obratno, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Posledica 8.2 Pretpostavlja se da postoji dominantni levi solvent R_1 matričnog polinoma $M(X)$. Tada je sistem, dat jed. (8.13), *asimptotski stabilan* ako i samo ako $\rho(R_1)<1$, *Stojanović, Debeljković* (2008.a, 2009.b).

Zaključak 8.8 U slučaju kada se dominantni solvent R_1 može izvesti pomoću *Traub*–ovog ili *Bernoulli*–evog algoritma, *Posledica* 8.2 predstavlja prilično jednostavnu metodu. Ako pomenuti algoritmi ne konvergiraju, ali postoji najmanje jedan maksimalni solvent R_m, tada bi trebalo da se koristi *Posledica* 8.1. Maksimalni solventi se mogu naći, na primer, korišćenjem koncepta sopstvenih parova, *Pereira* (2003). Ako ne postoji maksimalni solvent R_m, tada se prezentovani potrebni i dovoljni uslovi *nemogu koristiti* za ispitivanje stabilnosti sistema, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Zaključak 8.9 U sistemima sa velikim iznosom čisto vremenskog kašnjenja važi:

$$\dim(R_1)=\dim(R_m)=\dim(A_i)=n\ll\dim(A_{eq})=n(h+1). \tag{8.27}$$

Na primer, ako je čisto vremensko kašnjenje $h=100$, i red matrice sistema je $n=2$, tada je: $R_1, R_m\in\mathbb{C}^{2\times2}$ i $A_{eq}\in\mathbb{C}^{202\times202}$. Za ispitivanje stabilnosti pomoću sopstvene vrednosti matrice A_{eq}, potrebno je odrediti 202 sopstvene vrednosti, što nije numerički jednostavno. Sa druge strane, ako se dominantni solvent može izračunati pomoću *Traub*–ovog ili *Bernoulli*–evog algoritma, *Posledica* 8.2 zahteva relativno mali broj sabiranja, oduzimanja, množenja i inverzija matrice formata (2×2).

Prema tome, u slučaju sistema sa velikim iznosom čisto vremenskog kašnjenja, primenjujući *Posledicu* 8.2, očekuje se manji broj izračunavanja u poređenju sa uobičajenim postupcima ispitivanja stabilnosti pomoću sopstvene vrednosti matrice pratilje A_{eq}, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Primer 8.2 Razmatra se linearni, vremenski diskretni sistem, dat jed. (8.1), sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & -0,15 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,25 \end{pmatrix}, \quad h = 1.$$

Primenjujući koncept sopstvenih parova, *Pereira* (2003), levi solventi R_i matričnog polinoma $M(X)$ se izračunavaju pomoću desnih solvenata S_i matričnog polinoma $M_T(X)$:

$$\begin{array}{ll} R_1 = S_1^* = \begin{pmatrix} 3,548 & 4,759 \\ -2,408 & -3,391 \end{pmatrix}, & R_2 = S_2^* = \begin{pmatrix} -1,812 & 2,490 \\ -1,171 & 1,604 \end{pmatrix} \\ R_3 = S_3^* = \begin{pmatrix} 0,453 & 0,576 \\ 0,342 & 0,326 \end{pmatrix}, & R_4 = S_4^* = \begin{pmatrix} 0,402 & 0,620 \\ 0,388 & 0,287 \end{pmatrix} \\ R_5 = S_5^* = \begin{pmatrix} -0,345 & -0,502 \\ -0,191 & -0,394 \end{pmatrix}, & R_6 = S_6^* = \begin{pmatrix} -0,386 & -0,417 \\ -0,167 & -0,443 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Solventi R_1, R_3 i R_4 su maksimalni solventi, s obzirom da sadrže sopstvenu vrednost $\lambda_m = 0,838 \in \Omega$.

Usvajajući $R_m = R_1$ i $Q = I_2$ u Ljapunovljevoj jednačini (8.26) sledi $P > 0$ i prema tome razmatrani sistem je asimptotski stabilan.

Istovetno, ako se usvoji maksimalni solvent $R_m = R_2$, na osnovu *Posledice* 8.1 sledi $\rho(R_m) = 0,838 < 1$ i prema tome razmatrani sistem je asimptotski stabilan, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Primer 8.3 Razmatra se linearni, vremenski diskretni sistem, dat jed. (8.1), sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = 1.$$

Levi solventi R_i matričnog polinoma $M(X)$ su:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

S obzirom da $\lambda(R_1) = \{-1, 1\}$, $\lambda(R_2) = \{-1, 0\}$ i $\lambda(R_3) = \{1, 0\}$ ne postoji dominantni solvent, ali sva tri solventa su maksimalni solventi. Sa obzirom da je $\rho(R_i) = 1$, $1 \le i \le 3$, na osnovu *Posledice* 8.1, sledi da sistem nije asimptotski stabilan, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Primer 8.4 Razmatra se linearni, vremenski diskretni sistem, dat jed. (8.1), sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 7/10 & -1/2 \\ 1/2 & 17/10 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1/75 & 1/3 \\ -1/3 & -49/75 \end{pmatrix}.$$

Za $h = 1$, postoje dva leva solventa matrične polinomne jednačine (8.22) $\left(R^2 - R A_0 - A_1 = 0\right)$:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 19/30 & -1/6 \\ 1/6 & 29/30 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1/15 & -1/3 \\ 1/3 & 11/15 \end{pmatrix}.$$

S obzirom da $\lambda(R_1) = \left\{\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$, $\lambda(R_2) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right\}$, dominantni solvent je R_1.

Nakon $(4+3)$ iteracija *Traub*–ovog algoritma i 17 iteracija *Bernoulli*–evog algoritma, dominantni solvent se može naći sa tačnošću 10^{-4}. S obzirom da je $\rho(R_1) = \frac{4}{5} < 1$, na osnovu *Posledice* 8.2, sledi da je razmatrani sistem asimptotski stabilan.

Za $h = 20$, primenjujući *Bernoulli*–ev ili *Traub*–ov algoritam za izračunavanje dominantnog solventa R_1 matrične polinomne jednačine (8.22) $\left(R^{21} - R^{20} A_0 - A_1 = 0\right)$, dobija se:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0,6034 & -0,5868 \\ 0,5868 & 1,7769 \end{pmatrix}.$$

S obzirom da je $\rho(R_1) = 1,1902 > 1$ na osnovu *Posledice* 8.1, sledi da sistem nije asimptotski stabilan.

Proverava se:

$$\lambda_{\max}\left\{A_{eq}\right\} = \lambda_{\max}\left(\begin{array}{c|c} 0_{40\times 2} & I_{40\times 40} \\ \hline A_0 & 0_{2\times 2}\ \ldots\ 0_{2\times 2}\ A_1 \end{array}\right) = 1{,}1902 > 1,$$

Stojanović, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Primer 8.5 Razmatra se linearni, vremenski diskretni sistem, dat jed. (8.1), sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 17/6 & -11/6 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -5/3 & 17/12 \\ -2/3 & 5/12 \end{pmatrix}, \quad h = 1.$$

Sopstvene vrednosti matrica $M(X)$ su date sa $\{0{,}5,\ 0{,}5,\ 0{,}5,\ 2\} = \Omega$. Postoji samo jedan solvent matrične polinomne jednačine (8.22):

$$R = \begin{pmatrix} 12/7 & 1/7 \\ -4/7 & 16/7 \end{pmatrix},$$

gde je $\lambda(R) = \{0{,}5,\ 0{,}5\}$. Može se pokazati da ne postoji dominantni i maksimalni solvent jednačine (8.22), tako da se prezentovani uslovi stabilnosti ne mogu primeniti. Ako se zanemari pretpostavka o postojanju maksimalnog solventa R_m, primenjujući *Posledicu* 8.1, na osnovu $\rho(R) = 0{,}5 < 1$, dobiće se pogrešan zaključak da je sistem asimptotski stabilan. Međutim, sistem je nestabilan s obzirom da ima karakteristični koren $\lambda_m = 2 > 1$, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Literatura

Boutayeb, M., M. Darouach, "Observers for Discrete–Time Systems with Multiple Delays", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 46 (5), (2001) 746–750.

Dennis, J. E., J. F. Traub, R. P. Weber, "The Algebraic Theory of Matrix Polynomials", *SIAM J. Numer. Anal.*, 13 (6), (1976) 831–845.

Dennis, J. E., J. F. Traub, R. P. Weber, "Algorithms for Solvents of Matrix Polynomials", *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 (3), (1978) 523–533.

Gantmacher, F., *The Theory of Matrices*, *I*, Chelsea, New York, 1960.

Gorecki, H., S. Fuksa, P. Grabovski, A. Korytowski, *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, John Wiley & Sons, Warszawa, 1989.

Kim, H., *Numerical Methods for Solving a Quadratic Matrix Equation*, Ph. D. dissertation, University of Manchester, Faculty of Science and Engineering, 2000.

Lancaster, P., M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, 2nd Edition, Academic press, New York, 1985.

Lee, T. N., S. Diant, "Stability of Time–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 26 (4), (1981) 951–953.

Malek–Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time–delay Systems*, North–Holland Systems and Control Series, Vol. 9, Amsterdam, (1987).

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Delay–Independent Stability Criteria for Discrete–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 27 (4), (1982.b) 946–966.

Pereira, E., "On Solvents of Matrix Polynomials", *Applied numerical mathematics*, 47, (2003) 197–208.

Stojanović, S. B., *Analysis of Dynamic Behavior of Discrete Time–delay Systems on Finite and Infinite Time Interval*, Ph. D. Thesis, University of Belgrade, Serbia, 2006.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems" *Proc. of 17th IFAC World Congress*, Seoul (Korea), July 06–10, (2008.a) 2613–2618.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Delay–Dependent Stability of Linear Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Series B: Applications and Algorithms, Vol. 16, No.6, (2009.b) 887–900.

Trinh, H., M. Aldeen, "A Memoryless State Observer for Discrete Time–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 42 (11), (1997.b) 1572–1577.

Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Quadratic Stability and Stabilization of Uncertain Linear Discrete–Time Systems with State Delay", *Systems Control Lett.*, 43, (2001.b) 77–84.

VII STABILNOST U SMISLU LJAPUNOVA PERTURBOVANIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

9. STABILNOST PERTURBOVANIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

Greške koje se čine prilikom modelovanja sistema često puta dovode do znatnog odstupanja stvarnog od željenog ponašanja objekta u sistemu automatskog upravljanja. Na grešku modelovanja njačešće utiču varijacije u samom sistemu, nastale kao posledica promene radnih uslova i slično. Svi faktori koji dovode do greške modelovanja se mogu obuhvatiti pojmom perturbacije parametara modela i u zavisnosti od načina njihovog tretmana postoji više teorijskih pristupa problemu određivanja njihovog uticaja na ponašanje sistema (teorija osetljivosti, stohastički tretman, pouzdanost, adaptibilnost, robusnost i tako talje).

Jedan od najznačajnijih tretmana u proceni valjanosti modelovanja sistema jeste robusnost sistema, koja se definiše u odnosu na neko njegovo izabrano svojstvo. Robusnost sistema u smislu određenog svojstva ∂ u odnosu na dati skup Δ je njegova sposobnost da održi to svojstvo na označenom skupu Δ. To znači da se teorija robusnosti može primeniti na razne osobine sistema, bitne za njegovo ispravno funkcionisanje i kvalitetno dinamičko ponašanje, kao što je stabilnost, upravljivost, osmotrivost, adaptibilnost i tako dalje. Dakle, teorija robusnosti bavi se problemom očuvanja određenih osobina sistema u prisustvu velikih perturbacija u njegovom modelu, kao i analizom mogućnosti kompenzacija razlika između matematičkog modela i realnog objekta. Robusnost određene osobine sistema se mora garantovati sa sigurnošću, a ne sa nekom verovatnoćom, kao što je to slučaj kod stohastičkog tretmana.

Robusnost stabilnosti (robusna stabilnost) predstavlja sposobnost sistema da očuva stabilnost čak i u prisustvu raznih perturbacija parametara. Shodno datom tipu perturbacije (jake, slabe, strukturne, nestrukturne, …), postoje različite metode za procenu robusne stabilnosti. Što se tiče sistema sa kašnjenjem, perturbacije za ovu klasu sistema se mogu iskazati na dva načina: a) pomoću vremenskih promena matrica sistema, koje mogu biti strukturno ograničene (po svim parametrima modela ponaosob) ili ograničene po intenzitetu (normi), i b) kao vremenske promene u kašnjenju sistema (intervalne promene). Moguća je razmatrati istovremeno uticaj oba pomenuta tipa perturbacije.

Analiza robusne stabilnosti perturbovanih, vremenski diskretnih sistema je istraživana u sledećoj lit. *Kolla* (1989), *Rachid* (1989, 1990), *Yaz* (1989), *Chou* (1991), *Niu* (1992), *Lee* (1992), *Horng* (1993) i *Yedavalli* (1993).

U lit. *Jury* (1974) i *Bishop* (1975) prezentovano je nekoliko metoda za ispitivanje stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem sa neparametarskim perturbacijama. Dok su ove metode dosta lake za korišćenje u slučaju malog iznosa čisto vremenskog kašnjenja, poteškoće nastaju kada se povećava iznos čisto vremenskog kašnjenja. Glavni razlog leži u činjenici da se, u ovim metodama, broj sopstvenih vrednosti sistema povećava srazmerno n puta kašnjenju, gde je n red sistema.

U radu *Mori et al*. (1982.b), ovaj problem je prevaziđen prezentovanjem nekoliko kriterijuma stabilnosti, nezavisnih od čisto vremenskog kašnjenja, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Ovi kriterijumi su izraženi jednostavnim formama u smislu parametara postrojenja. Međutim, ovi dovoljni uslovi su konzervativniji i mogu se primeniti na sisteme bez perturbacija.

Rad *Trinh, Aldeen* (1995.a) prezentuje dovoljne uslove D–stabilnosti perturbovanih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Pokazano je da su ovi rezultati manje restriktivni u odnosu na rezultate u postojećoj literaturi.

U poslednje vreme, problemi robusne stabilnosti linearnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem privlače značajnu pažnju i izučavaju se u velikoj meri.

U lit. *Mohmoud, Shen et al.* (1991) i *Al–Muthairi* (1994), prezentovani su kriterijumi robusne stabilnosti, nezavisni od čisto vremenskog kašnjenja.

Sa druge strane, u lit. *Su, Huang* (1992) i *Niculescu et al.* (1994) su razvijeni kriterijumi robusne stabilnosti, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja, korišćenjem rešenja algebarske *Riccati*–eve jednačine ili Ljapunovljeve jednačine da bi se smanjio konzervatizam rezultata, nezavisnih od čisto vremenskog kašnjenja.

U radu *Li, De Souza* (1997) prezentovani su kriterijumi robusne stabilnosti, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja, sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem i neodređenostima pomoći LMI (linearnih matričnih nejednakosti) i ovi rezultati su manje konzervativni u odnosu na druge rezultate.

U ovoj glavi razmatra se asimptotska stabilnost linearnih, perturbovanih sistema sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem. Prezentovaće se nekoliko kriterijuma, koji su nezavisni od čisto vremenskog kašnjenja. Prvi kriterijum se zasniva na analizi vremenski promenljive perturbovane matrice ekvivalentnog sistema. Drugi kriterijum se zasniva na formalnoj dekompoziciji matrice na realan i imagionaran deo, korišćenjem principa poređenja, *Mori et al.* (1981).

Kriterijum prezentovan u radu *Trinh, Aldeen* (1995.a), će se generalizovati i koristiti kao treći uslov stabilnosti. Koristiće se za poređenje sa drugim kriterijuma prezentovanim u ovoj glavi, da bi se ocenila efikasnost prezentovanih rezultata. Prethodno pomenuti kriterijum se zasniva na direktnoj primeni predloženog postupka na karakteristični polinom uporednog sistema. U tom smislu potrebno je uočiti da je njegov izraz prilično jednostavan i pogodan za praktičnu upotrebu.

Označavanje. $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ označavaju skup realnih i kompleksnih brojeva, sledstveno. Imaginarna jedinica je označena sa j, to jest, $j^2 \triangleq -1$ a $|\alpha|$ označava apsolutnu vrednost skalara α. Neka je $\|\mathbf{x}\|_{(\cdot)}$ norma nekog vektora (gde je $\cdot = 1, 2, \ldots, \infty$), a $\|(\cdot)\|$ je matrična norma tog vektora. Ovde će se koristiti oznake $\|\mathbf{x}\|_2 \triangleq \left(\mathbf{x}^T\mathbf{x}\right)^{1/2}$ i $\|(\cdot)\|_2 = \lambda_{\max}^{1/2}\left(A^*A\right)$. $\lambda_i(\cdot)$ označava sopstvenu vrednost matrice $(\cdot)$, a $\mathrm{Re}\lambda_i(\cdot)$ i $\mathrm{Im}\lambda_i(\cdot)$ su realni i imagionarni delovi, sledstveno. Prethodno navedeni indeksi * i ^{T} označavaju konjugovano–transponovanu i transponovanu matricu, sledstveno. Apsolutna vrednost matrice A označena je sa $|A|$, dok $\rho(A)$ označava spektralni radijus matrice A. Matrica A je nenegativna kada važi da je $a_{ij} \geq 0$ i to se označava sa $A \geq 0$. Uopšteno, $A \geq B$ znači da je $a_{ij} \geq b_{ij}$. Istovetno, matrica A je pozitivna kada je $a_{ij} > 0$ i to se označava sa $A > 0$.

Razmatra se linearni, perturbovani, vremenski diskretni sistem sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem:

$$\mathbf{x}(k+1)=A_0(k)\mathbf{x}(k)+\sum_{j=1}^{N}A_j(k)\mathbf{x}(k-h_j), \tag{9.1}$$

gde su $0=h_0\leq h_1\leq h_2\leq\ldots\leq h_N$ celi brojevi koji predstavljaju čista vremenska kašnjenja sistema.

Perturbovane matrice, zavisne od vremena, $A_j(k)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $j=0,1,2,\ldots N$ su nepoznate, ali su poznata maksimalna odstupanja njihovih elemenata $\max\limits_k\left|a_{il}^j(k)\right|\leq\alpha_{il}^j$. U poređenju sa radom *Trinh, Aldeen* (1995.a), gde je samo osnovna matrica $A_1(k)$ vremenski promenljiva, pretpostavlja se da su sve matrice $A_j(k)$, $0\leq j\leq 1$, vremenski promenljive.

Ako se definišu matrice U_j, $j=0,1,2,...,N$ na sledeći način:

$$\alpha_j\triangleq\max_{i,l}\alpha_{il}^j,\quad u_{il}^j\triangleq\frac{\alpha_{il}^j}{\alpha_j},\quad 0\leq u_{il}^j\leq 1,\quad U_j=\left(u_{il}^j\right), \tag{9.2}$$

tada je:

$$\left|A_j(k)\right|\leq\alpha_j U_j,\quad j=0,1,2,...,N,\quad \forall k\,. \tag{9.3}$$

Lema 9.1 Neka je:

$$G(z)\triangleq(zI_n-A)^{-1}, \tag{9.4}$$

tada je:

$$\left|G(z)z^{-h}\right|\leq\sum_{k=0}^{\infty}\left|G(k)\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\left|A_k\right|\triangleq L,\quad |z|\geq 1\,, \tag{9.5}$$

$G(k)$ je niz matrica impulsnog odziva od $G(z)$ pri čemu je $G(0)=0$, *Trinh, Aldeen* (1995.a).

Lema 9.2 Za bilo koju $(n\times n)$ kvadratnu matricu X, važi sledeće:

$$\rho(X)<1\quad\Rightarrow\quad\det(I_n-X)\neq 0\,, \tag{9.6}$$

Trinh, *Aldeen* (1995.a).

Lema 9.3 Za bilo koje kvadratne matrice $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ i $Y\in\mathbb{R}^{n\times n}$, važi sledeće:

$$|X|\leq|Y|\quad\Rightarrow\quad\rho(X)\leq\rho(|X|)\leq\rho(Y), \tag{9.7}$$

Meyer (2001).

Lema 9.4 Linearni, vremenski invarijantni, diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{N} A_j\,\mathbf{x}\left(k-h_j\right), \tag{9.8}$$

je *asimptotski stabilan* ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\rho(A_0) < 1, \quad \rho\left(L\sum_{j=1}^{N}\left|A_j\right|\right) < 1, \quad L = \sum_{k=0}^{\infty}\left|G(k)\right| = \sum_{j=1}^{N}\left|A_0^k\right|, \tag{9.9}$$

Stojanović, *Debeljković* (2004.d, 2004.h).

Lema 9.5 Linearni, vremenski invarijantni, diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (9.8), je *asimptotski stabilan* ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\sum_{j=0}^{N}\rho\left(H_j\right) < 1, \quad H_j = \frac{1}{2}\left(A_j + A_j^T\right), \quad 0 \le j \le N, \tag{9.10}$$

Stojanović, *Debeljković* (2004.d, 2004.h).

Lema 9.6 Linearni, vremenski invarijantni, diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (9.8), je *asimptotski stabilan* ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\sum_{j=0}^{N}\left\|A_j\right\| < 1. \tag{9.11}$$

Stojanović, *Debeljković* (2004.d, 2004.h).

Teorema 9.1 Sistem, dat jed. (9.1), je *asimptotski stabilan* ako je:

$$\rho\left(\hat{A}_{eq}\right) < 1, \tag{9.12}$$

gde je:

$$\hat{A}_{eq} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_0\hat{U}_0 & \hat{\alpha}_1\hat{U}_1 & \dots & \hat{\alpha}_{h_N-1}\hat{U}_{h_N-1} & \hat{\alpha}_{h_N}\hat{U}_{h_N} \\ I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.13}$$

$$\hat{\alpha}_i\hat{U}_i = \begin{cases} \hat{\alpha}_j\hat{U}_j, & i = h_j, \quad j = 0,1,\dots,N \\ 0, & i \ne h_j, \quad j = 0,1,\dots,N \end{cases}, \quad 0 \le i \le h_N, \tag{9.14}$$

Stojanović, *Debeljković* (2004.d, 2004.h).

Teorema 9.2 Sistem, dat jed. (9.1), je *asimptotski stabilan* ako je ispunjen jedan od sledećih uslova:

$$\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \, \rho\left(H_j\right) < 1, \quad H_j = \frac{1}{2}\left(U_j + U_j^T\right), \tag{9.15}$$

$$\sum_{j=0}^{N} \alpha_j \left\| U_j \right\| < 1, \tag{9.16}$$

Stojanović, *Debeljković* (2004.d, 2004.h).

Zaključak 9.1 Imajući u vidu da je:

$$\rho\left(H_j\right) = \left\| H_j \right\|_2 = \frac{1}{2}\left\| U_j + U_j^T \right\|_2 \le \frac{1}{2}\left(\left\| U_j \right\|_2 + \left\| U_j^T \right\|_2 \right) = \left\| U_j \right\|_2, \tag{9.17}$$

sledi da je uslov dat nejed. (9.16) restriktivniji od uslova datog nejed. (9.15) za normu $\|\cdot\|_2$, *Stojanović*, *Debeljković* (2004.d, 2004.h).

Teorema 9.3 Sistem, dat jed. (9.1), je *asimptotski stabilan* ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\alpha_0 \, \rho\left(U_0\right) < 1, \quad \rho\left(L_0 \sum_{j=1}^{N} \alpha_j U_j \right) < 1, \tag{9.18}$$

$$L_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_0 U_0\right)^k = \left(I_n - \alpha_0 U_0\right)^{-1}, \tag{9.19}$$

Stojanović, *Debeljković* (2004.d, 2004.h).

Zaključak 9.2 Fundamentalna matrica linearnog, vremenski diskretnog sistema bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja, sa $\alpha_0 U_0$ kao matricom sistema, je:

$$\Phi(z) = z\left(z I_n - \alpha_0 U_0\right)^{-1} = z G_0(z), \tag{9.20}$$

tada je:

$$G_0(z) = z^{-1} \Phi(z), \tag{9.21}$$

tako da je:

$$G_0(k) = \Phi(k-1) = \left(\alpha_0 U_0\right)^{k-1}, \quad G_0(0) = 0\,. \tag{9.22}$$

S obzirom da je:

$$\rho\left(\alpha_0 U_0\right) = \alpha_0 \, \rho\left(U_0\right) < 1, \tag{9.23}$$

tada je beskonačni niz:

$$L_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left| G_0(k) \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \alpha_0 U_0 \right|^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_0 U_0{}^k \right) = \left(I_n - \alpha_0 U_0\right)^{-1}, \tag{9.24}$$

konvergentan, tako da se matrica L_0 može direktno izračunati na sledeći način:

$$L_0 = \left(I_n - \alpha_0 U_0\right)^{-1}, \tag{9.25}$$

Stojanović, *Debeljković* (2004.d, 2004.h).

Teorema 9.4 Ako je:

$$\rho\left(\sum_{j=0}^{N} \alpha_j U_j\right) < 1, \tag{9.26}$$

tada je sistem, dat jed. (9.1), *asimptotski stabilan*, *Stojanović, Debeljković* (2004.d, 2004.h).

Primer 9.1 Razmatra se stabilnost linearnog, perturbovanog, vremenski diskretnog sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem opisanog sa:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0(k)\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-1) + A_2(k)\,\mathbf{x}(k-2),$$

gde su:

$$\begin{aligned} &\max_k \left|A_0(k)\right| \le \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,15 \end{pmatrix} = 0,3\begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \alpha_0\, U_0 \\ &\Rightarrow \quad \alpha_0 = 0,3, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} &\max_k \left|A_1(k)\right| \le \gamma\begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} = 0,3\gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \alpha_1(\gamma)U_1 \\ &\Rightarrow \alpha_1(\gamma) = 0,3\gamma, \quad U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \ \gamma > 0 \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} &\max_k \left|A_2(k)\right| \le \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,15 & 0,1 \end{pmatrix} = 0,2\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \ = \alpha_2\, U_2 \\ &\Rightarrow \alpha_2 = 0,2, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 3/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}.$$

Korišćenjem *Teorema* 9.1–9.3 za $\gamma = 1$ ispitana je stabilnost sistema. Osim toga nađena je gornja granica parametra γ_b, koja garantuje da je razmatrani sistem stabilan.

Rezultati su prikazani u *tabeli* 9.1.

Lako se uočava da je za $\gamma = 1$ razmatrani sistem asimptotski stabilan.

Takođe, očigledno je da se uslov, dat nejed. (9.16), *Teoreme* 9.2 ne može koristiti za ispitivanje stabilnosti sistema. Ovaj uslov predstavlja generalizaciju rezultata prikazanih u radu *Mori et al.* (1982.b), za klasu linearnih, perturbovanih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, i potvrđuje činjenicu da je prilično konzervativan.

Tabela 9.1 Vrednosti kriterijuma i parametara

Kriterijum	Vrednost kriterijuma za $\gamma = 1$	Vrednost parametra γ_b
Teorema 9.1 (nejed. (9.12))	0,9817	1,1055
Teorema 9.2 (nejed. (9.15))	0,9930	1,0206
Teorema 9.2 (nejed. (9.16))	1,0462	0,8734
Teorema 9.3 (nejed. (9.18)	0,9453	1,1055

S obzirom na rezultate prikazane u *tabeli* 9.1, očigledno je da se najbolji rezultati mogu postići korišćenjem *Teoreme* 9.3. Imajući u vidu nađenu gornju granicu parametra γ_b, s obzirom da njena vrednost definiše granicu stabilnosti, *Teorema* 9.1, *Teorema* 9.3 i *Teorema* 9.4 daju identične rezultate i zaključke.

Objašnjenje leži u činjenici da je maksimalna sopstvena vrednost ekvivalentne matrice $\hat{A}_{eq}$ za $\gamma = \gamma_b$, u našem slučaju, jednaka $\lambda_m = 1$.

Na osnovu uslova $\rho\left(\hat{A}_{eq}(\gamma_b)\right) = 1$, *Teorema* 9.1 se koristi za određivanje parametra γ_b, to jest, iz uslova $\det\left(I - \hat{A}_{eq}(\gamma_b)\right) = 0$, dobija se:

$$\begin{aligned}
\det\left(I - \hat{A}_{eq}(\gamma_g)\right) &= \det\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & -\alpha_2 U_2 \\ \hline 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \\
&= \det\left(I - \alpha_0 U_0 - \alpha_1(\gamma_b) U_1 - \alpha_2 U_2\right) \det\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \\
&= \det\left(I - \alpha_0 U_0 - \alpha_1(\gamma_b) U_1 - \alpha_2 U_2\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{11} &= I - \alpha_0 U_0 - \alpha_1(\gamma_b) U_1 - \alpha_2 U_2 \\
D_{12} &= -\alpha_1(\gamma_b) U_1 - \alpha_2 U_2
\end{aligned},$$

što je identično uslovu:

$$\rho\left(\alpha_0 U_0 + \alpha_1(\gamma_b) U_1 + \alpha_2 U_2\right) = 1 .$$

Teorema 9.4 takođe služi za određivanje parametra γ_b. Iz uslova:

$$\det\left(I-\alpha_0\,U_0-\alpha_1\left(\gamma_b\right)U_1-\alpha_2\,U_2\right)=0,$$

ako je ispunjen uslov $\rho\left(U_0\right)<1$, sledi:

$$\begin{aligned}&\det\left(I-\alpha_0\,U_0-\alpha_1\left(\gamma_b\right)U_1-\alpha_2\,U_2\right)\\&=\det\left(I-U_0\right)\cdot\det\left(I-\left(I-U_0\right)^{-1}\left(\alpha_0\,U_0+\alpha_1\left(\gamma_b\right)U_1+\alpha_2\,U_2\right)\right)=0\end{aligned}.$$

Prethodni uslov je ekvivalentan sledećem uslovu:

$$\begin{gathered}\rho\left(I-U_0\right)<0\\ \rho\left(\left(I-U_0\right)^{-1}\left(\alpha_0 U_0+\gamma_b\,\alpha_1 U_1+\alpha_2 U_2\right)\right)=1\end{gathered},$$

što je osnovni uslov *Teoreme* 9.3.

Ovo pokazuje da su rezultati prezentovani u *Teoremi* 9.1, *Teoremi* 9.3 i *Teoremi* 9.4 ekvivalentni, *Stojanović*, *Debeljković* (2004.d, 2004.h).

Literatura

Bishop, A. B., *Introduction to Discrete Linear Controls–Theory and Application*, Academic Press, New York, 1975.

Chou, J. H., "Robustness of Pole–Assignment in Specified Circular Region for Linear Perturbed Systems", *Systems Control Lett*., Vol. 16, (1991) 41–44.

Horng, H. Y., J. H. Chou, I. R. Horng, "Robustness of Eigenvalue Clustering in Various Regions of the Complex Plane for Perturbed Systems", *International Journal of Control*, 57, (1993) 1469–1484.

Jury, E. I., *Inners and Stability of Dynamics Systems*, Wiley, New York, 1974.

Kolla, S. R., R. K. Yedavalli, J. B. Farison, "Robust Stability Bounds on Time–Varying Perturbations for State–Space Models of Linear Discrete–Time Systems", *International Journal of Control*, 50, (1989) 51–159.

Lee, C. H., T. H. S. Li, F. C. Kung, "D–Stability Analysis for Discrete Systems with a Time Delay", *Systems and Control Letters*, 19, (1992) 213–219.

Li, X., C. E. De Souza, "Delay–Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems: A Linear Matrix Inequality Approach", *IEEE Trans*. *Automat*. *Control*, 42, (1997) 1144–1148.

Meyer, C. D., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2001.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Simple Stability Criteria for Single and Composite Linear Systems with Time Delay", *International Journal of Control*, 34 (6), (1981) 1175–1184.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Delay–Independent Stability Criteria for Discrete–Delay Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control.*, AC–27 (4), (1982.b) 946–966.

Niculescu, S. I., C. E. De Souza, J. M. Dion, L. Dugrad, "Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Systems with State Delay: Single Delay Case (I)", *Proc. IFAC Symp. Robust Control Design*, Rio de Janerio (Brazil), September, (1994).

Niu, X., J. A. De Abreu–Garcia, E. Yaz, "Improved Bounds for Linear Discrete–Time Systems with Structured Perturbations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37, (1992) 1170–1173.

Rachid, A., "Robustness of Discrete Systems under Structured Uncertainties", *International Journal of Control*, 50, (1989) 1563–1566.

Rachid, A., "Robustness of Pole Assignment in a Specified Region for Perturbed Systems", *International Journal of Systems Science*, 21, (1990) 579–585.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On Stability of Perturbed Linear Discrete–Delay Systems with Multiple Delays", *CDIC* 2004, Nanjing (China), August 18–20, (2004.d) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On Stability of Perturbed Linear Discrete–Delay Systems with Multiple Delays", *ICARCV* 2004, Kunming (China), December 06–09, (2004.h) CD–Rom.

Su, T. J., C. G. Huang, "Robust Stability of Delay Dependence for Linear Uncertain Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, 37, (1992) 1656–1159.

Trinh, H., M. Aldeen, "D–Stability Analysis of Discrete–Delay Perturbed Systems", *International Journal of Control*, 61 (2), (1995.a) 493–505.

Yaz, E., X. Niu, "Stability Robustness of Linear Discrete–Time Systems in the Presence of Uncertainty", *International Journal of Control*, 50, (1989) 173–182.

Yedavalli, R. K., "Robust Root Clustering for Linear Uncertain Systems Using Generalized Lyapunov Theory", *Automatica*, 29, (1993) 237–240.

10. STABILNOST PERTURBOVANIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA VIŠESTRUKIM ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

10.1 Analiza *D*–stabilnosti sistema sa višestukim čistim vremenskim kašnjenjem

U analizi dinamičkih sistema, često se susreću parametarske neodređenosti koje potiču zbog grešaka identifikacije, varijacija radnih tačaka, i tako dalje. Zbog toga je problem analize robusne stabilnosti sistema sa parametarskim neodređenostima naišao na veliko interesovanje kod mnogih istraživača i više značajnih rezultata koji se tiču ove problematike su objavljeni u lit. *Yedavalli* (1989), *Chou* (1990) i *Wei, Zeng* (1995).

Poznato je da je položaj svih karakterističnih korenova važan pokazatelj dinamičkih performansi linearnih sistema automatskog upravljanja. U praksi, svi karakteristični korenovi se ne mogu podesiti u fiksnim položajima ali se mogu locirati unutar neke ograničene oblasti zbog neizbežnih parametarskih perturbacija. Jedna takva specifična oblast za vremenski diskretne sisteme je disk $D(\alpha, r)$ sa centrom u $(\alpha, 0)$ i radijusom r, gde je $|\alpha| + r < 1$. Podešavanje svih polova sistema unutar specifičnog diska $D(\alpha, r)$ naziva se problem D–razmeštanja polova.

U poslednje vreme, problem D–stabilnosti koji garantuje da su svi karakteristični korenovi sistema automatskog upravljanja locirani unutar specifičnog diska u kompleksnoj ravni postaje interesantno područje istraživanja pomenutih sistema, lit. *Lee, Lee* (1986), *Furukawa, Kim* (1987), *Vicino* (1989), *Chou* (1991) i *Chou et al.* (1992).

Zbog izračunavanja podataka, fizičkih osobina elemenata sistema i prenosa signala, čisto vremensko kašnjenje je prisutno ne samo u fizičkim, industrijskim i hemijskim sistemima već takođe i u političkim i ekonomskim sistemima, i tako dalje. S obzirom da se broj polova sistema u zatvorenom kolu dejstva povećava usled čisto vremenskog kašnjenja, uvođenje čisto vremenskog kašnjenja čini problem D–razmeštanja polova komplikovanijim.

Problem D–stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem je razmatran u lit. *Lee et al.* (1992), *Su, Shyr* (1994), *Trinh, Aldeen* (1995.a) i *Hsiao* (1998), a za vremenski kontinualne sisteme u radu *Lee* (1995).

U ovoj glavi, razmatraju se linearni, perturbovani, vremenski diskretni sistemi sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem. Prezentovaće se dovoljan kriterijum za sopstvene vrednosti perturbovanih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, koje su locirane u specifičnom disku. Razmatraju se i strukturne i nestrukturne perturbacije.

Biće prezentovan dovoljan uslov za ispitivanje D–stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, kao i dovoljan uslov koje garantuje da sve sopstvene vrednosti vremenski diskretnog sistema sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem i nestrukturnim perturbacijama leže unutar kružnog diska $D(\alpha, r)$ i daće se generalizacija dovoljnog uslova $D(\alpha, r)$–stabilnosti vremenski diskretnog sistema sa strukturnim perturbacijama prezentovanog u radu *Trinh, Aldeen* (1995.a).

Linearni, autonomni, višestruko prenosni, perturbovani, vremenski diskretni sistem sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem može se predstaviti vektorskom diferencnom jednačinom:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{j=0}^{N} \left(A_j + \Delta A_j \right) \mathbf{x}\left(k - h_j\right), \quad 0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_N , \tag{10.1}$$

sa pridruženom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\theta) = \boldsymbol{\psi}(\theta), \quad \theta \in \{-h, -h+1, \ldots, 0\} , \tag{10.2}$$

gde je: $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konstantna matrica, a čista vremenska kašnjenja su izražena celim brojevima $h_j \in \mathbb{T}_+$.

$\Delta A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $0 \le j \le N$ su matrice koje predstavljaju perturbacije u sistemu. Razmatraju se nestrukturne i strukturne perturbacije definisane na sledeći način:

$$\left\| \Delta A_j \right\| \le a_j \in \mathbb{R}_+ , \tag{10.3}$$

$$\left| \Delta A_j \right| \le R_j \in \mathbb{R}_+^{n \times n} , \tag{10.4}$$

sledstveno.

Lema 10.1 Neka je:

$$G(z) = (zI_n - A)^{-1}, \tag{10.5}$$

tada je:

$$\left|G(z)z^{-h}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\left|G(k)\right| = L, \quad |z| \ge 1, \tag{10.6}$$

gde je $G(k)$ niz matrica impulsnog odziva od $G(z)$, *Trinh, Aldeen* (1995.a).

Lema 10.2 Za bilo koju $(n \times n)$ matricu X, važi sledeće:

$$\rho(X) < 1 \quad \Rightarrow \quad \det(I_n - X) \ne 0, \tag{10.7}$$

Trinh, *Aldeen* (1995.a).

U slučaju kada ne postoje perturbacije u sistemu, datom jed. (10.1), to jest $\Delta A_j = 0$, stabilnost razmatranog sistema se može iskazati sledećom lemom.

Teorema 10.1 Sve sopstvene vrednosti sistema bez perturbacija, datog jed. (10.1), su unutar diska $D(\alpha, r)$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\sum_{j=0}^{N}\left\|A_j\right\|\delta^{-h_j} < \delta, \quad \delta = \min\left(|\alpha - r|, |\alpha + r|\right), \tag{10.8}$$

Stojanović et al. (2004.f).

D robusna stabilnost vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem

U slučaju sistema, datog jed. (10.1), sa nestrukturnim perturbacijama, definisanim nejed. (10.3), $D(\alpha, r)$ stabilnost sistema se može iskazati sledećom teoremom.

Teorema 10.2 Sve sopstvene vrednosti perturbovanog sistema, datog jed. (10.1), sa perturbacijama, definisanim nejed. (10.3), su unutar diska $D(\alpha, r)$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\sum_{j=0}^{N}\left\|A_j\right\|\delta^{-h_j} < \delta - \sum_{j=0}^{N} a_j\,\delta^{-h_j}, \quad \delta = \min\left(|\alpha - r|, |\alpha + r|\right), \tag{10.9}$$

Stojanović et al. (2004.f).

Zaključak 10.1 U slučaju kada ne postoje perturbacije u sistemu, datom jed. (10.1), to jest $\Delta A_j = 0$, važi $a_j = 0$. Odavde sledi da je *Teorema* 10.1 posledica *Teoreme* 10.2, *Stojanović et al*. (2004.f).

U slučaju sistema, datog jed. (10.1), sa strukturnim perturbacijama, definisanim nejed. (10.4), $D(\alpha, r)$ stabilnost sistema se može iskazati sledećom teoremom.

Teorema 10.3 Pretpostavlja se da su sve sopstvene vrednosti matrice A_0 unutar diska $D(\alpha, r)$. Sve sopstvene vrednosti perturbovanog, vremenski diskretnog sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, datog jed. (10.1), sa perturbacijama, definisanim nejed. (10.4), su unutar diska $D(\alpha, r)$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\rho\left(H_{\alpha,r} \left(R_0 + \sum_{j=1}^{N} \left(\left| A_j \right| + R_j \right) \delta^{-h_j} \right) \right) < r\,, \tag{10.10}$$

$$\delta = \min\left(\left| \alpha - r \right|, \left| \alpha + r \right| \right), \tag{10.11}$$

$$H_{\alpha,r} = \sum_{k=0}^{\infty} \left| \left(\frac{A_0 - \alpha I_n}{r} \right)^k \right| = \left(I_n - \left| \frac{A_0 - \alpha I_n}{r} \right| \right)^{-1}, \tag{10.12}$$

Stojanović et al. (2004.f).

Primer 10.1 Razmatra se perturbovani, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (10.1), sa jednim vremenskim kašnjenjem u stanju, gde je:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}05 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0 \\ 0{,}01 & -0{,}015 \end{pmatrix}.$$

Neka je $D(\alpha, r) = D(0{,}3,\ 0{,}6)$ i pretpostavlja se da su nestrukturne parametarske perturbacije ΔA_0 i ΔA_1 ograničene normom, sledstveno, $\left\| A_0 \right\| \le a_0$ i $\left\| A_1 \right\| \le a_1$. Konstante a_0 i a_1 su nepoznate pozitivne konstante koje se ocenjuju tako da je razmatrani sistem $D(0{,}3,\ 0{,}6)$ stabilan.

Korišćenjem uslova, datog nejed. (10.9), dobija se:

$$\left\| A_0 \right\| + \left\| A_1 \right\| \delta^{-1} < \delta - a_0 - a_1 \delta^{-1},$$

tada je:

$$0{,}1532 < 0{,}3 - a_0 - a_1 / 0{,}3\,,$$

prema tome:

$$a_0 + \frac{10}{3} a_1 < 0{,}1468 ,$$

Stojanović et al. (2004.f).

Primer 10.2 Razmatra se vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (10.1), sa jednim vremenskim kašnjenjem u stanju, gde je:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}02 & 0 \\ 0{,}01 & -0{,}015 \end{pmatrix}.$$

Neka je $D(\alpha, r) = D(0{,}3,\ 0{,}6)$ i pretpostavlja se da su strukturne parametarske perturbacije ΔA_0 i ΔA_1 ograničene normom, sledstveno, $|\Delta A_0| \leq 0{,}1 I_2$, $|\Delta A_1| \leq 0{,}05 I_2$.

Korišćenjem uslova, datog nejed. (10.10), dobija se:

$$\rho\left(H_{0,3,\,0,6} \left(0{,}1\, I_2 + \frac{10}{3}\left(|A_1| + 0{,}05\, I_2 \right) \right) \right) < 0{,}6 ,$$

$$H_{0,3,\,0,6} = \begin{pmatrix} 1{,}667 & 0{,}208 \\ 0 & 1{,}5 \end{pmatrix},$$

tada je:

$$\rho(\cdot) = 0{,}5909 < 0{,}6 .$$

Prema tome, razmatrani sistem je $D(0{,}3,\ 0{,}6)$ stabilan, *Stojanović et al*. (2004.f).

10.2 Stabilnost sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i nelinearnim perturbacijama

U radu *Tsao* (1994) prezentovana su dva dovoljna uslova asimptotske stabilnosti nelinearnih, vremenski varijantnih, diskretnih sistema.

U ovoj glavi izvršiće se generalizacija rezultata prezentovanog u radu *Mori et al.* (1982.b) za slučaj nelinearnih, vremenski varijantnih sistema.

Razmatra se asimptotska stabilnost partikularne klase vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i nelinearnim perturbacijama.

Prezentovaće se dovoljan uslov, u formi kriterijuma nezavisnog od čisto vremenskog kašnjenja.

Linearni, autonomni, višestruko prenosni, perturbovani, vremenski diskretni sistem sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem može se predstaviti vektorskom diferencnom jednačinom:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{j=0}^{N} \left(A_j + \Delta A_j\right) \mathbf{x}\left(k - h_j\right) + \sum_{j=0}^{M} \mathbf{f}_j \left(\mathbf{x}\left(k - h_j\right), k\right), \qquad 0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_N, \quad M \le N \tag{10.13}$$

sa pridruženom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\theta) = \boldsymbol{\psi}(\theta), \quad \theta \in \{-h_N, -h_N + 1, \ldots, 0\}, \tag{10.14}$$

gde je: $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konstantna matrica, a čista vremenska kašnjenja sistema su izražena celim brojevima $h_j \in \mathbb{T}_+$. Vektor $\mathbf{f}_j(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ je nelinearna perturbacija koja zadovoljava uslov:

$$\left\| \mathbf{f}_j \left(\mathbf{x}\left(k - h_j\right), k\right) \right\| \le b_j^2 \left\| \mathbf{x}\left(k - h_j\right) \right\|, \quad b_j \in \mathbb{R}_+ . \tag{10.15}$$

Lema 10.3 *Thebyshev*–ljeva nejednakost važi za bilo koji realni vektor $\mathbf{v}_i$:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{v}_i\right)^T \left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{v}_i\right) \le m \sum_{i=1}^{m} \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i . \tag{10.16}$$

Lema 10.4 Za bilo koje matrice W, F, G i Z istih dimenzija $(m \times n)$, ako je:

$$W = F + G + Z, \tag{10.17}$$

tada za bilo koju pozitivnu kvadratnu matricu $P = P^T > 0$ dimenzije n i pozitivne konstante ε_1, ε_2 i ε_3 važi da je:

$$W^T P W \le \left(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_3^{-1}\right) X^T P X + \left(1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1^{-1}\right) Y^T P Y + \left(1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_2^{-1}\right) Z^T P Z . \tag{10.18}$$

Teorema 10.4 Sistem, dat jed. (10.13), je *asimptotski stabilan* ako je:

$$\left\|A_0\right\| + \left\| N \sum_{j=1}^{N} A_j^T A_j \right\|^{\frac{1}{2}} + \left((M+1) \sum_{j=0}^{M} b_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} < 1, \tag{10.19}$$

Stojanović et al. (2004.g).

Primer 10.3 Razmatra se vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0 \mathbf{x}(k) + A_1 \mathbf{x}(k-1) + A_2 \mathbf{x}(k-2) + \mathbf{f}_1 \left(\mathbf{x}(k), k\right) + \mathbf{f}_2 \left(\mathbf{x}(k-2), k\right),$$

gde je:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & -0,15 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,05 & 0,1 \end{pmatrix},$$

$$\left\|\mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}(k),k\right)\right\| \le 0,01\left\|\mathbf{x}(k)\right\|, \quad \left\|\mathbf{f}_2\left(\mathbf{x}(k-2),k\right)\right\| \le 0,01\left\|\mathbf{x}(k-2)\right\|.$$

Primenjujući *Teoremu* 10.4 sledi:

$$\|A_0\| + \sqrt{2\left\|A_1^T A_1 + A_2^T A_2\right\|} + \sqrt{3(0,01+0,01)} = 0,9282 < 1 .$$

Prema tome, razmatrani sistem je asimptotski stabilan, *Stojanović et al*. (2004.g).

U slučaju kada sistem, dat jed. (10.13), ne sadrži nelinearne perturbacije $\left(\mathbf{f}_1(\cdot,\cdot) = \mathbf{f}_2(\cdot,\cdot) = 0\right)$, dobija se:

$$\|A_0\| + \sqrt{2\left\|A_1^T A_1 + A_2^T A_2\right\|} = 0,6833 .$$

Ovaj uslov je manje konzervativan u odnosu na uslov:

$$\|A_0\| + \|A_1\| + \|A_2\| = 0,7272 < 1,$$

prezentovan u radu *Mori et al.* (1982.b).

Literatura

Chou, J. H., “Stability Robustness of Linear State Space Models with Structured Perturbations”, *Systems Control Lett*., 15, (1990) 207–210.

Chou, J. H., “Robustness of Pole–Assignment in Specified Circular Region for Linear Perturbed Systems”, *Systems Control Lett*., Vol. 16, (1991) 41–44.

Chou, J. H., S. J. Ho, I. R. Horng, “Robustness of Disk–Stability for Perturbed Large–Scale Systems”, *Automatica,* Vol. 28, (1992) 1063–1066.

Furukawa, K., S. B. Kim, “Pole–Assignment in a Specified Disk”, *IEEE Trans. Automat. Contr*., Vol. 32, (1987) 423–427.

Gorecki, H., S. Fuksa, P. Grabovski, A. Korytowski, *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, John Wiley & Sons, Warszawa, 1989.

Hsiao, F. H., “D–Stability Analysis for Discrete Uncertain Time–Delay Systems”, *Appl. Math. Lett*., 11 No 2, (1998) 109–114.

Koepcke, R. W. “On the Control of Linear Systems with Pure Time Delay”, *Trans. ASME J. Basic Eng*., 3, (1965) 74–80.

Lancaster, P., M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices, 2nd Edition*, Academic press, New York, 1985.

Lee, C., "D–Stability of Continuous Time–Delay Systems Subjected to a Class of Highly Structured Perturbations", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, (1995) 1803–1807.

Lee, C.H., T. H. S. Li, F. C. Kung, "D–Stability Analysis for Discrete Systems with a Time Delay", *Systems Control Lett.*, 19, (1992) 213–219.

Lee, T. T., S. H. Lee, "Discrete Optimal Control with Eigenvalues Assigned Inside a Circular Region", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 31, (1986) 958–962.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Delay–Independent Stability Criteria for Discrete–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 27, No. 4, (1982.b) 946–966.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, M. Lazić, V. Veljković, "D–stability Analysis of Time Delay Technological Systems with Multiple Time Delays", *Proc. CHISA* 2004, Prague (Czech Republic), Avgust 28–31, (2004.f) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, M. Lazić, V. Veljković, "Stability of Time Delay Technological Systems with Nonlinear Perturbations", *Proc. CHISA* 2004, Prague (Czech Republic), Avgust 28–31, (2004.g) CD–Rom.

Su, T. J., W. J. Shyr, "Robust D–Stability for Linear Uncertain Discrete Time–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 39, (1994) 425–428.

Trinh, H., M. Aldeen, "D–Stability Analysis of Discrete–Delay Perturbed Systems", *Internat. J. Control*, Vol. 61, No. 2, (1995.a) 493–505.

Tsao, T. C., "Simple Stability Criteria for Nonlinear Time–Varying Discrete Systems", *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 22, (1994) 223–225.

Vicino, A., "Robustness of Pole Location in Perturbed Systems", *Automatica*, Vol. 25, (1989) 109–113.

Wei, K., R. K. Yedavalli, "Robust Stabilizability for Linear Systems with Both Parameter Variation and Unstructured Uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Control*, 34, (1989) 149–156.

Zeng, X. J., "Robust Stability for Linear Discrete–Time Systems with Structured Perturbations", *Internat. J. Control*, 61, (1995) 739–748.

11. EKSPONENCIJALNA STABILNOST PERTURBOVANIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA VIŠESTRUKIM ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

Poznato je da su stabilnost i robusnost osnovni zahtevi koji se postavljaju za sisteme automatskog upravljanja. U praksi, da bi se zadovoljile tehničke performanse i da bi sistem imao dobre prelazne karakteristike, sistemi automatskog upravljanja se često projektuju da imaju rezervu stabilnosti. Ako sistem automatskog upravljanja ima rezervu stabilnost α, tada je on eksponencijalno stabilan. Nekoliko rezultata koji se bave problemom eksponencijalne stabilnosti je prezentovano u lit. *Grujić, Šiljak* (1974), *Mori et al.* (1982.a), *Bourles et al.* (1990) i *Hmamed* (1991.a. 1991.b).

U industrijskim procesima, čista vremenska kašnjenja se često prisutna prilikom prenosa informacija ili materijala između različitih delova sistema. Hemijski procesi, duge transmisione linije, telekomunikacioni sistemi i elektrane su tipični primeri sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

S obzirom da prisustvo čisto vremenskog kašnjenja često prouzrokuje značajno pogoršanje stabilnosti i performansi sistema, značajna pažnja je posvećena problemima upravljanja sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Problem ispitivanja eksponencijalne stabilnosti sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem je komplikovaniji od ispitivanja eksponencijalne stabilnosti sistema bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja i/ili neodređenosti. U lit. *Grujić, Šiljak* (1974), *Mori et al.* (1982.a) i *Hmamed* (1991.a. 1991.b) razmatrani su problemi ispitivanja rezerve stabilnosti vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Proverom uslova stabilnosti i ponovnim izračunavanjem, može se oceniti rezerva stabilnosti linearnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Međutim, u radu *Hsien, Lee* (1995) razmatran je isti problem za vremenski diskretne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem Glavni razlog je činjenica da se takvi sistemi mogu transformisati u proširene sisteme bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja. Ovo proširenje sistema, međutim, nije odgovarajuće za sisteme sa nepoznatim, višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem ili za sisteme sa vremenski promenljivim kašnjenjima.

U ovoj glavi će se razmatrati eksponencijalna stabilnost vremenski diskretnih sistema sa neodređenostima. Korišćenjem Ljapunovljeve teoreme stabilnosti, dobiće se kriterijum koji će garantovati eksponencijalnu stabilnost vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i neodređenostima. Prezentovaće se dovoljan uslov, u formi kriterijuma zavisnog od čisto vremenskog kašnjenja.

Takođe, proširuju se rezultati dati u lit. *Mori et al.* (1982.b) i *Tsao* (1994).

