UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Mirna Udovičić

Algebarska analiza nekih klasa fazi uređenih struktura

-doktorska disertacija-

Novi Sad, 2014.

Sadržaj

Uvod....4

Glava 1. Uređene strukture....9
1.Uređeni skup....9
2.Neki primeri mreža i kompletnih mreža....13
3.Operator zatvaranja....14
4.Podmreža....16
5.Heyting mreža....19
6.Homomorfizam i izomorfizam....20
7.Kongruencije....20
8.Ideali....21

Glava 2 Uređene grupe....23
1.Grupa....24
2.Pozitivan i negativan konus....25
3.Konveksne podgrupe....29
4.Mrežno uređena grupa....31
5.Konveksne l-podgrupe....35

Glava 3 Rasplinuti podskupovi i rasplinuta relacija....37
1.P-rasplinuti podskup, L-rasplinuti podskup....37
2.Funkcije nivo-podskupova kao izotona preslikavanja....44
3.Rasplinuta relacija....46

Glava 4 Rasplinute uređene strukture....49
1.Rasplinuti podposet....49
2.Rasplinuti poset sa rasplinutim uređenjem....54
3.Struktura skupa relacija slabog rasplinutog poretka na $(P, \leqslant)$....58
4.Rasplinuto uređenje i rasplinuta mreža....59
5.Kompatibilnost....62
6.Rasplinuta podgrupa....62
7.Rasplinute podgrupe određene nivo-podgrupama....68
8.Prethodni pristupi rasplinutim uređenim grupama....72

9.Rasplinuta uređena podgrupa..76
10.Rasplinuti konus...79
11.Rasplinute mrežno uređene grupe...82
12.Rasplinuta podgrupa količničke grupe...84
13.Zaključak..91

Literatura...92

Uvod

Definiciju rasplinutog skupa (fazi skupa) je prvi put uveo Zadeh 1965. godine, kao preslikavanja iz nepraznog skupa u interval [0,1]. Od tada je prisutno veliko interesovanje za ovaj pojam, ne samo u teoriji, nego i u inžinjerstvu i u računarstvu; u teoriji (problemima) fazi kontrole.

Rasplinuti skup, odnosno funkciju čiji je domen neprazan skup i kod koga je skup istinitosnih vrednosti (kodomen preslikavanja) kompletna mreža, u oznaci L, uveo je Goguen u radu [53]. Često se uzima da je L neki specijalan tip mreže, na primer realan interval [0,1], Bulova mreža, reziduirana mreža itd. Važna literatura iz ove oblasti predstavlja literatura autora Negoita i Ralescu; možemo istaći knjigu [76] istih autora. Uvod u teoriju rasplinutih skupova izložen je u [76], zatim osnove rasplinute logike i slično.

U poslednje dve decenije, rezultate iz navedene oblasti dali su, pored ostalih i matematičari iz Kine. Možemo istaći knjigu [66] čiji su autori Y.M.Liu i M.K.Luo. Oni su se najviše bavili rasplinutom topologijom: rasplinuta topologija može biti definisana pomoću operatora otvorenja, ili pomoću operatora zatvaranja. Na ovaj način, mogu se definisati objekti u prostoru, gde su operator otvaranja i operator zatvaranja definisani pomoću odgovarajućih nivo-struktura.

Pojam rasplinute relacije na skupu prvi je definisao Zadeh [106], kao i mnogi drugi autori (S.Tamura se takođe dalje bavio ovim pojmom u radu [101]). U poslednjoj deceniji, radove iz ove oblasti objavio je Bělohlávek. Polazeći od pojmova rasplinute ekvivalencije, rasplinute jednakosti, Bělohlávek je dalje proučavao algebre sa rasplinutom jednakošću u knjizi [7]. Nedavno važne rezultate iz oblasti rasplinutog uređenja dali su De Baets, U.Bodenhofer, J.Fodor u [20]. Pojam rasplinute kongruencije na grupi proučavao je Kuroki ([64]) i takođe su se istom bavili Filep i Maurer [49], i Murali [73] u univerzalnoj algebri.

Rasplinute algebarske strukture se istražuju od samog početka fazi ere. Definiciju rasplinute podgrupe uveo je Rosenfeld 1971. godine, u radu [83]. Rosenfeld je takođe koristio pojam rasplinutog podgrupoida. Veliki broj matematičara je pratilo pristup pomenutog autora u proučavanju teorije rasplinutih podgrupa.

Ukoliko bismo posmatrali našu oblast istraživanja sa stanovišta klasične teorije skupova, uočili bismo da kolekcija nivoa zadatog rasplinutog skupa može biti razmatrana i kao uređena struktura: elementi su podskupovi datog skupa, a uređenje je dualno skupovnoj inkluziji. Ova činjenica važi, ne samo u slučaju da je kodomen realan interval [0,1], već takođe i proizvoljan poset ili mreža.

Algoritmi koji za zadatu rasplinutu strukturu određuju familiju njenih nivoa (i obrnuto), uglavnom se zasnivaju na operatorima zatvaranja. Metode dobijene u ovu svrhu su vrlo korisne u istraživanju rasplinutih struktura.

Teorema sinteze za rasplinute skupove određuje pod kojim uslovima kolekcija podskupova nekog skupa odgovara kolekciji nivoa nekog rasplinutog skupa.

U radovima [90,91] čiji su autori B.Šešelja i A.Tepavčević pristup rasplinutim skupovima zasnovan je na kolekciji njihovih nivo-podskupova. Pokazano je da ova kolekcija, posmatrana kao uređena struktura, određuje kolekciju određenih izotonih preslikavanja, ili polufiltra (gornjih skupova).

Mrežno vrednosne algebre se istražuju od samog nastanka rasplinutih struktura. Prvi pojam je bio rasplinuta grupa. Razlika u raznim istraživanjima vezana je za kodomen rasplinute strukture kao funkcije, bilo da je to jedinični interval ili kompletna mreža. U radu [94] autora Šešelja, Tepavčević, rađeno je uopštenje u smislu da kodomen bude poset.

Pojam rasplinute jednakosti je uveden u radu Höhle [55], i onda primenjivan od strane mnogih drugih autora. Na primer u radovima [41], [43] Demirci razmatra specijalne algebarske strukture u kojima postoje rasplinute relacije jednakosti.

Pored rasplinute ekvivalencije i rasplinute jednakosti, slabljenjem osobine refleksivnosti, uvedeni su i pojmovi slabe rasplinute ekvivalencije i slabe rasplinute jednakosti.

Bělohlávek (videti knjigu [7]), samostalno, i u saradnji sa drugim matematičarima uvodi i istražuje algebre s rasplinutim jednakostima. One su definisane kao klasične algebre u kojima je obična jednakost zamenjena rasplinutom jednakošću. U ovom okviru, razvijaju se i istražuju najvažnije algebarske teme, kao što su kongruencije i podalgebre. Nedostatak ovog pristupa je to što tada nivoi rasplinutih struktura ne zadovoljavaju uvek svojstva analogna običnim strukturama. Šešelja i Tepavčević u radu [95] uvode slabe mrežno vrednosne ekvivalencije i jednakosti preko oslabljene refleksivnosti. Najpre su ovi pojmovi bili definisani na klasičnoj algebri, a kodomen je bila obična mreža sa nulom i jedinicom.

Rasplinute ekvivalencije, kongruencije i jednakosti spadaju u najvažnije pojmove u algebarskim istraživanjima. Pojmovi su bili definisani na klasičnoj algebri. U skorije vreme je došlo do novog pristupa, u smislu da je uslov oslabljene refleksivnosti zamenjen uslovom $\rho(x,y) \leq \rho(x,x)$, gde je sa ρ označena rasplinuta relacija.

Vrlo često, osobine rasplinutih struktura su ispitivane korišćenjem mogućnosti prenosa osobina samih struktura (rasplinutih skupova, rasplinutih relacija, rasplinutih algebri) na njihove nivo (na engleskom cut) strukture (koje su odgovarajuće klasične strukture). One su poznate kao osobine nivoa (cut-worthy).

Pristup razmatranja preko nivo- struktura pojavljuje se od samog početka istraživanja rasplinutih skupova, a u vezi sa zatvorenjima i nivoima u radu [6]. Takođe je prisutan i u knjizi autora G.Klira i B.Yuana ([62]), a u slučaju da je kodomen preslikavanja mreža na primer u [54] i [97].

Pored rasplinutog preslikavanja koje je definisano kao klasično preslikavanje rasplinutog skupa u rasplinuti skup koje zadovoljava date uslove, rasplinuto preslikavanje može biti definisano i kao rasplinuta binarna relacija koja zadovoljava određene uslove. Osnovne principe ovakvog pristupa je razvio M.Demirci ([39,40,43]).

Napomenimo da je pristup rasplinutim identitetima na rasplinutim podalgebrama izložen u radu [96]. Uveden je i pojam mrežno vrednosnog identiteta i pojam njegovog zadovoljenja, odnosno istinitosti na nekoj rasplinutoj podalgebri date algebre. Međutim, u tom radu nisu korišćene rasplinute kongruencije i rasplinute jednakosti na rasplinutim podalgebrama. Sve ovo bilo je definisano sa fiksiranom dijagonalom (sa 1 na dijagonali) i odatle je bilo povezano sa algebrom nosačem, a ne sa njenom rasplinutom podalgebrom.

U pomenutoj literaturi uređene algebarske strukture, prvenstveno uređene grupe, nisu bile posebno razmatrane u rasplinutom kontekstu. Navešćemo radove iz pomenute oblasti i rezultate predstavljene u njima (postoji svega nekoliko radova čija je tematika rasplinuta uređena podgrupa).

Najpre, Bhakat i Das su uveli rasplinute uređene podgrupe koristeći rasplinuto uređenje u radu [14], pri čemu su za skup vrednosti slika uzeli jedinični interval $[0, 1]$; oni su se takođe bavili Arhimedovim uređenim podgrupama u rasplinutom kontekstu (uveli su pojam rasplinute Arhimedove uređene podgrupe). Pokazali su da je svaka rasplinuta Arhimedova uređena podgrupa sa konačnim brojem vrednosti (u odnosu na rasplinuto uređenje) izomorfna rasplinutoj podgrupi aditivne grupe realnih brojeva u kojoj je uređenje uobičajeno.

Nedavno je Saibaba definisao rasplinute mrežno uređene grupe, u radu [84]. Rasplinute mrežno uređene grupe su uvedene kao preslikavanja iz mrežno uređene grupe u kompletnu mrežu. Analogno, u istom radu uvedene su definicije L-rasplinutog ideala, L-rasplinute kongruencije, količničke L-rasplinute podgrupe i direktnog proizvoda L-rasplinutih podgrupa. Dokazana su značajna svojstva i tvrđenja vezana za nivo-podgrupe, pomoću prethodnih teorijskih znanja iz oblasti rasplinutih podgrupa. Važna osobina koja je pokazana je da postoji 1-1 korespondencija između mreže svih L-rasplinutih ideala i mreže svih L-rasplinutih kongruencija u mrežno uređenoj grupi G; ova korespondencija predstavlja mrežni izomorfizam.

Poslednji rad iz ove oblasti (koji se pojavio kad je ova teza već bila završena) je rad [5], čiji je autor M.Bakhshi. U radu je uveden koncept rasplinutih konveksnih mrežno uređenih podgrupa.Takođe su rasplinute konveksne mrežno uređene podgrupe predstavljene pomoću rasplinutih podgrupa. Važna osobina koja je dokazana je da klasa svih rasplinutih konveksnih mrežno uređenih podgrupa l-grupe G formira kompletnu Heyting podmrežu mreže rasplinutih podgrupa od G.

U ovoj tezi pristup rasplinutim uređenim podgrupama se razlikuje od pristupa izloženim u radovima [14] i [84]. Ovde se koristi određeno rasplinuto uređenje koje se, zbog refleksivnosti, suštinski razlikuje od ostalih. Na primer, u radu autora Saibaba [84], domen preslikavanja predstavljaju mrežno uređene grupe, dok u našem radu uređenje u grupi ne mora biti mrežno. Razlika ne postoji samo u uređenim strukturama nego i u primenama istih.

Ova teza se sastoji iz ukupno četiri poglavlja, sa sledećim sadržajem.

Prvo poglavlje sadrži osnovne definicije, tvrđenja i primere iz teorije uređenih skupova i teorije mreža.

Definicije i tvrđenja u drugom poglavlju su poznati iz teorije uređenih grupa.

U trećem poglavlju, u prvom Odeljku uvedene su osnovne definicije P-rasplinutog skupa i L-rasplinutog skupa. Specijalno, definisan je pojam rasplinutog skupa, u slučaju da je njegov kodomen realan interval $[0, 1]$, kako ga je definisao L.Zadeh. Razmatrane su i druge osnovne definicije i iste su u ovom radu prilagođene opštem slučaju, u kome L predstavlja mrežu.

U Odeljku 3.1 takođe su predstavljene osnovne osobine rasplinutih podskupova i njihovih nivo-podskupova. Istaknute su razlike u slučajevima da je kodomen rasplinutog podskupa poset P, odnosno mreža L.

U Poglavlju 4 povezani su prethodno uvedeni pojmovi rasplinutog poretka sa rasplinutim algebarskim strukturama.

Naime, posmatrali smo uređenu grupu i razmotrili i rasplinutu podgrupu i rasplinuti podposet kao njene rasplinute podstrukture. U tom cilju, najpre smo uveli naš pristup rasplinutim posetima, opisan u Odeljku 4.1.

U 4.1 su uvedene su definicije, rasplinutog poluideala, rasplinutog polufiltra, rasplinutog glavnog ideala, rasplinutog glavnog filtra i rasplinutog konveksnog podposeta. Cilj njihovog uvođenja je "fazifikacija" pojmova klasične algebre. Odeljak sadrži originalne rezultate.

Definicija uvedena u odeljku 4.2 je definicija rasplinutog poretka na rasplinutom podskupu μ. Takođe je uveden specijalni rasplinuti poredak na rasplinutom podskupu μ. Pomenuta rasplinuta relacija ima vrlo bitnu ulogu, jer se koristi u definiciji rasplinute uređene podgrupe.

U Odeljku 4.3 detaljno je ispitana struktura skupa relacija slabog rasplinutog poretka.

Odeljak 4.4 sadrži originalne definicije rasplinutog lanca i rasplinute mreže. Rezultati odeljka su originalni. Predstavljen je uslov pod kojim rasplinuti podposet predstavlja rasplinuti lanac, kao i drugi uslov vezan za nivo- podskupove.

U Odeljku 4.5 definisan je pojam kompatibilnosti rasplinute relacije sa binarnom operacijom, u oba slučaja, u klasičnom slučaju i takođe u slučaju rasplinute algebarske strukture.

U Odeljku 4.6 definisan je osnovni pojam rasplinute podgrupe, s tim što je ovde kodomen rasplinute podgrupe mreža L. Odeljak sadrži originalne rezultate.

Važna tema Odeljka 4.7 su rasplinute podgrupe grupe G, čiji je kodomen preslikavanja familija podgrupa grupe G, koja mora ispunjavati određene uslove. Proizvoljna rasplinuta podgrupa može biti svedena na prethodno opisanu. Takođe su posebno razmatrane normalne rasplinute podgrupe.

Odeljak 4.8 obuhvata prethodne pristupe rasplinutim uređenim grupama.

U Odeljku 4.9 polazimo od pojma rasplinute uređene podgrupe. Tvrđenja iz odeljka predstavljaju originalne rezultate.

U Odeljku 4.10 uvodimo originalne definicije, rasplinutog pozitivnog konusa, rasplinutog negativnog konusa i rasplinute konveksne podgrupe. Na primer, možemo istaći da smo, polazeći od određenog tvrđenja klasične algebre, dobili analogno tvrđenje rasplinute algebre kao bitan rezultat.

Originalna definicija rasplinute mrežno uređene grupe uvedena je u Odeljku 4.11. Takođe su navedeni originalni rezultati, na primer, izložena je veza između rasplinute mrežno uređene podgrupe i njenih nivo- podskupova (u obliku ℓ-podgrupa, pri čemu ℓ-podgrupa predstavlja podgrupu date mrežno uređene grupe, koja je takođe mrežno uređena). Zatim smo došli do zaključka da veoma važno svojstvo ima kolekcija svih konveksnih ℓ-podgrupa zadate mrežno uređene grupe G. Dobili smo originalan rezultat u kom je ova kolekcija uzeta za kodomen rasplinute ℓ-podgrupe grupe G.

Analogno pojmu rasplinute podgrupe uređene grupe G, u Odeljku 4.12 analiziramo pojam rasplinute podgrupe količničke grupe G/A, gde je A konveksna normalna podgrupa od G. Ukoliko uzmemo da je grupa G Dekartov proizvod skupa realnih brojeva $R \times R$, možemo definisati njenu rasplinutu podgrupu, (označenu sa μ). Ako definišemo rasplinutu podgrupu količničke grupe $R \times R/A$ pomoću prethodno zadate rasplinute podgrupe μ, dobijamo originalan rezultat. Rezultat predstavlja konstrukcija rasplinute uređene podgrupe količničke grupe $R \times R/A$. Takođe smo primerom pokazali da rasplinuta uređena podgrupa količničke grupe $R \times R/A$ može biti definisana i na drugačiji način, pomoću određene rasplinute relacije λ_μ.

1 Uređene strukture

Prvo poglavlje sadrži osnovne definicije, tvrđenja i primere iz teorije uređenih skupova i teorije mreža. Literaturu korišćenu u ovom poglavlju čine knjige [67], [98] i [16].

1.1 Uređeni skup

Uređeni skup je relacioni sistem $(P, \leqslant)$, gde je $\leqslant$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija, odnosno relacija poretka na nepraznom skupu P. Relacija poretka se najčešće obeležava oznakom $\leqslant$, čak i ako P nije skup brojeva. Kažemo da je P uređen ovom relacijom.

Uređeni skup odnosno poset se najčešće označava kao uređeni par $(P, \leqslant)$, ili jednostavno pomoću skupa P. Uređeni podskup poseta $(P, \leqslant)$ je podskup Q od P u kome je uređenje restrikcija uređenja u P; uređeni podskup se označava na isti način, $(Q, \leqslant)$.

Definišimo relaciju $<$ (manje) za elemente x, y uređenog skupa $(P, \leqslant)$:

$$x < y \text{ ako i samo ako je } x \leqslant y \text{ i } x \neq y.$$

Uređeni skup $(Q, \leqslant)$ je **konveksan**, ako i samo ako za sve elemente $a, b \in Q$, takve da je $a < b$, važi:

$$\text{ako za element } c \text{ važi da } a < c < b, \text{ sledi da } c \in Q.$$

Particija skupa P je kolekcija nepraznih podskupova skupa P, ako su članovi kolekcije u parovima disjunktni, a njihova unija je ceo skup P. Elementi particije se zovu **klase** (ili **blokovi)** particije.

Ako je ρ relacija ekvivalencije na P i $a \in P$, onda se pomoću $[a]_\rho$ označava skup elemenata iz P koji su u relaciji ρ sa a :

$$[a]_\rho = \{x \in P : a\rho x\}.$$

Skup $[a]_\rho$ je klasa ekvivalencije elementa a u odnosu na relaciju ρ.

Ako je $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$, kažemo da su x i y **uporedivi** s obzirom na relaciju $\leqslant$, inače su **neuporedivi**.

Poredak na P je **linearan (totalan)** ako su svaka dva elementa uporediva. U tom slučaju skup P je linearno ili totalno uređen ovom relacijom. Linearno uređeni skup zove se i **lanac**.

Podskup A iz P koji sadrži samo neuporedive elemente zove se anti-lanac; A je **anti-lanac** ako i samo ako za sve različite elemente x, y iz A važi:

$$x \nleqslant y \text{ i } \ y \nleqslant x.$$

Pretporedak je refleksivna i tranzitivna relacija na nekom skupu.

Na uređenom skupu definiše se relacija pokrivanja, u oznaci $\prec$, koja se izvodi iz poretka kao što sledi (oznaka $x \leqslant y \leqslant z$, koja se koristi u nastavku je uobičajena skraćenica za $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$).

Neka je $(P, \leqslant)$ uređeni skup i $x, y \in P$. Tada po definiciji:

$$x \prec y \text{ ako i samo ako } x < y \text{ i } \neg (\exists z) (x < z < y).$$

Kaže se da je x **pokriveno** sa y, ili da x **prethodi** y.

Nije teško uočiti da od tri osnovna svojstva relacije poretka, relacija pokrivanja ispunjava samo antisimetričnost.

Neka je $(P, \leqslant)$ uređeni skup i $A \subseteq P$. Elemenat $c \in P$ je gornja granica za A ako je $x \leqslant c$, za sve $x \in A$. Dualno se definiše donja granica za A : elemenat $c \in P$ je donja granica za A ako je $c \leqslant x$, za sve $x \in A$.

Ako je elemenat $a \in P$ gornja granica za ceo skup P, zovemo ga najveći element u P. Analogno, ako je elemenat $a \in P$ donja granica za ceo skup P, a je najmanji elemenat.

Polufilter uređenog skupa P je njegov podskup F, koji ispunjava sledeće: za sve $x, y \in P$,

$$x \in F \text{ i } x \leqslant y \text{ povlači } y \in F.$$

Dualno, **poluideal** uređenog skupa P je njegov podskup I, za koji važi: za sve $x, y \in P$,

$$x \in I \text{ i } y \leqslant x \text{ povlači } y \in I.$$

Ako je $a \in P$, podskup:

$$\uparrow a := \{x \in P \mid a \leqslant x\},$$

je **glavni filter** generisan elementom $a \in P$.

Slično, za $a \in P$ (P je uređeni skup), skup:

$$\downarrow a := \{x \in P \mid x \leqslant a\},$$

predstavlja **glavni ideal** generisan pomoću elementa $a \in P$.

Ako su $(P, \leqslant)$ i $(Q, \leqslant)$ dva poseta, tada je funkcija $f : P \to Q$ **izotona** (saglasna sa poretkom) ako za proizvoljne $x, y \in P$ važi:

$$x \leqslant y \text{ povlači } f(x) \leqslant f(y).$$

Injektivna funkcija f iz P u Q je **obostrano izotona**, ako zadovoljava sledeći uslov:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

Ovakva funkcija zove se i **potapanje** uređenog skupa P u uređeni skup Q.

Bijektivna i obostrano izotona funkcija $f : P \to Q$ zove se **izomorfizam** između $(P, \leqslant)$ i $(Q, \leqslant)$ (ovaj pojam se takođe naziva i uređajni izomorfizam).

Ako postoji (barem jedan) izomorfizam iz uređenog skupa $(P, \leqslant)$ u uređeni skup $(Q, \leqslant)$, onda je očigledno inverzna funkcija izomorfizam iz $(Q, \leqslant)$ u $(P, \leqslant)$. Ova dva skupa su **izomorfna**.

Izomorfizam uređenog skupa $(P, \leqslant)$ na taj isti skup zove se **automorfizam**.

Dualnost. Ako je $(P, \leqslant)$ uređeni skup, onda je **dualni poredak** $\geqslant$ na skupu P definisan sa:

$$x \geqslant y \text{ ako i samo ako } y \leqslant x.$$

Dualni poredak je po definiciji inverzna relacija za poredak $\leqslant$ i to je isto refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija na $(P, \leqslant)$. Uređeni skup $(P, \geqslant)$ je **dualan** uređenom skupu $(P, \leqslant)$.

Princip dualnosti za uređene skupove: Ako neko tvrđenje važi za sve uređene skupove, onda za sve uređene skupove važi i dualno tvrđenje.

Ako uređeni skup P ima najmanji elemenat 0, onda je svaki elemenat kojim je on pokriven (ako takav postoji) **atom**.

Na primer, u $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ atomi su jednočlani skupovi.

Funkcija $f : P \to Q$ je dualno-izotona (anti-izotona) ako važi:

$$x \leqslant y \text{ povlači } f(y) \leqslant f(x).$$

Ako postoji bijekcija f takva da su f i f^{-1} anti-izotone, tada su P i Q anti-izomorfni (dualno izomorfni).

Ako su $(A, \leqslant)$ i $(B, \leqslant)$ uređeni skupovi, onda je njihov direktan proizvod relacioni sistem $(A \times B, \leqslant)$. Pokazuje se da je $(A \times B, \leqslant)$ takođe uređeni skup, za bilo koji od sledeća tri načina definisanja poretka $\leqslant$.

Prvi način je definicija poretka **po komponentama**, gde se na skupu uređenih parova relacija $\leqslant$ definiše:

$$(a_1, b_1) \leqslant (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leqslant a_2 \text{ i } b_1 \leqslant b_2.$$

Sa desne strane su odgovarajući poreci u A i B.

Drugi način definisanja poretka na direktnom proizvodu $A \times B$ zove se **leksikografski poredak**. Definicija je sledeća:

$$(a_1, b_1) \leqslant (a_2, b_2) \text{ ako i samo ako je } a_1 < a_2 \text{ ili važi: } a_1 = a_2 \text{ i } b_1 \leqslant b_2.$$

Ako su $(A, \leqslant)$ i $(B, \leqslant)$ lanci, onda je $A \times B$ lanac u odnosu na leksikografski poredak.

Treći poredak se zove **refleksivno zatvorenje** relacije „$<$”:

$$(a_1, b_1) \leqslant (a_2, b_2) \text{ ako i samo ako}$$

$$a_1 < a_2 \text{ i } b_1 < b_2 \text{ ili } a_1 = a_2 \text{ i } b_1 = b_2.$$

Jednostavno se dokazuje da je $(A \times B, \leqslant)$ isto uređeni skup.

Mreža je uređeni skup $(L, \leq)$ u kome za svaki par elemenata x, y, postoji najveća donja granica (infimum) i najmanja gornja granica (supremum), označene redom sa $x \wedge y$ i $x \vee y$. Ovo su binarne operacije u L.

Lema 1 *Ako je $(L, \leq)$ mreža, onda $\inf M$ i $\sup M$ postoje za svaki neprazni konačni podskup M skupa L.*

Potpuna (kompletna mreža) je uređen skup u kome svaki podskup ima infimum i supremum.

Mreža $(L, \leq)$ (zadata kao uređeni skup) može imati najmanji i (ili) najveći elemenat. Infimum i supremum skupa L, ako postoje, su redom najmanji (0) i najveći (1) elemenat. Važi da je $\inf \emptyset = 1$, a $\sup \emptyset = 0$. Mreža je ograničena, ako je ograničena kao uređeni skup, odnosno ako poseduje najmanji elemenat, 0, i najveći, 1.

Mreža L je konačne dužine ako je najduži lanac u L konačan. Element a mreže L je **delitelj nule** (u odnosu na $\wedge$), ako postoji ne-nula element $b \in L$, takav da važi: $a \wedge b = 0$. Dakle, L je mreža bez delitelja nule ako za proizvoljne elemente $x, y \in L$, važi da $x \wedge y = 0$ povlači $x = 0$ ili $y = 0$.

Lema 2 *Svaka potpuna mreža je ograničena (ima najmanji i najveći elemenat).*

Prema prethodnom imamo sledeću posledicu:

Lema 3 *Svaka konačna mreža je potpuna i ograničena.*

Primer 1 *Svi skupovi brojeva, od prirodnih do realnih, predstavljaju mreže u odnosu na uobičajeni poredak $\leq$, jer je u njima definisano:*

$$\inf\{a, b\} = \min\{a, b\}, \quad i \ \sup\{a, b\} = \max\{a, b\}.$$

U odnosu na potpunost, mreže brojeva se razlikuju. Na primer, skup R realnih brojeva u odnosu na uobičajeni poredak nije potpuna mreža, ali se lako kompletira dodavanjem najmanjeg, $-\infty$, i najvećeg elementa, ∞.

U slučaju skupa Q racionalnih brojeva, dodavanjem elemenata $-\infty$ i ∞, ne možemo dobiti potpunu mrežu. Na primer, u tom slučaju skup $\left\{x \in Q : x^2 < 2\right\}$ (i skupovi slični njemu), nema ni infimum ni supremum, a ima donja i gornja ograničenja.

Primer 2 *Uređen skup* $(N, |)$ *je mreža, pri čemu je:*

$$\inf\{x,y\} = nzd\,(x,y)\,, \quad i\ \sup\{x,y\} = nzs\,(x,y)\,.$$

Ova mreža nije potpuna-dovoljno je samo primetiti da nije ograničena.

Primer 3 *Drvo je uređeni skup A sa najmanjim elementom, u kome je svaki glavni ideal $\downarrow x$, $x \in A$, lanac.*

Nijedno drvo osim lanca, nije mreža, jer ne postoje supremumi.

Sledeća lema daje vezu između poretka $(\leq)$ i operacija $(\wedge$ i $\vee)$ u mreži.

Lema 4 *U mreži je $x \leq y$ ekvivalentno sa svakom od jednakosti:*

$$x \wedge y = x \quad i \quad x \vee y = y.$$

Teorema 1 *Uređeni skup $(A, \leq)$ u kom svaki podskup ima infimum je potpuna mreža.*

Dokaz teoreme 1 zasniva se na činjenici da supremum podskupa predstavlja infimum skupa gornjih ograničenja. Pošto po pretpostavci teoreme svaki podskup ima infimum, supremum proizvoljnog podskupa postoji.

Lema 5 *Uređeni skup sa najvećim elementom u kome svaki neprazan podskup ima infimum je potpuna mreža.*

Mreža podskupova nepraznog skupa, u odnosu na inkluziju je potpuna. Infimum je u njoj skupovni presek, a supremum unija. Često su potpune mreže u algebri sastavljene od skupova. I u njima je infimum presek, ali je supremum retko unija. Na konstrukciju takvih mreža upućuje sledeća skupovna verzija leme 5.

Lema 6 *Neka je $\mathcal{F}$ familija podskupova nepraznog skupa A, zatvorena u odnosu na skupovni presek i koja sadrži skup A. Tada je $(\mathcal{F}, \subseteq)$ kompletna mreža.*

1.2 Neki primeri mreža i kompletnih mreža

Navešćemo neke potpune mreže koje se često javljaju, pre svega u algebri.

Primer 4 *Partitivni skup nepraznog skupa A je potpuna mreža u odnosu na inkluziju. Najmanji elemenat je $\emptyset$, a najveći skup A. Infimum svake kolekcije podskupova je njen presek, a supremum je unija. $(\mathcal{P}\,(A)\,, \subseteq)$ predstavlja osnovnu skupovnu mrežu.*

Primer 5 *Mreža podgrupa*

Skup svih podgrupa proizvoljne grupe G, u oznaci $SubG$, prirodno je uređen inkluzijom. Pošto presek kolekcije podgrupa predstavlja podgrupu, uređeni skup $(SubG, \subseteq)$ je potpuna mreža u kojoj je najveći elemenat grupa G, a najmanji podgrupa u kojoj je samo neutralni element.

Unija dve podgrupe je podgrupa samo ako je jedna od njih sadržana u drugoj, pa je supremum kolekcije podgrupa, definisan kao presek svih podgrupa koje sadrže uniju kolekcije.

Može se takođe posmatrati i mreža normalnih podgrupa $(Sub_N G, \subseteq)$. To je isto potpuna mreža u kojoj je infimum presek, a najveći i najmanji elementi su G i $\{e\}$.

Supremum konačne kolekcije normalnih podgrupa može se opisati preciznije nego za mrežu $SubG$. Ako su H i K normalne podgrupe grupe G, može se proveriti da je skup:

$$HK = \{hk : h \in H, k \in K\},$$

najmanja normalna podgrupa koja sadrži $H \cup K$, pa sledi:

$$H \vee K = HK.$$

Primer 6 *Mreža relacija*

Sve binarne relacije na nepraznom skupu A su podskupovi skupa A^2, pa čine mrežu partitivnog skupa $\left(\mathcal{P}\left(A^2\right), \subseteq\right)$.

Inkluzijom uređen skup relacija ekvivalencije na A, $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$, takođe predstavlja potpunu mrežu. Zaista, presek proizvoljne kolekcije relacija ekvivalencije jeste relacija ekvivalencije, što važi i za sam skup A^2.