Linearni, autonomni, višestruko prenosni, perturbovani, vremenski diskretni sistem sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem može se predstaviti vektorskom diferencnom jednačinom:

$$\mathbf{x}(k+1)=\sum_{j=0}^{N}\left(A_j+\Delta A_j\right)\mathbf{x}\left(k-h_j\right)+\sum_{j=0}^{M}\mathbf{f}_j\left(\mathbf{x}\left(k-h_j\right),k\right), \qquad M\le N,\quad h_0=0 \tag{11.1}$$

sa pridruženom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\theta)=\boldsymbol{\psi}(\theta),\quad \theta\in\left\{-h_N,-h_N+1,\dots,0\right\},\quad h_N=\max_i h_i, \tag{11.2}$$

gde je: $\mathbf{x}(k)\in\mathbb{R}^n$ vektor stanja, $A_j\in\mathbb{R}^{n\times n}$ konstantna matrica, a čista vremenska kašnjenja sistema su izražena celim brojevima $h_j\in\mathbb{T}_+$. M i N su dati celi brojevi.

Vektor $\mathbf{f}_j(\cdot,\cdot):\mathbb{R}^n\times\mathbb{T}_+\mapsto\mathbb{R}^n$ je nelinearna perturbacija koja zadovoljava uslov:

$$\left\|\mathbf{f}_j\left(\mathbf{x}\left(k-h_j\right),k\right)\right\|\le b_j^2\left\|\mathbf{x}\left(k-h_j\right)\right\|,\quad b_j\in\mathbb{R}_+. \tag{11.3}$$

Lema 11.1 *Thebyshev*–ljeva nejednakost, *Lee, Radović* (1987), važi za bilo koji realni vektor $\mathbf{v}_i$:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbf{v}_i\right)^T\left(\sum_{i=1}^{m}\mathbf{v}_i\right)\le m\sum_{i=1}^{m}\mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i\,. \tag{11.4}$$

Lema 11.2 Za bilo koje matrice W, F, G i Z istih dimenzija $(m\times n)$, ako je:

$$W=F+G+Z\,, \tag{11.5}$$

tada za bilo koju pozitivnu kvadratnu matricu $P=P^T>0$ dimenzije n i pozitivne konstante ε_1, ε_2 i ε_3 važi da je:

$$W^TPW\le\left(1+\varepsilon_1+\varepsilon_3^{-1}\right)X^TPX+\left(1+\varepsilon_2+\varepsilon_1^{-1}\right)Y^TPY+\left(1+\varepsilon_3+\varepsilon_2^{-1}\right)Z^TPZ\,. \tag{11.6}$$

Definicija 11.1 Sistem, dat jed. (11.1), ima rezervu stabilnosti α (eksponencijalno je stabilan), gde je $\alpha > 1$ realan, pozitivan skalar, ako se stanje sistema, datog jed. (11.1), može predstaviti u sledećem obliku:

$$\mathbf{x}(k) = \alpha^{-k}\,\mathbf{p}(k), \tag{11.7}$$

a sistem određen stanjem $\mathbf{p}(k)$ je globalno asimptotski stabilan.

U tom slučaju, parametar α se naziva *brzina konvergencije* (videti rad *Sun, Hsieh* (1996) za slučaj vremenski kontinualnih sistema).

Teorema 11.1 Sistem, dat jed. (11.1), je *asimptotski stabilan* ako je:

$$\left\|A_0\right\| + \left\|N\sum_{j=1}^{N} A_j^T A_j\right\|^{\frac{1}{2}} + \left(\left(M+1\right)\sum_{j=0}^{M} b_j^2\right)^{\frac{1}{2}} < 1, \tag{11.8}$$

Stojanović et al. (2004.g).

Teorema 11.2 Sistem, dat jed. (11.1), je *eksponencijalno stabilan* ako je:

$$\alpha\left\|A_0\right\| + \sqrt{N\sum_{j=1}^{N}\alpha^{2\left(h_j+1\right)}\left\|A_j^T A_j\right\|} + \sqrt{\left(M+1\right)\sum_{j=0}^{M}\alpha^{2\left(h_j+1\right)} b_j^2} < 1, \tag{11.9}$$

gde je α rezerva stabilnosti, *Stojanović, Debeljković* (2006.a, 2006.c).

Primer 11.1 Razmatra se vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem:

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{j=0}^{2} A_j\,\mathbf{x}\left(k-h_j\right) + \sum_{j=0}^{1}\mathbf{f}_j\left(\mathbf{x}\left(k-h_j\right),k\right),$$

gde je:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & -0{,}15 \end{pmatrix},\quad A_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}1 \end{pmatrix},$$

$$\left\|\mathbf{f}_0\left(\mathbf{x}(k),k\right)\right\| \le 0{,}1\left\|\mathbf{x}(k)\right\|,\quad \left\|\mathbf{f}_1\left(\mathbf{x}\left(k-h_1\right),k\right)\right\| \le 0{,}1\left\|\mathbf{x}\left(k-h_1\right)\right\|,\quad h_1 = 1,\quad h_2 = 2.$$

Primenjujući *Teoremu* 11.1 sledi:

$$\left\|A_0\right\| + \sqrt{2\left\|A_1^T A_1 + A_2^T A_2\right\|} + \sqrt{2\left(0{,}1^2 + 0{,}1^2\right)} = 0{,}8833 < 1.$$

Prema tome, razmatrani sistem sa poznatim, višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem je asimptotski stabilan.

U slučaju kada sistem, dat jed. (11.1), ne sadrži nelinearne perturbacije $\left(\mathbf{f}_0(\cdot,\cdot) = \mathbf{f}_2(\cdot,\cdot) = 0\right)$, dobija se:

$$\left\|A_0\right\| + \sqrt{2\left\|A_1^T A_1 + A_2^T A_2\right\|} = 0,6833 .$$

Ovaj uslov je manje konzervativan u odnosu na uslov:

$$\left\|A_0\right\| + \left\|A_1\right\| + \left\|A_2\right\| = 0,7272 < 1 ,$$

prezentovan u radu *Mori et al.* (1982.b).

Primenjujući rezultate *Teoreme* 11.2 za data čista vremenska kašnjenja sledi da je rezerva stabilnosti: $\alpha = 1,0385$.

Takođe, sledi da polovi razmatranog vremenski diskretnog sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, sa prisutnim datim perturbacijama, leže unutar kruga, sa centrom u koordinatnom početku u z ravni, čiji je radijus $r = 1/1,0385 = 0,9629$, *Stojanović, Debeljković* (2006.a, 2006.c).

Literatura

Bourles, H., Y. Joannic, O. Mercier, "P–Stability and Robustness: Discrete–Time Case", *Int. J. Contr.*, Vol. 52, (1990) 1217–1239.

Grujić, Lj. T., D. D. Šiljak, "Exponential Stability of Large–Scale Discrete Systems", *Int. J. Contr.*, Vol. 19, (1974) 481–491.

Hmamed, A., "Further Results On the Robust Stability of Uncertain Time–Delay Systems", *Int. J. Syst. Sci.*, Vol. 22, (1991.a) 605–614.

Hmamed, A., "Further Results on the Delay–Independent Asymptotic Stability of Linear Systems", *Int. J. Syst. Sci.*, Vol. 22, (1991.b) 1127–1132.

Hsien, T. L., C. H. Lee, "Exponential Stability of Discrete Time Uncertain Systems with Time–Varying Delay", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 332–B, No. 4, (1995) 479–489.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems", *Int. J. Contr.*, Vol. 36, (1982.a) 95–97.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Delay–Independent Stability Criteria for Discrete–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 27, No. 4, (1982.b) 946–966.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Exponential Stability of Discrete Time Delay Systems with Nonlinear Perturbations", 8th *Biennial ASME Conference Eng Systems Design and Analysis*, ESDA 2006, Torino (Italy), July 04–07, (2006), also in *Proc. Asian Control Conference*, Bali (Indonesia), July 18–21, (2006.a) 1–4.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Exponential Stability of Discrete Time Delay Systems with Nonlinear Perturbations", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 3, (2006.c) 428–435.

Sun, Y. J., J. G. Hsieh, Y.C. Hsieh, "Exponential Stability Criterion for Uncertain Retarded Systems with Multiple Time–Varying Delays", *Journal of mathematical analysis and applications*, 201, (1996) 430–446.

Tsao, T. C., "Simple Stability Criteria for Nonlinear Time–Varying Discrete Systems", *Syst. Contr. Lett.*, Vol. 22, (1994) 223–225.

12. KVADRATNA STABILNOST LINEARNIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM I NEODREĐENOSTIMA: PRILAZ SA POZICIJA LINEARNIH MATRIČNIH NEJEDNAKOSTI

Analiza robusne stabilnosti sistema sa parametarskim neodređenostima su problemi koji pobuđuju interesovanje mnogih istraživača, lit. *Chou* (1990), *Zeng* (1995) i *Bo et al*. (2004).

Tokom poslednjih decenija, značajna pažnja je poklonjena problemu analize stabilnosti sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

U skladu sa naprednom teorijom robusnog upravljanja, za sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem i neodređenostima, prezentovano je više metoda robusne stabilnosti u lit. *Li, De Souza* (1997), *Su et al.* (2003), *Xia, Jia* (2003), *Wu et al.* (2004) i *Yue, Han* (2005).

Manje pažnje je poklonjeno odgovarajućim rezultatima za vremenski diskretne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem, koji su razmatrani u lit. *Verriest, Ivanov* (1995), *Kapila, Haddad* (1998), *Song et al*. (1999), *Mahmoud* (2000.a), *Shi et al.* (2000) i *Fridman, Shaked* (2005).

Glavni razlog je činjenica da se takvi sistemi mogu transformisati u proširene sisteme bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja.

Ovo proširenje sistema, međutim, nije odgovarajuće za sisteme sa nepoznatim, višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem ili za sisteme sa vremenski promenljivim kašnjenjima.

Jedan od najpopularniji način da se reši problem analize robusne stabilnosti je prilaz koji se zasniva na konceptu kvadratne stabilnosti, rad *Xu et al.* (2001.b) bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja i lit. *Moheimani, Petersen* (1997), *Esfahani et al.* (1998) i *Su, Chu* (1999) sa prisutnim čisto vremenskim kašnjenjem.

Kvadratna stabilnost znači da postoji Ljapunovljeva funkcija koja garantuje stabilnost sistema sa neodređenostima.

U radu *Xu et al.* (2001.b) prezentovani su uslovi kvadratne stabilnosti linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju i neodređenostima u smislu nelinearnih matričnih nejednakosti, koje se nemogu efikasno numerički rešiti.

U ovoj glavi, ova poteškoća se prevazilazi prezentovanjem novih uslova kvadratne stabilnosti u smislu linearnih matričnih nejednakosti (LMI) koje se mogu rešiti uspešno korišćenjem izvedenih algoritama konveksne optimizacije, *Boyd et al.* (1994).

Takođe se razmatra analiza kvadratne stabilnosti linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju i neodređenostima.

Razmatrani sistem sadrži čisto vremensko kašnjenje u stanju i parametarske neodređenosti.

Pretpostavlja se da su parametarske neodređenosti vremenski promenljive i ograničene norme.

Razmatra se klasa linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju i neodređenostima:

$$\mathbf{x}(k+1)=\left(A_0+\Delta A_0(k)\right)\mathbf{x}(k)+\left(A_1+\Delta A_1(k)\right)\mathbf{x}(k-h)+\left(B+\Delta B(k)\right)\mathbf{u}(k), \quad (12.1)$$

gde je: $\mathbf{x}(k)\in\mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u}(k)\in\mathbb{R}^m$ vektor upravljanja i h je pozitivan ceo broj. A_0, A_1 i B su poznate realne konstantne matrice, $\Delta A_0(k)$, $\Delta A_1(k)$ i $\Delta B(k)$ su vremenski promenljive parametarske neodređenosti za koje se pretpostavlja da su u formi:

$$\left(\Delta A_0(k) \quad \Delta A_1(k) \quad \Delta B(k)\right)=M\,F(k)\left(N_{A_0} \quad N_{A_1} \quad N_B\right), \quad (12.2)$$

gde su M, N_{A_0}, N_{A_1} i N_B konstantne matrice, a $F(k)\in\mathbb{R}^{i\times j}$ je matrica neodređenosti koja zadovoljava uslov:

$$F(k)F^T(k)\leq I\,. \quad (12.3)$$

Neodređenosti $\Delta A_0(k)$, $\Delta A_1(k)$ i $\Delta B(k)$ su dozvoljene ako važe i jed (12.2) i nejed. (12.3).

U ovoj glavi, koriste se sledeće definicije kvadratne stabilnosti sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i neodređenostima, datog jed. (12.1–12.3).

Definicija 12.1 Vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem i neodređenostima, dat jed. (12.1–12.3), je *kvadratno stabilan* ako postoje matrice $P>0$, $Q>0$ i skalar $\varepsilon>0$ tako da, za sve dozvoljene neodređenosti $\Delta A_0(k)$ i $\Delta A_1(k)$, sistem, dat jed. (12.1), u slobodnom radnom režimu $\left(\mathbf{u}(k)\equiv 0\right)$, zadovoljava:

$$\Delta V(k)=V(k+1)-V(k)\le -\varepsilon\,\|\hat{\mathbf{x}}\|^2, \tag{12.4}$$

za sve parove $(\hat{\mathbf{x}},\mathbf{k})\in\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}$, gde je:

$$\hat{\mathbf{x}}(k)=\left[\mathbf{x}^T(k)\quad \mathbf{x}^T(k-h)\right]^T, \tag{12.5}$$

$$V(k)=\mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k)+\sum_{j=k-h}^{k-1}\mathbf{x}^T(j)Q\mathbf{x}(j). \tag{12.6}$$

U ovoj glavi prezentovaće se potrebni i dovoljni uslove kvadratne stabilnosti za vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem i neodređenostima, dat jed. (12.1–12.3).

Teorema 12.1 Vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem i neodređenostima, dat jed. (12.1–12.3), je *kvadratno stabilan* ako i samo ako postoje matrice $P>0$ i $Q>0$ i skalar $\delta>0$ tako da važi sledeći LMI uslov:

$$\begin{pmatrix} Q-P & 0 & A_0^T P & \delta N_{A_0}^T & 0 \\ * & -Q & A_1^T P & \delta N_{A_1}^T & 0 \\ * & * & -P & 0 & PM \\ * & * & * & -\delta I & 0 \\ * & * & * & * & -\delta I \end{pmatrix}<0, \tag{12.7}$$

Stojanović, *Debeljković* (2008.c).

Teorema 12.2 Vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem i neodređenostima, dat jed. (12.1–12.3), je *kvadratno stabilan* ako i samo ako postoje matrice $L>0$ i $W>0$ i skalar $e>0$ tako da važi sledeći LMI uslov:

$$\begin{pmatrix} W-L & 0 & LA_0^T & LN_{A_0}^T \\ * & -W & LA_1^T & LN_{A_1}^T \\ * & * & -L+eMM^T & 0 \\ * & * & * & -eI \end{pmatrix}<0, \tag{12.8}$$

Stojanović, *Debeljković* (2008.c).

Napomena 12.1 Lako se pokazuje da se *Teorema* 12.1 podudara sa *Teoremom* 1 u radu *Xu et al.* (2001.b). Naime, iz:

$$\begin{pmatrix} Q-P & 0 & A_0^T P & \delta N_{A_0}^T \\ * & -Q & A_1^T P & \delta N_{A_1}^T \\ * & * & -P+\delta^{-1} P M M^T P & 0 \\ * & * & * & -\delta I \end{pmatrix} < 0 . \tag{12.9}$$

sledi:

$$\begin{pmatrix} Q-P & 0 & A_0^T P \\ * & -Q & A_1^T P \\ * & * & -P+\delta^{-1} P M M^T P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta N_{A_0}^T \\ \delta N_{A_1}^T \\ 0 \end{pmatrix} \delta^{-1} \begin{pmatrix} \delta N_{A_0} & \delta N_{A_1} & 0 \end{pmatrix} < 0 , \tag{12.10}$$

$$\begin{pmatrix} Q-P+\delta N_{A_0} N_{A_0}^T + A_0^T \Gamma_1^{-1} A_0 & \delta N_{A_0} N_{A_1}^T + A_0^T \Gamma_1^{-1} A_1 \\ * & -\Gamma_2 \end{pmatrix} < 0 , \tag{12.11}$$

$$\begin{aligned} S \triangleq\; & Q-P+\delta N_{A_0} N_{A_0}^T + A_0^T \Gamma_1^{-1} A_0 \\ & + \left(\delta N_{A_0} N_{A_1}^T + A_0^T \Gamma_1^{-1} A_1\right) \Gamma_2^{-1} \left(\delta N_{A_0} N_{A_1}^T + A_0^T \Gamma_1^{-1} A_1\right)^T < 0 \end{aligned} , \tag{12.12}$$

gde je:

$$\delta \triangleq e^{-1} > 0, \quad \Gamma_1 \triangleq P^{-1} - \delta^{-1} M M^T > 0, \quad \Gamma_2 \triangleq Q - \delta N_{A_1} N_{A_1}^T - A_1^T \Gamma_1^{-1} A_0 > 0 . \tag{12.13}$$

Uslovi dati nejed. (12.12–12.13) su takođe izvedeni u radu *Xu et al.* (2001.b), ali na komplikovaniji način.

Potrebno je uočiti da uslovi dati nejed (12.12–12.13) nisu u formi LMI, tako da je postupak ispitivanja prilično komplikovan.

U radu *Xu et al.* (2001.b) ovaj problem je delimično rešen, na osnovu sledećeg algoritma:

1. Usvajaju se proizvoljne vrednosti za varijable P, Q i δ.

2. Proveravaju se uslovi dati nejed. (12.12–12.13). Ako ovi uslovi nisu ispunjeni, ide se na korak 1, a ako su ispunjeni sistem, dat jed. (12.1–12.3), je kvadratno stabilan.

Ako razmatrani sistem nije kvadratno stabilan, ovaj proces se stalno ponavlja.

U ovoj glavi, LMI uslovi dati nejed. (12.7) i nejed. (12.8) se svode na izvodljiv problem, *Boyd et al*. (1994), koji se može uspešno rešiti korišćenjem izvedenih algoritama konveksne optimizacije, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.c).

Primer 12.1 Razmatra se linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju i parametarskim neodređenostima, dati jed. (12.1–12.3), u slobodnom radnom režimu sa sledećim parametrima:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,4 \\ 0,2 & -0,6 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 \\ -0,1 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix},$$

$$N_{A_0} = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad N_{A_1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad h = 2,$$

Xu et al. (2001.b), (*Primer* 1).

Radi poređenja rezultata, prvo se ispituje stabilnost razmatranog sistema korišćenjem uslova datih nejed. (12.12) i nejed. (12.13) izvedenih u radu *Xu et al.* (2001.b) i zatim korišćenjem LMI uslova datih nejed. (12.7) i nejed. (12.8) dobijenih u ovoj glavi.

Uslovi dati nejed. (12.12) i nejed (12.13), *Xu et al.* (2001.b), (*Teorema* 1).

Usvaja se:

$$P = \begin{pmatrix} 0,7385 & 0,0882 \\ 0,0882 & 2,4882 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1,1486 & -0,0065 \\ -0,0065 & 1,2895 \end{pmatrix}, \quad \delta = 2,8430 .$$

Korišćenjem uslova datih nejed. (12.12) i nejed. (12.13) iz rada *Xu et al.* (2001.b) sledi:

$$S = \begin{pmatrix} 0,7483 & -0,1912 \\ -0,1912 & -0,0588 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 > 0, \quad \Gamma_2 > 0, \quad \lambda(S) = \{-0,102,\ 0,791\} \Rightarrow S \nless 0 ,$$

tako da je potrebno ponoviti prethodni korak za novi skup varijabli P, Q i δ. Pretpostavlja se da je usvojena sledeća matrica P:

$$P = \begin{pmatrix} 2,7385 & 0,0882 \\ 0,0882 & 4,4882 \end{pmatrix},$$

a vrednosti ostalih varijable se ne menjaju.

Tada se dobija:

$$\Gamma_1 > 0, \quad \Gamma_2 > 0, \quad S = \begin{pmatrix} -0,3789 & 0,1224 \\ 0,1224 & -0,7807 \end{pmatrix} < 0 .$$

Prema tome, na osnovu nejed. (12.12) i nejed. (12.13) sledi da je razmatrani sistem kvadratno stabilan.

LMI uslovi.

Za prethodni sistem, LMI uslovi dati nejed. (12.7) i nejed. (12.8) su izvodljivi i dobija se:

$$P=\begin{pmatrix}2,7385 & 0,0882\\ 0,0882 & 4,4882\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1,1486 & -0,0065\\ -0,0065 & 1,2895\end{pmatrix},\quad \delta=2,843,$$

$$L=\begin{pmatrix}231,524 & -12,297\\ -12,297 & 161,692\end{pmatrix},\quad W=\begin{pmatrix}98,998 & -7,472\\ -7,472 & 47,645\end{pmatrix},\quad e=145,45.$$

Iz *Teoreme* 12.1 ili *Teoreme* 12.2, sledi da je sistem kvadratno stabilan, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.c).

Literatura

Bo, Y., Z. Qing–Ling, C. Yue–Peng, "Robust Quadratic Stability and Stabilization with Integrity for Uncertain Discrete Singular Systems", *Facta Universitatis, Series Mechanical Engineering*, 2, (2004) 25–34.

Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

Chou, J. H., "Stability Robustness of Linear State Space Models with Structured Perturbations", *Systems Control Lett.*, 15, (1990) 207–210.

Esfahani, S. H., S. O. R. Moheimani, I. R. Petersen, "LMI Approach Suboptimal Quadratic Guaranteed Cost Control for Uncertain Time–Delay Systems", *IEE Proc. Control Theory A*, 145, (1998) 491–498.

Fridman, E., U. Shaked, "Delay–Dependent H_∞ Control of Uncertain Discrete Delay Systems", *European Journal of Control*, 11, (2005.a) 29–37.

Kapila, V., W. Haddad, "Memoryless H_∞ Controllers for Discrete–Time Systems with Time Delay", *Automatica*, 34, (1998) 1141–1144.

Li, X., C. De Souza, "Delay–Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems: A Linear Matrix Inequality Approach", *IEEE Trans. on Automat. Control*, 42, (1997) 1144–1148.

Mahmoud, M. S., "Robust H_∞ Control of Discrete Systems with Uncertain Parameters and Unknown Delays", *Automatica*, 36, (2000.a) 627–635.

Moheimani, S. O. R., I. R. Petersen, "Optimal Quadratic Guaranteed Cost Control of a Class of Uncertain Time–Delay Systems", *IEE Proc. Control Theory A*, 144, (1997) 183–188.

Shi, P., R. K. Agarwal, E. K. Boukas, S. P. Shue, "Robust H_∞ State Feedback Control of Discrete Time–Delay Linear Systems with Norm–Bounded Uncertainty", *Internat. J. Systems Sci*., 31, (2000) 409–415.

Song, S., J. Kim, C. Yim, H. Kim, "H_∞ Control of Discrete–Time Linear Systems with Time–Varying Delays in State", *Automatica*, 35, (1999) 1587–1591.

Su, H., J. Chu, "Robust H Control for Linear Time–Varying Uncertain Time–Delay Systems via Dynamic Output Feedback", *Internat. J. Systems Sci*., 30, (1999) 1093–1107.

Stojanović, S. B, D. Lj. Debeljković, "Quadratic Stability and Stabilization of Uncertain Linear Discrete Time Systems with State Delay: A LMI Approach", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, *Series B: Applications and Algorithms*, No. 2, (2008.c) 195–206.

Su, N. J., H. Y. Su, J. Chu, "Delay–Dependent Robust H_∞ Control for Uncertain Time–Delay Systems", *IEE Proc.Control Theory Appl*., Vol. 150, No. 5 (2003) 489–492.

Verriest, E. I., A. F. Ivanov, "Robust Stability of Delay–Difference Equations", *Proc. IEEEE Conf. on Dec. and Control*, New Orleans, LA, (1995) 386–391.

Wu, M., Y. He, J. H. She, G. P. Liu, "Delay–Dependent Criteria for Robust Stability of Time–Varying Delay Systems", *Automatica*, 4, (2004) 1435–1439.

Xia, Y., Y. Jia, "Robust Control of State Delayed Systems with Polytrophic Type Uncertainties via Parameter–Dependent Lyapunov Functionals", *Systems Control Lett*., 50, (2003) 183–193.

Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Quadratic Stability and Stabilization of Uncertain Linear Discrete–Time Systems with State Delay", *Systems Control Lett*., 43, (2001.b) 77–84.

Yue, D., Q. L. Han, "Delayed Feedback Control of Uncertain Systems with Time–Varying Input Delay", *Automatica*, 41, (2005) 233–240.

Zeng, X. J., "Robust Stability for Linear Discrete–Time Systems with Structured Perturbations", *Internat. J. Control*, 61, (1995) 739–748.

VIII STABILNOST U SMISLU LJAPUNOVA VELIKIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

13. STABILNOST VELIKIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

Oslanjajući se na dostupne izvore, prvenstveno na lit. *Grujić* (1972, 1974), lako se uočava da se pravi interes za proučavanje *velikih, vremenski diskretnih sistema* pojavio znatno kasnije u odnosu na kontinualne.

Tako, u prvom radu posvećenom ovoj klasi sistema, *Araki et al.* (1971), proučava se jedna veoma uska klasa *velikih, nelinearnih, nestacionarnih sistema*.

U radu *Grujić, Šiljak* (1972.a) određeni su dovoljni uslovi stabilnosti jedne šire klase *velikih, vremenski diskretnih sistema*.

Ljapunovsku stabilnost kako *vremenski kontinualnih* tako i *vremenski diskretnih* velikih sistema, prvi su razmatrali *Lee, Radović* (1987, 1988). U nastavku se razmatra odgovarajuća problematika vezana za ispitivanje pomenutog koncepta stabilnosti *velikih, vremenski diskretnih sistema*.

Razmatra se linearni, vremenski diskretni, veliki, autonomni sistem sastavljen od N međusobno povezanih podsistema S_i.

U dinamičkom smislu svaki podsistem S_i opisan je svojom vektorskom diferencnom jednačinom stanja:

$$\mathrm{S}_i:\quad \mathbf{x}_i\left(k+1\right)=A_i\,\mathbf{x}_i\left(k\right)+\sum_{j=1}^{N}A_{ij}\,\mathbf{x}_j\left(k-h_{ij}\right), \tag{13.1.a}$$

i pridruženom funkcijom početnih stanja:

$$\mathbf{x}_i(\theta) = \boldsymbol{\psi}_i(\theta), \quad \theta \in \left\{-h_{m_i}, -h_{m_i}+1 \ , \ \ldots \ , \ 0\right\}, \quad 1 \le i \le N \ . \tag{13.1.b}$$

$\mathbf{x}_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ je vektor stanja, $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ označava matricu sistema a $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ predstavljaju matrice veza između i–tog i j–tog podsistema.

Konstantno čisto vremensko kašnjenje h_{ij} uzima vrednost iz skupa pozitivnih celih brojeva $h_{m_i} = \max\limits_{j} h_{ji}$.

Neka je data skalarna funkcija $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tako da je ista $V\left(\mathbf{x}(k)\right)$ ograničena za sve vrednosti svog argumenta $\mathbf{x}$ za koje je njegova norma $\|\mathbf{x}\|$, takođe, ograničena.

Posmatra se, prvo, sistem, dat jed. (13.1), sastavljen od dva podsistema, $N = 2$.

Teorema 13.1 Neka je dat sledeći sistem matričnih jednačina:

$$R_1^{h_{m1}+1} - R_1^{h_{m1}} A_1 - R_1^{h_{m1}-h_{11}} A_{11} - R_1^{h_{m1}-h_{21}} S\, A_{21} = 0 \,, \tag{13.2}$$

$$R_1^{h_{m2}+1} S - R_1^{h_{m2}} S\, A_2 - R_1^{h_{m2}-h_{22}} S\, A_{22} - R_1^{h_{m2}-h_{12}} A_{12} = 0 \,, \tag{13.3}$$

pri čemu su A_1, A_2, A_{11}, A_{12}, A_{21} i A_{22} matrice sitema, datog jed. (13.1), za $N = 2$, a sa (n_i) je označena dimenzionalnost podsistema, *Stojanović, Debeljković* (2004.b).

Ukoliko postoji rešenje sistema matričnih jednačina (13.2–13.3) po nepoznatim matricama $R_1 \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ i $S \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ tada sopstvene vrednosti matrice R_1 pripadaju skupu korena karakteristične jednačine sistema, datog jed. (13.1), za $N = 2$.

Teorema 13.2 Neka je dat sledeći sistem matričnih jednačina:

$$R_2^{h_{m2}+1} - R_2^{h_{m2}} A_2 - R_2^{h_{m2}-h_{22}} A_{22} - R_2^{h_{m2}-h_{12}} S\, A_{12} = 0 \,, \tag{13.4}$$

$$R_2^{h_{m1}+1} S - R_2^{h_{m1}} S\, A_1 - R_2^{h_{m1}-h_{11}} S\, A_{11} - R_2^{h_{m1}-h_{21}} A_{21} = 0 \,, \tag{13.5}$$

pri čemu su A_1, A_2, A_{11}, A_{12}, A_{21} i A_{22} matrice sitema, datog jed. (13.1), za $N = 2$, a sa (n_i) je označena dimenzionalnost podsistema. Ukoliko postoji rešenje sistema matričnih jednačina (13.4–13.5) po nepoznatim matricama $R_2 \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ i $S \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_1}$ tada sopstvene vrednosti matrice R_2 pripadaju skupu korena karakteristične jednačine sistema, datog jed. (13.1), za $N = 2$, *Stojanović, Debeljković* (2004.b).

Posledica 13.1 Ako je sistem, dat jed. (13.1), asimptotski stabilan tada su matrice R_1 i R_2, definisane jed. (13.2–13.3) i jed. (13.4–13.5), sledstveno, *diskretno stabilne*, *Stojanović, Debeljković* (2004.b)

Definicija 13.1 Matrice R_1, odnosno R_2, koje zadovoljavaju sistem matričnih jednačina (13.2–13.3), odnosno jed. (13.4–13.5), sledstveno, nazivamo *solventima* ovih sistema matričnih jednačina, *Stojanović, Debeljković* (2004.b)

Definicija 13.2 Koren karakteristične jednačine sistema, datog jed. (13.1), $\lambda_m \subset \Sigma$ sa maksimalnim modulom $\left(|\lambda_m| = \max|\Sigma| = \max_i |\lambda_i(\mathrm{A})|\right)$, naziva se *maksimalni koren* (*sopstvena vrednost*) sistema, datog jed. (13.1) , *Stojanović, Debeljković* (2004.b)

Definicija 13.3 Svaki solvent R_m sistema matričnih jed. (13.2–13.3), odnosno jed. (13.4–13.5), čiji spektar sadrži maksimalnu sopstvenu vrednost λ_m sistema, datog jed. (13.1), naziva se *maksimalni solvent*, *Stojanović, Debeljković* (2004.b)

Teorema 13.3 Pretpostavlja se da postoji najmanje jedan maksimalni solvent sistema matričnih jed. (13.2–13.3) i sa R_{1m} se označava jedan od njih.

Tada je sistem, dat jed. (13.1), za $N = 2$, *asimptotski stabilan* ako i samo ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P = P^* > 0$ kao rešenje sledeće diskretne Ljapunovljeve jednačine:

$$R_{1m}^* P R_{1m} - P = -Q\,, \tag{13.6}$$

Stojanović, *Debeljković* (2004.b).

Teorema 13.4 Pretpostavlja se da postoji najmanje jedan maksimalni solvent sistema matričnih jed. (13.4–13.5) i sa R_{2m} se označava jedan od njih.

Tada je sistem, dat jed. (13.1), za $N = 2$, *asimptotski stabilan* ako i samo ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P = P^* > 0$ kao rešenje sledeće diskretne Ljapunovljeve jednačine:

$$R_{2m}^* P R_{2m} - P = -R\,, \tag{13.7}$$

Stojanović, *Debeljković* (2004.b).

Iz predhodnog izlaganja sledi da je za ispitivanje asimptotske stabilnosti sistema, datog jed. (13.1), sasvim svejedno da li se koristi matrica R_{1m} ili R_{2m}.

U vezi toga uvodi se sledeća definicija.

Definicija 13.4 Vremenski diskretni sistem:

$$\mathbf{x}(k+1) = R_{im}\,\mathbf{x}(k), \tag{13.8}$$

gde je matrica R_{im} maksimalni solvent sistema matričnih jed. (13.2–13.3) za $i=1$, odnosno maksimalni solvent sistema matričnih jed. (13.4–13.5) za $i=2$, naziva se i–ti *diskretni, ekvivalentni sistem* koji odgovara diskretnom, velikom sistemu sa kašnjenjem, datom jed. (13.1). Matrica R_{im} naziva se matricom i–tog diskretnog, ekvivalentnog sistema, *Stojanović, Debeljković* (2004.b).

Dakle, i–ti diskretni, ekvivalentni sistem se može iskoristiti za ispitivanje stabilnosti odgovarajućeg diskretnog, velikog sistema sa kašnjenjem, što je u numeričkom smislu mnogo jednostavniji problem.

Zaključak 13.1 U većini slučajeva, ukoliko se dati veliki, linearni, vremenski diskretni sistem sastoji od N podsistema, moguće mu je pridružiti N odgovarajućih diskretnih, ekvivalentih sistema. Svaki od njih se, sasvim ravnopravno, može iskoristiti za ispitivanje stabilnosti polaznog velikog sistema. Jedini uslov je da postoji bar jedan maksimalni solvent kao rešenje odgovarajućeg sistema matričnih jed. (13.2–13.3), ili jed. (13.4–13.5), *Stojanović, Debeljković* (2004.b).

Zaključak 13.2 Matrične jed. (13.6) i jed. (13.7) su u formi Ljapunovljevih matričnih jednačina ispisanih za obične sisteme bez kašnjenja, kao da je u pitanju sistem, dat jed. (13.8).

Matrica R_{im} sadrži neohodne informacije u odnosu na potrebne osobine i strukturu organizovanosti razmatranog velikog, diskretnog sistema. Prema tome, ispitivanje stabilnosti velikog, diskretnog sistema može se svesti na proveru ove značajne osobine na diskretnom, ekvivalentom sistemu.

Dimenzija sistema, datog jed. (13.1), iznosi $\left(n_1\left(h_{m_1}+1\right)+n_2\left(h_{m_2}+1\right)\right)$ (videti *Teoremu* 13.7). Nasuprot tome, dimenzija i–tog diskretnog, ekvivalentnog sistema iznosi samo n_i, pa je očigledna razlika u redovima ova dva sistema.

Zbog toga je predložena metoda ispitivanja stabilnosti sistema, datog jed. (13.1), u prednosti nad tradicionalnom procedurom ispitivanja stabilnosti pomoću sopstvenih vrednosti matrice ekvivalentnog sistema (videti *Teoremu* 13.7).

U postojećoj literaturi ne postoje adekvatne numeričke metode za direktno izračunavanje maksimalnih solvenata sistema matričnih jed. (13.2–13.3) ili jed. (13.4–13.5). Do pojedinačnog rešenja pomenutih jednačina može se doći primenom minimizacionih metoda, koje zahtevaju početno pogađanje. Pri tome konvergencija ovih rešenja direktno zavisi od početnog pogađanja.

Maksimalni solvent se dobija izdvajanjem bilo kog solventa, iz ovako dobijenog skupa rešenja pomenutih sistema matričnih jednačina, koji sadrži maksimalnu sopstvenu vrednost λ_m.

Nedostatak ove metode zasniva se na činjenici da maksimalni solvent uopšte ne mora da egzistira. U tom slučaju predložena metoda se ne može iskoristiti za ispitivanje stabilnosti sistema, datog jed. (13.4), *Stojanović, Debeljković* (2004.b).

U nastavku se razmatra *veliki*, *vremenski diskretni sistem sa kašnjenjem*, dat jed. (13.1), sačinjen od N podsistema.

Teorema 13.5 Neka je dat sledeći sistem matričnih jednačina:

$$R_\ell^{h_{m_i}+1} S_i - R_\ell^{h_{m_i}} S_i A_i - \sum_{j=1}^{N} R_\ell^{h_{m_i}-h_{ji}} S_j A_{ji} = 0,\ S_i \in \mathbb{C}^{n_\ell \times n_i},\ S_\ell = I_{n_\ell},\ 1 \le i \le N, \quad (13.9)$$

za dato $\ell,\ 1 \le \ell \le N$, pri čemu su A_i i A_{ji}, $1 \le i \le N$, $1 \le j \le N$, matrice sistema, datog jed. (13.1), n_i redovi podsistema i h_{ij} kašnjenje u sistemu. Ukoliko za dato $\ell,\ 1 \le \ell \le N$, postoji rešenje sistema matričnih jednačina (13.9), po nepoznatim matricama $R_\ell \in \mathbb{C}^{n_\ell \times n_\ell}$ i S_i, $1 \le i \le N$, $i \ne \ell$, tada važi $\sigma(R_\ell) \subset \sum_N$, gde je $\sum_N$ skup svih korena karakteristične jednačine sistema, datog jed. (13.1), *Stojanović, Debeljković* (2004.b).

Teorema 13.6 Pretpostavlja se da postoji najmanje jedan maksimalni solvent sistema matričnih jednačina (13.9) za dato $\ell,\ 1 \le \ell \le N$ i neka $R_{\ell n}$ označava jedan od njih. Tada je sistem, dat jed. (13.1), *asimptotski stabilan* ako i samo ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P = P^* > 0$ kao rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$R_{\ell m}^{*} P R_{\ell m} - P = -Q \,, \tag{13.10}$$

Stojanović, *Debeljković* (2004.b).

U nastavku sledi potreban i dovoljan uslov asimptotske stabilnosti sistema, datog jed. (13.1), iskazan preko stabilnosti sistema bez kašnjenja, pomoću takozvane ekvivalentne matrice A_{eq}.

Naime, sledeća teorema bazira se na činjenici da diskretni sistem sa kašnjenjem pripada klasi konačno dimenzionalnih sistema.

Red ovih sistema je vrlo visok i zavisi od kašnjenja.

Teorema 13.7 Sistem, dat jed. (13.1), je *asimptotski stabilan* ako i samo ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\rho\left(A_{eq}\right) < 1 \,, \tag{13.11}$$

gde je matrica A_{eq} definisana na sledeći način:

$$A_{eq} = \left(A_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{N_e \times N_e}, \quad N_e = \sum_{i=1}^{N} n_i (h_{m_i} + 1), \quad h_{m_i} = \max_j h_{ji} \,, \tag{13.12}$$

$$A_{eqii} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & \dots & \dots & h_{ii}+1 & & \\ \downarrow & & & \downarrow & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc|c} A_i & 0 & \dots & A_{ii} & \dots & 0 & 0 \\ \hline I_{n_i} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_i} & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & I_{n_i} & 0 \end{array}\right) \end{array} \in \mathbb{R}^{n_i\left(h_{m_i}+1\right) \times n_i\left(h_{m_i}+1\right)} \,, \tag{13.13}$$

$$A_{eqij} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & \dots & h_{ij}+1 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & \dots & A_{ij} & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \end{array} \in \mathbb{R}^{n_i\left(h_{m_i}+1\right) \times n_j\left(h_{m_j}+1\right)} \,, \tag{13.14}$$

pri čemu su A_i i A_{ij}, $1 \le i \le N$, $1 \le j \le N$, matrice sistema, datog jed. (13.1), *Stojanović, Debeljković* (2004.b).

Literatura

Araki, M., K. Ando, B. Kondo, "Stability of Sampled–Data Composite Systems with Many Nonlinearities", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–16 (1), (1969) 22–27.

Grujić, Lj. T., *Large–Scale Sysems Stability*, (in Serbian), Faculty of Mechanical Eng., Belgrade, 1974.

Grujić, Lj. T., D. D. Šiljak, "On Stability of Discrete Composite Systems", *Proc. Princeton Conf. On Information Science and Systems*, Priceton, March, (1972.b) 23–24.

Grujić, Lj. T., D. D. Šiljak, "Stability of Large–Scale Systems with Stable and Unstable Systems" *Proc. JACC Conference*, California (USA), (1972.a).

Kalman, R. E., J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the 'Second Method' of Lyapunov, I – Continuous Time Systems", *Trans. AMSE J. Basic Eng*., 82, June, (1960.a) 371–393.

Kalman, R. E., J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the 'Second Method' of Lyapunov, II – Discrete Time Systems", *Trans. AMSE J. Basic Eng*., 82, June, (1960.b) 394–400.

Lee, T. N., U. L. Radović, "General Decentralized Stabilization of Large–Scale Linear Continuous and Continuous Time–Delay Systems," *Int. J. Contr*., Vol. 46, No. 6, (1987) 2127–2140.

Lee, T. N., U. L. Radović, "Decentralized Stabilization of Linear Continuous and Continuous Time–Delay Systems with Delays in Interconnections," *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. AC–33, (1988) 757–761.

Mori, T., N, Fukuma, M. Kuwahara, "On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems", *Int. J. Control*, 36 (1), (1982.a) 95–97.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Large Scale Time Delay Autonomous System", *7th Biennial ASME Conference Eng. Systems Design and Analysis*, *ESDA* 2004, Manchester (UK), July 19–22, (2004.b) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Large Scale Time Delay Autonomous System", *CDIC* 2004, Nanjing (China), August 18–20, (2004.e) CD–Rom.

Stojanović S. B., D. Lj. Debeljković, "Stability of Large Scale Linear Discrete Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions", *Proc. The 5th Edition of IFAC Knowledge and Technology Transfer Conference Series on Automation for Buliding the Infrastructure in Developing Countries* (DECOM 2007), Cesme–Izmir (Turkey), May 17–19, (2007.a) CD–Rom.

Stojanović S. B., D. Lj. Debeljković, "Delay–Dependent Criteria for Stability of Large–Scale Linear Discrete Time–Delay Systems", *Proc. European Control Conference* (ECC), Kos (Greece), July 2–5, (2007.b) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Delay–Dependent Stability of Linear Large Scale Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 4, No. 2, (2008.b) 241–250.

IX STABILNOST U SMISLU LJAPUNOVA VELIKIH VREMENSKI KONTINUALNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

14. STABILNOST VELIKIH VREMENSKI KONTINUALNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

Prema dostupnim saznanjima autora, prvi rad koji se bavio ljapunovskom stabilnošću *velikih*, *vremenski kontinualnih sistema*, je rad *Bailey*–a (1966), gde je razmatrana pomenuta klasa sistema sa eksponencijalno stabilnim podsistemima, da bi se ova problematika u radu *Grujić, Šiljak* (1972.a) bila proširena i na sisteme sa eksponencijalno nestabilnim podsistemima.

U hronološkom redu mogu se navesti i značajni doprinosi koji su dati u lit. *Michel* (1970.b), *Thomson* (1970) i *Šiljak* (1971), barem kada je reč o vremenski kontinualnim sistemima.

Analizirajući dalje veliko interesovanje autora na ovom polju, može se sa sigurnošću reći, da je na ovim prostorima izuzetne rezultate i doprinose na ovom polju dao *Grujić* (1972, 1974) u svojoj doktorskoj disertaciji i u brojnim, kasnije publikovanim radovima, koji su pobrojani u monografiji *Grujić et al*. (1984) koja, po oceni autora ove disertacije, sigurno predstavlja najveći domet u ljapunovskoj stabilnosti najrazličitijih klasa *vremenski kontinualnih*, *velikih sistema*.

Proširenje koncepta stabilnosti u smislu Ljapunova na klasu linearnih, vremenski kontinualnih, velikih sistema sa kašnjenjem dato je u lit. *Lee, Radović* (1987, 1988), *Wang et al.* (1995) i *Wang, Mau* (1997).

Razmatra se linearni, vremenski kontinualni, veliki, autonomni sistem sastavljen od N međusobno povezanih podsistema S_i.

U dinamičkom smislu svaki podsistem S_i opisan je svojom vektorskom diferencijalnom jednačinom stanja:

$$\mathrm{S}_i: \quad \dot{\mathbf{x}}_i(t) = A_i \mathbf{x}_i(t) + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \mathbf{x}_j(t - \tau_{ij}), \tag{14.1}$$

i pridruženom funkcijom početnih stanja:

$$\mathbf{x}_i(\theta) = \boldsymbol{\varphi}_i(\theta), \quad \theta \in \left\{-\tau_{m_i},\ 0\right\}, \quad 1 \le i \le N, \tag{14.2}$$

gde je $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ vektor stanja podsistema, $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ označavaju matrice podsistema a $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ reprezentuju matrice uspostavljenih veza između i–tog i j–tog podsistema. Sa τ_{ij} ozačeno je čisto vremensko kašnjenje, dok je $\tau_{m_i} = \max_j \tau_{ji}$.

Neka je data skalarna funkcija V: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tako da je ista $V(\mathbf{x}(t))$ ograničena za sve vrednosti svog argumenta $\mathbf{x}$ za koje je njegova norma $\|\mathbf{x}\|$, takođe, ograničena.

Izlažu se rezultati, u osnovi, dati u radu *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

Razmatra se, prvo, veliki sistem koji se sastoji samo od dva podsistema, tj. $N = 2$.

Teorema 14.1 Neka je dat sledeći sistem matričnih jednačina:

$$R_1 - A_1 - e^{-R_1 \tau_{11}} A_{11} - e^{-R_1 \tau_{21}} S\, A_{21} = 0, \tag{14.3}$$

$$R_1 S - S\, A_2 - e^{-R_1 \tau_{21}} A_{12} - e^{-R_1 \tau_{22}} S\, A_{22} = 0, \tag{14.4}$$

pri čemu su: A_1, A_2, A_{11}, A_{12}, A_{21} i A_{22} matrice sitema, datog jed. (14.1), za $N = 2$, (n_i) red podsistema i τ_{ij} vremensko kašnjenje sistema.

Ukoliko postoji rešenje sistema matričnih jednačina (14.3–14.4) po nepoznatim matricama $R_1 \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ i $S \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$, tada sopstvene vrednosti matrice R_1 pripadaju skupu korena karakteristične jednačine sistema, datog jed. (14.1), za $N = 2$, *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

Teorema 14.2 Neka je dat sledeći sistem matričnih jednačina:

$$R_2 - A_2 - e^{-R_2 \tau_{12}} S\, A_{12} - e^{-R_2 \tau_{22}} A_{22} = 0, \tag{14.5}$$

$$R_2 S - S\, A_1 - e^{-R_2 \tau_{11}} A_{11} - e^{-R_2 \tau_{21}} A_{21} = 0, \tag{14.6}$$

gde su: A_1, A_2, A_{11}, A_{12}, A_{21} i A_{22} matrice sitema, datog jed. (14.1), za $N = 2$, (n_i) red podsistema i τ_{ij} vremensko kašnjenje sistema. Ukoliko postoji rešenje sistema matričnih jednačina (14.5–14.6) po nepoznatim matricama $R_2 \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ i $S \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_1}$, tada sopstvene vrednosti matrice R_2 pripadaju skupu korena karakteristične jednačine sistema, datog jed. (14.1), za $N = 2$, *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

Posledica 14.1 Ako je sistem, dat jed. (14.1), asimptotski stabilan, tada su matrice R_1 i R_2, definisane jed. (14.3–14.4) i jed. (14.5–14.6), stabilne (*Hurvicove*) matrice, sledstveno, *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

Definicija 14.1 Matrica R_1 (R_2) naziva se *solvent* sistema matričnih jednačina (14.3–14.4) (jed. (14.5–14.6)).

Definicija 14.2 Svaki koren karakteristične jednačine λ_m sistema, datog jed. (14.1), koji zadovoljava sledeći uslov:

$$\lambda_m = \left\{ s_m : s_m \in \Sigma, \operatorname{Re} s_m = \max \left\{ \operatorname{Re} s : s \in \Sigma \right\} \right\}, \tag{14.7}$$

naziva se *maksimalni* koren (maksimalna sopstvena vrednost) sistema, datog jed.(14.1).

Valja uočiti da je λ_m u stvari koren karakteristične jednačine $g(s) \triangleq \det G(s,S) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j$, $a_j \in \mathbb{R}$, sa najvećim realnim delom.

Definicija 14.3 Svaki solvent R_{1m} (R_{2m}) sistema matričnih jednačina (14.3–14.4) (jed. (14.5–14.6)), čiji spektar sadrži najveću sopstvenu vrednost λ_m sistema, datog jed. (14.1), naziva se *maksimalni solvent* datog sistema matričnih jednačina.

Teorema 14.3 Pretpostavlja se da postoji najmanje jedan maksimalni solvent sistema matričnih jednačina (14.3–14.4) i označava se sa R_{1m}.

Tada je sistem, dat jed. (14.1), za $N = 2$, *asimptotski stabilan* ako i samo ako za proizvoljno izabranu matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P = P^* > 0$ kao rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$R_{1m}^* P + P R_{1m} = -Q, \tag{14.8}$$

Stojanović, *Debeljković* (2005.d).

Teorema 14.4 Pretpostavlja se da postoji najmanje jedan maksimalni solvent sistema matričnih jednačina (14.5–14.6) i označava se sa R_{2m}.

Tada je sistem, dat jed. (14.1), za $N = 2$, *asimptotski stabilan* ako i samo ako za proizvoljno izabranu matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P = P^* > 0$ kao rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$R_{2m}^* P + P R_{2m} = -Q, \tag{14.9}$$

Stojanović, *Debeljković* (2005.d).

Iz prethodno rečenog i pokazanog nedvosmisleno sledi zaključak, da nema razlike u testiranju asimptotske stabilnosti razmatranog sistema bilo da se, tom prilikom, koristi matrica R_{1m} ili matrica R_{2m}.

S tim ciljem i da bi se još pojasnili neki detalji uvodi se sledeća definicija.

Definicija 14.4 Vremenski kontinualni, linearni sistem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = R_{im}\,\mathbf{x}(t), \tag{14.10}$$

gde je matrica R_{im} definisana jed. (14.3–14.4) za $i = 1$ i jed. (14.5–14.6) za $i = 2$, sledstveno, naziva se i–ti *kontinualni*, *ekvivalentni sistem* za kontinualni, veliki sistem sa kašnjenjem. Matrica R_{im} naziva se matricom i–tog *kontinualnog*, *ekvivalentnog sistema*. Oznaka za i–ti kontinualni, ekvivalentni sistem podrazumeva da se *kontinualni*, *ekvivalentni sistem bez kašnjenja* može pridružiti odgovarajućem *kontinualnom*, *linearnom*, *velikom sistemu sa kašnjenjem*, ranije datog jed. (14.1), *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

Zaključak 14.1 Matrične jed. (14.8) i jed. (14.9) date su u formi koje odgovaraju Ljapunovljevim matričnim jednačinama za obične, vremenski kontinualne sisteme (bez kašnjenja), jed. (14.10). U tom smislu matrica R_{im} sadrži informaciju o odgovarajućem vremenski kontinualnom, velikom sistemu i njegovoj strukturi, *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

Zaključak 14.2 Primenjujući *Teoremu* 14.3 i *Teoremu* 14.4, ispitivanje stabilnosti sistema, datog jed. (14.1), svodi se na ispitivanje stabilnosti odgovarajućeg i–tog ekvivalentnog, kontinualnog sistema koji je ustvari običan (klasičan), linearni, vremenski kontinualni sistem bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja.

Dimenzija sistema, datog jed. (14.1), je beskonačna, dok je dimenzija i–tog ekvivalentnog, kontinualnog sistema konačna i iznosi n_i, *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

Zaključak 14.3 Za ispitivanje stabilnost sistema, datog jed. (14.1), *Teorema* 14.3 i *Teorema* 14.4 su međusobno u potpunosti jednake. Prema tome, može se zaključiti da ne postoji razlika u ispitivanju asimptotske stabilnosti razmatranog sistema bilo da se koristi matrica R_{1m} ili R_{2m}. Jedini uslov je da postoji najmanje jedna od ovih matrica kao rešenje odgovarajućeg sistema matričnih jednačina. U suprotnom, nemoguće je primeniti ove teoreme, *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

Zaključak 14.4. Prezentovani kriterijumi stabilnosti su izraženi u formi potrebnih i dovoljnih uslova i kao takvi nemaju konzervatizam kao postojeći dovoljni kriterijumi stabilnosti, *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

Zaključak 14.5 Prema dostupnim saznanjima, u postojećoj literaturi, ne postoje adekvatne numeričke metode za direktno izračunavanje maksimalnih solvenata R_{1m} ili R_{2m} sistema matričnih jednačina (14.3–14.4) ili (14.5–14.6), sledstveno. Umesto toga, korišćenjem različitih početnih vrednosti solvenata R_i, prvo se određuje što je moguće širi skup rešenja sistema matričnih jednačina (14.3–14.4) ili (14.5–14.6) primenjujući, na primer, metodu minimizacije koja se zasniva na nelinearnom algoritamu najmanjih kvadrata. Početne vrednosti solvenata direktno utiču na konvergenciju rešenja. Konačno, iz tako dobijenog skupa rešenja, maksimalni solvent se dobija izolovanjem solventa čije sopstvene vrednosti odgovaraju korenu karakteristične jednačine sistema, datog jed. (14.1), sa najvećim realnim delom, *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

U nastavku se razmatra vremenski kontinualni, veliki sistem sa kašnjenjem, dat jed. (14.1), sastavljen od N podsistema.

Teorema 14.5 Neka je dat sledeći sistem matričnih jednačina:

$$R_l\, S_i - S_i\, A_i - \sum_{j=1}^{N} e^{-R_l\, \tau_{ji}} S_j\, A_{ji} = 0, \quad S_i \in \mathbb{C}^{n_l \times n_i}, \quad S_l = I_{n_l}, \quad 1 \le i \le N\,, \qquad (14.11)$$

za dato l, $1 \leq l \leq N$, gde su A_i i A_{ji}, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq N$ matrice sistema, datog jed. (14.1). τ_{ji} je vremensko kašnjenje posmatranog sistema.