Iz prethodnog sledi da je $(\mathcal{E}(A), \subseteq)$ potpuna mreža. Najmanji element je dijagonalna relacija Δ_A, a supremum se ne poklapa sa skupovnom unijom, jer unija relacija ekvivalencije ne mora i sama biti relacija ekvivalencije. Supremum proizvoljne neprazne kolekcije relacija ekvivalencije na A je najmanja relacija iz $\mathcal{E}(A)$ koja sadrži uniju kolekcije.

1.3 Operator zatvaranja

Sistem zatvaranja je kolekcija $\mathcal{F}$ podskupova nepraznog skupa A, koja je zatvorena za presek i sadrži ceo skup A. Sistem zatvaranja se još zove i Murova familija.

Na osnovu leme 6 (str.13), sistem zatvaranja je potpuna mreža u odnosu na inkluziju. Sve skupovne mreže opisane u prethodnom odeljku su odgovarajući sistemi zatvaranja podskupova.

Neka je $\mathcal{F}$ proizvoljan sistem zatvaranja na skupu A. Na partitivnom skupu $\mathcal{P}(A)$ definišimo preslikavanje $X \to \overline{X}$, tako da za skup $X \subseteq A$, $\overline{X}$ predstavlja presek svih podskupova iz $\mathcal{F}$ koji sadrže X, odnosno:

$$\overline{X} := \bigcap \{Y : Y \in \mathcal{F} \text{ i } X \subseteq Y\}. \tag{1}$$

Ova funkcija je dobro definisana, jer važi $X \subseteq A$, pa je barem A u kolekciji koja definiše presek. Preslikavanje zadovoljava uslove:

$C1$ $\quad X \subseteq \overline{X}$

$C2$ $\quad \overline{X} = \overline{\overline{X}}$

$C3$ $\quad$ ako je $X \subseteq Y$, onda je $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$

Tačnost uslova $C1 - C3$ može se neposredno proveriti iz definicije (1).

Operator zatvaranja na skupu A je funkcija $X \to \overline{X}$ iz $\mathcal{P}(A)$ u $\mathcal{P}(A)$ koja ispunjava uslove $C1 - C3$. Ako je $X \subseteq A$, onda je $\overline{X}$ **zatvorenje** skupa X, a ako je $X = \overline{X}$, onda je X **zatvoreni podskup** u odnosu na ovaj operator.

Stav 1 *Ako je $X \to \overline{X}$ operator zatvaranja na skupu A, onda inkluzijom uređeni skup F zatvorenih podskupova skupa A u odnosu na taj operator, predstavlja sistem zatvaranja.*

Neka je zadat operator zatvaranja na skupu A, i neka je $\mathcal{F}$ familija zatvorenih podskupova u odnosu na zadati operator zatvaranja. Dalje, ako bismo definisali $\overline{X}$ pomoću (1), dobili bismo upravo polazni operator zatvaranja.

Neka je zadat proizvoljan sistem zatvaranja na skupu A, i neka je na njemu definisan operator zatvaranja pomoću (1). Tada skup svih zatvorenih podskupova predstavlja polazni sistem zatvaranja.

Dakle, postoji obostrano jednoznačna korespondencija između svih sistema zatvaranja na datom skupu i svih operatora zatvaranja na njemu.

Iz činjenice da je sistem zatvaranja potpuna mreža, sledi naredni stav.

Stav 2 *Podskupovi skupa A koji su zatvoreni u odnosu na neki operator zatvaranja, obrazuju potpunu mrežu u odnosu na inkluziju.*

U prethodno navedenoj mreži zatvorenih skupova infimum je presek, a u sledećem stavu se pokazuje šta je u njoj supremum.

Stav 3 *U mreži zatvorenih skupova F koja odgovara nekom operatoru zatvaranja važi: ako je $\{X_i : i \in I\} \subseteq F$, onda je:*

$$\bigvee \{X_i : i \in I\} = \overline{\bigcup \{X_i : i \in I\}}.$$

Ako posmatramo mreže zatvorenih skupova kao sisteme zatvaranja, one su potpune mreže. Važi i obrnuto, svaka potpuna mreža se može dobiti kao mreža zatvorenih skupova za neki operator zatvaranja.

Teorema 2 *Za svaku potpunu mrežu L postoji skup i operator zatvaranja na njemu, tako da je L izomorfna odgovarajućoj mreži zatvorenih podskupova.*

Operator zatvaranja može se definisati i kao funkcija na proizvoljnom uređenom skupu ili mreži.

Ako je $(A, \leqslant)$ uređeni skup, onda je funkcija $x \to \overline{x}$ na A **operator zatvaranja** na tom uređenom skupu, ako ispunjava sledeće uslove:

$c1$ $\quad x \leqslant \overline{x}$

$c2$ $\quad \overline{x} = \overline{\overline{x}}$

$c3$ $\quad$ ako je $x \leqslant y$, onda je $\overline{x} \leqslant \overline{y}$.

Element x iz A za koji je $\overline{x} = x$ je **zatvoren** u odnosu na taj operator.

Na osnovu ove definicije možemo razmatrati operatore zatvaranja neposredno na mreži, bez pozivanja na izomorfizam mreže i odgovarajućeg sistema zatvaranja podskupova.

Stav 4 *Neka je $x \to \overline{x}$ operator zatvaranja na potpunoj mreži L. Tada je podskup zatvorenih elemenata mreže zatvoren i za proizvoljne infimume.*

Lema 7 *Elementi mreže L koji su zatvoreni u odnosu na operator zatvaranja na njoj, obrazuju potpunu mrežu u odnosu na poredak iz L.*

Prethodno smo videli da svaki sistem zatvaranja određuje operator zatvaranja na skupu. Analogno tvrđenja važi i za proizvoljnu potpunu mrežu.

Stav 5 *Ako je L potpuna mreža i F njen uređeni podskup zatvoren za proizvoljne infimume iz L, onda je preslikavanje $x \to \overline{x}$, gde je $\overline{x} = \wedge \{y \in F : x \leq y\}$, operator zatvaranja na L.*

Dokaz stava 5 se izvodi neposrednom proverom uslova $c1 - c3$.

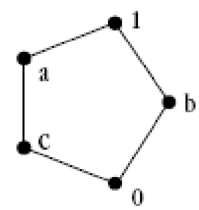
1.4 Podmreža

Da bismo definisali pojam podmreže, neophodno je najpre uvesti pojam mreže kao algebarske strukture. Pojmovi mreže kao uređenog skupa i mreže kao algebarske strukture međusobno su ekvivalentni.

Neka je L neprazan skup, a $\wedge$ i $\vee$ binarne operacije na njemu. Tada je uređena trojka $(L, \wedge, \vee)$ mreža kao algebarska struktura, ako važe aksiome komutativnosti, asocijativnosti i apsorpcije za operacije iz L.

Mreža $(L_1, \wedge, \vee)$ je podmreža mreže $(L, \wedge, \vee)$, ako je $L_1 \subseteq L$, a operacije na L_1 predstavljaju restrikcije operacija iz L.

Važno je napomenuti da se pojam podmreže definiše isključivo za mrežu kao algebru $(L, \wedge, \vee)$, a ne za mrežno uređen skup $(L, \leq)$. Poredak na podmreži se poklapa sa poretkom na samoj mreži: ako su x i y elementi iz podmreže L_1, onda je $x \leq y$ u L_1 ako i samo ako je $x \leq y$ u L. Ovo sledi iz zatvorenosti podmreže za operacije.



slika 1

Obrnuto ne važi; uređen podskup iz L može i sam biti mreža u odnosu na postojeći poredak, ali ne mora biti podmreža mreže L.

Podmreža L_1 mreže L je **konveksna** ako je konveksna kao uređeni skup, odnosno ako iz $x, y \in L_1$ i $x < z < y$ sledi $z \in L_1$.

Neka je data mreža L potpuna, i neka je dat proizvoljni interval $[a, b] = \{x \in L : a \leq x \leq b\}$. Posmatrajući mrežu kao uređeni skup $(L, \leq)$, vidimo da je interval $[a, b]$ njena potpuna konveksna podmreža.

Definišimo **modularni zakon**:

$$\text{ako je } x \leq z, \text{ onda je } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z, \tag{m}$$

gde su x, y i z elementi mreže L.
Modularni zakon (m) ekvivalentan je sa svakim od sledećih identiteta:

$$\begin{aligned} (x \wedge z) \vee (y \wedge z) &= ((x \wedge z) \vee y) \wedge z & (m_1) \\ z \vee (y \wedge (x \vee z)) &= (x \vee z) \wedge (y \vee z). & (m_2) \end{aligned}$$

Mreža na kojoj je ispunjen modularni zakon zove se **modularna mreža**.

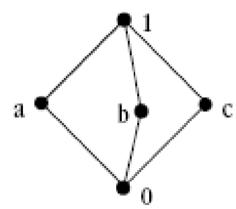
Navedimo sada **osnovni kriterijum modularnosti**. Petoelementna mreža čiji je dijagram skiciran na slici 1 zove se pentagon i označava se sa $\mathbf{N}_5$. Pentagon nije modularna mreža.

Teorema 3 *Mreža je modularna ako i samo ako ne sadrži podmrežu izomorfnu sa N_5.*

Osnovni primer od koga potiče i ime modularnih mreža predstavlja mreža normalnih podgrupa proizvoljne grupe.

Videli smo u primeru 5 da normalne podgrupe grupe G formiraju mrežu, u kojoj je $H \wedge K = H \cap K$, i $H \vee K = HK$, gde je $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$. HK predstavlja najmanju normalnu podgrupu koja sadrži $H \cup K$.

Stav koji sledi dokazao je Dedekind, pa se modularne mreže zovu i Dedekindove mreže.



slika 2

Stav 6 *Mreža normalnih podgrupa proizvoljne grupe je modularna.*

Mreža je **distributivna** ako na njoj važe distributivne jednakosti (d_1) i (d_2) .

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad (d_1)$$
$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad (d_2)$$

Stav 7 *Identiteti (d_1) i (d_2) su ekvivalentni, odnosno ako u mreži L važi jedan od njih, onda važi i drugi.*

Identiteti (d_1) i (d_2) zovu se **zakoni distributivnosti** i oni ne važe na svakoj mreži. Na primer, oni ne važe na mreži pentagon sa slike 1.

Na primer, svaki lanac je distributivna mreža; partitivni skup nepraznog skupa je distributivna mreža u odnosu na presek i uniju.

Za proveru distributivnosti mreže postoji jednostavan kriterijum, slično kao i za modularnost. Mreža čiji je dijagram predstavljen na slici 2 zove se **dijamant** i označava se sa $\mathbf{M}_3$. Ta mreža je modularna, ali nije distributivna.

Teorema 4 *Modularna mreža je distributivna ako i samo ako ne sadrži podmrežu izomorfnu mreži M_3.*

Stav 8 *Mreža je distributivna ako i samo ako ne sadrži podmrežu izomorfnu sa N_5 niti podmrežu izomorfnu sa M_3.*

Po samoj definiciji podmreže, podmreža distributivne mreže je distributivna, podmreža modularne mreže je modularna, itd. Obrnuto nije tačno, odnosno identitet koji važi na podmreži, ne mora važiti i na samoj mreži (na primer, na dvoelementnom lancu važe zakoni distributivnosti, a taj lanac je podmreža i nedistributivnih mreža).

1.5 Heyting mreža

Da bismo uveli pojam Heyting mreže, neophodno je prethodno uvesti pojam pseudokomplementa.

Elemenat x mreže L je **disjunktan** sa elementom y mreže L, ako važi

$$x \wedge y = 0.$$

Ako je L mreža u kojoj postoji najmanji elemenat 0, kažemo da je elemenat $x \in L$ **pseudokomplementaran** ako postoji najveći elemenat $x^* \in L$ koji je disjunktan sa x. Znači:

$$x^* = \bigvee \{y \in L : x \wedge y = 0\},$$

i kada ovaj elemenat postoji zove se **pseudokomplement** od x.

Kažemo da je mreža L **pseudokomplementarna**, ukoliko je svaki elemenat iz L pseudokomplementaran.

Primetimo da je za svaku pseudokomplementarnu mrežu neophodno da bude ograničena. Pošto za svaki $y \in L$ važi $0 \wedge y = 0$, sledi da je $y \leq 0^*$. Znači, 0^* je najveći element u L.

Stav 9 *Svaka konačna distributivna mreža je pseudokomplementarna.*

Primer 7 *Svaka kompletna mreža L u kojoj važi beskonačan $\wedge$-distributivni zakon:*

$$x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i),$$

je pseudokomplementarna. Očigledno, za svaki $x \in L$, postoji elemenat x^*:

$$x^* = \bigvee \{y \in L : x \wedge y = 0\}$$

U pseudokomplementarnoj distributivnoj mreži interval $[0, x]$ je pseudokomplementaran; pseudokomplement od $y \in [0, x]$ je $y^* \wedge x$. Iz ove činjenice proističe razmatranje distributivnih mreža u kojima je svaki interval pseudokomplementaran. Takve mreže se nazivaju **Heyting-ove mreže**.

Teorema 5 *Kompletna mreža je Heyting-ova mreža ako i samo ako ona zadovoljava beskonačan $\wedge$-distributivni zakon:*

$$x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i).$$

1.6 Homomorfizam i izomorfizam

Homomorfizam iz mreže $(L, \wedge, \vee)$ u mrežu $(M, \wedge, \vee)$ je funkcija $f : L \to M$ koja je saglasna sa operacijama $\wedge$ i $\vee$: ako su $x, y \in L$, onda važi:

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \text{ i } f(x \vee y) = f(x) \vee f(y).$$

Izomorfizam je homomorfizam f koji je ujedno i bijekcija.

Ako za funkciju $f : L \to M$ važe jednakosti:

$$f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y) \text{ i } f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y),$$

onda se odgovarajući pojmovi definišu kao **dualni homomorfizam** i **dualni izomorfizam** (anti-izomorfizam).

Označićemo sa $f(L)$ skup svih slika:

$$f(L) = \{y \in M : y = f(x) \text{ za neko } x \in L\}.$$

Sledeći stav je poznat u opštoj algebri:

Stav 10 *Ako je f homomorfizam iz mreže $(L, \wedge, \vee)$ u mrežu $(M, \wedge, \vee)$, onda je $f(L)$ podmreža u M.*

Homomorfizam je po definiciji saglasan sa operacijama u mreži, što znači da očuvava konačne infimume i supremume.

Teorema 6 *Mreže $(L, \wedge, \vee)$ i $(M, \wedge, \vee)$ su izomorfne ako i samo ako su izomorfni odgovarajući uređeni skupovi $(L, \leq)$ i $(M, \leq)$.*

1.7 Kongruencije

Kongruencija (relacija kongruencije) na mreži $(L, \wedge, \vee)$ je relacija ekvivalencije θ na L, koja je saglasna sa mrežnim operacijama, odnosno za koju važi:

$$\text{iz } x\theta y \text{ i } u\theta v \text{ sledi } (x \wedge u)\,\theta\,(y \wedge v) \text{ i } (x \vee u)\,\theta\,(y \vee v).$$

Naredni stav je ekvivalentan sa ovom definicijom (dokaz sledi iz osnovnih mrežnih identiteta).

Stav 11 *Relacija ekvivalencije θ na mreži $(L, \wedge, \vee)$ je njena kongruencija ako i samo ako za sve $x, y, z \in L$:*

$$\textit{iz } x\theta y \textit{ sledi } (x \wedge z)\,\theta\,(y \wedge z) \textit{ i } (x \vee z)\,\theta\,(y \vee z).$$

Teorema 7 *Ako je $f : L \to M$ homomorfizam iz mreže $(L, \wedge, \vee)$ u mrežu $(M, \wedge, \vee)$, onda je relacija θ na L, definisana sa:*

$$x\theta y \Leftrightarrow f(x) = f(y), \tag{2}$$

kongruencija na $(L, \wedge, \vee)$.

Kongruencija θ definisana sa (2), zove se **jezgro** homomorfizma f.

Neka je A neprazan skup, $\theta \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije skupa A i $x \in A$. Klasa ekvivalencije elementa x, u oznaci $[x]_\theta$, data je na sledeći način:

$$[x]_\theta = \{y \in A : x\theta y\}.$$

Neka je θ kongruencija na mreži $(L, \wedge, \vee)$. Tada je količnička mreža mreže L u odnosu na θ, koju označavamo sa L/θ, mreža čije su operacije definisane sa:

$$[x]_\theta \wedge [y]_\theta := [x \wedge y]_\theta \ \ i \ \ [x]_\theta \vee [y]_\theta := [x \vee y]_\theta,$$

gde su $x, y \in L$.

Definicije su ispravne, odnosno blok na desnoj strani svake jednakosti ne zavisi od izbora predstavnika odgovarajućih klasa na levoj strani; to se jednostavno proverava. Prema ovim definicijama, očigledno je da se aksiome za mreže prenose na operacije sa klasama. Zato je $(L/\theta, \wedge, \vee)$ mreža i ona se zove **faktor-mreža** ili **količnička mreža** mreže L po kongruenciji θ. Isto tako, iz definicije klasa sledi da je preslikavanje $g : L \to L/\theta$, definisano sa $g(x) = [x]_\theta$, homomorfizam, takozvani **prirodni homomorfizam** mreže L.

Stav 12 *Ako je θ kongruencija na mreži L, onda je u mreži L/θ ispunjeno: $[x]_\theta \leq [y]_\theta$ ako i samo ako za svako $x_1 \in [x]_\theta$ postoji $y_1 \in [y]_\theta$, tako da je $x_1 \leq y_1$.*

Za razliku od nekih algebarskih struktura (grupa na primer), sve klase kongruencije na mreži su njene podmreže.

Stav 13 *Svaka klasa kongruencije na mreži je konveksna podmreža te mreže.*

1.8 Ideali

Ulogu normalnih podgrupa kod grupa samo delimično imaju ideali (i dualno filtri) kod mreža.

Uvedimo sada definiciju **ideala** i **filtra** u mreži.

Ideal u mreži L je njen neprazni podskup I koji ispunjava uslove:

1. iz $a, b \in I$ sledi $a \vee b \in I$;
2. iz $a \in I$ i $c \leq a$ sledi $c \in I$.

Glavni ideal u mreži L, generisan elementom $a \in L$, definiše se na sledeći način:

$$\downarrow a = \{x \in L : x \leq a\}.$$

Filter u mreži L je njen neprazni podskup F koji ispunjava uslove:
$1'$. iz $a, b \in F$ sledi $a \wedge b \in F$;
$2'$. iz $a \in F$ i $a \leq c$ sledi $c \in F$.

Glavni filter u mreži L, generisan elementom $a \in L$, definiše se na sledeći način:

$$\uparrow a = \{x \in L : a \leq x\}.$$

Za razliku od većine drugih klasa mreža, kod distributivnih postoji veza između kongruencija i ideala.

Poznato je da za svaku mrežu L nulta (najmanja) klasa faktor mreže L/θ po kongruenciji θ predstavlja ideal u L, što je formulisano sledećim stavom.

Stav 14 *Ako je θ kongruencija na mreži L tako da faktor-mreža L/θ ima najmanji elemenat, onda je ta klasa (najmanji elemenat u L/θ) ideal u L.*

Za distributivne mreže važi i obrnuto, u smislu naredne teoreme.

Teorema 8 *Ako je I ideal u distributivnoj mreži L, onda je relacija θ na L, definisana sa*

$$x\theta y \text{ ako i samo ako je za neko } c \in I \text{ ispunjeno } x \vee c = y \vee c,$$

kongruencija na L, a I je klasa u L/θ.

Teorema 9 *Mreža je distributivna ako i samo ako je svaki njen ideal klasa neke kongruencije.*

2 Uređene grupe

Definicije i tvrđenja u ovom poglavlju su dobro poznati iz teorije uređenih grupa. Većina sadržaja Odeljaka 2.1, 2.2 i 2.3 preuzeta je iz knjige T.S.Blytha [17], dok je u Odeljcima 2.4 i 2.5 korišćena i knjiga autora G.Birkhoffa [16].

Početak univerzalne algebre obeležili su radovi G.Birkhoffa nastali u periodu od 1933. do 1935. godine.

Sledeća bitna godina je 1950, kada je A.Tarski najavio nastanak nove oblasti matematike, danas poznatu kao teorija modela jezika prvog reda. Teorija modela je usko povezana sa matematičkom logikom i teorijskim računarstvom.

Važni dobijeni rezultati odnose se na probleme odlučivosti jednakosnih teorija i probleme konačne baze identiteta.

Ako je K varijetet definisan skupom identiteta $\sum$, onda varijetet K ima odlučivu jednakosnu teoriju akko postoji algoritam koji za proizvoljan identitet $p \approx q$ odlučuje o tome da li važi $\sum \vdash p \approx q$ (iz $\sum$ se izvodi $p \approx q$). Na primer, sledeći varijeteti imaju odlučivu jednakosnu teoriju: varijetet svih semigrupa, varijetet svih grupa, svih mreža i distributivnih mreža.

Pitanje konačne baziranosti jednakosnih teorija je i dalje aktuelno. Ukratko, postavlja se pitanje da li se identiteti koji važe na nekoj algebri mogu izvesti iz nekog konačnog skupa identiteta. Mnogi poznati varijeteti imaju konačnu bazu, jer su upravo definisani pomoću konačno mnogo identiteta. Na primer, varijeteti svih grupa, svih Abelovih grupa, svih prstena, svih mreža ili svih Booleovih algebri imaju konačnu bazu, po definiciji.

Dalje, iz oblasti uređenih grupa možemo istaći rad autora P.Conarda i J.Martineza [27]. U radu su najpre navedne osnovne definicije teorije mrežno uređenih grupa, a zatim su proučavane komplementarne grupe.

Linearno uređene strukture imaju poseban značaj u određenim matematičkim teorijama. Već duži vremenski period, njih proučavaju naučnici koji se bave teorijom modela. Dobijeni su vrlo važni rezultati koji proširuju teoriju linearnog uređenja. Na primer, možemo istaći Peanovu aritmetiku, teoriju uređenih abelovih grupa, teoriju realnih zatvorenih polja, i samu teoriju linearnog uređenja.

2.1 Grupa

Ovde ćemo postepeno uvesti pojam uređene grupe, polazeći od osnovnih definicija algebarskih struktura. U definiciji grupa najčešće koristimo jezik snabdeven simbolom binarne operacije, unarnim simbolom i simbolom konstante. Uobičajena oznaka grupe je $(G,\,\cdot\,,\,^{-1},e)$.

Definišimo **translaciju** elementa x grupe $(G,\,\cdot\,,\,^{-1},e)$, kao unarnu operaciju oblika $c\cdot x$ ili $x\cdot c$, gde je c elemenat grupe G.

Za proizvoljne elemente a,b i c grupe $(G,\,\cdot\,,\,^{-1},e)$, važe **zakoni skraćivanja**:

$$ab=ac\Rightarrow b=c,\qquad ba=ca\Rightarrow b=c.$$

Za grupu $(H,\,\cdot,\,^{-1},e)$ kažemo da je **podgrupa** grupe $(G,\,\cdot\,,\,^{-1},e)$, ako važi $H\subset G$, operacije $\cdot$ i $^{-1}$ su redom, binarna i unarna operacija na skupu H (restrikcije odgovarajućih operacija na G) i $(H,\,\cdot,\,^{-1},e)$ predstavlja grupu. U tom slučaju takođe kažemo i da je sam skup H jedna podgrupa grupe G, i pišemo $H\leq G$ (dve podgrupe jedne grupe su jednake, ako i samo ako imaju isti skup-nosač).

Neka je $(G,\,\cdot\,,\,^{-1},e)$ data grupa, i $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ dati podskup od G. Skup:

$$\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle=\{b_1^{\alpha_1}\cdot b_2^{\alpha_2}\cdots b_k^{\alpha_k}:k\in N_0,\ b_i\in\{a_1,a_2,...,a_n\}\,,\ \alpha_i\in\{-1,1\}\}\,,$$

zove se **podgrupa** grupe $(G,\,\cdot\,,\,^{-1},e)$ **generisana skupom** $\{a_1,a_2,...,a_n\}$.

Uvešćemo sada algebarske strukture u kojima je zadato uređenje saglasno sa algebarskim operacijama.

Grupoid $(G,\,\cdot\,)$ može biti snabdeven relacijom uređenja $\leqslant$, koja je *kompatibilna* sa binarnom operacijom na sledeći način:

$$\text{za sve } x,y,z\in G\ x\leqslant y \text{ povlači } z\cdot x\leqslant z\cdot y \text{ i } x\cdot z\leqslant y\cdot z.$$

Ako postoji takvo uređenje u G, tada uređena trojka $(G,\,\cdot\,,\leqslant)$ predstavlja **uređeni grupoid.**

U narednoj definiciji uređene grupe, i dalje u tekstu, oznaka binarne operacije može se izostaviti u pisanju.

Uređena grupa je uređena petorka $\left(G,\cdot,^{-1},e,\leqslant\right)$. U njoj uređena četvorka $\left(G,\cdot,^{-1},e\right)$ predstavlja grupu, a $(G,\leqslant)$ uređeni skup tako da je poredak $\leqslant$ saglasan sa translacijama: za sve $x,y,z\in G$,

$$iz\ x\leqslant y\Rightarrow xz\leqslant yz\ i\ zx\leqslant zy.$$

Grupa $(G,\,\cdot,\,^{-1},e)$ je komutativna ako u njoj važi:

$$a\cdot b=b\cdot a,\quad \text{za sve } a,b\in G.$$

Komutativne grupe se najčešće zapisuju aditivno i nazivaju još i Abelove grupe.

Primer 8 *$(Z,+,-,0,\leqslant),(Q,+,-,0,\leqslant),(R,+,-,0,\leqslant)$ predstavljaju uređene Abelove grupe (+ je uobičajena operacija sabiranja).*

U daljem tekstu ćemo obeležavati operaciju u grupi multiplikativno. Jedinični element je obeležen sa e.

2.2 Pozitivan i negativan konus

Ako je G uređena grupa, tada je element $x \in G$ **pozitivan** element ako važi $x \geqslant e$; analogno **negativan** element ako je $x \leqslant e$. Podskup P_G svih pozitivnih elemenata zove se **pozitivan konus** u G, a podskup N_G negativnih elemenata **negativan konus**.

Ilustrujmo definicije pozitivnog i negativnog konusa uređene grupe G, u slučaju da je ona zadata kao skup svih uređenih parova realnih brojeva $(R \times R)$ u odnosu na aditivnu operaciju. Zadato uređenje u grupi je uređenje po kordinatama. Pozitivan konus P_G definisan je na sledeći način:

$$(x,y) \in P_G \Leftrightarrow \{x \geqslant 0 \text{ i } y \geqslant 0\}.$$

Iz definicije P_G i definicije uređenja u grupi, neposredno određujemo sve elemente negativnog konusa N_G. Očigledno u ovom primeru postoji beskonačno mnogo elemenata grupe $R \times R$ koji ne pripadaju ni jednom od navedenih konusa.

Jednostavna ali bitna posledica saglasnosti poretka $\leqslant$ sa translacijama (u grupi) je sledeća činjenica.

Teorema 10 *Neka je data uređena grupa $\left(G,\cdot,^{-1},e\right)$. Za sve elemente $x,y \in G$ je ekvivalentno sledeće:*

1. $x \leqslant y$;
2. $xy^{-1} \in N_G$;
3. $y^{-1}x \in N_G$;
4. $x^{-1}y \in P_G$;
5. $yx^{-1} \in P_G$;
6. $y^{-1} \leqslant x^{-1}$.

Ako je X podskup uređene grupe uvešćemo oznaku:

$$X^{-1} = \left\{x^{-1} : x \in X\right\}.$$

Formulišimo sledeću teoremu teorije uređenih grupa:

Teorema 11 *a) Podskup P uređene grupe $\left(G,\cdot,^{-1},e\right)$ je pozitivan konus u odnosu na uređenje $\leqslant$ u G ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(1)$P\cap P^{-1}=\{e\}$

(2)$P^2=P$

(3)$(\forall x\in G)\,xPx^{-1}=P$.

b) Neka je P pozitivan konus uređene grupe $\left(G,\cdot,^{-1},e\right)$. Tada važi sledeće: $P\cup P^{-1}=G$, ako i samo ako je uređenje $\leqslant$ u grupi totalno.

Dokaz. a) $\Rightarrow$) Neka je $\leqslant$ uređenje u G i neka je P_G odgovarajući pozitivan konus. Ako $x\in P_G\cap P_G^{-1}$, onda sledi $x\geqslant e$, i istovremeno je $x=y^{-1}$ za neki $y\geqslant e$. Dalje imamo:

$$e\geqslant y^{-1}=x\Rightarrow x=e,$$

pa zaključujemo da važi (1)

Da bismo dokazali (2), pretpostavimo da $x,y\in P_G$. Dakle:

$$x\geqslant e \text{ i } y\geqslant e\Rightarrow xy\geqslant e.$$

Upravo smo dobili da $xy\in P_G$, iz čega sledi $P_G^2\subseteq P_G$.

Kako važi da je:

$$P_G=P_G\cdot e\subseteq P_G^2,$$

zaključujemo da (2) važi, odnosno $P_G^2=P_G$.

Ostalo je još da dokažemo jednakost (3) u ovom smeru.

Ako $y\in P_G$, tada za svaki $x\in G$ važi:

$$xyx^{-1}\geqslant xex^{-1}=e,\ \text{dakle } xyx^{-1}\in P_G.$$

Ovim smo dokazali da je $xP_Gx^{-1}\subseteq P_G$.

Pošto prethodno važi za sve $x\in G$, možemo zameniti x pomoću x^{-1}.

Dobijamo onda da je $x^{-1}P_Gx\subseteq P_G$, odakle sledi:

$$P_G\subseteq xP_Gx^{-1}.$$

Jednakost (3) je dokazana.

$\Leftarrow$)Da bismo dokazali suprotan smer, pretpostavimo da je P podskup od G koji zadovoljava osobine (1), (2), (3). Definišimo relaciju $\leqslant$ u G na sledeći način:

$$x\leqslant y\Leftrightarrow yx^{-1}\in P.$$

Očigledno, $\leqslant$ je refleksivna u G.

Dokažimo sada da je $\leqslant$ antisimetrična.

Pretpostavimo da važi $x\leqslant y$ i $y\leqslant x$. Sledi:

$$yx^{-1}\in P \text{ i } \left(yx^{-1}\right)^{-1}=xy^{-1}\in P.$$

Na osnovu jednakosti (1) sledi:

$$yx^{-1}=e\Rightarrow y=x.$$

Upravo smo dokazali antisimetričnost.
Da bismo pokazali da je $\leqslant$ tranzitivna, pretpostavimo da važi:

$$x \leqslant y \text{ i } y \leqslant z.$$

Tada $yx^{-1} \in P$ i $zy^{-1} \in P$, pa sledi na osnovu (2):

$$zx^{-1} = zy^{-1}yx^{-1} \in P, \text{ dakle } x \leqslant z.$$

Možemo zaključiti da je $\leqslant$ poredak u G.
Da bismo ispitali da li je kompatibilan, pretpostavimo $x \leqslant y$.
Tada je $yx^{-1} \in P$ i sledi iz (3) da je, za sve $a, b \in G$:

$$ayb\,(axb)^{-1} = aybb^{-1}x^{-1}a^{-1} = a \cdot yx^{-1} \cdot a^{-1} \in P,$$

što je ekvivalentno sa $axb \leqslant ayb$, pa sledi da je $\leqslant$ kompatibilno.
Takođe, primetimo da je:

$$e \leqslant y \text{ akko } y \in P,$$

pa znači da upravo P predstavlja odgovarajući pozitivan konus.
b) Dokažimo sada da je uređenje $\leqslant$ totalno akko je $P \cup P^{-1} = G$.
Prvo, pretpostavimo da je $P \cup P^{-1} = G$. Tada za sve $x, y \in G$ važi:

$$\text{ili } xy^{-1} \in P \text{ ili } xy^{-1} \in P^{-1}, \text{odnosno } xy^{-1} \geqslant e \text{ ili } xy^{-1} \leqslant e.$$

U prvom slučaju je $x \geqslant y$, a u drugom $x \leqslant y$.
Možemo zaključiti da je $\leqslant$ totalno uređenje u G.
Suprotno, ako je G totalno uređena grupa, tada za sve $x \in G$ važi:

$$\text{ili je } x \geqslant e, \text{ili } x \leqslant e \Rightarrow x \in P$$

ili $x \in P^{-1} \Rightarrow G = P \cup P^{-1}$. ■

Iz prethodne teoreme vidimo da pozitivan konus P_G uređene grupe G zapravo predstavlja polugrupu. Pitanje koje se postavlja je koji je mogući oblik polugrupa koje predstavljaju pozitivan konus uređene grupe. Odgovor je dat u sledećoj teoremi:

Teorema 12 *Polugrupa P predstavlja pozitivan konus neke uređene grupe ako i samo ako:*
1. *Zakoni skraćivanja važe u P*
2. *P sadrži jedinični elemenat e*
3. *$(\forall x, y \in P)\, xy = e \Rightarrow x = y = e$*
4. *$(\forall x \in P)\, Px = xP$.*

Primer 9 *Posmatrajmo najpre aditivnu grupu realnih brojeva R. Ona nema netrivijalne konveksne podgrupe. Neke netrivijalne podgrupe grupe R su, aditivna grupa racionalnih brojeva Q, podgrupe oblika $r \cdot Z$, gde je r proizvoljan realan broj (Z je skup celih brojeva).*

Posmatrajmo uređenu grupu $G = R \times R$. Opišimo neke moguće tipove podgrupa ove grupe.