Ukoliko postoji solvent sistema matričnih jednačina (14.11) po nepoznatim matricama $R_l \in \mathbb{C}^{n_l \times n_l}$ i S_i, $1 \leq i \leq N$, $i \neq l$, tada sopstvene vrednosti matrice R_l pripadaju skupu korena karakteristične jednačine sistema, datog jed. (14.1), *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

Teorema 14.6 Pretpostavlja se da postoji najmanje jedan maksimalni solvent sistema matričnih jednačina (14.11) za dato l, $1 \leq l \leq N$ i neka R_{lm} označava jedan od njih. Tada je linearni, vremenski kontinualni, veliki sistem, dat jed. (14.1), *asimptotski stabilan* ako i samo ako za proizvoljno izabranu matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P = P^* > 0$ kao rešenje sledeće Ljapunovljeve matrične jednačine:

$$R_{ln}^* P R_{ln} - P = -Q, \tag{14.12}$$

Stojanović, *Debeljković* (2005.d).

Zaključak 14.6 Neka od N sistema matričnih jednačina, koji su definisani jed. (14.11), njih $M \leq N$ daju kao rešenje maksimalne solvente. Tada je velikom, linearnom, vremenski kontinualnom sistemu, datom jed. (14.1), moguće pridružiti M odgovarajućih ekvivalentnih, kontinualnih sistema koji se, međusobno potpuno ravnopravno, mogu iskoristiti za ispitivanje stabilnosti polaznog velikog sistema, *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

Literatura

Bailey, F. N., “The Aplication of Lyapunov’s Second Method to Interconnected Systems”, *SIAM J. Control*, Ser. A., Vol. 3, No. 3, (1966) 443–462.

Grujić, Lj. T., *Large–Scale Systems Stability*, Ph. D. Thesis (in Serbian), Mechanical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, May, 1972.

Grujić, Lj. T., *Stabilnost velikih sistema*, Mašinski fakultet, Beograd, 1974.

Grujić, Lj. T., D. D. Šiljak, “Stability of Large–Scale Systems with Stable and Unstable Systems”, *Proc. JACC Conference*, California (USA), (1972.a).

Grujić, Lj. T., A. A. Martinjuk, M. Ribbens–Pavella, *Stability of Large Scale Systems under Structural and Singular Disturbances*, Naukova Dumka, Kiev, 1984.

Hale, J. K, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1977.

Lee, T. N., U. L. Radović, "General Decentralized Stabilization of Large–Scale Linear Continuous and Continuous Time–Delay Systems", *Int. J. Contr.*, Vol. 46, No. 6, (1987) 2127–2140.

Lee, T. N., U. L. Radović, "Decentralized Stabilization of Linear Continuous and Continuous Time–Delay Systems with Delays in Interconnections", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC–33, (1988) 757–761.

Michel, A. N., "Quantitive Analysis of Simple and Interconnected Systems: Stability, Boundedness and Trajectory Behavior", *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT–17, (3), (1970.b) 292–301.

Mori, T., N, Fukuma, M. Kuwahara, "On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems", *Int. J. Control*, 36 (1), (1982.a) 95–97.

Sandell, R. N., *et al*., "Survey of Decentralized Control Methods for Large Scale Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC–23, (1978) 108–128.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Continuous Large Scale Time Delay Autonomous System", *Preprints* 2nd *IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Oaxaca (Mexico), December 8–10, (2004.j) CD–Rom.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Continuous Large Scale Time Delay Autonomous Systems", *Asian Journal of Control* (Taiwan), Vol. 7, No. 4, (2005.d) 414–418.

Šiljak, D. D., "On Large–Scale System Stability", *Proc. The Ninth Annual Alerton Conf. on Citcuit and System Theory,* Monticello, Illinois, October 6–8, (1971).

Thompson, W. E., "Exponential Stability of Interconnected Systems", *IEEE Trans*., AC–15, No. 4, (1970) 504–506.

Wang, W. J., R. J. Wang, C. S. Chen, "Stabilization, Estimation and Robustness for Continuous Large Scale Systems with Delays", *Contr. Theory Advan. Technol.*, Vol. 10, No. 4, (1995) 1717–1736.

Wang, W. J., G. L. Mau, "Stabilization and Estimation for Perturbed Continuous Time–Delay Large–Scale Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC–42, No. 9, (1997) 1277–1282.

X STABILNOST VELIKIH INTERVALNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

15. STABILNOST VELIKIH INTERVALNIH VREMENSKI KONTINUALNIH I DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

Tokom poslednjih godina, izučavanje sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem privlači značajnu pažnju s obzirom da je čisto vremensko kašnjenje često izvor nestabilnosti i postoji u različitim industrijskim, biološkim i privrednim sistemima usled konačne brzine obrade informacija.

Intervalni sistemi, sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem su ekstenzivno izučavani tokom poslednjih godina u lit. *Bialas* (1983), *Daoyi* (1985), *Yedavalli* (1986), *Jiang* (1987), *Petkovski* (1988), *Soh, Evans* (1988), *Soh* (1991), *Wang, Lin* (1991) i *Chen* (1992), a sistemi bez prisustva čisto vremenskih kašnjenja u lit. *Ozturk* (1988), *Wang, Lin* (1991), *Lee, Hsien* (1997.b), *Sun* (1997). Glavni razlog ne leži samo u teoretskom interesovanju već zbog toga što su intervalni sistemu moćan alat za analizu robusnosti sistema, lit. *Su, Huang* (1992), *Niculescu et al.* (1994), *Li, De Souza* (1997), *Lee, Lee* (1999), *Huang, Zhou* (2000), *Han, Gu* (2001), *Kim* (2001) i *Xu et al.* (2001.b).

Prema dostupnim saznanjima, postoji mali broj raziltata koji se tiču analize stabilnosti velikih, intervalnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. U to smislu, na osnovu rezultata iz rada *Lee, Hsien* (1997.b), prezentovaće se dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti velikih, intervalnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem korišćenjem *Gersgorin*–ove teoreme. Razmatraju se vremenski kontinualni i diskretni sistemi.

Razmatra se linearni, kompozitni sistem definisan sa dva međusobno povezana podsistema S_1 i S_2 sa čisto vremenskim kašnjenjima:

i) u slučaju vremenski kontinualnog sistema:

$$\begin{aligned} S_1 &: \dot{\mathbf{x}}_1(t) = A_1\,\mathbf{x}_1(t) + A_{11}\,\mathbf{x}_1(t-\tau_{11}) + A_{12}\,\mathbf{x}_2(t-\tau_{12}) \\ S_2 &: \dot{\mathbf{x}}_2(t) = A_2\,\mathbf{x}_2(t) + A_{22}\,\mathbf{x}_2(t-\tau_{22}) + A_{21}\,\mathbf{x}_1(t-\tau_{21}) \end{aligned}, \tag{15.1}$$

ii) u slučaju vremenski diskretnog sistema:

$$\begin{aligned} S_1 &: \mathbf{x}_1(k+1) = A_1\,\mathbf{x}_1(k) + A_{11}\,\mathbf{x}_1(k-h_{11}) + A_{12}\,\mathbf{x}_2(k-h_{12}) \\ S_2 &: \mathbf{x}_2(k+1) = A_2\,\mathbf{x}_2(k) + A_{22}\,\mathbf{x}_2(k-h_{22}) + A_{21}\,\mathbf{x}_1(k-h_{21}) \end{aligned}, \tag{15.2}$$

gde, u oba modela, $\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ predstavlja stanje podsistema S_i, $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ i $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $1 \le i \le 2$, $1 \le j \le 2$, su intervalne matrice, a $\tau_{ij} \in \mathbb{R}_+$ i $h_{ij} > 0$, koja ne moraju biti celi brojevi, označava kašnjenja u međuvezama.

Pretpostavlja se da elementi $\left(a_{ij}^k\right)$ i $\left(a_{ij}^{rs}\right)$ matrica A_k i A_{rs}, imaju sledeće osobine:

$$\begin{aligned} &\underline{a}_{ij}^k \le a_{ij}^k \le \overline{a}_{ij}^k, \quad \underline{a}_{ij}^{rs} \le a_{ij}^{rs} \le \overline{a}_{ij}^{rs} \\ &1 \le k \le 2, \quad 1 \le r \le 2, \quad 1 \le s \le 2 \end{aligned}, \tag{15.3}$$

gde su $\underline{a}_{ij}^k$, $\overline{a}_{ij}^k$, $\underline{a}_{ij}^{rs}$ i $\overline{a}_{ij}^{rs}$ poznate konstante.

Lema 15.1 (*Gersgorin*–ova teorema) Svaka sopstvena vrednost λ matrice $M = \left(m_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zadovoljava najmanje jedan od uslova:

$$\left|\lambda - m_{ii}\right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left| m_{ij} \right|, \quad 1 \le i \le n. \tag{15.4}$$

Lema 15.2 (*Gersgorin*–ova teorema) Svaka sopstvena vrednost λ matrice $M = \left(m_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zadovoljava najmanje jedan od uslova:

$$\left|\lambda - m_{ii}\right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left| m_{ji} \right|, \quad 1 \le i \le n. \tag{15.5}$$

Definiše se:

$$G^k = \left(g_{ij}^k\right) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}, \quad 1 \le k \le 2, \quad g_{ii}^k = \overline{a}_{ii}^k, \quad g_{ij}^k = \max\left\{ |\,\underline{a}_{ij}^k\,|, |\,\overline{a}_{ij}^k\,| \right\}, i \ne j, \tag{15.6}$$

$$G^{rs} = \left(g_{ij}^{rs}\right) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_s}, \quad 1 \le r \le 2, \quad 1 \le s \le 2, \quad g_{ij}^{rs} = \max\left\{ |\,\underline{a}_{ij}^{rs}\,|, |\,\overline{a}_{ij}^{rs}\,| \right\}, \tag{15.7}$$

$$\mathrm{E}^k = \left(e_{ij}^k\right) \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}, \quad 1 \le k \le 2, \quad e_{ij}^k = \max\left\{ |\,\underline{a}_{ij}^k\,|, |\,\overline{a}_{ij}^k\,| \right\}. \tag{15.8}$$

U ovoj glavi, korišćenjem *Leme* 15.1 i *Leme* 15.2, prezentovaće se kriterijumi stabilnosti vremenski kontinualnih i diskretnih sistema, sledstveno.

Veliki intervalni vremenski kontinualni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem

Teorema 15.1 Ako važe sledeći uslovi:

$$\min\left\{ S_r , S_c \right\} < 0 , \tag{15.9}$$

$$S_r = \max\left\{ S_r^1 , S_r^2 \right\}, \quad S_c = \max\left\{ S_c^1 , S_c^2 \right\}, \tag{15.10}$$

$$S_r^1 = \max_{1 \le i \le n_1} \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} \left(g_{ij}^1 + g_{ij}^{11} \right) + \sum_{j=1}^{n_2} g_{ij}^{12} \right\}, \tag{15.11}$$

$$S_r^2 = \max_{1 \le i \le n_2} \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} \left(g_{ij}^2 + g_{ij}^{22} \right) + \sum_{j=1}^{n_1} g_{ij}^{21} \right\}, \tag{15.12}$$

$$S_c^1 = \max_{1 \le i \le n_1} \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} \left(g_{ji}^1 + g_{ji}^{11} \right) + \sum_{j=1}^{n_2} g_{ji}^{21} \right\}, \tag{15.13}$$

$$S_c^2 = \max_{1 \le i \le n_2} \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} \left(g_{ji}^2 + g_{ji}^{22} \right) + \sum_{j=1}^{n_1} g_{ji}^{12} \right\}, \tag{15.14}$$

tada je sistem, dat jed. (15.1), *asimptotski stabilan*, *Stojanović, Debeljković* (2005.a, 2005.b).

Veliki intervalni vremenski diskretni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem

Teorema 15.2 Ako važe sledeći uslovi:

$$\min\left\{ R_r , R_c \right\} < 1 , \tag{15.15}$$

$$R_r = \max\left\{ R_r^1 , R_r^2 \right\}, \quad R_c = \max\left\{ R_c^1 , R_c^2 \right\}, \tag{15.16}$$

$$R_r^1 = \max_{1 \le i \le n_1} \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} \left(e_{ij}^1 + g_{ij}^{11} \right) + \sum_{j=1}^{n_2} g_{ij}^{12} \right\}, \tag{15.17}$$

$$R_r^2 = \max_{1 \le i \le n_2} \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} \left(e_{ij}^2 + g_{ij}^{22} \right) + \sum_{j=1}^{n_1} g_{ij}^{21} \right\}, \tag{15.18}$$

$$R_c^1 = \max_{1 \le i \le n_1} \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} \left(e_{ji}^1 + g_{ji}^{11} \right) + \sum_{j=1}^{n_2} g_{ji}^{21} \right\}, \tag{15.19}$$

$$R_c^2 = \max_{1 \le i \le n_2} \left\{ \sum_{j=1}^{n_2} \left(e_{ji}^2 + g_{ji}^{22} \right) + \sum_{j=1}^{n_1} g_{ji}^{12} \right\}, \tag{15.20}$$

tada je sistem, dat jed. (15.2), *asimptotski stabilan*, *Stojanović, Debeljković* (2005.a, 2005.b).

Primer 15.1 Razmatra se veliki, intervalni, vremenski kontinualni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (15.1), gde je:

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \le A_1 \le \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \overline{A}_1,$$

$$\underline{A}_{11} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \le A_{11} \le \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \overline{A}_{11},$$

$$\underline{A}_{12} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & -0,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \le A_{12} \le \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{A}_{12},$$

$$\underline{A}_2 = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \le A_2 \le \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \overline{A}_2,$$

$$\underline{A}_{21} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \le A_{21} \le \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{A}_{21},$$

$$\underline{A}_{22} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \le A_{22} \le \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{A}_{22}.$$

Korišćenjem jed. (15.6) i jed. (15.7), dobija se:

$$G^1 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad G^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$G^{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G^2 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix},$$

$$G^{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G^{22} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Korišćenjem kriterijuma datih jed. (15.9–15.14) dobija se:

$$\min\{ S_r, S_c \} = -3 < 0.$$

Prema tome, razmatrani sistem je asimptotski stabilan, *Stojanović, Debeljković* (2005.a, 2005.b).

Primer 15.2 Razmatra se veliki, intervalni, vremenski diskretni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (15.2), gde je:

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} -0,55 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & -0,45 \end{pmatrix} \le A_1 \le \begin{pmatrix} -0,35 & 0 & 0 \\ 0 & -0,45 & 0 \\ 0 & 0 & -0,3 \end{pmatrix} = \overline{A}_1 ,$$

$$\underline{A}_{11} = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0 \\ 0 & 0 & -0,2 \end{pmatrix} \le A_{11} \le \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1 \end{pmatrix} = \overline{A}_{11} ,$$

$$\underline{A}_{12} = \begin{pmatrix} -0,05 & 0 \\ 0 & -0,05 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \le A_{12} \le \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} = \overline{A}_{12} ,$$

$$\underline{A}_2 = \begin{pmatrix} -0,45 & 0 \\ 0 & -0,35 \end{pmatrix} \le A_2 \le \begin{pmatrix} -0,4 & 0 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix} = \overline{A}_2 ,$$

$$\underline{A}_{21} = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1 \end{pmatrix} \le A_{21} \le \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \overline{A}_{21} ,$$

$$\underline{A}_{22} = \begin{pmatrix} -0,05 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \le A_{22} \le \begin{pmatrix} 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} = \overline{A}_{22} .$$

Korišćenjem jed. (15.7) i jed. (15.8) dobija se:

$$E^1 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,45 \end{pmatrix}, \quad E^2 = \begin{pmatrix} 0,45 & 0 \\ 0 & 0,35 \end{pmatrix},$$

$$G^{11} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad G^{12} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 \\ 0 & 0,05 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix},$$

$$G^{21} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \quad G^{22} = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,1 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Korišćenjem kriterijuma datih jed. (15.15–15.20) dobija se:

$$\min\left\{ R_r , R_c \right\} = 0,85 < 1 .$$

Prema tome, razmatrani sistem je asimptotski stabilan, *Stojanović, Debeljković* (2005.a, 2005.b).

Literatura

Bialas, S., “A Necessary and Sufficient Condition for the Stability of Interval Matrices”, *Int. J. Control*, Vol. 37, (1983) 717–722.

Chen, J., “Sufficient Conditions on Stability of Interval Matrices: Connections and New Results”, *IEEE Trans. Automat. Control*, 37, (1992) 541–544.

Daoyi, X., “Simple Criteria for Stability of Interval Matrices”, *Int. J. Control*, 41, (1985) 289–295.

Han, Q. L., K. Gu, “On Robust Stability of Time–Delay Systems with Norm–Bounded Uncertainty”, *IEEE Trans. Automat. Control*, 46, (2001) 1426–1431.

Huang, Y. P., K. Zhou, “Robust Stability of Uncertain Time–Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, 45, (2000) 2169–2173.

Jiang, G. L., “Sufficient Condition for the Asymptotic Stability of Interval Matrices”, *Int. J. Control*, Vol. 46, (1987) 1803–1810.

Kim, J., “Delay and Its Time–Derivative Dependent Robust Stability of Time–Delayed Linear Systems with Uncertainty”, *IEEE Trans. Automat. Control*, 46, (2001) 789–792.

Lee, C. H., T. L. Hsien, “New Sufficient Conditions for the Stability of Continuous and Discrete Time–Delay Interval Systems”, *J. Franklin Inst.*, Vol. 334B, No 2, (1997.b) 233–240.

Lee, B., J. G. Lee, “Robust Stability and Stabilization of Linear Delayed Systems with Structured Uncertainty”, *Automatica*, 35, (1999) 1149–1154.

Li, X., C. E. De Souza, “Delay–Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems: A Linear Matrix Inequality Approach”, *IEEE Trans. Automat. Control*, 42, (1997) 1144–1148.

Niculescu, S. I., C. E. De Souza, J. M. Dion, L. Dugrad, “Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Systems with State Delay: Single Delay Case (I)”, *Proc. IFAC Symp. Robust Control Design*, Rio de Janerio (Brazil), September, (1994).

Ozturk, N., “Stability Intervals for Delay Systems”, *Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control*, Vol. 3, (1988) 2215–2216.

Petkovski, J., “Stability Analysis of Interval Matrices: Improved Bounds”, *Int. J. Control*, Vol. 48, (1988) 2265–2273.

Soh, B., “Stability Margins of Continuous Time Interval Systems”, *Int. J. Systems Sci*., Vol. 22, (1991) 1113–1119.

Soh, Y. C., R. J. Evans, “Stability Analysis of Interval Matrices–Continuous and Discrete Systems”, *Int. J. Control*, Vol. 47, (1988) 25–32.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “The Sufficient Conditions for Stability of Continuous and Discrete Large–Scale Time Delay Interval Systems”**,** *The fifth International Conference on Control and Automation,* ICCA 05, Budapest (Hungary), June 26–29, (2005.a) 347–352.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “The Sufficient Conditions for Stability of Continuous and Discrete Large–Scale Time Delay Interval Systems”, *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 1, No. 1, (2005.b) 61–74.

Su, T. J., C. G. Huang, “Robust Stability of Delay Dependence for Linear Uncertain Systems”, *IEEE Trans*. *Automat*. *Control*, 37, (1992) 1656–1159.

Sun, Y. J., “Sufficient Conditions for the Stability of Interval Systems with Multiple Time–Varying Delays”, *Journal of mathematical analysis and applications*, 207, (1997) 29–44.

Wang, S. S., W. G. Lin, “A New Approach to the Stability Analysis of Interval Systems”, *Control Theory and Advanced Technology*, 7, (1991) 271–284.

Xu, S., J. Lam, C. Yang, “Quadratic Stability and Stabilization of Uncertain Linear Discrete–Time Systems with State Delay”, *Systems & Control Letters*, 43, (2001.b) 77–84.

Yedavalli, R. K., “Stability Analysis of Interval Matrices: Another Sufficient Condition”, *Int. J. Control*, Vol. 43, (1986) 767–772.

XI NOVI REZULTATI

16. PRILAZ STABILNOSTI SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM U SMISLU NELJAPUNOVA: KRITERIJUMI NEZAVISNI I ZAVISNI OD ČISTO VREMENSKOG KAŠNJENJA

16.1 Uvod

Problem ispitivanja sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem je područje koje se istražuje godinama. Čisto vremensko kašnjenje je veoma često prisutno u različitim tehničkim sistemima, kao što su električne, pneumatske i hidraulične mreže, dugačke transmisione linije, i tako dalje. Postojanje čisto vremenskog kašnjenja, bilo da je ono prisutno u upravljanju ili/i stanju, može prouzrokovati neželjene prelazne odzive sistema, ili čak nestabilnost. Kao posledica, problem analize stabilnosti ove klase sistema je jedno od glavnih polja istraživanja za mnoge istraživače. U opštem slučaju, uvođenje faktora čisto vremenskog kašnjenja čini analizu komplikovanijom.

Kada se uopšteno razmatraju sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem, u postojećim kriterijumima stabilnosti, primenjena su uglavnim dva prilaza.

Naime, prvi prilaz je da se dobije uslov stabilnosti koji ne uključuje informaciju o čisto vremenskom kašnjenju, a drugi prilaz je metoda koja uzima u obzir kašnjenje. Prvi prilaz se često naziva kriterijum nezavisan od čisto vremenskog kašnjenja i generalno obezbeđuje jednostavne algebarske uslove. U tom smislu pitanje njihove stabilnosti zaslužuje veliku pažnju.

U praktičnim prilikama nije uvek od interesa razmatrati stabilnost sistema u smislu Ljapunova, već je, ponekad, od posebne važnosti utvrditi granice do kojih dosežu trajektorije sistema pri njegovom kretanju u prostoru stanja.

Sistem može da bude stabilan u klasičnom smislu, ali praktično neupotrebljiv zbog neželjenih vrednosti pokazatelja kvaliteta prelaznog procesa.

Zbog toga je od posebnog značaja da se stabilnost sistema razmatra u odnosu na zadate *pod–skupove* u prostoru stanja, koji su *a priori* definisani za dati problem.

Pored toga, imajući u vidu veoma stroge i oprečne zahteve koji se danas nameću kvalitetu dinamičkog ponašanja realnih sistema, od posebnog je interesa razmatrati njihovo ponašanje samo *na konačnom vremenskom intervalu*.

Pomenute osobine ograničenosti odziva sistema, to jest rešenja sistema, su veoma važne sa inženjerske tačke gledišta. Uzimajući u obzir ovu činjenicu, uvedene su mnogobrojne definicije takozvane tehničke i praktične stabilnosti.

Grubo govoreći, ove definicije se baziraju na predefinisanju granica perturbacija početnih uslova i dozvoljenih perturbacija odziva sistema. U inženjerskim primenama upravljačkih sistema, ova činjenica postaje veoma važna i ponekad krucijalna, u cilju karakterizacije unapred, na kvantitativan način, mogućih odstupanja odziva sistema.

Prema tome, analiza ovih partikularnih graničnih osobina rešenja je važan korak, koji prethodi projektovanju upravljačkih signala, kada se razmatra koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu ili praktične stabilnosti.

Na osnovu rezultata koji se tiču praktične stabilnosti iz lit. *La Salle, Lefschetz* (1961) i *Weiss, Infante* (1965, 1967), uvode se različite kategorije stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, za vremenski kontinualne sisteme i kostantan skup graničnih trajektorija.

Dalji razvoj ovih rezultata je ostvaren zahvaljujući mnogim drugim autorima.

16.2 Hronološki pregled prethodnih rezultata i motivacija

U kratkom prikazu, koji sledi, upoznaćemo se samo sa rezultatima postignutim za *vremenski kontinualne, linearne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem* na polju neljapunovske stabilnosti.

Praktična stabilnost i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem

U kontekstu stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu ili praktične stabilnosti partikularne klase *nelinearnih, singularnih, perturbovanih, višestrukih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem*, različiti rezultatu su, po prvi put, dobijeni u radu *Feng*, *Hunsarg* (1996). Definicije iz ovog rada su veoma slične definicijama u lit. *Weiss*, *Infante* (1965, 1967), očigledno prilagođene sistemima sa čistim vremenskim kašnjenjem. Potrebno je napomenuti da se ove definicije značajni razlikuju od definicija prezentovanih u ovoj glavi.

U kontekstu stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i praktične stabilnosti linearnih, vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, različiti rezultatu su, po prvi put, dobijeni u lit. *Debeljković et al.* (1997.a, 1997.e) i *Nenadić et al.* (1997).

U lit. *Debeljković et al.* (1997.a) i *Nenadić et al.* (1997) prošireni su neki osnovni rezultati na području stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i praktične stabilnosti partikularne klase linearnih, vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Izvedeni su dovoljni uslovi stabilnosti, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja, izraženi u vidu fundamentalne matrice sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Osim toga, u slučaju kada je moguće uspostaviti odgovarajuću vezu između fundamentalnih matrica linearnog sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i sistema bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja, prezentovani rezultati omogućuju efikasne procedure za ispitivanje praktične stabilnosti kao i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Prilaz matričnih mera je, po prvi put, primenjen u lit. *Debeljković et al.* (1997.e, 1998.c) za analizu praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu linearnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Na osnovu *Coppel*–ove nejednakosti i uvođenjem prilaza matričnih mera dobijeni su veoma jednostavni dovoljni uslovi praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja, bez potrebe za izračunavanjem fundamentalne matrice sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

U radu *Nenadić et al.* (1997) ovaj problem je rešen za sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem u prinudnom radnom režimu.

Prilaz, koji se zasniva na dobro poznatoj *Bellman–Gronwall*–ovoj *lemi*, je primenjen u radu *Debeljković et al.* (1998.c) kako bi se dobili efikasniji, dovoljni uslovi, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja, za ispitivanje stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i praktične stabilnosti vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju.

Pregled svih prethodnih rezultata i doprinosa je prezentovana u radu *Debeljković et al.* (1999.b) sa opštim komentarima i blago modifikovanim *Bellman–Gronwall*–ovim prilazom.

U radu *Debeljković et al.* (2000.a), modifikovan *Bellman–Gronwall*–ov princip, je proširen na partikularnu klasu vremenski kontinualnih neautonomnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu.

U ovoj glavi prezentovaće se dva potpuno različita prilaza razmatranom problemu i nastavlja se ispitivanje na uobičajen način.

Naime, prvi rezultat je izražen direktno preko sopstvenih vrednosti osnovnih matrica sistema A_0 i A_1, koje se prirodno pojavljuju u modelu sistema, i izbegava se potreba za uvođenjem bilo koje kanonične forme, ili transformacije u iskazu teoreme.

U drugom slučaju teorija geometrijske koezinstencije vodi do prirodne klase pozitivno određenih kvadratnih normi na potprostoru koji sadrži sva rešenja.

Ova činjenica omogućava razvoj ljapunovske i neljapunovske teorije stabilnosti čak i za vremenski kontinualne, linearne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem u smislu da je osobina atraktivnosti ekvivalentna postojanju simetričnih, pozitivno određenih rešenja opšte forme Ljapunovljeve matrične jednačine koja uključuje uslov koji se odnosi na ograničenost rešenja.

Prva metoda se zasniva na klasičnom prilazu koji se uglavnom koristi za izvođenje dovoljnih uslova stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, nezavisnih od čisto vremenskog kašnjenja. Takođe se prezentuje nova definicija, koja se zasniva na osobini *atraktivnosti* rešenja sistema, koja se može tretirati analogno *kvazi–kontraktivnoj* stabilnosti, *Weiss*, *Infante* (1965, 1967).

Osim toga, izvešće se dovoljan uslov, zavisan od čisto vremenskog kašnjenja, koji garantuje da će razmatrani sistem biti praktično stabilan sa osobinom atraktivnosti njegovih rešenja, koji se može tretirati kao novi koncept takozvane neljapunovske stabilnosti.

16.3 Oznake i preliminarna razmatranja

$\mathbb{R}$	Realan vektorski prostor
$\mathbb{C}$	Kompleksan vektorski prostor
I [4]	Jedinična matrica
$F=\left(f_{ij}\right)\in\mathbb{R}^{n\times n}$	Realna matrica
F^T	Transpozicija matrice F
$F>0$	Pozitivno određena matrica
$F\geq 0$	Pozitivno polu–određena matrica
$\lambda\left(F\right)$	Sopstvena vrednost matrice F
$\lVert F\rVert=\sqrt{\lambda_{\max}\left(F^T F\right)}$	Euklidska norma matrice F

U opštem slučaju, upravljački sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem se mogu opisati kao:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t)&=\mathbf{f}\left(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(t-\tau),\mathbf{u}(t)\right),\quad t\geq 0\\ \mathbf{x}(t)&=\boldsymbol{\varphi}(t),\quad -\tau\leq t\leq 0\end{aligned},\tag{16.1}$$

gde je $\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ vektor stanja, $\mathbf{u}(t)\in\mathbb{R}^m$ je vektor upravljanja, $\boldsymbol{\varphi}\in\mathrm{C}=\mathrm{C}\left(\left[-\tau,0\right],\mathbb{R}^n\right)$ je prihvatljiva funkcija početnih stanja, $\mathrm{C}=\mathrm{C}\left(\left[-\tau,0\right],\mathbb{R}^n\right)$ je *Banach*–ov prostor vremenski kontinualnih funkcija koje preslikavaju vremenski interval $\left[-\tau,0\right]$ u $\mathbb{R}^n$ sa topologijom uniformne konvergencije.

Vektorska funkcija zadovoljava:

$$\mathbf{f}(\ ):\Im\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,\tag{16.2}$$

i pretpostavlja se da je dovoljno glatka da obezbedi postojanje i jedinstvenost rešenja na vremenskom intervalu:

$$\Im=\left[t_0,\left(t_0+T\right)\right[\in\mathbb{R},\tag{16.3}$$

kao i neprekidnu zavisnost rešenja označenog sa $\mathbf{x}\left(t,t_0,\mathbf{x}_0\right)$ u odnosu na t i početne podatke.

[4] Videti Prilog A

Veličina T može biti ili pozitivan realan broj ili simbol $+\infty$, tako da se stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i praktična stabilnost mogu istovremeno tretirati, sledstveno.

U opštem slučaju, za autonomni sistem se ne zahteva da:

$$\mathbf{f}\left(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}\right) \equiv \mathbf{0}, \tag{16.4}$$

što znači da nije neophodno da koordinatni početak prostora stanja bude ravnotežno stanje. $\mathbb{R}^n$ označava prostor stanja sistema, datog jed. (16.1), a $\left\|(\cdot)\right\|$ označava Euklidsku normu.

Neka $V : \Im \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tako da je funkcija $V\left(t, \mathbf{x}(t)\right)$ ograničena za $\forall t \in \Im$, $\forall \mathbf{x}(t)$ za koje je $\left\|\mathbf{x}(t)\right\|$ takođe ograničena.

Definiše se *Ojlerov* izvod funkcije $V\left(t, \mathbf{x}(t)\right)$ duž trajektorije sistema, datog jed. (16.1), na sledeći način:

$$\dot{V}\left(t, \mathbf{x}(t)\right) = \frac{\partial V\left(t, \mathbf{x}(t)\right)}{\partial t} + \left[grad\, V\left(t, \mathbf{x}(t)\right)\right]^T \mathbf{f}(\ \ ). \tag{16.5}$$

16.4 Prethodni rezultati

Razmatra se linearni, vremenski kontinualni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju, opisan sa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\, \mathbf{x}(t) + A_1\, \mathbf{x}(t-\tau), \tag{16.6.a}$$

sa poznatom vektorskom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}(t), \quad -\tau \le t \le 0, \tag{16.6.b}$$

gde su A_0 i A_1 konstantne matrice odgovarajućih dimenzija.

Definicija 16.1. Sistem, dat jed. (16.6), je *stabilan* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, -\tau, T, \left\|\mathbf{x}\right\|\right\}$, $\alpha \le \beta$ ako za bilo koju trajektoriju $\mathbf{x}(t)$ uslov $\left\|\mathbf{x}_0\right\| < \alpha$ povlači $\left\|\mathbf{x}(t)\right\| < \beta$, $\forall t \in \left[-\Delta,\ T\right]$, $\Delta = \tau_{\max}$, *Feng*, *Hunsarg* (1996).

Definicija 16.2 Sistem, dat jed. (16.6), je *kontraktivno stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \gamma, -\tau, T, \|\mathbf{x}\|\}$, $\gamma < \alpha < \beta$, ako i samo ako za bilo koju trajektoriju $\mathbf{x}(t)$ uslov $\|\mathbf{x}_0\| < \alpha$ povlači:

(i) stabilnost u odnosu na $\{\alpha, \beta, -\tau, T, \|\mathbf{x}\|\}$,

(**ii**) postoji $t^* \in \left]0, T\right[$ tako da $\|\mathbf{x}(t)\| < \gamma$ za $\forall t \in \left]t^*, T\right[$, *Feng*, *Hunsarg* (1996).

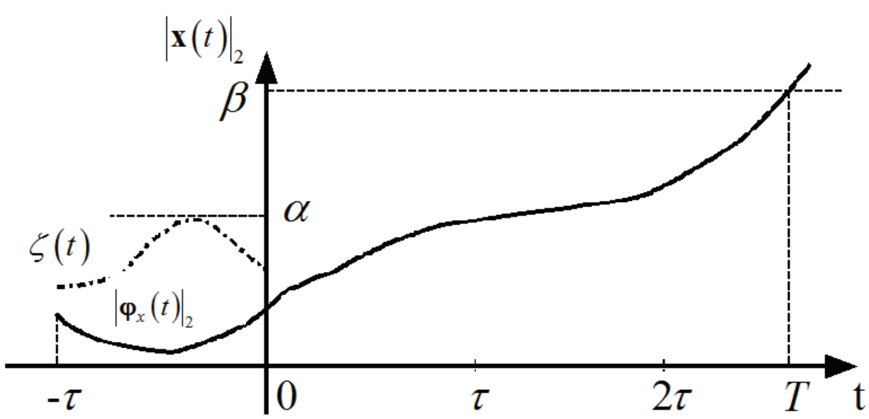
Definicija 16.3 Sistem, dat jed. (16.6.a), koji zadovoljava početni uslov, dat jed. (16.6.b), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\zeta(t), \beta, T\}$ ako i samo ako:

$$\boldsymbol{\varphi}_x(t) < \zeta(t),$$

povlači:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 < \beta, \quad t \in [0, T],$$

$\zeta(t)$ je skalarna funkcija sa osobinom $0 < \zeta(t) \leq \alpha$, $-\tau \leq t \leq 0$, gde je α realan, pozitivan broj i $\beta \in \mathbb{R}$ i $\beta > \alpha$, *Debeljković et al.* (1997.a, 1997.e), *Nenadić et al.* (1997), videti *sliku* 16.1.



Slika 16.1 Grafička ilustracija Definicije 16.3

Uslovi stabilnosti zavisni od čisto vremenskog kašnjenja

Teorema 16.1 Sistem, dat jed. (16.6.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (16.6.b), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \tau, T\}$, ako i samo ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\left\| \Phi(t) \right\|_2 < \frac{\sqrt{\beta / \alpha}}{1+\tau \left\| A_1 \right\|_2}, \qquad \forall t \in [0,\ T], \tag{16.7}$$

gde je $\left\| (\cdot) \right\|$ Euklidska norma matrice a $\Phi(t)$ je fundamentalna matrica sistema, datog jed. (16.1), *Debeljković et al*. (1997.a), *Nenadić et al*. (1997).

Kada je $\tau = 0$ ili $\left\| A_1 \right\| = 0$, problem se svodi na slučaj običnog, linearnog sistema, *Angelo* (1970).

Teorema 16.2 Sistem, dat jed. (16.6.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (16.6.b), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\ \beta,\ \tau, T\}$ ako i samo ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\mu_2(A_0)\, t} < \frac{\sqrt{\beta / \alpha}}{1+\tau \| A_1 \|_2}, \qquad \forall t \in [0,\, T], \tag{16.8}$$

gde $\left\| (\cdot) \right\|$ označava Euklidsku normu, *Debeljković et al*. (1997.e).

Uslovi stabilnosti nezavisni od čisto vremenskog kašnjenja

Rezultati koji će biti prezentovani u nastavku omogućavaju da se ispita stabilnost na konačnom vremenskom intervalu razmatranog autonomnog sistema, to jest sistema datog jed. (16.6.a) i jed. (16.6.b), bez nalaženja fundamentalne matrice ili odgovarajuće matrične mere.

Izraz dat jed. (16.6) se može prepisati u njegovoj opštoj formi na sledeći način:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(t_0 + \vartheta) = \boldsymbol{\varphi}_x(\vartheta) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\tau \le \vartheta \le 0, \\ &\boldsymbol{\varphi}_x(\vartheta) \in \mathcal{C}[-\tau,\ 0] \end{aligned} \tag{16.9}$$

gde je t_0 početni trenutak posmatranja sistema, datog jed. (16.6), a $\mathcal{C}[-\tau,\ 0]$ je *Banach*–ov prostor vremenski kontinualnih funkcija na vremenskom intervalu dužine τ, koji preslikava vremenski interval $\left[(t-\tau),\ t\right]$ u $\mathbb{R}^n$ sa normom definisanom na sledeći način:

$$\left\| \boldsymbol{\varphi} \right\|_{\mathcal{C}} = \max_{-\tau \le \vartheta \le 0} \left\| \boldsymbol{\varphi}(\vartheta) \right\|. \tag{16.10}$$

Pretpostavlja se da su prisutni uobičajeni uslovi glatkosti tako da ne postoje poteškoće po pitanjima postojanja, jedinstvenosti i neprekidnosti rešenja u odnosu na početne podatke. Osim toga može se napisati:

$$\mathbf{x}(t_0+\vartheta)=\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}(\vartheta), \tag{16.11}$$

kao i:

$$\dot{\mathbf{x}}(t_0)=\mathbf{f}(t_0,\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}(\vartheta)). \tag{16.12}$$

Teorema 16.3 Sistem, dat jed. (16.6.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (16.6.b), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\left(1+(t-t_0)\sigma_{\max}(\cdot)\right)^2 e^{2(t-t_0)\sigma_{\max}(\cdot)} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t\in[0, T], \tag{16.13}$$

$\sigma_{\max}(\cdot)$ je maksimalna singularna vrednost matrice $(\cdot)$, to jest:

$$\sigma_{\max}(\cdot)=\sigma_{\max}(A_0)+\sigma_{\max}(A_1), \tag{16.14}$$

Debeljković et al. (1998.c).

U slučaju kada je u *Teoremi* 16.3:

$$A_1=0, \tag{16.15}$$

to jest A_1 je nula matrica, dobija se rezultat sličan rezultatu prezentovanom u radu *Angelo* (1974).

16.5 Glavni rezultati

Definicija 16.4 Sistem, dat jed. (16.6.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (16.6.b), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha,\beta,T\}$, ako i samo ako:

$$\|\mathbf{x}(0)\|^2=\|\mathbf{x}_0\|^2<\alpha,$$

povlači:

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2<\beta, \quad \forall t\in[0, T].$$

Teorema 16.4 Sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (16.6), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, T, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji konstanta ϕ, tako da:

$$\|\mathbf{x}(t-\tau)\|^2 < \phi\|\mathbf{x}(t)\|^2, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall \|\mathbf{x}(t)\|^2 < \beta, \tag{16.16}$$

i ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\lambda_{\max}(\Pi)\cdot t} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in [0, T], \tag{16.17}$$

gde je:

$$\Pi = A_0^T + A_0 + A_1 A_1^T + \phi I, \tag{16.18}$$

Debeljković, *Nestorović*, *Buzurović*, *Dimitrijević* (2010.a).

Dokaz. Definiše se sledeća funkcija:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) + \int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta. \tag{16.19}$$

Izvod funkcije $V(t, \mathbf{x}(t))$ duž trajektorija sistema je:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \mathbf{x}(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right) + \frac{d}{dt}\int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(\vartheta)\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta \\ &= \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T + A_0\right)\mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t)A_1\mathbf{x}(t-\tau). \\ &+ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t-\tau)\mathbf{x}(t-\tau)\end{aligned} \tag{16.20}$$

Iz jed. (16.20) očigledno je da je:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right) = \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T + A_0\right)\mathbf{x}(t) + 2\mathbf{x}^T(t)A_1\mathbf{x}(t-\tau), \tag{16.21}$$

a na osnovu dobro poznate nejednakosti[5] i sa partikularnim izborom:

$$\mathbf{x}^T(t)\Gamma\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) > 0, \quad \forall \|\mathbf{x}(t)\|^2 < \beta, \tag{16.22}$$

tako da:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right) \le \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T + A_0\right)\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t)A_1A_1^T\mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t-\tau)I\mathbf{x}(t-\tau). \tag{16.23}$$

[5] $2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{v}(t-\tau) \le \mathbf{u}^T(t)\Gamma^{-1}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}^T(t-\tau)\Gamma\mathbf{v}(t-\tau), \quad \Gamma > 0$

Korišćenjem pretpostavke, date nejed. (16.16), jasno je da se nejed. (16.23) svodi na:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right) &< \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T + A_0 + A_1A_1^T + \phi I\right)\mathbf{x}(t) \\ &< \lambda_{\max}(\Pi)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\end{aligned}, \tag{16.24}$$

gde je matrica Π definisana jed. (16.18).

Iz nejed. (16.24) dobija se:

$$\frac{d\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right)}{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)} < \lambda_{\max}(\Pi)\,dt\,, \tag{16.25}$$

ili:

$$\int_0^t \frac{d\left(\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)\right)}{\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t)} < \int_0^t \lambda_{\max}(\Pi)\,d\,t\,, \tag{16.26}$$

i:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0)e^{\lambda_{\max}(\Pi)\cdot t}\,. \tag{16.27}$$

Konačno, ako se iskoristi prvi uslov *Definicije* 16.4, tada:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \alpha\cdot e^{\lambda_{\max}(\Pi)\cdot t}\,, \tag{16.28}$$

i na kraju, primenom nejed. (16.17), dobija se:

$$\mathbf{x}^T(t)\mathbf{x}(t) < \alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha} < \beta, \quad \forall t\in[0,\,T], \tag{16.29}$$

čime je teorema dokazana.

Napomena 16.1 Sugestije koje se tiču mogućeg izbora funkcije se mogu naći u radu *Debeljković et al*. (1999.b).

Definicija 16.5 Sistem, dat jed. (16.6.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (16.6.b), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\{\alpha,\beta,T\}$, ako i samo ako:

$$\|\mathbf{x}(0)\|_P^2 = \|\mathbf{x}_0\|_P^2 < \alpha\,,$$

povlači:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_P^2 < \beta, \quad \forall t\in[0,\,T]\,,$$

sa osobinom da:

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{x}(t)\|_P^2 \to 0\,.$$

Teorema 16.5 Sistem, dat jed. (16.6.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (16.6.b), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{\alpha,\beta,T,\left\|(\cdot)\right\|_P^2\right\}$, $\alpha<\beta$, ako postoji konstanta ϕ, tako da:

$$\left\|\mathbf{x}(t-\tau)\right\|_P^2<\phi\left\|\mathbf{x}(t)\right\|_P^2,\quad \forall t\in[0,T],\quad \forall\left\|\mathbf{x}(t)\right\|_P^2<\beta, \tag{16.30}$$

i ako postoji matrica $P=P^T>0$ koja je rešenje sledeće matrične jednačine:

$$A_0^TP+PA_0=-Q, \tag{16.31}$$

i matrica $Q=Q^T>0$, i ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\left\|A_1\right\|<\sigma_{\min}\left(\left(Q-A_1^TPA_1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\sigma_{\max}^{-1}\left(Q^{-\frac{1}{2}}A_0^TP\right), \tag{16.32}$$

$$e^{\bar{\lambda}_{\max}(\bar{\Pi})\cdot t}<\frac{\beta}{\alpha},\quad \forall t\in[0,T], \tag{16.33}$$

gde je:

$$\bar{\lambda}_{\max}\left(\bar{\Pi}\right)=\bar{\lambda}_{\max}\left\{\mathbf{x}^T(t)\left(PA_1P^{-1}A_1^TP+\phi P\right)\mathbf{x}(t):\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)=1\right\}, \tag{16.34}$$

Debeljković, *Nestorović*, *Buzurović*, *Dimitrijević* (2010.a).

Dokaz. Definiše se sledeća funkcija:

$$V\left(\mathbf{x}(t)\right)=\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)+\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}^T(\vartheta)Q\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta. \tag{16.35}$$

Izvod funkcije $V\left(t,\mathbf{x}(t)\right)$ duž trajektorija sistema je:

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(t,\mathbf{x}(t)\right)&=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)\right)+\frac{d}{dt}\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}^T(\vartheta)Q\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta\\&=\mathbf{x}^T(t)\left(A_0^TP+PA_0\right)\mathbf{x}(t)+2\mathbf{x}^T(t)PA_1\mathbf{x}(t-\tau).\\&\quad+\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t)+\mathbf{x}^T(t-\tau)Q\mathbf{x}(t-\tau)\end{aligned} \tag{16.36}$$

Iz jed. (16.36) može se zaključiti da je:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)\right)=\mathbf{x}^T(t)\left(A_0^TP+PA_0\right)\mathbf{x}(t)+2\mathbf{x}^T(t)PA_1\mathbf{x}(t-\tau), \tag{16.37}$$

ili:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\;\mathbf{x}(t)\right)&=\mathbf{x}^T(t)\left(A_0^TP+PA_0+Q\right)\mathbf{x}(t)\\&\quad+2\mathbf{x}^T(t)PA_1\mathbf{x}(t-\tau)-\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t)\end{aligned}. \tag{16.38}$$

Iz jed. (16.31) sledi:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)\right)=-\mathbf{x}^T(t)Q\,\mathbf{x}(t)+2\mathbf{x}^T(t)PA_1\mathbf{x}(t-\tau), \tag{16.39}$$

i korišćenjem ranije pomenute nejednakosti, sa partikularnim izborom:

$$\mathbf{x}^T(t)\Gamma\mathbf{x}^T(t)=\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}^T(t)>0, \quad \forall t\in[0,T], \quad \forall\left\|\mathbf{x}(t)\right\|_P^2<\beta, \tag{16.40}$$

i činjenice da je:

$$\mathbf{x}^T(t)Q\,\mathbf{x}(t)>0, \quad \forall t\in[0,T], \tag{16.41}$$

pozitivno određena kvadratna forma, dobija se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)\right)&<2\mathbf{x}^T(t)PA_1\mathbf{x}(t-\tau)\\ &\leq\mathbf{x}^T(t)PA_1P^{-1}A_1^TP\,\mathbf{x}(t)+\mathbf{x}^T(t-\tau)P\,\mathbf{x}(t-\tau)\end{aligned}. \tag{16.42}$$

Na osnovu pretpostavke, date nejed. (16.30), jasno je da se nejed. (16.42) svodi na:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)\right)<\mathbf{x}^T(t)\left(PA_1P^{-1}A_1^TP+\phi P\right)\mathbf{x}(t), \tag{16.43}$$

ili:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)\right)<\bar{\lambda}_{\max}\left(\bar{\Pi}\right)\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t), \tag{16.44}$$

ili:

$$\int_0^t\frac{d\left(\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)\right)}{\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)}<\int_0^t\bar{\lambda}_{\max}\left(\bar{\Pi}\right)dt, \tag{16.45}$$

i:

$$\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)<\mathbf{x}^T(0)P\,\mathbf{x}(0)e^{\bar{\lambda}_{\max}(\bar{\Pi})\cdot t}. \tag{16.46}$$

Konačno, ako se iskoristi uslov, dat *Definicijom* 16.5, tada:

$$\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)<\alpha\cdot e^{\bar{\lambda}_{\max}(\bar{\Pi})\cdot t}, \tag{16.47}$$

i osnovni uslov *Teoreme* 16.5, dat nejed. (16.33), može se zaključiti da je:

$$\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)<\alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha}<\beta, \quad \forall t\in[0,T]. \tag{16.48}$$

Napomena 16.2 Asimptotska stabilnost sistema, datog jed. (16.6), je garantovana jed. (16.31) i nejed. (16.32), *Tissir*, *Hmamed* (1996).

Literatura

Angelo, H., *Linear Time Varying Systems*, Allyn and Bacon, Boston, USA, 1974.

Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, "On Practical Stability of Singular Systems", *Proc. Melecon Conf*. 85, Madrid (Spain), October, (1985) 103–105.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems", *Proc. ECC 97*, Brussels (Belgium), July 2–6, (1997.a) 307–311.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *IEEE Proc. CDC* 97, San Diego, California (USA), December 21–23, (1997.e) 2771–2772.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman–Gronwall Approach", *Proc. 1st IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France), July 6–7, (1998.c) 171–175.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, "Finite Time Stability of Time Delay Systems", *IMA J. Math. Control and Info*., Vol. 16, (3), (1999.b) 101–111.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Further Results on the Stability of Linear Non–autonomous Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. ACC* 2000, Chicago, Illinois (USA), June 28–30, (2000.a) 1450–1451.

Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, I. M. Buzurović, N. J. Dimitrijević, "A New Approach to the Stability of Time–Delay Systems in the Sense of Non–Lyapunov Delay–Independent and Delay–Dependent Criteria", *Proc.* of 8th *International Symposium on Intelligent Systems and Informatics*, Subotica (Serbia), September 10–11, (2010.a), 213–218.

Feng, H., J. Hunsarg, "Stabilization of Nonlinear Singularly Perturbed Multiple Time Delay Systems by Dither", *Trans. ASME J. of Dynamic Systems*, *Measurement and Control*, 118, (3), (1996) 177–181.

La Salle, S. Lefschet, *Stability by Lyapunov's Direct Method*, Academic Press, New York, 1961.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, "On Practical Stability of Time Delay Systems", *IEEE Proc. American Control Conference*, Albuquerque (USA), June 4–6, (1997) 3235–3236.

Owens, D. H., D. Lj. Debeljković, "Consistency and Liapunov Stability of Linear Descriptor Systems: A Geometric Analysis", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Vol. 2, (1985) 139–151.

Tissir, E., A. Hmamed, "Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$", *Automatica*, Vol. 32, 12, (1996) 1723–1726.

Weiss, L., E. F. Infante, "On the Stability of Systems Defined over a Finite Time Interval", *Proc. National Acad. Sci*., Vol. 54, (1965) 44–48.

Weiss, L., E. F. Infante, "Finite Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces", *IEEE Trans. Automat. Cont*., AC–12, (1967) 54–59.

17. STABILNOST NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU I PRAKTIČNA STABILNOST LINEARNIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

17.1 Opis sistema i preliminarni rezultati

Rezultati, koji se tiču analize neljapunovske stabilnosti linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, su uvedeni u radu *Debeljković, Aleksendrić* (2003). Pokazano je da je ispitivanje stabilnosti sistema korišćenjem diskretne fundamentalne matrice kompleksno, a ponekad čak nemoguće. Kao posledica, ideja je da se nađe efikasnija metoda za analizu stabilnosti. Matematički izrazi koji su korišćeni se zasnivaju na izračunavanju odgovarajućih sopstvenih vrednosti ili odgovarajućih matrica sistema. Ideja metode se zasniva na sličnim ispitivanjima kao za vremenski kontinualne sisteme.

Razmatra se linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju, opisan sledećom jednačinom:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-1)\,, \tag{17.1.a}$$

sa funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(k_0) = \boldsymbol{\psi}(k_0), \quad -1 \le k_0 \le 0\,, \tag{17.1.b}$$

gde je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, a A_0 i A_1 su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija. Čisto vremensko kašnjenje je konstantno i jednako jedinici.

Jednačina sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju može se prikazati na sledeći način:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{M} A_j\,\mathbf{x}(k-h_j)\,, \tag{17.2.a}$$

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-h, -h+1, \ldots, 0\}\,, \tag{17.2.b}$$

gde je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1,2$, h je ceo broj koji predstavlja čisto vremensko kašnjenje sistema a $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ je poznata vektorska funkcija početnih uslova. $\mathbb{R}^n$ označava prostor stanja sistema, datog jed. (17.1–17.2), a $\|(\cdot)\|$ je Euklidska norma.

$\mathcal{K}_N$ označava diskretni vremenski interval, kao skup nenegativnih celih brojeva:

$$\mathcal{K}_N = \{ k : 0 \leq k \leq N \}. \tag{17.3}$$

Veličina N može biti ili pozitivan ceo broj ili simbol $+\infty$, tako da se stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i praktična stabilnost mogu istovremeno tretirati, sledstveno.

Neka $V(\mathbf{x}(k)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tako da je funkcija $V(\mathbf{x}(k))$ ograničena za $\forall k \in \mathcal{K}_N$ i $\forall \mathbf{x}(k)$ za koje je $\|\mathbf{x}(k)\|$ takođe ograničena.

Definiše se potonja razlika funkcije $V(\mathbf{x}(k))$ duž trajektorije sistema, datog jed. (17.1–17.2), na sledeći način:

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)). \tag{17.4}$$

Definicija 17.1 Sistem, dat jed. (17.1), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, N\}$, ako i samo ako:

$$\|\mathbf{x}(0)\|^2_{A_0^T P A_0} = \|\mathbf{x}_0\|^2_{A_0^T P A_0} < \alpha, \tag{17.5}$$

povlači:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2_{A_0^T P A_0} < \beta, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N, \tag{17.6}$$

sa osobinom da:

$$\lim_{k \to \infty} \|\mathbf{x}(k)\|^2_{A_0^T P A_0} \to 0. \tag{17.7}$$

Definicija 17.2 Sistem, dat jed. (17.1), je *praktično stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, N\}$, ako i samo ako:

$$\|\mathbf{x}_0\|^2 < \alpha, \tag{17.8}$$

povlači:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2 < \beta, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N. \tag{17.9}$$

Definicija 17.3 Sistem, dat jed. (17.1), je *atraktivno praktično nestabilan* u odnosu na $\left\{\alpha,\beta,N,\left\|(\cdot)\right\|^2\right\}$, $\alpha<\beta$, ako za:

$$\left\|\mathbf{x}_0\right\|^2_{A_0^T P A_0} < \alpha\,, \tag{17.10}$$

postoji trenutak: $k=k^*\in \mathcal{K}_N$, tako da je ispunjen sledeći uslov:

$$\left\|\mathbf{x}\left(k^*\right)\right\|^2_{A_0^T P A_0} \geq \beta\,, \tag{17.11}$$

sa osobinom da:

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\mathbf{x}\left(k\right)\right\|^2_{A_0^T P A_0} \to 0\,. \tag{17.12}$$

Definicija 17.4 Sistem, dat jed. (17.1), je *praktično nestabilan* u odnosu na $\left\{\alpha,\beta,N,\left\|(\cdot)\right\|^2\right\}$, $\alpha<\beta$, ako za:

$$\left\|\mathbf{x}_0\right\|^2 < \alpha\,, \tag{17.13}$$

postoji trenutak: $k=k^*\in \mathcal{K}_N$, tako da je ispunjen sledeći uslov:

$$\left\|\mathbf{x}\left(k^*\right)\right\|^2 \geq \beta\,, \tag{17.14}$$

za neko $k=k^*\in \mathcal{K}_N$.