(tip 1) Na primer, podgrupe oblika $H_{a,b}$:

$$H_{a,b} = \{(x, y) : ax + by = 0\}.$$

(tip 2) Dalje, ako su K i L bilo koje podgrupe grupe R sa operacijom sabiranja, tada je i:

$$K \times L \subset R \times R,$$

jedna podgrupa grupe $R \times R$.

(tip 3) Takođe, ako je E bilo koji (konačan ili beskonačan) podskup od $R \times R$, skup $\langle E \rangle$ svih uređenih parova:

$$v = k_1 \cdot e_1 + \cdots + k_n \cdot e_n,$$

gde su $e_1, ..., e_n$ bilo koji uređeni parovi iz E, i $k_1, \cdots, k_n$ bilo koji celi brojevi, predstavlja podgrupu grupe $R \times R$. To je njena podgrupa generisana skupom E, i ona je najmanja podgrupa od $R \times R$ koja sadrži taj skup E.

Pošto smo prethodno predstavili neke tipove podgrupa grupe $R \times R$, opišimo sada neke oblike uređenja u istoj grupi.

1.Leksikografski poredak

$$(a, b) \leqslant (c, d) \text{ ako i samo ako } a < c \text{ ili } (a = c \text{ i } b \leqslant d).$$

Odredimo pozitivan konus $P : x > 0$ ili $(x = 0$ i $y \geq 0)$.

2.Uređenje po koordinatama

$$(a, b) \leqslant (c, d) \quad \text{ako i samo ako } a \leqslant c \text{ i } b \leqslant d.$$

Pozitivan konus $P : (x, y) \in P \Leftrightarrow \{ x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0\}$.

3.Refleksivno zatvorenje relacije $<$

$$(a, b) \leqslant (c, d) \text{ ako i samo ako } (a < c \text{ i } b < d) \text{ ili } (a = c \text{ i } b = d).$$

Pozitivan konus $P : (x > 0$ i $y > 0)$ ili $(x = y = 0)$.

Na primer, u ovom slučaju elementi $(0, 1)$ i $(0, 2)$ nisu uporedivi, dok elementi $(0, 1)$ i $(1, 2)$ jesu uporedivi, i očigledno važi: $(0, 1) \leqslant (1, 2)$.

2.3 Konveksne podgrupe

Neka je data uređena grupa $\left(G, \cdot, ^{-1}, e, \leqslant\right)$. Konveksna podgrupa od G je podgrupa koja, u odnosu na uređenje u G, predstavlja konveksan podskup.

Teorema 13 *Ako je H zadata podgrupa uređene grupe $\left(G, \cdot, ^{-1}, e\right)$, tada je $P_H = H \cap P_G$. Važi i više, da su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:*
1. Podgrupa H je konveksna
2. P_H je poluideal u P_G.

Dokaz. Pošto je $e_H = e_G$, očigledno je da je $P_H = H \cap P_G$.
1⇒2) : Pretpostavimo da je:

$$e_H \leqslant y \leqslant x, \text{ pri čemu } e_H, x \in P_H \subseteq H.$$

Tada na osnovu 1. sledi:

$$y \in H \cap P_G = P_H,$$

dakle P_H je poluideal od P_G.
2⇒1) : Pretpostavimo sada da važi:

$$x \leqslant y \leqslant z, \text{ pri čemu } x, z \in H.$$

Tada je:

$$e_H \leqslant x^{-1}y \leqslant x^{-1}z, \text{ gde } e_H, x^{-1}z \in P_H.$$

Na osnovu 2. sledi da:

$$x^{-1}y \in P_H \subseteq H, \text{dakle } y \in xH = H.$$

Možemo da zaključimo da je podgrupa H konveksna. ■

Dalje, ispitajmo kako izgleda pozitivan konus količničke grupe G/H, po konveksnoj normalnoj podgrupi H. Pokazaćemo da pozitivan konus grupe G/H ima oblik:

$$Q\left(P_G\right) = \left\{pH : p \in P_G\right\}.$$

Teorema 14 *Neka je $\left(G, \cdot, ^{-1}, e\right)$ data uređena grupa i neka je H normalna podgrupa od G. Tada je $Q\left(P_G\right) = \left\{pH : p \in P_G\right\}$ pozitivan konus u odnosu na kompatibilno uređenje u količničkoj grupi G/H ako i samo ako je H konveksna podgrupa.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $Q = \{pH : p \in P_G\}$ odgovarajućeg uređenja u G/H. Da bismo pokazali da je H konveksna, pretpostavimo da je:

Iz prethodnog možemo zaključiti da je P_H poluideal u P_G.

Sada pomoću teoreme 13 (str.29) sledi da je podgrupa H konveksna.

Dokažimo sada obrnut smer. Pretpostavimo da je H konveksna podgrupa. Neka je:

$$Q = \{pH : p \in P_G\}.$$

Očigledno je da je $Q^2 = Q$. Pretpostavimo sada da:

$$xH \in Q \cap Q^{-1}.$$

Tada važi:

$$xH = pH = q^{-1}H, \text{ za neke } p, q \in P_G.$$

Iz prethodnih jednakosti takođe dobijamo da $pq \in H$.

Dalje sledi:

$$e_H \leqslant p \leqslant pq \in H,$$

i pošto je H konveksna podgrupa dobijamo da $p \in H$.

Sledi da je:

$$xH = H, \text{ i znači da } Q \cap Q^{-1} = \{H\}.$$

Najzad, pošto je P_G normalna podpolugrupa od G, očigledno je da je:

$$Q = \{pH : p \in P_G\},$$

normalna podpolugrupa od G/H. Na osnovu Teoreme 11 (str.26) sledi da je Q pozitivan konus, u odnosu na odgovarajuće uređenje, grupe G/H. ■

Opišimo sada jedan mogući način definisanja uređenja u količničkoj grupi G/H.

Ako je H konveksna normalna podgrupa uređene grupe G, tada uređenje $\leq_H$ u G/H koje odgovara pozitivnom konusu $\{p \cdot H : p \in P_G\}$ može biti zadato na sledeći način (kao u dokazu Teoreme 14):

$$\begin{gathered} x \cdot H \leq_H y \cdot H \Leftrightarrow y \cdot x^{-1} \cdot H \in Q \\ \Leftrightarrow (\exists p \in P_G)\, y \cdot x^{-1} \in p \cdot H \\ \Leftrightarrow (\exists p \in P_G)\, (\exists h \in H)\, y \cdot x^{-1} = p \cdot h. \end{gathered}$$

Sada iz prethodne (poslednje) jednakosti dobijamo $y \cdot x^{-1} \geqslant h$, znači $y \geqslant h \cdot x$.

Suprotno, ako je $y \geqslant h \cdot x$ za neko $h \in H$, tada važi:

$$y = y\,(hx)^{-1}\,hx \Rightarrow yx^{-1} = y\,(hx)^{-1}\,h, \text{ gde } y\,(hx)^{-1} \in P_G.$$

U prethodnom smo pokazali da uređenje $\leq_H$ može biti zadato i na sledeći način:

$$x \cdot H \leq_H y \cdot H \Leftrightarrow (\exists h \in H)\, hx \leqslant y.$$

Upravo smo definisali odgovarajuće uređenje $\leq_H$ za uređenu količničku grupu G/H, pri čemu je H konveksna podgrupa uređene grupe G.

Navedimo sada, kao primer, šta se dešava ako za datu grupu G posmatramo njenu količničku grupu G/H, pri čemu podgrupa H nije konveksna. Imamo sledeći primer.

Primer 10 *Neka grupa $\left(G, +, ^{-1}, e, \leqslant\right)$ predstavlja uređenu grupu realnih brojeva, i posmatrajmo podgrupu H i količničku grupu G/H (naravno, u ovom konkretnom slučaju ne postoji prava konveksna podgrupa od G, pa H nije konveksna). Označimo poredak među kosetima pomoću $\leq_H$.*

Dokažimo da je $\left(G/H, +, ^{-1}, H, \leq_H\right)$ uređena količnička grupa.

Neophodno je samo da pokažemo da je poredak saglasan sa translacijama.

$$\text{iz } x + H \leq_H y + H \Rightarrow a + x + H \leq_H a + y + H.$$

Primetimo da je $(x + H) \cap (y + H)$ u opštem slučaju neprazan skup akko je:

$$x - y = kh, \text{ ekvivalentno } x + H = y + H.$$

To znači da u relaciji $\leq_H$ imamo samo jednakost (ne može biti tačno sledeće: $x + H <_H y + H$). Zaključujemo da je jedini mogući poredak trivijalni.

2.4 Mrežno uređena grupa

Mrežno uređena grupa je uređena grupa $\left(G, \cdot, ^{-1}, e, \leq\right)$ takva da uređeni skup $(G, \leq)$ predstavlja mrežu.

Za mrežno uređenu grupu koristimo oznaku l-grupa.

Primer 11 *Neka je $G = C[0,1]$ skup svih neprekidnih realnih funkcija $f(x)$ za $0 \leq x \leq 1$. Tada G predstavlja uređenu komutativnu l-grupu u odnosu na po elementno sabiranje. Binarna relacija $\leq$ definisana je po elementno, znači na sledeći način:*

$$f \leq g \Leftrightarrow (\forall a \in [0,1]) f(a) \leq g(a).$$

Lema 8 *U proizvoljnoj l-grupi $\left(G, \cdot, ^{-1}, e, \leq\right)$, svaka translacija u grupi predstavlja automorfizam uređenih skupova.*

Lema 9 *U proizvoljnoj l-grupi $\left(G, \cdot, ^{-1}, e, \leq\right)$, preslikavanje $x \to x^{-1}$ je dualni automorfizam uređenih skupova u G.*

Pošto su translacije u proizvoljnoj l-grupi izotone bijekcije čija su inverzna preslikavanja takođe izotona, one su automorfizmi uređenih skupova. Znači množenje je distributivno u odnosu na operacije $\wedge, \vee$ u proizvoljnoj l-grupi:

$$\begin{aligned} a \cdot (x \vee y) &= (a \cdot x) \vee (a \cdot y); \ (x \vee y) \cdot b = (x \cdot b) \vee (y \cdot b) \\ a \cdot (x \wedge y) &= (a \cdot x) \wedge (a \cdot y); \ (x \wedge y) \cdot b = (x \cdot b) \wedge (y \cdot b). \end{aligned}$$

Prethodne jednakosti važe i u opštem slučaju:

$$a \cdot \left(\bigvee x_\sigma\right) \cdot b = \bigvee (a \cdot x_\sigma \cdot b)$$
$$a \cdot \left(\bigwedge x_\sigma\right) \cdot b = \bigwedge (a \cdot x_\sigma \cdot b)\,.$$

Dalje, važi da $x \geq e$ povlači $e = x \cdot x^{-1} \geq e \cdot x^{-1} = x^{-1}$, i suprotno, preslikavanje $x \to x^{-1}$ je dualni automorfizam uređenih skupova u proizvoljnoj l-grupi. Znači da važi:

$$a \wedge b = \left(a^{-1} \vee b^{-1}\right)^{-1} = \left(b^{-1} \vee a^{-1}\right)^{-1}.$$

Iz prethodnog, u proizvoljnoj l-grupi imamo identitet:

$$a \cdot (x \vee y)^{-1} \cdot b = \left(a \cdot x^{-1} \cdot b\right) \wedge \left(a \cdot y^{-1} \cdot b\right), \tag{3}$$

i u opštem slučaju:

$$a \cdot \left(\bigvee x_\sigma\right)^{-1} \cdot b = \bigwedge \left(a \cdot x_\sigma^{-1} \cdot b\right), \text{ i dualno.}$$

Stav 15 *U proizvoljnoj l-grupi $\left(G, \cdot, ^{-1}, e, \leq\right)$, za sve elemente a, b važi: $x \geq y$ povlači*

$$a \cdot x^{-1} \cdot b \leq a \cdot y^{-1} \cdot b.$$

Ukoliko u jednakosti koja je dualna (3) uzmemo za $x = a$ i $y = b$, dobićemo sledeću lemu.

Lema 10 *U proizvoljnoj l-grupi, za sve elemente a, b važi:*

$$a \cdot (a \wedge b)^{-1} \cdot b = b \vee a.$$

Stav 16 *U proizvoljnoj komutativnoj l-grupi, za sve elemente a, b važi:*

$$a \cdot b = (a \vee b) \cdot (a \wedge b)\,.$$

Stav 17 *U proizvoljnoj l-grupi, svaki element osim jediničnog (e) je beskonačnog reda.*

Na osnovu stava 17 (prethodni stav) možemo zaključiti da mrežno uređena grupa ne može biti konačna.

Teorema 15 *Uređena grupa $\left(G, \cdot, ^{-1}, e, \leq\right)$ je mrežno uređena ako i samo ako $\sup\{x, e\}$ postoji za sve $x \in G$.*

Dokaz. Ako je data uređena grupa G mrežno uređena, iz definicije sledi da $\sup\{x, e\}$ postoji za sve elemente $x \in G$.

U suprotnom smeru, neka su dati elementi $a, b \in G$, i razmotrimo elemenat $x = \left(a \cdot b^{-1} \vee e\right) \cdot b$.

Pošto je množenje distributivno u odnosu na operaciju $\vee$, primenićemo sledeće:

$$(x \vee y) \cdot b = (x \cdot b) \vee (y \cdot b)\,.$$

Dakle,

$$x = \left(a \cdot b^{-1} \cdot b\right) \vee (e \cdot b) \,.$$

Očigledno važi:

$$x \geq a \cdot b^{-1} \cdot b = a \ \text{ i } \ x \geq e \cdot b = b,$$

odakle sledi da je x gornje ograničenje za $\{a, b\}$.

Dalje, neka je elemenat $y \in G$ takav da je $y \geq a$ i $y \geq b$. Tada sledi:

$$y \cdot b^{-1} \geq a \cdot b^{-1} \ \text{ i } \ y \cdot b^{-1} \geq e, \ \text{ dakle,}$$

$y \cdot b^{-1} \geq a \cdot b^{-1} \vee e$, odnosno $y \geq \left(a \cdot b^{-1} \vee e\right) \cdot b$.

Iz prethodnog možemo zaključiti da elemenat $a \vee b$ postoji u grupi G, i jednak je $\left(a \cdot b^{-1} \vee e\right) \cdot b$.

Na sličan način, dolazimo do zaključka da $\inf \{a, b\}$ postoji u G, odnosno upravo se pokazuje da je $\inf \{a, b\}$ jednak $a \cdot (a \vee b)^{-1} \cdot b$. ■

Stav 18 *U komutativnoj l-grupi važi: za sve* $n > 1$,

$$a^n \leq b^n \ \ \textit{povlači} \ \ a \leq b.$$

Dokaz. Pošto za proizvoljne elemente a i b važi zakon komutativnosti, možemo primeniti isti zakon na elemente a i b^{-1}. Pretpostavimo da je $a^n \leq b^n$. Sledi:

$$\left(a \cdot b^{-1}\right)^n = a^n \cdot (b^{-1})^n \leq b^n \cdot (b^{-1})^n = e.$$

Uvedimo oznaku $z = a \cdot b^{-1}$. Iz zakona komutativnosti sledi:

$$(z \vee e)^n = z^n \vee z^{n-1} \vee \cdot \cdot \vee z \vee e.$$

Pošto je $z^n \leq e$,

$$(z \vee e)^n = z^{n-1} \vee \cdot \cdot \vee z \vee e = (z \vee e)^{n-1} \,.$$

Pomoću zakona skraćivanja sledi da je $z \vee e = e$, dakle,
$z = a \cdot b^{-1} \leq e$ odnosno $a \leq b$. ■

Sledeća teorema pokazuje da ne postoje l-grupe koje nisu distributivne.

Teorema 16 *Svaka l-grupa je, u odnosu na uređenje, distributivna mreža.*

Napomenimo da se neutralni elemenat mrežno uređene grupe G, u oznaci e, u opštem slučaju razlikuje od elementa u mreži koji označavamo sa 0.

Teorema 17 *U proizvoljnoj l-grupi važi:*

$$\begin{aligned} &\textit{1. } a \wedge b = 0 \ \textit{ i } \ a \wedge c = 0 \ \textit{ povlači } \ a \wedge (b \cdot c) = 0, \\ &\textit{2. } a \vee b = 0 \ \textit{ i } \ a \vee c = 0 \ \textit{ povlači } \ a \vee (b \cdot c) = 0. \end{aligned}$$

Dokaz. 1. Iz datih uslova možemo zaključiti da su elementi a, b i c pozitivni. Odatle sledi: $a \wedge (b \cdot c) \geq 0$.

Dalje imamo: $0 = 0 \cdot 0 = (a \wedge b) \cdot (a \wedge c)$.

Dvostrukom primenom jednakosti

$$a \cdot (x \wedge y) = (a \cdot x) \wedge (a \cdot y)$$

na prethodnu formulu,

$0 = ((a \wedge b) \cdot a) \wedge ((a \wedge b) \cdot c) =$

$$(a \cdot a) \wedge (b \cdot a) \wedge (a \cdot c) \wedge (b \cdot c) \geq a \wedge (b \cdot c).$$

Poslednja nejednakost važi jer imamo: $a \cdot a \geq a$, $b \cdot a \geq a$ i $a \cdot c \geq a$.

Ovim je implikacija 1. dokazana, a implikacija 2. je upravo njoj dualna. ■

Neka je data mrežno uređena grupa G, i neka je a proizvoljan elemenat iz G. **Apsolutnu vrednost** elementa a, u oznaci $|a|$, definišemo na sledeći način:

$$|a| = a \vee a^{-1}.$$

Podgrupa H mrežno uređene grupe G je **l-podgrupa** ako je ona takođe podmreža od G.

Stav 19 *Mrežno uređena grupa G je totalno uređena ako i samo ako je svaka podgrupa od G l-podgrupa.*

Teorema 18 *Neka je data mrežno uređena grupa G. Ako su $b_1, ..., b_n$ elementi pozitivnog konusa grupe G, i ako važi da je $e \leq a \leq \prod_{i=1}^{n} b_i.$, tada postoje elementi $a_1, ..., a_n \in P_G$ takvi da za svaki i važi:*

$$a_i \leq b_i \quad i \quad a = \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

2.5 Konveksne l-podgrupe

U opštem slučaju, podgrupa mrežno uređene grupe ne mora biti podmreža. Na primer, u mrežno uređenoj aditivnoj abelovoj grupi $G = Z \times Z$, podskup $H = \{(n, -n) : n \in Z\}$ jeste podgrupa od G, ali nije podmreža. Primetimo da element $(0,0) \vee (1,-1) = (1,0) \notin H$.

l-podgrupa mrežno-uređene grupe $\left(G, \cdot, ^{-1}, e, \leq\right)$ je podgrupa H takva da $(H, \leq)$ predstavlja podmrežu od $(G, \leq)$.

Teorema 19 *Podgrupa* $\left(H,\cdot,^{-1},e,\leq\right)$ *mrežno-uređene grupe* $\left(G,\cdot,^{-1},e,\leq\right)$ *je l-podgrupa od* $\left(G,\cdot,^{-1},e,\leq\right)$ *ako i samo ako:*

$$x\vee e\in H,\quad \text{za sve } x\in H.$$

Dokaz. Ako je H l-podgrupa od G, očigledno važi $x\vee e\in H$, za sve $x\in H$.
U suprotnom smeru, pretpostavimo da $x\vee e\in H$, za sve $x\in H$.
Ako $x,y\in H$, imamo:
$x\vee y=\left(x\cdot y^{-1}\vee e\right)\cdot y\in H$,
odakle takođe sledi da $x\wedge y\in H$, pa H predstavlja podmrežu od G. ■

Označimo pomoću $C(G)$ skup svih konveksnih podgrupa mrežno uređene grupe G.

Teorema 20 *Neka je G mrežno uređena grupa i neka je A konveksna podpolugrupa od P_G koja sadrži elemenat e. Tada je podgrupa $\langle A\rangle$ generisana pomoću A data pomoću $\langle A\rangle=\left\{x\cdot y^{-1}:x,y\in A\right\}$, i ona je konveksna ℓ-podgrupa od G. Važi i više, svaka konveksna ℓ-podgrupa od G se predstavlja na ovaj način.*

Teorema 21 *Kolekcija $C(G)$ svih konveksnih ℓ-podgrupa mrežno uređene grupe formira kompletnu Heyting podmrežu mreže svih podgrupa od G.*

Dokaz. Neka je $(H_i)_{i\in I}$ proizvoljna familija konveksnih l-podgrupa od G.
Očigledno, $\cap H_i$ predstavlja l-podgrupu od G.
Pošto je svaka podgrupa H_i konveksna, na osnovu Teoreme 13 (str.29) sledi:

$$P_{H_i} \text{ je poluideal u } P_G \text{ za svaki } i.$$

Takođe važi da je $\cap_{i\in I}P_{H_i}=P_{\cap P_{H_i}}$, pa možemo zaključiti da je $\cap H_i$ konveksna podgrupa.

Sada posmatrajmo podgrupu H od G koja je generisana pomoću $\cup_{i\in I}H_i$. Pretpostavimo da važi:

$$e\leq g\leq\prod_{i=1}^{n}a_i\in H,\quad \text{gde svaki } a_i\in\cup_{i\in I}H_i$$

Sledi da je $e\leq g\leq\prod_{i=1}^{n}(a_i\vee e)$.

Sada, na osnovu Teoreme 18 (str.34), postoje $b_1,...b_n\in G$ takvi da za svaki $i, i=1,...,n$ važi:

$$e\leq b_i\leq a_i\vee e\quad \text{i}\quad g=\prod_{i=1}^{n}b_i..$$

Pošto su podgrupe H_i konveksne, sledi da $b_i\in\cup_{i\in I}H_i$, odakle iz prethodne jednakosti sledi da $g\in H$. Upravo smo dokazali da je podgrupa H konveksna.

Ostalo je još da dokažemo da je podgrupa H od G koja je generisana pomoću $\cup_{i\in I} H_i$ l-podgrupa. Neka je $h \in H$. Tada važi:

$$h = \prod_{i=1}^{m} c_i, \quad \text{gde svaki } c_i \in \cup_{i\in I} H_i.$$

Takođe važi: $e \leq h \vee e \leq \prod_{i=1}^{m} (c_i \vee e) \in H.$

Pošto je H konveksna podgrupa, na osnovu Teoreme 19 (str.35) sledi da je H l-podgrupa od G.

U prethodnom smo dokazali da $C(G)$ predstavlja kompletnu podmrežu mreže svih podgrupa grupe G.

Pokažimo sada da je $C(G)$ Heyting mreža. Neka je $(Y_i)_{i\in I}$ data familija konveksnih l-podgrupa od G. Tada je dovoljno dokazati da za svaku konveksnu l-podgrupu X od G važi inkluzija:

$$A = X \cap \bigvee_{i\in I} Y_i \subseteq \bigvee_{i\in I} (X \cap Y_i) = B.$$

Najpre pretpostavimo da $a \in P_A$.

Tada važi:

$$e \leq a \in P_X \ \text{ i } \ a = \prod_{i=1}^{t} y_i, \ \text{ gde svaki } y_i \in P_{Y_i}.$$

Znači $e \leq y_i \leq a \in X$ za sve i odnosno za sve $y_i \in X$,
odakle sledi:

$$a = \prod_{i=1}^{t} y_i \in P_B$$

Dakle, pokazali smo da je $P_A \subseteq P_B$.

Sada na osnovu Teoreme 20 (str.35), sledi da važi $A \subseteq B$, što je trebalo pokazati. ∎

3 Rasplinuti podskupovi i rasplinuta relacija

3.1 P-rasplinuti podskup, L-rasplinuti podskup

U ovom odeljku uvedene su osnovne definicije, P-rasplinutog skupa i L-rasplinutog skupa ([90]). L.A.Zadeh je definisao pojam rasplinutog skupa, u radu [104], u slučaju da je njegov kodomen realan interval $[0,1]$. Razmatrana su tvrđenja iz [69] i ista su ovde prilagođena opštem slučaju, u kome L predstavlja mrežu. Takođe je navedeno bitno svojstvo kolekcije podskupova datog skupa, koja pod određenim uslovima određuje odgovarajući P-rasplinuti podskup ([90]).

U ovom poglavlju predstavljene su osnovne osobine rasplinutih podskupova i njihovih nivo-podskupova. Istaknute su razlike u slučajevima da je kodomen rasplinutog podskupa poset P, odnosno mreža L. Tvrđenja su preuzeta iz rada [90].

Neka su dati neprazan skup X i poset $(P, \leqslant)$ koji sadrži najmanji i najveći elementa redom, 0 i 1. Svako preslikavanje $\mu : X \longrightarrow P$ zovemo **rasplinuti** (engl. fuzzy) **podskup** od X (ili P-rasplinuti skup).

Ukoliko u prethodnoj definiciji umesto poseta $(P, \leqslant)$ uzmemo mrežu, dobijamo definiciju L-rasplinutog skupa.

Neka je dat neprazan skup X. Rasplinuti podskup od X je funkcija iz skupa X u L, gde je L kompletna mreža. Ako je L jedinični interval $[0,1]$, to je uobičajeni rasplinuti podskup od X, kako ga je definisao Zadeh. Skup svih rasplinutih podskupova od X se obeležava sa $\mathcal{F}P\,(X)$.

Neka je $(P, \leqslant)$ dati poset. Ako je $\mu : X \to P$ rasplinuti podskup od X tada, za $p \in P$, skup

$$\mu_p := \{x \in X \mid \mu(x) \geq p\}$$

nazivamo **p-nivo**, ili **nivo-podskup** rasplinutog podskupa μ.

Ukoliko u prethodnoj definiciji umesto poseta P uzmemo mrežu L (specijalan tip poseta), definicija ostaje ista.

Očigledno, p-nivo rasplinutog podskupa μ predstavlja inverznu sliku (od μ) glavnog filtra u P, generisanog pomoću p:

$$\mu_p = \mu^{-1}(\uparrow p).$$

Uvešćemo sada neke pojmove teorije o rasplinutim strukturama, čiji skup vrednosti preslikavanja pripada kompletnoj mreži.

Neka je $\mu \in \mathcal{F}P\,(X)$. Tada se skup $\{\mu\,(x) : x \in X\}$ zove **skup slika** od μ, i označava $\mu\,(X)$ ili $Im\,(\mu)$. Skup $\{x : x \in X, \mu\,(x) > 0\}$ se označava μ^*, ili

$Supp\,(\mu)$. μ se zove **konačan** rasplinuti podskup ako je μ^* konačan skup, i **beskonačan** rasplinuti podskup u suprotnom.

Ako $\mu \in \mathcal{FP}(X)$, onda μ ima **svojstvo supremuma** ako, za svaki podskup A od X, postoji $a_0 \in A$, takav da važi: $\mu(a_0) = \vee_{a\in A}\mu(a)$.

Neka je $Y \subseteq X$, i neka je $a \in L$. Definišemo $a_Y \in \mathcal{F}P(X)$ na sledeći način:

$$a_Y(x) = \begin{cases} a & \text{ako} \quad x \in Y \\ 0 & \text{ako} \quad x \in X \setminus Y \end{cases}.$$

Ako je Y jednočlan skup, na primer $\{y\}$, onda se $a_{\{y\}}$ zove rasplinuta **tačka** (engl. fuzzy singleton), i ponekad se označava sa y_a. Neka je 1_Y oznaka za karakterističnu funkciju skupa Y.

Neka su dati $\mu, \nu \in \mathcal{F}P(X)$. Ako je $\mu(x) \leq \nu(x)$, za sve $x \in X$, onda je μ sadržan u ν, odnosno μ je **podskup** od ν, i pišemo $\mu \subseteq \nu$ (ili $\nu \supseteq \mu$).

Očigledno, relacija inkluzije $\subseteq$ je parcijalno uređenje u $\mathcal{FP}(X)$.

Neka su dati $\mu, \nu \in \mathcal{F}P(X)$. Definišimo $\mu \cup \nu \in \mathcal{F}P(X)$ i $\mu \cap \nu \in \mathcal{F}P(X)$ na sledeći način: za $\forall x \in X$,

$$(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$$

$$(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x).$$

Tada se $\mu \cup \nu$ i $\mu \cap \nu$ zovu **unija** i **presek** rasplinutih podskupova μ i ν, redom.

Za proizvoljnu kolekciju $\{\mu_i : i \in I\}$ rasplinutih podskupova iz X, gde je I neprazan skup indeksa, unija $\bigcup\limits_{i\in I}\mu_i$ i presek $\bigcap\limits_{i\in I}\mu_i$ rasplinutih podskupova μ_i, date su pomoću: $\forall x \in X$,

$$\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)(x) = \bigvee_{i\in I}\mu_i(x)$$
$$\left(\bigcap_{i\in I}\mu_i\right)(x) = \bigwedge_{i\in I}\mu_i(x).$$

Jednostavno se pokazuje da za sve $\mu, \nu \in \mathcal{FP}(X)$ važi,

$$1.\mu \subseteq \nu, a \in L \Rightarrow \mu_a \subseteq \nu_a,$$
$$2.\mu = \nu \Longleftrightarrow \mu_a = \nu_a, \text{ za sve } a \in L.$$

Izvedimo dokaz druge ekvivalencije (2.).

Ako pretpostavimo da važi $\mu = \nu$, jednakost nivo-podskupova očigledno sledi.

Suprotno, pretpostavimo da važi $\mu_a = \nu_a$, za sve $a \in L$.

Neka je

$$\mu(x) = p \text{ i } \nu(x) = p_1 \text{ za neki } x \in X.$$

U slučaju da je $p > p_1$, zaključujemo da $x \notin \nu_p$. Upravo smo dobili kontradikciju.

Sledeća teorema opisuje neke osnovne osobine nivo skupova. Teorema je ovde preformulisana, tako da umesto u slučaju da je kodomen mreža $[0,1]$, važi u opštem slučaju. Iz tog razloga, u njoj ne stoji dodatni uslov, da ukoliko je I konačan skup, u (1) važi jednakost (jednakost važi samo u slučaju da je $L = [0,1]$).

Teorema 22 *Pretpostavimo da je zadata proizvoljna familija rasplinutih podskupova $\{\mu_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{F}P(X)$. Tada za proizvoljno $a \in L$ važi:*

(1)

$$\bigcup_{i\in I} (\mu_i)_a \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} \mu_i\right)_a$$

(2)

$$\bigcap_{i\in I} (\mu_i)_a = \left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)_a .$$

Neka je $(P, \leqslant)$ oznaka za parcijalno uređen skup (poset) koji ima najmanji i najveći element. Koristićemo takođe i samo oznaku P za isti pojam.

U daljem tekstu uzimamo da dvoelementni poset $(\{0,1\}, \leqslant)$, takav da je $\{0,1\} \subseteq P$, predstavlja kodomen karakteristične funkcije.