Definicija 17.5 Linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (17.2.a), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha,\ \beta,\ N,\ \left\|(\cdot)\right\|\right\}$, $\alpha\leq\beta$, ako i samo ako, za svaku trajektoriju $\mathbf{x}\left(k\right)$ koja zadovoljava početnu funkciju, datu jed. (17.2.b), tako da:

$$\left\|\mathbf{x}\left(k\right)\right\| < \alpha, \quad k=0,-1,-2,\ldots,-N\,, \tag{17.15}$$

sledi:

$$\left\|\mathbf{x}\left(k\right)\right\| < \beta, \quad k\in \mathcal{K}_N\,, \tag{17.16}$$

Angelo (1974), *Aleksendrić*, *Debeljković* (2002) i *Debeljković*, *Aleksendrić* (2003).

Prethodna definicija je analogna definicijama prezentovanim u lit. *Debeljković et al*. (1997.a, 1997.e) i *Nenadić et al*. (1997).

17.2 Prethodni rezultati

Teorema 17.1 Da bi linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (17.2), bio *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha,\beta,N,\left\|(\cdot)\right\|\right\}$, $\alpha<\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+$, dovoljno je da je:

$$\left\|\Phi(k)\right\|<\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+\sum_{j=1}^{M}\left\|A_j\right\|},\quad \forall k=0,1,\ldots,N\,, \tag{17.17}$$

Aleksendrić, Debeljković (2002) i *Debeljković*, *Aleksendrić* (2003).

Dokaz. Rešenje jed. (17.2.a), sa početnim uslovom, datim jed. (17.2.b), može se izraziti pomoću fundamentalne matrice, na sledeći način:

$$\mathbf{x}(k)=\Phi(k)\mathbf{x}(0)+\Phi(k)A_1\mathbf{x}(-1)+\ldots+\Phi(k)A_M\mathbf{x}(-N)\,. \tag{17.18}$$

Napomena 17.1 Matrična mera se u velikoj meri koristi kada se ispituju vremenski kontinualni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Priroda vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem omogućava primenu ovog prilaza kao i *Bellman*–ovog principa, tako da se problem može analizirati korišćenjem norme. Kao posledica, dobija se:

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{x}(k)\right\|&=\left\|\Phi(k)\mathbf{x}(0)+\Phi(k)A_1\mathbf{x}(-1)+\cdots\Phi(k)A_M\mathbf{x}(-N)\right\|\\&\le\left\|\Phi(k)\right\|\left(\left\|\mathbf{x}(0)\right\|+\sum_{j=1}^{M}\left\|A_j\right\|\cdot\left\|\mathbf{x}(-i)\right\|\right)<\left\|\Phi(k)\right\|\left(\alpha+\alpha\sum_{j=1}^{M}\left\|A_j\right\|\right),\\&\le\alpha\cdot\left\|\Phi(k)\right\|\left(1+\sum_{j=1}^{M}\left\|A_j\right\|\right)\end{aligned} \tag{17.19}$$

gde se koristi prvi uslov *Definicije* 17.5.

Da bi se dobio konačan rezultat, koristi se nejed. (17.17), tako da se može napisati:

$$\left\|\mathbf{x}(k)\right\|<\alpha\cdot\frac{\frac{\beta}{\alpha}}{1+\sum_{j=1}^{M}\left\|A_j\right\|}\left(1+\sum_{j=1}^{M}\left\|A_j\right\|\right)<\beta,\quad\forall k=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,N\,, \tag{17.20}$$

čime je teorema dokazana.

Rezultat je analogan rezultatu koji je prvi put izveden u lit. *Debeljković et al*. (1997.a, 1997.e), za vremenski kontinualne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem.

17.3 Glavni rezultati

Teorema 17.2 Sistem, dat jed. (17.1), pri čemu je $\det A_1 \neq 0$, je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, K_N, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\bar{\lambda}_{\max}^{\frac{1}{2}k}(\ ) < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall k \in K_N, \tag{17.21.a}$$

gde je:

$$\bar{\lambda}_{\max}(\ ) = \max\left\{\mathbf{x}^T(k) A_1^T P A_1 \mathbf{x}(k) : \mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k) = 1\right\}, \tag{17.21.b}$$

i ako postoji matrica $P = P^T > 0$, koja je rešenje sledeće matrične jednakosti:

$$2A_0^T P A_0 - P = -Q, \tag{17.21.c}$$

gde je $Q = Q^T > 0$, *Debeljković*, *Buzurović*, *Dimitrijević* (2011.a).

Dokaz. Neka je Ljapunovljeva funkcija za razmatrani sistem:

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) P \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k-1) Q \mathbf{x}(k-1), \tag{17.22}$$

sa matricama $P = P^T > 0$ i $Q = Q^T > 0$.

Kao posledica, korišćenjem jednačine kretanja (17.1.a), dobija se:

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)), \tag{17.23}$$

ili:

$$\begin{aligned}
\Delta V(\mathbf{x}(k)) &= \mathbf{x}^T(k+1) P \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k) P \mathbf{x}(k) \\
&\quad + \mathbf{x}^T(k) Q \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k-1) Q \mathbf{x}(k-1) \\
&= \mathbf{x}^T(k)\left(A_0^T P A_0 + Q - P\right)\mathbf{x}(k) \\
&\quad + 2\mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_1 \mathbf{x}(k-1) \\
&\quad - \mathbf{x}^T(k-1)\left(Q - A_1^T P A_1\right)\mathbf{x}(k-1)
\end{aligned}. \tag{17.24}$$

Kao što je pokazano u lit. *Debeljković et al*. (1998.f, 1999.b), ako je:

$$2A_0^T P A_0 - P = -Q, \tag{17.25}$$

gde je $P = P^T > 0$ i $Q = Q^T > 0$, tada za:

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k) P \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k-1) Q \mathbf{x}(k-1), \tag{17.26}$$

potonja razlika duž trajektorija sistema je:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= V\left(\mathbf{x}(k+1)\right) - V\left(\mathbf{x}(k)\right) \\ &= \mathbf{x}^T(k)\left(A_0^T P A_0 - P + Q\right)\mathbf{x}(k) \\ &\quad + \mathbf{x}^T(k-1)\left(A_1^T P A_1 - Q\right)\mathbf{x}(k-1) \\ &\quad + \mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_1 \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{x}^T(k-1) A_1^T P A_0 \mathbf{x}(k)\end{aligned}, \tag{17.27}$$

ili:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= \mathbf{x}^T(k)\left(2A_0^T P A_0 - P + Q\right)\mathbf{x}(k) \\ &\quad + \mathbf{x}^T(k-1)\left(2A_1^T P A_1 - Q\right)\mathbf{x}(k-1) \\ &\quad + \mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_1 \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{x}^T(k-1) A_1^T P A_0 \mathbf{x}(k) \\ &\quad - \mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}^T(k-1) A_1^T P A_1 \mathbf{x}(k-1)\end{aligned}, \tag{17.28}$$

i uzimajući u obzir jed. (17.25), dobija se:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= \mathbf{x}^T(k-1)\left(2A_1^T P A_1 - Q\right)\mathbf{x}(k-1) \\ &\quad - \left(A_0 \mathbf{x}(k) - A_1 \mathbf{x}(k-1)\right)^T P\left(A_0 \mathbf{x}(k) - A_1 \mathbf{x}(k-1)\right)\end{aligned}. \tag{17.29}$$

S obzirom da je matrica $P = P^T > 0$, može se zaključiti da je:

$$\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) < \mathbf{x}^T(k-1)\left(2A_1^T P A_1 - Q\right)\mathbf{x}(k-1). \tag{17.30}$$

Kombinovanjem desnih strana jed. (17.24) i nejed. (17.30), sledi:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}^T(k)\left(A_0^T P A_0 + Q - P\right)\mathbf{x}(k) \\ &+ 2\,\mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_1 \mathbf{x}(k-1) \\ &- \mathbf{x}^T(k-1)\left(Q - A_1^T P A_1\right)\mathbf{x}(k-1) \\ &< \mathbf{x}^T(k-1)\left(2A_1^T P A_1 - Q\right)\mathbf{x}(k-1)\end{aligned}, \tag{17.31}$$

tako da:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= \mathbf{x}^T(k)\left(A_0^T P A_0 + Q - P\right)\mathbf{x}(k) + 2\,\mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_1 \mathbf{x}(k-1) \\ &< \mathbf{x}^T(k-1)\left(A_1^T P A_1\right)\mathbf{x}(k-1)\end{aligned}. \tag{17.32}$$

Korišćenjem dobro poznate nejednakosti[6], sa partikularnim izborom:

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left(A_1^T P A_1\right), \tag{17.33}$$

dobija se:

[6] $2\mathbf{u}^T(t)\mathbf{v}(t) \le \mathbf{u}^T(t)\Gamma^{-1}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}^T(t)\Gamma\mathbf{v}(t), \quad \Gamma > 0$

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}^T(k)\left(A_0^T P A_0 + Q - P + A_0^T P A_1\left(\left(\frac{1}{2}A_1^T P A_1\right)\right)^{-1} A_1^T P A_0\right)\mathbf{x}(k)\\&+\frac{1}{2}\mathbf{x}^T(k-1)\left(A_1^T P A_1\right)\mathbf{x}(k-1) < \mathbf{x}^T(k-1)\left(A_1^T P A_1\right)\mathbf{x}(k-1)\end{aligned}, \tag{17.34}$$

ili:

$$\mathbf{x}^T(k)\left(2A_0^T P A_0 + Q - P + A_0^T P A_0\right)\mathbf{x}(k) < \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(k-1)\left(A_1^T P A_1\right)\mathbf{x}(k-1). \tag{17.35}$$

S obzirom da je:

$$2A_0^T P A_0 + Q - P = 0, \tag{17.36}$$

konačno se dobija:

$$\mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k) < \frac{1}{2}\mathbf{x}^T(k-1)\left(A_1^T P A_1\right)\mathbf{x}(k-1), \tag{17.37}$$

ili:

$$\mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k) < \frac{1}{2}\overline{\lambda}_{\max}(\ )\mathbf{x}^T(k-1) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k-1), \tag{17.38}$$

gde je:

$$\overline{\lambda}_{\max}(\ ) = \max\left\{\mathbf{x}^T(k) A_1^T P A_1 \mathbf{x}(k) : \left(2A_0^T P A_0 - P\right) = -Q,\ \mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k) = 1\right\}. \tag{17.39}$$

S obzirom da je ovaj postupak nezavisan od k, može se napisati:

$$\mathbf{x}^T(k+1) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k+1) < \frac{1}{2}\overline{\lambda}_{\max}(\ )\mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k), \tag{17.40}$$

ili:

$$\begin{aligned}\ln \mathbf{x}^T(k+1) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k+1) &< \ln\frac{1}{2}\overline{\lambda}_{\max}(\ )\mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k)\\&< \ln\frac{1}{2}\overline{\lambda}_{\max}(\ ) + \ln \mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k)\end{aligned}, \tag{17.41}$$

i:

$$\ln \mathbf{x}^T(k+1) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k+1) - \ln \mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k) < \ln \overline{\lambda}_{\max}^{\frac{1}{2}}(\ ). \tag{17.42}$$

Ako se izvrši sumiranje $\sum_{j=k_0}^{k_0+k-1}(\ )$ obe strane nejed. (17.42) za $\forall k \in K_N$, dobija se:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=k_0}^{k_0+k-1} \ln \mathbf{x}^T(j+1) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(j+1) - \ln \mathbf{x}^T(j) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(j)\\&\le \sum_{j=k_0}^{k_0+k-1} \ln \overline{\lambda}_{\max}^{\frac{1}{2}}(\ ) \le \ln \prod_{j=k_0}^{k_0+k-1} \overline{\lambda}_{\max}^{\frac{1}{2}}(\ )\end{aligned}. \tag{17.43}$$

Može se pokazati da je:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=k_0}^{k_0+k-1}\left(\ln \mathbf{x}^T(j+1)\mathbf{x}(j+1)-\ln \mathbf{x}^T(j)\mathbf{x}(j)\right)
&= \ln \mathbf{x}^T(k_0+1)\mathbf{x}(k_0+1)+\ln \mathbf{x}^T(k_0+2)\mathbf{x}(k_0+2)\\
&\qquad \ldots+\ldots \qquad \ldots+\ldots\\
&+\ln \mathbf{x}^T(k_0+k-2+1)\mathbf{x}(k_0+k-2+1)\\
&+\ln \mathbf{x}^T(k_0+k-1+1)\mathbf{x}(k_0+k-1+1)\\
&-\left(\ln \mathbf{x}^T(k_0)\mathbf{x}(k_0)+\ln \mathbf{x}^T(k_0+1)\mathbf{x}(k_0+1)\right.\\
&\left.+\ldots+\ln \mathbf{x}^T(k_0+k-1)\mathbf{x}(k_0+k-1)\right)\\
&= \ln \mathbf{x}^T(k_0+k)\mathbf{x}(k_0+k)-\ln \mathbf{x}^T(k_0)\mathbf{x}(k_0)
\end{aligned}, \qquad (17.44)
$$

tako da nejed. (17.43) postaje:

$$
\begin{aligned}
&\ln \mathbf{x}^T(k_0+k)A_0^T P A_0\,\mathbf{x}(k_0+k)-\ln \mathbf{x}^T(k_0)A_0^T P A_0\,\mathbf{x}(k_0)\\
&\qquad < \ln \prod_{j=k_0}^{k_0+k-1}\bar{\lambda}_{\max}^{\frac{1}{2}}(\ )<\ln \bar{\lambda}_{\max}^{\frac{1}{2}k}(\ ), \quad \forall k\in K_N
\end{aligned}, \qquad (17.45)
$$

kao i:

$$
\ln \mathbf{x}^T(k_0+k)A_0^T P A_0\,\mathbf{x}(k_0+k)\le \ln \bar{\lambda}_{\max}^{\frac{1}{2}k}(\ )+\ln \mathbf{x}^T(k_0)A_0^T P A_0\,\mathbf{x}(k_0), \quad \forall k\in K_N. \qquad (17.46)
$$

Uzimajući u obzir činjenicu da je $\left\|\mathbf{x}_0\right\|_{A_0^T P A_0}^2<\alpha$ i uslov *Teoreme* 17.2, dat nejed. (17.21.a), dobija se:

$$
\begin{aligned}
&\ln \mathbf{x}^T(k_0+k)A_0^T P A_0\mathbf{x}(k_0+k)<\ln \bar{\lambda}_{\max}^{\frac{1}{2}k}(\ )+\ln \mathbf{x}^T(k_0)A_0^T P A_0\mathbf{x}(k_0)\\
&\qquad < \ln \alpha\cdot\bar{\lambda}_{\max}^{\frac{1}{2}k}(\ )<\ln \alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha}<\ln \beta, \quad \forall k\in K_N
\end{aligned}. \qquad (17.47)
$$

Napomena 17.2 Pretpostavka da je $\det A_1\neq 0$ ne umanjuje opštost ovog rezultata, s obzirom da ovaj uslov nije krucijalan kada se razmatraju vremenski diskretni sistemi.

Napomena 17.3 Asimptotska stabilnost u smislu Ljapunova i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu su nezavisni koncepti: sistem koji je stabilan na konačnom vremenskom intervalu ne mora biti asimptotski stabilan u smislu Ljapunova, nasuprot tome, asimptotski stabilan sistem u smislu Ljapunova bi mogao biti stabilan na konačnom vremenskom intervalu, ako njegovo kretanje prelazi ranije specificiranu granicu (β) u toku prelaznih procesa.

Osobina atraktivnosti je garantovana jed. (17.21.c), to jest Ljapunovljevom jednačinom, a kretanje sistema unutar specificiranih granica je garantovano uslovom datim nejed. (17.21.a).

Sada je moguće razviti kriterijum, nezavisan od čisto vremenskog kašnjenja, za analizu stabilnosti razmatranog sistema na konačnom vremenskom intervalu. Sistem ne mora biti asimptotski stabilan. Kao posledica, prethodni zahtev koji se tiče osnovne matrice sistema A_0 ne mora biti ispunjen. Matrica A_0 ne mora da bude diskretna stabilna matrica.

Teorema 17.3 Pretpostavlja se da je matrica $\left(I - A_1^T A_1\right) > 0$. Sistem, dat jed. (17.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, K_N, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan, realan broj $\wp$, $\wp > 1$, tako da:

$$\|\mathbf{x}(k-1)\|^2 < \wp \|\mathbf{x}(k)\|^2, \quad \forall k \in K_N, \quad \forall \|\mathbf{x}(k)\|^2 < \beta, \tag{17.48}$$

i ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\lambda_{\max}^k(\ ) < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall k \in K_N, \tag{17.49.a}$$

gde je:

$$\lambda_{\max}(\ ) = \lambda_{\max}\left(A_0^T\left(I - A_1^T A_1\right) A_0 + \beta I\right), \tag{17.49.b}$$

Debeljković, *Buzurović*, *Dimitrijević* (2011.a).

Dokaz. Analizira se sistem dat jed. (17.1).

Definiše se Ljapunovljeva funkcija za sistem, dat jed. (17.1), kao:

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k-1)\mathbf{x}(k-1), \tag{17.50}$$

Tada, potonja razlika $\Delta V(\mathbf{x}(k))$ duž trajektorija sistema, se dobija kao:

$$\begin{aligned}\Delta V(\mathbf{x}(k)) &= V(\mathbf{x}(k+1)) - V(\mathbf{x}(k)) \\ &= \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k-1)\mathbf{x}(k-1) \\ &= \mathbf{x}^T(k) A_0^T A_0 \mathbf{x}(k) + 2\mathbf{x}^T(k) A_0^T A_1 \mathbf{x}(k-1) \\ &\quad + \mathbf{x}^T(k-1) A_1^T A_1 \mathbf{x}(k-1) - \mathbf{x}^T(k-1)\mathbf{x}(k-1)\end{aligned}. \tag{17.51}$$

Iz jed. (17.51), dobija se:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{x}^T(k) A_0^T A_0 \mathbf{x}(k) + 2\mathbf{x}^T(k) A_0^T A_1 \mathbf{x}(k-1) \\ &\quad + \mathbf{x}^T(k-1) A_1^T A_1 \mathbf{x}(k-1)\end{aligned}. \tag{17.52}$$

Korišćenjem dobro poznate nejednakosti, sa partikularnim izborom:

$$\Gamma = \left(I - A_1^T A_1\right) > 0\,, \tag{17.53}$$

gde je I jedinična matrica, dobija se:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{x}(k+1) \le\ & \mathbf{x}^T(k)A_0^T A_0\,\mathbf{x}(k)\\ & +\mathbf{x}^T(k)A_0^T A_1\left(I - A_1^T A_1\right)^{-1} A_1^T\,A_0\,\mathbf{x}(k)\,,\\ & +\mathbf{x}^T(k-1)\mathbf{x}(k-1)\end{aligned} \tag{17.54}$$

i korišćenjem sličnog prilaza kao u radu *Xu*, *Liu* (1994), usvaja se da je:

$$\wp = \beta\,, \tag{17.55}$$

jasno je da se nejed. (17.54) svodi na:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{x}(k+1) &< \mathbf{x}^T(k)\left(A_0^T\left(I - A_1^T A_1\right)^{-1} A_0 + \beta I\right)\mathbf{x}(k)\\ &< \lambda_{\max}\left(A_0, A_1, \beta\right)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\end{aligned}\,, \tag{17.56}$$

gde je:

$$\lambda_{\max}\left(A_0, A_1, \beta\right) = \lambda_{\max}\left(A_0^T\left(I - A_1^T A_1\right)^{-1} A_0 + \beta I\right), \tag{17.57}$$

sa očiglednom osobinom da:

$$\lambda_{\max}\left(A_0, A_1, \beta\right) = \lambda_{\max}\left(A_0^T\left(I - A_1^T A_1\right)^{-1} A_0 + \beta I\right) \ge 0\,, \tag{17.58}$$

kada je:

$$\left(I - A_1^T A_1\right) \ge 0\,. \tag{17.59}$$

Sledeći procedure iz predhodog odeljka, može se napisati:

$$\ln \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{x}(k+1) - \ln \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) < \ln \lambda_{\max}(\ )\,. \tag{17.60}$$

Ako se izvrši sumiranje $\sum_{j=k_0}^{k_0+k-1}(\ )$ obe strane nejed. (17.60) za $\forall k \in K_N$, dobija se:

$$\ln \mathbf{x}^T(k_0+k)\mathbf{x}(k_0+k) \le \ln \lambda_{\max}^{k}(\ ) + \ln \mathbf{x}^T(k_0)\mathbf{x}(k_0), \quad \forall k \in K_N\,. \tag{17.61}$$

Uzimajući u obzir činjenicu da je $\left\|\mathbf{x}_0\right\|^2 < \alpha$ i uslov *Teoreme* 17.3, dat nejed. (17.49.a), dobija se:

$$\begin{aligned}\ln \mathbf{x}^T(k_0+k)\mathbf{x}(k_0+k) &< \ln \lambda_{\max}^{k}\left(A_0, A_1, \beta\right) + \ln \mathbf{x}^T(k_0)\mathbf{x}(k_0)\\ &< \ln \alpha \cdot \lambda_{\max}^{k}\left(A_0, A_1, \beta\right) < \ln \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} < \ln \beta, \quad \forall k \in K_N\end{aligned}\,. \tag{17.62}$$

Dalja objašnjenja matematičkih koncepata koji su korišćeni za izvođenje rezultata se mogu naći u lit. *Kalman*, *Bertram* (1960.b) i *Weiss*, *Infante* (1965, 1967).

Teorema 17.4 Pretpostavlja se da matrica $\left(I - A_1^T A_1\right) > 0$. Sistem, dat jed. (17.1), je *praktično nestabilan* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, \mathcal{K}_N, \left\|(\cdot)\right\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan, realan broj $\wp$, $\wp > 1$, tako da:

$$\left\| \mathbf{x}(k-1) \right\|^2 < \wp \left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N, \quad \forall \left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2 < \beta, \tag{17.63}$$

i ako postoji: realan, pozitivan broj δ, $\delta \in \left]0, \alpha\right[$ i vremenska konstanta k, $k = k^* : \exists!\left(k^* > k_0\right) \in \mathcal{K}_N$ za koju je ispunjen sledeći uslov:

$$\lambda_{\min}^{k^*} > \frac{\beta}{\delta}, \quad k^* \in \mathcal{K}_N, \tag{17.64}$$

Debeljković, *Buzurović*, *Dimitrijević* (2011.a).

Dokaz. Neka je:

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k-1)\mathbf{x}(k-1). \tag{17.65}$$

Tada primenjujući identični postupak kao u prethodnoj teoremi, dobija se:

$$\ln \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{x}(k+1) - \ln \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) > \ln \lambda_{\min}(\ \ ), \tag{17.66}$$

gde je:

$$\lambda_{\min}\left(A_0, A_1, \beta\right) = \lambda_{\min}\left(A_0^T\left(I - A_1^T A_1\right)^{-1} A_0 + \beta I\right). \tag{17.67}$$

Ako se izvrši sumiranje $\sum_{j=k_0}^{k_0+k-1}(\ \ )$ obe strane nejed. (17.66) za $\forall k \in \mathcal{K}_N$, dobija se:

$$\ln \mathbf{x}^T(k_0+k)\mathbf{x}(k_0+k) > \ln \lambda_{\min}^{k}(\ \ ) + \ln \mathbf{x}^T(k_0)\mathbf{x}(k_0), \quad \forall k \in \mathcal{K}_N. \tag{17.68}$$

Jasno je da za bilo koje $\mathbf{x}_0$ sledi: $\delta < \left\|\mathbf{x}_0\right\|^2 < \alpha$ a za neko $k^* \in \mathcal{K}_N$ i uzimajući u obzir osnovni uslov *Teoreme* 17.4, dat nejed. (17.64), dobija se:

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{x}^T\left(k_0+k^*\right)\mathbf{x}\left(k_0+k^*\right) &> \ln \lambda_{\min}^{k^*}\left(A_0, A_1, \beta\right) + \ln \mathbf{x}^T(k_0)\mathbf{x}(k_0) \\ &> \ln \delta \cdot \lambda_{\min}^{k^*}\left(A_0, A_1, \beta\right) > \ln \delta \cdot \frac{\beta}{\delta} > \ln \beta \quad . \end{aligned} \tag{17.69}$$

za neko $k^* \in \mathcal{K}_N$

Literatura

Aleksendrić, M., D, Lj. Debeljković, “Finite Time Stability of Linear Discrete Time Delayed Systems“, *Proc. HIPNEF* 2002, Niš (Yu), October 2–5, (2002) 333–340.

Angelo, H., *Linear Time Varying Systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems”, *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium), July 2–6, (1997.a) 307–311.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval”, *Proc. CDC* 97, San Diego, California (USA), December 21–23, (1997.e) 2771–2772.

Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, “Further Results on Non–Lyapunov Stability of Linear Systems with Delayed State”, *Proc. XII Brazilian Automatic Control Conference*, IV, Uberlandia (Brasil), September 14–18, (1998.f) 1229–1233.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, “Finite Time Stability of Time Delay Systems”, *IMA J. Math. Control and Information*, 16, 3, (1999.b) 101–109.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, “Lyapunov and Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems”, *Proc. ACC* 2003, Denver, Colorado (USA), June 4–6, (2003) 4450–4451.

Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stability of Time Delay Systems over Finite and Infinite Time Interval*, Cigoja press, Belgrade, 2004.a.

Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, N. J. Dimitrijević, “On Finite Time and Practical Stability of Linear Discrete Time Delay Systems”, *9th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY)*, Subotica (Serbia), September 8–10, (2011.a) 119–124.

Kalman, R. E., J. E. Bertram, “Control System Analysis and Design Via the Second Method of Lyapunov – Part II Discrete Time Systems”, *Trans. of ASME*, Ser. D, June, (1960.b) 394–400.

Nenadić, Lj. Z., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, “On Practical Stability of Time Delay Systems”, *Proc IEEE ACC American Control Conference*, Alberquerque, New Mexico (USA), June 4–6, (1997) 3235–3236.

Weiss, L., E. F. Infante, “On the Stability of Systems Defined over Finite Time Interval”, *Proc. National Acad. Science*, 54 (1), (1965) 44–48.

Weiss, L., E. F. Infante, “Finite Time Stability under Perturbing Forces on Product Spaces”, *IEEE Trans. Automat. Cont*., AC–12 (1), (1967) 54–59.

Xu B., Liu Y., “Improved Razumikhin–Type Theorem and its Applications”, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC– 39 (4), (1994) 839–845.

18. TEORIJA STABILNOSTI SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM U SMISLU NELJAPUNOVA: PRILAZI NEZAVISNI I ZAVISNI OD ČISTO VREMENSKOG KAŠNJENJA

18.1 Preliminarna razmatranja i prethodni rezultati

Razmatra se linearni, vremenski kontinualni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju, opisan sa:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\,\mathbf{x}(t) + A_1\,\mathbf{x}(t-\tau), \qquad (18.1.a)$$

sa poznatom vektorskom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{x}}(t), \quad -\tau \le t \le 0, \qquad (18.1.b)$$

gde su A_0 i A_1 konstantne matrice odgovarajućih dimenzija.

Uslovi stabilnosti zavisni od čisto vremenskog kašnjenja

Teorema 18.1 Autonomni sistem, dat jed. (18.1.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (18.1.b), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \tau, T, \mu_2(A_0) \neq 0\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\mu_2(A_0)\,t} < \frac{\beta/\alpha}{1+\mu_2^{-1}(A_0)\cdot\|A_1\|_2\cdot\left(1-e^{-\mu_2(A_0)\tau}\right)}, \quad \forall t \in [0,\ T], \qquad (18.2)$$

Debeljković et al. (1997.e).

Teorema 18.2 Autonomni sistem, dat jed. (18.1.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (18.1.b), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\sqrt{\alpha},\ \sqrt{\beta},\ \tau,\ T,\ \mu(A_0)=0\right\}$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$1+\tau\,\|A_1\|_2 < \sqrt{\beta/\alpha}, \quad \forall t \in [0,\ T], \qquad (18.3)$$

Debeljković et al. (1999.b).

18.2 Glavni rezultati

Definicija 18.1 Sistem, dat jed. (18.1.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (18.1.b), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, T\}$, ako i samo ako:

$$\|\mathbf{x}(0)\|_P^2 = \|\mathbf{x}_0\|_P^2 < \alpha \,. \tag{18.4}$$

povlači:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_P^2 < \beta, \quad \forall t \in [0, T], \tag{18.5}$$

sa osobinom da:

$$\lim_{k \to \infty} \|\mathbf{x}(t)\|_P^2 \to 0 \,. \tag{18.6}$$

Teorema 18.3 Sistem, dat jed. (18.1.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (18.1.b), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, T, \|(\cdot)\|_P^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji matrica $P = P^T > 0$, koja je rešenje sledeće matrične jednačine:

$$A_0^T P + P A_0 = -Q \,, \tag{18.7}$$

i matrica $Q = Q^T > 0$, q je pozitivan, realan broj, $q > 1$, tako da:

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}(t+\tau)\|_P \leq \sup_{\vartheta \in [-\tau, 0]} \|\mathbf{x}(t+\vartheta)\|_P \leq q \|\mathbf{x}(t)\|_P \\ \forall t \in [0, T], \quad \forall \|\mathbf{x}(t)\|_P^2 < \beta \end{gathered} \,, \tag{18.8}$$

i ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\|A_1\| < \sigma_{\min}\left(Q^{\frac{1}{2}}\right) \sigma_{\max}^{-1}\left(Q^{-\frac{1}{2}} P\right), \tag{18.9}$$

i:

$$e^{\bar{\lambda}_{\max}(\bar{\Pi}) \cdot t} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in [0, T], \tag{18.10}$$

gde je:

$$\bar{\lambda}_{\max}(\bar{\Pi}) = \bar{\lambda}_{\max}\left(\mathbf{x}^T(t)\left(P A_1 P^{-1} A_1^T P + q^2 P\right)\mathbf{x}(t) : \mathbf{x}^T(t) P \mathbf{x}(t) = 1\right), \tag{18.11}$$

Debeljković, *Buzurović*, *Nestorović*, *Stojanović*, *Dimitrijević*, *Aleksendrić* (2011.b).

Dokaz. Definiše se sledeća funkcija:

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) P\, \mathbf{x}(t) + \int_{t-\tau}^{t} \mathbf{x}^T(\vartheta) Q \mathbf{x}(\vartheta) d\vartheta \,. \tag{18.12}$$

Izvod funkcije $V\left(\mathbf{x}(t)\right)$ duž trajektorija sistema, se dobija kao:

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right) &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)\right)+\frac{d}{dt}\int_{t-\tau}^{t}\mathbf{x}^T(\vartheta)Q\mathbf{x}(\vartheta)d\vartheta \\ &= \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^TP+PA_0\right)\mathbf{x}(t)+2\mathbf{x}^T(t)PA_1\mathbf{x}(t-\tau)\,. \\ &+\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}^T(t-\tau)Q\mathbf{x}(t-\tau)\end{aligned} \tag{18.13}$$

Iz jed. (18.13), očigledno je da je:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)\right)=\mathbf{x}^T(t)\left(A_0^TP+PA_0\right)\mathbf{x}(t)+2\mathbf{x}^T(t)PA_1\mathbf{x}(t-\tau), \tag{18.14}$$

ili:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)\right) &= \mathbf{x}^T(t)\left(A_0^TP+PA_0+Q\right)\mathbf{x}(t) \\ &+2\mathbf{x}^T(t)PA_1\mathbf{x}(t-\tau)-\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t)\end{aligned}\,. \tag{18.15}$$

Iz jed. (18.7), sledi:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)\right)=-\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t)+2\mathbf{x}^T(t)PA_1\mathbf{x}(t-\tau), \tag{18.16}$$

kao i, korišćenjem ranije pomenute nejednakosti, sa partikularnim izborom:

$$\mathbf{x}^T(t)\Gamma\mathbf{x}^T(t)=\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}^T(t)>0, \quad \forall t\in[0,T], \quad \forall\left\|\mathbf{x}(t)\right\|_P^2<\beta, \tag{18.17}$$

i činjenice da je:

$$\mathbf{x}^T(t)Q\mathbf{x}(t)>0, \quad \forall t\in[0,T], \tag{18.18}$$

pozitivno određena kvadratna forma, dobija se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\;\mathbf{x}(t)\right) &< 2\mathbf{x}^T(t)PA_1\mathbf{x}(t-\tau) \\ &\le \mathbf{x}^T(t)PA_1P^{-1}A_1^TP\;\mathbf{x}(t)+\mathbf{x}^T(t-\tau)P\mathbf{x}(t-\tau)\end{aligned}\,. \tag{18.19}$$

Na osnovu pretpostavke, date nejed. (18.8), jasno je da se nejed. (18.19) svodi na:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)\right)<\mathbf{x}^T(t)\left(PA_1P^{-1}A_1^TP+q^2P\right)\mathbf{x}(t), \tag{18.20}$$

ili korišćenjem jed. (18.11), dobija se:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)\right)<\bar{\lambda}_{\max}\left(\bar{\Pi}\right)\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t), \tag{18.21}$$

ili:

$$\frac{d\left(\mathbf{x}^T(t)P\,\mathbf{x}(t)\right)}{\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)}<\bar{\lambda}_{\max}\left(\bar{\Pi}\right)dt\,, \tag{18.22}$$

ili:

$$\int_0^t \frac{d\left(\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)\right)}{\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)} < \int_0^t \bar{\lambda}_{\max}\left(\bar{\Pi}\right)dt\,, \tag{18.23}$$

i:

$$\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t) < \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0)e^{\bar{\lambda}_{\max}(\bar{\Pi})\cdot t}\,. \tag{18.24}$$

Konačno, ako se iskoristi prvi uslov dat *Definicijom* 18.1, tada:

$$\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t) < \alpha \cdot e^{\bar{\lambda}_{\max}(\bar{\Pi})\cdot t}\,, \tag{18.25}$$

i osnovni uslov *Teoreme* 18.3, dat nejed. (18.10), dobija se:

$$\mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t) < \alpha \cdot \frac{\beta}{\alpha} < \beta, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{18.26}$$

Napomena 18.1 Asimptotska stabilnost sistema, datog jed. (18.1) je garantovana jed. (18.7) i nejed. (18.9), na osnovu ideja prezentovanih u radu *Tissir*, *Hmamed* (1996).

Prethodno prezentovani rezultati su nezavisni od čisto vremenskog kašnjenja, dok su rezultati koji slede zavisni od kašnjenja.

Radi celovitijeg sagledavanja problema, prezentuje se sledeći rezultat, *Lee, Dianat* (1981).

Lema 18.1 Razmatra se vremenski kontinualni sistem, dat jed. (18.1), diferencijabilan na $[0,\ \tau]$, sa karakterističnom matricom $P_1(t)$ reda $(n\times n)$, $P_1(\tau)=0$ bilo gde, i skalarna funkcija:

$$V(\mathbf{x}_t,\tau) = \left(\mathbf{x}(t) + \int_0^\tau P_1(\vartheta)\mathbf{x}(t-\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right)^* P_0 \left(\mathbf{x}(t) + \int_0^\tau P_1(\vartheta)\mathbf{x}(t-\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right), \tag{18.27}$$

gde je $P_0 = P_0^* > 0$ *Hermitian* matrica i $\mathbf{x}_t(\vartheta) = \mathbf{x}(t+\vartheta),\ \vartheta \in [-\tau,\ 0]$.

Ako je:

$$P_0\left(A_0 + P_1(0)\right) + \left(A_0 + P_1(0)\right)^* P_0 = -Q\,, \tag{18.28}$$

$$\dot{P}_1(\vartheta) = \left(A_0 + P_1(0)\right)P_1(\vartheta), \quad 0 \le \vartheta \le \tau\,, \tag{18.29}$$

gde je $P_1(\tau) = A_1$ i $Q = Q^* > 0$ *Hermitian* matrica, tada:

$$\dot{V}(\mathbf{x}_t,\ \tau) = \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}_t,\ \tau) < 0\,, \tag{18.30}$$

Lee, *Dianat* (1981).

Jed. (18.27) definiše Ljapunovljevu funkciju sistema, datog jed. (18.1), a * označava konjugovano transponovanu matricu. U radu *Lee*, *Dianat* (1981) naglašeno je da je ključ uspeha u konstruisanju Ljapunovljeve funkcije koja odgovara sistemu, datom jed. (18.1), postojanje najmanje jednog rešenja $P_1(t)$ jed. (18.29) sa graničnim uslovom $P_1(\tau) = A_1$.

Drugim rečima, zahteva se da nelinearna algebarska matrična jednačina:

$$e^{(A_0+P_1(0))\tau} P_1(0) = A_1, \tag{18.31}$$

ima *najmanje jedno* rešenje po matrici $P_1(0)$.

Teorema 18.4 Razmatra se sistem opisan jed. (18.1). Ako za bilo koju datu pozitivno određenu *Hermitian* matricu Q postoji pozitivno određena *Hermitian* matrica P_0, tako da:

$$P_0(A_0 + P_1(0)) + (A_0 + P_1(0))^* P_0 + Q = 0, \tag{18.32}$$

gde za $\vartheta \in [0, \tau]$, matrica $P_1(\vartheta)$ zadovoljava:

$$\dot{P}_1(\vartheta) = (A_0 + P_1(0)) P_1(\vartheta), \tag{18.33}$$

sa graničnim uslovom $P_1(\tau) = A_1$ i $P_1(\tau) = 0$ bilo gde, tada je sistem *asimptotski stabilan*, *Lee*, *Dianat* (1981).

Teorema 18.5 Razmatra se sistem opisan jed. (18.1) i osim toga, neka jed. (18.31) ima nesingularno rešenje $P_1(0)$. Tada je sistem *asimptotski stabilan* ako i samo ako je zadovoljena jed. (18.32), *Lee*, *Dianat* (1981).

Potrebni i dovoljni uslovi stabilnosti sistema su izvedeni primenom Ljapunovljeve direktne metode preko konstruisanja odgovarajuće energetske funkcije. Ova funkcija postoji ako se može odrediti rešenje $P_1(0)$ algebarske nelinearne matrične jednačine $A_1 = \exp\tau(A_0 + P_1(0)) \cdot P_1(0)$.

Potvrđeno je, u radu *Lee*, *Dianat* (1981), da se znak izvoda Ljapunovljeve funkcije (*Lema* 18.1) i na taj način asimptotska stabilnost sistema (*Teorema* 18.4 i *Teorema* 18.5) mogu odrediti na osnovu poznavanja *samo jednog ili bilo kog* rešenja odgovarajuće nelinearne matrične jednačine.

U nastavku će se analizirati poboljšanje *Leme* 18.1, uzimajući u obzir sva moguća rešenje jed. (18.31).

Kontra primer, koji se zasniva na predloženom prilazu i koji je podržan primenom *Lambert*–ove funkcije, dat je u lit. *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d, 2008.a, 2008.b) i *Debeljković*, *Stojanović* (2008).

Napomena 18.2 Ako se uvede nova matrica:

$$R \triangleq A_0 + P_1(0), \tag{18.34}$$

tada uslov dat jed. (18.28) glasi:

$$P_0 R + R^* P_0 = -Q, \tag{18.35}$$

što predstavlja dobro poznatu Ljapunovljevu jednačinu za sistem bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja.

Ovaj uslov će biti ispunjen ako i samo ako je R stabilna matrica, to jest ako važi:

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i(R) < 0, \tag{18.36}$$

Stojanović, *Debeljković* (2005.d).

Napomena 18.3 Jed. (18.31) izražena preko matrice R se može napisati u različitoj formi na sledeći način:

$$R - A_0 - e^{-R\tau} A_1 = 0, \tag{18.37}$$

odakle sledi:

$$\det\left(R - A_0 - e^{-R\tau} A_1\right) = 0, \tag{18.38}$$

Stojanović, *Debeljković* (2005.d).

Zamenjujući matricu R skalarom s u jed. (18.38), karakterističnoj jednačini sistema, datog jed. (18.1), dobija se:

$$f(s) = \det\left(sI - A_0 - e^{-s\tau} A_1\right) = 0. \tag{18.39}$$

Neka sa:

$$\Sigma \triangleq \left\{ s \mid f(s) = 0 \right\}, \tag{18.40}$$

označimo skup svih karakterističnih korenova sistema, datog jed. (18.1).

Potreba za ispravnošću željenog rezultata, dovodi do novih formulacija *Leme* 18.1, *Teoreme* 18.4 i *Teoreme* 18.5.

Lema 18.2 Pretpostavlja se da postoji (postoje) rešenje (rešenja) $P_1(0)$ jed. (18.31) i neka je Ljapunovljeva funkcija data jed. (18.27). Tada, $\dot{V}(\mathbf{x}_t,\tau)<0$ *ako i samo ako* za bilo koju matricu $Q=Q^*>0$ postoji matrica $P_0=P_0^*>0$ tako da važi jed. (18.28) za *svako (sva)* rešenje (rešenja) $P_1(0)$, *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d) i *Debeljković*, *Stojanović* (2008).

Teorema 18.6 Pretpostavlja se da postoji (postoje) rešenje (rešenja) $P_1(0)$ jed. (18.31). Tada je sistem, dat jed. (18.1), *asimptotski stabilan* ako za bilo koju matricu $Q=Q^*>0$ postoji matrica $P_0=P_0^*>0$ tako da važi jed. (18.28) za *sva* rešenja $P_1(0)$ jed. (18.31).

Teorema 18.7 Pretpostavlja se da postoji (postoje) rešenje (rešenja) $P_1(0)$ jed. (18.31). Ako je sistem, dat jed. (18.1), *asimptotski stabilan*, tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(i) Za bilo koju matricu $Q=Q^*>0$ postoji matrica $P_0=P_0^*>0$ tako da važi jed. (18.28) za *sva* rešenja $P_1(0)$ jed. (18.31).

(ii) Uslov $\operatorname{Re}\lambda_i\left(A_0+P_1(0)\right)<0$ važi za *sva* rešenja $P_1(0)$ jed. (18.31), *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d) i *Debeljković*, *Stojanović* (2008).

Napomena 18.4 *Teorema* 18.5 daje dovoljan a *Teorema* 18.6 potreban uslov stabilnosti.

Na osnovu prethodnih rezultata, u nastavku će se formulisati uslovi stabilnosti.

Teorema 18.8 Pretpostavlja se da postoji (postoje) rešenje (rešenja) $P_1(0)$ jed. (18.31). Tada je sistem, dat jed. (18.1), *asimptotski stabilan* ako i samo ako važi bilo koji od sledeća dva iskaza:

(i) Za bilo koju matricu $Q=Q^*>0$ postoji matrica $P_0=P_0^*>0$ tako da važi jed. (18.28) za *sva* rešenja $P_1(0)$ jed. (18.31).

(ii) Uslov $\operatorname{Re}\lambda_i\left(A_0+P_1(0)\right)<0$ važi za *sva* rešenja $P_1(0)$ jed. (18.31).

Napomena 18.5 Iskazi *Leme* 18.2, *Teoreme* 18.6 i *Teoreme* 18.7 zahtevaju da su ispunjeni odgovarajući uslovi za bilo koje rešenje $P_1(0)$ jed. (18.31) ili rešenje R jed. (18.37).

Ovi matrični uslovi su analogni sledećem poznatom skalarnom uslovu asimptotske stabilnosti.

Sistem, dat jed. (18.1), je *asimptotski stabilan* ako i samo ako *uslov* $\operatorname{Re} s < 0$ važi za *sva* rešenja s jed. (18.39), *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d), *Debeljković*, *Stojanović* (2008).

Napomena 18.6 Iz prethodne teoreme, nameće se sledeće praktično pitanje: Kako se mogu numerički izračunati sva moguća rešenja $P_1(0)$ jed. (18.31)?

Ovaj problem ne može se direktno numerički rešiti zato što broj rešenja $P_1(0)$ nije poznat unapred, i može biti veoma velik ili beskonačan, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.b).

Međutim, da bi se efikasnije ispitala stabilnost sistema, pomenuti numerički problem može se zameniti novim, numerički jednostavnijim problemom koji glasi:

a) jed. (18.37) se rešava umesto jed. (18.31), i

b) izračunavanja se vrše za rešenje $R_{\max}$ jed. (18.37) čiji spektar sadrži sopstvenu vrednost $\lambda_{\max} \in \Sigma$ sa maksimalnim realnim delom.

Korak b) u poslednjem problemu zahteva istraživanje novih numeričkih algoritama za direktno izračunavanje matrice $R_{\max}$ iz nelinearne (eksponencijalne) matrične jednačine (18.37). Prema dostupnim saznanjima, takvi algoritmi nisu prezentovani u postojećoj literaturi. Danas se koriste postojeći algoritmi koji se baziraju na različitim standardnim metodama optimizacije i koji zahtevaju početna pogađanja rešenja date jednačine.

Na osnovu *Napomene* 18.5, moguće je reformulisati *Teoremu* 18.8 na sledeći način.

Teorema 18.9 Pretpostavlja se da postoji rešenje $R_{\max}$ jed. (18.37). Tada je sistem, dat jed. (18.1), *asimptotski stabilan* ako i samo ako važi bilo koji od sledeća dva ekvivalentna iskaza:

(i) Za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P_0 = P_0^* > 0$ tako da važi jed. (18.35) za rešenje $R_{\max}$.

(ii) $\operatorname{Re}\lambda_i\left(R_{\max}\right) < 0$.

Teorema 18.10 Autonomni sistem, dat jed. (18.1.a), sa početnom funkcijom, datom jed. (18.1.b), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, T, \|(\cdot)\|_P^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan, realan broj q, $q > 1$, tako da:

$$\begin{gathered} \|\mathbf{x}(t+\tau)\|_P \le \sup_{\vartheta\in[-\tau,0]} \|\mathbf{x}(t+\vartheta)\|_P < q\|\mathbf{x}(t)\|_P \\ \forall t \in [0,T], \quad \forall \|\mathbf{x}(t)\|_P^2 < \beta \end{gathered}, \tag{18.41}$$

i ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji matrica $P_0 = P_0^* > 0$ tako da važi jed. (18.35) za *sva* rešenja $P_1(0)$ jed. (18.31)[7] i ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\bar{\lambda}_{\max}(\bar{\Upsilon})\cdot t} < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall t \in [0,T], \tag{18.42}$$

gde je:

$$\bar{\lambda}_{\max}\left(\bar{\Upsilon}\right) = \bar{\lambda}_{\max}\left(\mathbf{x}^T(t)\left(A_0^T P_0 + P_0 A_0 + P_0 A_1 P_0^{-1} A_1^T P_0 + q^2 P_0\right)\mathbf{x}(t) : \mathbf{x}^T(t) P_0 \mathbf{x}(t) = 1\right), \tag{18.43}$$

Debeljković, *Buzurović*, *Nestorović*, *Stojanović*, *Dimitrijević*, *Aleksendrić* (2011.b).

Dokaz. Definiše se sledeća funkcija:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}_t,\tau) &= \mathbf{x}^T(t) P_0 \mathbf{x}(t) + \int_0^\tau\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\nu) P_1^T(\nu) P_0 P_1(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\nu\, d\eta \\ &+ \mathbf{x}^T(t) P_0 \int_0^\tau P_1(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\eta + \int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\eta) P_1(\eta)\,d\eta \end{aligned}. \tag{18.44}$$

Izvod funkcije $V(t,\mathbf{x}(t))$ duž trajektorija sistema, se dobija kao[8]:

$$\dot{V}(\mathbf{x}_t,\tau) = \left(\mathbf{x}(t) + \int_0^\tau P_1(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\eta\right)^T (-Q)\left(\mathbf{x}(t) + \int_0^\tau P_1(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\eta\right), \tag{18.45}$$

---

[7] *Alternativno:*

Uslov $\operatorname{Re}\lambda_i\left(A_0 + P_1(0)\right) < 0$ važi za *sva* rešenja $P_1(0)$ jed. (18.55), *Stojanović*, *Debeljković* (2005.d).

[8] Pod uslovima *Leme* 18.2.

i s obzirom da je $(-Q)$ negativno određena i očigledno: $\dot{V}(\mathbf{x}_t,\tau)<0$, sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (18.1), poseduje osobinu atraktivnosti.

Osim toga, očigledno je da:

$$\begin{aligned}\frac{dV(\mathbf{x}_t,\tau)}{dt} &= \frac{d\left(\mathbf{x}^T(t)P_0\mathbf{x}(t)\right)}{dt}\\ &+\frac{d}{dt}\left(\int_0^\tau\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\nu)P_1^T(\nu)P_0P_1(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\nu d\eta\right. ,\\ &\left.+\,\mathbf{x}^T(t)P_0\int_0^\tau P_1(\eta)\mathbf{x}(t-\eta)\,d\eta+\int_0^\tau \mathbf{x}^T(t-\eta)P_1(\eta)\,d\eta\right)\end{aligned}\qquad(18.46)$$

tako da, prateći standardnu proceduru iz prethodnog odeljka, dolazi se do sledeće forme jed. (18.14):

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^T(t)P_0\mathbf{x}(t)\right)=\mathbf{x}^T(t)\left(A_0^TP_0+P_0A_0\right)\mathbf{x}(t)+2\mathbf{x}^T(t)P_0A_1\mathbf{x}(t-\tau).\qquad(18.47)$$

Radi sažetosti, ostatak dokaza je izostavljen i identičan je dokazu prezentovanom u predhodnom odeljku. Prema tome, prema *Definiciji* 18.1, *Teorema* 18.10 je dokazana.

Literatura

Angelo, H., *Linear Time Varying Systems*, Allyn and Bacon, Boston, USA, 1974.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems”, *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium), July 2–6, (1997.a) 307–311.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval”, *IEEE Proc. CDC* 97, San Diego, California (USA), December 21–23, (1997.e) 2771–2772.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman–Gronwall Approach”, *Proc. 1st IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France), July 6–7, (1998.c) 171–175.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, “Finite Time Stability of Time Delay Systems”, *IMA J. Math. Control and Info*., Vol. 16, 3, (1999.b).

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Further Results on the Stability of Linear Non–Autonomous Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval”, *Proc. ACC* 2000, Chicago, Illinois (USA), June 28–30, (2000.a) 1450–1451.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, “Systems, Structure and Control” – Editor Petr Husek, Chapter: “Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach”, I – Tech, Vienna, (2008) 29–60.

Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, T. Nestorović, S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, M. S. Aleksendrić, “Time Delayed System Stability Theory in the sense of Non–Lyapunov Delay Independent and Delay Dependent Approach: New Results”, *IEEE Multi–Conference on Systems and Control*, No. 36, Denver, CO (USA), September 28–30, (2011.b) 1410–1417.

Feng, H. H., J. Hunsarg, “Stabilization of Nonlinear Singularly Perturbed Multiple Time Delay Systems by Dither”, *Trans. ASME J. of Dynamic Systems*, *Measurement and Control*, Vol. 118 (3), (1996) 177–181.

La Salle, S. Lefschet, *Stability by Lyapunov’s Direct Method*, Academic Press, New York, 1961.

Lee, T. N., S. Dianat, “Stability of Time–Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr*., Vol. 26, No 4, (1981) 951–954.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, “On Practical Stability of Time Delay Systems”, *IEEE Proc. American Control Conference*, Albuquerque (USA), June 4–6, (1997) 3235–3236.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Continuous Large Scale Time Delay Autonomous Systems”, *Asian Journal of Contro*l, (Taiwan), Vol. 7, No. 4, (2005.d) 414–418.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, “Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems”, *Proc. of 17th IFAC World Congress*, Seoul (Korea), July 06–10, (2008.a).

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Delay–Dependent Stability of Linear Discrete Large Scale Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions", *International Journal of Information & System Science*, Canada, Vol. 4, No. 2, (2008.b) 241–250.

Tissir, E., A. Hmamed, "Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{x}(t-\tau)$", *Automatica*, Vol. 32 (12), (1996) 1723–1726.

Weiss, L., E. F. Infante, "On the Stability of Systems Defined over a Finite Time Interval", *Proc. National Acad. Sci*., Vol. 54, (1965) 44–48.

Weiss, L., E. F. Infante, "Finite Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces", *IEEE Trans. Automat. Cont*., Vol. AC–12, (1967) 54–59.

19. STABILNOST NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU LINEARNIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

19.1 Uvodna razmatranja

Mnogobrojna proučavanja koja se tiču stabilnosti sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem su objavljenja sa partikularnim osvrtom na primenu Ljapunovljeve druge metode. Druga rešenja se zasnivaju na korišćenju matrične mere kao što je prezentovano u lit. *Lee*, *Diant* (1981), *Mori et al*. (1982.b) i *Hmamed* (1986.a, 1989).

Potrebno je ukazati da ne postoje rezultati koji se tiču problema neljapunovske stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Na osnovu rezultata koji se tiču praktične stabilnosti iz lit. *La Salle*, *Lefschet* (1961) i *Weiss*, *Infante* (1965, 1967) uvode se različite kategorije stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu za vremenski kontinualne sisteme i kostantan skup graničnih trajektorija.

Dalji razvoj ovih rezultata je ostvaren zahvaljujući mnogim drugim autorima. Razultati o stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i praktičnoj stabilnosti partikularne klase nelinearnih, singularnih, perturbovanih, višestrukih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem su uvedeni u radu *Hang*, *Hunsarg* (1996). Definicije prezentovane u ovom radu su slične definicijama prezentovanim u lit. *Weiss*, *Infante* (1965, 1967), ali prilagođene za sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem.

U kontekstu stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i praktične stabilnosti linearnih, vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem različiti rezultati su prezentovani u lit. *Debeljković et al*. (1997.a, 1997.e) i *Nenadić et al*. (1997).

Za analizu praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu linearnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem prilaz matrične mere je primenjen u lit. *Debeljković et al*. (1998.c, 1999.b).

Neki inicijalni rezultati koji se u potpunosti zasnivaju na diskretnoj fundamentalnoj matrici sistema su prezentovani u radu *Debeljković*, *Aleksendrić* (2003).

Poznato je da je izračunavanje diskretne fundamentalne matrice ponekad teže nego pronalaženje rešenja sistema iz izvedene diferencijalne jednačine.

Rezultati u radu *Debeljković*, *Aleksendrić* (2003) predstavljaju proširenje koncepta stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i praktične stabilnosti na klasu linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Kod vremenski diskretnih sistema sa kašnjenjem, čisto vremensko kašnjenje može prouzrokovati probleme u dinamici sistema kao i u razvijanju kriterijuma stabilnosti.

Razmatra se linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju opisan sledećom jednačinom:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h), \tag{19.1.a}$$

sa poznatom vektorskom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-h, -h+1, \ldots, 0\}, \tag{19.1.b}$$

gde je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja a A_0 u A_1 su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija. Čisto vremensko kašnjenje h je konstantno.

Rezultati koji razmatraju i ispituju problem analize neljapunovske stabilnosti linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem su prezentovani u radu *Debeljković*, *Aleksendrić* (2003), gde je ovaj problem razmatran prvi put.

Definicija 19.1 Linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (19.1.a), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, N, \|(\cdot)\|\}$, $\alpha \le \beta$, ako i samo ako za svaku trajektoriju $\mathbf{x}(k)$ koja zadovoljava početnu funkciju, datu jed. (19.1.b), tako da:

$$\|\mathbf{x}(k)\| < \alpha, \quad k = 0, -1, -2, \ldots, -N, \tag{19.2}$$

sledi:

$$\|\mathbf{x}(k)\| < \beta, \quad \forall k \in \mathcal{K}_N. \tag{19.3}$$

19.2 Prethodni rezultati

Teorema 19.1 Sistem, dat jed. (19.1), sa $\det A_1 \neq 0$, je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, K_N, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji matrica $P = P^T > 0$, koja je rešenje sledeće matrične jednačine:

$$2A_0^T P A_0 - P = -Q, \tag{19.4}$$

gde je $Q = Q^T > 0$ i ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\|A_1\| < \sigma_{\min}\left(\left(Q - A_1^T P A_1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\sigma_{\max}^{-1}\left(Q^{-\frac{1}{2}} A_0^T P\right), \tag{19.5}$$

$$\bar{\lambda}_{\max}^{\frac{1}{2}k}(\ ) < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall k \in K_N, \tag{19.6}$$

gde je:

$$\bar{\lambda}_{\max}(\ ) = \max\left\{\mathbf{x}^T(k) A_1^T P A_1 \mathbf{x}(k) : \mathbf{x}^T(k) A_0^T P A_0 \mathbf{x}(k) = 1\right\}, \tag{19.7}$$

Debeljković (2011).

Teorema 19.2 Pretpostavlja se da matrica A_1 ispunjava uslov $\left(I - A_1^T A_1\right) > 0$. Sistem, dat jed. (19.1), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, K_N, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan, realan broj p, $p > 1$, tako da:

$$\|\mathbf{x}(k-1)\|^2 < p^2 \|\mathbf{x}(k)\|^2, \quad \forall k \in K_N, \quad \forall \|\mathbf{x}(k)\|^2 < \beta, \tag{19.8}$$

i ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\lambda_{\max}^k(\ ) < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall k \in K_N, \tag{19.9}$$

gde je:

$$\lambda_{\max}(\ ) = \lambda_{\max}\left(A_0^T A_1\left(I - A_1^T A_1\right) A_1^T A_0 + p^2 I\right), \tag{19.10}$$

Debeljković (2011).

19.3 Glavni rezultati

Pre prezentovanja krucijalnog rezultata, potrebno je diskutovati i objasniti neke dodatne rezultate.

Karakteristični polinom sistema, datog jed. (19.1), je:

$$\begin{gathered} f(\lambda) \triangleq \det M(\lambda) = \sum_{j=0}^{n(h+1)} a_j \lambda^j, \quad a_j \in \mathbb{R} \\ M(\lambda) = I_n \lambda^{h+1} - A_0 \lambda^h - A_1 \end{gathered}. \tag{19.11}$$

Označimo sa:

$$\Omega \triangleq \{ \lambda \mid f(\lambda) = 0 \} = \lambda(A_{eq}), \tag{19.12}$$

skup svih karakterističnih korena sistema, datog jed. (19.1).

Broj ovih korenova je $n(h+1)$.

Koren λ_m skupa Ω sa maksimalnim modulom:

$$\lambda_m \in \Omega : |\lambda_m| = \max |\lambda(A_{eq})|, \tag{19.13}$$

se naziva maksimalni koren (sopstvena vrednost).

Ako se skalarna promenljiva λ u karakterističnom polinomu zameni matricom $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dobijaju se sledeća dva matrična polinoma:

$$M(X) = X^{h+1} - A_0 X^h - A_1, \tag{19.14}$$

$$F(X) = X^{h+1} - X^h A_0 - A_1. \tag{19.15}$$

Očigledno je da je $F(\lambda) = M(\lambda)$.

Matrica $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je desni solvent matričnog polinoma $M(X)$, *Dennis et al.* (1976), ako je:

$$M(S) = 0. \tag{19.16}$$

Ako je:

$$F(R) = 0, \tag{19.17}$$

tada je $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ levi solvent matričnog polinoma $M(X)$, *Dennis et al.* (1976).

Oznaka S se koristi za označavanje desnog solventa, a R za označavanje levog solventa matričnog polinoma $M(X)$.

U prezentovanom radu većina rezultata se zasniva na levim solvenatima matričnog polinoma $M(X)$. Nasuprot tome, u postojećoj literaturi se uglavnom izučavaju desni solventi matričnog polinoma $M(X)$.

Pomenuto razilaženje se može prevazići sledećom lemom.

Lema 19.1 Konjugovano transponovana vrednost levog solventa matričnog polinoma $M(X)$ je, istovremeno, desni solvent sledećeg matričnog polinoma:

$$M_T(X) = X^{h+1} - A_0^T X^h - A_1^T, \tag{19.18}$$

Stojanović, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Zaključak 19.1 Na osnovu *Leme* 19.1, sve karakteristike levih solvenata matričnog polinoma $M(X)$ mogu se dobiti analizom konjugovano transponovane vrednosti desnih solvenata matričnog polinoma $M_T(X)$. Prezentovana faktorizacija matrice $M(\lambda)$ služi za bolje razumevanje veze između sopstvenih vrednosti levih i desnih solvenata i korenova sistema, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Lema 19.2 Matrica $M(\lambda)$ se može predstaviti u faktorizovanom obliku na sledeći način:

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= \left(\lambda^h I_n + (S - A_0)\sum_{i=1}^{h} \lambda^{h-i} S^{i-1}\right)(\lambda I_n - S) \\ &= (\lambda I_n - R)\left(\lambda^h I_n + \sum_{i=1}^{h} \lambda^{h-i} R^{i-1}(R - A_0)\right) \end{aligned}. \tag{19.19}$$

Stojanović, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Definicija 19.2 Neka je $M(\lambda)$ matrični polinom po λ. Ako $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tako da je $\det\left(M(\lambda_i)\right) = 0$, tada je λ_i *latentni koren* ili *sopstvena vrednost* matričnog polinoma $M(\lambda)$.

Ako nenulti vektor $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ tako da je:

$$M(\lambda_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}, \tag{19.20}$$

tada je $\mathbf{v}_i$ (desni) *latentni vektor* ili (desni) *sopstveni vektor* matričnog polinoma $M(\lambda)$, koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ_i, *Dennis et al.* (1976), *Pereira* (2003).

Sopstvene vrednosti matrice $M(\lambda)$ se podudaraju sa karakterističnim korenima sistema, to jest sa sopstvenim vrednostima njegove blok matrice pratilje A_{eq}, *Dennis et al.* (1976). Njihov broj je $n(h+1)$.

S obzirom da važi $F^{*}(\lambda)=M_{T}(\lambda^{*})$, nije teško pokazati da matrice $M(\lambda)$ i $M_{T}(\lambda)$ imaju isti spektar.

U lit. *Dennis et al.* (1976, 1978), *Kim* (2000) i *Pereira* (2003) su izvedeni dovoljni uslovi postojanja, brojnosti i karakterizacije desnih solvenata matričnog polinoma $M(X)$. Pokazano je da broj solvenata može biti nula, konačan ili beskonačan.

Za ispitivanje stabilnosti sistema, datog jed. (19.1), upotrebljivi su samo maksimalni solventi, čiji spektar sadrži maksimalnu sopstvena vrednost λ_m.

Specijalan slučaj maksimalnog solventa je dominantni solvent, *Dennis et al.* (1978), *Kim* (2000), koji se, za razliku od maksimalnog solventa, može izračunati na jednostavan način.

Definicija 19.3 Svaki solvent S_m matričnog polinoma $M(X)$, čiji spektar $\sigma(S_m)$ sadrži maksimalnu sopstvenu vrednost λ_m skupa Ω je *maksimalni* solvent.

Definicija 19.4 Matrica A dominira matricom B ako su sve sopstvene vrednosti matrice A veće, po apsolutnoj vrednosti, u odnosu na sopstvene vrednosti matrice B.

U posebnom slučaju, ako solvent S_1 matričnog polinoma $M(X)$ dominira solventima $S_2,\ldots,S_l$ tada je S_1 *dominantni solvent*, *Dennis et al.* (1978), *Kim* (2000).

Potrebno je uočiti da dominantni solvent ne može biti singularan.

Zaključak 19.2 Broj maksimalnih solvenata može biti veći od jedan. Dominantni solvent je istovremeno maksimalni solvent, *Stojanović*, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Dominantni solvent S_1 matričnog polinoma $M(X)$, pod određenim uslovima se može odrediti pomoću *Traub*–ove, *Dennis et al.* (1978), i *Bernoulli*–eve *iteracije, Dennis et al.* (1978) i *Kim* (2000).

Potrebni i dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti linearnog, vremenski diskretnog sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, datog jed. (19.1), su dati u sledećoj teoremi.

Teorema 19.3 Pretpostavlja se da postoji najmanje jedan maksimalni levi solvent matričnog polinoma $M(X)$ i sa R_m se označava jedan od njih. Tada je linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (19.1), *asimptotski stabilan* ako i samo ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji *Hermitska* matrica $P = P^* > 0$, tako da:

$$R_m^* P R_m - P = -Q, \tag{19.21}$$

Stojanović, *Debeljković* (2008.a, 2009.a).

Teorema 19.4 Pretpostavlja se da postoji najmanje jedan maksimalni solvent matričnog polinoma $M(X)$ i sa R_m se označava jedan od njih. Tada je linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (19.1), sa $\det A_1 \neq 0$, *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, N, \|(\cdot)\|\}$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in Z_+$, ako za bilo koju matricu $Q = Q^* > 0$ postoji *Hermitian* matrica $P = P^* > 0$ tako da:

$$R_m^* P R_m - P = -Q, \tag{19.22}$$

i ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\|\Phi(k)\| < \frac{\beta}{\alpha\left(1 + \|A_1\|\right)}, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, N, \tag{19.23}$$

Debeljković, *Stojanović*, *Dimitrijević*, *Popov* (2012.a).

Dokaz. Prvi deo dokaza je više nego očigledan i direktno sledi iz činjenice da je osobina atraktivnosti garantovana jed. (19.22).

Rešenje jed. (19.1) se može izraziti pomoću fundamentalne matrice na sledeći način:

$$\mathbf{x}(k) = \Phi(k)\mathbf{x}(0) + \Phi(k) A_1 \mathbf{x}(-1). \tag{19.24}$$

U skladu sa osobinama norme, može se napisati:

$$\|\mathbf{x}(k)\| \leq \alpha \|\Phi(k)\| \left(1 + \|A_1\|\right), \tag{19.25}$$

gde se koristi prvi uslov *Definicije* 19.1.

Da bi se dobio krajnji rezultat, koristi se nejed. (19.23), tako da je:

$$\left\|\mathbf{x}(k)\right\| < \frac{\beta\alpha\left(1+\left\|A_1\right\|\right)}{\alpha\left(1+\left\|A_1\right\|\right)} < \beta, \quad \forall k = 0,1,\ldots,N\,, \tag{19.26}$$

čime je teorema dokazana.

Teorema 19.5 Pretpostavlja se da matrica A_1 ispunjava uslov $\left(I - A_1^T A_1\right) > 0$. Sistem, dat jed. (19.1), je *praktično nestabilan* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, K_N, \left\|(\cdot)\right\|^2\right\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji pozitivan, realan broj $\wp$, $\wp > 1$, tako da:

$$\left\|\mathbf{x}(k-1)\right\|^2 < \wp^2 \left\|\mathbf{x}(k)\right\|^2, \quad \forall k \in K_N, \quad \forall \left\|\mathbf{x}(k)\right\|^2 < \beta\,, \tag{19.27}$$

i ako postoji realan, pozitivan broj $\delta,\ \delta \in \left]0, \alpha\right[$ i vremenska konstanta $k,\ k = k^* : \exists!\left(k^* > k_0\right) \in K_N$ za koju je ispunjen sledeći uslov:

$$\lambda_{\min}^{k^*} > \frac{\beta}{\delta}, \quad k^* \in K_N\,, \tag{19.28}$$

Debeljković, *Stojanović*, *Dimitrijević*, *Popov* (2012.a).

Dokaz. Neka je:

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^T(k-1)\mathbf{x}(k-1)\,. \tag{19.29}$$

Sledeći klasične procedure, *Debeljković* (2011), dobija se:

$$\ln \mathbf{x}^T(k+1)\mathbf{x}(k+1) - \ln \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) > \ln \lambda_{\min}(\ )\,, \tag{19.30}$$

gde je:

$$\lambda_{\min}(\ ) = \lambda_{\min}\left(A_0^T A_1 \left(I - A_1 A_1^T\right)^{-1} A_1^T A_0 + \wp^2 I\right). \tag{19.31}$$

Ako se izvrši sumiranje $\sum\limits_{j=k_0}^{k_0+k-1}$ obe strane nejed. (19.30) za $\forall k \in K_N$, dobija se:

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{x}^T\left(k_0+k\right)\mathbf{x}\left(k_0+k\right) &\geq \ln \prod_{j=k_0}^{k_0+k-1} \lambda_{\min}(\ ) \\ &\geq \ln \lambda_{\min}^{k}(\ ) + \ln \mathbf{x}^T\left(k_0\right)\mathbf{x}\left(k_0\right), \quad \forall k \in K_N \end{aligned}. \tag{19.32}$$

Jasno je da za bilo koje $\mathbf{x}_0$, sledi $\delta < \left\|\mathbf{x}_0\right\|^2 < \alpha$ i za neko $k^* \in K_N$, uzimajući u obzir osnovni uslov *Teoreme* 19.5, dat nejed. (19.28), može se zaključiti da je:

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{x}^T\left(k_0+k^*\right)\mathbf{x}\left(k_0+k^*\right) &> \ln \lambda_{\min}^{k^*}\left(A_0, A_1, \wp\right) + \ln \mathbf{x}^T\left(k_0\right)\mathbf{x}\left(k_0\right) \\ &> \ln \delta \cdot \lambda_{\min}^{k^*}(\ ) > \ln \delta \cdot \beta/\delta > \ln \beta, \quad \text{za neko } k^* \in K_N \end{aligned}. \tag{19.33}$$

Literatura

Debeljković, D. Lj., (Editor), *Time Delay Systems*, I–Tech, ISBN 978–953–307–559–4, Vienna (Austria), 2011.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems", *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium), July, (1997.a) 307–311.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. IEEE CDC* 97, San Diego, California (USA), December, (1997.e) 2771–2772.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman–Gronwall Approach", *Proc. 1st IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France), July, (1998.c) 171–175.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, "Finite Time Stability of Time Delay Systems", *IMA J. Math. Control and Info*., Vol. 16 (3), (1999.b) 101–109.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non–Lyapunov stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Proc. American Control Conference*, Denver, Colorado (USA), June, (2003) 4450–4451.

Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, I. M. Buzurović, N. J. Dimitrijević, "A New Approach to the Stability of Time–delay Systems in the Sense of non–Lyapunov Delay–Independent and Delay–Dependent Criteria", *Proc. of 8th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics*, Subotica (Serbia), September, (2010.a) 213–218.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, "Further Results on the Stability of Linear Discrete Time Delay Systems over the Finite Time Interval: A Quite New Approach", *Scientific Science Review*, Serbia, Vol. LX, No. 2, (2010.b) 49–60.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, D. Popov, "The Stability of Linear Discrete Time Delay Systems Over a Finite Time Interval: New Results", *The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation* (*WCICA* 2012), Beijing (Chine), July 6–8, (2012.a), accepted.

Dennis, J., J. Traub, R. Weber, “The Algebraic Theory of Matrix Polynomials”, *SIAM J. Numer. Anal*., 13 (6), (1976) 831–845.

Dennis, J., J. Traub, R. Weber, “Algorithms for Solvents of Matrix Polynomials”, *SIAM J. Numer. Anal*., 15 (3), (1978) 523–533.

Fang, H., H. Hunsarg, “Stabilization of Nonlinear Singularly Perturbed Multiple Time Delay Systems by Dither”, *Journal of Dynamic Systems*, *Measurements and Control*, Vol. 118, March, (1996) 177–181.

Hmamed, A., “On the Stability of Time delay Systems: New Result”, *Int. J. Control*, 43 (1), (1986.a) 321–324.

Hmammed, A., “A Matrix Inequality”, *Int. J. Control*, 49, (1989) 363–365.

Kim, H., *Numerical Methods for Solving a Quadratic Matrix Equation*, Ph. D. dissertation, University of Manchester, UK, Faculty of Science and Engineering, 2000.

La Salle, S. Lefschet, *Stability by Lyapunov’s Direct Method,* Academic Press, New York, 1961.

Lee, T., S. Diant, “Stability of Time Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–26 (4), (1981) 951–953.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, “Delay Independent Stability Criteria for Discrete–Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr*., AC–27 (4), (1982.b) 964–966.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, “On Practical Stability of Time Delay Systems”, *Proc. IEEE American Control Conference*, Albuquerque (USA), June, (1997) 3235–3235.

Pereira, E., “On Solvents of Matrix Polynomials”, *Applied numerical mathematics*, 47, (2003) 197–208.

Weiss, L., E. Infante, “On the Stability of Systems Defined over a Finite Time Interval”, *Proc. National Acad. Sci*., Vol. 54, (1965) 44–48.

Weiss, L., E. Infante, “Finite Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces”, *IEEE Trans. Automat. Cont*., Vol. 12, (1967) 54–59.

20. NELJAPUNOVSKA STABILNOST LINEARNIH VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM: LMI PRILAZ

20.1 Uvodna razmatranja

U poslednjih dvadesetak godina, linearne matrične nejednakosti (LMI) pokazale su se korisnim alatom za analizu i projektovanje upravljačkih sistema. Zahvaljujući veoma brzom razvoju kompjuterske tehnike kao i pronalasku vrlo efikasnih algoritama za konveksnu optimizaciju, veliki broj kako postojećih tako i novih problema u teoriji upravljanja preveden je u obliku LMI, *Boyd et al.* (1994).

S obzirom da LMI pripada klasi konveksnih optimizacionih problema, oni uvek poseduju globalno rešenje. U poslednje vreme, za potrebe rešavanja LMI problema, razvijeni su mnogobrojni efikasni algoritmi, poput „*interior point*“ metode, *Boyd et al.* (1994). Kao rezultat toga, brojni problemi, koji nisu imali analitičko ili rešenje u zatvorenom obliku, sada se veoma efikasno numerički rešavaju pomoću LMI.

Drugim rečima, ukoliko smo u stanju da redukujemo upravljački problem na konveksni problem koji uključuje LMI, tada se dati problem može smatrati rešenim.

Druga prednost LMI prilaza ogleda se u tome što on obezbeđuje jedinstveni okvir za analizu i sintezu upravljačkih sistema. Na primer, kada se jednom dođe do LMI uslova stabilnosti sistema, onda se oni mogu iskoristiti i za rešavanja problema sinteze sistema sa različitim upravljačkim ciljevima, ograničenjima i strukturama regulatora.

Rezultati koji razmatraju i ispituju problem analize neljapunovske stabilnosti linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem dati su u radu *Debeljković*, *Aleksendrić* (2003), gde je problem razmatran prvi put.

Ispitivanje stabilnosti sistema pomoću diskretne fundamentalne matrice je veoma teško, tako da postoji potreba da se pronađu efikasnije metode koje trebaju da se zasnivaju na jednostavnom izračunavanju sopstvenih vrednosti ili norme odgovarajućih matrica sistema, kao što je urađeno za vremenski kontinualne sisteme, ili da se primeni LMI prilaz.

Razmatra se linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju opisan sa:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + \sum_{j=1}^{M} A_j\,\mathbf{x}(k-h_j), \tag{20.1.a}$$

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-N, (-N+1), \ldots, 0\}, \tag{20.1.b}$$

gde je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j = 1, \ldots, M$, h_j, $j = 1, \ldots, M$, su celi brojevi koji predstavljaju čista vremenska kašnjenja sistema, $N = \max\{h_1, h_2, \ldots, h_M\}$ i $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ je poznata vektorska funkcija početnih uslova.

Jednačina sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju može se prikazati na sledeći način:

$$\mathbf{x}(k+1) = A_0\,\mathbf{x}(k) + A_1\,\mathbf{x}(k-h), \tag{20.2.a}$$

sa poznatom vektorskom funkcijom početnih uslova:

$$\mathbf{x}(\vartheta) = \boldsymbol{\psi}(\vartheta), \quad \vartheta \in \{-h, -h+1, \ldots, 0\}, \tag{20.2.b}$$

gde je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, A_0 i A_1 su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija, h je ceo broj koji predstavlja čisto vremensko kašnjenje sistema, a $\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ je poznata vektorska funkcija početnih uslova.

Definicija 20.1 Linearni, vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (20.1.a), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, N, \|(\cdot)\|^2\right\}$, $\alpha \le \beta$, ako i samo ako za svaku trajektoriju $\mathbf{x}(k)$ koja zadovoljava početnu funkciju, datu jed. (20.1.b), tako da:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2 < \alpha, \quad k = 0, -1, -2, \ldots, -N, \tag{20.3}$$

sledi:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2 < \beta, \quad k \in K_N, \tag{20.4}$$

Debeljković, *Aleksendrić* (2003).

20.2 Glavni rezultati

Definicija 20.2 Sistem, dat jed. (20.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\{\alpha, \beta, N\}$ ako i samo ako:

$$\left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2 < \alpha, \quad k = -1, 0, \tag{20.5}$$

povlači:

$$\left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2 < \beta, \quad \forall k \in K_N. \tag{20.6}$$

Definicija 20.3 Sistem, dat jed. (20.2), je *atraktivno praktično stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, N\}$, ako i samo ako:

$$\left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2_{A_0^T P A_0} < \alpha, \quad k = -1, 0, \tag{20.7}$$

povlači:

$$\left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2_{A_0^T P A_0} < \beta, \quad \forall k \in K_N, \tag{20.8}$$

sa osobinom da:

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2_{A_0^T P A_0} \to 0. \tag{20.9}$$

Definicija 20.4 Sistem, dat jed. (20.2), je *praktično nestabilan* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, N, \left\| (\cdot) \right\|^2 \right\}$, $\alpha < \beta$, ako za:

$$\left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2 < \alpha, \quad k = -1, 0, \tag{20.10}$$

postoji trenutak: $k = k^* \in K_N$, tako da je ispunjen sledeći uslov:

$$\left\| \mathbf{x}(k^*) \right\|^2 \geq \beta, \tag{20.11}$$

za neko $k = k^* \in K_N$.

Definicija 20.5 Sistem, dat jed. (20.2), je *atraktivno praktično nestabilan* u odnosu na $\left\{\alpha, \beta, N, \left\| (\cdot) \right\|^2 \right\}$, $\alpha < \beta$, ako za:

$$\left\| \mathbf{x}(k) \right\|^2_{A_0^T P A_0} < \alpha, \quad k = -1, 0, \tag{20.12}$$

postoji trenutak: $k = k^* \in K_N$, tako da je ispunjen sledeći uslov:

$$\left\| \mathbf{x}\left(k^*\right) \right\|_{A_0^T P A_0}^2 \geq \beta\,, \tag{20.13}$$

sa osobinom da:

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \mathbf{x}\left(k\right) \right\|_{A_0^T P A_0}^2 \to 0\,. \tag{20.14}$$

Teorema 20.1 Sistem:

$$\mathbf{x}\left(k+1\right) = A_0\,\mathbf{x}\left(k\right) + A_1\,\mathbf{x}\left(k-h\right), \tag{20.15}$$

je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na $\left\{ \alpha, \beta, K_N, \left\| \left(\cdot\right) \right\|^2 \right\}$, $\alpha < \beta$,

ako postoji pozitivan skalar $\wp > 0$ i pozitivno određene matrice P i Q tako da važe sledeći uslovi:

$$\Xi = \begin{pmatrix} A_0^T P A_0 + Q + P - \wp P & A_0^T P A_1 \\ A_1^T P A_0 & Q - A_1^T P A_1 \end{pmatrix} < 0\,, \tag{20.16}$$

i:

$$\left(\wp + 1\right)^k \left(\frac{\lambda_{\max}\left(P\right)}{\lambda_{\min}\left(P\right)} + h\frac{\lambda_{\max}\left(Q\right)}{\lambda_{\min}\left(P\right)} \right) < \frac{\beta}{\alpha}, \quad \forall k \in K_N\,, \tag{20.17}$$

Debeljković, *Stojanović*, *Dimitrijević*, *Popov* (2012.b).

Dokaz. Razmatra se sledeća Ljapunovljeva agregaciona funkcija:

$$V\left(\mathbf{x}\left(k\right)\right) = \mathbf{x}^T\left(k\right) P\,\mathbf{x}\left(k\right) + \sum_{j=k-h}^{k-1} \mathbf{x}^T\left(j\right) Q\,\mathbf{x}\left(j\right). \tag{20.18}$$

Tada, potonja razlika $\Delta V\left(\mathbf{x}\left(k\right)\right)$ duž trajektorija sistema, se dobija kao:

$$\begin{aligned} \Delta V\left(\mathbf{x}\left(k\right)\right) &= \mathbf{x}^T\left(k\right)\left(A_0^T P A_0 + Q - P\right)\mathbf{x}\left(k\right) \\ &\quad +2\,\mathbf{x}^T\left(k\right) A_0^T P A_1\,\mathbf{x}\left(k-h\right) \\ &\quad -\mathbf{x}^T\left(k-h\right)\left(Q - A_1^T P A_1\right)\mathbf{x}\left(k-h\right), \\ &= \zeta^T\left(k\right)\Gamma\zeta\left(k\right) \end{aligned} \tag{20.19}$$

gde je:

$$\begin{aligned} \zeta^T\left(k\right) &= \left[\mathbf{x}^T\left(k\right) \quad \mathbf{x}^T\left(k-h\right) \right] \\ \Gamma &= \begin{pmatrix} A_0^T P A_0 + Q + P & A_0^T P A_1 \\ A_1^T P A_0 & Q - A_1^T P A_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20.20}$$

Iz nejed. (20.16) i jed. (20.19), dobija se:

$$\begin{aligned}
\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= \zeta^T(k)\Gamma\zeta(k) \\
&= \zeta^T(k)\left(\Xi - \begin{pmatrix} -\wp P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\zeta(k) \\
&= \zeta^T(k)\Xi\zeta(k) - \zeta^T(k)\begin{pmatrix} -\wp P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\zeta(k) \\
&= \zeta^T(k)\Xi\zeta(k) + \wp\mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k) \qquad , \\
&< \wp\mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k) \\
&< \wp\mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k) + \wp\sum_{j=k-h}^{k-1}\mathbf{x}^T(j)Q\mathbf{x}(j) \\
&= \wp V\left(\mathbf{x}(k)\right)
\end{aligned} \tag{20.21}$$

s obzirom da je $\zeta^T(k)\Xi\zeta(k) < 0$.

Osim toga, očigledno je da je:

$$\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) = V\left(\mathbf{x}(k+1)\right) - V\left(\mathbf{x}(k)\right) < \wp V\left(\mathbf{x}(k)\right), \tag{20.22}$$

tako da:

$$V\left(\mathbf{x}(k+1)\right) < (\wp+1)V\left(\mathbf{x}(k)\right). \tag{20.23}$$

Primenjujući iterativno nejed. (20.23), dobija se:

$$\begin{aligned}
V\left(\mathbf{x}(k)\right) &< (\wp+1)V\left(\mathbf{x}(k-1)\right) \\
&< (\wp+1)^2 V\left(\mathbf{x}(k-2)\right) \\
&< (\wp+1)^3 V\left(\mathbf{x}(k-3)\right)\ldots \\
&< (\wp+1)^k V\left(\mathbf{x}(0)\right)
\end{aligned} . \tag{20.24}$$

Sa druge strane, dobija se:

$$\begin{aligned}
V\left(\mathbf{x}(0)\right) &= \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0) + \sum_{j=-h}^{-1}\mathbf{x}^T(j)Q\mathbf{x}(j) \\
&\le \lambda_{\max}(P)\mathbf{x}^T(0)\mathbf{x}(0) + \lambda_{\max}(Q)\sum_{j=-h}^{-1}\mathbf{x}^T(j)\mathbf{x}(j)
\end{aligned} , \tag{20.25}$$

i sa pretpostavkom datom nejed. (20.3) dovodi do:

$$V\left(\mathbf{x}(0)\right) < \alpha\left(\lambda_{\max}(P) + h\cdot\lambda_{\max}(Q)\right). \tag{20.26}$$

Očigledno je da je:

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right) > \mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k) \ge \lambda_{\min}(P)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k). \tag{20.27}$$

Kombinovanjem nejed. (20.23), nejed. (20.26) i nejed. (20.27), lako se uočava da je:

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(P)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) < V(\mathbf{x}(k)) < (\wp+1)^k V(\mathbf{x}(0)) \\ < (\wp+1)^k \alpha\left(\lambda_{\max}(P) + h\cdot\lambda_{\max}(Q)\right)\end{aligned}, \tag{20.28}$$

ili:

$$\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) < (\wp+1)^k \alpha\left(\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} + h\frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(P)}\right). \tag{20.29}$$

Primenom uslova, datog nejed. (20.17), i prethodne nejednakosti dobija se:

$$\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) < \beta, \quad \forall k \in K_N. \tag{20.30}$$

Napomena 20.1 Potrebno je napomenuti da uslov u *Teoremi* 20.1 nije klasičan LMI uslov u odnosu na $\wp$, P i Q. Međutim, lako se proverava da je uslov, dat nejed. (20.17), garantovan impozantnim uslovima:

$$\begin{gathered}\gamma_1 I < P < \gamma_2 I \\ 0 < Q < \gamma_3 I \\ \begin{pmatrix} -\gamma_1\beta(\wp+1)^{-k_N} & \gamma_2\sqrt{\alpha} & \gamma_3\sqrt{\alpha h} \\ \gamma_2\sqrt{\alpha} & -\gamma_2 & 0 \\ \gamma_3\sqrt{\alpha h} & 0 & -\gamma_3 \end{pmatrix} < 0\end{gathered}, \tag{20.31}$$

za pozitivne skalare γ_1, γ_2 i γ_3.

Kada se jednom fiksira $\wp$, uslovi dati nejed. (20.16) i nejed. (20.17) se mogu preobratiti u LMI izvodljiv problem.

U nastavku se prezentuje primer kako bi se pokazalo da je izvedena metoda efikasna u primeni.

Primer 20.1 Razmatra se sledeći vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}25 \end{pmatrix}\mathbf{x}(k-2). \tag{20.32}$$

Potrebno je ispitati stabilnost na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\left\{K_N, \alpha, \beta, \|(\cdot)\|^2\right\}$, sa partikularnim izborom:

$$\alpha = 40, \quad \beta = 290, \quad \boldsymbol{\psi}(\vartheta) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}^T, \quad \vartheta \in \{-2, -1, 0\}. \tag{20.33}$$

Rešavanjem LMI, datog nejed. (20.16) i nejed. (20.31) za fiksirane vrednosti $\wp = 0{,}065$ i $h = 2$, dobijaju se sledeća izvodljiva rešenja:

$$P = \begin{pmatrix} 1{,}2862 & -0{,}0132 \\ -0{,}0132 & 0{,}5383 \end{pmatrix} \times 10^4, \tag{20.34}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 3{,}6258 & 1{,}8416 \\ 1{,}8416 & 1{,}0343 \end{pmatrix} \times 10^3, \tag{20.35}$$

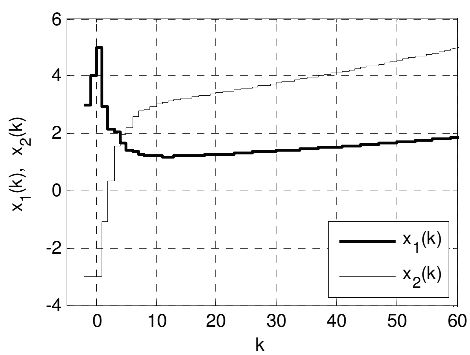
$$\gamma_1 = 5{,}3744 \times 10^3, \quad \gamma_2 = 1{,}2891 \times 10^4, \quad \gamma_3 = 4{,}5949 \times 10^3, \tag{20.36}$$

za $k_{N\max} = k_N^{est} = 9$. Prema tome, sistem u slobodnom radnom režimu, dat jed. (20.32), je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\left\{9, 40, 290, \left\|(\cdot)\right\|^2\right\}$.

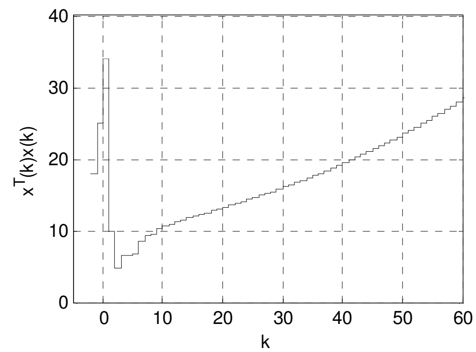
Slika 20.1 prikazuje promenu sa vremenom trajektorije stanja sistema, datog jed. (20.32), sa početnim uslovom $\boldsymbol{\psi}(\vartheta)$, $\vartheta \in \{-2, -1, 0\}$.

Može se primetiti da vrednosti varijabli stanja $\left|x_i(k)\right| \to \infty$, $i = 1, 2$ kada $k \to \infty$, čime je dokazano da sistem nije asimptotski stabilan.

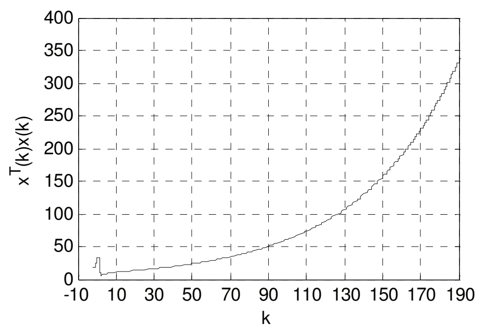
Promena sa vremenom norme trajektorije stanja je prikazana na *slici* 20.2 i *slici* 20.3. Može se videti da trenutak kada trajektorija napusta granicu $\beta = 290$ je $k_{actual} = 182$. Prema tome, pokazano je da su asimptotska stabilnost u smislu Ljapunova i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu nezavisni koncepti: sistem koji je stabilan na konačnom vremenskom intervalu ne mora biti asimptotski stabilan.



Slika 20.1 Trajektorija stanja sistema, datog jed. (20.32) sa početnim uslovom $\boldsymbol{\psi}(\vartheta)$, $\vartheta \in \{-2, -1, 0\}$



Slika 20.2 Detaljan prikaz norme trajektorije stanja sistema, datog jed. (20.32), sa početnim uslovom $\psi(\vartheta)$, $\vartheta \in \{-2, -1, 0\}$



Slika 20.3 Opšti prikaz norme trajektorije stanja sistema, datog jed. (20.32), sa početnim uslovom $\psi(\vartheta)$, $\vartheta \in \{-2, -1, 0\}$

Literatura

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. Abdallah, P. Dorato, "Necessary and Sufficient Conditions for Finite–Time Stability of Linear System", *Proc. of the 2003 American Control Conference,* Denver, Colorado, (2003) 4452–4456.

Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

Debeljković, D. Lj., "On Practical Stability of Discrete Time Control Systems", *Proc. 3rd International Conference on Control and Applications*, Pretoria, South Africa, December, (2001) 197–201.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems," *Proc. ECC* 97, Brussels (Belgium), July, (1997.a) 307–311.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. CDC* 97, San Diego, California (USA), December, (1997.e) 2771–2772.

Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Lyapunov and Non–Lyapunov stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Proc. ACC* 2003, Denver, Colorado (USA), June, (2003) 4450–4451.

Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, D. Popov, "On Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems: LMIs Approach", *The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation* (*WCICA* 2012), Beijing (Chine), July 6–8, (2012.b), accepted.

Hmamed, A., "On the Stability of Time Delay Systems: New Results", *Int. J. Control*, 43 (1), (1986.a) 321–324.

Hmamed, A., "Stability Conditions of Delay–Differential Systems", *Int. J. Control*, 43 (2), (1986.b) 455–463.

Hmamed, A., "Further Results on the Delay–Independent Asymptotic Stability of Linear Systems", *Int. J. Systems Sci.*, 22 (6), (1991) 1127–1132.

Lee, E., W. Lu, N. Wu, "A Lyapunov Theory for Linear Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–31 (3), (1986) 259–262.

Lee, T., S. Diant, "Stability of Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–26, (4), (1981) 951–953.

Mori, T., "Criteria for Asymptotic Stability of Linear Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–30, (1985) 158–161.

Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Simple Stability Criteria for Single and Composite Linear Systems with Time Delays", *Int. J. Control*, 34, (6), (1981) 1175–1184.

Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, "On Practical Stability of Time Delay Systems", *Proc. AACC* (*Annual American Control Conference*), Alberquerque, New Mexico (USA), June, (1997) 3235–3236.

21. STABILNOST ZAVISNA OD ČISTO VREMENSKOG KAŠNJENJA VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA VREMENSKI PROMENLJIVIM KAŠNJENJEM: PRILAZ DEKOMPOZICIJE KAŠNJENJA

21.1 Uvod

Čisto vremensko kašnjenje je često prisutno u mnogim praktičnim sistemima, kao što su industrijski, telekomunikacioni, privredni sistemi i tako dalje. S obzirom da je čisto vremensko kašnjenje glavni izvor nestabilnosti i slabih performansi sistema, značajna pažnja se poklanja problemu analize stabilnosti i sinteze regulatora vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u lit. *Fridman* (2001), *Moon et al.* (2001), *Fridman, Shaked* (2002.a, 2002.b), *He et al.* (2004), *Yue, Han* (2004), *Wu et al.* (2004), *Xu, Lam* (2005), *Han, Yue* (2007), *Park, Ko* (2007), *Shustin, Fridman* (2007), *Yue et al.* (2009), *Zhang, Han* (2009) i *Zhu, Yang* (2010). Nasuprot tome, manju pažnju privlače odgovarajući rezultati za vremenski diskretne sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, lit. *Lee, Kwon* (2002), *Gao et al.* (2004), *Fridman, Shaked* (2005.a, 2005.b), *Jiang et al.* (2005), *Xu et al.* (2005), *Boukas* (2006), *Liu et al.* (2006), *Gao, Chen* (2007), *Chen, Fong* (2008), *Leite, Miranda* (2008) i *Yue et al.* (2009). Glavni razlog je činjenica da se takvi sistemi mogu transformisati u proširene sisteme bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja. Ovo proširenje sistema, međutim, nije odgovarajuće za sisteme sa nepoznatim kašnjenjem i za sisteme sa vremenski promenljivim kašnjenjem koji su predmet analize u ovoj glavi.

U poslednje vreme, veća pažnja je posvećena problemu stabilnosti, zavisne od čisto vremenskog kašnjenja, linearnih sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem, za slučaj vremenski kontinualnih sistema u lit. *Fridman* (2001), *He et al.* (2004), *Yue, Han* (2004), *Wu et al.* (2004), *Xu, Lam* (2005), *Han, Yue* (2007), *Park, Ko* (2007), *Shustin, Fridman* (2007), *Zhang, Han* (2009) i *Zhu, Yang* (2010), a za slučaj vremenski diskretnih sistema u lit. *Gao et al.* (2004), *Fridman, Shaked* (2005.b), *Jiang et al.* (2005), *Boukas* (2006), *Liu et al.* (2006), *Gao, Chen* (2007), *Chen, Fong* (2008), *Leite, Miranda* (2008) i *Yue et al.* (2009), i izvedeno je veliki broj kriterijuma stabilnosti, zavisnih od čisto vremenskog kašnjenja. Ključna tačka za izvođenje kriterijuma stabilnosti, zavisnog od čisto vremenskog kašnjenja, je izbor odgovarajućeg *Ljapunov–Krasovski* funkcionala. Poznato je da je postojanje kompletnog kvadratnog *Ljapunov–Krasovski* funkcionala dovoljan i potreban uslov asimptotske stabilnosti sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Korišćenjem kompletnog kvadratnog *Ljapunov–Krasovski* funkcionala, dobija se maksimalna dozvoljena gornja granica čisto vremenskog kašnjenja koja je veoma blizu analitičkoj granici čisto vremenskog kašnjenja za stabilnost. Međutim, kompletni kvadratni *Ljapunov–Krasovski* funkcional vodi ka komplikovanom sistemu parcijalnih diferencijalnih jednačina, čime se dobijaju beskonačno dimenzionalne linearne matrične nejednakosti (Linear Matrix Inequalities – LMI). Osim toga, da bi razvili jednostavniji kriterijum stabilnosti, mnogi autori su koristili specijalne forme *Ljapunov–Krasovski* funkcionala pre nego kompletnog kvadratnog *Ljapunov–Krasovski* funkcionala, što daje LMI konačnog reda i smanjenu vrednost maksimalne dozvoljene gornje granice.

U cilju smanjenja konzervatizma postojećih rezultata, prezentovane su nove metode analize, kao što su metoda transformacije deskriptivnog sistema, lit. *Fridman* (2001) i *Fridman, Shaked* (2002.a, 2002.b), metoda slobodno težinske matrice, lit. *He et al.* (2004), *Yue, Han* (2004) i *Gao, Chen* (2007), metoda matrične nejednakosti, lit. *Moon et al.* (2001), *Han, Yue* (2007) i *Park, Ko* (2007), i prilaz sa pozicija ulazno–izlaznih relacija, rad *Shustin, Fridman* (2007). Korišćenjem ovih metoda, izvedeni su mnogi kriterijumi stabilnosti ispitivanjem promene *Ljapunov–Krasovski* funkcionala na celom intervalu čisto vremenskog kašnjenja. Suprotno ovom prilazu, u lit. *Yue et al.* (2009) i *Zhang, Han* (2009), da bi se dobili manje konzervativni uslovi stabilnosti, interval promene čisto vremenskog kašnjenja je podeljen na *više jednakih podintervala* i definisan je *Ljapunov–Krasovski* funkcional, zavisan od intervala čisto vremenskog kašnjenja. Ispitivanjem *Ljapunov–Krasovski* funkcionala, zavisnog od promene intervala čisto vremenskog kašnjenja, definisanog na podintervalima, izvedeni su novi kriterijumi stabilnosti, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja. Korisno je napomenuti da glavna razlika između *Ljapunov–Krasovski* funkcionala i *Ljapunov–Krasovski* funkcionala zavisnog od intervala čisto vremenskog kašnjenja leži u činjenici da se u drugom slučaju uzimaju različite težinske matrice na različitim podintervalima.

Prema tome, *Ljapunov–Krasovski* funkcional, zavisan od intervala čisto vremenskog kašnjenja, kao što se očekuje, daje manje konzervativan kriterijum stabilnosti, zavisan od čisto vremenskog kašnjenja.

Na osnovu ideje iz rada *Zhu*, *Yang* (2010) u kome je interval promene čisto vremenskog kašnjenja vremenski kontinualnih sistema podeljen na dva nejednaka podintervala, u ovoj glavi je razvijena nova metoda za analizu stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem.

Interval promene čisto vremenskog kašnjenja $\left[k-h_M, k-1\right]$ *Ljapunov–Krasovski* funkcionala, zavisnog od intervala čisto vremenskog kašnjenja, je podeljen na dva nejednaka podintervala: $\left[k-h_M, k-\alpha-1\right]$ i $\left[k-\alpha, k-1\right]$, gde je $0<\alpha<h_M$ podesivi parametar.

Novi *Ljapunov–Krasovski* funkcional, zavisan od intervala čisto vremenskog kašnjenja, je definisan sa različitim težinskim matricama na različitim podintervalima. Metoda slobodno težinska matrice i metoda transformacije sistema se ne koriste da bi se izveo kriterijum zavisan od čisto vremenskog kašnjenja. Pokazaće se da je prezentovani uslov stabilnosti manje konzervativan u odnosu na postojeće uslove iz lit. *Lee, Kwon* (2002), *Gao et al.* (2004), *Fridman, Shaked* (2005.a, 2005.b), *Xu et al.* (2005), *Boukas* (2006), *Liu et al.* (2006), *Gao, Chen* (2007), *Chen, Fong* (2008), *Leite, Miranda* (2008) i *Yue et al.* (2009), zbog činjenice da ima manju vrednost maksimalne dozvoljene gornje granice. Izvedeni uslovi se mogu posmatrati kao proširenje metoda iz lit. *Yue et al.* (2009) i *Zhang, Han* (2009), u kojima je ceo opseg čisto vremenskog kašnjenja podeljen na $n \geq 2$ jednaka podintervala. S obzirom da je broj podintervala u lit. *Yue et al.* (2009) i *Zhang, Han* (2009) veći od dva, prilaz dekompozicije je komplikovan i rezultujući uslovi stabilnosti su više konzervativni i teško ih je proveriti.

Označavanje. $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{Z}^+$ označavaju n–dimenzionalan Euklidski prostor i skup pozitivnih celih brojeva. Oznaka $P>0$ $\left(P \geq 0\right)$ znači da je matrica P realna, simetrična i pozitivno određena (poluodređena). Za realne, simetrične matrice P i Q, oznaka $P>Q$ $\left(P \geq Q\right)$ znači da je matrica $P-Q$ pozitivno određena (pozitivno poluodređena). I je jedinična matrica odgovarajuće dimenzije. Gornji indeks "$^{\mathrm{T}}$" označava transpoziciju. U simetričnim blok matricama ili kompleksnim matričnim izrazima, koristi se zvezdica $(*)$ da bi predstavio član proistekao iz simetrije. Ako dimenzije matrica nisu eksplicitno iskazane, pretpostavlja se da su kompatibilne za algebarske operacije.

21.2 Glavni rezultati

Razmatra se sledeći sistem sa vremenski promenljivim kašnjenjem:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{x}(k-h(k)), \tag{21.1}$$

gde je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ stanje u trenutku k, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ su konstantne matrice, a $h(k)$ je pozitivan ceo broj koji predstavlja čisto vremensko kašnjenje sistema za koje se pretpostavlja da je vremenski promenljivo i koji zadovoljava sledeći uslov:

$$0 \le h(k) \le h_M, \tag{21.2}$$

gde je h_M poznat, pozitivan i konačan ceo broj.

U ovoj glavi će se izvesti dovoljan uslov, zavisan od čisto vremenskog kašnjenja, koji garantuje stabilnost sistema, datog jed. (21.1), koji je manje konzervativan u odnosu na rezultate u postojećoj literaturi.

Prvo će se prezentovati sledeći rezultati, koji će se koristiti u dokazu glavnih rezultata.

Lema 21.1 Neka je $\mathbf{y}(k) = \mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)$. Za bilo koju matricu $R > 0$ važi:

$$\begin{aligned} -(h_M - h_m) \sum_{m=k-h_M}^{k-1-h_m} \mathbf{y}^T(m) R \mathbf{y}(m) &\le \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k-h_m) \\ \mathbf{x}(k-h_M) \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} -R & R \\ R & -R \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k-h_m) \\ \mathbf{x}(k-h_M) \end{bmatrix}, \\ &= -\left(\mathbf{x}(k-h_m) - \mathbf{x}(k-h_M)\right)^T R \left(\mathbf{x}(k-h_m) - \mathbf{x}(k-h_M)\right) \end{aligned} \tag{21.3}$$

Yue et al. (2009).

Teorema 21.1 Za date skalare $h_M\,(h_M > 0)$ i $\alpha(0 < \alpha < h_M)$, sistem, dat jed. (21.1–21.2), je *asimptotski stabilan* ako postoje matrice $P = P^T > 0$, $Q_i = Q_i^T \ge 0$ i $Z_i = Z_i^T \ge 0$, $(i = 1,2,3)$, tako da važi sledeći LMI:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & 0 & 0 & \Phi_{15} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & 0 & \Phi_{25} \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_{55} \end{pmatrix} < 0, \tag{21.4}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & 0 & \Psi_{15} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} & \Psi_{25} \\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \Psi_{55} \end{pmatrix} < 0, \tag{21.5}$$

gde je:

$$\Phi_{11} = A^T P A - P + Q_1 + Q_3 - \frac{1}{\alpha}(Z_1 + Z_3)$$

$$\Phi_{12} = A^T P B + \frac{1}{\alpha}(Z_1 + Z_3), \quad \Phi_{15} = (A - I)^T U_1$$

$$\Phi_{22} = B^T P B - Q_3 - \frac{1}{\alpha}(2Z_1 + Z_3), \quad \Phi_{23} = \frac{1}{\alpha} Z_1, \quad \Phi_{25} = B^T U_1$$

$$\Phi_{33} = -Q_1 + Q_2 - \frac{1}{\alpha} Z_1 - \frac{1}{h_M - \alpha} Z_2, \quad \Phi_{34} = \frac{1}{h_M - \alpha} Z_2$$

$$\Phi_{44} = -Q_2 - \frac{1}{h_M - \alpha} Z_2, \quad \Phi_{55} = -U_1$$

$$\Psi_{11} = \Phi_{11}, \quad \Psi_{12} = A^T P B, \quad \Psi_{13} = \frac{1}{\alpha}(Z_1 + Z_3), \quad \Psi_{15} = (A - I)^T U_2$$

$$\Psi_{22} = B^T P B - Q_3 - \frac{1}{h_M - \alpha}(2Z_2 + Z_3), \quad \Psi_{23} = \frac{1}{h_M - \alpha}(Z_2 + Z_3)$$

$$\Psi_{24} = \frac{1}{h_M - \alpha} Z_2, \quad \Psi_{25} = B^T U_2$$

$$\Psi_{33} = -Q_1 + Q_2 - \frac{1}{\alpha}(Z_1 + Z_3) - \frac{1}{h_M - \alpha}(Z_2 + Z_3)$$

$$\Psi_{44} = -Q_2 - \frac{1}{h_M - \alpha} Z_2, \quad \Psi_{55} = -U_2$$

$$U_1 = \alpha Z_1 + (h_M - \alpha) Z_2 + \alpha Z_3, \quad U_2 = \alpha Z_1 + (h_M - \alpha) Z_2 + h_M Z_3$$

Stojanović, *Debeljković*, *Dimitrijević* (2012.b).

Dokaz. Definiše se *Ljapunov–Krasovski* funkcional, zavisan od intervala čisto vremenskog kašnjenja, na sledeći način:

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k), \tag{21.6}$$

gde je:

$$V_1(k) = \mathbf{x}^T(k) P \mathbf{x}(k), \tag{21.7}$$

$$V_2(k) = \sum_{i=k-\alpha}^{k-1} \mathbf{x}^T(i) Q_1 \mathbf{x}(i) + \sum_{i=k-h_M}^{k-1-\alpha} \mathbf{x}^T(i) Q_2 \mathbf{x}(i) + \sum_{i=k-h(k)}^{k-1} \mathbf{x}^T(i) Q_3 \mathbf{x}(i), \tag{21.8}$$

$$V_3(k)=\sum_{i=-\alpha}^{-1}\sum_{j=k+i}^{k-1}\mathbf{y}^T(j)Z_1\mathbf{y}(j)+\sum_{i=-h_M}^{-1-\alpha}\sum_{j=k+i}^{k-1}\mathbf{y}^T(j)Z_2\mathbf{y}(j)+\sum_{i=-h(k)}^{-1}\sum_{j=k+i}^{k-1}\mathbf{y}^T(j)Z_3\mathbf{y}(j),\quad(21.9)$$

gde je $P=P^T>0$, $Q_i=Q_i^T\geq 0$ i $Z_i=Z_i^T>0$, $(i=1,2,3)$. Valja uočiti, da je interval čisto vremenskog kašnjenja $[k-h_M,k-1]$ u *Ljapunov–Krasovski* funkcionalu podeljen na dva nejednaka podintervala: $[k-h_M,k-\alpha-1]$ i $[k-\alpha,k-1]$, gde je $0<\alpha<h_M$ podesivi parametar.