Neka su dati neprazan skup A i poset $(P, \leqslant)$. Neka je $\mu : A \to P$ rasplinuti podskup od A. Za $p \in P$, funkcija $p-$nivoa preslikavanja μ, je funkcija

$$\overline{\mu_p} : A \to \{0,1\},$$

takva da za sve $x \in A$,

$$\overline{\mu_p}(x) = 1 \textit{ ako i samo ako } \mu(x) \geq p.$$

Očigledno je da je $\overline{\mu_p}$ karakteristična funkcija p-nivoa preslikavanja μ :

$$\mu_p = \{x \in A : \mu(x) \geq p\}.$$

Osnovne osobine rasplinutih skupova su posledica dve bitne činjenice:

-rasplinuti skupovi su funkcije

-rasplinuti skupovi mogu biti jedinstveno predstavljeni pomoću kolekcije nivo-podskupova.

Sva tvrđenja koja su formulisana za P-rasplinute skupove takođe važe i za L-rasplinute skupove (L je mreža).

Stav 20 *Ako je $\mu : A \to P$ P-rasplinuti podskup od A, tada za sve $x \in A$ važi:*

$$\mu(x) = \bigvee \left(p \in P : \overline{\mu_p}(x) = 1\right),$$

ekvivalentno supremum skupa $\left\{p \in P : \overline{\mu_p}(x) = 1\right\}$ postoji i jednak je $\mu(x)$.

Dokaz. Za $x \in A$, neka je $\mu(x) = r \in P$. Tada je

$$\overline{\mu_r}(x) = 1.$$

Ako za $p \in P$ važi $\overline{\mu_p}(x) = 1$, tada je

$$\mu(x) \geq p, \text{ ekvivalentno } r \geq p.$$

Pošto $r \in \left\{p \in P : \overline{\mu_p}(x) = 1\right\}$,
r je supremum tog skupa. Odatle sledi:

$$\mu(x) = r = \bigvee \left(p \in P : \overline{\mu_p}(x) = 1\right).$$

Ovim je dokaz kompletiran. ■

U slučaju L-rasplinutih skupova, prethodni stav važi, i može biti formulisan u terminima mrežnih operacija. Sledeći stav je direktna posledica prethodnog.

Stav 21 *Ako je μ L-rasplinuti podskup skupa A, tada za sve $x \in A$ važi:*

$$\mu(x) = \bigvee_{p \in L} p \circ \overline{\mu_p}(x),$$

gde je $p \circ \overline{\mu_p}(x) = \begin{cases} p & \textit{ako} \quad \overline{\mu_p}(x) = 1 \\ 0 & \textit{inače.} \end{cases}$.

Sledeći stav daje vezu između nivo-podskupova i uređenja u P, odnosno činjenicu da manji nivo-podskupovi odgovaraju većim elementima iz P.

Stav 22 *Neka je $\mu : A \to P$ P-rasplinuti podskup od A. Važi:*

$$\textit{ako} \;\; p, q \in P \textit{ i } p \leqslant q, \;\; \textit{tada je } \mu_q \subseteq \mu_p.$$

Jednostavno se može proveriti da suprotan smer nije tačan, u opštem slučaju. Mogu se definisati dodatni uslovi pod kojima on važi.

Stav 23 *Neka je* $\mu : A \to P$ *P-rasplinuti podskup od* A. *Tada važi:*

1. za sve $x, y \in A$, $\mu(x) \neq \mu(y)$

$$\text{ako i samo ako } \mu_{\mu(x)} \neq \mu_{\mu(y)}.$$

2. za $p \in P$ *i* $x \in A$, $\mu(x) \geq p$

$$\text{ako i samo ako } \mu_{\mu(x)} \subseteq \mu_p.$$

Stav 24 *Neka je* $\mu : A \to P$ *P-rasplinuti podskup od* A. *Tada za sve* $x, y \in A$ *važi:*

$$\mu(y) \leq \mu(x) \text{ ako i samo ako } \mu_{\mu(x)} \subseteq \mu_{\mu(y)}.$$

Dokaz. Dokaz sledi direktno pomoću Stava 23.2, ako uzmemo da je $p = \mu(y)$.
■

Za P-rasplinuti podskup μ skupa A, neka su μ_P i $\overline{\mu_P}$ oznake za kolekcije nivo-podskupova i njihovih karakterističnih funkcija, redom:

$$\mu_P = \left\{\mu_p : p \in P\right\}, \quad \overline{\mu_P} = \left\{\overline{\mu_p} : p \in P\right\}.$$

Stav 25 *Neka je* $\mu : A \to P$ *P-rasplinuti podskup od* A. *Tada važi:*

1. ako za $P_1 \subseteq P$ *postoji supremum od* P_1, *tada je:*

$$\bigcap \left\{\mu_p : p \in P_1\right\} = \mu_{\vee(p:p\in P_1)};$$

2.

$$\bigcup \left\{\mu_p : p \in P\right\} = A;$$

3. za sve $x \in A$,

$$\bigcap \left\{\mu_p : x \in \mu_p\right\} \in \mu_P.$$

Dokaz. 1. Ako supremum od P_1 postoji, tada važi:

$$x \in \mu_{\vee(p:p\in P_1)} \text{ ako i samo ako } \mu(x) \geq \bigvee (p : p \in P_1),$$

ako i samo ako $\mu(x) \geq p$ za sve $p \in P_1$,
ako i samo ako za sve $p \in P_1$, $x \in \mu_p$,

$$\text{ako i samo ako } x \in \bigcap\{\mu_p : p \in P_1\}.$$

2. Neka je $x \in A$ i $\mu(x) = p \in P$. Tada važi:

$$x \in \mu_p \text{ i } x \in \bigcup\{\mu_p : p \in P\}.$$

3. Na osnovu 1. sledi jednakost:

$$\bigcap \{\mu_p \in \mu_P : \overline{\mu_p}(x) = 1\} = \mu_{\vee\left(p:\overline{\mu_p}(x)=1\right)} \in \mu_P,$$

jer supremum uvek postoji. ■

L-rasplinuti skupovi imaju prethodno navedena svojstva, kao i još neka dodatna. Na primer, kolekcija nivo- podskupova predstavlja mrežu, u kojoj je uređenje dato skupovnom inkluzijom.

Stav 26 *Neka je $\mu : A \to L$ L-rasplinuti podskup od A. Tada važi:*

1.Kolekcija $\mu_L = \left\{\mu_p : p \in L\right\}$ nivo podskupova preslikavanja μ predstavlja Murovu familiju podskupova od A, i mrežu u kojoj je uređenje dato skupovnom inkluzijom.

2.

$$\bigcap \{\mu_p : p \in K \subseteq L\} = \mu_{\vee(p:p\in K)}.$$

Lema 11 *Neka je $\mu : A \to L$ L-rasplinuti podskup od A. Onda važi:*

$$\textit{ako je } \mu_q \subseteq \mu_p, \textit{onda je } \mu_q = \mu_{q\vee p}.$$

Iz prethodno izloženog možemo zaključiti da nisu svi nivo-podskupovi (P-nivo-podskupovi ili L-nivo-podskupovi) različiti. Znači, svaki rasplinuti skup formira particiju poseta P na sledeći način.

Neka je $\mu : S \to P$ P-rasplinuti podskup od S, i neka je $\approx$ binarna relacija u P, takva da za sve $p, q \in P$ važi:

$$p \approx q \text{ ako i samo ako } \mu_p = \mu_q.$$

Očigledno je $\approx$ relacija ekvivalencije u P. Dalje, neka je:

$$\mu(S) = \{p \in P : p = \mu(x), \ za \ neko \ x \in S\}.$$

Najpre opišimo $\approx$ u terminima uređenja u P.

Stav 27 *Ako je $\mu : S \to P$ P-rasplinuti podskup od S i $p, q \in P$, tada važi:*

$$p \approx q \textit{ ako i samo ako } \uparrow p \cap \mu(S) = \uparrow q \cap \mu(S).$$

Dokaz. Relacija $p \approx q$ važi ako i samo ako
$\mu_p = \mu_q$
ako i samo ako za sve $x \in S$,
$\mu(x) \geq p \Leftrightarrow \mu(x) \geq q$
ako i samo ako
$\{x \in S : \mu(x) \in \uparrow p\} = \{x \in S : \mu(x) \in \uparrow q\}$
ako i samo ako
$\uparrow p \cap \mu(S) = \uparrow q \cap \mu(S)$. ■

Primetimo da je za $p \in P$,

$$[p]_{\approx} := \{q \in P : p \approx q\}.$$

U sledećoj lemi ćemo pokazati da su vrednosti funkcije pripadanja maksimalni elementi $\approx$-klasa.

Lema 12 *Neka je $\mu : S \to P$ P-rasplinuti podskup od S. Ako za neki $x \in S$, $p = \mu(x)$, tada je p najveći elemenat $\approx$-klase kojoj pripada.*

Dokaz. Za svaki $q \in [p]_{\approx}$, $p = \mu(x) \geq q$, i znači da je p najveći elemenat u klasi. ■

Relacija $\leqslant$ u posetu P formira uređenje u skupu klasa ekvivalencije relacije $\approx$, odnosno u $P/\approx$, na sledeći način:

$$[p]_{\approx} \leq [q]_{\approx} \text{ ako i samo ako } \uparrow q \cap \mu(S) \subseteq \uparrow p \cap \mu(S),$$

pri čemu su p, q elementi iz P.

Očigledno je relacija $\leq$ na klasama ekvivalencije dobro definisana, i pošto je zadata pomoću skupovne inkluzije, predstavlja relaciju poretka u $P/\approx$. Ovo uređenje je dualno izomorfno skupovnoj inkluziji između nivo-podskupova preslikavanja μ, što je formulisano sledećim stavom.

Stav 28 *Ako je $\mu : S \to P$ P-rasplinuti podskup od S, tada važi:*

$$[p]_{\approx} \leq [q]_{\approx} \text{ ako i samo ako } \mu_q \subseteq \mu_p.$$

Sada ćemo formulisati određene osobine relacije $\approx$ za mrežno vrednosne rasplinute skupove. Uvedimo oznaku, takvu da za proizvoljan elemenat $p \in L$,

$$\bigvee [p]_{\approx} = \bigvee \left(q : q \in [p]_{\approx}\right).$$

Stav 29 *Ako je $\mu : S \to L$ L-rasplinuti podskup od S, tada važi:*

1. *za svaki $x \in S$, $\mu(x) = \vee [\mu(x)]_{\approx}$;*
2. *za proizvoljne $p, q \in L$,*

$$[p]_{\approx} \leq [q]_{\approx} \text{ ako i samo ako } \bigvee [p]_{\approx} \leq \bigvee [q]_{\approx}$$

(uređenje na desnoj strani nejednakosti je uređenje u mreži L).

Teorema 23 *Ako je F data Murova familija podskupova nepraznog skupa A, onda postoje mreža L i rasplinuti podskup $M : A \to L$ od A, takvi da nivoi od M predstavljaju elemente familije F.*

Dokaz. Neka je mreža L upravo familija F, u odnosu na poredak dualan skupovnoj inkluziji.

Neka je funkcija $M : A \to L$ definisana pomoću:

$$M(x) := \bigcap (p \in F : x \in p).$$

Pokazaćemo da je M rasplinuti podskup od A, takav da za svaki elemenat $p \in L$ važi: $p = M_p$.

Očigledno je rasplinuti skup M dobro definisan. Dalje, neka je elemenat $p \in L$ proizvoljan. Za svaki $x \in A$ važi:

$$x \in M_p \text{ ako i samo ako } M(x) \geq p$$

$$\text{ako i samo ako } \bigcap (q \in F : x \in q) \geq p$$

$$\text{ako i samo ako } \bigcap (q \in F : x \in q) \subseteq p$$

ako i samo ako $x \in p$.

Ovim je dokaz kompletiran. ■

3.2 Funkcije nivo-podskupova kao izotona preslikavanja

U ovom odeljku ćemo pokazati da funkcije nivo podskupova imaju važnu osobinu vezanu za uređenje: one određuju izotone funkcije iz skupa vrednosti $\mu(S)$ preslikavanja μ u dvoelementni poset $\mathbf{2} = (\{0,1\}, \leq)$ (tvrđenja su preuzeta iz rada [90]). Formulišimo sledeću lemu.

Lema 13 *Neka je $\mu : S \to P$ P-rasplinuti podskup od S. Za sve $p \in P$ i sve $x, y \in S$,*

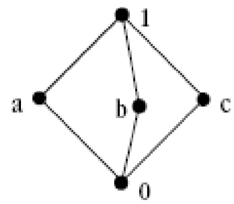
$$\mu(x) \geq \mu(y) \text{ povlači } \overline{\mu_p}(x) \geq \overline{\mu_p}(y).$$

Kao posledica, svaki rasplinuti skup $\mu : S \to P$ određuje odgovarajuću izotonu funkciju iz $\mu(S)$ u $\mathbf{2}$.

Stav 30 *Neka je $\mu : S \to P$ P-rasplinuti podskup od S. Za $p \in P$, funkcija $f_p : \mu(S) \to \{0,1\}$, takva da za sve $q \in \mu(S)$ važi:*

$$f_p(q) = 1 \text{ ako i samo ako } q \geq p, \tag{4}$$

je izotona.



slika 3

Svaka funkcija f_p određuje nivo μ_p i obrnuto. Očigledno važi i da je f_p karakteristična funkcija uređenog filtera u posetu $\mu(S)$. Neposredna posledica prethodnog formulisana je u sledećoj teoremi.

Teorema 24 *Svaki nivo skup μ_p rasplinutog skupa $\mu : S \to P$ određuje izotonu funkciju $f_p : \mu(S) \to \{0,1\}$, definisanu pomoću (4), ili ekvivalentno uređeni filter F_p u posetu $\mu(S)$, na sledeći način: za svaki elemenat q iz $\mu(S)$,*

$$q \in F_p \text{ ako i samo ako je } q \geq p.$$

Zbog navedene veze između uređenja u $\mu(S)$ sa uređenjem u **2**, dekompozicija rasplinutog skupa pomoću nivo- podskupova daje kolekciju izotonih funkcija (ili uređenih filtera) sa domenom $\mu(S)$.

Primer 12 *Neka je $S = \{x, y, z\}$ i neka je $(L, \leq)$ mreža data na slici 3.*
Preslikavanje $\mu : S \to L$, zadato pomoću:

$$\mu = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & c & 1 \end{pmatrix}$$

je L-rasplinuti podskup od S. Njegovi nivo-podskupovi su:

$$\mu_b = \mu_1 = \{z\}, \quad \mu_a = \{x, z\}, \quad \mu_c = \{y, z\}, \quad \mu_0 = \{x, y, z\}.$$

U tabeli 1 date su funkcije nivo-podskupova zadatog preslikavanja μ. Ako ove funkcije posmatramo kao funkcije iz mreže u skup vrednosti $(\{0,1\}, \leqslant)$, vidimo da one predstavljaju izotone funkcije. Označimo navedene funkcije sa f_i, gde je i elemenat iz L. Dakle važi, za sve $p, q \in L$:

$$\text{ako } p \leq q, \text{ onda } f_i(p) \leqslant f_i(q).$$

Poslednja kolona u tabeli sadrži odgovarajuće uređene filtre.

S	x	y	z		
$\mu\,(S)$	a	c	1		
$\mu_{\ b}$	0	0	1	$f_{\ b}$	$\{1\}$
$\mu_{\ 1}$	0	0	1	$f_{\ 1}$	$\{1\}$
$\mu_{\ a}$	1	0	1	$f_{\ a}$	$\{a,1\}$
$\mu_{\ c}$	0	1	1	$f_{\ c}$	$\{c,1\}$
$\mu_{\ 0}$	1	1	1	$f_{\ 0}$	$\{a,c,1\}$

tabela 1

3.3 Rasplinuta relacija

Neka je dat skup A. Rasplinuta relacija $\beta : A \times A \to L$ predstavlja rasplinuti podskup iz $A \times A$ u L.

Definišimo sada standardne pojmove: rasplinuta relacija $\rho : A^2 \to L$ na skupu A je

- **refleksivna,** ako važi $\rho(x,x) = 1$, za sve $x \in A$; (r)
- **antisimetrična,** ako važi $\rho(x,y) \wedge \rho(y,x) = 0$, za sve $x,y \in A, x \neq y$; (a)
- **tranzitivna,** ako važi $\rho(x,y) \wedge \rho(y,z) \leq \rho(x,z)$, za sve $x,y,z \in A$. (t)
- **simetrična**, ako važi $\rho\,(x,y) = \rho\,(y,x)$, za sve $x,y \in A$. (s)

U literaturi se često mogu naći i drugačije definicije antisimetričnosti i tranzitivnosti.

Rasplinuta relacija $\rho : A^2 \to L$ (L je kompletna mreža) je tranzitivna, ako važi:

$$\rho\,(x,y) \geq \bigvee_{z} \left(\rho\,(x,z) \wedge \rho\,(z,y)\right), \qquad \text{za sve } x,y \in A.$$

Prethodno navedena definicija tranzitivnosti ekvivalentna je definiciji tranzitivnosti označenoj sa (t).

Rasplinuta relacija ρ na skupu A je **relacija rasplinutog poretka** (**rasplinuti poredak**) na A, ako je ona refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Rasplinuta relacija ρ se zove **rasplinuta relacija ekvivalencije**, ako je ona refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Sledeća osobina je takođe usko vezana za rasplinuti poredak (rasplinuto uređenje).

Rasplinuta relacija $\rho : A^2 \to L$ na skupu A je:

- **slabo refleksivna** ako
$\rho(x,x) \geq \rho(x,y)$ i $\rho(x,x) \geq \rho(y,x)$, za sve $x, y \in A$. (wr)

Rasplinuta relacija ρ na skupu A je **relacija slabog rasplinutog poretka** (**slabi rasplinuti poredak**) na A, ako je ona slabo refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Teorema 25 *Relacija $\rho : A^2 \to L$ je relacija rasplinutog poretka na A ako i samo ako svi nivo-podskupovi osim 0-nivoa predstavljaju relaciju poretka na istom skupu.*

Stav 31 *Neka je $\rho : A^2 \to L$ relacija rasplinutog poretka, takva da je L kompletna mreža bez delitelja nule u odnosu na $\wedge$. Tada, suppρ je klasična relacija poretka na skupu A.*

Dokaz. Pošto za sve $x \in A$ važi da je $\rho(x,x) = 1 > 0$, sledi da $(x,x) \in$supp ρ i supp ρ je refleksivna.

Ako $(x,y),(y,x) \in$supp ρ ekvivalentno, ako je $\rho(x,y) > 0$ i $\rho(y,x) > 0$, pošto L nema delitelja nule, sledi da je $\rho(x,y) \wedge \rho(y,x) > 0$ i znači $x = y$.

Ako $(x,y),(y,z) \in$supp ρ ekvivalentno, ako je $\rho(x,y) > 0$ i $\rho(y,z) > 0$, sledi da je $\rho(x,y) \wedge \rho(y,z) > 0$ i znači pomoću rasplinute tranzitivnosti, $\rho(x,z) > 0$. Znači $(x,z) \in$supp ρ i supp ρ je tranzitivna. ■

Primetimo da je u Stavu 31 (prethodni stav) neophodan uslov da L nema delitelje nule.

Ako je ρ rasplinuti poredak na A, and $k_{\mathrm{supp}\rho}$ karakteristična funkcija od supp ρ posmatrana kao rasplinuti skup, tada očigledno, po definiciji supp ρ, važi da je $\rho \subseteq k_{\mathrm{supp}\rho}$ (zbog refleksivnosti).

Neka je data rasplinuta relacija $\rho : A^2 \to L$, i neka je $p \in L$. Relacija nivoa p, u oznaci ρ_p, je podskup od A^2 za čije elemente (x,y) važi:

$$(x,y) \in \rho_p \text{ ako i samo ako } \rho(x,y) \geq p.$$

Sledeći stav pokazuje razlog uvođenja i razmatranja slabog rasplinutog uređenja.

Stav 32 *Neka je $\rho : A^2 \to L$ relacija slabog rasplinutog poretka na A, i $\delta(\rho) : A \to L$ rasplinuti skup definisan pomoću $\delta(\rho)(x) := \rho(x,x)$. Tada za svaki ne-nula element $p \in L$, nivo-relacija ρ_p je klasičan poredak na nivo-podskupu $\delta(\rho)_p$ od A.*

Dokaz. Neka je $p \in L$, $p \neq 0$. Prvo dokazujemo da je ρ_p relacija na $\delta(\rho)_p$. Ako je $\rho(x,y) \geq p$, tada takođe važi $\delta(\rho)(x) = \rho(x,x) \geq p$ i $x \in \delta(\rho)_p$. Analogno $y \in \delta(\rho)_p$.

Dalje, za $x \in X$, $(x,x) \in \rho_p$ ako i samo ako $\rho(x,x) \geq p$ ako i samo ako $\delta(\rho)(x) \geq p$, ako i samo ako $x \in \delta(\rho)_p$. Znači, ρ_p je refleksivna relacija na $\delta(\rho)_p$. Ako je $x \neq y$ i $(x,y) \in \rho_p$, tada je $\rho(x,y) \geq p$. Pošto je ρ antisimetrična, sledi da je $\rho(x,y) \wedge \rho(y,x) = 0$, znači $\rho(y,x) \ngeq p$, ekvivalentno, $(y,x) \notin \rho_p$ i ρ_p je klasična antisimetrična relacija. Ako $(x,y),(y,z) \in \rho_p$, tada $\rho(x,y) \geq p$ i $\rho(y,z) \geq p$. Pomoću tranzitivnosti ρ, sledi da je $p \leq \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) \leq \rho(x,z)$, znači $\rho(x,z) \geq p$ i $(x,z) \in \rho_p$, što dokazuje da je ρ_p tranzitivna. ∎

Napomenimo da za razliku od slučaja rasplinutog poretka, nula rasplinuta relacija odnosno ($\rho(x,y) = 0$ za sve $x,y \in A$) predstavlja slabi rasplinuti poredak na A.

4 Rasplinute uređene strukture

U ovom poglavlju ćemo povezati prethodno uvedene pojmove rasplinutog poretka sa rasplinutim algebarskim strukturama.

Naime, posmatraćemo uređenu grupu. Razmotrićemo rasplinutu podgrupu i rasplinuti podposet kao njene rasplinute podstrukture. U tom cilju, najpre uvodimo naš pristup rasplinutim posetima, opisan u sledećem odeljku (4.1).

4.1 Rasplinuti podposet

Najpre uvodimo definicije rasplinutog poluideala, rasplinutog polufiltra, rasplinutog glavnog ideala, rasplinutog glavnog filtra i rasplinutog konveksnog podposeta ([99]). Definicije predstavljaju "fazifikovane" definicije klasične algebre. Naš pristup rasplinutim posetima zasniva se na pristupu izloženom u radovima [94] i [104]. Odeljak sadrži originalna tvrđenja, objavljena takođe i u radu [99].

Neka je $(P, \leqslant)$ poset i $(L, \wedge, \vee, \leq)$, što je uobičajeno, kompletna mreža (primetimo razliku između oznaka uređenja u P i u L). Pomoću $k_{\leqslant}$ označavamo karakterističnu funkciju uređenja u P: za proizvoljne $x, y \in P$

$$k_{\leqslant}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{ako} \quad x \leqslant y \\ 0 & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Proizvoljnu funkciju $\alpha : P \to L$ nazivamo **rasplinuti podposet** od P. Primetimo da je ova definicija analogna klasičnoj definiciji: svaki podskup poseta sa klasičnim uređenjem je njegov podposet, sa restrikcijom istog uređenja na domen podposeta. Ovde prosto podrazumevamo da (klasično) uređenje $\leqslant$ ostaje isto.

Lema 14 *Svaki nivo rasplinutog podposeta α od poseta P je klasičan podposet od P, u odnosu na restrikciju poretka iz P na taj nivo.*

Dokaz. Nivoi rasplinutog podposeta su podskupovi od P, pa je očigledno da su to podposeti u odnosu na restrikciju poretka iz P. ■

Neki specijalni rasplinuti podposeti su dati u ovom delu.

Rasplinuti podposet $\Upsilon : P \to L$ iz $(P, \leqslant)$ je **donji rasplinuti skup (**fuzzy down-set, engl.) ili **rasplinuti poluideal** u P ako za sve $x, y \in P$

$$x \leqslant y \text{ povlači } \Upsilon(y) \leq \Upsilon(x). \tag{5}$$

Dualno rasplinuti podposet $F : P \to L$ iz $(P, \leqslant)$ je **gornji rasplinuti skup** (fuzzy up-set, engl.) ili **rasplinuti polufilter** u P ako za sve $x, y \in P$

$$x \leqslant y \text{ povlači } F(x) \leq F(y). \tag{6}$$

Kao i u prethodnom delu, navešćemo analogne osobine za nivoe. Izvešćemo dokaz jednog od navedenih stavova (Stava 33).

Stav 33 *Neka je $\alpha : P \to L$ rasplinuti podposet od $(P, \leqslant)$. Tada α predstavlja gornji rasplinuti podskup od P ako i samo ako je svaki nivo od α gornji podskup od P.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\alpha : P \to L$ gornji rasplinuti skup.

Posmatrajmo nivo α_p, gde $p \in L$. Neka je $x \in \alpha_p$ proizvoljan elemenat. Važi:

$$x \leqslant y \Rightarrow \alpha(x) \leq \alpha(y).$$

Pošto $x \in \alpha_p \Leftrightarrow \alpha(x) \geq p$, zaključujemo:

$$\alpha(y) \geq p \ \text{ ekvivalentno } \ y \in \alpha_p.$$

U obrnutom smeru, pretpostavimo da je $x \leqslant y$, i neka je $p = \alpha(x)$, tj. $x \in \alpha_p$.

Pošto je nivo α_p gornji skup u P, važi:

$$y \in \alpha_p, \quad \text{odnosno} \quad \alpha(y) \geq p = \alpha(x).$$

Upravo smo pokazali da je α gornji rasplinuti skup. ■

Stav 34 *Neka je $\alpha : P \to L$ rasplinuti podposet od $(P, \leqslant)$. Tada α predstavlja donji rasplinuti podskup od P ako i samo ako je svaki nivo od α donji skup u P.*

Sada ćemo izložiti važnu osobinu donjeg rasplinutog i gornjeg rasplinutog skupa, koja ima primenu u jednom od narednih tvrđenja.

Stav 35 *Rasplinuti skup $\mu : P \to L$ je donji rasplinuti podskup od P ako i samo ako za sve $x, y \in P$ važi sledeće:*

$$\mu(x) \wedge k_{\leqslant}(y, x) \leq \mu(y). \tag{7}$$

Dualno, μ je gornji rasplinuti podskup od P ako i samo ako za sve $x, y \in P$ važi

$$\mu(x) \wedge k_{\leqslant}(x, y) \leq \mu(y). \tag{8}$$

Dokaz. Ako je μ donji rasplinuti skup iz P i $y \leqslant x$ važi u P, tada je $k_{\leqslant}(y,x) = 1$ i (5) povlači (7); ako $y \nleqslant x$, tada $k_{\leqslant}(y,x) = 0$ i (7) ponovo važi. Suprotno, ako važi (7) i $y \leqslant x$, tada $k_{\leqslant}(y,x) = 1$ i važi (5).

Drugi deo se dokazuje dualno. ■

Kao i u slučaju klasičnih uređenih skupova, uvodimo neke specijalne rasplinute donje i gornje skupove.

Za $a \in P$, preslikavanje $f_{\downarrow a} : P \to L$ je **rasplinuti glavni ideal** generisan pomoću a, ako ono predstavlja donji rasplinuti podskup od P koji zadovoljava: za svaki $x \in P$

$$k_{\leqslant}(x,a) \wedge f_{\downarrow a}(a) \leq f_{\downarrow a}(x) \leq k_{\leqslant}(x,a).$$

Dualno, za $a \in P$, preslikavanje $f_{\uparrow a} : P \to L$ je **rasplinuti glavni filter** generisan pomoću a, ako ono predstavlja gornji rasplinuti podskup od P koji zadovoljava: za svaki $x \in P$

$$k_{\leqslant}(a,x) \wedge f_{\uparrow a}(a) \leq f_{\uparrow a}(x) \leq k_{\leqslant}(a,x).$$

Stav 36 *Neka je dat proizvoljan gornji rasplinuti podskup $\mu : P \to L$ od P, čija je vrednost 0 za sve elemente iz P koji ne pripadaju $\uparrow a$. Tada μ predstavlja rasplinuti glavni filter generisan pomoću elementa $a \in P$.*

Dokaz. Pretpostavimo da μ ispunjava uslove Stava.

Ako je $y \geqslant a$, onda je $k_{\leqslant}(a,y) = 1$.

Na osnovu Stava 35, za elemente $a, y \in P$ važi:

$$\begin{aligned} k_{\leqslant}(a,y) \wedge \mu(a) &\leq \mu(y) \Rightarrow \\ k_{\leqslant}(a,y) \wedge \mu(a) &\leq \mu(y) \leq k_{\leqslant}(a,y) = 1. \end{aligned}$$

Za elemente $y \notin \uparrow a$, po pretpostavci stava, $\mu(y) = 0$. Dakle, važi:

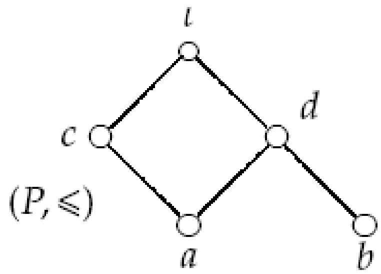
$$0 = k_{\leqslant}(a,y) \wedge \mu(a) \leq \mu(y) \leq k_{\leqslant}(a,y) = 0,$$

i ovim je dokaz kompletiran. ■

Prethodno navedeni stav važi i u obrnutom smeru. Dakle, ukoliko je μ dati rasplinuti glavni filter generisan pomoću elementa $a \in P$, iz same definicije sledi da μ predstavlja gornji rasplinuti skup. Ostaje da pokažemo da se elementi iz P koji ne pripadaju $\uparrow a$ preslikavaju u 0. Naime, pošto je μ rasplinuti glavni filter generisan pomoću a, za sve elemente $y \notin \uparrow a$ važi:

$$\mu(y) \leq k_{\leqslant}(a,y) = 0.$$

Tražena jednakost direktno sledi.



slika 4

Stav 37 *Neka je dat proizvoljan donji rasplinuti podskup $\mu : P \to L$ od P, čija je vrednost 0 za sve elemente iz P koji ne pripadaju $\downarrow a$. Tada μ predstavlja rasplinuti glavni ideal generisan pomoću elementa $a \in P$.*

Pomoću prethodnog, za elemente $a, b \in P$, definišemo **rasplinuti interval** $f_{[a,b]}$ u P kao rasplinuti podskup od P, takav da za svaki $x \in P$

$$f_{[a,b]}(x) := (f_{\uparrow a} \cap f_{\downarrow b})(x),$$

za neke $f_{\uparrow a}$ i $f_{\downarrow b}$ iz P.

U klasičnom slučaju, glavni ideal ili filter generisani pomoću elementa poseta su jedinstveni, dok analogni rasplinuti pojmovi nisu. Isto važi za rasplinuti interval.

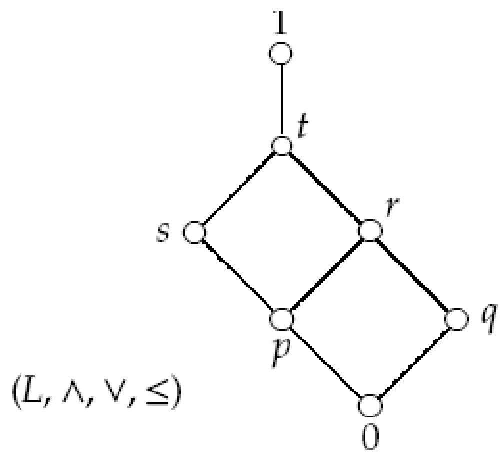
Primer 13 *Neka su poset $(P, \leqslant)$ i mreža $(L, \wedge, \vee, \leq)$ predstavljeni pomoću dijagrama na slikama 4 i 5. Funkcije:*

$$f_{\downarrow \iota} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \iota \\ t & t & s & r & p \end{pmatrix} \ \ i \ \ f_{\uparrow a} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \iota \\ p & 0 & s & r & t \end{pmatrix},$$

su rasplinuti glavni ideal i rasplinuti glavni filter u P, redom. Dodatno,

$$f_{[a,\iota]} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \iota \\ p & 0 & s & r & p \end{pmatrix}$$

je rasplinuti interval u P.
Dalje, funkcije,$g_{\downarrow \iota} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \iota \\ t & 1 & q & s & 0 \end{pmatrix}$ *i* $g_{\uparrow a} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \iota \\ 0 & 0 & r & s & 1 \end{pmatrix}$



slika 5

su takođe rasplinuti glavni ideal i filter u P, redom, generisani na odgovarajući način pomoću istih elemenata kao i prethodno pomenuti. Posledično,

$$g_{[a,\iota]} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \iota \\ 0 & 0 & q & s & 0 \end{pmatrix}$$

je takođe rasplinuti interval u P.