Potonja razlika funkcije $\Delta V_i(k)=V_i(k+1)-V_i(k)$, se dobija kao:

$$\begin{aligned}\Delta V_1(k)=&\,\mathbf{x}^T(k)\left(A^TPA-P\right)\mathbf{x}(k)+2\mathbf{x}^T(k)A^TPB\mathbf{x}(k-h(k))\\&+\mathbf{x}^T(k-h(k))B^TPB\mathbf{x}(k-h(k))\end{aligned},\quad(21.10)$$

$$\begin{aligned}\Delta V_2(k)=&\,\mathbf{x}^T(k)Q_1\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}^T(k-\alpha)Q_1\mathbf{x}(k-\alpha)\\&+\mathbf{x}^T(k-\alpha)Q_2\mathbf{x}(k-\alpha)-\mathbf{x}^T(k-h_M)Q_2\mathbf{x}(k-h_M),\\&+\mathbf{x}^T(k)Q_3\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}^T(k-h(k))Q_3\mathbf{x}(k-h(k))\end{aligned}\quad(21.11)$$

$$\begin{aligned}\Delta V_3(k)=&\sum_{i=-\alpha}^{-1}\left(\mathbf{y}^T(k)Z_1\mathbf{y}(k)-\mathbf{y}^T(k+i)Z_1\mathbf{y}(k+i)\right)\\&+\sum_{i=-h_M}^{-1-\alpha}\left(\mathbf{y}^T(k)Z_2\mathbf{y}(k)-\mathbf{y}^T(k+i)Z_2\mathbf{y}(k+i)\right)\\&+\sum_{i=-h(k)}^{-1}\left(\mathbf{y}^T(k)Z_3\mathbf{y}(k)-\mathbf{y}^T(k+i)Z_3\mathbf{y}(k+i)\right)\\=&\,\alpha\mathbf{y}^T(k)Z_1\mathbf{y}(k)-\sum_{i=-\alpha}^{-1}\mathbf{y}^T(k+i)Z_1\mathbf{y}(k+i)\\&+(h_M-\alpha)\mathbf{y}^T(k)Z_2\mathbf{y}(k)-\sum_{i=-h_M}^{-1-\alpha}\mathbf{y}^T(k+i)Z_2\mathbf{y}(k+i)\\&+h(k)\mathbf{y}^T(k)Z_3\mathbf{y}(k)-\sum_{i=-h(k)}^{-1}\mathbf{y}^T(k+i)Z_3\mathbf{y}(k+i)\\=&\,\mathbf{y}^T(k)\left(\alpha Z_1+(h_M-\alpha)Z_2+h(k)Z_3\right)\mathbf{y}(k)\\&-\sum_{m=k-\alpha}^{k-1}\mathbf{y}^T(m)Z_1\mathbf{y}(m)-\sum_{m=k-h_M}^{k-1-\alpha}\mathbf{y}^T(m)Z_2\mathbf{y}(m)-\sum_{m=k-h(k)}^{k-1}\mathbf{y}^T(m)Z_3\mathbf{y}(m)\end{aligned}\quad(21.12)$$

Poznato je iz nejed. (21.2) da je, za bilo koje $k\in\mathbb{Z}^+$, $h(k)\in[0,\alpha-1]$ ili $h(k)\in[\alpha,h_M]$. Definišu se dva skupa:

$$\Omega_1=\left\{k:h(k)\in[0,\alpha],k\in\mathbb{Z}^+\right\},\quad(21.13)$$

$$\Omega_2 = \left\{k : h(k) \in \left[\alpha + 1, h_M\right], k \in \mathbb{Z}^+\right\}. \tag{21.14}$$

U nastavku se razmatra promena funkcije $\Delta V(k)$ za dva slučaja $\left(k \in \Omega_1 \text{ i } k \in \Omega_2\right)$.

Slučaj 1. Za $k \in \Omega_1$, to jest $0 \le h(k) \le \alpha$.

$$\sum_{m=k-\alpha}^{k-1} \mathbf{y}^T(m) Z_1 \mathbf{y}(m) = \sum_{m=k-\alpha}^{k-1-h(k)} \mathbf{y}^T(m) Z_1 \mathbf{y}(m) + \sum_{m=k-h(k)}^{k-1} \mathbf{y}^T(m) Z_1 \mathbf{y}(m), \tag{21.15}$$

$$\begin{aligned} \Delta V_3(k) = {} & \mathbf{y}^T(k)\left(\alpha Z_1 + (h_M - \alpha) Z_2 + h(k) Z_3\right)\mathbf{y}(k) - \sum_{m=k-\alpha}^{k-1-h(k)} \mathbf{y}^T(m) Z_1 \mathbf{y}(m) \\ & - \sum_{m=k-h(k)}^{k-1} \mathbf{y}^T(m)(Z_1 + Z_3)\mathbf{y}(m) - \sum_{m=k-h_M}^{k-1-\alpha} \mathbf{y}^T(m) Z_2 \mathbf{y}(m) \end{aligned}. \tag{21.16}$$

S obzirom da je $Z_1 + Z_3 > 0$, $h(k) \le \alpha$ i $\alpha - h(k) \le \alpha$, korišćenjem *Leme* 21.1, sledi:

$$\begin{aligned} & - \sum_{m=k-h(k)}^{k-1} \mathbf{y}^T(m)(Z_1 + Z_3)\mathbf{y}(m) \\ & \quad \le -\frac{1}{h(k)}\left(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k - h(k))\right)^T (Z_1 + Z_3)\left(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k - h(k))\right) \\ & \quad \le \frac{1}{\alpha}\mathbf{x}^T(k)(-Z_1 - Z_3)\mathbf{x}(k) + \frac{1}{\alpha} 2\mathbf{x}^T(k)(Z_1 + Z_3)\mathbf{x}(k - h(k)) \\ & \qquad + \frac{1}{\alpha}\mathbf{x}^T(k - h(k))(-Z_1 - Z_3)\mathbf{x}(k - h(k)) \end{aligned}, \tag{21.17}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{m=k-\alpha}^{k-1-h(k)} \mathbf{y}^T(m) Z_1 \mathbf{y}(m) \\ & \quad \le -\frac{1}{\alpha - h(k)}\left(\mathbf{x}(k - h(k)) - \mathbf{x}(k - \alpha)\right)^T Z_1 \left(\mathbf{x}(k - h(k)) - \mathbf{x}(k - \alpha)\right) \\ & \quad \le \frac{1}{\alpha}\mathbf{x}^T(k - h(k))(-Z_1)\mathbf{x}(k - h(k)) + \frac{1}{\alpha} 2\mathbf{x}^T(k - h(k)) Z_1 \mathbf{x}(k - \alpha) \\ & \qquad + \frac{1}{\alpha}\mathbf{x}^T(k - \alpha)(-Z_1)\mathbf{x}(k - \alpha) \end{aligned}, \tag{21.18}$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{m=k-h_M}^{k-1-\alpha} \mathbf{y}^T(m) Z_2 \mathbf{y}(m) \\ & \quad \le -\frac{1}{h_M - \alpha}\left(\mathbf{x}(k - \alpha) - \mathbf{x}(k - h_M)\right)^T Z_2 \left(\mathbf{x}(k - \alpha) - \mathbf{x}(k - h_M)\right) \\ & \quad \le \frac{1}{h_M - \alpha}\mathbf{x}^T(k - \alpha)(-Z_2)\mathbf{x}(k - \alpha) + \frac{1}{h_M - \alpha} 2\mathbf{x}^T(k - \alpha) Z_2 \mathbf{x}(k - h_M) \\ & \qquad + \frac{1}{h_M - \alpha}\mathbf{x}^T(k - h_M)(-Z_2)\mathbf{x}(k - h_M) \end{aligned}. \tag{21.19}$$

Kombinovanjem jed. (21.10–21.19), dobija se:

$$\Delta V(k) \leq \xi^T(k)\hat{\Phi}\,\xi(k)$$

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_{11} + (A-I)^T U_1 (A-I) & \Phi_{12} + (A-I)^T U_1 B & 0 & 0 \\ * & \Phi_{22} + B^T U_1 B & \Phi_{23} & 0 \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} \\ * & * & * & \Phi_{44} \end{pmatrix}. \tag{21.20}$$

$$\xi(k) = \left[\mathbf{x}^T(k) \quad \mathbf{x}^T(k-h(k)) \quad \mathbf{x}^T(k-\alpha) \quad \mathbf{x}^T(k-h_M)\right]^T$$

Očigledno, $\Delta V(k) < 0$ za $k \in \Omega_1$ ako je $\hat{\Phi} < 0$. Korišćenjem *Schur*–ovog komplementa, lako se uočava da važi $\Delta V(k) < 0$ ako je $\Phi < 0$ i $h(k) \in [0, \alpha]$.

Slučaj 2. Slično, za $k \in \Omega_2$, to jest $\alpha + 1 \leq h(k) \leq h_M$, korišćenjem *Schur*–ovog komplementa, lako se uočava da važi $\Delta V(k) < 0$ ako je $\Psi < 0$.

Iz prethodnog razmatranja, može se pokazati da je za sva $k \in \mathbb{Z}^+$, ako važe nejed. (21.4–21.5), $\Delta V(k) < 0$, čime je dokaz završen.

Napomena 21.1 *Teorema* 21.1 prezentuje rezultat stabilnosti koji zavisi od maksimalne granice čisto vremenskog kašnjenja h_M. Uslovi u *Teoremi* 21.1 su iskazani u vidu LMI, i prema tome mogu se lako proveriti korišćenjem standardnog numeričkog softvera.

Napomena 21.2 Interval čisto vremenskog kašnjenja $[k-h_M, k-1]$ *Ljapunov–Krasovski* funkcionala, zavisnog od intervala čisto vremenskog kašnjenja, je podeljen na dva nejednaka podintervala: $[k-h_M, k-\alpha-1]$ i $[k-\alpha, k-1]$, gde je $0 < \alpha < h_M$ podesiv parametar. Kao posledica, koriste se različite težinske matrice u Ljapunovljevom funkcionalu na različitim podintervalima a informacija o vremenskom kašnjenju u stanju $\mathbf{x}(k-\alpha)$ se može uzeti u razmatranje. Pored toga, korišćenjem podintervala i *Leme* 21.1, vrednosti gornje granice članova u $\Delta V_3(k)$ su tačnije ocenjeni u odnosu na prethodne metode s obzirom da je gornja granica h_M čisto vremenskog kašnjenja $h(k)$ na intervalu $0 \leq h(k) \leq h_M$ zamenjena sa dve manje konzervativne gornje granice α i h_M na podintervalima $0 \leq h(k) \leq \alpha$ i $\alpha < h(k) \leq h_M$, sledstveno. Prema tome, metoda dekompozicije prezentovana u *Teoremi* 21.1 vodi ka smanjenju vrednosti maksimalne dozvoljene gornje granice.

Algoritam za određivanje parametra α $(0 < \alpha < h_M)$ koji zadovoljava nejed. (21.4–21.5), tako da maksimalna dozvoljena gornja granica h_M ima maksimalnu vrednost, je izložen u nastavku.

Algoritam 21.1

Korak 1. Usvaja se $h = 0$ i $\alpha = 0$.

Korak 2. $h = h + 1$.

Korak 3. $\alpha = \alpha + 1$.

Korak 4. Ako su nejednakosti (21.4–21.5) izvodljive, tada je $\alpha_{\mathrm{m}} = \alpha$, $\alpha = 0$, ide se na *Korak* 2, u suprotnom slučaju, ide se na *Korak* 5.

Korak 5. Ako je $\alpha = h - 1$, ide se na *Korak* 6, u suprotnom slučaju, ide se na *Korak* 3.

Korak 6. Maksimalna vrednost čisto vremenskog kašnjenje je $h_M = h - 1$ a minimalna vrednost podesivog parametra α je α_m.

U nastavku se prezentuju dva primera. Dobijeni rezultati će se uporediti sa više rezultata iz postojećih kriterijuma.

Primer 21.1 Razmatra se sistem, dat jed. (21.1), sa vremenski promenljivim kašnjenjem $h(k)$ koje zadovoljava uslov dat nejed. (21.2) i:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -0{,}1 & 0 \\ -0{,}1 & -0{,}1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \{0{,}91,\ 0{,}97\}.$$

Slučaj 1 $(\lambda = 0{,}91)$. Ovaj sistem je razmatran u lit *Lee. Kwon* (2002) i *Xu et al*. (2005). U *tabeli* 21.1 je prikazana maksimalna dozvoljena gornja granica čisto vremenskog kašnjenja dobijena iz *Teoreme* 21.1. Radi poređenja, rezultati iz lit. *Lee*, *Kwon* (2002) i *Xu et al*. (2005) su takođe prikazani u *tabeli* 21.1. Jasno je da je rezultat dobijen primenom *Teorema* 21.1 bolji u odnosu na rezultate iz lit. *Lee*, *Kwon* (2002) i *Xu et al*. (2005).

Slučaj 2 $(\lambda = 0{,}97)$. Radi poređenja, rezultati iz literature *Gao et al.* (2004), *Fridman, Shaked* (2005.a, 2005.b) i *Chen, Fong* (2008) i rezultat *Teoreme* 21.1 su prikazani u *tabeli* 21.2. Jasno je da *Teorema* 21.1 daje bolje rezultate u odnosu na postojeće kriterijume, zavisne od čisto vremenskog kašnjenja.

Tabela 21.1 Uporedni prikaz vrednosti maksimalnih dozvoljenih gornjih granica čisto vremenskog kašnjenja dobijenih različitim postojećim metodama za $\lambda = 0{,}91$

Metoda	h_M
Lee, *Kwon* (2002)	41
Xu et al. (2005), *Posledica* 1	42
Teorema 21.1	46 za $\alpha = 19,\ldots,30$

Tabela 21.2 Uporedni prikaz vrednosti maksimalnih dozvoljenih gornjih granica čisto vremenskog kašnjenja dobijenih različitim postojećim metodama za $\lambda = 0{,}97$

Metoda	h_M
Gao et al. (2004), *Teorema* 1	4
Fridman, Shaked (2005.b), *Teorema* 3	8
Fridman, Shaked (2005.a), *Lema* 2	8
Chen, Fong (2008), *Teorema* 1	10
Teorema 21.1	17 za $\alpha = 9,10,11$

Primer 21.2 Razmatra se sistem, dat jed (21.1), sa vremenski promenljivim kašnjenjem $h(k)$ koje zadovoljava uslov dat nejed. (21.2) i:

Slučaj 1. *Boukas* (2006), *Liu et al.* (2006), *Leite, Miranda* (2008) :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 \\ 0{,}35 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Slučaj 2. *Gao et al.* (2004), *Liu et al.* (2006), *Gao, Chen* (2007), *Yue et al.* (2009):

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -0{,}1 & 0 \\ -0{,}2 & -0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Za prethodne sisteme, LMI uslovi stabilnosti, nezavisni od čisto vremenskog kašnjenja, *Mahmood* (2000.c):

$$P = P^T > 0, \quad Q = Q^T > 0, \quad \begin{pmatrix} -P+Q & 0 & A^T P \\ * & -Q & B^T P \\ * & * & -P \end{pmatrix} < 0,$$

su izvodljivi, na osnovu čega sledi da su oba sistema stabilna za $0 \le h(k) < \infty$.

Korišćenjem postojećih kriterijumima, zavisnih od čisto vremenskog kašnjenja, dobijaju se samo konačne vrednosti maksimalne dozvoljene gornje granice, koja garantuje stabilnost datog sistema. *Tabela* 21.3 (slučaj 1) i *tabela* 21.4 (slučaj 2) prikazuju intervale čisto vremenskog kašnjenja za različite metode. Na osnovu *Teoreme* 21.1, dobijene su velike numeričke vrednosti maksimalne dozvoljene gornje granice $\left(h_M \rightarrow \infty\right)$. Prema tome, korišćenjem *Teoreme* 21.1 dobijaju se bolji rezultati u odnosu na razultate iz lit. *Gao et al.* (2004), *Boukas* (2006), *Liu et al.* (2006), *Gao, Chen* (2007), *Leite, Miranda* (2008) i *Yue et al.* (2009).

Tabela 21.3 Interval čisto vremenskog kašnjenja za slučaj 1

Metoda	Interval
Boukas (2006), *Teorema* 3.1	$2 \le h(k) \le 10$
Liu et al. (2006), *Teorema* 1 i *Teorema* 2	$2 \le h(k) \le 13$
Leite, Miranda (2008), *Teorema* 3.2	$0 \le h(k) \le 12$
Chen, Fong (2008), *Teorema* 1	$2 \le h(k) \le 15$
Teorema 21.1	$0 \le h(k) \le 10 \cdot 10^{21}$

Tabela 21.4 Interval čisto vremenskog kašnjenja za slučaj 2

Metoda	Interval stabilnosti
Gao et al. (2004), *Teorema* 1	$0 \le h(k) \le 6$
Liu et al. (2006), *Teorema* 2	$0 \le h(k) \le 10$
Gao, Chen (2007), *Teorema* 1	$0 \le h(k) \le 12$
Yue et al. (2009), *Teorema* 5	$2 \le h(k) \le 19$
Yue et al. (2009), *Teorema* 7	$2 \le h(k) \le 20$
Teorema 21.1	$0 \le h(k) \le 9{,}61 \cdot 10^{8}$

Literatura

Boukas, E. K., “Discrete–Time Systems with Time–Varying Time Delay: Stability and Stabilizability”, *Mathematical Problems in Engineering*, (2006).

Chen, K. F., I–K. Fong, “Stability of Discrete–Time Uncertain Systems With a Time–Varying State Delay”, *Proc. IMechE, Part I: J. Systems and Control Engineering*, 222, (2008) 493–500.

Fridman, E., “New Lyapunov–Krasovskii Functionals for Stability of Linear Retarded and Neutral Type Systems”, *Systems and Control Letters*, 43, (2001) 309–319.

Fridman, E., U. Shaked, “A Descriptor System Approach to H_∞ Control of Linear Time–Delay Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 (2), (2002.a) 253–270.

Fridman, E., U. Shaked, “H_∞ Control of Linear State Delay Descriptor Systems: An LMI Approach”, *Linear Algebra and its Applications*, 351–352, (2002.b) 271–302.

Fridman, E., U. Shaked, “Delay–Dependent H_∞ Control of Uncertain Discrete Delay Systems”, *European Journal of Control*, 11, (2005.a) 29–37.

Fridman, E., U. Shaked, “Stability and Guaranteed Cost Control Of Uncertain Discrete Delay Systems”, *International Journal of Control*, 78 (4), (2005.b) 235–246.

Gao, H., T. Chen, “New Results on Stability of Discrete–Time Systems with Time–Varying State Delay”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52, (2007) 328–334.

Gao, H., J. Lam, Y. Wang, “Delay–Dependent Output–Feedback Stabilization of Discrete–Time Systems with Time–Varying State Delay”, *IEE Proc. Control Theory Applications*, 151 (6), (2004) 691–698.

Han, Q. L., D. Yue, “Absolute Stability of Lur’e Systems with Time–Varying Delay”, *IET Control Theory*, 1 (3), (2007) 854–859.

He, Y., M. Wu, J. H. She, G. P. Liu, “Parameter–Dependent Lyapunov Functional for Stability of Time–Delay Systems with Polytopic–Type Uncertainties”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49, (2004) 828–832.

Jiang, X., Q. L. Han, X. H. Yu, “Stability Criteria For Linear Discrete–Time Systems with Interval–Like Time–Varying Delay”, *Proc. American Control Conference*, New Orleans (USA), (2005) 2817–2822.

Lee, Y. S., W. H. Kwon, “Delay–Dependent Robust Stabilization of Uncertain Discrete–Time State–Delayed Systems”, *Proc. 15th IFAC World Congr.*, Barcelona (Spain), 15 (1), (2002).

Leite, V., M. Miranda, “Robust Stabilization of Discrete–Time Systems with Time–Varying Delay: An LMI Approach”, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 876509, (2008).

Liu, X. G., R. R. Martin, M. Wu, M. L. Tang, “Delay–Dependent Robust Stabilization of Discrete–Time Systems with Time–Varying Delay”, *IEE Proc. Control Theory and Applications*, 153 (6), (2006) 689–702.

Mahmood, M. S., *Robust Control and Filtering for Time–Delay Systems*, Marcel–Dekker, New York, 2000.c.

Moon, Y. S., P. Park, W. H. Kwon, “Robust Stabilization of Uncertain Input–Delayed Systems Using Reduction Method”, *Automatica*, 37, (2001) 307–312.

Park, P., J. W. Ko “Stability and Robust Stability for Systems with a Time–Varying Delay”, *Automatica*, 43, (2007) 1855–1858.

Shustin, E., E. Fridman, “On Delay–Derivative–Dependent Stability of Systems with Fast–Varying Delays”, *Automatica*, 43, (2007) 1649–1655.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, N. Dimitrijević, “Delay–Dependent Stability of Discrete–Time Systems with Time–Varying Delay: Delay Decomposition Approach”, *International Journal of Computers, Communications & Control*, Vol. 7, No. 4, (2012.b) 242–250.

Wu, M., Y. He, J. H. She, G. P. Liu, “Delay–Dependent Criteria for Robust Stability of Time–Varying Delay Systems”, *Automatica*, 40, (2004) 1435–1439.

Xu, S., J. Lam, “Improved Delay–dependent Stability Criteria for Time–Delay Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50 (3), (2005) 384–387.

Xu, S., J. Lam, Y. Zou, “Improved Conditions for Delay–Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Discrete Time–Delay Systems”, *Asian Journal of Control*, 7 (3), (2005) 344–348.

Yue, D., Q. L. Han, “A Delay–Dependent Stability Criterion of Neutral Systems and its Application to a Partial Element Equivalent Circuit Model”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems–II*, 51 (12), (2004) 685–689.

Yue, D., E. Tian, Y. Zhang, “A Piecewise Analysis Method to Stability Analysis of Linear Continuous / Discrete Systems with Time–Varying Delay”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19, (2009) 1493–1518.

Zhang, X. M. Q. L. Han, “A Delay Decomposition to Delay–Dependent Stability for Linear Systems with Time–Varying Delays”, *International Journal of robust and nonlinear control*, 19, (2009) 1922–1930.

Zhu, X. L., G. H. Yang, “New Results of Stability Analysis for Systems with Time–Varying Delay”, *International Journal of robust and nonlinear control*, 20, (2010) 596–606.

22. STABILNOST NA KONAČNOM VREMENSKOM INTERVALU VREMENSKI DISKRETNIH SISTEMA SA VREMENSKI PROMENLJIVIM KAŠNJENJEM

22.1 Uvod

Klasični koncepti stabilnosti (to jest ljapunovska stabilnost, BIBO stabilnost) razmatraju dinamičko ponašanje sistema na beskonačnom vremenskom intervalu. Ovi koncepti zahtevaju da su promenljive sistema ograničene, pri čemu vrednosti granica nisu propisane. Prema tome, klasični koncepti stabilnosti nisu prikladni za praktične primene, s obzirom da postoje slučajevi gde nisu prihvatljiva velika odstupanja veličina od njihovih nominalnih vrednosti pri njihovom kretanju u prostoru stanja. U tom smislu čini se da je opravdano da se definiše kao stabilan sistem čije kretanje, pri datim početnim uslovima, ostaje unutar propisanih granica na fiksiranom vremenskom intervalu. Izraz *praktična stabilnost* je uveden za sisteme koji rade na beskonačnom vremenskom intervalu sa propisanim granicama, u radu *La Salle*, *Lefschetz* (1961). Nešto ranije, u radovima *Kamenkov* (1953) i *Lebedev* (1954.a) koji su objavljeni u ruskoj literaturi, razmatrane su i propisane granice kao i konačni vremenski intervali, pod nazivom *stabilnost na konačnom vremenskom intervalu*. Prema tome, konceptu praktične stabilnosti i konceptu stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu je zajedničko da imaju specificirane granice, ali se razlikuju u veličini vremenskog intervala koji se razmatra.

Mnogi rezultati su dobijeni za ovaj tip stabilnosti za vremenski kontinualne sisteme u lit. *Kamenkov* (1953), *Lebedev* (1954.a), *Dorato* (1961), *La Salle*, *Lefschetz* (1961), *Weiss*, *Infante* (1967), *Angelo* (1970), *Amato et al*. (2001, 2003, 2006), *Moulay*, *Perruquetti* (2006), *Garcia et al*. (2009), *Ming*, *Shen* (2009), *Chen*, *Jiao* (2010, 2011) i *Zheng et al*. (2011), i za vremenski diskretne sisteme u lit. *Amato et al*. (2004, 2005, 2008, 2010, 2011), *Amato*, *Ariola* (2005), *Mastellone et al*. (2005), *Shen* (2008), *Ichihara*, *Katayama* (2009.a, 2009.b) i *Zhu et al*. (2009).

U skorije vreme, konceptu stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu je posvećena pažnja u kontekstu teorije linearnih matričnih nejednakosti (Linear Matrix Inequality – LMI), koja omogućava pronalaženje manje konzervativnih uslova koji garantuju stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i stabilizaciju, lit. *Amato et al*. (2001, 2004, 2005, 2006, 2010, 2011), *Amato*, *Ariola* (2005), *Ichihara*, *Katayama* (2009.a, 2009.b) i *Zhu et al*. (2009).

U postojećoj literaturi, stabilnost sistema na konačnom vremenskom intervalu se može klasifikovati u sledeće dve kategorije: a) *(klasična) stabilnost na konačnom vremenskom intervalu* (pri datoj granici početnog uslova, kretanje sistema ne prelazi propisanu granicu u toku specificiranog vremenskog intervala), lit. *Amato et al*. (2003, 2004, 2005, 2006, 2008, 2010), *Amato*, *Ariola* (2005), *Mastellone et al*. (2005) i *Garcia et al*. (2009), i b) *atraktivna stabilnost na konačnom vremenskom intervalu* (kretanje sistema dostiže stacionarno stanje na konačnom vremenskom intervalu), lit. *Moulay*, *Perruquetti* (2006), *Chen*, *Jiao* (2010, 2011) i *Zheng et al*. (2011). U ovoj glavi, razmatraju se samo problemi stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu.

Osim toga, stabilnost na konačnom vremenskom intervalu u prisustvu spoljašnjeg ulaza vodi ka konceptu *ograničenosti na konačnom vremenskom intervalu*, lit. *Amato et al*. (2001, 2003, 2006), *Amato*, *Ariola* (2005), *Ichihara*, *Katayama* (2009.a, 2009.b) i *Zhu et al*. (2009), (sistem je ograničen na konačnom vremenskom intervalu ako, za datu granicu početnog uslova i karakterizaciju skupa dozvoljenih ulaza, promenljive stanja ostaju unutar propisanih granica za sve ulaze u skupu).

Čisto vremensko kašnjenje se često javlja u mnogim kontinualnim industrijskim sistemima (hemijski procesi, biološki sistemi, dinamika priraštaja, neuronske mreže, veliki sistemi, …). Pokazano je da je prisustvo čisto vremenskog kašnjenja izvor nestabilnosti i loših performansi sistema upravljanja. Prema dostupnim saznanjima, malo je radova koji razmatraju stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i stabilizaciju vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Prethodni rezultati stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem se mogu naći u lit. *Debeljković et al*. (1997.a, 2000.a) i *Lazarević et al*. (1999).

Metode u ovoj literaturi daju konzervativnije rezultate zato što se zasnivaju na majorizaciji odziva sistema korišćenjem određenih nejednakosti. U skorije vreme, na osnovu teorije linearnih matričnih nejednakosti, dobijeni su rezultati koji se tiču stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu u lit. *Debeljković et al*. (1997.a, 2000.a), *Lazarević et al*. (1999), *Jiang* (2009), *Gao et al*. (2011), *Liu*, *Shen* (2011) i *Shang et al*. (2011), i ograničenosti na konačnom vremenskom intervalu u lit. *Shen et al*. (2007), *Wang et al*. (2009, 2010), *Lin et al*. (2011) i *Liu*, *Shen* (2011), za partikularne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. U lit. *Shen et al*. (2007), *Jiang* (2009) i *Wang et al*. (2009, 2010), se razmatra problem stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, rad *Jiang* (2009), i ograničenost na konačnom vremenskom intervalu, lit. *Shen et al*. (2007) i *Wang et al*. (2009, 2010), neuronskih mreža sa čistim vremenskim kašnjenjem. U radovima *Lin et al*. (2011) i *Liu*, *Shen* (2011) proučavana je ograničenost na konačnom vremenskom intervalu priključnih linearnih sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem i spoljašnjim poremećajima. Radovi *Gao et al*. (2011) i *Shang et al*. (2011) istražuju problem upravljanja na konačnom vremenskom intervalu za mrežne sisteme upravljanja sa vremenski promenljivim kašnjenjem. U radu *Shang et al*. (2011) uvedena je partikularna linearna transformacija da bi se originalan sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem pretvorio u sistem bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja. Atraktivna stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i stabilizacija nelinearnih diferencijalnih jednačina sa kašnjenjem su razvijeni u radu *Moulay et al*. (2008).

Za razliku od vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, manje pažnje je posvećeno vremenski diskretnim sistemima sa čistim vremenskim kašnjenjem. Glavni razlog je činjenica da se takvi sistemi mogu transformisati u proširene sisteme bez prisustva čisto vremenskog kašnjenja. Ovo proširenje sistema, međutim, nije odgovarajuće za sisteme sa nepoznatim čistim vremenskim kašnjenjem i za sisteme sa vremenski promenljivim kašnjenjem koji su predmet analize u ovoj glavi. Prema dostupnim saznanjima, u literaturi ne postoje dostupni rezultati koji se tiču stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i stabilizacije klase linearnih, vremenski diskretnih sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem.

Cilj ove glave je prezentovanje novih dovoljnih uslova stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu razmatrane klase sistema. U tom smislu, polazi se od rezultata prezentovanih u radu *Stojanović*, *Debeljković* (2011) koji se bavi asimptotskom stabilnošću vremenski diskretnih sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem. Da bi se rešio problem stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu koristi se Ljapunovljeva metoda. Dovoljni uslovi će biti izraženi u formi LMI koji je zavisan od minimalne i maksimalne granice čisto vremenskog kašnjenja. Numerički primeri će se koristiti da ilustruju primenljivost razvijenih rezultata. Razmatraju se dva slučaja: a) kada je sistem asimptotski stabilan, i b) kada je sistem nestabilan. Pokazaće se, u oba slučaja, da su sistemi stabilni na konačnom vremenskom intervalu.

22.2 Formulacija problema i preliminarna razmatranja

Označavanje. $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{Z}^+$ označavaju n–dimenzionalan Euklidski prostor i skup pozitivnih celih brojeva. Oznaka $P>0$ $\left(P\geq 0\right)$ znači da je matrica P realna, simetrična i pozitivno određena (poluodređena). $\lambda_{\min}\left(P\right)\triangleq \min \operatorname{Re}\lambda\left(P\right)$ i $\lambda_{\max}\left(P\right)\triangleq \max \operatorname{Re}\lambda\left(P\right)$ označavaju minimalnu i maksimalnu sopstvenu vrednost simetrične matrice P. Za realne, simetrične matrice P i Q, oznaka $P>Q$ $\left(P\geq Q\right)$ znači da je matrica $P-Q$ pozitivno određena (pozitivno poluodređena). I je jedinična matrica odgovarajuće dimenzije. Gornji indeks "$^{\mathrm{T}}$" označava transpoziciju. U simetričnim blok matricama ili kompleksnim matričnim izrazima, koristi se zvezdica $\left(*\right)$ da bi predstavio član proistekao iz simetrije. Ako dimenzije matrica nisu eksplicitno iskazane, pretpostavlja se da su kompatibilne za algebarske operacije.

Razmatra se linearni, vremenski diskretni sistem sa vremenski promenljivim kašnjenjem u stanju:

$$\mathbf{x}\left(k+1\right)=A\,\mathbf{x}\left(k\right)+A_d\,\mathbf{x}\left(k-h\left(k\right)\right), \tag{22.1}$$

sa funkcijom početnih stanja:

$$\mathbf{x}\left(\theta\right)=\boldsymbol{\psi}\left(\theta\right),\quad \theta\in\left\{-h_M,-h_M+1,\dots,0\right\}, \tag{22.2}$$

koja zadovoljava:

$$\left(\boldsymbol{\psi}\left(\theta+1\right)-\boldsymbol{\psi}\left(\theta\right)\right)^T\left(\boldsymbol{\psi}\left(\theta+1\right)-\boldsymbol{\psi}\left(\theta\right)\right)<\mu,\quad \theta\in\left\{-h_M,-h_M+1,\dots,-1\right\}, \tag{22.3}$$

gde je $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ stanje u trenutku k, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ su konstantne matrice. $h(k)$ je pozitivan ceo broj koji predstavlja vremenski promenljivo kašnjenje koje zadovoljava:

$$h_m \leq h(k) \leq h_M , \tag{22.4}$$

gde su h_m i h_M konstantni, pozitivni celi brojevi koji predstavljaju minimalno i maksimalno čisto vremensko kašnjenje, sledstveno.

Pretpostavka o čistom vremenskom kašnjenju $h(k)$ data nejed. (22.4) karakterizuje realnu situaciju u mnogim praktičnim primenama. Tipičan primer koji sadrži čisto vremensko kašnjenje a koji se može karakterizovati nejed. (22.4) se može naći u mrežnim sistemima upravljanja, gde su čista vremenska kašnjenja uvedena usled mrežne transmisije (bilo iz senzora do kontrolera ili iz kontrolera do aktuatora) su zapravo vremenski promenljiva kašnjenja, i može se pretpostaviti da postoje minimalna i maksimalna granica čisto vremenskog kašnjenja bez gubitka opštosti.

U ovoj glavi se proučava stabilnost na konačnom vremenskom intervalu klase sistema, datih jed. (22.1), sa vremenski promenljivim kašnjenjem. Cilj je da se razvije dovoljan uslov tako da je sistem, dat jed. (22.1), stabilan na konačnom vremenskom intervalu za bilo koje $h(k)$ koje zadovoljava $h_m \leq h(k) \leq h_M$. Najpre se uvodi sledeća definicija stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu sistema sa čistim vremenskom kašnjenjem, datog jed. (22.1).

Definicija 22.1 Vremenski diskretni sistem sa čistim vremenskim kašnjenjem, dat jed. (22.1), sa funkcijom početnih stanja, datom jed. (22.2), je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na (α, β, N), gde je $0 \leq \alpha < \beta$, ako:

$$\sup_{k \in [-h_M, -h_M+1, \cdots, 0]} \boldsymbol{\psi}^T(k)\boldsymbol{\psi}(k) < \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) < \beta, \quad \forall k \in [1, 2, \ldots, N]. \tag{22.5}$$

Napomena 22.1 Asimptotska stabilnost u smislu Ljapunova i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu su nezavisni koncepti: sistem koji je stabilan na konačnom vremenskom intervalu ne mora biti asimptotski stabilan, nasuprot tome, asimptotski stabilan sistem u smislu Ljapunova bi mogao biti stabilan na konačnom vremenskom intervalu, ako njegovo kretanje prelazi propisane granice u toku prelaznih procesa.

22.3 Glavni rezultati

U ovom odeljku, uvodi se kriterijum stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu za sistem, dat jed. (22.1), korišćenjem Ljapunovljeve metode kombinovane sa LMI tehnikom. Polazi se od rezultata prezentovanog u radu *Stojanović*, *Debeljković* (2011), koji daje kriterijum asimptotske stabilnosti, zavisan od čisto vremenskog kašnjenja, i izvodi se dovoljan uslov stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu.

Teorema 22.1 Sistem, dat jed. (22.1), sa vremenski promenljivim kašnjenjem je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na (α,β,T), $\alpha<\beta$, ako postoje pozitivno određene simetrične matrice P, Q, Z, pozitivni skalari θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 i skalar $\gamma\geq 1$, tako da važi sledeći LMI:

$$\Gamma=\begin{pmatrix}\Gamma_{11} & \left(A+A_d\right)^T P A_d & -A^T P A_d & h_M\left(A-I\right)^T Z\\ * & -Q & -A_d{}^T P A_d & h_M A_d{}^T Z\\ * & * & -Z & 0\\ * & * & * & -Z\end{pmatrix}<0 \quad , \qquad (22.6)$$

$$\Gamma_{11}=-\gamma\left(P+P^T\right)+\left(h_M-h_m+1\right)Q+A^T P\left(A+A_d\right)+\left(A+A_d\right)^T P A$$

$$\begin{aligned}&\theta_1 I<P<\theta_2 I\\ &0<Q<\theta_3 I \quad ,\\ &0<Z<\theta_4 I\end{aligned} \qquad (22.7)$$

$$\begin{pmatrix}-\gamma^{-N}\beta\theta_1 & \sqrt{\alpha}\,\theta_2 & \sqrt{\delta}\,\theta_3 & \sqrt{\varepsilon}\,\theta_4\\ * & -\theta_2 & 0 & 0\\ * & * & -\theta_3 & 0\\ * & * & * & -\theta_4\end{pmatrix}<0$$

$$\delta=\alpha\left(h_M+\left(h_M-1\right)\left(h_M-2\right)/2-\left(h_m-1\right)\left(h_m-2\right)/2\right), \qquad (22.8)$$

$$\varepsilon=\mu\, h_M\left(h_M-1\right)/2$$

Stojanović, *Debeljković*, *Dimitrijević* (2012.a).

Dokaz. Neka je:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}(m)&\triangleq\mathbf{x}(m+1)-\mathbf{x}(m)\\ &=A\mathbf{x}(m)+A_d\,\mathbf{x}\left(m-h(m)\right)-\mathbf{x}(m),\\ &=\left(A-I\right)\mathbf{x}(m)+A_d\,\mathbf{x}\left(m-h(m)\right)\end{aligned} \qquad (22.9)$$

i:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k-h(k)) &= \mathbf{x}(k)-\left(\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}(k-h(k))\right)\\ &= \mathbf{x}(k)-\sum_{m=k-h(k)}^{k-1}\left(\mathbf{x}(m+1)-\mathbf{x}(m)\right).\\ &= \mathbf{x}(k)-\sum_{m=k-h(k)}^{k-1}\boldsymbol{\eta}(m)\end{aligned} \tag{22.10}$$

Tada se sistem, dat jed. (22.1), može transformisati u:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= A\,\mathbf{x}(k)+A_d\,\mathbf{x}(k-h(k))\\ &= A\,\mathbf{x}(k)+A_d\left(\mathbf{x}(k)-\sum_{m=k-h(k)}^{k-1}\boldsymbol{\eta}(m)\right),\end{aligned}$$

to jest:

$$\mathbf{x}(k+1)=(A+A_d)\mathbf{x}(k)-A_d\sum_{m=k-h(k)}^{k-1}\boldsymbol{\eta}(m). \tag{22.11}$$

Izborom diskretnog *Ljapunov–Krasovski* funkcionala na sledeći način, *Stojanović*, *Debeljković* (2011):

$$\begin{aligned}V(k) &= V_1(k)+V_2(k)+V_3(k)+V_4(k)\\ V_1(k) &= \mathbf{x}^T(k)P\,\mathbf{x}(k)\\ V_2(k) &= \sum_{i=k-h(k)}^{k-1}\mathbf{x}^T(i)Q\,\mathbf{x}(i) \qquad ,\\ V_3(k) &= \sum_{j=-h_M+2}^{-h_m+1}\ \sum_{i=k+j-1}^{k-1}\mathbf{x}^T(i)Q\,\mathbf{x}(i)\\ V_4(k) &= \sum_{i=-h_M}^{-1}\ \sum_{j=k+i}^{k-1}\boldsymbol{\eta}^T(j)Z\,\boldsymbol{\eta}(j)\end{aligned} \tag{22.12}$$

gde su P, Q i Z pozitivno određene matrice koje će biti izračunate.

Potonja razlika $\Delta V=V(k+1)-V(k)$ duž rešenje sistema, datog jed. (22.1), i transformisanog sistem, datog jed. (22.11), se dobija kao, *Stojanović*, *Debeljković* (2011):

$$\Delta V(k)\le \boldsymbol{\xi}^T(k)\Omega\,\boldsymbol{\xi}(k), \tag{22.13}$$

gde je:

$$\boldsymbol{\xi}(k)=\left[\mathbf{x}^T(k)\ \ \mathbf{x}^T(k-h(k))\ \ \sum_{m=k-h(k)}^{k-1}\boldsymbol{\eta}^T(m)\right]^T,$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \frac{1}{2}(A+A_d)^T P A_d + h_M (A-I)^T Z A_d & -\frac{1}{2} A^T P A_d \\ * & -Q + h_M A_d{}^T Z A_d & -\frac{1}{2} A_d{}^T P A_d \\ * & * & -\frac{1}{h_M} Z \end{pmatrix}. \tag{22.14}$$

$$\Omega_{11} = A^T P(A+A_d) - P + (h_M - h_m + 1)Q + h_M (A-I)^T Z(A-I)$$

Neka je:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &\triangleq \Omega - \begin{pmatrix} (\gamma-1)P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\Gamma}_{11} & \frac{1}{2}(A+A_d)^T P A_d + h_M (A-I)^T Z A_d & -\frac{1}{2} A^T P A_d \\ * & -Q + h_M A_d{}^T Z A_d & -\frac{1}{2} A_d{}^T P A_d \\ * & * & -\frac{1}{h_M} Z \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{22.15}$$

gde je:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{11} &= A^T P(A+A_d) - P + (h_M - h_m + 1)Q + h_M (A-I)^T Z(A-I) - (\gamma-1)P \\ &= A^T P(A+A_d) - \gamma P + (h_M - h_m + 1)Q + h_M (A-I)^T Z(A-I) \\ &\qquad \gamma \ge 1 \end{aligned}.$$

Ako je:

$$\hat{\Gamma} < 0, \tag{22.16}$$

tada je:

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{x}(k)) &= \boldsymbol{\xi}^T(k)\,\Omega\,\boldsymbol{\xi}(k) = \boldsymbol{\xi}^T(k)\left\{\hat{\Gamma} + \begin{pmatrix} (\gamma-1)P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\boldsymbol{\xi}(k) \\ &= \boldsymbol{\xi}^T(k)\,\hat{\Gamma}\,\boldsymbol{\xi}(k) + \boldsymbol{\xi}^T(k)\begin{pmatrix} (\gamma-1)P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}(k) \\ &< \boldsymbol{\xi}^T(k)\begin{pmatrix} (\gamma-1)P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{\xi}(k) = (\gamma-1)\,\mathbf{x}^T(k)\,P\,\mathbf{x}(k) \\ &< (\gamma-1)V(\mathbf{x}(k)) \end{aligned}, \tag{22.17}$$

to jest:

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right) < \gamma\, V\left(\mathbf{x}(k-1)\right). \tag{22.18}$$

Primenjujući iterativnu proceduru na nejed. (22.18), dobija se:

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right) < \gamma V\left(\mathbf{x}(k-1)\right) = \gamma^2 V\left(\mathbf{x}(k-2)\right) = \ldots = \gamma^k V\left(\mathbf{x}(0)\right). \tag{22.19}$$

Dalje je:

$$\begin{aligned} V\left(\mathbf{x}(0)\right) &= \mathbf{x}^T(0) P \mathbf{x}(0) + \sum_{i=-h(k)}^{-1} \mathbf{x}^T(i) Q \mathbf{x}(i) \\ &\quad + \sum_{j=-h_M+2}^{-h_m+1} \sum_{i=j-1}^{-1} \mathbf{x}^T(i) Q \mathbf{x}(i) + \sum_{i=-h_M}^{-1} \sum_{j=i}^{-1} \boldsymbol{\eta}^T(j) Z \boldsymbol{\eta}(j) \\ &< \lambda_{\max}(P) \mathbf{x}^T(0) \mathbf{x}(0) + \lambda_{\max}(Q) \sum_{i=-h_M}^{-1} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{x}(i) \\ &\quad + \lambda_{\max}(Q) \sum_{j=-h_M+2}^{-h_m+1} \sum_{i=j-1}^{-1} \mathbf{x}^T(i) \mathbf{x}(i) + \lambda_{\max}(Z) \sum_{i=-h_M}^{-1} \sum_{j=i}^{-1} \boldsymbol{\eta}^T(j) \boldsymbol{\eta}(j) \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} V\left(\mathbf{x}(0)\right) &< \lambda_{\max}(P)\alpha + \lambda_{\max}(Q) \sum_{i=-h_M}^{-1} \alpha + \lambda_{\max}(Q) \sum_{j=-h_M+2}^{-h_m+1} \sum_{i=j-1}^{-1} \alpha + \lambda_{\max}(Z) \sum_{i=-h_M}^{-1} \sum_{j=i}^{-1} \mu \\ &= \lambda_{\max}(P)\alpha + \lambda_{\max}(Q) h_M \alpha + \lambda_{\max}(Q) \alpha \sum_{j=h_m}^{h_M-1} j + \lambda_{\max}(Z) \mu \sum_{j=1}^{h_M} j \\ &= \lambda_{\max}(P)\alpha + \lambda_{\max}(Q) h_M \alpha + \lambda_{\max}(Q) \alpha \left(\sum_{j=1}^{h_M-1} j - \sum_{j=1}^{h_m-1} j \right) + \lambda_{\max}(Z) \mu \sum_{j=1}^{h_M} j \end{aligned},$$

$$\begin{aligned} V\left(\mathbf{x}(0)\right) &< \lambda_{\max}(P)\alpha + \lambda_{\max}(Q) h_M \alpha \\ &\quad + \lambda_{\max}(Q) \alpha \left((h_M-1)(h_M-2) - (h_m-1)(h_m-2) \right) / 2, \\ &\quad + \lambda_{\max}(Z) \mu h_M (h_M-1)/2 \end{aligned} \tag{22.20}$$

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right) > \mathbf{x}^T(k) P \mathbf{x}(k) \geq \lambda_{\min}(P) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k). \tag{22.21}$$

Na osnovu nejed. (22.19), nejed. (22.20) i nejed. (22.21), ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\begin{aligned} &\lambda_{\max}(P)\alpha + \lambda_{\max}(Q)\alpha\left(h_M + (h_M-1)(h_M-2)/2 - (h_m-1)(h_m-2)/2\right) \\ &\quad + \lambda_{\max}(Z) \mu h_M (h_M-1)/2 < \gamma^{-N} \lambda_{\min}(P) \beta \end{aligned}, \tag{22.22}$$

dobija se:

$$\mathbf{x}^T(k) \mathbf{x}(k) < \beta, \quad \forall k \in [1, 2, \ldots, N], \tag{22.23}$$

to jest sistem, dat jed. (22.1), je stabilan na konačnom vremenskom intervalu.

Neka je:

$$0<\theta_1<\lambda_{\min}(P),\quad \theta_2>\lambda_{\max}(P),\quad \theta_3>\lambda_{\max}(Q),\quad \theta_4>\lambda_{\max}(Z)$$
$$\delta=\alpha\big(h_M+(h_M-1)(h_M-2)/2-(h_m-1)(h_m-2)/2\big),\quad \varepsilon=\mu h_M(h_M-1)/2 .$$

Tada iz nejed. (22.22) sledi:

$$\begin{gathered}\theta_1 I<P<\theta_2 I,\quad 0<Q<\theta_3 I,\quad 0<Z<\theta_4 I\\ -\gamma^{-N}\beta\theta_1+\alpha\theta_2+\delta\theta_3+\varepsilon\theta_4<0\end{gathered}. \tag{22.24}$$

Lako se proverava da su uslovi dati nejed. (22.24) garantovani nametanjem uslova datih nejed. (22.7–22.8). Iz nejed. (22.16), uvođenjem smene $P\leftrightarrow 2P$, dobija se:

$$\begin{gathered}\overline{\Gamma}=\begin{pmatrix}\overline{\Gamma}_{11} & (A+A_d)^T P A_d+h_M(A-I)^T Z A_d & -A^T P A_d\\ * & -Q+h_M A_d^T Z A_d & -A_d^T P A_d\\ * & * & -\dfrac{1}{h_M}Z\end{pmatrix}<0\\ \overline{\Gamma}_{11}=-\gamma\big(P+P^T\big)+A^T P(A+A_d)+(A+A_d)^T P A\\ +(h_M-h_m+1)Q+h_M(A-I)^T Z(A-I)\end{gathered}. \tag{22.25}$$

Dalje je:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\overline{\Gamma}_{11} & (A+A_d)^T P A_d+h_M(A-I)^T Z A_d & -A^T P A_d\\ * & -Q+h_M A_d^T Z A_d & -A_d^T P A_d\\ * & * & -\dfrac{1}{h_M}Z\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\Gamma_{11} & (A+A_d)^T P A_d & -A^T P A_d\\ * & -Q & -A_d^T P A_d\\ * & * & -\dfrac{1}{h_M}Z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h_M(A-I)^T Z(A-I) & h_M(A-I)^T Z A_d & 0\\ * & h_M A_d^T Z A_d & 0\\ * & * & 0\end{pmatrix},\\
&=\begin{pmatrix}\Gamma_{11} & (A+A_d)^T P A_d & -A^T P A_d\\ * & -Q & -A_d^T P A_d\\ * & * & -\dfrac{1}{h_M}Z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}(A-I)^T Z\\ A_d^T Z\\ 0\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{h_M}Z\right)^{-1}\begin{pmatrix}Z(A-I) & Z A_d & 0\end{pmatrix}<0\end{aligned} \tag{22.26}$$

gde je:

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}&=\overline{\Gamma}_{11}-h_M(A-I)^T Z(A-I)\\ &=-\gamma\big(P+P^T\big)+A^T P(A+A_d)\\ &\quad+(A+A_d)^T P A+(h_M-h_m+1)Q\end{aligned}. \tag{22.27}$$

Korišćenjem *Schur*–ovih komplemenata, lako se pokazuje da je uslov dat nejed. (22.26) ekvivalentan uslovu:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & (A+A_d)^T P A_d & -A^T P A_d & (A-I)^T Z \\ * & -Q & -A_d{}^T P A_d & A_d{}^T Z \\ * & * & -\dfrac{1}{h_M} Z & 0 \\ * & * & * & -\dfrac{1}{h_M} Z \end{pmatrix} < 0 . \tag{22.28}$$

Uvođenjem smene $h_M Z \leftrightarrow Z$, dobija se LMI dat nejed. (22.6).

Napomena 22.2 Uslovi dati nejed. (22.6–22.8) su LMI uslovi, prema tome lako se proveravaju korišćenjem standardnog numeričkog softvera. Ovi uslovi zavise i od maksimalne i od minimalne granice čisto vremenskog kašnjenja.

Napomena 22.3 Iz *Teoreme* 22.1, za slučaj konstantnog čisto vremenskog kašnjenja, $h_M = h_m = h$, dobija se sledeći rezultat.

Posledica 22.1 Sistem, dat jed. (22.1), pri čemu je $h(k) = h$, je *stabilan na konačnom vremenskom intervalu* u odnosu na (α, β, T), $\alpha < \beta$, ako postoje pozitivno određene simetrične matrice P, Q, Z, pozitivni skalari θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 i skalar $\gamma \geq 1$, tako da važi sledeći LMI:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & (A+A_d)^T P A_d & -A^T P A_d & h(A-I)^T Z \\ * & -Q & -A_d{}^T P A_d & h A_d{}^T Z \\ * & * & -Z & 0 \\ * & * & * & -Z \end{pmatrix} < 0 , \tag{22.29}$$

$$\Gamma_{11} = -\gamma\left(P + P^T\right) + Q + A^T P\left(A + A_d\right) + \left(A + A_d\right)^T P A$$

$$\begin{aligned} \theta_1 I < P < \theta_2 I \\ 0 < Q < \theta_3 I \\ 0 < Z < \theta_4 I \end{aligned} , \tag{22.30}$$

$$\begin{pmatrix} -\gamma^{-N}\beta\theta_1 & \sqrt{\alpha}\,\theta_2 & \sqrt{\delta}\,\theta_3 & \sqrt{\varepsilon}\,\theta_4 \\ * & -\theta_2 & 0 & 0 \\ * & * & -\theta_3 & 0 \\ * & * & * & -\theta_4 \end{pmatrix} < 0 , \tag{22.31}$$

$$\delta = \alpha h, \quad \varepsilon = \mu h(h-1)/2$$

Stojanović, *Debeljković*, *Dimitrijević* (2012.a).

Dokaz. Za $h_M = h_m = h$, uslovi dati nejed. (22.29–22.31) slede direktno iz uslova datih nejed. (22.6–22.8).

22.4 Rezultati i diskusija

Primer 22.1 Razmatraju se sledeći asimptotski stabilni, vremenski diskretni sistemi sa vremenski promenljivim kašnjenjem u stanju, *Stojanović*, *Debeljković* (2011):

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,00 \\ 0,35 & 0,70 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{pmatrix} 0,10 & 0,00 \\ 0,20 & 0,10 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k-h(k)). \tag{22.32}$$

(i) Izračunava se gornja granica vremenski promenljivog kašnjenja h_M korišćenjem *Teoreme* 22.1, tako da je sistem, dat jed. (22.32), stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(\alpha, \beta, N) = (2{,}1, 50, 50)$ i sa partikularnim izborom $h_m = 2$ i:

$$\boldsymbol{\psi}_{\theta \in \{-6,-5,\ldots,0\}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}(-6) & \ldots & \boldsymbol{\psi}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Očigledno je:

$$\boldsymbol{\psi}^T(\theta)\boldsymbol{\psi}(\theta) \le 2 < \alpha = 2{,}1, \quad \theta \in \{-6, -5, \ldots, 0\},$$

$$\left(\boldsymbol{\psi}(\theta+1) - \boldsymbol{\psi}(\theta)\right)^T \left(\boldsymbol{\psi}(\theta+1) - \boldsymbol{\psi}(\theta)\right) \le 1 < \mu = 1{,}1, \quad \theta \in \{-6, -5, \ldots, -1\}.$$

Rešavanjem LMI, datog nejed. (22.6–22.8), za fiksiranu vrednost $\gamma = 1{,}0011$, dobija se sledeće izvodljivo rešenje:

$$\begin{gathered} \sup(h_M) = 6, \quad P = \begin{pmatrix} 678{,}86 & 4{,}49 \\ 4{,}49 & 75{,}84 \end{pmatrix} \\ Q = \begin{pmatrix} 36{,}83 & 4{,}91 \\ 4{,}91 & 2{,}94 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 40{,}82 & 8{,}71 \\ 8{,}71 & 3{,}48 \end{pmatrix} . \\ \theta_1 = 74{,}91 \quad \theta_2 = 693{,}63 \quad \theta_3 = 38{,}75 \quad \theta_4 = 45{,}30 \end{gathered}$$

Očigledno je da važe sledeće nejednakosti:

$$\begin{gathered} 0 < \lambda_i(P) \in \{75{,}81,\ 678{,}90\} \\ 0 < \lambda_i(Q) \in \{2{,}24,\ 37{,}53\} \ , \\ 0 < \lambda_i(Z) \in \{1{,}55,\ 42{,}75\} \end{gathered}$$

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 74{,}91 < 75{,}81 = \lambda_{\min}(P)\\ \theta_2 &= 693{,}63 > 678{,}90 = \lambda_{\max}(P)\\ \theta_3 &= 38{,}75 > 37{,}53 = \lambda_{\max}(Q)\\ \theta_4 &= 45{,}30 > 42{,}75 = \lambda_{\max}(Z)\end{aligned}.$$

Prema tome, sistem, dat jed. (22.32), sa vremenski promenljivim kašnjenjem $2 \le h(k) \le 6$ je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(2,1,50,50)$.

(ii) Ponavlja se ispitivanje stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu ali korišćenjem *Posledice* 22.1 i izračunava se gornja granice konstantnog kašnjenja h tako da je sistem, dat jed. (22.32), stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(2,1,50,50)$ i:

$$\boldsymbol{\psi}_{\theta\in\{-11,-10,\ldots,0\}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\psi}(-11) & \cdots & \boldsymbol{\psi}(0)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Rešavanjem LMI, datog nejed. (22.29–22.31), za fiksirane vrednosti $\gamma = 1{,}0003$ i $\mu = 1{,}1$, dobija se sledeće izvodljivo rešenje:

$$\sup(h) = 11, \quad P = \begin{pmatrix} 8169{,}80 & -70{,}62\\ -70{,}62 & 842{,}62\end{pmatrix}$$
$$Q = \begin{pmatrix} 559{,}15 & 67{,}41\\ 67{,}41 & 53{,}70\end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 169{,}93 & 34{,}75\\ 34{,}75 & 16{,}46\end{pmatrix}.$$
$$\theta_1 = 840{,}05 \quad \theta_2 = 8211{,}54 \quad \theta_3 = 571{,}96 \quad \theta_4 = 178{,}98$$

Prema tome, sistem, dat jed. (22.32), sa konstantnim kašnjenjem $h \le 11$ je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(2,1,50,50)$.

Upoređivanjem ova dva rezultata može se zaključiti sledeće:

a) *Teorema* 22.1 uzima u obzir promenljivost čisto vremenskog kašnjenja, dok *Posledica* 22.1 to ne čini. Tako, kada se ispituje stabilnost na konačnom vremenskom intervalu sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem, mora se koristiti *Teorema* 22.1.

b) Usled postojanja čisto vremenskog kašnjenja, primenom *Posledice* 22.1 dobijaju se veće vrednosti gornje granice čisto vremenskog kašnjenja:

$$\sup(h) = 11 > 6 = \sup(h_M).$$

Prema tome, kada se ispituje stabilnost sistema na konačnom vremenskom intervalu sa konstantnim kašnjenjem, bolje je primeniti *Posledicu* 22.1.

Primer 22.2 Razmatraju se sledeći vremenski diskretni sistemi sa čistim vremenskim kašnjenjem:

$$\mathbf{x}(k+1)=\begin{pmatrix}0,60 & 0,00\\ 0,35 & 0,70\end{pmatrix}\mathbf{x}(k)+\begin{pmatrix}0,20 & 0,25\\ 0,25 & 0,15\end{pmatrix}\mathbf{x}(k-h(k)). \tag{22.33}$$

a) Neka je $h(k)=2$. Očigledno, sistem, dat jed. (22.33), nije asimptotski stabilan. Izračunava se gornja granica β, tako da je sistem, dat jed. (22.33), stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(\alpha,\beta,N)=(2{,}1,\ \beta,\ 10)$ i:

$$\boldsymbol{\psi}_{\theta\in\{-2,-1,0\}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\psi}(-2) & \boldsymbol{\psi}(-1) & \boldsymbol{\psi}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Očigledno je:

$$\boldsymbol{\psi}^T(\theta)\boldsymbol{\psi}(\theta)\le 2<\alpha=2{,}1,\quad \theta\in\{-2,-1,0\},$$

$$\left(\boldsymbol{\psi}(\theta+1)-\boldsymbol{\psi}(\theta)\right)^T\left(\boldsymbol{\psi}(\theta+1)-\boldsymbol{\psi}(\theta)\right)\le 1<\mu=1{,}1,\quad \theta\in\{-2,-1,0\}.$$

Korišćenjem *Posledice* 22.1 za fiksiranu vrednost $\gamma=1{,}7258$, dobija se sledeće izvodljivo rešenje:

$$\beta=2425{,}04\quad P=\begin{pmatrix}80539{,}40 & -8705{,}52\\ -8705{,}52 & 44064{,}95\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}27308{,}33 & 24437{,}48\\ 24437{,}48 & 23245{,}63\end{pmatrix},\quad Z=\begin{pmatrix}26533{,}28 & 23870{,}36\\ 23870{,}36 & 22094{,}39\end{pmatrix}.$$

$$\theta_1=42093{,}69\quad \theta_2=82510{,}68\quad \theta_3=49798{,}76\quad \theta_4=48287{,}20$$

Prema tome, sistem, dat jed. (22.33), je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(\alpha,\beta,N)=(2{,}1,\ 2425{,}04,\ 10)$, ali nije asimptotski stabilan (videti *Napomenu* 22.1).

b) Neka je $h_m=1\le h(k)\le 2=h_M$ i $h(0)=2$. Rešavanjem LMI, datog nejed. (22.6–22.8), za fiksirane vrednosti $\gamma=2{,}227$, $N=7$ i:

$$\boldsymbol{\psi}_{\theta\in\{-2,-1,0\}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\psi}(-2) & \boldsymbol{\psi}(-1) & \boldsymbol{\psi}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

dobija se sledeće izvodljivo rešenje:

$$\beta = 2082{,}9 \quad P = \begin{pmatrix} 1307{,}72 & -98{,}19 \\ -98{,}19 & 902{,}12 \end{pmatrix}$$
$$Q = \begin{pmatrix} 434{,}04 & 377{,}52 \\ 377{,}52 & 361{,}30 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 347{,}69 & 308{,}53 \\ 308{,}53 & 280{,}75 \end{pmatrix} \quad .$$
$$\theta_1 = 879{,}59 \quad \theta_2 = 1330{,}27 \quad \theta_3 = 776{,}94 \quad \theta_4 = 624{,}61$$

Prema tome, sistem, dat jed. (22.33), sa vremenski promenljivim kašnjenjem $1 \le h(k) \le 2$ je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $(\alpha, \beta, N) = (2{,}1,\ 2082{,}9,\ 7)$.

Literatura

Amato, F., M. Ariola, *IEEE Trans. Autom. Control*, 50 (5), (2005) 724–729.

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, *Automatica*, 37 (9), (2001) 1459–1463.

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. T. Abdallah, P. Dorato, *Proc. American Control Conf.,* Denver, Colorado, June, (2003) 4452–4456.

Amato, F., M. Carbone, M. Ariola, C. Cosentino, *Proc. American Control Conf. Boston*, Massachusetts, June 30–July 2, (2004) 1440–1444.

Amato, F., M. Ariola, M. Carbone, C. Cosentino, *Proc. 16th IFAC World Congress*, Pague, July 2005.

Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, *Automatica*, 42, (2006) 337–342.

Amato, F., R. Ambrosino, M. Ariola, F. Calabrese, *Proc. American Control Conf.*, Seattle, Washington (USA), June 11–13, (2008) 1656–1660.

Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, *Automatica*, 46, (2010) 919–924.

Amato, F., R. Ambrosino, M. Ariola, G. De Tommasi, *Proc. 18th IFAC World Congress*, Milano (Italy), August 28–September 2, (2011) 156–160.

Angelo, H. D., *Linear Time–Varying Systems: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

Chen, W. S., L. C. Jiao, *Automatica*, 46 (12), (2010) 2105–2108.

Chen, W. S., L. C. Jiao, *Automatica*, 47 (7), (2011) 1544–1545.

Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Proc. European Control Conf.*, Brussels (Belgium), July, (1997.a) 307–311.

Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Dj. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Proc. American Control Conf.*, Chicago, Illinois (USA), June, (2000.a) 1450–1451.

Dorato, P., *IRE Internat. Conv. Rec. Part* 4, New York, (1961) 83–87.

Gao, F., Z. Yuan, F. Yuan, *Adv. Inform. Sc. Serv. Sc.*, 3 (7), (2011) 1–9.

Garcia, G., S. Tarbouriech, J. Bernussou, *IEEE Trans. Autom. Control*, 54, (2009) 364–369.

Ichihara, H., H. Katayama, *Proc. American Control Conf.*, St. Louis, Missouri (USA), June 10–12, (2009.a) 1171–1176.

Ichihara, H., H. Katayama, *Joint 48th IEEE Conf. on Decision and Control* and *28th Chinese Control Conf.*, Shanghai (P. R. China), December 16–18, (2009.b) 3226–3231.

Jiang, D., *Proc. 6th International Symposium on Neural Networks on Advances in Neural Networks*, Wuhan (China), May, (2009) 522–531.

Kamenkov, G., J. *Applied Math. and Mechanics*, 17, (1953) 529–540.

La Salle, J., S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method*, Academic Press, New York, 1961.

Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, *IMA J. Math. Control Inf.*, 17 (2), (1999) 101–109.

Lebedev, A., J. *Applied Math. and Mechanics*, 18, (1954.a) 75–94.

Lin, X., H. Du, S. Li, *Appl. Math. Comput.*, 217, (2011) 5982–5993.

Liu, H., Y. Shen, *Intell. Control Autom.*, 2, (2011) 203–213.

Mastellone, S., C. T. Abdallah, P. Dorato, *Proc. American Control Conf.*, Portland, OR (USA), June 8–10, (2005) 1239–1244.

Ming, Q., Y. Shen, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14, (2009) 1043–1049.

Moulay, E., W. Perruquetti, *J. Math. Anal. Appl.*, 323, (2006) 1430–1443.

Moulay, E., M. Dambrine, N. Yeganefar, W. Perruquetti, *Syst. Control Lett.*, 57, (2008) 561–566.

Shang, Y., F. Gao, F. Yuan, *Int. J. Advancem. Comput. Technol.*, 3 (3), (2011) 192–198.

Shen, Y., *Control Decis.*, 23, (2008) 107–109.

Shen, Y., L. Zhu, Q. Guo, *Proc. 4th international symposium on Neural Networks: Advances in Neural Networks*, Nanjing (China), Jun, (2007) 904–909.

Stojanović, S. B., D. LJ. Debeljković, *Chem. Ind. Chem. Eng. Q.*, 17 (4), (2011) 497−503.

Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, N. Dimitrijević, "Finite–Time Stability of Discrete–Time Systems with Time–Varying Delay", *Chemical Industry & Chemical Engineering Quarterly*, (2012.a), DOI:10.2298/CICEQ120126026S.

Wang, J., J. Jian, P. Yan, *Proc. 6th International Symposium on Neural Networks on Advances in Neural Networks*, Wuhan (China), May, (2009) 395–404.

Wang, X., M. Jiang, C. Jiang, S. Li, *Proc. 7th International Symposium on Neural Networks*, Shanghai (China), June, (2010) 611–618.

Weiss, L., E. Infante, *IEEE Trans. Autom. Control*, 12, (1967) 54–59.

Zheng, Y. S., W. S. Chen, L. Wang, *Int. J. Control*, 84 (10), (2011) 1644–1652.

Zhu, L., Y. Shen, C. Li, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14, (2009) 361–370.

XII ZAKLJUČAK

Prvo poglavlje ove disertacije bavi se opštim razmatranjima vezanim za klase sistema koja su predmet izučavanja.

U drugom poglavlju disertacije razmatrana su opšta pitanja dinamike vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Iznete su osobenosti fenomena kašnjenja u prenosu signala u fizičkim procesima i izvršena klasifikacija diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Razmatrane su mogućnosti rešavanja diferencnih jednačina sa pomerenim argumentom. Date su mogućnosti analize vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u vremenskom, kompleksnom i frekventnom domenu, kao i u prostoru stanja. Određeno je kretanje vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u vremenskom domenu i u prostoru stanja.

U trećem i četvrtom poglavlju disertacije dat je hronološki pregled postignutih rezultata i rekapitulacija nekih osnovnih rezultata na polju proučavanja ljapunovske stabilnosti vremenski diskretnih i kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Stabilnost u smislu Ljapunova vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, u vidu kriterijuma koji ne uzimaju u obzir čisto vremensko kašnjenje, je razmatrana u petom poglavlju disertacije. Prezentovani su kriterijumi za ispitivanje asimptotske stabilnosti linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Ovi rezultati su manje restriktivni u odnosu na rezultate u postojećoj literaturi. Prezentovan je rezultat analogan rezultatu datom u radu *Tissir*, *Hmamed* (1996), za vremenski kontinualne sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem, koji obuhvata sve specifične osobine vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i koji je manje konzervativan u odnosu na rezultat prezentovan u radu *Jacić et al*. (2004). Na osnovu nove *Ljapunov–Krasovski* metode, prezentovani su dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti, nezavisne od čisto vremenskog kašnjenja, linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Stabilnost u smislu Ljapunova vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, u vidu kriterijuma koji uzimaju u obzir čisto vremensko kašnjenje, je razmatrana u šestom poglavlju disertacije. Dati su potrebni i dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti partikularne klase linearnih, vremenski kontinualnih i diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Prezentovani su kriterijumi, zavisni od čisto vremenskog kašnjenja, koji se isključivo zasnivaju na maksimalnim i dominantnim solventima partikularne matrične jednačine. U slučaju vremenski diskretnih sistema sa velikim iznosom čisto vremenskog kašnjenja, pokazano je da, ako se dominantni solvent može izračunati pomoću *Traub*–ovog ili *Bernoulli*–evog algoritma, očekuje se mali broja izračunavanja u poređenju sa uobičajenim postupcima koje se zasnivaju na sopstvenim vrednostima proširene matrice A_{eq}.

U sedmom poglavlju disertacije izučavana je stabilnost u smislu Ljapunova perturbovanih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Problem robusne asimptotske stabilnosti je razmatran za slučaj linearnih, perturbovanih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Osim dva rezultata, koji predstavljaju dalju generalizaciju nekih prethodnih rezultata iz lit. *Mori et al.* (1982.b) i *Trinh, Aldeen* (1995.a), prezentovan je rezultat u formi samo dovoljnog uslova. Generalizovani rezultati su se koristili kao osnova za upoređivanje rezultata. Prezentovani su dovoljni uslovi koji garantuju $D(\alpha, r)$ robusnu stabilnost linearnih, perturbovanih, vremenski diskretnih sistema sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem. Razmatrane su i strukturne i nestrukturne parametarske perturbacije. Takođe je dat dovoljan uslov koji garantuje stabilnost linearnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i nelinearnim perturbacijama. Prezentovan je dovoljan uslov koji garantuje eksponencijalnu stabilnost linearnih, perturbovanih, vremenski diskretnih sistema sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem i nelinearnim perturbacijama. Izučavan je i problem analize kvadratne stabilnosti linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju i neodređenostima. Dati su potrebni i dovoljni uslovi, koji ne zavise od čisto vremenskog kašnjenja, u smislu linearnih matričnih nejednakosti. Prezentovani rezultati predstavljaju proširenje rezultata kvadratne stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem i neodređenostima iz rada *Xu et al.* (2001.b).

Stabilnost u smislu Ljapunova velikih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem je razmatrana u osmom poglavlju disertacije. Dati su potrebni i dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti partikularne klase velikih, linearnih, vremenski diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Kriterijumi zavisni od čisto vremenskog kašnjenja se zasnivaju na tačnom rešenju partukularnog sistema matričnih jednačina. Takođe je prezentovan potreban i dovoljan uslov stabilnosti, koji se zasniva na ekvivalentnoj matrici, a koji je nezavisan od čisto vremenskog kašnjenja. Rezultati za velike, linearne, vremenski diskretne sisteme sa dva čista vremenska kašnjenja prošireni su na velike, linearne, vremenski diskretne sisteme sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem. U slučaju sistema sa velikim iznosom čisto vremenskog kašnjenja i velikog broja podsistema N, primenjujući prezentovane rezultate, očekuje se manji broj izračunavanja u poređenju sa uobičajenim postupcima koji se zasnivaju na sopstvenim vrednostima matrice A_{eq} proširenog sistema.

Stabilnost u smislu Ljapunova velikih, vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem je razmatrana u devetom poglavlju disertacije. Prezentovani su potrebni i dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti partikularne klase velikih, linearnih, vremenski kontinualnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Ovi uslovi stabilnosti nemaju konzervatizam, međutim, zahtevaju kompleksne numeričke proračune. Ako se numeričko rešavanje pomenutog sistema pojednostavi, prezentovana metoda za ispitivanje stabilnosti sistema ima veliku praktičnu važnost. Rezultati za velike, linearne, vremenski kontinualne sisteme sa dva vremenska kašnjenja prošireni su na velike, linearne, vremenski kontinualne sisteme sa višestrukim čistim vremenskim kašnjenjem.

U desetom poglavlju disertacije razmatrana je asimptotska stabilnost velikih, intervalnih, vremenski kontinualnih i diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem. Prezentovano je nekoliko kriterijuma nezavisnih od čisto vremenskog kašnjenja.

U jedanaestom poglavlju disertacije prezentovani su novi rezultati.

Izvedeni su novi dovoljni kriterijumi, zavisni i nezavisni od čisto vremenskog kašnjenja, stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu i atraktivne praktične stabilnosti linearnih, vremenski kontinualnih i diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, kao i odgovarajući rezultati koji se tiču problema praktične nestabilnosti.

Uslovi garantuju atraktivnu praktičnu stabilnost i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu unutar specificiranih vremenski invarijantnih skupova u prostoru stanja. Na iste klase sistema primenjen je i LMI prilaz koji daje manje restriktivne rezultate u poređenju sa drugim rezultatima, s obzirom da ne nameće bilo kakva ograničenja matricama sistema.

Najznačajniji doprinos disertacije je ispitivanje problema stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa vremenski promenljivim kašnjenjem.

U cilju smanjivanja konzervativnosti kriterijuma stabilnosti vremenski diskretnih sistema sa promenljivim intervalnim kašnjenjem, u glavi 21, je izvršena dekompozicija intervala vremenskog kašnjenja diskretnog *Ljapunov–Krasovski* funkcionala na dva nejednaka podintervala. Veličine ovih podintervala su kontrolisane podesivim parametrom α, i na svakom od njih u diskretnom *Ljapunov–Krasovski* funkcionalu su izabrane različite slobodne matrice, čije su optimalne vrednosti određene rešavanjem odgovarajućih LMI. Zahvaljujući ovako izabranom diskretnom funkcionalu, kao i činjenici da su korišćene precizne metode za procenu gornje granice nekih unakrsnih članova koji se pojavljuju u razlici ovog funkcionala, dobijeni su dovoljni uslovi stabilnosti koji su manje konzervativni u odnosu na postojeće rezultate.

U glavi 22 definisana je i razmatrana stabilnost na konačnom vremenskom intervalu diskretnih sistema sa promenljivim intervalnim kašnjenjem. Pokazano je da se primenom funkcionala, koji je sličan diskretnom *Ljapunov–Krasovski* funkcionalu, može uspostaviti uzročno–posledična veza između gornje granice modula početne funkcije dikretnog sistema sa kašnjenjem i gornje granice modula vektora stanja na konačnom vremenskom intervalu. Dobijeni su potpuno novi rezultati u obliku LMI, koji se mogu jednostavno implementirati pomoću odgovarajućeg softvera (na primer Matlab).

XIII LITERATURA

[1] Abdullin, R. Z., Yu. L. Anapoljskii, “K zadačam praktičeskoj ustoičivosti” v kjigi *Vektor–funkcii Ljapunova i ih postoenie*, Nauka, Novosibirsk, (1980) 34–91.

[2] Abgarijan, K. A., “Ustoičivost dviženia na konečnom intervale”, v knjigi *Itogi nauki i tehniki*, VINITI AN SSSR, Obščaja mehanika, Moskva, (1976) 43–124.

[3] Aleksendrić, M., *Dinamika posebnih klasa kontinualnih i diskretnih sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu,* Dipl. rad, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 2002.

[4] Aleksendrić, M., D, Lj. Debeljković, “Finite Time Stability of Linear Discrete Time Delayed Systems“, *Proc. HIPNEF* 2002, Niš (Yu), October 2–5, (2002) 333–340.

[5] Amato, F., M. Ariola, *IEEE Trans. Autom. Control*, 50 (5), (2005) 724–729.

[6] Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, *Automatica*, 37 (9), (2001) 1459–1463.

[7] Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, C. Abdallah, P. Dorato, “Necessary and Sufficient Conditions for Finite–Time Stability of Linear System”, *Proc. of the 2003 American Control Conference,* Denver, Colorado, (2003) 4452–4456.

[8] Amato, F., M. Carbone, M. Ariola, C. Cosentino, *Proc. American Control Conf.*, Boston, Massachusetts, June 30 – July 2, (2004) 1440–1444.

[9] Amato, F., M. Ariola, M. Carbone, C. Cosentino, *Proc. 16th IFAC World Congress*, Pague, July, 2005.

[10] Amato, F., M. Ariola, P. Dorato, *Automatica*, 42, (2006) 337–342.

[11] Amato, F., R. Ambrosino, M. Ariola, F. Calabrese, *Proc. American Control Conf.*, Seattle, Washington (USA), June 11–13, (2008) 1656–1660.

[12] Amato, F., M. Ariola, C. Cosentino, *Automatica*, 46, (2010) 919–924.

[13] Amato, F., R. Ambrosino, M. Ariola, G. De Tommasi, *Proc. 18th IFAC World Congress*, Milano (Italy), August 28 – September 2, (2011) 156–160.

[14] Amemiya, T., “Delay–Independent Stability of High–Order Systems”, *Int. J. Control*, 50 (1), (1989) 139–149.

[15] Amir–Moez, A. R., “Extreme Properties of a Hermitian Transformations and Singular Values of Sum and Product of Linear Transformations”, *Duke Math J.*, 23, (1956) 463–476.

[16] Angelo, H. D., *Linear Time–Varying Systems: Analysis and Synthesis*, Allyn and Bacon, Boston, 1970.

[17] Angelo, H., *Linear Time Varying Systems*, Allyn and Bacon, Boston, 1974.

[18] Araki, M., K. Ando, B. Kondo, “Stability of Sampled–Data Composite Systems with Many Nonlinearities”, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–16 (1), (1969) 22–27.

[19] Bailey, F. N., “The Aplication of Lyapunov’s Second Method to Interconnected Systems”, *SIAM J. Control*, Ser. A., Vol. 3, No.3, (1966) 443–462.

[20] Bajić, V., “On Practical Stability Response of Homogenous Bilinear Systems”, *Tehnika*, 38 (1), (1982) 73–85.

[21] Bajić, V., “On Practical Stability of Discrete Homogenous Bilinear Systems”, *Tehnika*, 32 (1), (1983) 131–132.

[22] Bajić, V., D. Lj. Debeljković, Z. Gajić, B. Petrović, “Weak Domain of Attraction and Existence of Solutions Convergent to the Origin of the Phase Space of Singular Linear Systems”, *Publications of the Faculty of Electrical Eng. Belgrade*, *Automatic control*, No. 1, (1992) 53–62.

[23] Baker, R. A., A. R. Bergen, “Lyapunov Stability and Lyapunov Functions of Infinite Dimensional Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–14 (4), (1969) 325–334.

[24] Barabashin, E. A., *Lyapunov Functions*, Nauka, Moscow, 1970.

[25] Barrett, M. F., “Conservatism with Robustness Tests for Linear Feedback Control Systems”, *Proc. Conf. Decision Control*, (1981) 885–890.

[26] Belhouari, A. E. Tissir, A. Hmamed, “Stability of Interval Matrix Polynomial in Continuous and Discrete Cases”, *Systems and Control Letters*, 18, (1992) 183–189.

[27] Bellman, R., K. L. Cooke, *Differential–Difference Equations*, Academic Press, New York, 1963.

[28] Bialas, S., “A Necessary and Sufficient Condition For the Stability of Interval Matrices”, *Int. J. Control*, Vol. 37, (1983) 717–722.

[29] Bishop, A. B., *Introduction to Discrete Linear Controls–Theory and Application*, Academic Press, New York, 1975.

[30] Bo, Y., Z. Qing–Ling, C. Yue–Peng, “Robust Quadratic Stability and Stabilization with Integrity For Uncertain Discrete Singular Systems”, *Facta Universitatis*, *Series Mechanical Engineering*, 2, (2004) 25–34.

[31] Boukas, E. K., “Discrete–Time Systems with Time–Varying Time Delay: Stability and Stabilizability”, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2006, Article ID 42489, (2006).

[32] Bourles, H., Y. Joannic, O. Mercier, “P–Stability and Robustness: Discrete–Time Case”, *Int. J. Contr.*, Vol. 52, (1990) 1217–1239.

[33] Bourlés, J., “α–Stability of Systems Governed by a Functional Differential Equation–Extension of Results Concerning Linear Delay Systems”, *Int. J. Control*, 45 (6), (1987) 2233–2234.

[34] Boutayeb, M., M. Darouach, “Observers for Discrete–Time Systems with Multiple Delays”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 46 (5), (2001) 746–750.

[35] Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA, 1994.

[36] Brierley, S. D., J. N. Chiasson, E. B. Lee, S. H. Zak, “On Stability Independent of Delay for Linear Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–27, (1982) 252–254.

[37] Cesari, L., *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*, Academic Press, New York, 1963.

[38] Chen, H–G., Kuang, W. H., “Improved Quantitative Measures of Robustness for Multivariable Systems”, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. 39, No. 4, (1994) 807–810.

[39] Chen, J., “Sufficient Conditions on Stability of Interval Matrices: Connections and New Results”, *IEEE Trans*. *Automat*. *Control*, 37, (1992) 541–544.

[40] Chen, J., “On Computing the Maximal Delay Intervals for Stability of Linear Delay Systems”, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–40 (6), (1995) 1087–1093.

[41] Chen, J., H. A. Latchman, “Asymptotic Stability Independent of Delays: Simple Necessary and Sufficient Conditions”, *Proceedings of American Control Conference*, Baltimore (USA), (1994) 1027–1031.

[42] Chen, J., H. Latchman, “Frequency Sweeping Test for Stability Independent of Delay”, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–40 (9), (1995) 1640–1645.

[43] Chen, J., G. Gu, C. N. Nett, “A New Method For Computing Delay Margins for Stability of Linear Delay Systems”, *Proceedings of 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, Lake Buena Vista, Florida (USA), (1994) 433–437.

[44] Chen, J., D. Xu, B. Shafai, “On Sufficient Conditions for Stability Independent of Delay”, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–40 (9), (1995.a) 1675–1680.

[45] Chen, J., G. Gu., C. N. Nett, “A New method for Computing Delay Margins for Stability of Linear Delay Systems”, *Systems and Control Letters*, 26, (1995.b) 107–117.

[46] Chen, K. F., I. K. Fong, “Stability of Discrete–Time Uncertain Systems with a Time–Varying State Delay”, *Proc. IMechE*, Vol. 222, Part I: *J. Systems and Control Engineering*, (2008) 493–500.

[47] Chen, W. S., L. C. Jiao, *Automatica*, 46 (12), (2010) 2105–2108.

[48] Chen, W. S., L. C. Jiao, *Automatica*, 47 (7), (2011) 1544–1545.

[49] Cheng, C., Q. Zhao, “Reliable Control of Uncertain Delayed Systems with Integral Quadratic Constraints”, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, Vol. 151, No. 6, (2004).

[50] Cheres, E. Z., J. Palmor, S. Gutman, “Quantitative Measures of Robustness for Systems Including Delayed Perturbations”, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–34 (11), (1989) 1203–1204.

[51] Chiasson, J., “A Method For Computing the Interval of Delay Values For Which a Differential–Delay System is Stable”, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 33, (1988) 1176–1178.

[52] Chou, J. H., “Stability Robustness of Linear State Space Models with Structured Perturbations”, *Systems Control Lett.*, 15, (1990) 207–210.

[53] Chou, J. H., “Robustness of Pole–Assignment in Specified Circular Region for Linear Perturbed Systems”, *Systems Control Lett.*, Vol. 16, (1991) 41–44.

[54] Chou, J. H., S. J. Ho, I. R. Horng, “Robustness of Disk–Stability For Perturbed Large–Scale Systems”, *Automatica*, Vol. 28, (1992) 1063–1066.

[55] Chz–Han–Sy–In, “Stability of Motion on Finite–Time Interval”, *P. M. M.*, 23, (1959) 230–238.

[56] Coppel, W. A., *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D. C. Heat and Comp., Boston, 1965.

[57] Daoyi, X., "Simple Criteria For Stability of Interval Matrices", *Int. J. Control*, 41, (1985) 289–295.

[58] Debeljković, D. Lj., *Synthesis of Discrete Automatic Control on Finite Time Interval* (in Serbian), Ph. D. Thesis, Mechanical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, July, 1979.

[59] Debeljković, D. Lj., "Praktična stabilnost sa vremenom smirenja vremenski diskretnih sistema", *Tehnika*, (Yu), No. 10, (1979) 19–23.

[60] Debeljković, D. Lj., "Praktična stabilnost sa vremenom smirenja vremenski diskretnih sistema u slobodnom i prinudnom radnom režimu", *Tehnika*, (Yu), No. 1, (1980.a) 13–20.

[61] Debeljković, D. Lj., "Prilog proučavanju praktične nestabilnosti vremenski diskretnih sistema", *Tehnika*, (Yu), No. 2, (1980.b) 7–11.

[62] Debeljković, D. Lj., "Further Results in Finite Time Stability", *Proc. MELECON 83*, Athens (Greece), (1983) 475–478.

[63] Debeljković, D. Lj., *Dinamika objekata i procesa*, Građ. knjiga, Beograd, 1989.

[64] Debeljković, D. Lj., "Praktična stabilnost jedne klase vremenski diskretnih sistema", *Saopštenja MF*, (Yu), No. 1, (1993) 37–42.

[65] Debeljković, D. Lj., *Sistemi sa kašnjenjem*, GIP Kultura, Begrad, 1994.

[66] Debeljković, D. Lj., "On Practical Stability of Discrete Time Control Systems", *Proc. 3rd International Conference on Control and Applications*, Pretoria (South Africa), December, (2001) 197–201.

[67] Debeljković, D. Lj., *Stabilnost sistema automatskog upravljanja na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, Mašinski fakultet, Beograd, 2009.

[68] Debeljković, D. Lj., (Editor), *Time Delay Systems*, I–Tech, ISBN 978–953–307–559–4, Vienna (Austria), 2011.

[69] Debeljković, D. Lj., D. H. Owens, "On Practical Stability of Singular Systems", *Proc. Melecon Conf.* 85, Madrid (Spain), October, (1985) 103–105.

[70] Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, "Stability in the Sense of Lyapunov of Linear Discrete Time Delayed Systems", *Proc. HIPNEF* 2002, Niš (Yugoslavia), October 2–5, (2002) 325–332.

[71] Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, “Lyapunov and Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems“, *Proc. ACC* 03, Denver, Colorado (USA), June 4–6, (2003) 4450–4451.

[72] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, “A Short Note to the Lyapunov Stability of $\mathbf{x}(k+1) = A_0\mathbf{x}(k) + A_1\mathbf{x}(k-1)$”, *Proc. of* CDCOC, Shenyang (China), August 22–24, (2004) CD–Rom.

[73] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, “Systems, Structure and Control” – Editor Petr Husek, Chapter: “Asymptotic Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Delay Dependent Approach”, I – Tech, Vienna, (2008) 29–60.

[74] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, *Discrete Singular Control Systems*, Gip Kultura, Belgrade, 1988.

[75] Debeljković, D. Lj., V. Bajić, Z. Gajić, B. Petrović, “Boundedness and Existence of Solutions of Regular and Irregular Singular Systems”, *Publications of the Faculty of Electrical Eng*., Belgrade, Automatic control, No. 1, (1993) 69–78.

[76] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “Application of Singular System Theory in Chemical Engineering: Analysis of Process Dynamics”, *12th International Congress of Chemical and Process Eng*., *CHISA* 96, Prague (Czech Republic), *Process Eng. Publ*., ISBN 80–86059, August 25–30, 1996.a.

[77] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, *Continous Singular Control Systems*, Gip Kultura, Belgrade, 1996.b.

[78] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On Practical and Finite–Time Stability of Time–Delay Systems”, *Proc. ECC 97*, Brussels (Belgium), July 2–6, (1997.a) 307–311.

[79] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, “Finite Time Stability for the Metal Strip Cold Rolling”, *Proc. ASI: International Workshop on Automation in Steel Industry*, Kyongju (Korea), July 16–18, (1997.b) 233–238.

[80] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, “On Practical Stability of Time–Delay Systems: New Results”, *Proc. 2nd ASCC97*, Seoul (Korea), July 22–25, III, (1997.c) 543–546.

[81] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. Tomašević, “On Practical Stability of Time Delay System Under Perturbing Forces”, *Proc. AMSE 97*, Melbourne (Australia), October 29–31, (1997.d) 442–446.

[82] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc*. *CDC97*, San Diego, California (USA), December 21–23, (1997.e) 2771–2772.

[83] Debeljković, D. Lj., T. M. Peruničić, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, *Parametarske metode analize i sinteze sistema sa kašnjenjem*, GIP Kultura, Beograd, 1997.f.

[84] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A Jacić, "Further Results on Non–Lyapunov Stability of Time Delay Systems", *Proc. MELECON 98*, Tel Aviv (Israel), Vol. 1, May 18–20, (1998.a) 509–512.

[85] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Non–Lyapunov Stability Analysis of Linear Time Delay Systems", *Preprints DYCOPS 5, 5th IFAC Symposium on Dynamics and Process Systems*, Corfu (Greece), June 8–10, (1998.b) 549–553.

[86] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman–Gronwall Approach", *Proc. 1st IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France), July 6–7, (1998.c) 171–176.

[87] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, Đ. Koruga, "Finite Time Stability of Linear Discrete Descriptor Systems", *Preprints 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China), TS13, September 8–10, (1998.d) 1–5.

[88] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, Đ. Koruga, "Further Results on Non–Lyapunov Stability of Time Delay Systems", *Preprints 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation*, Shenyang (China), TS13, September 8–10, (1998.e) 6–10.

[89] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. Jacić, "Further Results on Non–Lyapunov Stability of Linear Systems with Delayed State", *Proc. XII Brazilian Automatic Control Conference*, IV, Uberlandia (Brasil), September 14–18, (1998.f) 1229–1233.

[90] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Stabilnost neautonomnih sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu", *Zbornik radova HIPNEF* 98, Beograd (Yugoslavia), Oktobar 28–30, (1998.g) 181–186.

[91] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Further Results on the Stability of Linear Nonautonomous Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. ECC 99*, Karlsruhe (Germany), August 31–September 3, (1999.a).

[92] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, "Finite Time Stability of Time Delay Systems", *IMA J. Math. Control and Information*, 16 (3), (1999.b) 101–111.

[93] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Further Results on the Stability of Linear Non–autonomous Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. ACC* 2000, Chicago, Illinois (USA), June 28–30, (2000.a) 1450–1451.

[94] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Further Results on the Stability of Linear Nonautonomous Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval", *Proc. APCCM*, Guilin (China), July 9–12, (2000.b).

[95] Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, Y. Y. Nie, Q. L. Zhang, "Lyapunov and Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Facta Universitatis*, (YU), *Series Mechanical Engineering*, Vol. 1, No. 9, (2002) 1147–1160.

[96] Debeljković, D. Lj., M. Aleksendrić, N. Yi–Yong, Q. L. Zhang, "Lyapunov and Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Proc. The Fourth Inter. Conference on Control and Automation,* , Montreal (Canada), June 9–12, (2003) 296–300.

[97] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, S. B. Stojanović, *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom i beskonačnom vremenskom intervalu*, Čigoja štampa, Beograd, 2004.a.

[98] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, "Discrete Time Delayed System Stability Theory in the Sense of Lyapunov: New Results", *Proc. ISIC* 2004, Taipei (Taiwan), September 1–4, (2004.b) CD–Rom.

[99] Debeljković, D. Lj., T. Nestorović, I. M. Buzurović, N. J. Dimitrijević, "A New Approach to the Stability of Time–Delay Systems in the Sense of Non–Lyapunov Delay–Independent and Delay–Dependent Criteria", *Proc*. of 8th *International Symposium on Intelligent Systems and Informatics*, Subotica, (Serbia), September 10–11, (2010.a), 213 – 218.

[100] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, "Further Results on the Stability of Linear Discrete Time Delay Systems over the Finite Time Interval: A Quite New Approach", *Scientific Science Review*, Serbia, Vol. LX, No. 2, (2010.b) 49–60.

[101] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, N. J. Dimitrijević, "On Finite Time and Practical Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *9th IEEE International Symposium on Intelligent Systems and Informatics (SISY)*, Subotica (Serbia), September 8–10, (2011.a) 119–124.

[102] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, T. Nestorović, S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, M. S. Aleksendrić, "Time Delayed System Stability Theory in the sense of Non–Lyapunov Delay Independent and Delay Dependent Approach: New Results", *IEEE Multi–Conference on Systems and Control*, No. 36, Denver, CO (USA), September 28–30, (2011.b) 1410–1417.

[103] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, D. Popov, "The Stability of Linear Discrete Time Delay Systems Over a Finite Time Interval: New Results", *The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation* (*WCICA* 2012), Beijing (Chine), July 6–8, (2012.a), accepted.

[104] Debeljković, D. Lj., S. B. Stojanović, N. J. Dimitrijević, D. Popov, "On Non–Lyapunov Stability of Linear Discrete Time Delay Systems: LMIs Approach", *The 10th World Congress on Intelligent Control and Automation* (*WCICA* 2012), Beijing (Chine), July 6–8, (2012.b), accepted.

[105] Dennis, J. E., J. F. Traub, R. P. Weber, “The Algebraic Theory of Matrix Polynomials”, *SIAM J. Numer. Anal.*, 13 (6), (1976) 831–845.

[106] Dennis, J. E., J. F. Traub, R. P. Weber, “Algorithms for Solvents of Matrix Polynomials”, *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 (3), (1978) 523–533.

[107] Desoer, C. A., M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input–Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.

[108] Dorato, P, “Short Time Stability of Linear Time–Varying Systems”, *IRE Trans. on Automat Cont.*, (6), (1961) 83–87.

[109] Driver, R. D., “Existence Theory for a Delay–Differential Systems”, *Contr. Diff. Eqs.*, 1, (1961) 317–366.

[110] Driver, R. D., “Existence and Stability of Solutions of Delay–Differential Systems”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 10, (1962) 410–426.

[111] Đurović, K., *Robusnost stabilnosti singularnih sistema*, Magistarski rad, Mašinski fakultet u Beogradu, 1996.

[112] El’sgol’ts, L. E., S. B. Norkin, *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, New York, 1973.

[113] Esfahani, S. H., S. O. R. Moheimani, I. R. Petersen, “LMI Approach Suboptimal Quadratic Guaranteed Cost Control For Uncertain Time–Delay Systems”, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, 145, (1998) 491–498.

[114] Feng, H., J. Hunsarg, “Stabilization of Nonlinear Singularly Perturbed Multiple Time Delay Systems by Dither”, *Trans. ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 118 (3), (1996) 177–181.

[115] Fridman, E., “New Lyapunov–Krasovskii Functionals For Stability of Linear Retarded and Neutral Type Systems”, *Systems and Control Letters*, Vol. 43, (2001) 309–319.

[116] Fridman, E., U. Shaked, “A Descriptor System Approach to H_∞ Control of Linear Time–Delay Systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 47, No. 2, (2002.a) 253–270.

[117] Fridman, E., U. Shaked, “H_∞ Control of Linear State Delay Descriptor Systems: An LMI Approach”, *Linear Algebra and its Applications*, 351–352, (2002.b) 271–302.

[118] Fridman, E., U. Shaked, "An LMI Approach to Stability of Discrete Delay Systems", *Proceedings of European Control Conference*, Cambridge, (2003).

[119] Fridman, E., U. Shaked, "Delay–Dependent H_∞ Control of Uncertain Discrete Delay Systems", *European Journal of Control*, Vol. 11, (2005.a) 29–37.

[120] Fridman, E., U. Shaked, "Stability and Guaranteed Cost Control of Uncertain Discrete Delay Systems", *Int. J. Control*, Vol. 78, No. 4, (2005.b) 235–246.

[121] Fu, M., H. Li, S. I. Niculescu, "Robust Stability and Stabilization of Time–Delay Systems via Integral Quadratic Constraint Approach", *Stability and Control of Time–Delay Systems*, (L. Dugard, E. Verriest, Eds.), Springer–Verlag, London, (1998) 101–116.

[122] Furukawa, K., S. B. Kim, "Pole–Assignment in a Specified Disk", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 32, (1987) 423–427.

[123] Gajić, Z., M. Qureshi, *Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control*, Academic Press, San Diego, 1995.

[124] Gantmacher, F., *The Theory of Matrices*, Vol. 1 and Vol. 2., Chelsea, New York, 1959.

[125] Gao, H., J. Lam, Y. Wang, "Delay–Dependent Output–Feedback Stabilization of Discrete–Time Systems with Time–Varying State Delay", *IEE Proc. Control Theory Applications*, Vol. 151, No. 6, (2004) 691–698.

[126] Gao, H., T. Chen, "New Results on Stability of Discrete–Time Systems with Time–Varying State Delay", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 52, (2007) 328–334.

[127] Gao, F., Z. Yuan, F. Yuan, *Adv. Inform. Sc. Serv. Sc.*, 3 (7), (2011) 1–9.

[128] Garrard, W. L., "Finite Time Stability in Control System Synthesis", *Proc. IFAC*, Warsaw, (1969) 21–29.

[129] Garcia, G., S. Tarbouriech, J. Bernussou, *IEEE Trans. Autom. Control*, 54, (2009) 364–369.

[130] Golub, G. H., C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, Jons Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[131] Goreckii, H., S. Fuksa, P. Grabowski, A. Korytowski, *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*, J. Wiley, New York, 1989.

[132] Gosiewski, A., A. W. Olbrot, *IEEE Trans. Automat.. Control*, AC–25, (1980) 729–732.

[133] Goubet–Bartholomeus, A., M. Dambrine, J. P. Richard, “Stability of Perturbed Systems with Time–Varying Delay”, *Systems and Control Letters*, Vol. 31, (1997) 155–163.

[134] Grippo, L., F. Lampariello, “Practical Stability of Discrete–Time Systems”, *J. Franklin Inst.*, 302 (3), (1976.a) 213–224.

[135] Grippo, L., F. Lampariello, “Practical Stability of Large–Scale Systems”, *Proc. IFAC Conf. Large–Scale Systems*, Udine (Italy), (1976.b) 195–201.

[136] Grippo, L., F. Lampariello, “Practical Stability of Large–Scale Discrete–Time Systems”, *Int. J. Syst. Sci.*, 9 (11), (1978) 1235–1246.

[137] Grujić, Lj. T., *Automatic Control System Synthesis of Rigid Body Motion through A Fluid*, M. Sc. Thesis (in Serbian), Electrical Eng. Dept., Univerity of Belgrade, Belgrade, October, 1970.

[138] Grujić, Lj. T., “On Practical Stability”, *5th Aslomar Conf. on Circ. and Syst.*, (1971) 174–178.

[139] Grujić, Lj. T., *Large–scale Systems Stability*, Ph. D. Thesis (in Serbian), Mechanical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, May, 1972.

[140] Grujić, Lj. T., “On Practical Stability”, *Int. J. Control*, 17 (4), (1973.a) 881–887.

[141] Grujić, Lj. T., “On Practical Stability of Automatic Control Systems”, *Symp. Mechanical Eng.* ‘1873–1973’, Belgrade, (1973.b) B.21–B.26.

[142] Grujić, Lj. T., *Large–scale Sysems Stability*, (in Serbian), Faculty of Mechanical Eng., Belgrade, 1974.

[143] Grujić, Lj. T., “Practical Stability with the Settling Time of Composite Systems”, *Automatika*, T. P. 9, (1975.a) 1–11.

[144] Grujić, Lj. T., “Uniform Practical and Finite–Time Stability of Large–Scale Systems”, *Int. J. Syst. Sci*., 6 (2), (1975.b) 181–195.

[145] Grujić, Lj. T., “Non–Lyapunov Stability Analysis of Large–Scale Systems on Time–Varying Sets”, *Int. J. Control*, 21 (3), (1975.c) 401–415.

[146] Grujić, Lj. T., “Novel Development of Lyapunov Stability of Motion”, *Int. J. Control*, 22 (4), (1975.d) 525–549.

[147] Grujić, Lj. T., "On Stability Domain of Singularly Perturbed Systems", *Proc. ETAN*, (1977.a) III.13–III.20.

[148] Grujić, Lj. T., "On Practical Stability of Large–Scale Systems", *Proc. ETAN*, (1977.b) III.301–III.307.

[149] Grujić, Lj. T., "Finite–Time Nonlinear Adaptive Control", *AIAA Journal*, 15 (3), (1977.c) 354–359.

[150] Grujić, Lj. T., "Uniquely Bounded Sets and Nonlinear Systems", *Proc. 1978 IEEE Conf. Decision and Control*, San Diego, (1979) 325–333.

[151] Grujić, Lj. T., D. D. Šiljak, "Stability of Large–Scale Systems with Stable and Unstable Systems", *Proc. JACC Conference*, California (USA), (1972.a).

[152] Grujić, Lj. T., D. D. Šiljak, "On Stability of Discrete Composite Systems", *Proc. Princeton Conf. on Information Science and Systems*, Priceton, March 23–24, (1972.b).

[153] Grujić, Lj. T., D. D. Šiljak, "Exponential Stability of Large–Scale Discrete Systems", *Int. J. Contr.,* Vol. 19, (1974) 481–491.

[154] Grujić, Lj. T., A. A. Martinjuk, M. Ribbens–Pavella, *Stability of Large Scale Systems under Structural and Singular Disturbances*, Naukova Dumka, Kiev, 1984.

[155] Gu, G., E. B. Lee, "Stability Testing of Time Delay Systems", *Automatica*, 25 (5), (1989) 777–780.

[156] Gu, K., Kharitonov, V. L., Chen, J., *Stability of Time–Delay Systems*, Burkhauser, Boston, 2003.

[157] Gunderson, R., "On Stability over a Finite Interval", *IEEE Trans. Automat. Cont*., AC–12 (5), (1967) 634–635.

[158] Gureckii, H., *Analiz i sintez sistem upravlenia s zapazdivaniem*, Mašinostroenie, Moskva, 1974.

[159] Gurman, V. I., G. N. Konstatinov, "Ocenka množestov dostižimosti upravljaemih sistem", v knjigi *Dinamičeskoe upravlenie*, Nauka, Moskva, (1979) 72–73.

[160] Hahn, W., *Theory and Application of Lyapunov's Direct Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1963.

[161] Hahn, W., *Stability of Motion*, Spinger–Verlag, Berlin, 1967.

[162] Halanay, A., *Differential Equations–Stability, Oscillations, Time Lags*, Academic Press, New York, 1996.

[163] Halanay, A., V. Rasvan, *Applications of Lyapunov Methods in Stability*, Kluwer, Dordrecht (The Netherlands), 1993.

[164] Hale, J. K, *Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1971.

[165] Hale, J. K, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1977.

[166] Han, Q. L., K. Gu, "On Robust Stability of Time–Delay Systems with Norm–Bounded Uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Control*, 46, (2001) 1426–1431.

[167] Han, Q. L., D. Yue, "Absolute Stability of Lur'e Systems with Time–Varying Delay", *IET Control Theory*, Vol. 1, (2007) 854–859.

[168] He, Y., M. Wu, J. H. She, G. P. Liu, "Parameter–Dependent Lyapunov Functional For Stability of Time–Delay Systems with Polytopic–Type Uncertainties", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 49, (2004) 828–832.

[169] Heinen, J. A., "Quantitative Stability of Discrete Systems", *Michigan Math. Journal*, (17), (1970) 211–215.

[170] Heinen, J. A., S. H. Wu, "Further Results Concerning Finite Time Stability", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, AC–14 (2), (1969) 211–212.

[171] Heinen, J. A., S. H. Wu, "Set Stability of Differential Equations", *Int. J. Syst. Sci*., 1 (3), (1971) 269–277.

[172] Hmamed, A., "On the Stability of Time Delay Systems: New Results", *Int. J. Control*, 43 (1), (1986.a) 321–324.

[173] Hmamed, A., "Stability Conditions of Delay–Differential Systems", *Int. J. Control*, 43 (2), (1986.b) 455–463.

[174] Hmamed, A., "A Matrix Inequality", *Int. J. Control*, 49, (1989) 363–365.

[175] Hmamed, A., "Further Results on the Delay–Independent Asyimptotic Stability of Linear Systems", *Int. J. Systems Sci.*, 22 (6), (1991) 1127–1132.

[176] Hmamed, A., "Further Results on the Robust Stability of Uncertain Time–Delay Systems", *Int. J. Syst. Sci.,* Vol. 22, (1991.a) 605–614.

[177] Hmamed, A., "Further Results on the Delay–Independent Asymptotic Stability of Linear Systems", *Int. J. Syst. Sci*., Vol. 22, (1991.b) 1127–1132.

[178] Horng, H. Y., J. H. Chou, I. R. Horng, "Robustness of Eigenvalue Clustering in Various Regions of the Complex Plane For Perturbed Systems", *International Journal of Control*, 57, (1993)1469–1484.

[179] Hsiao, F. H., "*D*–Stability Analysis For Discrete Uncertain Time–Delay Systems", *Appl. Math. Lett.*, 11, No. 2, (1998) 109–114.

[180] Hsien, T. L., C. H. Lee, "Exponential Stability of Discrete Time Uncertain Systems with Time–Varying Delay", *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 332–B, No. 4, (1995) 479–489.

[181] Huang, Y. P., K. Zhou, "Robust Stability of Uncertain Time–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, 45, (2000) 2169–2173.

[182] Huang, S., H. Shao, Z. Zhang, "Stability Analysis of Large–Scale System with Delays", *Systems & Control Letters*, Vol. 25, (1995) 75–78.

[183] Hurt, J., "Some Stability of Motion on Finite–Time Interval", *SIAM J. Num. Anal.*, 4 (4), (1967) 583–596.

[184] Ichihara, H., H. Katayama, *Proc. American Control Conf.*, St. Louis, Missouri (USA), June 10–12, (2009.a) 1171–1176.

[185] Ichihara, H., H. Katayama, *Joint 48th IEEE Conf. on Decision and Control* and *28th Chinese Control Conf.*, Shanghai (P. R. China), December 16–18, (2009.b) 3226–3231.

[186] Infante, E. F., W. B. Castelan, "A Lyapunov Functional for a Matrix Differential Equation", *J. Diff. Equat.*, 29 (3), (1978) 439–451.

[187] Jacić, Lj. A., D. Lj. Debeljković, S. B. Stojanović, M. B. Jovanović, S. A. Milinković, "Further Results on Asymptotic Stability of $\mathbf{x}(k+1)=A_0\mathbf{x}(k)+A_1\mathbf{x}(k-1)$", *HIPNEF* 2004, Vrnjačka Banja, 2004.

[188] Januševskii, R. T., *Upravlenie objektami s zapazdavaniem*, Nauka, Moskva, 1978.

[189] Jiang, D., *Proc. 6th International Symposium on Neural Networks on Advances in Neural Networks*, Wuhan (China), May, (2009) 522–531.

[190] Jiang, G. L., "Sufficient Condition For the Asymptotic Stability of Interval Matrices", *Int. J. Control*, Vol. 46, (1987) 1803–1810.

[191] Jiang, X., Q. L. Han, X. H. Yu, "Stability Criteria For Linear Discrete–Time Systems with Interval–Like Time–Varying Delay", *Proceedings of the American Control Conference*, New Orleans (USA), (2005) 2817–2822.

[192] Johnson, G. W., "On Lyapunov Stability vs Bounded Input–Bounded Output", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–9, (1969) 178–179.

[193] Jury, E. I., *Inners and Stability of Dynamics Systems*, Wiley, New York, 1974.

[194] Kalman, R. E., J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the 'Second Method' of Lyapunov, I–Continuous Time Systems", *Trans. AMSE J. Basic Eng.*, 82, June, (1960.a) 371–393.

[195] Kalman, R. E., J. E. Bertram, "Control System Analysis and Design via the 'Second Method' of Lyapunov, II–Discrete Time Systems", *Trans. AMSE J. Basic Eng.*, 82, June, (1960.b) 394–400.

[196] Kamen, E. W., "On the Relationship Between Zero Criteria for Two–variable Polynomials and Asymptotic Stability of Delay Differential Equations", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–25, (1980) 983–984.

[197] Kamen, E. W., "Linear Systems with Commensurate Time Delays: Stability and Stabilization Independent of Delay", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–27, (1982) 367–375.

[198] Kamen, E. W., "Correction to 'Linear Systems with Commensurate Time Delays: Stability and Stabilization Independent of Delay'", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–28, (1983) 248–249.

[199] Kamen, E. W., *Introduction to Signals and Systems*, MacMillan Publ. Company, New York, 1990.

[200] Kamenkov, G. V., "On Stability of Motion on Finite–Time Interval", *P. M. M.*, 17, (1953) 529–540.

[201] Kapila, V., W. M. Haddad, "Memoryless H_∞ Controllers For Discrete–Time Systems with Time Delay", *Automatica*, 34 (9), (1998) 1141–1144.

[202] Kayande, A. A., "A Theorem on a Contractive Stability", *SIAM J. Appl. Math.*, 21 (4), (1971) 601–604.