Sada uvodimo pojam rasplinute konveksnosti za rasplinute podposete. Rasplinuti podskup $\mu : P \to L$ je **rasplinuti konveksan** podposet od P ako za sve $x, y, z \in P$ važi sledeće:

$$\mu(x) \wedge \mu(z) \wedge k_{\leqslant}(x, y) \wedge k_{\leqslant}(y, z) \leq \mu(y)\,. \tag{9}$$

Pomoću osobina (7) i (8) Stava 35 (str.50), možemo dobiti na sledeći način rasplinute konveksne podposete.

Stav 38 *Rasplinuti podskup $\zeta : P \to L$ iz P je rasplinuti konveksan podposet od P ako važi:*

$$\zeta = \digamma \cap \Upsilon,$$

za neki gornji rasplinuti skup $\digamma$ i neki donji rasplinuti podskup Υ od P.

Dokaz. Neka je $\zeta = \digamma \cap \Upsilon$, za gornji rasplinuti podskup $\digamma$ i donji rasplinuti podskup Υ od P. Tada

$\zeta(x) \wedge \zeta(z) \wedge k_{\leqslant}(x, y) \wedge k_{\leqslant}(y, z) =$
$= \digamma(x) \wedge \Upsilon(x) \wedge \digamma(z) \wedge \Upsilon(z) \wedge k_{\leqslant}(x, y) \wedge k_{\leqslant}(y, z) \leq$
$\leq \digamma(y) \wedge \Upsilon(y) \wedge \digamma(z) \wedge \Upsilon(x) \leq \digamma(y) \wedge \Upsilon(y) = \zeta(y),$

i ζ je rasplinuti konveksan. ■

Očigledno, *proizvoljan rasplinuti interval u P predstavlja rasplinuti konveksan podposet od P.*

4.2 Rasplinuti poset sa rasplinutim uređenjem

U ovom odeljku polazi se od pojma rasplinutog poretka na rasplinutom podskupu μ. Takođe se uvodi specijalni rasplinuti poredak na rasplinutom podskupu μ. Navedena rasplinuta relacija ima vrlo bitnu ulogu, jer se koristi u definiciji rasplinute uređene podgrupe.

Ako je $\mu : A \to L$ rasplinuti podskup skupa A, onda je $\rho : A^2 \to L$ **rasplinuta relacija na rasplinutom podskupu** μ ako ispunjava uslov: za sve $x, y \in A$,

$$\rho(x, y) \leq \mu(x) \wedge \mu(y). \tag{10}$$

Rasplinuta relacija ρ na rasplinutom podskupu μ je **slabo refleksivna**, ako je za sve $x \in A$:

$$\rho(x, x) = \mu(x). \tag{11}$$

Kažemo da je rasplinuta relacija ρ na rasplinutom podskupu μ **rasplinuti poredak na** μ, ako je slabo refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

Primetimo da se definicija refleksivnosti ovde formalno razlikuje od iste u oznaci (r), definisanoj za rasplinutu relaciju na klasičnom skupu. Ipak, ako je domen jasno predstavljen pomoću svoje karakteristične funkcije (sa svim vrednostima jednakim 1), tada se definicija (11) poklapa sa (r). Konačno, da bismo povezali ovo sa definicijom slabe refleksivnosti (wr), istaći ćemo sledeću očiglednu činjenicu.

Svaka rasplinuta relacija $\rho : P \to L$, koja je refleksivna na rasplinutom skupu $\mu : P \to L$, je slabo refleksivna na P.

Neka je $(P, \leqslant)$ poset i $\mu : P \to L$ njegov rasplinuti podposet. Dalje, neka je $\rho : P \to L$ rasplinuta relacija na P definisana na sledeći način:

$$\rho(x, y) := \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x, y), \tag{12}$$

gde je $k_{\leqslant}$ karakteristična funkcija u odnosu na uređenje $\leqslant$ u P.

Teorema 26 *Funkcija ρ definisana pomoću* (12) *je rasplinuti poredak na rasplinutom podskupu μ od P.*

Dokaz. Funkcija ρ je rasplinuta relacija na rasplinutom skupu μ: za sve $x, y \in P$

$$\rho(x, y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x, y) \leq \mu(x) \wedge \mu(y).$$

ρ je refleksivna u smislu (11): za svaki $x \in P$,

$$\rho(x, x) = \mu(x) \wedge k_{\leqslant}(x, x) = \mu(x),$$

jer je relacija $\leqslant$ u P refleksivna, ekvivalentno, $k_{\leqslant}(x, x) = 1$ za sve $x \in P$.

ρ je antisimetrična: za sve $x, y \in P$,

$$\rho(x, y) \wedge \rho(y, x) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x, y) \wedge k_{\leqslant}(y, x) = 0,$$

pošto je antisimetrična relacija uređenja u P,

$$k_{\leqslant}(x, y) \wedge k_{\leqslant}(y, x) = 0.$$

ρ je tranzitivna: za sve $x, y, z \in P$,

$$\rho(x, y) \wedge \rho(y, z) =$$

$$= \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge \mu(z) \wedge k_{\leqslant}(x, y) \wedge k_{\leqslant}(y, z) \leq \mu(x) \wedge \mu(z) \wedge k_{\leqslant}(x, z) = \rho(x, z),$$

pošto važi,

$k_{\leqslant}(x, y) \wedge k_{\leqslant}(y, z) \leq k_{\leqslant}(x, z)$. ∎

Dalje, ako je $(P, \leqslant)$ poset, tada par (μ, ρ) predstavlja **rasplinuti poset sa rasplinutim poretkom** ako je $\mu : P \to L$ rasplinuti podskup od P i $\rho : P^2 \to L$ rasplinuti poredak na P definisan pomoću (12):

$$\rho(x, y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x, y).$$

Teorema 27 *Neka je $(P, \leqslant)$ poset, $\mu : P \to L$ rasplinuti podskup od P, i $\rho : P^2 \to L$ rasplinuta relacija na μ. Tada je (μ, ρ) rasplinuti podposet sa rasplinutim poretkom od $(P, \leqslant)$, ako i samo ako za svaki $p \in L, p \neq 0$, par (μ_p, ρ_p) je klasičan podposet od $(P, \leqslant)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (μ, ρ) rasplinuti podposet sa rasplinutim poretkom od $(P, \leqslant)$. Dokazujemo da za proizvoljno $p \in L, p \neq 0$, relacija ρ_p je relacija poretka na $\mu_p \subseteq P$. Slično kao u dokazu Stava 32 (str.47), može se pokazati da je ρ_p relacija na μ_p. Dalje dokazujemo njene osobine poretka.

Refleksivnost: za proizvoljno $x \in \mu_p$, $(x, x) \in \rho_p$ ako i samo ako $\rho(x, x) \geq p$ ako i samo ako $\mu(x) \wedge k_{\leqslant}(x, x) \geq p$ ako i samo ako $\mu(x) \geq p$ ako i samo ako $x \in \mu_p$.

Antisimetričnost: Ako $(x, y), (y, x) \in \rho_p$ za $x, y \in \mu_p$, tada $\rho(x, y) \geq p$ i $\rho(y, x) \geq p$. Znači $\rho(x, y) \wedge \rho(y, x) \geq p$. Pomoću antisimetričnosti ρ, ako je $x \neq y$ tada $\rho(x, y) \wedge \rho(y, x) = 0$, dakle $x = y$.

Tranzitivnost: Ako $(x, y), (y, z) \in \rho_p$ za $x, y, z \in \mu_p$, tada $\rho(x, y) \geq p$ i $\rho(y, z) \geq p$, i pomoću tranzitivnosti ρ, $\rho(x, z) \geq p$, i najzad $(x, z) \in \rho_p$.

Suprotno, pretpostavimo da za svaki $p \in L, p \neq 0$, par (μ_p, ρ_p) je klasičan podposet od $(P, \leqslant)$. Pošto je ρ po pretpostavci teoreme relacija na μ, znamo da je $\rho(x,y) \leq \mu(x) \wedge \mu(y)$. Za $x \leqslant y$, takođe znamo:

$$\rho(x,y) \leq \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y).$$

Neka je $\mu(x) \wedge \mu(y) = p$, znači $\mu(x) \geq p$ i $\mu(y) \geq p$. Dakle $\mu_p(x) = \mu_p(y) = 1$ i iz $x \leqslant y$ sledi $\rho_p(x,y) = 1$, primenjujući $\rho(x,y) \geq p$. Znači

$$\rho(x,y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y).$$

Da suprotna nejednakost važi dokazano je prethodno. Znači upravo smo dobili jednakost.

Ako važi $x \nleqslant y$, tada za svaki $p \in L, p \neq 0$ važi $\rho_p(x,y) = 0$. Znači pomoću Stava 20 (str.40) primenjenog na rasplinutu relaciju, $\rho(x,y) = 0$. Iz $x \nleqslant y$ takođe sledi da je $k_{\leqslant}(x,y) = 0$ i jednakost

$$\rho(x,y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y)$$

takođe važi u ovom slučaju. ■

Direktno se proverava da *svi nivoi rasplinutog konveksnog podposeta od P predstavljaju klasične konveksne podposete od P, što pokazuje sledeća lema.*

Lema 15 *Neka je $(P, \leqslant)$ poset, $\mu : P \to L$ rasplinuti podskup od P, i $\rho : P^2 \to L$ rasplinuta relacija na μ. Tada je (μ, ρ) rasplinuti konveksan podposet sa rasplinutim poretkom od $(P, \leqslant)$ ako i samo ako svi nivo-podskupovi predstavljaju klasične konveksne podposete.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (μ, ρ) rasplinuti konveksan, ekvivalentno da za sve $x, y, z \in P$ važi:

$$\mu(x) \wedge \mu(z) \wedge k_{\leqslant}(x,y) \wedge k_{\leqslant}(y,z) \leq \mu(y).$$

Neka je $p \in L$, i neka je μ_p nivo. Pretpostavimo da $x, z \in \mu_p$ i $x \leqslant y \leqslant z$. Tada, sledi da $\mu(x) \geq p$ i $\mu(z) \geq p$ i $k_{\leqslant}(x,y) = 1$ i $k_{\leqslant}(y,z) = 1$. Dakle,

$$p \leq \mu(x) \wedge \mu(z) \wedge k_{\leqslant}(x,y) \wedge k_{\leqslant}(y,z) \leq \mu(y) \text{ i } y \in \mu_p.$$

Da bismo pokazali suprotno, pretpostavimo da su svi nivo-podskupovi konveksni i neka su $x, y, z \in P$ proizvoljni. Neka je $p = \mu(x) \wedge \mu(z)$.

Ako važi: $k_{\leqslant}(x,y) \wedge k_{\leqslant}(y,z) = 0$, onda je nejednakost zadovoljena.

Ako je $k_{\leqslant}(x,y) \wedge k_{\leqslant}(y,z) = 1$, tada je $x \leqslant y \leqslant z$ i pošto $x \in \mu_p$ i $z \in \mu_p$, sledi da $y \in \mu_p$ i $\mu(y) \geq p$, ekvivalentno,
$\mu(y) \geq \mu(x) \wedge \mu(z) \wedge k_{\leqslant}(x,y) \wedge k_{\leqslant}(y,z)$. ■

Sinteza rasplinutog poseta pomoću poseta sa klasičnim poretkom koji predstavljaju njegove nivoe, sledi direktno.

Teorema 28 *Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija podposeta poseta $(P, \leqslant)$, zatvorena za skupovni presek, takva da sadrži P kao svoj član. Tada postoji mreža L i rasplinuti uređeni podposet (M, ρ) od P takav da se kolekcija njegovih nivo-podskupova poklapa sa $\mathcal{F}$. Važi i više, klasičan poredak u svakom nivou određuje odgovarajući nivo od ρ.*

Dokaz. Razmotrimo par $(\mathcal{F}, \supseteq)$, ekvivalentno zadatu kolekciju podposeta od P uređenu pomoću obrnute skupovne inkluzije. $(\mathcal{F}, \supseteq)$ predstavlja kompletnu mrežu i posmatraćemo njene članove kao skup vrednosti, i u nastavku ćemo je označavati pomoću $(L, \leq)$. Dalje, ako su $M : P \to L$ i $\rho : P^2 \to L$ definisani redom pomoću

$$M(x) := \bigcap\{\phi \in \mathcal{F} \mid x \in \phi\}, \text{ i } \rho(x,y) := M(x) \wedge M(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y),$$

tada se direktno proverava da je (M, ρ) rasplinuti poset sa rasplinutim uređenjem od P.

Dakle, dokazujemo da ρ predstavlja rasplinuti poredak na rasplinutom skupu M.

Iz definicije sledi da je ρ rasplinuta relacija na rasplinutom skupu M.

Dalje, za svaki $x \in P$,

$$\rho(x,y) = M(x) \wedge k_{\leqslant}(x,x) = M\left(x\right),$$

pa zaključujemo da je ρ slabo refleksivna.

ρ je antisimetrična, jer za za sve $x, y \in P$, $x \neq y$, važi sledeće:

$$\rho(x,y) \wedge \rho(y,x) = M(x) \wedge M(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y) \wedge k_{\leqslant}(y,x) = 0.$$

Dalje, dokazujemo da je ρ tranzitivna: za sve $x, y, z \in P$,

$$\rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = M(x) \wedge M(y) \wedge M(z) \wedge k_{\leqslant}(x,y) \wedge k_{\leqslant}(y,z) \leq$$

$\leq M(x) \wedge M(z) \wedge k_{\leqslant}(x,z) = \rho\left(x,z\right).$

Ispitajmo sada osobine nivo-podskupova rasplinutog skupa.

Nivoi od M se poklapaju sa podposetima iz kolekcije $\mathcal{F}$, naime za svaki $\phi \in \mathcal{F}$, na osnovu Teoreme 23 sledi da je $M_\phi = \phi$. Treba još da dokažemo da za svaki $\phi \in \mathcal{F}$, takav da ϕ nije elemenat 0 u L, važi da je par $(M_\phi, \rho_\phi) = (\phi, \rho_\phi)$ klasičan podposet od P. Dakle, za $x, y \in \phi$,

$(x,y) \in \rho_\phi$ ako i samo ako $\rho(x,y) \geq \phi$ ako i samo ako $M(x) \wedge M(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y) \geq \phi \neq 0$ ako i samo ako $M(x) \geq \phi$, $M(y) \geq \phi$, i $k_{\leqslant}(x,y) = 1$ ako i samo ako $x, y \in \phi$ i $x \leqslant y$. ■

4.3 Struktura skupa relacija slabog rasplinutog poretka na $(P, \leqslant)$

U prethodnom delu smo razmatrali rasplinute podposete sa rasplinutim uređenjem datog poseta $(P, \leqslant)$, i označavali ih sa (μ, ρ). Relacija ρ je podskup relacije klasičnog poretka $\leqslant$, (predstavljenog pomoću svoje karakteristične funkcije), i predstavlja rasplinuti poredak na rasplinutom skupu μ. Posmatrana kao rasplinuta relacija na P, ona je *slabi* rasplinuti poredak na tom domenu. Očigledno, postoje i druge relacije slabog rasplinutog poretka na P koje su takođe podskup klasičnog poretka.

U ovom odeljku ćemo detaljno ispitati strukturu skupa relacija slabog rasplinutog poretka.

Neka je $(P, \leqslant)$ dati poset i $\mathcal{FP}$ kolekcija svih relacija slabog rasplinutog poretka na P, koje su podskup relacije $\leqslant$ (predstavljene pomoću svoje karakteristične funkcije):

$$\mathcal{FP} := \{\rho : P^2 \to L \mid \rho \subseteq k_{\leqslant} \text{ i } \rho \text{ je slabi rasplinuti poredak na } P\}.$$

Prethodna inkluzija je definisana po komponentama, i cela kolekcija može biti uređena pomoću iste relacije: za $\rho, \sigma \in \mathcal{FP}$,

$$\rho \subseteq \sigma \text{ ako i samo ako za sve } x, y \in P,\ \rho(x, y) \leq \sigma(x, y).$$

Dalje, neka je Δ dijagonalna relacija na P: $\Delta = \{(x, x) \mid x \in P\}$, i sa $\uparrow\!\Delta$, $\downarrow\!\Delta$ označavamo redom, filter i ideal u posetu $(\mathcal{FP}, \subseteq)$, generisanom pomoću Δ.

Teorema 29 *Za dati poset $(P, \leqslant)$, važi sledeće:*
(i) Struktura $(\mathcal{FP}, \subseteq)$ predstavlja kompletnu mrežu;
(ii) $\uparrow\!\Delta$ se sastoji od svih relacija rasplinutog poretka na P;
(iii) $\downarrow\!\Delta$ je izomorfno mreži svih rasplinutih podposeta od P;
(iv) Ako je μ rasplinuti podskup od P i $\underline{\rho(\mu)}$, $\overline{\rho(\mu)} \in \mathcal{FP}$ su takvi da važi,

$$\underline{\rho(\mu)}(x, y) = \begin{cases} \mu(x) & \text{ako } x = y, \\ 0 & \text{u suprotnom,} \end{cases} \qquad \overline{\rho(\mu)}(x, y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x, y),$$

tada se interval $[\underline{\rho(\mu)}, \overline{\rho(\mu)}]$ sastoji od svih $\sigma \in \mathcal{FP}$, za koje važi

$$\sigma(x, x) = \mu(x).$$

$(v)\mathcal{FP} = \bigcup\{[\underline{\rho(\mu)}, \overline{\rho(\mu)}] \mid \mu : P \to L\}.$

Dokaz. (i) Poset $(\mathcal{FP}, \subseteq)$ je zatvoren za proizvoljne preseke. Neka je relacija ρ (definisana po komponentama) presek familije $\{\rho_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{FP}$:

$$\rho = \bigcap\{\rho_i \mid i \in I\}.$$

Direktno se proverava da je ρ slabo refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija na P, ekvivalentno da $\rho \in \mathcal{FP}$ (ρ može biti nula relacija, koja takođe predstavlja slabi rasplinuti poredak). Sve rasplinute relacije iz $\mathcal{FP}$, predstavljaju podskup relacije $k_{\leqslant}$ (u odnosu na $\subseteq$). $k_{\leqslant}$ predstavlja najveći elemenat u $\mathcal{FP}$. Dakle, kolekcija $\mathcal{FP}$ je zatvorena za proizvoljne preseke i sadrži najveći elemenat. Na osnovu Leme 6 (str.13), ona predstavlja kompletnu mrežu.

(ii) Pošto za svako $x \in P$, važi $\Delta(x,x) = 1$, isto važi za svaku rasplinutu relaciju $\rho \in \uparrow\Delta$, ekvivalentno $\rho(x,x) = 1$ i ρ je rasplinuti poredak.

(iii) $\downarrow\Delta$ se sastoji od svih dijagonalnih rasplinutih relacija na P. Ako je $\mathcal{F}(P)$ mreža svih rasplinutih podposeta od P, tada funkcija $f : \downarrow\Delta \to \mathcal{F}(P)$ takva da za $\rho \in \downarrow\Delta$, važi $f(\rho) = \mu$, gde $\mu(x) = \rho(x,x)$, predstavlja izomorfizam uređenih skupova.

(iv) Neka je $\mu : P \to L$ proizvoljni rasplinuti podposet od P. Tada je $\underline{\rho(\mu)}$, definisano kao u prethodnom, dijagonalna rasplinuta relacija koja pripada $\downarrow\Delta$, odnosno $\mathcal{FP}$. Dalje, na osnovu Teoreme 26 (str. 55), $\overline{\rho(\mu)}$ je rasplinuti poredak na μ, dakle $\overline{\rho(\mu)}$ je slabi rasplinuti poredak na P. Očigledno, za svaku rasplinutu relaciju $\sigma \in [\underline{\rho(\mu)}, \overline{\rho(\mu)}]$, dijagonala je fiksirana: $\sigma(x,x) = \mu(x)$. S druge strane, ako je $\rho \in \mathcal{FP}$ i $\rho(x,x) = \mu(x)$, tada je $\underline{\rho(\mu)} \subseteq \rho$. Pomoću definicije slabe refleksivnosti važi da je $\rho(x,y) \leq \rho(x,x) = \mu(x)$ i analogno važi $\rho(x,y) \leq \mu(y)$. Pošto je takođe $\rho(x,y) \leq k_{\leqslant}(x,y)$, sledi da je, pomoću definicije $\overline{\rho(\mu)}$, $\rho \leq \overline{\rho(\mu)}$. Dakle, $\rho \in [\underline{\rho(\mu)}, \overline{\rho(\mu)}]$.

(v) Pomoću (iii) , ako $\rho \in \mathcal{FP}$ i $\mu : P \to L$ je takvo da $\mu(x) = \rho(x,x)$, tada $\rho \in [\underline{\rho(\mu)}, \overline{\rho(\mu)}]$. Znači,

$$\mathcal{FP} \subseteq \bigcup \{[\underline{\rho(\mu)}, \overline{\rho(\mu)}] \mid \mu : P \to L\}.$$

Suprotna inkluzija je očigledna, čime smo dokazali jednakost. ∎

4.4 Rasplinuto uređenje i rasplinuta mreža

U ovom odeljku uvodimo pojmove nekih specijalnih rasplinutih uređenih struktura, kao i pojam rasplinute mreže. Neki od tih pojmova su na sličan način definisani u radovima autora N.Ajmal [1],[2], B.Yuan i W.Wu [104], i A.Tepavčević i G.Trajkovski [102].

Odeljak sadrži definicije rasplinutog lanca i rasplinute mreže.

Takođe je predstavljen uslov pod kojim rasplinuti podposet predstavlja rasplinuti lanac, kao i drugi uslov vezan za nivo podskupove. Odgovarajuća tvrđenja objavljena su u radu [100].

Neka L predstavlja kompletnu mrežu.

Neka je $(M, \leqslant)$ poset i (μ, ρ) rasplinuti podposet od M. Tada je (μ, ρ) **rasplinuti lanac**, ili **rasplinuti linearno uređen podposet** od M ako za $x, y \in M$ važi:

$$\rho(x,y) \vee \rho(y,x) = \mu(x) \wedge \mu(y). \tag{13}$$

Stav 39 *Svaki rasplinuti podposet (μ, ρ) linearno uređenog poseta $(M, \leqslant)$ je rasplinuti lanac.*

Dokaz. *Po definiciji uređenja ρ na μ, za sve $x, y \in M$*

$$\rho(x,y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y). \tag{14}$$

Pošto je uređenje $\leqslant$ u M linearno po pretpostavci, ili važi $k_{\leqslant}(x,y) = 1$ i $k_{\leqslant}(y,x) = 0$, ili obrnuto. Dakle, za sve $x, y \in M$,

$$\begin{aligned} \rho(x,y) \vee \rho(y,x) &= \\ &= (\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y)) \vee (\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(y,x)) = \\ &\quad \mu(x) \wedge \mu(y). \end{aligned}$$

Ovim je dokaz kompletiran. ■

U daljem tekstu ćemo se baviti rasplinutim lancima (ekvivalentno linearno uređenim podposetima) poseta koji ne moraju biti linearno uređeni.

Stav 40 *Neka je (μ, ρ) rasplinuti podposet poseta $(M, \leqslant)$. Tada je (μ, ρ) rasplinuti lanac ako i samo ako za sve $x, y \in M$ takve da x nije uporediv sa y, važi:*

$$\mu(x) \wedge \mu(y) = 0. \tag{15}$$

Dokaz. Neka je (μ, ρ) rasplinuti podposet od $(M, \leqslant)$ koji je rasplinuti lanac ekvivalentno, takav da (13) važi. Neka su $x, y \in M$ i pretpostavimo da oni nisu uporedivi, ekvivalentno da $k_{\leqslant}(x,y) = k_{\leqslant}(y,x) = 0$. Tada pomoću (14),

$$\rho(x,y) \vee \rho(y,x) = (\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y)) \vee (\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(y,x)) = 0,$$

znači, pomoću (13), $\mu(x) \wedge \mu(y) = 0$.

Suprotno, pretpostavimo da za neke neuporedive x, y, (15) važi. Tada, kao i u prethodnom, $k_{\leqslant}(x,y) = k_{\leqslant}(y,x) = 0$, i pomoću (14)

$$\begin{aligned} \rho(x,y) \vee \rho(y,x) &= (\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y)) \vee (\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(y,x)) \\ &= 0 = \mu(x) \wedge \mu(y). \end{aligned}$$

Ako su x i y uporedivi, na primer, ako je $x \leqslant y$, tada $k_{\leqslant}(x,y) = 1$ i $k_{\leqslant}(y,x) = 0$. Slično kao u prethodnom, odatle sledi,

$$\rho(x,y) \vee \rho(y,x) = (\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge 1) \vee (\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge 0) = \mu(x) \wedge \mu(y),$$

i (μ, ρ) je rasplinuti lanac. ■

Stav 41 *Neka je (μ, ρ) rasplinuti podposet poseta $(M, \leqslant)$. Tada je (μ, ρ) rasplinuti lanac ako i samo ako svaki njegov ne-nula nivo μ_p je lanac u $(M, \leqslant)$, u odnosu na ρ_p.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je (μ, ρ) rasplinuti lanac. Neka je μ_p nivo od μ, za neki $p \in L, p \neq 0$. Dokazaćemo da za sve $x, y \in M$,

$$x, y \in \mu_p \text{ povlači } (x, y) \in \rho_p \text{ ili } (y, x) \in \rho_p.$$

Zaista, ako $x, y \in \mu_p$, tada $\mu(x) \geq p$ i $\mu(y) \geq p$. Znači da važi: $\mu(x) \wedge \mu(y) \geq p$, i pošto je $p \neq 0$, pomoću (15) x i y su uporedivi. Bez ograničenja opštosti neka je $x \leqslant y$. Tada je $k_{\leqslant}(x, y) = 1$ i $k_{\leqslant}(y, x) = 0$, odakle sledi:

$$\rho(x, y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge 1 = \mu(x) \wedge \mu(y) \geq p.$$

Dakle, dokazali smo da $(x, y) \in \rho_p$.

Da bismo dokazali suprotno, pretpostavimo da x i y nisu uporedivi (ukoliko jesu, tada $\rho(x, y) \vee \rho(y, x) = \mu(x) \wedge \mu(y)$, kao u prethodnom stavu). Dalje važi: $k_{\leqslant}(x, y) = 0$ i $k_{\leqslant}(y, x) = 0$ i $\rho(x, y) = 0$ i $\rho(y, x) = 0$. Pretpostavimo da je $\mu(x) \wedge \mu(y) = p \neq 0$. Tada, $x \in \mu_p$ i $y \in \mu_p$. Pošto za svaki $p \neq 0$,

$$x, y \in \mu_p \text{ povlači } (x, y) \in \rho_p \text{ ili } (y, x) \in \rho_p,$$

odatle sledi: $\rho(x, y) \vee \rho(y, x) \geq p$, čime smo upravo dobili kontradikciju! Znači, (μ, ρ) je rasplinuti lanac. ∎

Neka je $(M, \leqslant)$ poset koji predstavlja mrežu, i (μ, ρ) rasplinuti podposet od M. Tada, (μ, ρ) je **rasplinuta podmreža** od M, ako je μ rasplinuta podmreža kao rasplinuta algebra, ekvivalentno ako za sve $x, y \in M$ važi:

$$\mu(x \wedge_M y) \geq \mu(x) \wedge_L \mu(y) \;\; i \; \mu(x \vee_M y) \geq \mu(x) \wedge_L \mu(y). \tag{16}$$

Stav 42 *Par (μ, ρ) je rasplinuta podmreža mreže M, ako i samo ako za svaki $p \in L$, nivo μ_p je klasična podmreža od M.*

Dokaz. Neka je (μ, ρ) rasplinuta podmreža mreže M, i neka je $p \in L$. Neka su $x, y \in \mu_p$. Tada važi: $\mu(x) \geq p$ i $\mu(y) \geq p$. Pomoću $\mu(x \wedge_M y) \geq \mu(x) \wedge_L \mu(y)$ i $\mu(x \vee_M y) \geq \mu(x) \wedge_L \mu(y)$, sledi da je $\mu(x \vee_M y) \geq p$ i $\mu(x \wedge_M y) \geq p$, pa znaći da $x \vee_M y \in \mu_p$ i $x \wedge_M y \in \mu_p$.

Da bismo dokazali suprotno, neka za proizvoljne elemente $x, y \in M$ važi da je $\mu(x) \wedge_L \mu(y) = p \in L$. Tada važi: $\mu(x) \geq p$ i $\mu(y) \geq p$, dakle $x, y \in \mu_p$. Pošto je μ_p mreža, sledi da $x \wedge_M y, x \vee_M y \in \mu_p$, znači, $\mu(x \wedge_M y) \geq p$ i $\mu(x \vee_M y) \geq p$, što dokazuje (16). ∎

4.5 Kompatibilnost

U ovom odeljku uvodimo pojam kompatibilnosti rasplinute relacije sa binarnom operacijom, u oba slučaja, u klasičnom slučaju i takođe u slučaju rasplinute algebarske strukture ([99]).

Neka je $(G, \cdot)$ grupoid i $\rho : G^2 \to L$ rasplinuta relacija iz G. Kažemo da je ρ **kompatibilna sa operacijom "$\cdot$" u** G, ako za sve $x, y, z \in G$ važi sledeće:

$$\rho(x, y) \leq \rho(x \cdot z, y \cdot z) \wedge \rho(z \cdot x, z \cdot y). \tag{17}$$

Neka je $(G, \cdot)$ grupoid i $\mu : G \to L$ njegov rasplinuti podgrupoid. Kažemo da je rasplinuta relacija $\rho : G^2 \to L$ na μ **kompatibilna sa operacijom "$\cdot$" na** μ, ako za sve $x, y, z \in G$ važi sledeće:

$$\mu(z) \wedge \rho(x, y) \leq \rho(x \cdot z, y \cdot z) \wedge \rho(z \cdot x, z \cdot y). \tag{18}$$

U klasičnom slučaju, odnosno ako je L dvoelementni lanac, tada se (17) svodi na klasičnu kompatibilnost uređenja u G, i (18) daje kompatibilnost restrikcije uređenja na podgrupoid od G.

Najzad, pomenimo da rasplinuta relacija ρ iz grupoida G koja je kompatibilna sa operacijom u smislu (17), jeste za svaki rasplinuti podgrupoid μ iz G takođe kompatibilna u smislu (18). Obrnuto ne važi, dakle, kompatibilnost na rasplinutom podgrupoidu ne povlači kompatibilnost u G.

4.6 Rasplinuta podgrupa

Rosenfeld je uveo definiciju rasplinute podgrupe u radu [83] (1971). Pojam rasplinute normalne podgrupe uveli su i proučavali J.M.Anthony i H.Sherwood, u radu [4]. Oni su izvršili uopštenje definicije rasplinute podgrupe koju je uveo Rosenfeld. Dalje su se ovim pojmom detaljno bavili S.K.Bhakat i P.Das, čiji pristup možemo videti u radu [35].

U knjizi autora Mordeson, Bhutani, Rosenfeld [69] izložen je celovit prikaz rezultata o rasplinutim grupama čiji je kodomen interval $[0, 1]$.

Većina tvrđenja ovog odeljka preuzeta su iz knjige [69], s tim što je ovde kodomen rasplinute podgrupe mreža L. Iz tog razloga, neki zaključci iz [69] ne važe u opštem slučaju, pa su oni ovde preformulisani i istaknute su bitne razlike. Lema 22 je originalna.

Neka je $\left(G, \cdot, ^{-1}, e\right)$ grupa i neka L predstavlja kompletnu mrežu. Rasplinuti skup $\mu : G \to L$ je rasplinuta podgrupa grupe G ako važi:

1. $\mu(x \cdot y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$, za sve $x, y \in G$

2. $\mu\left(x^{-1}\right) \geq \mu(x)$, za svaki $x \in G$.

3. $\mu(e) = 1$.

Označimo sa $\mathcal{F}(G)$ skup svih rasplinutih podgrupa iz G. Uvedimo i novu oznaku μ_* :

$$\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\},$$

Podsetimo se da smo pojam μ^* uveli ranije (strana 37):

$$\mu^* = \{x \in G : \mu(x) > 0\}.$$

Ako rasplinuti skup $\mu \in \mathcal{FP}(X)$ zadovoljava uslov 1. prethodne definicije, tada važi:

$$\mu(x^n) \geq \mu(x), \text{ za svaki } x \in G, n \in N.$$

Lema 16 *Neka je $\mu \in \mathcal{F}(G)$. Tada za sve $x, y \in G$ važi:*

1. $\mu(e) \geq \mu(x)$
2. $\mu\left(x^{-1}\right) = \mu(x)$.

Dokaz. Neka je $x \in G$. Tada važi:

2. $\mu(x) = \mu(\left(x^{-1}\right)^{-1}) \geq \mu\left(x^{-1}\right) \geq \mu(x)$. Dakle, $\mu\left(x^{-1}\right) = \mu(x)$

1. $1 = \mu(e) \geq \mu(x)$. ■

Lema 17 *Neka je $\mu \in \mathcal{F}(G)$ data rasplinuta podgrupa.Tada μ zadovoljava sledeću nejednakost:*

$$\mu\left(x \cdot y^{-1}\right) \geq \mu(x) \wedge \mu(y), \text{ za sve } x, y \in G.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je μ rasplinuta podgrupa. Tada važi:
$\mu\left(x \cdot y^{-1}\right) \geq \mu(x) \wedge \mu\left(y^{-1}\right) = \mu(x) \wedge \mu(y)$. ■

Možemo primetiti da ako je μ rasplinuta podgrupa grupe G, $\mu : G \to [0, 1]$ i ako su $x, y \in G$ takvi da je $\mu(x) \neq \mu(y)$, onda važi jednakost, $\mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(y)$. Da bismo ovo dokazali, pretpostavimo najpre da je $\mu(x) > \mu(y)$. Tada je:

$$\mu(y) = \mu\left(x^{-1}xy\right) \geq \mu\left(x^{-1}\right) \wedge \mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(xy)$$

Znači, $\mu(y) \geq \mu(x) \wedge \mu(xy)$, i pošto je $\mu(x) \geq \mu(y)$,

$$\Rightarrow \mu(y) \geq \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(y)$$

$$\Rightarrow \mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Na isti način se pokazuje jednakost u slučaju $\mu(x) < \mu(y)$.

Ukoliko prethodno navedenu jednakost $\mu(xy) = \mu(x) \wedge \mu(y)$ posmatramo u slučaju $\mu(x) = \mu(y)$, vidimo da ona nije tačna u opštem slučaju (isto važi i u slučaju da je mreža L proizvoljna kompletna mreža). Navedimo dokaz prethodnog, polazeći od suprotne pretpostavke.

Za rasplinutu podgrupu $\mu : G \to [0,1]$ važi:

$$1 = \mu(e) = \mu\left(x \cdot x^{-1}\right) = \mu(x) \wedge \mu\left(x^{-1}\right) = \mu(x),$$

a znamo da je u opštem slučaju $\mu(x) \neq 1$ (elemenat x grupe G je proizvoljan).

Lema 18 *Neka je $\mu \in \mathcal{F}P(G)$. Tada je rasplinuti skup μ rasplinuta podgrupa grupe G ako i samo ako je μ_a podgrupa od G, za sve vrednosti $a \in L$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je μ rasplinuta podgrupa iz G i neka je $a \in L$. Pošto je $1 = \mu(e)$, sledi da $e \in \mu_a$. Dakle, $\mu_a \neq \emptyset$. Neka su $x, y \in \mu_a$. Onda je $\mu(x) \geq a$ i $\mu(y) \geq a$. Pošto je μ rasplinuta podgrupa,

$$\mu\left(xy^{-1}\right) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \geq a \wedge a = a.$$

Dakle, $xy^{-1} \in \mu_a$ i μ_a je podgrupa od G.

Suprotno, pretpostavimo da je μ_a podgrupa od G, za svaki $a \in L$. Tada važi da $e \in \mu_a$. Neka su $x, y \in G$, i neka je $\mu(x) = a$ i $\mu(y) = b$. Neka je $c = a \wedge b$. Tada $x, y \in \mu_c$. Po pretpostavci teoreme, μ_c je podgrupa grupe G, i sledi da $xy \in \mu_c$. Dakle, važi:

$$\mu(xy) \geq c = a \wedge b = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Dalje, dokažimo da za sve elemente x grupe G važi: $\mu\left(x^{-1}\right) \geq \mu(x)$. Neka je $x \in G$ proizvoljan. Neka je $a = \mu(x)$. Prema pretpostavci leme, μ_a je podgrupa od G. Pošto $x \in \mu_a$ i μ_a je podgrupa, sledi da $x^{-1} \in \mu_a$. Prethodno je ekvivalentno sa $\mu\left(x^{-1}\right) \geq a$, a znamo da je $a = \mu(x)$.

Znači, μ je rasplinuta podgrupa od G. ■

Definišimo binarnu operaciju $\circ$ u $\mathcal{F}(G)$ i unarnu operaciju $^{-1}$ u $\mathcal{F}(G)$ na sledeći način: za sve $\mu, \nu \in \mathcal{F}(G)$ i za svaki $x \in G$,

$$(\mu \circ \nu)(x) = \vee \{\mu(y) \wedge \nu(z) : y, z \in G, y \cdot z = x\},$$

$$\mu^{-1}(x) = \mu\left(x^{-1}\right).$$

$\mu \circ \nu$ nazivamo **proizvodom** rasplinutih podgrupa μ, ν, a μ^{-1} je **inverzna rasplinuti podgrupa**. Uslov pod kojim proizvod $\mu \circ \nu$ predstavlja rasplinutu podgrupu dat je u Teoremi 32 (str.67).

Kao što je navedeno na strani 19, u mreži L važi beskonačan $\wedge$-distributivni zakon, ako za sve elemente $x, y_i \in L$ važi sledeće:

$$x \wedge \bigvee\nolimits_{i \in I} y_i = \bigvee\nolimits_{i \in I} (x \wedge y_i).$$

Teorema 30 *Neka su date rasplinute podgrupe $\mu, \nu, \delta : G \to L$, gde L predstavlja kompletnu mrežu u kojoj važi beskonačan $\wedge$-distributivni zakon. Tada je operacija $\circ$ asocijativna, odnosno za sve elemente $x \in G$ važi:*

$$((\mu \circ \nu) \circ \delta)(x) = (\mu \circ (\nu \circ \delta))(x).$$

Dokaz. Po pretpostavci teoreme, u mreži L važi beskonačan $\wedge$-distributivni zakon,

$$x \wedge \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I} (x \wedge y_i).$$

Označimo levu stranu tražene jednakosti sa L, a desnu sa D (za proizvoljno x iz G). Sledi:

$$L = ((\mu \circ \nu) \circ \delta)(x) =$$

$$\bigvee \{(\mu \circ \nu)(y) \wedge \delta(z) : y \cdot z = x\} =$$

$$\bigvee \{\vee[\mu(y_1) \wedge \nu(y_2) : y_1 \cdot y_2 = y] \wedge \delta(z) : y \cdot z = x\}.$$

$$D = (\mu \circ (\nu \circ \delta))(x) =$$

$$\bigvee \{\mu(y) \wedge (\nu \circ \delta)(z) : y \cdot z = x\} =$$

$$\bigvee \{\mu(y) \wedge \vee[\nu(z_1) \wedge \delta(z_2) : z_1 \cdot z_2 = z] : y \cdot z = x\}.$$

Primenom beskonačnog $\wedge$-distributivnog zakona u L i D dobijamo:

$$L = \bigvee \{[\mu(y_1) \wedge \nu(y_2) \wedge \delta(z)] : y \cdot z = x, y_1 \cdot y_2 = y\}$$

$$D = \bigvee \{[\mu(y) \wedge \nu(z_1) \wedge \delta(z_2)] : y \cdot z = x, z_1 \cdot z_2 = z\}.$$

Iz prethodnog upravo sledi da L i D imaju istu vrednost. ■

Teorema 31 *Neka su date rasplinute podgrupe $\mu, \nu, \mu_i \in \mathcal{F}(G)$, $i \in I$ (I je neprazan skup indeksa). Neka je $a = \vee\{\mu(x) : x \in G\}$. Važe sledeća tvrđenja:*

1.
$$(\mu \circ \nu)(x) = \vee_{y \in G} \left\{\mu(y) \wedge \nu\left(y^{-1}x\right)\right\}$$
$$= \vee_{y \in G} \left\{\mu\left(xy^{-1}\right) \wedge \nu(y)\right\}, \text{ za sve } x, y \in G$$

2.
$$\left(a_{\{y\}} \circ \mu\right)(x) = \mu\left(y^{-1}x\right), \text{ za sve } x, y \in G,$$

gde je $a_Y(x) = \begin{cases} a & ako \quad x \in Y \\ 0 & ako \quad x \in G \setminus Y \end{cases}$

3.
$$\left(\mu \circ a_{\{y\}}\right)(x) = \mu\left(xy^{-1}\right), \text{ za sve } x, y \in G$$

4.
$$\left(\mu^{-1}\right)^{-1} = \mu$$
5.
$$\mu \subseteq \mu^{-1} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \mu^{-1} \subseteq \mu$$
$$\Longleftrightarrow \mu = \mu^{-1}$$
$$\Longleftrightarrow \mu(x) \leq \mu\left(x^{-1}\right), \ \textit{za svaki } x \in G$$
$$\Longleftrightarrow \mu\left(x^{-1}\right) \leq \mu(x), \ \textit{za svaki } x \in G$$
$$\Longleftrightarrow \mu(x) = \mu\left(x^{-1}\right), \ \textit{za svaki } x \in G.$$
6.
$$\mu \subseteq \nu \Longleftrightarrow \mu^{-1} \subseteq \nu^{-1}$$
7.
$$\left(\cup_{i\in I}\mu_i\right)^{-1} = \cup\mu_i^{-1}$$
8.
$$\left(\cap_{i\in I}\mu_i\right)^{-1} = \cap\mu_i^{-1}$$
9.
$$(\mu \circ \nu)^{-1} = \nu^{-1} \circ \mu^{-1}.$$

Dokaz. Dokažimo neko od navedenih tvrđenja, na primer poslednje.

9. Treba da pokažemo da za sve elemente $x \in G$ važi:

$$(\mu \circ \nu)^{-1}(x) = \left(\nu^{-1} \circ \mu^{-1}\right)(x).$$

Označimo levu stranu tražene jednakosti sa L, a desnu sa D. Pomoću definicije operacije $\circ$ sledi:

$L = (\mu \circ \nu)^{-1}(x) = (\mu \circ \nu)\left(x^{-1}\right) =$

$$\vee\left\{\mu(y) \wedge \nu(z) : y \cdot z = x^{-1}\right\}.$$

$D = \left(\nu^{-1} \circ \mu^{-1}\right)(x) = \vee\left\{\nu^{-1}(y) \wedge \mu^{-1}(z) : y \cdot z = x\right\} =$

$$\vee\left\{\nu\left(y^{-1}\right) \wedge \mu\left(z^{-1}\right) : y \cdot z = x\right\} =$$

$\vee\{\nu(y) \wedge \mu(z) : y \cdot z = x\}$.

Pokazaćemo sada da L i D imaju istu vrednost. Uzmimo proizvoljno razlaganje elementa x na elemente y_1 i z_1, $x = y_1 \cdot z_1$. Odatle sledi:

$$x^{-1} = (y_1 \cdot z_1)^{-1} = z_1^{-1} \cdot y_1^{-1}.$$

Član u jednakosti D, $\nu(y_1) \wedge \mu(z_1)$, identičan je sa odgovarajućim članom u L, $\mu\left(z_1^{-1}\right) \wedge \nu\left(y_1^{-1}\right)$. Pošto smo razlaganje elementa x na elemente y_1 i z_1 uzeli proizvoljno, prethodni identitet važi za sva moguća razlaganja. Odatle sledi da su leva strana L i desna strana D iste. ■

Sledeći rezultati se mogu dokazati koristeći prethodno.

Lema 19 *Ako je mreža L realan interval $[0,1]$, i $\mu : G \to L$ rasplinuta podgrupa grupe G, tada skup $\mu^* = \{x \in G : \mu(x) > 0\}$, predstavlja podgrupu od G.*

Lema 20 *Ako je $\mu \in \mathcal{F}(G)$, tada skup $\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = 1\}$, predstavlja podgrupu od G.*

Lema 21 *Neka je $\mu \in \mathcal{F}P(G)$. Tada je $\mu \in \mathcal{F}(G)$ ako i samo ako rasplinuti skup μ ispunjava sledeće uslove:*
1. $\mu \circ \mu = \mu$
2. $\mu^{-1} \subseteq \mu$ *(ili $\mu^{-1} \supseteq \mu$ ili $\mu^{-1} = \mu$).*

Teorema 32 *Neka su date rasplinute podgrupe $\mu, \nu : G \to L$, gde je L kompletna mreža koja zadovoljava beskonačan $\wedge$-distributivni zakon. Tada je $\mu \circ \nu$ rasplinuta podgrupa ako i samo ako važi: $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mu \circ \nu \in \mathcal{F}(G)$. Tada je $\mu \circ \nu = \mu^{-1} \circ \nu^{-1} = (\nu \circ \mu)^{-1} = \nu \circ \mu$.

Suprotno, pretpostavimo da je $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$. Tada je:

$$(\mu \circ \nu)^{-1} = (\nu \circ \mu)^{-1} = \mu^{-1} \circ \nu^{-1} = \mu \circ \nu, \text{ i}$$

$$(\mu \circ \nu) \circ (\mu \circ \nu) = \mu \circ [\nu \circ (\mu \circ \nu)] =$$

$$\mu \circ [(\nu \circ \mu) \circ \nu] = \mu \circ [(\mu \circ \nu) \circ \nu] =$$

$$\mu \circ [\mu \circ (\nu \circ \nu)] = (\mu \circ \mu) \circ (\nu \circ \nu) = \mu \circ \nu.$$

Iz prethodnog, pomoću Leme 21 (prethodna lema) sledi da je $\mu \circ \nu$ rasplinuta podgrupa grupe G.

Iz prethodnog imamo da je $\mu \circ \nu \in \mathcal{F}(G)$. ■

Naredna lema pokazuje da ukoliko izvršimo proizvoljnu translaciju elementa grupe G za elemenat iz podgrupe μ_*, vrednost rasplinute podgrupe μ ostaje ista.

Lema 22 *Neka je $\left(G, \cdot, ^{-1}, e\right)$ data grupa, i neka je $\mu : G \longrightarrow L$ (L je potpuna mreža) rasplinuta podgrupa od G. Za sve elemente $y \in \mu_*$ važi:*

$$\mu(a \cdot y) = \mu(a), \quad \text{gde je } a \in G \text{ proizvoljan.}$$

Dokaz. Neka je $y \in \mu_*$, $y \neq e$.

$\mu(y) = 1$. Sledi:

$$\mu\left(y^2\right) \geq \mu(y) \wedge \mu(y) = \mu(y) = 1, \text{ i sledi:}$$

$\mu\left(y^3\right) = 1, ..., \mu(y^n) = 1, ...$

Označimo pomoću $p = \mu(a)$, $p \in L$. Imamo:

$$\mu(a \cdot y) \geq \mu(a) \wedge \mu(y) = p \tag{19}$$

$$\mu(a) = \mu\left(a \cdot y \cdot y^{-1}\right) \geq$$
$$\geq \mu(a \cdot y) \wedge \mu(y) = \mu(a \cdot y)$$

Dakle, dobili smo:

$$p = \mu(a) \geq \mu(a \cdot y) \tag{20}$$

Iz (19),(20) sledi $\mu(a \cdot y) = p = \mu(a)$.

Pošto smo elemenat $y \in \mu_*$ uzeli proizvoljno, jednakost važi za sve elemente $y \in \mu_*$. ■

4.7 Rasplinute podgrupe određene nivo-podgrupama

U radu [97] analizirane su rasplinute grupe preko osobina njihovih nivo-podgrupa. Navodimo neke rezultate tog rada, s obzirom da se i naša istraživanja ovde baziraju na osobinama nivo-struktura.

Teorema 33 *Neka je μ P-rasplinuta podgrupa od G, i neka je $\mathcal{F}$ skup njenih nivo-podgrupa. Tada, za svaki $x \in G$, presek onih podgrupa iz $\mathcal{F}$, čiji svi članovi sadrže x, takođe pripada $\mathcal{F}$. Važi i više, unija svih članova iz $\mathcal{F}$ je G.*

Ukoliko je poset P mreža, tada je $\mathcal{F}$ Murova familija u odnosu na inkluziju, sa najvećim elementom G.

U narednom tvrđenju polazi se od kolekcije nivo-podgrupa date grupe G koja ispunjava gore navedena svojstva. Pokazuje se da tada postoji poset (mreža) i rasplinuta podgrupa grupe G, takva da su njeni nivoi upravo podgrupe iz date kolekcije.

Teorema 34 *Neka je $\mathcal{F} = \{\mathcal{B}_i : i \in I\}$, familija podgrupa grupe $G = \left(G, \cdot, ^{-1}, e\right)$, takva da je $\cup\mathcal{B}_i = G$.*

a)Neka za svako $x \in G$, presek podgrupa iz $\mathcal{F}$ koje sadrže x pripada $\mathcal{F}$. Ako je $P = (\mathcal{F}, \leq)$ poset dualan $(\mathcal{F}, \subseteq)$, tada je preslikavanje $\mu : G \to \mathcal{F}$, takvo da je za sve $x \in G$,

$$\mu(x) = \cap\{\mathcal{B} \in \mathcal{F} : x \in \mathcal{B}\}, \tag{21}$$

P-rasplinuta podgrupa od G.

b)Ako je $\mathcal{F}$ zatvorena za proizvoljan presek i sadrži G, tada je poset $(\mathcal{F}, \leq)$ ($\leq$ je dualno $\subseteq$) mreža, i preslikavanje $\mu : G \to \mathcal{F}$, definisano u (21), je L-rasplinuta podgrupa grupe G.

Kolekcija svih nivo-podgrupa od μ je (u oba slučaja) $\mathcal{F}$.

Dalje, razmotrićemo na sledeći način rasplinutu podgrupu kao funkciju (definisanu u (21)) iz grupe u kolekciju podgrupa koja zadovoljava uslove date u prethodnom stavu.

Lema 23 *Neka je μ P-rasplinuta podgrupa grupe G, i neka su $x, y \in G$.*

$$\textit{Ako } y \in \mu(x), \quad \textit{tada važi: } \mu(x) \leq \mu(y).$$

Dokaz. Neka je $y \in \mu(x)$ i neka je $\mathcal{F}$ kolekcija nivo-podgrupa od μ. Važi da, $y \in \mu(x)$ ako i samo ako

$$y \in \cap(K \in \mathcal{F} : x \in K)$$

ako i samo ako za svaki $K \in \mathcal{F}$,

$$x \in K \text{ povlači } y \in K.$$

Znači, pošto $y \in \mu(x)$,

$$\cap(K \in \mathcal{F} : y \in K) \subseteq \cap(K \in \mathcal{F} : x \in K),$$

i pomoću definicije uređenja među nivo-podgrupama koje je dualno skupovnoj inkluziji, sledi da je $\mu(x) \leq \mu(y)$. ■

Stav 43 *Neka je μ P-rasplinuta podgrupa grupe G, i neka su $x, y \in G$. Važi,*

$$\textit{ako } \langle x\rangle = \langle y\rangle, \textit{ onda je } \mu(x) = \mu(y)$$

($\langle x\rangle$ je podgrupa generisana pomoću x).

Dokaz. Neka je $\langle x\rangle = \langle y\rangle$. Pošto za bilo koju kolekciju $\mathcal{F}$ podgrupa od G važi,
$$\langle x\rangle \subseteq \cap(H \in \mathcal{F} : x \in H),$$
sledi da y pripada $\mu(x)$, i znači pomoću prethodne leme je $\mu(x) \leq \mu(y)$.
Slično, $\mu(y) \leq \mu(x)$, i jednakost je dokazana. ■

Dokaz prethodnog stava može biti takođe izveden u terminima funkcija, ne koristeći nivo-podgrupe:

$$y \in \langle x\rangle \to y = x^p, \text{ za neki ceo broj } p,$$

i važi da je $\mu(y) = \mu(x^p) \geq \mu(x)$.

Slično, $x = y^q$, za neki ceo broj q, i znači, $\mu(x) \geq \mu(y)$.

U slučaju da je y neutralni elemenat, $y = e$, tada važi $\langle y\rangle = \langle e\rangle = \{e\}$. Dakle, iz jednakosti $\langle y\rangle = \langle e\rangle$, sledi $y = e$.

Lema 24 *Neka je $(G, \cdot, ^{-1}, e)$ zadata grupa. Tada je funkcija $\mu : G \to SubG$, definisana sa $\mu(x) = \langle x\rangle$, L-rasplinuta podgrupa iz G.*

Dokaz. Napomenimo najpre da je uređenje u $SubG$ obrnuto od skupovne inkluzije, pa infimum ovde predstavlja supremum u mreži podgrupa.

Pošto $x \in \langle x\rangle \wedge \langle y\rangle$, $y \in \langle x\rangle \wedge \langle y\rangle$, i $\langle x\rangle \wedge \langle y\rangle$ je podgrupa od G,
sledi da $x \cdot y \in \langle x\rangle \wedge \langle y\rangle$. Znači da $\langle x \cdot y\rangle \subseteq \langle x\rangle \wedge \langle y\rangle$, i
$\mu(x \cdot y) = \langle x \cdot y\rangle \geq \langle x\rangle \wedge \langle y\rangle = \mu(x) \wedge \mu(y)$,
pri čemu je uređenje dualno skupovnoj inkluziji. Dalje, važi:
$\mu\left(x^{-1}\right) = \left\langle x^{-1}\right\rangle = \langle x\rangle = \mu(x)$.
$\mu(e) = \{e\}$, koja predstavlja najveći elemenat u mreži nivo-podgrupa.
Upravo smo dokazali da je μ rasplinuta podgrupa od G. ■

Teorema 35 *Neka je $G = \left(G, \cdot, ^{-1}, e\right)$ zadata grupa. Tada, za svaki $x \in G$,*

$$x^2 = e \quad \text{ako i samo ako}$$

postoji rasplinuta podgrupa μ od G takva da je $\mu(x) \neq \mu(y)$, za sve $x, y \in G$.

Dokaz. Neka je G takva da je $x^2 = e$, za svaki $x \in G$. Tada, funkcija
$\mu : G \to SubG$, definisana sa $\mu(x) = \langle x\rangle$, je tražena L-rasplinuta podgrupa od G.

Iz prethodne leme sledi da je μ L-rasplinuta podgrupa od G.
Dalje, $\mu(x) \neq \mu(y)$, za sve $x, y \in G$, $x \neq y$, pošto $\mu(x) = \langle x\rangle$,
koja predstavlja dvo-elementnu podgrupu od G različitu od $\langle y\rangle = \mu(y)$.

U slučaju neutralnog elementa e, $e^2 = e$ i $\mu(e) = \langle e\rangle = \{e\}$. Znamo da $\{e\}$ predstavlja najveći elemenat u mreži nivo-podgrupa (poredak je dualan skupovnoj inkluziji), i važi:

$$\mu(e) \neq \mu(x), \text{ za sve elemente } x \neq e.$$

S druge strane, ako postoji L-rasplinuta podgrupa μ od G takva da važi $\mu(x) \neq \mu(y)$, za sve $x, y \in G$, tada važi $\langle x\rangle \neq \langle y\rangle$, pomoću Stava 43 (str.69).

Pošto je $\langle x\rangle = \left\langle x^{-1}\right\rangle$, sledi da je $x = x^{-1}$ za svaki x, znači $x^2 = e$, za svaki $x \in G$. ■

U izloženoj teoremi je bitno razmatrati L-rasplinute podgrupe od G, pri čemu je L mreža, a ne jedinični interval, što pokazuje sledeće.

Lema 25 *Neka je G grupa sa više od dva elementa. Tada, za G ne postoji rasplinuta podgrupa $\mu : G \to [0,1]$, takva da je $\mu(x) \neq \mu(y)$, za sve $x, y \in G$.*

Dokaz. Po prethodnoj teoremi, G treba da zadovoljava identitet: $x^2 = e$.
Pošto G ima više od dva elementa, postoje $x, y \in G$ takvi da je $e \neq x \neq y \neq e$.
Tada $x \cdot y = z$, i $z \neq e$, $z \neq x$, $z \neq y$, $x \cdot z = y$, $y \cdot z = x$, što važi jer je,
za svaki $x \in G$, $x^2 = e$, i takva grupa je abelova.

Sada, pretpostavka da su $\mu(x), \mu(y), \mu(z)$, međusobno različiti elementi lanca (pošto pripadaju intervalu $[0,1]$), daje kontradikciju sa sledećim formulama:
$\mu(x) \wedge \mu(y) \leq \mu(x \cdot y) = \mu(z)$

$\mu(y) \wedge \mu(z) \leq \mu(y \cdot z) = \mu(x)$
$\mu(x) \wedge \mu(z) \leq \mu(x \cdot z) = \mu(y)$. ■

Suprotan problem od prethodno razmatranog je karakterizacija rasplinutih podgrupa koje imaju jednake vrednosti. Odgovor na ovo pitanje je pretstavljen u sledećem stavu.

Stav 44 *L-rasplinuta podgrupa μ od G zadovoljava uslov:*

$$\mu(x \cdot y) = \mu(x) \wedge \mu(y), \quad \text{za sve} \quad x, y \in G,$$

ako i samo ako μ predstavlja konstantnu funkciju, $\mu(x) = 1$, za svako x (ekvivalentno sama grupa G).

Dokaz. Pretpostavimo da je pretpostavka stava ispunjena. Tada, za sve $x \in G$,
$1 = \mu(e) = \mu\left(x \cdot x^{-1}\right) = \mu(x) \wedge \mu\left(x^{-1}\right) = \mu(x)$,
jer znamo da je $\mu(x) = \mu\left(x^{-1}\right)$.
Suprotan smer je očigledan. ■

Zaključićemo ovaj odeljak karakterizacijom normalnih P-rasplinutih podgrupa. U ovoj tezi definicija normalne rasplinute podgrupe je definicija iz rada [95].

Rasplinuta podgrupa μ je **normalna rasplinuta podgrupa**, ukoliko sve njene nivo-podgrupe predstavljaju normalne podgrupe grupe G.

Kako smo prethodno mogli da uočimo, P-rasplinute strukture se uobičajeno definišu pomoću nivo-podgrupa, a ne pomoću formula, zbog nedostatka mrežnih operacija u posetima. Ipak, normalne P-rasplinute podgrupe mogu biti karakterizovane pomoću iste formule kao i L-rasplinute podgrupe.

Stav 45 *P-rasplinuta podgrupa μ grupe G je normalna (ekvivalentno sve nivo-podgrupe su normalne podgrupe), ako i samo ako važi:*

$$\mu\left(x^{-1} \cdot y\right) = \mu\left(y \cdot x^{-1}\right), \quad \text{za sve } x, y \in G.$$

Dokaz. Neka je μ normalna P-rasplinuta podgrupa od G. Tada su sve nivo-podgrupe normalne podgrupe.

Dalje, ako je $\mu\left(x^{-1} \cdot y\right) = p \in P$, tada $x^{-1} \cdot y \in \mu_p$, i pošto je μ_p normalna podgrupa, ona sadrži $x \cdot \left(x^{-1} \cdot y\right) \cdot x^{-1}$. Odatle sledi $y \cdot x^{-1} \in \mu_p$, i znači $\mu\left(y \cdot x^{-1}\right) \geq p = \mu\left(x^{-1} \cdot y\right)$. Slično, $\mu\left(x^{-1} \cdot y\right) \geq \mu\left(y \cdot x^{-1}\right)$, odakle sledi jednakost.

U suprotnom smeru, ako je $\mu\left(x^{-1} \cdot y\right) = \mu\left(y \cdot x^{-1}\right)$, tada su sve nivo-podgrupe od μ, normalne podgrupe od G. Za $p \in P$, μ_p predstavlja p-nivo od μ. Dalje, za $h \in \mu_p$ i $x \in G$,
$\mu\left(x^{-1} \cdot (h \cdot x)\right) = \mu\left((h \cdot x) \cdot x^{-1}\right) = \mu(h) \geq p$.
Znači, $x^{-1} \cdot h \cdot x \in \mu_p$, i μ_p je normalna podgrupa. ■

4.8 Prethodni pristupi rasplinutim uređenim grupama

Već smo napomenuli u uvodnom delu da postoji jako malo (svega nekoliko) radova iz oblasti rasplinutih uređenih grupa.

Izložimo najpre pristup autora S.K.Bhakat i P.Das u radovima [14] (1994) i [15] (1997). Možemo istaći da se ovaj pristup rasplinutim uređenim grupama bitno razlikuje od našeg, pre svega zbog toga što je ovde kodomen preslikavanja realan interval $[0, 1]$ (mi smo razmatrali opšti slučaj u kom je kodomen mreža L).

Navedimo sada definicije iz rada [14].

Neka su dati neprazan skup G i rasplinuti podskup λ od G. Rasplinuta relacija R na rasplinutom podskupu λ je parcijalni rasplinuti poredak na λ ako važi:

1. R je refleksivna

$$\forall x \in G, \ \ \lambda(x) > 0 \Rightarrow R(x, x) = \lambda(x).$$

2. R je antisimetrična

$$\forall x, y \in G, \ \ R(x, y) > 0, \ R(y, x) > 0 \ \Rightarrow x = y.$$

3. R je tranzitivna

$$\forall x, y \in G, \ R^2(x, y) = \sup\{\min(R(x, t), R(t, y)) : t \in G\} \leq R(x, y).$$

Navedimo sada oznake za pojmove koje koristimo u narednoj definiciji.

Neka je G grupa sa jediničnim elementom e.

Neka je N oznaka za skup pozitivnih celih brojeva.

Neka je λ rasplinuta podgrupa grupe G.

Rasplinuta relacija R na λ je parcijalni rasplinuti poredak na rasplinutoj podgrupi λ ako važi:

1. R je parcijalni rasplinuti poredak na rasplinutom podskupu λ
2. Za sve elemente $x, y, t, v \in G$ važi:

$$\begin{gathered} R(x, y) > 0 \ R(t, v) > 0 \Rightarrow \\ R(xt, yv) \geq \min\{R(x, y), R(t, v)\}. \end{gathered}$$

Ako je R parcijalni rasplinuti poredak na rasplinutoj podgrupi λ, tada (λ, R) predstavlja parcijalno uređenu rasplinutu podgrupu grupe G.

Sledi definicija iz rada [15].

Za parcijalno uređenu rasplinutu podgrupu (λ, R) grupe G kažemo da Arhimedova uređena rasplinuta podgrupa ako za sve elemente $a, b \in G$ takve da je $a \neq e$ i $b \neq e$, postoji $n \in N$ koji zadovoljava $a^n b^{-1} \neq e$, i važi nejednakost:

$$R\left(a^n b^{-1}, e\right) \geq \min(R(a, e), R(b, e))$$

Teorema 36 *([15])Za proizvoljni rasplinuti podskup λ od G i proizvoljnu rasplinutu relaciju R na λ, par (λ, R) je Arhimedova uređena rasplinuta podgrupa od G ako i samo ako je (λ_t, R_t) Arhimedova uređena podgrupa od G za sve $t \in (0, 1]$.*

Naredni pristup rasplinutim mrežno uređenim grupama je prvi put uveden u radu autora G.S.V. Satya Saibaba [84]. Kao jednu od razlika sa našim pristupom, navodimo da se u radu [84] za kodomen preslikavanja uzima kompletna mreža L koja zadovoljava beskonačan $\wedge$-distributivni zakon. U našem radu za kompletnu mrežu L nije neophodno da ispunjava dodatni uslov.