[203] Kayande, A. A., J. S. Wong, "Finite Time Stability and Comparison Principles", *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, (64), (1968) 749–756.

[204] Khalil, H. K., *Nonlinear Systems*, Mac–Millan Publ. Company, New York, 1990.

[205] Kim, J. H., *Numerical Methods for Solving a Quadratic Matrix Equation*, Ph. D. dissert., University of Manchester, Faculty of Science and Engineering, 2000.

[206] Kim, J. H., "Delay and Its Time–Derivative Dependent Robust Stability of Time–Delayed Linear Systems with Uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Control*, 46, (2001) 789–792.

[207] Kim, J. H., E. T. Jeung, H. B. Park, "Robust Control For Parameter Uncertain Delay Systems in State and Control Input", *Automatica*, 32(9), (1996) 1337–1339.

[208] Koepcke, R. W., "On the Control of Linear Systems with Pure Time Lag", *Trans. ASME J. Basic Eng.*, (3), (1965) 74–80.

[209] Kolla, S. R., J. B. Farison, "Analysis and Design of Controllers For Robust Stability of Interconnected Discrete Systems", *Proc. 1991 Amer. Contr. Conf.*, Boston, MA, (1991) 881–885.

[210] Kolla, S. R., R. K. Yedavalli, J. B. Farison, "Robust Stability Bounds on Time–Varying Perturbations for State Space Models of Linear Discrete–Time Systems", *Int. J. Control*, Vol. 50, No. 1, (1989) 151–159.

[211] Kolmanovkii, V. B., V. R. Nosov, *Ustoičivost i periodičiskii režimi reguliruemih sistem s posledeistviem*, Nauka, Moskva, 1981.

[212] Konstatinov, G. N., *O vivode dostatočnih uslova tehničeskoj ustoučivosti s pozicii teorii upravljenia*, v knjigi: Metod funkcii Ljapunova i ivo priloženia, Nauka, Novosibirsk, 1984.

[213] Krasovskii, N. N., "O Primeni Vtorovo Metoda Ljapunova dla Uravnenia s Zapazdivaniem Vremeni", *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, XX, (1956.a) 315–327.

[214] Krasovskii, N. N., "O Asimptotičeskoi Ustoičivosti Sistem s Posledejstviem", *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, XX, (1956.b) 513–518.

[215] Krasovskii, N. N., "On Periodical Solution of Differential Equations Involving a Time Lag", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 114, (1957) 252–255.

[216] Krasovskii, N. N., *Nekatorie zadači teorii ustoičivosti dviženia*, Nauka, Moskva, 1959.

[217] Krasovskii, N. N., *Problems in the Theory of Stability of Motion*, Stanford University Press, 1963.

[218] Kuržanskii, A. B., "K Zadače o Upravlenia dla Sistem Diferencijalnih Uravnenia s Zapazdivaniem", *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, (6), (1966) 1121–1124.

[219] Kushner, H. J., "On the Stability of Process Defined by Stochastic Difference–Differential Equations", *J. Differential Equations*, 5, (1968) 424–443.

[220] Kwon, O. M., Ju H. Park, "Guaranteed Cost Control For Uncertain Large–Scale Systems with Time–Delays via Delayed Feedback", Chaos, Solitons and Fractals, 27, (2006) 800–812.

[221] La Salle, S. Lefschet, *Stability by Lyapunov's Direct Method*, Academic Press, New York, 1961.

[222] Lakshmikantham, V., S Leela, *Differential and Integral Inequalities*, Vol 1, Academic Press, New York, 1969.

[223] Lam, L., L. Weiss, "Finite Time Stability with Respect to Time–Varying Sets", *J. Franklin Inst*., 9, (1974) 415–421.

[224] Lancaster, P., M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, 2nd Edition, Academic press, New York, 1985.

[225] Lashirer, A. M., C. Story, "Final–Stability with Applications", *J. Inst. Math. Appl*., 9, (1972) 379–410.

[226] Lazarević, M. P., *Sinteza Kalmanovog regulatora u sistemima automatskog upravljanja sa kašnjenjem,* Mag. teza, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 1993.

[227] Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, "Finite Time Stability Analysis of Linear Autonomous Fractional Order Systems with Delayed State", *Preprints 4th IFAC Workshop on Time Delay Systems,* Rocquencourt, Paris (France), September 10–12, (2003) CD–Rom.

[228] Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, "Finite Time Stability Analysis of Linear Autonomous Fractional Order Systems with Delayed State", *Asian Journal of Control*, Taiwan, Vol. 7., No. 4, (2005) 440 – 447.

[229] Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, "Finite Time Stability of Time Delay Systems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, Vol. 17, No. 3, (1999) 101–109.

[230] Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, "Finite Time Stability of Time Delay Systems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, (17), (2000) 101–109.

[231] Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, D. Krstić, *Optimalno upravljanje sistemima sa kašnjenjem u procesnoj industriji,* Tehnološko–metalurški fakultet, Beograd, 2003.

[232] Lebedev, A. A., "On the Problem of Stability of Motion on Finite–Time Interval", *P. M. M*., 18, (1954.a) 75–94.

[233] Lebedev, A. A., "On Stability of Motion on Prespecified–Time Interval", *P. M. M*., 18, (1954.b) 139–148.

[234] Lee, B., J. G. Lee, "Robust Stability and Stabilization of Linear Delayed Systems with Structured Uncertainty", *Automatica*, 35, (1999) 1149–1154.

[235] Lee, C. H, "D–Stability of Continuous Time–Delay Systems Subjected to a Class of Highly Structured Perturbations", *IEEE Trans. Automat. Contr*., Vol. 40, (1995) 1803–1807.

[236] Lee, C. H., T. L. Hsien, "Delay–Independent Stability Criteria for Discrete Uncertain Large–Scale Systems with Time Delays", *J. Franklin Inst*., Vol. 334B, No. 1, (1997.a) 155–166.

[237] Lee, C. H., T. L. Hsien, "New Sufficient Conditions For the Stability of Continuous and Discrete Time–Delay Interval Systems", *J. Franklin Inst*., Vol. 334B, No. 2, (1997.b) 233–240.

[238] Lee, C. H., T. H. S. Li, F. C. Kung, "*D*–Stability Analysis For Discrete Systems with a Time Delay", *Systems and Control Letters*, 19, (1992) 213–219.

[239] Lee, E. B., W. S. Lu, N. E. Wu, "A Lyapunov Theory for Linear Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–31 (3), (1986) 259–262.

[240] Lee, T. N., S. Diant, "Stability of Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–26 (4), (1981) 951–953.

[241] Lee, T. N., U. L. Radović, "General Decentralized Stabilization of Large–Scale Linear Continuous and Discrete Time Delay Systems", *Int. J. Control*, 46 (6), (1987) 2127–2140.

[242] Lee, T. N., U. L. Radović, "Decentralized Stabilization of Linear Continuous and Discrete Time Systems with Delays", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–33 (8), (1988) 757–761.

[243] Lee, T. T., S. H. Lee, "Discrete Optimal Control with Eigenvalues Assigned Inside a Circular Region", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* Vol. 31 (1986) 958–962.

[244] Lee, Y. S., W. H. Kwon, "Delay–Dependent Robust Stabilization of Uncertain Discrete–Time State–Delayed Systems", *Proceedings of the 15 IFAC Congress*, Barcelona, (2002).

[245] Lehtowski, N. A., D. Castanton, B. Levy, G. Stein, N. R. Sandell, N. Athans, "Robustness and Modelling Error Characterization", *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC–29, No. 3, (1984) 212–220.

[246] Leite, V., M. Miranda, "Robust Stabilization of Discrete–Time Systems with Time–Varying Delay: An LMI Approach", *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2008, Article ID 876509, (2008).

[247] Lewis, R. M., B. D. O. Anderson, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Independent Stability of Linear Autonomous Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–25, (1980) 735–739.

[248] Li, X., C. De Souza, "Delay–Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems: A Linear Matrix Inequality Approach", *IEEE Trans. on Automat. Control*, 42, (1997) 1144–1148.

[249] Lin, X., H. Du, S. Li, *Appl. Math. Comput*., 217, (2011) 5982–5993.

[250] Liu, H., Y. Shen, *Intell. Control Autom*., 2, (2011) 203–213.

[251] Liu, X. G., R. R. Martin, M. Wu, M. L. Tang, "Delay–Dependent Robust Stabilization of Discrete–Time Systems with Time–Varying Delay", *IEE Proc. Control Theory and Applications*, Vol. 153, No. 6, (2006) 689–702.

[252] Lyapunov, A. M., *General Problem of Stability of Motion*, Moscow, Leningrad, USSR Academy of Science, 1956.

[253] Mahmoud, M. S., "Robust H_∞ Control of Discrete Systems with Uncertain Parameters and Unknown Delays", *Automatica*, Vol. 36, (2000.a) 627–635.

[254] Mahmoud, M. S., "Linear Parameter–Varying Discrete Time–Delay Systems: Stability and 12–Gain Controllers", *Int. J. Control*, Vol. 73, No. 6, (2000.b) 481–494.

[255] Mahmoud, M. S., *Robust Control and Filtering for Time–Delay Systems*, Marcel–Dekker, New York, 2000.c.

[256] Malek–Zavarei, M., M. Jamshidi, *Time–Delay Systems*, North–Holland, Amsterdam, 1987.

[257] Malkin, I. G., *Theory of Stability of Motion*, AEC Trans. Department of Commerce, (USA), 1958.

[258] Marshall, J. E., *Control of Time–Delay Systems*, Peter Peregrinus, London, 1979.

[259] Mastellone, S., C. T. Abdallah, P. Dorato, *Proc. American Control Conf.*, Portland, OR (USA), June 8–10, (2005) 1239–1244.

[260] Matrosov, V. M., "On the Theory of Stability of Motion", *P. M. M.*, 26, (1962) 992–1002.

[261] Mehrotra, R. J., *Lyapunov Analysis of Systems with Transport Lag*, M. Tech. Disertation, Elec. Eng. Dept., Banaras Hindu Univ. Varanasi (India), 1977.

[262] Meyer, C. D., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, *SIAM*, Philadelphia, 2001.

[263] Michel, A. N., "On the Bounds of the Trajectories of Differential Systems", *Int. J. Control*, 10 (5), (1969) 593–600.

[264] Michel, A. N., "Stability, Transient Behavior and Trajectory Bounds of Interconnected Systems", *Int. J. Control*, 11 (4), (1970.a) 703–715.

[265] Michel, A. N., "Quantitative Analysis of Simple and Interconnected Systems: Stability, Boundedness and Trajectory Behavior", *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT–17 (3), (1970.b) 292–301.

[266] Michel, A. N., "Stability and Trajectory Behavior of Composite Systems", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, CAS–22 (45), (1975) 305–312.

[267] Michel, A. N., S. H. Wu, "Stability of Discrete Systems over a Finite Interval of Time", *Int. J. Control*, 9 (6), (1969) 679–693.

[268] Michel, A. N., D. W. Porter, "Practical Stability and Finite–Time Stability of Discontinuous Systems", *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT–19 (2), (1972) 123–129.

[269] Ming, Q., Y. Shen, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14, (2009) 1043–1049.

[270] Miškis, A. D., *Lineinie diferencijalnie uravnenia s zapazdajušćim argumentom*, Nauka, Moskva, 1972.

[271] Moheimani, S. O. R., I. R. Petersen, "Optimal Quadratic Guaranteed Cost Control of a Class of Uncertain Time–Delay Systems", *IEE Proc. Control Theory A*, 144, (1997) 183–188.

[272] Moiseev, N. D., "Survey of Non–Lyapunov Stability Theory Development", *Aero–Space Eng. Ac. N. E. Žukovski*, (1), (1948).

[273] Moon, Y. S., P. Park, W. H. Kwon, "Robust Stabilization of Uncertain Input–Delayed Systems Using Reduction Method", *Automatica*; Vol. 37, (2001) 307–312.

[274] Mori, T., "Criteria for Asymptotic Stability of Linear Time Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–30, (1985) 158–161.

[275] Mori, T., "Further Comments on 'Comments on "On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems"'", *Int J. Control*, 43 (5), (1986) 1613–1614.

[276] Mori, T., H. Kokame, "Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–34, (1989) 460–462.

[277] Mori, T., N, Fukuma, M. Kuwahara, "Simple Stability Criteria for Single and Composite Linear Systems with Time Delays", *Int. J. Control*, 34 (6), (1981) 1175–1184.

[278] Mori, T., N, Fukuma, M. Kuwahara, "On an Estimate of the Decay Rate for Stable Linear Delay Systems", *Int. J. Control*, 36 (1), (1982.a) 95–97.

[279] Mori, T., N. Fukuma, M. Kuwahara, "Delay–Independent Stability Criteria for Discrete–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC–27 (4) (1982.b) 946–966.

[280] Moulay, E., W. Perruquetti, *J. Math. Anal. Appl.*, 323, (2006) 1430–1443.

[281] Moulay, E., M. Dambrine, N. Yeganefar, W. Perruquetti, *Syst. Control Lett.*, 57, (2008) 561–566.

[282] Mukaidani, H., "An LMI Approach to Decentralized Guaranteed Cost Control For a Class of Uncertain Nonlinear Large–Scale Delay Systems", *J. Math. Anal. Appl.*, 300, (2004) 17–29.

[283] Müller, P. C., *Stabilität und matrizen: matrizen–verfahren in der stabilitäts–theorie linearer dynamischer systeme*, Springer, Berlin, 1977.

[284] Nazaroff, G. J., "Stability and Stabilization of Linear Differential Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–18, (1973.a) 317–318.

[285] Nazaroff, G. J., "Stability of Linear Stochastic Differential Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–18, (1973.b) 672–673.

[286] Nenadić, Z. Lj., *Sinteza kontinualnog automatskog upravljanja na konačnom vremenskom intervalu za objekte i procese sa kašnjenjem*, Dipl. rad, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 1995.

[287] Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Praktična stabilnost jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem", *Zbornik radova HIPNEF '96*, Vrnjačka Banja, Jun 5–7, (1996.a) 197–204.

[288] Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, "Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, *Tehnika–E*, 45 (11–12), (1996.b) E1–E7.

[289] Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, "On Practical Stability of Time Delay Systems", *Proc. American Control Conference*, Albuquerque, New Mexico (USA), June 4–6, (1997) 3235–3236.

[290] Niculescu, S. I., C. E. De Souza, J. M. Dion, L. Dugrad, "Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Systems with State Delay: Single Delay Case (I)", *Proc. IFAC Symp. Robust Control Design*, Rio de Janerio (Brazil), September, (1994).

[291] Niu, X., J. A. De Abreu–Garcia, E. Yaz, "Improved Bounds For Linear Discrete–Time Systems with Structured Perturbations", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37, (1992) 1170–1173.

[292] Novaković, B., *Regulacijski sistemi*, Liber, Zagreb, 1985.

[293] Novaković B., *Metode vođenja tenhičkih sistema*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.

[294] Oguztoreli, M. M., *Time Lag Control Systems*, Academic Press, New York, 1966.

[295] Ohta, Y., D. D. Šiljak, *Journal Math. Anal. Applic.*, (1984) 581.

[296] Owens, D. H., D. Lj. Debeljković, "Consistency and Lyapunov Stability of Linear Descriptor Systems: A Geometric Approach", *IMA Journal on Mathematical Control and Information*, 2, (1985) 139–151.

[297] Ozturk, N., "Stability Intervals For Delay Systems", *Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control*, Vol. 3, (1988) 2215–2216.

[298] Park, J. H., "On Design of Dynamic Output Feedback Controller For GCS of Large–Scale Systems with Delays in Interconnections: LMI Optimization Approach", *Applied Mathematics and Computation*, (2004.a).

[299] Park, J. H., "Robust Non–Fragile Guaranteed Cost Control of Uncertain Large–Scale Systems with Time–Delays in Subsystem Interconnections", *International Journal of Systems Science*, Vol. 35, No. 4, (2004.b) 233–241.

[300] Park, P., J. W. Ko, "Stability and Robust Stability For Systems with a Time–Varying Delay", *Automatica*; Vol. 43, (2007) 1855–1858.

[301] Patel, R. V., Toda, M., "Quantitive Measures of Robustness for Multivariable Systems", *Proc. Joint Contr. Conf.*, San Francisco, CA, (1980) TP8–A.

[302] Pereira, E., "On Solvents of Matrix Polynomials", *Applied numerical mathematics*, 47, (2003) 197–208.

[303] Petkovski, J., "Stability Analysis of Interval Matrices: Improved Bounds", *Int. J. Control,* Vol. 48, (1988) 2265–2273.

[304] Portasik, J., H. D'Angelo, "Short–Time Stability of Forced Linear Time–Varying Systems", *Proc. Midwest Circuit Symposium*, Midwest, May, (1968).

[305] Pyatniskii, E. S., "On the Structural Stability of Single–Loop Control Systems in the Presence of Lag", *Automation and Remote Control*, 23, (1962) 787–797.

[306] Pyatniskii, E. S., "The Upper Bound on the Degree of Stability for Time–Lag Systems", *Automation and Remote Control*, 24, (1963) 434–439.

[307] Rachid, A., "Robustness of Discrete Systems under Structured Uncertainties", *International Journal of Control*, 50, (1989) 1563–1566.

[308] Rachid, A., "Robustness of Pole Assignment in a Specified Region For Perturbed Systems", *International Journal of Systems Science*, 21, (1990) 579–585.

[309] Razumihin, B. S., "O Ustoičivosti Sistem s Zapazdivaniem", *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, 20, (1956) 510–512.

[310] Razumihin, B. S., "Stability in First Approximation of Systems with Lag", *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, 22, (1958) 155–166.

[311] Razumihin, B. S., "The Application of Lyapunov's Method to Problem in the Stability of Systems with Delay", *Automation and Remote Control*, 21, (1960) 515–520.

[312] Razumihin, B. S., "Metod Isledovania Ustoičivosti Sistem s Posledeistviem", *DAN SSSR*, 167 (6), (1966) 1234–1237.

[313] Razvan, V., *Absolutnaja ustoičivost avtomatičeskih sistem s zapazdivaniem*, Nauka, Moskva, 1983.

[314] Repin, Ju. M., “Kvadratične Funkcionali Ljapunova dlja Sistem s Zapazdivaniem”, *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, (3), (1965).

[315] Rouche, N., P. Haberts, M. Laloy, *Stability Theory by Lyapunov’s Direct Method*, Spinger Verlag, New York, 1977.

[316] Sampbell, S. L., *Singular Systems of Differential Equation*, Pitman, London, 1980.

[317] Sandell, R. N., *et al.*, “Survey of Decentralized Control Methods For Large Scale Systems”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. AC–23, (1978) 108–128.

[318] Sarić, B., “On Fundamental Matrix of Linear Time–Invariant Time–Delayed Singular Systems”, *SACTA*, Vol. 4, No.1, (2001) 11–25.

[319] Sarić, B., “Coditions for Convergence of the Fundamental Matrix of Linear Time–Invariant Time–Delayed Singular Systems”, *Int. J. of Math. and Math. Science*, Vol. 31, No.8, (2002) 463–475.

[320] Shanholt, G., “Set Stability for Difference Equations”, *Int. J. Control*, 10 (2), (1974) 309–314.

[321] Shang, Y., F. Gao, F. Yuan, *Int. J. Advancem. Comput. Technol.*, 3 (3), (2011) 192–198.

[322] Shi, P., R. K. Agarwal, E. K. Boukas, S. P. Shue, “Robust H_∞ State Feedback Control of Discrete Time–Delay Linear Systems with Norm–Bounded Uncertainty”, *Internat. J. Systems Sci.*, 31, (2000) 409–415.

[323] Shen, Y., *Control Decis.*, 23, (2008) 107–109.

[324] Shen, Y., L. Zhu, Q. Guo, *Proc. 4th international symposium on Neural Networks: Advances in Neural Networks*, Nanjing (China), Jun, (2007) 904–909.

[325] Shustin, E., E. Fridman, “On Delay–Derivative–Dependent Stability of Systems with Fast–Varying Delays”, *Automatica*, 43, (2007) 1649–1655.

[326] Smith, O. J., *Feedback Control Systems*, McGraw–Hill, New York, 1958.

[327] Soh, B., “Stability Margins of Continuous Time Interval Systems”, *Int. J. Systems Sci.,* Vol. 22, (1991) 1113–1119.

[328] Soh, Y. C., R. J. Evans, “Stability Analysis of Interval Matrices–Continuous and Discrete Systems”, *Int. J. Control*, Vol. 47, (1988) 25–32.

[329] Solodov, A. V., E. A. Solodova, *Sistemi s peremenim zapazdivaniem*, Nauka, Moskva, 1980.

[330] Song, S., J. Kim, C. Yim, H. Kim, "H_∞ Control of Discrete–Time Linear Systems with Time–Varying Delays in State", *Automatica*, Vol. 35, (1999) 1587–1591.

[331] Stojanović, S. B., *Analysis of Dynamic Behavior of Discrete Time–Delay Systems on Finite and Infinite Time Interval*, Ph. D. Thesis, University of Belgrade, Serbia, 2006.

[332] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delayed System", *7th Biennial ASME Conference Engineering Systems Design and Analysis*, *ESDA* 2004, Manchester (UK), July 19–22, (2004.a) CD–Rom.

[333] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Large Scale Time Delay Autonomous System", *7th Biennial ASME Conference Eng. Systems Design and Analysis*, *ESDA* 2004, Manchester (UK), July 19–22, (2004.b) CD–Rom.

[334] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *CDIC* 2004, Nanjing (China), August 18–20, (2004.c) CD–Rom.

[335] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On Stability of Perturbed Linear Discrete–Delay Systems with Multiple Delays", *CDIC* 2004, Nanjing (China), August 18–20, (2004.d) CD–Rom.

[336] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Large Scale Time Delay Autonomous System", *CDIC* 2004, Nanjing (China), August 18–20, (2004.e) CD–Rom.

[337] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, M. Lazić, V. Veljković, "*D*–stability Analysis of Time Delay Technological Systems with Multiple Time Delays", *Proc. CHISA* 2004, Prague (Czech Republic), Avgust 28–31, (2004.f) CD–Rom.

[338] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, M. Lazić, V. Veljković, "Stability of Time Delay Technological Systems with Nonlinear Perturbations", *Proc. CHISA* 2004, Prague (Czech Republic), Avgust 28–31, (2004.g) CD–Rom.

[339] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On Stability of Perturbed Linear Discrete–Delay Systems with Multiple Delays", *ICARCV* 2004, Kunming (China), December 06–09, (2004.h) CD–Rom.

[340] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *ICARCV* 2004, Kunming (China), December 06–09, (2004.i) CD–Rom.

[341] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Continuous Large Scale Time Delay Autonomous System", *Preprints* 2nd *IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Oaxaca (Mexico), December 8–10, (2004.j) CD–Rom.

[342] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Systems", *Facta Universitatis*, Vol. 2, No. 1, (2004.k) 25–48.

[343] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "The Sufficient Conditions for Stability of Continuous and Discrete Large–Scale Time Delay Interval Systems"**,** *The fifth International Conference on Control and Automation,* ICCA 05, Budapest (Hungary), June 26–29, (2005.a) 347–352.

[344] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "The Sufficient Conditions for Stability of Continuous and Discrete Large–Scale Time Delay Interval Systems"**,** *International Journal of Information & System Science,* (Canada), Vol. 1, No. 1, (2005.b) 61–74.

[345] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "On the Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 1, No. 3–4, (2005.c) 413–420.

[346] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Continuous Large Scale Time Delay Autonomous Systems", *Asian Journal of Control*, (Taiwan), Vol. 7., No. 4, (2005.d) 414–418.

[347] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Exponential Stability of Discrete Time Delay Systems with Nonlinear Perturbations", *8th Biennial ASME Conference Eng Systems Design and Analysis, ESDA* 2006, Torino (Italy), July 04–07, (2006), also in *Proc. Asian Control Conference* 2006, Bali (Indonesia), July 18–21, (2006.a) 1–4.

[348] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Further Results on Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 1, (2006.b) 117–123.

[349] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Exponential Stability of Discrete Time Delay Systems with Nonlinear Perturbations", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 2, No. 3, (2006.c) 428–435.

[350] Stojanović S. B., D. Lj. Debeljković, "Stability of Large Scale Linear Discrete Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions", *Proc. The 5th Edition of IFAC Knowledge and Technology Transfer Conf. Series on Automation for Buliding the Infrastructure in Developing Countries* (DECOM 2007), Cesme–Izmir (Turkey), May 17–19, (2007.a) CD–Rom.

[351] Stojanović S. B., D. Lj. Debeljković, "Delay–Dependent Criteria for Stability of Large–Scale Linear Discrete Time–Delay Systems", *Proc. European Control Conference* (*ECC*), Kos (Greece), July 2–5, (2007.b) CD–Rom.

[352] Stojanović S. B., D. Lj. Debeljković, "Simple Stability Criteria of Linear Discrete Time Delay Systems: Lyapunov–Krasovskii Approach", *Proc. European Control Conference* (*ECC*), Kos (Greece), July 2–5, (2007.c).

[353] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Necessary and Sufficient Conditions for Delay–Dependent Asymptotic Stability of Linear Discrete Time Delay Autonomous Systems", *Proc*. of 17th *IFAC World Congress*, Seoul (Korea), July 06–10, (2008.a) 2613–2618.

[354] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Delay–Dependent Stability of Linear Large Scale Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions", *International Journal of Information & System Science*, (Canada), Vol. 4, No. 2, (2008.b) 241–250.

[355] Stojanović, S. B, D. Lj. Debeljković, "Quadratic Stability and Stabilization of Uncertain Linear Discrete Time Systems with State Delay: A LMI Approach", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), Vol. 15, *Series B: Applications and Algorithms*, No. 2, (2008.c) 195–206.

[356] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Stability Criteria of Linear Discrete Time Delay Systems: Lyapunov–Krasovskii Approach", *Proc. ICIEA,* Xian (China), May 25–27, (2009.a) 2497–2501.

[357] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, "Delay–Dependent Stability of Linear Time Delay Systems: Necessary and Sufficient Conditions", *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, (Canada), *Series B: Applications and Algorithms*, Vol. 16, No. 6, (2009.b) 887–900.

[358] Stojanović, S. B., D. LJ. Debeljković, *Chem. Ind. Chem. Eng. Q*., 17 (4), (2011) 497−503.

[359] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, N. Dimitrijević, "Finite–Time Stability of Discrete–Time Systems with Time–Varying Delay", *Chemical Industry & Chemical Engineering Quarterly*, (2012.a), DOI:10.2298/CICEQ120126026S.

[360] Stojanović, S. B., D. Lj. Debeljković, N. Dimitrijević, "Delay–Dependent Stability of Discrete–Time Systems with Time–Varying Delay: Delay Decomposition Approach", *International Journal of Computers, Communications & Control*, Vol. 7, No. 4, (2012.b) 242–250.

[361] Su, H., J. Chu, "Robust H_∞ Control For Linear Time–Varying Uncertain Time–Delay Systems via Dynamic Output Feedback", *Internat. J. Systems Sci*., 30, (1999) 1093–1107.

[362] Su, J. H., I. K. Fong, C. L. Tseng, "Stability Analysis of Linear Sytems with Time Delay", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–39 (6), (1994) 1341–1344.

[363] Su, N. J., H. Y. Su, J. Chu, "Delay–Dependent Robust H_∞ Control For Uncertain Time–Delay Systems", *IEE Proc.Control Theory Appl*., Vol. 150, No. 5 (2003) 489–492.

[364] Su, T. J., C. G. Huang, "Robust Stability of Delay Dependence For Linear Uncertain Systems", *IEEE Trans*. *Automat*. *Control*, 37, (1992) 1656–1159.

[365] Su, T. J., W. J. Shyr, "Robust *D*–Stability For Linear Uncertain Discrete Time–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.,* 39, (1994) 425–428.

[366] Suh, I. H., Z. A. Bien, "A Note on Stability of Large–Scale Systems with Delays", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–27, (1982) 258–259.

[367] Sun, Y. J., "Sufficient Conditions for the Stability of Interval Systems with Multiple Time–Varying Delays", *Journal of mathematical analysis and applications*, 207, (1997) 29–44.

[368] Sun, Y. J., J. G. Hsieh, Y. C. Hsieh, "Exponential Stability Criterion for Uncertain Retarded Systems with Multiple Time–Varying Delays", *Journal of mathematical analysis and applications*, 201, (1996) 430–446.

[369] Šiljak, D. D., "On Large–Scale System Stability", *Proc. the Ninth Annual Alerton Conf. on Citcuit and System Theory*, Monticello, Illinois, October 6–8, (1971).

[370] Šimanov, S. N., "O Neustoičivosti Dviženia Sistem s Zapazdivaniem po Vremeni", *Prikladnaja Matematika i Mehanika*, 24, (1960) 55–63.

[371] Tang, G. Y., C. Li, L. Sun, "Optimal Tracking Control For Large–Scale Interconnected Systems with Time–Delays", *Computers and Mathematics with Applications*, (2007).

[372] Tchetaev, N. G., *Stability of Motion*, Gosthizdat, Moscow, 1955.

[373] Thompson, W. E., "Exponential Stability of Interconnected Systems", *IEEE Trans*., AC–15, No. 4, (1970) 504–506.

[374] Thowsen, A., "A Transformation for Stability Analysis of Linear Delay Systems", *Int. J. Syst. Sci.*, 13, (1982) 1371–1378.

[375] Tissir, E., A. Hmamed, "Stability Tests of Interval Time Delay Systems", *Systems and Control Letters*, 23, (1994) 263–270.

[376] Tissir, E., A. Hmamed, "Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$", *Automatica*, 32 (12), (1996) 1723–1726.

[377] Trinh, H., M. Aldeen, "*D*–Stability Analysis of Discrete–Delay Perturbed Systems", *International Journal of Control*, 61 (2), (1995.a) 493–505.

[378] Trinh, H., M. Aldeen, "Robust Stability of Singularly Perturbed Discrete–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Cont*., AC–40 (9), (1995.b) 1620–1623.

[379] Trinh, H., M. Aldeen, "On Robustness and Stabilization of Linear Systems with Delayed Nonlinear Perturbations", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 42, (1997.a) 1005–1007.

[380] Trinh, H., M. Aldeen, "A Memoryless State Observer for Discrete Time–Delay Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr*., AC–42 (11), (1997.b) 1572–1577.

[381] Tsao, T. C., "Simple Stability Criteria For Nonlinear Time–Varying Discrete Systems", *Syst. Contr. Lett*., Vol. 22, (1994) 223–225.

[382] Valeev, G. K., G. S. Finin, *The Construction of Lyapunov Functions*, Naukova Dumka, Kiev, 1981.

[383] Verriest, E. I., A. F. Ivanov, "Robust Stability of Delay–Difference Equations", *Proceedings of the 34th IEEE Conference Decision and Control*, New Orleans, LA, (1995) 386–391.

[384] Vicino, A., "Robustness of Pole Location in Perturbed Systems", *Automatica,* Vol. 25 (1989) 109–113.

[385] Višnjić, N., *Dinamička analiza linearnih diskretnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem*, Dipl. Rad., Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd, 2003.

[386] Vitacco, W. R., A. N. Michel, "Qualitative Analysis of Interconnected Dynamical Systems with Algebraic Loops: Well–Posedness and Stability", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, CAS–24 (11), (1977) 625–636.

[387] Walton, K., J. E. Marsall, "Direct Method for TDS Stability Analysis", *IEE Proc. Part D*, 134 (2), (1987) 101–107.

[388] Wang, J., J. Jian, P. Yan, *Proc. 6th International Symposium on Neural Networks on Advances in Neural Networks*, Wuhan (China), May, (2009) 395–404.

[389] Wang, S. S., "Further Results on Stability of $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{x}(t-\tau)$", *Systems and Control Letters*, 19, (1992) 165–168.

[390] Wang, S. S., W. G. Lin, "A New Approach to the Stability Analysis of Interval Systems", *Control Theory and Advanced Technology*, 7, (1991) 271–284.

[391] Wang, W. J., G. L. Mau, "Stabilization and Estimation for Perturbed Continuous Time–Delay Large–Scale Systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC–42, No. 9, (1997) 1277–1282.

[392] Wang, W. J., R. J. Wang, C. S. Chen, "Stabilization, Estimation and Robustness For Continuous Large Scale Systems with Delays", *Contr. Theory Advan. Technol.*, Vol. 10, No. 4, (1995) 1717–1736.

[393] Wang, X., M. Jiang, C. Jiang, S. Li, *Proc. 7th International Symposium on Neural Networks*, Shanghai (China), June, (2010) 611–618.

[394] Watson, J., A. Stubberud, "Stability of Systems Operating in a Finite Time Interval", *IEEE Trans. Automat. Cont*., AC–12, (1967) 116–120.

[395] Wei, J., "General Solution and Observabilty of Singular Differential Systems with Time Delay", *Automatica*, (2004).

[396] Wei, K., R. K. Yedavalli, "Robust Stabilizability For Linear Systems with Both Parameter Variation and Unstructured Uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Control*, 34, (1989) 149–156.

[397] Weiss, L., "Converse Theorems for Finite Time Stability", *Proc 1st Asilomar Conf. on Circ. and Syst.*, (1967) 1006–1014, also in *SIAM J. Appl Math*, 16 (6), (1968) 1319–1324.

[398] Weiss, L., "On Uniform and Uniform Finite Time Stability", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, AC–14 (3), (1969) 313–314.

[399] Weiss, L., "Controllability, Realization and Stability of Discrete–Time Systems", *SIAM J. Control*, 10 (2), (1972) 230–251.

[400] Weiss, L., E. F. Infante, "On the Stability of Systems Defined over a Finite Time Interval", *Proc. National Acad. Sci.*, 54, (1965) 44–48.

[401] Weiss, L., E. F. Infante, "Finite Time Stability under Perturbing Forces and on Product Spaces", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, AC–12, (1967) 54–59.

[402] Weiss, L., J. S. Lee, "Finite Time Stability of Linear Discrete–Time Systems", *Avt. Telem.*, (12), (1971) 63–68.

[403] Weiss, L., L. Lam, "Stability of Non–Linear Discrete–Time Systems", *Int. J. Control*, 17 (3), (1973) 465–470.

[404] Wu, M., Y. He, J. H. She, G. P. Liu, "Delay–Dependent Criteria For Robust Stability of Time–Varying Delay Systems", *Automatica*, Vol. 40, (2004) 1435–1439.

[405] Xia, Y., Y. Jia, "Robust Control of State Delayed Systems with Polytrophic Type Uncertainties via Parameter–Dependent Lyapunov Functionals", *Systems Control Lett.*, 50 (2003) 183–193.

[406] Xu, B., "On Delay–Independent and Stability of Large–Scale Systems with Time Delays", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 40, (1995) 930–933.

[407] Xu, B., Y. Liu, "An Improved Razumikhin–Type Theorem and its Applications", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–39 (4), (1994) 839–841.

[408] Xu, S., C. Yang, "An Algebraic Approach to the Robust Stability Analysis and Robust Stabilization of Uncertain Singular Systems", *Int. J. System Science*, Vol. 31, (2000.a) 55–61.

[409] Xu, S., C. Yang, "H_∞ State Feedback Control for Discrete Singular Systems", *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–45 (6), (2000.b) 1405–1409.

[410] Xu, S., J. Lam, "Improved Delay–Dependent Stability Criteria For Time–Delay Systems", *IEEE Transactions on Automatic Control,* Vol. 50, No. 3, (2005) 384–387.

[411] Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Quadratic Stability and Stabilization of Uncertain Linear Discrete–Time Systems with State Delay", *Systems Control Lett*., 43, (2001.b) 77–84.

[412] Xu, S., P. Dooren, R. R. Stefan, J. Lam, "Robust Stability and Stabilization for Singular Systems with State Delay and Parameter Uncertainty", *IEEE Trans. Automat. Contr*., Vol. 47, (2002) 1122–1126.

[413] Xu, S., J. Lam, C. Yang, "Robust H_∞ Control for Discrete Singular Systems with State Delay and Parameter Uncertainly", *Journal of Dymanics Continous, Discrete and Impilsive Systems*, (2003).

[414] Xu, S., J. Lam, Y. Zou, "Improved Conditions For Delay–Dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Discrete Time–Delay Systems", *Asian Journal of Control*, Vol. 7, No. 3, (2005) 344–348.

[415] Yang, T., "Comments on Delay–independent Stability Criteria for Discrete Uncertain Large–Scale Systems with Time Delays", *J. Franklin Inst*., Vol. 335B, No. 6, (1998) 1087–1088.

[416] Yasuda, K, K. Hirai, *IEEE Trans. Autom. Contr*., Vol. AC–24, (1979) 483–491.

[417] Yaz, E., Niu, X., "Stability Robustness of Linear Discrete–Time Systems in the Presence of Uncertainty", *Int. J. Contr.,* 50, No. 1, (1989) 173–182.

[418] Yedavalli, R. K., "Improved Measures of Stability Robustness for Linear State Space Models", *IEEE Trans. Autom. Contr*., Vol. AC–30, No. 6, (1985) 577–579.

[419] Yedavalli, R. K., "Stability Analysis of Interval Matrices: Another Sufficient Condition", *Int. J. Control,* Vol. 43, (1986) 767–772.

[420] Yedavalli, R. K., "Robust Root Clustering For Linear Uncertain Systems Using Generalized Lyapunov Theory", *Automatica*, 29, (1993) 237–240.

[421] Yedavalli, R. K., Liang, Z., "Reduced Conservatism in Stability Robustness Bounds by State Transformation", *IEEE Trans. Autom. Contr*., Vol. AC–31, No. 9, (1986) 863–866.

[422] Yongru, G., S. Wang, Q. Li, Z. Cheng, J. Qain, “On Delay–Dependent Stability and Decay Estimate for Uncertain Systems with Time–Varying Delay”, *Automatica*, 34 (8), (1998) 1035–1039.

[423] York, J. A., “Asymptotic Stability for One–Dimensional Differential Delay Equations”, *J. Diff. Equations*, 7, (1970) 189–202.

[424] Yoshizawa, T., “Stability and Boundedness of Systems”, *Arc. Rational Mach. Analysis*, 6, (1960) 404–421.

[425] Yoshizawa, T., *Stability Theory by Lyapunov’s Second Method*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

[426] Youla, D., “On the Stability of Linear Systems”, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, CT–10, (1963) 276–279.

[427] Yue, D., Q. L. Han, “A Delay–Dependent Stability Criterion of Neutral Systems and Its Application to a Partial Element Equivalent Circuit Model”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems–II*, Vol. 51, No. 12, (2004) 685–689.

[428] Yue, D., Q. L. Han, “Delayed Feedback Control of Uncertain Systems with Time–Varying Input Delay”, *Automatica*, 41, (2005) 233–240.

[429] Yue, D., E. Tian, Y. Zhang, “A Piecewise Analysis Method to Stability Analysis of Linear Continuous/Discrete Systems with Time–Varying Delay”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 19, (2009) 1493–1518.

[430] Zeng, X. J., “Robust Stability For Linear Discrete–Time Systems with Structured Perturbations”, *Internat. J. Control*, 61, (1995) 739–748.

[431] Zhang, X. M., Q. L. Han, “A Delay Decomposition to Delay–Dependent Stability For Linear Systems with Time–Varying Delays”, *International Journal of robust and nonlinear control*, 19, (2009) 1922–1930.

[432] Zheng, Y. S., W. S. Chen, L. Wang, *Int. J. Control*, 84 (10), (2011) 1644–1652.

[433] Zhou, K., Khargonekar, P. P., “Stability Robustness Bounds for Linear State–Space Models with Structured Uncertainty”, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC–32, No. 7, (1987) 621–623.

[434] Zhu, L., Y. Shen, C. Li, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 14, (2009) 361–370.

[435] Zhu, W., Z. Yi, “Integral Input–To–State Stability of Nonlinear Control Systems with Delays”, *Chaos*, *Solitons and Fractals*, (2006).

[436] Zhu, X. L., G. H. Yang, “New Results of Stability For Systems with Time–Varying Delay”, *International Journal of robust and nonlinear control*, 20, (2010) 596–606.

XIV PRILOZI

PRILOG A – Oznake

OSNOVNE OZNAKE

$A_{(\cdot)}$	matrica sistema, objekta ili procesa, matrica
A	alternativna matrica sistema
$\mathbb{A}$	metrički prostor
a	elementi matrice A, koeficijenti karakterističnog kvazipolinoma
$a(t)$	funkcija
B	matrica upravljanja, matrica
b	elementi matrice upravljanja, koeficijent, konstanta
$\mathbf{b}$	vektor upravljanja
$b(t)$	funkcija
C	matrica, matrica izlaza, konstanta, dopuna skupu
$\mathrm{C}^{(\cdot)}$	skup vremenskih neprekidnih, diferencijabilnih funkcija
c	elementi matrice C, konstanta, koeficijent

$c(t)$	funkcija
D	matrica direktne veze ulaza i izlaza, dijagonalna matrica
$\mathscr{D}$	domen
D	skup
d	dijametar skupa
$\mathcal{E}$	operator
e	elementi matrice E
F	matrica
$\mathbb{F}$	matrica pratilja
F	skup
$\mathcal{F}$	polje
$F(j\omega)$	frekventna karakteristika
f	elementi matrice F, konstanta
$\mathbf{f}(\cdot)$	vektorska funkcija
$f(s)$	karakteristični polinom
G	matrica
G	skup

g	elementi matrice G
$g(t)$	odskočni odziv, funkcija
H	pozitivno određena matrica, *Ermitte*–ova matrica
H	skup
h	elementi matrice H, mala pozitivna veličina
$h(t)$	odskočna funkcija
I	jedinična matrica
$I(t,\tau)$	matrica impulsnih odziva
$i(t)$	impulsni odziv
j	tekući indeks
$\mathcal{K}$	diskretni vremenski interval
k	diskretni vremenski trenutak, konstanta, eksponent, tekući indeks
L	matrica, *Lipschitz*–ova konstanta
L	skup
$\mathcal{L}^n_{(\cdot)}$	normirani vektorski prostor sa pridruženom normom
l	elementi matrice L, tekući indeks
ℓ	neka dužina
M	matrica, pozitivno određena matrica
M	skup, linearna višestrukost
$M(t)$	funkcija
m	elementi matrice M, eksponent
$m(t)$	funkcija
N	nilpotentna matrica
$\mathbb{N}(\ )$	nelinearnost, ceo pozitivan broj
n	red sistema, dimenzionalnost, tekući indeks
P	matrica, pozitivno određena matrica, *Ermitte*–ova matrica
P	skup
p	elementi matrice P, operator, tekući indeks
$\mathbf{p}$	vektor
Q	matrica, pozitivno određena matrica
Q	skup
$\mathfrak{Q}$	domen
q	elementi matrice Q, prirodan broj, tekući indeks
$\mathbf{q}$	vektor
$q(s)$	polinom
R	matrica, pozitivno određena matrica
R	skup
$\mathrm{Re}(\ )$	realni deo od $(\ )$
r	elementi matrice R, tekući indeks
$r(s)$	polinom
S	skup
$\mathbb{S}$	skup, invarijantni skup

s	kompleksno promenljiva, element skupa $\mathsf{S}_{(\ )}$
T	matrica, matrica transformacije, konačan vremenski interval
T	skup
t	vreme
U	matrica
U	skup
$\mathcal{U}$	univerzalni skup
$\mathbf{u}(t)$	vektor upravljanja
V	matrica
V	skup
$V(\ ,\ )$	Ljapunovljeva funkcija
$\mathcal{V}$	prostor
$\mathbf{v}$	vektor
W	matrica
$W(\ ,\ )$	Ljapunovljeva funkcija
$\mathcal{W}$	prostor
$W(s)$	matrica prenosnih funkcija
$\mathcal{X}$	linearni vektorski prostor, skup
$x(t)$	veličina stanja
$\mathbf{x}(t)$	vektor stanja
$\mathbf{x}_i(t)$	vektor izlaza
$\mathbf{y}(t)$	vektor
Z	matrica
Z	skup
$\mathbf{z}(t)$	vektor poremećaja

α	realan, pozitivan broj
β	realan, pozitivan broj
Γ	posebna osobina
$\Gamma(t)$	funkcija
γ	realan pozitivan broj, realan broj, konstanta
$\gamma(t)$	funkcija
δ	realan pozitivan broj
δ_{ij}	*Kronecker*–ov simbol
$\delta(t)$	*Dirac*–ova funkcija
Δ	najveće vremensko kašnjenje u sistemu, konačna razlika
ε	realan pozitivan broj
ζ	stepen prigušenja
$\xi(t)$	skalarna funkcija
ν	realan pozitivan broj, promenljiva, tekući indeks
θ	čisto vremensko kašnjenje, promenljiva, tekući indeks
$\vartheta(\ )$	skalarna funkcija,
κ	promenljiva, konstanta, tekući indeks
$\kappa(t)$	skalarna funkcija
Λ	matrica
$\Lambda(\ )$	maksimalna sopstvena vrednost matrice $(\ )$
λ	sopstvena vrednost matrice
μ	tekući indeks
$\mu(\ )$	matrična mera

η	promenljiva, tekući indeks
$\rho(\ )$	spektralni radijus matrice
$\rho(,)$	metrika datog prostora
ρ	realan pozitivan broj, konstanta
$\rho(t)$	skalarna funkcija
Π	simetrična, pozitivno određena matrica
π	*Ludolof*–ov broj
$\wp$	parameter, konstanta
$\mathit{\Sigma}$	invarijantni skup
Σ	*Banach*–ov prostor
σ	realni deo kompleksnog broja
$\sigma(\ )$	singularna vrednost matrice
$\sigma\{\ \}$	spektar sopstvenih vrednosti
$\Im$	skup, kontinualni vremenski interval
$\Im_{(\cdot)}$	trajektorija
τ	čisto vremensko kašnjenje
$\varphi(t)$	skalarna funkcija
$\varphi_{(\ )}(t)$	početna funkcija
$\varphi(\omega)$	fazno–frekventna karakteristika
$\Phi(t)$	fundamentalna matrica
$\Phi(s)$	rezolventna matrica
$\phi(t)$	funkcija
$\Omega\{\ \}$	spektar sopstvenih vrednosti
ω	učestanost

POSEBNE OZNAKE

[ ]	zatvoren interval
] [	otvoren interval
$\wedge$	i
$\vee$	ili
$\veebar$	isključivo ili
$\rightarrow$	preslikava
$\Rightarrow$	sledi
$\Leftrightarrow$	ako i samo ako
$\forall$	za svako
$\exists$	postoji
$\exists!$	postoji barem jedan
$\neg\exists$	ne postoji
:	koji ima osobinu
$\ni$	tako da
$\mid$	tako da
$\in$	pripada
$\notin$	ne pripada
{ }	skup, sekvenca, niz
$\cup$	unija skupa
$\cap$	presek skupova
$\subset$	podskup
\	razlika skupova
Δ	simetrična razlika
~	ekvivalentni skupovi
$\partial(\cdot)$	granica skupa
$(\cdot)$	otvoren skup
$\overline{(\cdot)}$	zatvoren skup
$(\cdot)^c$	komplement skup
$\operatorname{int} S$	unutrašnjost skupa S
$\varnothing$	prazan skup
$\triangleq$	po definiciji
Δ	konačna potonja razlika
∇	posebno značenje, simbol
$\bullet$	skalarni proizvod vektora

$\times$	proizvod
$*$	konvolucija
$\sum$	suma
Π	proizvod
$\otimes$	*Kronecker*–ov proizvod
$\oplus$	direktna suma
$\lvert(\cdot)\rvert$	amplituda, apsolutna vrednost
$\lVert(\cdot)\rVert$	norma
grad	gradijent
det	determinanta
exp	eksponent
inf	infinum
max	maksimum
min	minimum
sup	supremum
$\mathbb{C}^{(\cdot)}$	$(\cdot)$ dimenzionalni kompleksni vektorski prostor
$\mathbb{C}$	skup svih kompleksnih brojeva
$\aleph(\ )$	nulti prostor matrice $(\ )$
$\Re(\ )$	područje vrednosti matrice $(\ )$
$\mathbb{R}$	skup svih realnih brojeva
$\mathbb{R}^{(\cdot)}$	$(\cdot)$ dimenzionalni realni vektorski prostor
degree	stepen polinoma
$\det(\ )$	determinanta matrice $(\ )$
$diag\{\ \}$	dijagonalna matrica $\{\ \}$
$Ind(\ )$	indeks matrice $(\ )$
$rang(\ )$	rang matrice $(\ )$
$tr(\ )$	trag matrice $(\ )$
$\mathcal{L}\{\ \}$	Laplasova transformacija

DONJI INDEKSI

es	estimirano, procenjeno
i	izlaz
kr	krajnje
N	krajnja vrednost
0	početna vrednost
p	neka proizvoljna vrednost, poremećeno
$p\check{c}$	početno
r	ravnotežno
S	skup
sm	vreme smirenja
t	vremensko
u	ulaz
$\check{z}$	željeno
*	neka posebna vrednost

GORNJI INDEKSI

*	konjugovano–kompleksna transponovana vrednost, neka posebna vrednost
D^+	gornji desni *Dini*–jev izvod
D_+	donji desni *Dini*–jev izvod
T	transpozicija
un	unutrašnjost skupa
-1	inverzija
$\dot{(\cdot)}$	izvod po vremenu
$(\cdot)^k$	*k*–ti izvod po vremenu

Biografija

Ime i prezime:	Nebojša Dimitrijević
Datum rođenja:	21.05.1973.
Mesto rođenja:	Vranje, Srbija
Porodično stanje:	Oženjen, jedno dete

Obrazovanje:

1980. – 1988.	Osnovna škola "Radoje Domanović" u Vranju
1988. – 1992.	Gimnazija "Bora Stanković" u Vranju
1992. – 1997.	Studije na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Automatsko upravljanje, prosečna ocena tokom studija 8,43 (osam i 43/100)
1998.	Odbranio diplomski rad na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu na temu "Primena parametarskih metoda u analizi i sintezi dinamičkog ponašanja sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu", sa ocenom 10 (deset), kod profesora Dr. Dragutina Lj. Debeljkovića
1998. – 2000.	Postdiplomske studije na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Automatsko upravljanje
2009.	Odbranio magistarski rad na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu na temu "Dinamička analiza i stabilizacija vremenski kontinualnih linearnih singularnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem", kod profesora Dr. Dragutina Lj. Debeljkovića
2010. –	Podneo zahtev za izradu doktorske disertacije na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, smer Automatsko upravljanje

Posao:

2000. – 2010.	"Alfa Plam", Vranje
2010. –	Visoka škola primenjenih strukovnih studija, Vranje

Prilog 1.

Izjava o autorstvu

Potpisani-a Nebojša Dimitrijević

broj indeksa

Izjavljujem

da je doktorska disertacija pod naslovom

DINAMIČKA ANALIZA POSEBNIH KLASA SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

- rezultat sopstvenog istraživačkog rada,
- da predložena disertacija u celini ni u delovima nije bila predložena za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih visokoškolskih ustanova,
- da su rezultati korektno navedeni i
- da nisam kršio/la autorska prava i koristio intelektualnu svojinu drugih lica.

Potpis doktoranda

U Beogradu, 25.04.2012.

Н Димитријевић

Prilog 2.

Izjava o istovetnosti štampane i elektronske verzije doktorskog rada

Ime i prezime autora Nebojša Dimitrijević

Broj indeksa ______

Studijski program ______

Naslov rada DINAMIČKA ANALIZA POSEBNIH KLASA SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

Mentor Dr Dragutin Debeljković, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet

Potpisani/a Nebojša Dimitrijević

Izjavljujem da je štampana verzija mog doktorskog rada istovetna elektronskoj verziji koju sam predao/la za objavljivanje na portalu **Digitalnog repozitorijuma Univerziteta u Beogradu.**

Dozvoljavam da se objave moji lični podaci vezani za dobijanje akademskog zvanja doktora nauka, kao što su ime i prezime, godina i mesto rođenja i datum odbrane rada.

Ovi lični podaci mogu se objaviti na mrežnim stranicama digitalne biblioteke, u elektronskom katalogu i u publikacijama Univerziteta u Beogradu.

Potpis doktoranda

U Beogradu, 25.04.2012.

Н Димитријевић

Prilog 3.

Izjava o korišćenju

Ovlašćujem Univerzitetsku biblioteku „Svetozar Marković“ da u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu unese moju doktorsku disertaciju pod naslovom:

DINAMIČKA ANALIZA POSEBNIH KLASA SISTEMA SA ČISTIM VREMENSKIM KAŠNJENJEM

koja je moje autorsko delo.

Disertaciju sa svim prilozima predao/la sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje.

Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni repozitorijum Univerziteta u Beogradu mogu da koriste svi koji poštuju odredbe sadržane u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se odlučio/la.

1. Autorstvo

2. Autorstvo - nekomercijalno

3. Autorstvo – nekomercijalno – bez prerade

4. Autorstvo – nekomercijalno – deliti pod istim uslovima

5. Autorstvo – bez prerade

6. Autorstvo – deliti pod istim uslovima

(Molimo da zaokružite samo jednu od šest ponuđenih licenci, kratak opis licenci dat je na poleđini lista).

Potpis doktoranda

U Beogradu, 25.04.2012.

Н Јовановић

1. Autorstvo - Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence, čak i u komercijalne svrhe. Ovo je najslobodnija od svih licenci.

2. Autorstvo – nekomercijalno. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

3. Autorstvo - nekomercijalno – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela. U odnosu na sve ostale licence, ovom licencom se ograničava najveći obim prava korišćenja dela.

4. Autorstvo - nekomercijalno – deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca ne dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada.

5. Autorstvo – bez prerade. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, bez promena, preoblikovanja ili upotrebe dela u svom delu, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela.

6. Autorstvo - deliti pod istim uslovima. Dozvoljavate umnožavanje, distribuciju i javno saopštavanje dela, i prerade, ako se navede ime autora na način određen od strane autora ili davaoca licence i ako se prerada distribuira pod istom ili sličnom licencom. Ova licenca dozvoljava komercijalnu upotrebu dela i prerada. Slična je softverskim licencama, odnosno licencama otvorenog koda.