Neka je dat neprazan skup X. L-rasplinuti podskup od X je funkcija iz skupa X u L, gde je L kompletna mreža koja zadovoljava beskonačan $\wedge$-distributivni zakon.

U ovom radu je prvi put uvedena definicija L-rasplinute l-podgrupe mrežno uređene grupe $(G, +, \vee, \wedge)$.

Neka je data mrežno uređena grupa $(G, +, \vee, \wedge)$. L-rasplinuti podskup λ od G je L-rasplinuta l-podgrupa od G, ako važi sledeće:

1. $\lambda(x + y) \geq \lambda(x) \wedge \lambda(y)$
2. $\lambda(-x) = \lambda(x)$
3. $\lambda(x \vee y) \geq \lambda(x) \wedge \lambda(y)$
4. $\lambda(x \wedge y) \geq \lambda(x) \wedge \lambda(y)$, za sve elemente $x, y \in G$.

Prva osnovna razlika između ovde navedenog pristupa rasplinutim uređenim grupama i našeg pristupa izloženog u narednom Odeljku (4.9), vidi se iz same definicije. Naime, ovde su razmatrane rasplinute podgrupe grupe G koja mora biti mrežno uređena, dok u našem slučaju grupa G predstavlja proizvoljnu uređenu grupu.

Isto tako, možemo primetiti da u prethodnoj definiciji L-rasplinute l-podgrupe od G nije naznačeno uređenje u G (u samoj definiciji). Za razliku od ovog pristupa, mi smo rasplinutu uređenu podgrupu grupe G upravo definisali kao uređeni par (μ, ρ), u kome druga koordinata ρ predstavlja relaciju rasplinutog poretka.

Osnovni nedostatak definicije L-rasplinute l-podgrupe iz [84], je što uslovi 3. i 4. definicije zahtevaju da L-rasplinuta l-podgrupa bude rasplinuta podmreža. Naravno, u slučaju obične mrežno uređene grupe i njenih podgrupa, ne važi da je svaka podgrupa od G mrežno uređena.

Stav 46 *([84])Neka je λ L-rasplinuti podskup mrežno uređene grupe G. λ je L-rasplinuta l-podgrupa od G ako i samo ako važi $\lambda(x - y) \geq \lambda(x) \wedge \lambda(y)$ i $\lambda(x \wedge y) \wedge \lambda(x \vee y) \geq \lambda(x) \wedge \lambda(y)$, za sve elemente $x, y \in G$.*

Možemo primetiti da u Stavu 46, za rasplinuti skup λ važi da su dva data uslova ekvivalentna uslovu pod kojim je rasplinuti skup λ istovremeno rasplinuta grupa i rasplinuta mreža.

Sledeća važna osobina vezana je za t-nivo-podskupove.

Stav 47 *([84])L-rasplinuti podskup λ mrežno uređene grupe G je L-rasplinuta l-podgrupa od G ako i samo ako λ_t predstavlja l-podgrupu od G za sve elemente $t \in \lambda(G) \cup \{t \in L : \lambda(0) \geq t\}$.*

Stav 48 *([84])Neka je λ L-rasplinuta l-podgrupa mrežno uređene grupe G. Tada $G_\lambda = \{x \in G : \lambda(x) = \lambda(0)\}$ predstavlja l-podgrupu grupe G.*

Naredna definicija je ponovljena definicija na strani 34.

Neka je data mrežno uređena grupa G, i neka je a proizvoljan elemenat iz G. Apsolutnu vrednost elementa a, u oznaci $|a|$, definišemo na sledeći način:

$$|a| = a \vee a^{-1}.$$

Veoma važan pojam uveden radu [84] je pojam L-rasplinutog l-ideala.

L-rasplinuta podgrupa λ grupe G predstavlja L-rasplinuti l-ideal u G ako važe uslovi:

1. $\lambda(x+y) = \lambda(y+x)$, za sve $x, y \in G$, i
2. $x, a \in G$, $|x| \leq |a| \Longrightarrow \lambda(x) \geq \lambda(a)$.

Stav 49 *([84])Ako su λ i μ dva L-rasplinuta l-ideala mrežno uređene grupe G, tada je i $\lambda \cap \mu$ L-rasplinuti l-ideal u G.*

Stav 50 *([84])Neka je λ L-rasplinuti l-ideal u mrežno uređenoj grupi G. Tada $G_\lambda = \{x \in G : \lambda(x) = \lambda(0)\}$ predstavlja l-ideal u G.*

Neka su date l-podgrupa G i L-rasplinuta relacija β na G. L-rasplinuta relacija β je kompatibilna na G ako važi:

$$\begin{aligned} \beta(a+c, b+d) &\geq \beta(a,b) \wedge \beta(c,d) \\ \beta(a \vee c, b \vee d) &\geq \beta(a,b) \wedge \beta(c,d) \\ \beta(a \wedge c, b \wedge d) &\geq \beta(a,b) \wedge \beta(c,d), \quad \text{za sve } a,b,c,d \in G. \end{aligned}$$

Kompatibilna L-rasplinuta relacija koja je relacija ekvivalencije, zove se L-rasplinuta kongruencija u G.

Neka je G l-grupa i μ L-rasplinuta podgrupa od G. L-rasplinuta relacija λ_μ na G može biti definisana pomoću:

$$\lambda_\mu = \begin{cases} 1, & \text{za } x = y \\ \mu(x-y), & \text{za } x \neq y. \end{cases}$$

Stav 51 *([84])λ_μ je L-rasplinuta kongruencija u mrežno uređenoj grupi G.*

U radu je pokazano da postoji jednoznačno obostrana korespondencija između L-rasplinutih kongruencija i L-rasplinutih l-ideala u l-grupi G. Ona predstavlja mrežni izomorfizam, što se upravo dokazuje pomoću L-rasplinute relacije λ_μ. Dakle, istaknut je značaj uvođenja i razmatranja prethodno uvedene relacije.

Stav 52 *([84])Ako je μ dati l-rasplinuti l-ideal u l-grupi G, tada važi da je $\mu_{\lambda_\mu} = \mu$.*

Stav 53 *([84])Ako je λ data L-rasplinuta kongruencija u l-grupi G, tada važi da je $\lambda_{\mu_\lambda} = \lambda$.*

Izvršimo sada analizu rada [5] autora M.Bakhshi, koji se pojavio 2013. godine. Bitno ograničenje pristupa izloženog u [5] je što je za kodomen preslikavanja uzet interval $[0, 1]$, dok smo mi razmatrali opšti slučaj (kodomen preslikavanja je mreža L).

Analizirajmo sada redom pojedine delove rada, upoređujući ih pri tom sa odgovarajućim delovima našeg rada (definicije rasplinutog podskupa, rasplinute podgrupe i nivo-podskupa u [5] su standardne).

Najpre definišimo donji rasplinuti poluideal (G predstavlja uređenu grupu). Rasplinuti poluideal se takođe naziva i donji rasplinuti skup.

Rasplinuti podskup λ grupe G se zove rasplinuti poluideal ako svaki neprazan nivo-podskup λ_t(gde $t \in [0, 1]$) predstavlja poluideal u G ([5]).

Ukoliko bismo naš pristup ograničili na interval $[0, 1]$, videli bismo da izložena definicija zapravo predstavlja naš Stav 32 (str.47). Isto tako, naša definicija rasplinutog poluideala iz Odeljka 4.1, formulisana je odgovarajućim stavom u radu [5].

U ovom radu se koristi standardna definicija rasplinute podmreže.

Rasplinuti podskup ν mreže $(L; \vee, \wedge)$ naziva se rasplinuta podmreža ako za sve elemente $x, y \in L$ važi:

1. $\nu(x \vee y) \geq \nu(x) \wedge \nu(y)$
2. $\nu(x \wedge y) \geq \nu(x) \wedge \nu(y)$.

Stav 54 *([5])Rasplinuti podskup μ mreže $(L; \vee, \wedge)$ je rasplinuta podmreža ako i samo ako svaki neprazan nivo-podskup μ_t (gde $t \in [0, 1]$) predstavlja podmrežu od L.*

U Odeljku 4.4, rasplinuta podmreža predstavlja uređeni par (μ, ρ). Prva koordinata μ predstavlja rasplinutu podmrežu kao rasplinutu algebru (njoj je pridruženo rasplinuto uređenje ρ, definisano sa $\rho(x, y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x, y)$).

Sledi definicija rasplinute konveksne podgrupe iz [5].

Neka je G data uređena grupa. Rasplinuta podgrupa λ od G je rasplinuta konveksna podgrupa ako za sve elemente $a, b, c \in G$ za koje je $a \leqslant c \leqslant b$, važi $\lambda(c) \geq \lambda(a) \wedge \lambda(b)$.

Imajući u vidu suštinsku razliku da u našem slučaju (Odeljak 4.9) rasplinuta uređena podgrupa predstavlja uređeni par, pretpostavimo da je mreža L realan interval $[0,1]$. U ovom specijalnom slučaju, uočavamo analogiju sa prethodnim.

Naredni stav vezan je za prethodni pojam.

Stav 55 *([5])Proizvoljna rasplinuta konveksna podgrupa grupe G zadovoljava uslove:*
1.$(\forall x, y \in G)$ ako važi $e \leqslant x \leqslant y$ onda imamo $\lambda(x) \geq \lambda(y)$,
2.$(\forall x, y \in G)$ ako važi $y \leqslant x \leqslant e$ onda imamo $\lambda(x) \geq \lambda(y)$.

Ukoliko grupa G predstavlja mrežno uređenu grupu, imamo sledeći stav ([5]).

Stav 56 *([5])Rasplinuta podgrupa λ od G je rasplinuta l-podgrupa ako i samo ako za sve elemente $x \in G$,*

$$\lambda(x \vee e) \geq \lambda(x).$$

U našem radu (Odeljak 4.11), pristup je obrnut od izloženog. Mi smo upravo pošli od nejednakosti formulisane prethodnim stavom, $\lambda(x \vee e) \geq \lambda(x)$, i upotrebili smo je da bismo definisali rasplinutu l-podgrupu.

4.9 Rasplinuta uređena podgrupa

Definicija rasplinute uređene podgrupe uvedena je u radu [99]. Uobičajeno, $(L, \wedge, \vee, \leq)$ predstavlja kompletnu mrežu, odnosno skup vrednosti. Većina originalnih tvrđenja, kao i Primer 14, objavljeni su u [99]. Lema 26 je takođe originalna.

Stav 57 *Neka je $\left(G, \cdot, {}^{-1}, e, \leqslant\right)$ uređena grupa i $\mu : G \to L$ rasplinuta podgrupa od G. Rasplinuta relacija $\rho : G^2 \to L$ na μ definisana sa*

$$\rho(x, y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x, y),$$

je rasplinuti poredak na μ koji je kompatibilan sa grupnom operacijom u smislu (18).

Dokaz. Na osnovu Teoreme 26 (str.55), ρ je relacija rasplinutog poretka na μ. Dokazujemo da je ona kompatibilna sa $\cdot$, odnosno da ispunjava (18). Zaista, za $x, y, z \in G$ imamo

$\mu(z) \wedge \rho(x,y) =$

$$= \mu(z) \wedge \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y) \leq \mu(x \cdot z) \wedge \mu(y \cdot z) \wedge k_{\leqslant}(x \cdot z, y \cdot z) = \rho(x \cdot z, y \cdot z),$$

pošto je μ rasplinuta podgrupa od G, i uređenje $\leqslant$ u G je kompatibilno sa grupnom operacijom.

Slično možemo dokazati formulu

$$\mu(z) \wedge \rho(x,y) \leq \rho(z \cdot x, z \cdot y),$$

znači (18) važi. ■

Sada možemo uvesti novu definiciju.

Neka je $\left(G, \cdot, {}^{-1}, e, \leqslant\right)$ uređena grupa. Neka su $\mu : G \to L$ i $\rho : G^2 \to L$ dati rasplinuti podskup od G, i data rasplinuta relacija na μ, redom. Par (μ, ρ) je **rasplinuta uređena podgrupa od** G ako važi sledeće:

1. μ je rasplinuta podgrupa od G;
2. ρ je rasplinuta relacija na μ definisana pomoću

$$\rho(x,y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y).$$

Očigledno, na osnovu Stava 57 (str.76), ρ je relacija rasplinutog poretka na μ, kompatibilna sa grupnom operacijom.

Primer 14 *Neka je $(Z, +, -, 0, \leqslant)$ aditivna grupa celih brojeva u odnosu na uobičajeno uređenje. Neka je $(L, \leq)$ četvoro -elementni lanac: $0 < a < b < 1$. Korišćenjem uobičajene oznake $x|y$ za x deli y, definisaćemo rasplinuti skup $\mu : Z \to L$ na sledeći način: za $x \in Z$*

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & ako \quad 12|x \\ b & ako \quad 6|x \;\; i \;\; 4 \nmid x \\ a & ako \quad 3|x \;\; i \;\; 2 \nmid x \\ 0 & \qquad u \text{ ostalim slučajevima} \end{cases}$$

Direktno se može proveriti da je μ rasplinuta podgrupa od $(Z, +, -, 0)$.

Dalje, neka je $\rho : Z^2 \to L$ rasplinuta relacija na μ definisana pomoću (12):

$$\rho(x,y) := \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x,y).$$

Tada važi za sve $x, y \in Z$

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \mathbf{1} & ako \quad 12|x, 12|y \; i \; x \leqslant y \\ \mathbf{b} & ako \quad 6|x, 6|y, (4\nmid x \; ili \; 4\nmid y) \; i \; x \leqslant y \\ \mathbf{a} & ako \quad 3|x, 3|y, (2\nmid x \; ili \; 2\nmid y) \; i \; x \leqslant y \\ \mathbf{0} & \qquad u \text{ ostalim slučajevima } (ako \; (3\nmid x, 3\nmid y) \; ili \; za \; x > y). \end{cases}$$

Par (μ, ρ) je rasplinuta uređena podgrupa od Z, prema našoj definiciji.

Teorema 37 *Neka je G uređena grupa, $\mu : G \to L$ rasplinuti podskup od G i $\rho : G^2 \to L$ rasplinuta relacija na μ. Tada je (μ, ρ) rasplinuta uređena podgrupa od G ako i samo ako za svaki $p \in L$, nivo μ_p je uređena podgrupa od G.*

Dokaz. Neka je (μ, ρ) rasplinuta uređena podgrupa od G. Poznato je da za mrežno vrednosne strukture važi da se tvrđenje da je struktura podalgebra (podgrupa), prenosi na nivo-podskupove. Ovo znači da za svaki $p \in L$, nivo μ_p od μ je podgrupa od G. Na osnovu Teoreme 27 (str.56), (μ_p, ρ_p) je poset sa odgovarajućim uređenjem, znači μ_p je uređena podgrupa od G.

Obrnut smer je dobro poznat za grupe, i deo o uređenju opet sledi pomoću Teoreme 27 (str.56). ■

Ilustracija Teoreme 37 (str.78) može se videti u Primeru 14, na primer, b-nivo od μ je standardno uređena podgrupa celih brojeva deljivih sa 6.

Sledeća teorema je poznata kao *Teorema o sintezi.* U slučaju rasplinutih uređenih podgrupa ona se sastoji iz dva dela, algebarskog i relacionog. U oba dela, konstrukcija je slična onoj zadatoj u Teoremi 28 (str.57), što takođe dokazuje deo o uređenju određenom pomoću relacije.

Teorema 38 *Neka je $\mathcal{F}$ kolekcija podgrupa uređene grupe $\left(G, \cdot, {}^{-1}, e, \leqslant\right)$ koja je zatvorena za skupovni presek i koja sadrži G. Tada postoji kompletna mreža L i rasplinuta uređena podgrupa (μ, ρ) od G, takva da se, za svaku podgrupu $H \in \mathcal{F}$, nivo μ_H poklapa sa H i uređenje u njemu je određeno pomoću ρ_H.*

Razmotrimo dalje sledeći pristup rasplinutim podgrupama uređene grupe G. Znamo da važi sledeće:

$$k_{\leqslant}(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \leqslant y \Leftrightarrow x^{-1} + y \in P_G \quad \left(x^{-1} = -x\right)$$

Uvedimo sledeću oznaku:

$$\begin{gathered} -x + y = l,\ l \in P_G \\ x - x + y = x + l \\ y = x + l,\ l \in P_G. \end{gathered}$$

Izvršimo sada upoređivanje vrednosti u koje se preslikavaju međusobno uporedivi elementi grupe G (takođe ćemo razmotriti i skup slika translacija istih elemenata). Iz prethodno navedenog i iz definicije rasplinute uređene podgrupe, sledi da je potrebno razmatrati samo preslikavanja $\mu(l), l \in P_G$, kao i njihove translacije za elemenat $x : y = x + l$. Sledeća lema pokazuje da za proizvoljne uporedive elemente x, y date uređene grupe G, i proizvoljnu rasplinutu podgrupu μ od G, postoji pravilnost između vrednosti preslikavanja ova dva elementa, i vrednosti preslikavanja proizvoljne translacije istih elemenata.

Lema 26 *Neka je $(G, +, -, o, \leqslant)$ data uređena grupa. Neka je (μ, ρ) data rasplinuta uređena podgrupa, gde je $\mu : G \longrightarrow L$ (L je potpuna mreža). Neka je $l \in P_G$ proizvoljan elemenat, i označimo $p = \mu(l)$. Neka je μ_p nivo-podgrupa, i neka je $x \in \mu_p$ proizvoljno. Označimo: $y = x + l$. Tada za sve elemente $a \in \mu_p$ važi:*

$$p = \mu(x+a) \wedge \mu(y+a).$$

Dokaz. Posmatrajmo podgrupu μ_p grupe G. Znamo da je μ_p uređena podgrupa (pomoću Teoreme 37,str.78). Prema Teoremi 13 (str.29) važi: $P_{\mu_p} = P_G \cap \mu_p$. Dalje, iz pretpostavke leme imamo:

$$y = x + l,$$

pa zaključujemo da $y \in \mu_p$ (jer je μ_p podgrupa). Na osnovu Teoreme 10 (str.25), važi:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow -x + y \in P_{\mu_p}$$

Sledi:

$$p = \mu(l) = \mu(-x+y) \geq \mu(-x) \wedge \mu(y) = \tag{22}$$

$= \mu(x) \wedge \mu(y) \geq p$ (po definiciji podgrupe μ_p)
Iz nejednakosti (22) sledi:

$$p = \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Dalje, znamo da u uređenoj podgrupi μ_p važi:

$$x \leqslant y \Rightarrow x + a \leqslant y + a.$$

Sledi:
$$p = \mu(-(x+a) + y + a) \geq$$

$$\mu(x+a) \wedge \mu(y+a) \geq p.$$

Zaključujemo $\mu(x+a) \wedge \mu(y+a) = p$. Jednakost važi za bilo koji elemenat $a \in \mu_p$, odnosno za proizvoljnu translaciju elemenata x, y. ■

4.10 Rasplinuti konus

Definicije rasplinutog pozitivnog konusa, rasplinutog negativnog konusa i rasplinute konveksne podgrupe uvedene su u radu [99]. Tvrđenja iz ovog odeljka su originalna i objavljena su u [99].

U cilju ispitivanja strukture uređene podgrupe, posmatramo takozvane pozitivne i negative elemente, čiji su skupovi u klasičnoj teoriji uređenih grupa poznati kao *konusi* (pozitivan i negativan). Uvodimo analogne objekte u okviru rasplinute algebre i ispitujemo njihove osobine.

Ako je (μ, ρ) rasplinuta uređena podgrupa grupe G, tada definišemo **rasplinuti pozitivan konus** na μ, kao rasplinuti podskup $\pi_\mu : G \to L$, na sledeći način:

$$\pi_\mu(x) := \rho(e, x),$$

gde je e neutralni element u G.

Očigledno,

$$\pi_\mu(x) = \begin{cases} \mu(x) & \text{ako } x \geqslant e, \\ 0 & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Analogno, ako je (μ, ρ) rasplinuta uređena podgrupa grupe G, definišemo **rasplinuti negativan konus** kao rasplinuti podskup $\nu_\mu : G \to L$, na sledeći način:

$$\nu_\mu(x) := \rho(x, e)$$

Sledi da

$$\nu_\mu(x) = \begin{cases} \mu(x) & \text{ako } x \leqslant e, \\ 0 & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Veza između dva konusa je očigledna, kao i u klasičnom slučaju:

$$\pi_\mu(x) \wedge \nu_\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{za } x = e \\ 0, & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Postoji veza između rasplinutog konusa i odgovarajućeg rasplinutog uređenja, što upravo sledi.

Stav 58 *Neka je* $\left(G, \cdot, ^{-1}, e, \leqslant\right)$ *uređena grupa i* (μ, ρ) *njena rasplinuta uređena podgrupa. Tada za sve* $x, y \in G$ *važi:*

$$\pi_\mu\left(x^{-1} \cdot y\right) \geq \rho(x, y).$$

Dokaz. $\pi_\mu\left(x^{-1} \cdot y\right) = \rho\left(e, x^{-1} \cdot y\right) = \mu(e) \wedge \mu\left(x^{-1} \cdot y\right) \wedge k_\leqslant\left(e, x^{-1} \cdot y\right) =$
$= \mu\left(x^{-1} \cdot y\right) \wedge k_\leqslant\left(e, x^{-1} \cdot y\right).$
Sada, ako $x \leqslant y$, tada $x^{-1} \cdot y \geq e$ i imamo
$\pi_\mu\left(x^{-1} \cdot y\right) = \mu\left(x^{-1} \cdot y\right) \geq \mu\left(x^{-1}\right) \wedge \mu(y) = \mu(x) \wedge \mu(y) =$
$\mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_\leqslant(x, y) = \rho(x, y).$
Ako $x \nleqslant y$, tada $k_\leqslant(x, y) = 0$, znači $\rho(x, y) = 0$, i opet imamo
$\pi_\mu\left(x^{-1} \cdot y\right) \geq \rho(x, y)$. ■

Primetimo da su u mrežno uređenoj grupi G, skup pozitivnih elemenata, pozitivan konus, i skup negativnih elemenata, negativan konus, redom označeni pomoću P_G i N_G. Ovde koristimo iste oznake za njihove karakteristične funkcije: za svaki elemenat $x \in G$

$$P_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako } x \geqslant e, \\ 0 & \text{u suprotnom;} \end{cases}$$

$$N_G(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako } x \leqslant e. \\ 0 & \text{u suprotnom.} \end{cases}$$

Stav 59 *Neka je* $\left(G, \cdot, ^{-1}, e, \leqslant\right)$ *uređena grupa i* (μ, ρ) *rasplinuta uređena podgrupa od* G. *Važi sledeće:*

$$\pi_\mu = \mu \cap P_G.$$

Dokaz. Očigledno, za svaki $x \in G$,
$\pi_\mu (x) = \rho (e, x) = \mu (x) \wedge k_\leqslant (e, x) = (\mu \cap P_G) (x)$. ■

Podsetimo se da po našoj prethodnoj definiciji (formula (9)), rasplinuti podskup $\mu : P \to L$ poseta $(P, \leqslant)$ je rasplinuti konveksan podposet od $(P, \leqslant)$ ako za sve $x, y, z \in P$,

$$\mu (x) \wedge \mu (z) \wedge k_\leqslant (x, y) \wedge k_\leqslant (y, z) \leq \mu (y) .$$

Posledično, kažemo da je rasplinuta uređena podgrupa (μ, ρ) uređene grupe $(G, \leqslant)$, **rasplinuta konveksna podgrupa** od G ako je μ rasplinuti konveksan podskup poseta $(G, \leqslant)$.

U sledećoj teoremi koristimo P_G i N_G kao uobičajene podposete od G.

Teorema 39 *Neka je (μ, ρ) rasplinuta uređena podgrupa od $\left(G, \cdot, {}^{-1}, e, \leqslant\right)$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*
(i) (μ, ρ) je rasplinuta konveksna podgrupa od G.
(ii) Restrikcija od π_μ na P_G je rasplinuti poluideal (donji rasplinuti skup) u P_G.
(iii) Restrikcija od ν_μ na N_G je gornji rasplinuti podskup od N_G.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Pretpostavimo da je (μ, ρ) rasplinuta konveksna podgrupa od G i neka je $x, y \in P_G$. Neka važi $y \leqslant x$. Tada pomoću rasplinute konveksnosti

$$\mu (e) \wedge \mu (x) \wedge k_\leqslant (e, y) \wedge k_\leqslant (y, x) \leq \mu (y) . \tag{23}$$

Pošto $x, y \in P_G$, imamo
$\pi_\mu(x) = \mu(x), \pi_\mu(y) = \mu(y)$, i $k_\leqslant (e, y) = 1$,
i pomoću (23) dobijamo
$\pi_\mu(x) \wedge k_\leqslant (y, x) = \mu (x) \wedge k_\leqslant (y, x) \leq \mu (y) = \pi_\mu(y)$.
Znači, restrikcija od π_μ je rasplinuti poluideal u P_G.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Pretpostavimo da je restrikcija od π_μ na P_G rasplinuti poluideal u P_G. Dokazujemo da je μ rasplinuto konveksna, ekvivalentno, da za sve elemente $x, y, z \in G$, imamo:

$$\mu (x) \wedge \mu (z) \wedge k_\leqslant (x, y) \wedge k_\leqslant (y, z) \leq \mu (y) .$$

Ako nije tačno da je $x \leqslant y \leqslant z$, tada je gornja formula trivijalno ispunjena. Ako je $x \leqslant y \leqslant z$, dobijamo

$$e \leqslant x^{-1} \cdot y \leqslant x^{-1} \cdot z,$$

i znači, pošto je π_μ rasplinuti poluideal u P_G,
$\mu(x^{-1} \cdot z) \wedge 1 = \pi_\mu(x^{-1} \cdot z) \wedge k_\leqslant(x^{-1} \cdot y, x^{-1} \cdot z) \leq \pi_\mu(x^{-1} \cdot y) = \mu(x^{-1} \cdot y)$.
Odatle, pošto je $k_\leqslant(x, y) = k_\leqslant(y, z) = 1$, imamo
$\mu(x) \wedge \mu(z) \wedge k_\leqslant(x, y) \wedge k_\leqslant(y, z) \leq \mu(x) \wedge \mu(x^{-1} \cdot z) \leq \mu(x) \wedge \mu(x^{-1} \cdot y) \leq \mu(x \cdot x^{-1} \cdot y) \leq \mu(y)$.
Znači, μ je rasplinuta konveksna podgrupa od G.

Dokazi implikacija $(i) \Rightarrow (iii)$ i $(iii) \Rightarrow (i)$ su potpuno analogni prethodnim. ■

4.11 Rasplinute mrežno uređene grupe

Pojam rasplinute mrežno uređene grupe koristi se u radu [100]. Ovaj odeljak sadrži originalna tvrđenja iz istog rada. Na primer, izložena je veza između rasplinute ℓ-podgrupe i njenih nivo-podskupova (u obliku ℓ-podgrupa).

Takođe, došli smo do zaključka da veoma važno svojstvo ima kolekcija svih konveksnih ℓ-podgrupa zadate mrežno uređene grupe G. U Teoremi 41, konstruisana je rasplinuta ℓ-podgrupa od G, čiji se skup vrednosti preslikavanja sastoji iz odgovarajućih konveksnih ℓ-podgrupa od G.

Neka je $(G, \cdot, {}^{-1}, e, \leqslant)$ mrežno uređena grupa, L kompletna mreža i (μ, ρ) rasplinuta uređena podgrupa od G. Kažemo da je (μ, ρ) **rasplinuta mrežno uređena podgrupa** od G, ili **rasplinuta ℓ-podgrupa** od G ako za svaki $x \in G$ važi:

$$\mu(x) \leq \mu(x \vee e). \tag{24}$$

Teorema 40 *Neka je μ rasplinuta podgrupa mrežno uređene grupe G. Tada, (μ, ρ) je rasplinuta ℓ-podgrupa od G ako i samo ako za svaki $p \in L$, nivo μ_p je ℓ-podgrupa od G.*

Dokaz. Neka je $\mu : G \to L$ rasplinuta podgrupa grupe G, i pretpostavimo da (24) važi. Na osnovu Teoreme 37 (str.78), znamo da je μ uređeno pomoću $\rho : G^2 \to L$, $\rho(x, y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x, y)$, i za svaki $p \in L$, (μ_p, ρ_p) je uređena podgrupa od G. Dodatno, ρ_p je restrikcija uređenja $\leqslant$ iz G. Dalje, za svaki $p \in L$ i svaki $x \in G$,

$$x \in \mu_p \text{ povlači } \mu(x) \geq p, \text{ pa sledi pomoću (24) } \mu(x \vee e) \geq p,$$

ekvivalentno $x \vee e \in \mu_p$. Na osnovu Teoreme 19 (str.35), μ_p je ℓ-podgrupa od G.

Suprotno, neka je za svaki $p \in L$, nivo μ_p ℓ-podgrupa od G. Tada, za svaki $x \in G$ važi:

$$\mu(x) = \bigvee(p \in L \mid x \in \mu_p) \leq \bigvee(p \in L \mid x \vee e \in \mu_p) = \mu(x \vee e),$$

i (24) važi. ■

Prema Teoremi 40 (prethodna teorema), svi nivoi rasplinute ℓ-podgrupe od G predstavljaju ℓ-podgrupe grupe G. Ipak, u klasičnom slučaju, nije svaka podgrupa mrežno uređene grupe G ℓ-podgrupa od G, osim u slučaju da je grupa linearno uređena (Teorema 19,str.35). Dakle, realno je razmatrati egzistenciju rasplinutih ℓ-podgrupa mrežno uređene grupe koja ne mora biti linearno uređena. Naš odgovor na postavljeni problem egzistencije je potvrdan za rasplinute konveksne ℓ-podgrupe, što je pokazano u narednom delu.

Primetimo da je par (μ, ρ) rasplinuta konveksna ℓ-podgrupa mrežno uređene grupe G, ako i samo ako (na osnovu Leme 15,str.56) svaki nivo μ_p predstavlja konveksnu ℓ-podgrupu od G.

U daljem tekstu, za elemenat x grupe G, i kolekciju H podgrupa od G, označićemo pomoću $\langle x \rangle_H$ najmanju podgrupu sadržanu u H, koja sadrži elemenat x. Pošto je presek proizvoljne familije ℓ-podgrupa ℓ-podgrupa, i G je ℓ-podgrupa, najmanja podgrupa od H, koja sadrži x uvek postoji i jednaka je preseku svih ℓ-podgrupa koje sadrže x.

Teorema 41 *Neka je $(G, \cdot, ^{-1}, e, \leqslant)$ mrežno uređena grupa, i L mreža SubG svih podgrupa od G, uređena dualno skupovnoj inkluziji. Dalje, neka se $H \subseteq L$ sastoji od svih konveksnih ℓ-podgrupa od G. Tada, funkcija $\mu : G \to L$, takva da za svaki $x \in G$, $\mu(x) := \langle x \rangle_H$, predstavlja rasplinutu ℓ-podgrupu od G.*

Dokaz. Najpre dokazujemo da je μ zatvorena za binarnu operaciju $\cdot$ u G, ekvivalentno da za sve $x, y \in G$ važi:

$$\mu(x \cdot y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y). \tag{25}$$

Navedena nejednakost je, pomoću definicije uređenja u L (koje je dualno skupovnoj inkluziji) i pomoću definicije μ, ekvivalenta sa:

$$\langle x \cdot y \rangle_H \subseteq \langle x \rangle_H \vee_{\mathrm{Sub}G} \langle y \rangle_H,$$

koja, pomoću definicije operacije $\vee$ u Sub$G$, važi ako i samo ako:

$$\langle x \cdot y \rangle_H \subseteq \langle \langle x \rangle_H \cup \langle y \rangle_H \rangle_H.$$

Ovde takođe koristimo činjenicu da kolekcija svih konveksnih ℓ-podgrupa mrežno uređene grupe formira kompletnu podmrežu mreže svih podgrupa od G (Teorema 21,str.35).

Pošto poslednja formula važi jer predstavlja osobinu podgrupa, formula (25) je dokazana. Dalje, pokazujemo da za svaki $x \in G$,

$$\mu(x^{-1}) \leq \mu(x). \tag{26}$$

Slično kao u prethodnom, (26) je ekvivalentno sa:

$$\langle x \rangle_H \subseteq \langle x^{-1} \rangle_H.$$

Pošto je očigledno $\langle x \rangle_H = \langle x^{-1} \rangle_H$, (26) važi.

Dalje, važi da je $\mu(e) = \{e\}$. Podgrupa $\{e\}$ predstavlja najveći elemenat u mreži nivo podgrupa, jer je uređenje dualno skupovnoj inkluziji.

Upravo smo pokazali da je μ rasplinuta podgrupa od G. Ona je rasplinuto uređena pomoću $\rho : G^2 \to L$, $\rho(x, y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x, y)$. Da bismo dokazali da je μ rasplinuto ℓ-uređena, pokazaćemo da je svaki nivo od μ ℓ-podgrupa od G. Znamo da je svaki nivo od μ uređena podgrupa od G. Da bismo pokazali da važi više, pretpostavimo da $p \in L$. Tada je μ_p nivo od μ, p je uređena podgrupa od G, ekvivalentno $p = K \in SubG$. Dakle važi:

$$\mu_p = \{x \in G \mid \mu(x) \geq p\} = \{x \in G \mid \langle x \rangle_H \subseteq K\} =$$

$$\bigvee \{\langle x \rangle_H \mid x \in K \text{ i } \langle x \rangle_H \subseteq K\} \in H.$$

Pošto je H kompletna podmreža mreže $L = SubG$ (Teorema 21), sledi da je μ_p ℓ-podgrupa od G. ■

Teorema 42 *Neka je G uređena grupa i L kompletna mreža. Tada je G totalno uređena ako i samo ako svaka rasplinuta podgrupa μ iz G predstavlja rasplinutu ℓ-podgrupu iz G u odnosu na uređenje $\rho : G \to L$, $\rho(x, y) = \mu(x) \wedge \mu(y) \wedge k_{\leqslant}(x, y)$.*

Dokaz. Neka je G totalno uređena. Tada pomoću Stava 39 (str.60), μ je takođe linearno uređena. Njeni nivoi su podposeti od G, koji su linearno uređeni, znači možemo zaključiti da su oni podmreže od G. Znači, μ je rasplinuta ℓ-podgrupa od G.

Suprotno, pretpostavimo da je svaka rasplinuta podgrupa uređene grupe, G rasplinuta ℓ-podgrupa. Tada isto takođe važi za sve klasične podgrupe od G, predstavljene pomoću odgovarajućih karakterističnih funkcija. Na osnovu Stava 19 (str.34), G je totalno uređena. ■

Uslov pod kojim je rasplinuta uređena podgrupa uređene grupe (koja ne mora biti linearno uređena) rasplinuti lanac dat je u narednom stavu. On predstavlja očiglednu posledicu Stava 40 (str.60).

Stav 60 *Rasplinuta podgrupa (μ, ρ) mrežno uređene grupe G je rasplinuti lanac u odnosu na ρ ako i samo ako za svaki par neuporedivih elemenata $x, y \in G$ važi:*

$$\mu(x) \wedge \mu(y) = 0.$$

4.12 Rasplinuta podgrupa količničke grupe

Analogno pojmu rasplinute podgrupe uređene grupe G, u ovom odeljku analiziramo neke rasplinute podgrupe količničke grupe G/A, gde je A konveksna normalna podgrupa od G. Ukoliko uzmemo da je grupa G Dekartov proizvod skupa realnih brojeva $R \times R$, i rasplinutu podgrupu količničke grupe $R \times R/A$ definišemo pomoću zadate rasplinute podgrupe (μ) grupe $R \times R$, dobijamo originalan rezultat izložen u Stavu 62. Ovim stavom određena je rasplinuta uređena podgrupa količničke grupe $R \times R/A$.

U Primeru 15, u nastavku je definisana rasplinuta uređena podgrupa količničke grupe $R \times R/A$ na drugačiji način, pomoću date rasplinute relacije λ_μ. Pokazali smo da ovako definisana rasplinuta uređena podgrupa predstavlja specijalan slučaj rasplinute uređene podgrupe određene Stavom 62. Suštinski deo opisanih rezultata izložen je u radu [100].

Napomenimo da u ovom odeljku koristimo aditivnu notaciju, da bi ona bila usklađena sa notacijom u Stavu 62, vezanim za skup realnih brojeva.

U Odeljku 2.3 smo videli da, ako je H konveksna normalna podgrupa uređene grupe G, tada uređenje $\leq_H$ na G/H može biti zadato na sledeći način:

$$\begin{array}{l} x + H \leq_H y + H \Leftrightarrow \\ (\exists h \in H)\, h + x \leqslant y. \end{array}$$

Neka je G uređena grupa, H njena konveksna normalna podgrupa, G/H količnička grupa i $\leq_H$uređenje na G/H, prethodno definisano. Neka je M rasplinuta podgrupa količničke grupe G/H. Uvedimo sada novu definiciju, rasplinute relacije μ_R na G/H .

Za sve $(x + H, y + H) \in G/H \times G/H$, rasplinuta relacija μ_R na G/H definisana je pomoću:

$$\mu_R\,(x + H, y + H) = M\,(x + H) \wedge M\,(y + H) \wedge k_{\leq}\,(x + H, y + H) \tag{27}$$

Naredni stav direktno sledi na osnovu Stava 57 (str.76), s tim što je ovde za domen rasplinutog skupa umesto grupe G uzeta količnička grupa G/H.

Stav 61 *Funkcija μ_R definisana u (27) je rasplinuta relacija na M (M je rasplinuta podgrupa od G/H), i ona je rasplinuti poredak saglasan sa binarnom operacijom "+" u grupi G/H.*

Razmotrimo sada sledeći primer, u kome je G aditivna grupa $R \times R$ (R je skup realnih brojeva). Ako je podskup P definisan pomoću:

$$(x, y) \in P \Leftrightarrow \{\ x \geqslant 0 \text{ i } y \geqslant 0\},$$

onda je P pozitivan konus u odnosu na odgovarajuće uređenje u $R \times R$. Uređenje koje je zadato u ovom slučaju je uređenje po koordinatama.

Ako preuzmemo oznake za podgrupe grupe $R \times R$ iz Primera 9, možemo istaći da podgrupe $H_{a,b}$ nisu konveksne u opštem slučaju. Podgrupe $H_{a,0}$ i $H_{0,b}$ predstavljaju konveksne podgrupe. Posmatrajmo sada količničku grupu $R \times R/A$, gde je A konveksna podgrupa. Na primer, možemo uzeti da je A zadata sa:

$$A = \{(0, y_1) : y_1 \in R\}.$$

Napišimo opšti oblik koseta količničke grupe $R \times R/A$:

$$(x,y)+A=(x,y)+\{(0,y_1):y_1\in R\}=$$
$$\{(x,y+y_1):y_1\in R\}.$$

Primetimo da su dva koseta ista ukoliko njihovi predstavnici imaju iste x-koordinate.

Naš cilj je da definišemo određenu funkciju M iz količničke grupe $R\times R/A$ u mrežu L, koja će predstavljati rasplinutu podgrupu količničke grupe $R\times R/A$. Neka je rasplinuta podgrupa $\mu : R\times R\to L$ već zadata, tako da ćemo M definisati pomoću nje. Bez ograničenja opštosti, možemo uzeti da je podgrupa A upravo ona koju smo prethodno definisali. Drugi slučaj kada je ta konveksna podgrupa oblika $\{(x_1,0):x_1\in R\}$ rešava se analogno. Pošto vrednost funkcije M mora biti jednaka za dva različita predstavnika istog koseta, zaključujemo da $R((x,y)+A)$ ne sme zavisiti od koordinate y u paru (x,y). Definišimo M na sledeći način:

$$M((x,y)+A)=\mu(x,0). \tag{28}$$

Stav 62 *Neka je proizvoljno zadata rasplinuta podgrupa $\mu : R\times R\to L$, i neka je A konveksna podgrupa grupe $R\times R$. Posmatrajmo količničku podgrupu $R\times R/A$, i neka je na njoj definisana funkcija M pomoću formule (28). Neka je μ_R rasplinuta relacija definisana u (27). Sledi da je par (M,μ_R) rasplinuta uređena podgrupa količničke grupe $R\times R/A$.*

Dokaz. Bez ograničenja opštosti, uzmimo da je podgrupa A definisana sa:

$$A=\{(0,y_1):y_1\in R\}.$$

Primetimo da je $M((0,y)+A)=\mu(0,0)$,
odnosno neutralni element se slika u 1.
1. Dokažimo najpre osobinu:

$$M((x,y)+A)=M((-x,-y)+A).$$

$M((x,y)+A)=\mu(x,0)=\mu(-x,0)=M((-x,-y)+A)$.
2. Sledi dokaz druge osobine:

$$M((x,y)+A+(z,t)+A)=M((x+z,y+t)+A)=$$

$=\mu(x+z,0)=L$,
gde smo označili sa L levu stranu nejednakosti.
Analogno, označimo desnu stranu tražene nejednakosti sa D.

$$D=M((x,y)+A)\wedge M((z,t)+A)=$$

$\mu(x,0)\wedge\mu(z,0)$.
Pomoću Leme 26. (str.78), važi:

$$\mu((x+z,0)-(z,0))=\mu(x+z,0)\wedge\mu(z,0).$$

Primenom prethodnog u D dobijamo:

$$D = \mu(x+z,0) \wedge \mu(z,0) \wedge \mu(z,0) =$$

$\mu(x+z,0) \wedge \mu(z,0)$.

Očigledno važi: $L \geq D$, i stav je za ovako definisanu podgrupu A dokazan. Napomenimo samo da je uređenje u grupi $R \times R$ koje smo ovde koristili uređenje po koordinatama.

Pomoću Stava 61 (str.85), μ_R je rasplinuti poredak saglasan sa binarnom operacijom količničke grupe $R \times R/A$, pa sledi da je par (M, μ_R) rasplinuta uređena podgrupa količničke grupe $R \times R/A$.

Potpuno analogno bismo izveli dokaz ukoliko je podgrupa A realna prava, odnosno:

$$A = \{(x_1, 0) : x_1 \in R\}.$$

U ovom slučaju bismo definisali M analogno prethodnom:

$$M((x,y)+A) = \mu(0,x).$$

Ovim je dokaz kompletiran. ■

Napomenimo samo da je u prethodnom stavu rasplinuta podgrupa μ zadata proizvoljno, pa su upravo formulom (28) opisane sve moguće rasplinute podgrupe grupe $R \times R/A$.

Primer 15 *Neka je data količnička grupa $R \times R/A$, gde je podgrupa A definisana sa:*

$$A = \{(0, y_1) : y_1 \in R\},$$

Neka je H_k oznaka za podgrupu grupe R definisanu na sledeći način:

$$H_k = \{nk : n \in Z\}.$$

Neka je data rasplinuta podgrupa $\mu : R \times R \to L$, gde je mreža L realan interval $[0,1]$, tako da je rasplinuta podgrupa μ ona za koju važi:

$$\mu^* = \{(nk, y) : n \in Z,\ y \in R\}, \quad \text{gde je } k \text{ fiksiran realan broj.}$$

Drugim rečima podgrupu μ^* čini skup svih paralelnih pravih sa y-osom, među kojima je rastojanje k fiksirano (strukture nivoa μ_p nije potrebno precizno definisati, jer je primer tačan u proizvoljnom slučaju).

Iz definicije zaključujemo da je:

$$\mu((x,y)-(x_1,0)) > 0, \ \text{za } x - x_1 \in H_k.$$

Dakle, posmatraćemo samo one vrednosti x koje pripadaju zbiru:

$$x = x_1 + k', \quad k' \in H_k. \tag{29}$$

(U ovom primeru zbog jednostavnosti uzimamo $k=1$, a slično je i u ostalim slučajevima).

Pošto gornje razlaganje nije jedinstveno, uzećemo ono x_1 koje je minimalno po apsolutnoj vrednosti. Označićemo ga sa h_x, $-\frac{1}{2} < h_x \leqslant \frac{1}{2}$.

Neophodno je u primeru uvesti pomoćnu relaciju $\lambda_\mu : R^2 \times R^2 \to [0,1]$, definisanu na sledeći način:

$$\lambda_\mu((x,y),(x_1,0)) = \begin{cases} 1, & za\ (x,y)\in A \\ \mu((x,0)-(x_1,0)), & za\ -\frac{1}{2} < x_1 \leqslant \frac{1}{2} \\ \lambda_\mu((x,y),(x_1-1,0)), & za\ \frac{1}{2} < x_1 < 1 \\ \lambda_\mu((x,y),(x_1+1,0)), & za\ -1 < x_1 \leqslant -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Među mogućim razlaganjima (29) elementa x, posmatraćemo ono u kom je vrednost x_1 minimalna po apsolutnoj vrednosti (postoji tačno jedno takvo razlaganje). Označimo x_1 iz tog razlaganja pomoću h_x. Vidimo da važi da je $-\frac{1}{2} < h_x \leqslant \frac{1}{2}$.

Posmatrajmo sada količničku grupu $R \times R/A$, i definišimo na njoj funkciju M na sledeći način:

$$M((x,y)+A) = \lambda_\mu((x,y),(h_x,0)).$$

Dva koseta su ista ukoliko njihovi predstavnici imaju iste x-koordinate. Dakle, funkcija M je dobro definisana, što znači da ne zavisi od izbora predstavnika (x,y) u kosetu $(x,y)+A$ (njena vrednost zavisi samo od x-koordinate). Važi sledeće:

Definisani rasplinuti podskup $M : R \times R/A \to [0,1]$ predstavlja rasplinutu podgrupu grupe $R \times R/A$.

1. Dokažimo najpre osobinu: $M((x,y)+A) = M((-x,-y)+A)$.

$$M((x,y)+A) = \lambda_\mu((x,0),(h_x,0)) = \mu((x-h_x,0)) =$$

$\mu((h_x-x,0)) = \lambda_\mu((-x,0),(-h_x,0)) = M((-x,-y)+A)$.

2. Sledi dokaz druge osobine:

znamo da je $h_{x+z} = h_x + h_z, \quad -\frac{1}{2} < h_x, h_z \leqslant \frac{1}{2}$.

$$M((x,y)+A+(z,t)+A) = M((x+z,y+t)+A) =$$

$\lambda_\mu((x+z,0),(h_{x+z},0)) = \mu((x+z,0)-(h_{x+z},0)) =$

$$\mu(x+z-h_{x+z},0) \qquad \textit{(30)}$$

1.*slučaj* $h_x > 0, h_z > 0$

Ukoliko je $h_x + h_z \leqslant \frac{1}{2}$, jednakost (30) postaje:

$$\mu(x-h_x+z-h_z,0) \geq \mu(x-h_x,0) \wedge \mu(z-h_z,0) =$$

$\lambda_\mu((x,0),(h_x,0)) \wedge \lambda_\mu((z,0),(h_z,0)) =$

$$M((x,y)+A) \wedge M((z,t)+A).$$

Izvedimo dokaz i u slučaju $h_{x+z} > \frac{1}{2}$, *pri čemu je* $h_{x+z} = h_x + h_z$

$$M\left((x+z, y+t)+A\right) = \lambda_\mu\left((x+z,0),(h_{x+z}-1,0)\right) =$$

$$\mu\left(x+1+z-h_{x+z},0\right) \geq$$

$$\mu\left(x+1-h_x,0\right) \wedge \mu\left(z-h_z,0\right)$$

Posmatrajmo sada samo prvi deo desne nejednakosti: $\mu\left(x+1-h_x,0\right)$.

$$\mu\left(x+1-h_x,0\right) = \mu\left(x-(h_x-1),0\right) =$$

$$\mu\left(-x+(h_x-1),0\right) =$$

$$\lambda_\mu\left((-x,0),(-h_x,0)\right) = \lambda_\mu\left((x,0),(h_x,0)\right).$$

Ovim izvođenjem smo sveli desnu stranu nejednakosti na prethodni podslučaj.

2.*slučaj* $h_x < 0, h_z < 0$

Znamo da je: $h_{x+z} = h_x + h_z$, *i* $h_{x+z} < 0$.

$$\mu\left(x+z-h_{x+z},0\right) = \mu\left(-x-z+h_{x+z},0\right) =$$

$$\mu\left(-x-z-1+1+h_{x+z},0\right) \geq$$

$$\mu\left(-x+h_x,0\right) \wedge \mu\left(-z+h_z,0\right) =$$

$$\lambda_\mu\left((-x,0),(-h_x,0)\right) \wedge \lambda_\mu\left((-z,0),(-h_z,0)\right) =$$

$$M\left((-x,-y)+A\right) \wedge M\left((-z,-t)+A\right) =$$

$$M\left((x,y)+A\right) \wedge M\left((z,t)+A\right).$$

3.*slučaj* $h_x > 0, h_z < 0$

Možemo primetiti da je u ovom slučaju $-\frac{1}{2} \leqslant h_x + h_z \leqslant \frac{1}{2}$, *pa se slučaj jednostavno proverava, slično kao prethodna dva.*

Podsetimo se da je u Stavu 62, rasplinuta podgrupa količničke grupe $R \times R/A$ definisana pomoću:

$$M\left((x,y)+A\right) = \mu\left(x,0\right).$$

Pošto je μ proizvoljna rasplinuta podgrupa grupe $R \times R$, možemo odabrati specijalan slučaj rasplinute podgrupe μ, za koji važi:

1. $\mu^* = R$ (realna prava)
2. ako je $n \in Z$, važi da je $\mu\left(x,0\right) = \mu\left(n,0\right)$ za $n - \frac{1}{2} < x \leqslant n + \frac{1}{2}$.

Ukoliko bismo u ovom specijalnom slučaju uveli još jedno ograničenje, da je kodomen rasplinute podgrupe μ realan interval $[0,1]$, upravo bismo definisali rasplinutu podgrupu količničke grupe $R \times R/A$, identičnu rasplinutoj podgrupi iz Primera 15.

Napomenimo još da smo u Primeru 15. proizvoljno uzeli da je μ^* podgrupa drugog tipa u opisu podgrupa grupe $R \times R$ (Primer 9 na strani 28). Isto tako, mogli smo odabrati i da je μ^* podgrupa trećeg tipa, odnosno:
ako je E proizvoljan podskup (konačan ili beskonačan) od $R \times R$,

$$\mu^* = \{k_1 \cdot e_1 + \cdots + k_n \cdot e_n : e_1, ..., e_n \in E,\ k_1, ..., k_n \in Z\}.$$

Primer bismo i u ovom slučaju konstruisali na sličan način.

U ovoj tezi koristili smo uređenje po koordinatama u grupi $R \times R$. Pomoću istog možemo definisati uređenje među kosetima količničke grupe $R \times R/H$.

$$\begin{gathered} x + H \leq_H y + H \Leftrightarrow \\ (\exists h \in H)\, h + x \leqslant y. \end{gathered}$$

Obratimo pažnju da su oznake za dva različita uređenja različite: $\leq_H$ je oznaka za uređenje među kosetima, a $\leqslant$ je standardna oznaka za uređenje među elementima grupe.

Ilustracije radi, možemo proveriti definiciju datog uređenja među kosetima u izloženom radu. Zadata količnička grupa je $R \times R/A$, gde je:

$$A = \{(0, y_1) : y_1 \in R\}.$$

Napišimo opšti oblik koseta količničke grupe $R \times R/A$:

$$(x, y) + A = \{(x, y + y_1) : y_1 \in R\}.$$

Dalje posmatrajmo:

$$\begin{gathered} (x, y) + A \leq_A (z, t) + A \Leftrightarrow \\ (\exists\, (0, y_1) \in A)\, ((0, y_1) + (x, y)) \leq (z, t) \Longleftrightarrow \\ (\exists y_1 \in R)\, ((0, y_1) + (x, y)) \leq (z, t) \Longleftrightarrow \\ x \leqslant z. \end{gathered}$$

4.13 Zaključak

U ovoj tezi se razvija novi pristup rasplinutim uređenim grupama, koji se razlikuje od prethodno izloženih pristupa drugih autora. Možemo ukratko ponovo istaći osnovne razlike i neke sličnosti koje se mogu uočiti ukoliko uporedimo druge radove sa našim.

Bhakat i Das su uveli rasplinute uređene podgrupe koristeći rasplinuto uređenje u radu [14], pri čemu su za skup vrednosti slika uzeli jedinični interval $[0, 1]$.

G.S.V. Satya Saibaba je definisao rasplinute mrežno uređene grupe, u radu [82]. Rasplinute mrežno uređene grupe su uvedene kao preslikavanja iz mrežno uređene grupe u kompletnu mrežu, koja zadovoljava beskonačan $\wedge$-distributivni zakon.

U radu [82], u samoj definiciji L-rasplinute l-podgrupe od G nije naznačeno uređenje u grupi G. Za razliku od ovog pristupa, mi smo rasplinutu uređenu podgrupu grupe G upravo definisali kao uređeni par (μ, ρ), u kome druga koordinata ρ predstavlja relaciju rasplinutog poretka.

Osnovni nedostatak definicije L-rasplinute l-podgrupe iz [82], je što se u njoj zahteva da L-rasplinuta l-podgrupa bude rasplinuta podmreža.

U radu [5] čiji je autor M.Bakhshi, uveden je koncept rasplinutih konveksnih mrežno uređenih podgrupa.Takođe su rasplinute konveksne mrežno uređene podgrupe predstavljene pomoću rasplinutih podgrupa.

Ako bismo se u našem budućem radu bavili proučavanjem normalnih rasplinutih podgrupa, pronašli bismo interesantnu primenu rezultata izloženih u ovoj tezi. Možemo istaću primenu Leme 26, u slučaju da je zadata totalno uređena grupa G. Dakle, u slučaju da domen rasplinute podgrupe μ predstavlja totalno uređena grupa G (kodomen je mreža L), pomoću Leme 26 dolazimo do zaključka da je rasplinuta podgrupa μ normalna rasplinuta podgrupa.

Predmet naših daljih istraživanja takođe predstavljaju rasplinute podgrupe količničke grupe.

Rasplinutu podgrupu M količničke grupe G/H možemo definisati pomoću prethodno zadate rasplinute podgrupe μ grupe G $(\mu : G \to L)$. Naravno, postoji više načina na koje možemo definisati rasplinutu podgrupu M. Navedimo neku od opisanih definicija.

$$M(x+H) = \begin{cases} 1 & \text{ako } x \in H \\ \bigwedge\limits_{h \in H} \mu(x-h) & \text{u suprotnom} \end{cases} .$$

Može se pokazati da je funkcija M dobro definisana, odnosno da za dva različita predstavnika istog koseta ima istu vrednost. Dalje, pomoću definicije rasplinute podgrupe i osobine infimuma u mreži L, izvodi se dokaz da M predstavlja rasplinutu podgrupu količničke grupe G/H.

Literatura

[1] N. Ajmal, K.V. Thomas, Fuzzy Lattices, Information Sciences, 79 (1994), 271-291.

[2] N. Ajmal, K.V. Thomas, The Lattices of Fuzzy ideals of a Ring, Fuzzy Sets and Systems 74 (1995), 371-379.

[3] Haci Aktas, On fuzzy relation and fuzzy quotient groups, International Journal of computational cognition, Vol.2, No 2, 71-79 (2004).

[4] J.M.Anthony, H.Sherwood, Fuzzy groups redefined, J. Math. Anal. Appl. 69 (1979), 124-130.

[5] M.Bakhshi, On fuzzy convex lattice-ordered subgroups, Iranian Journal of Fuzzy Systems 3 (2013), 159-172.

[6] W. Bandler, L.J. Kohout, Cuts Commute with Closures, in B.Lowen and M.Roubens (eds.): Fuzzy Logic: State of the Art, Kluwer Acad. Publ. 1993., 161-167.

[7] R. Bělohlávek, Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2002.

[8] R. Bělohlávek, Fuzzy equational logic, Arch. Math. Log. 41 (2002), 83-90.

[9] R. Bělohlávek, Similarity relations in concept lattices, J. of Logic and Computation 10 (6) (2000), 823-845.

[10] R. Bělohlávek, Fuzzy Closure operators, J. of Mathematical Analysis and Applications 262 (2001), 473-489.

[11] R. Bělohlávek, Fuzzy Closure operators II, Soft Computing 7 (2002), 53-64.

[12] R. Bělohlávek, Algorithms for fuzzy concept lattices, RASC 2002, Nottingham United Kindom, 12-13 December 2002, 200-205.

[13] R. Bělohlávek, M.Krupka, Grouping fuzzy sets by similarity, Information Science 179 (2009), 2656-2661.

[14] S.K. Bhakat, P. Das, Fuzzy partially ordered fuzzy subgroups, Fuzzy Sets and Systems **67** 2 (1994) 191-198.

[15] S.K. Bhakat, P. Das, A note on fuzzy Archimedean ordering, Fuzzy Sets and Systems **91** 1 (1997) 91-94.

[16] G. Birkhoff, Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Providence R.I., 1967.

[17] T.S. Blyth, Lattices and Ordered Algebraic Structures, Springer, 2005.

[18] U. Bodenhofer, A New Approach to Fuzzy Orderings, Tatra Mt. Math. Publ. Vol. 16 Part I, 1999 21-29.

[19] U. Bodenhofer, Representations and constructions of similarity based fuzzy orderings, Fuzzy Sets and Systems 137 (2003) 113–136.

[20] U. Bodenhofer, B. De Baets, J. Fodor, A compendium of fuzzy weak orders: Representations and constructions, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 811–829.

[21] S. Bodjanova, Comparison of fuzzy partitions based on their α-cuts, Fuzzy Sets and Systems 105 (1999), 99-112.

[22] D. Boixader, J.Jacas, J.Recasens, Fuzzy equivalence relation: advanced material, in: P.Dubois (Ed), Fundamentals of Fuzzy sets, Kluwer, Dordrecht (2000), 261-290.

[23] D.Boixader, J.Jacas, J.Recasens, Upper and lower approximation of fuzzy sets, Int. J. General Systems 29 (2000), 555-568.

[24] D.Boixader, J.Jacas, J.Recasens, Searching for meaning of defuzzification, Int. J. Uncertainty, Fuzzines and Knowledge-Based Systems 7 (2000), 475-482.

[25] I.Bošnjak, R.Sz.Madarasz, Remarks on the lattices of fuzzy subsets of a grupoid, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009), 3007-3012.

[26] I.Bošnjak, R.Sz.Madarasz, Algebras of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009), 2979-2988.

[27] P.Conrad, J.Martinez, Complemented lattice-ordered groups, Indagationes Mathematicae, Volume 1 (1990), 281-297.

[28] M. Ćirić, J. Ignjatović, S. Bogdanović, Fuzzy equivalence relations and their equivalence classes, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007), 1295–1313.

[29] M. Ćirić, J. Ignjatović, S. Bogdanović, Uniform fuzzy relations and fuzzy functions, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009), 1054–1081.

[30] I.Chajda, B. Šešelja, A. Tepavčević, A Note on Triangular Schemes for Weak Congruences, Czech. Math. J. 55 No. 3 (2005), 683-690.

[31] M.Chakraborty, S. Das, On fuzzy equivalence I, Fuzzy Sets and Systems (1983), 185-193.

[32] M.Chakraborty, S. Das, On fuzzy equivalence II, Fuzzy Sets and Systems 12 (1983), 299-307.

[33] I. Chon, Fuzzy partial order relations and fuzzy lattices, Korean J. Math. **17** (2009), No. 4, pp. 361–374.

[34] G.Czedli, Factor lattices by tolerances, Acta Scientiarum Mathematicarum 44 (1982), 35-42.

[35] P.S.Das, Fuzzy groups and level subgroups, J. Math. Anal. Appl. 84 1981., 264-269.

[36] B.A. Davey and H.A. Priestley, Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, 1992.

[37] M. Demirci, A theory of vague lattices based on many-valued equivalence relations—I: general representation results, Fuzzy Sets and Systems 151 (2005) 437—472.

[38] M. Demirci, A theory of vague lattices based on many-valued equivalence relations—II: complete lattices, Fuzzy Sets and Systems 151 (2005) 473—489.

[39] M. Demirci, Z. Eken, An Introduction to Vague Complemented Ordered Sets, Information Sciences 177(1) (2007) 150—160.

[40] M. Demirci, Fuzzy Functions and Their Fundamental Properties, Fuzzy Sets and Systems 106 (1999) 239-246.

[41] M. Demirci, Vague Groups, J. Math. Anal. Appl. 230,(1999) 142-156.

[42] M. Demirci, Smooth Subgroups and Smooth Homomorphisms, Fuzzy Sets and Systems 117 (2001) 439-446.

[43] M. Demirci, Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations part I: fuzzy functions and applications, Int. J. General Systems 32 (3) (2003) 123155.

[44] M. Demirci, J.Recasens, Fuzzy groups, fuzzy functions and fuzzy equivalence relations, Fuzzy Sets and Systems 144 (2004), 441-458.

[45] A. Di Nola, G.Gerla, Lattice valued algebras, Stochastica 11 (1987) 137150.

[46] S. Díaz, B. De Baets and S. Montes, Additive decomposition of fuzzy pre-orders, Fuzzy Sets and Systems **158** (2007), 830–842.

[47] D.Dikranjan, A.Policriti, Complementation in the lattice of equivalence relation, Discrete Mathematics 159 (1996), 83-94.

[48] Mario J.Edmundo, Structure theorems for o-minimal expansions of groups, Annals of Pure and Applied Logic Volume 102 (2000), 159-181.

[49] L.Filep, I.Maurer, Fuzzy congruences and compatible fuzzy partitions, Fuzzy Sets and Systems 29 (1989) 357-361.

[50] L.Filep, Study of fuzzy algebras and relations from a general view point, Acto Mathematica academiae Paedagogocae Nyiregyhaziensis tamus 14, 49-55 (1998).

[51] L.Filep, Structure and constructing of fuzzy subgroups of a group, Fuzzy Sets and Systems 51 (1992) 105-109.

[52] A.M.W.Glass, Sublattice subgroups of finitely presented lattice-ordered groups, J. of Algebra, Volume 301 (2006), 509-530.

[53] J.A. Goguen, L-fuzzy Sets, J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), 145–174.

[54] M. Gorjanac Ranitović, A. Tepavčević, General form of lattice valued fuzzy sets under the cuthworthy approach, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1213-1216.

[55] U. Höhle, Quotients with respect to similarity relations, Fuzzy Sets and Systems **27** (1988) 31—44.

[56] U. Höhle, On the fundamentals of fuzzy set theory, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 201 (1996), 786-826.

[57] U. Höhle, Many valued equalities, singletons and fuzzy partitions, Soft Comput. 2 (1998), 134-140.

[58] I.Iancu, Connectives for fuzzy partitions, Fuzzy Sets and Systems **101** (1999), 509-512.

[59] J. Jiménez, S. Montes, B. Šešelja and A. Tepavčević, On lattice valued up-sets and down-sets, Fuzzy Sets and Systems **161** (2010) 1699–1710.

[60] J. Jiménez, S. Montes, B. Šešelja and A. Tepavčević, Lattice-valued approach to closed sets under fuzzy relations: Theory and applications, Computers and Mathematics with Applications **62** (2011) 3729—3740.

[61] N. Kehayopulu, M. Tsingelis, Regular ordered semigroups in terms of fuzzy subsets, Information Sciences 176 (2006) 3675—3693.

[62] G.Klir, B.Yuan, Fuzzy sets and fuzzy logic, Prentice Hall P T R, New Jersey, 1995.

[63] H.V.Kumbhojkar, M.S.Bapat, Correspondence theorem for fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems **41** (1991), 213-219.

[64] N.Kuroki, Fuzzy Congruences and Fuzzy Normal Subgroups, Information Sciences 60 (1992), 247-259.

[65] M.Krupka, Factorisation of residuated lattices, Logic J. of the IGPL 17 (2) (2009), 205-223.

[66] Y.M.Liu, M.K. Luo, Fuzzy topology, in: Advances in Fuzzy Systems-Applications and Theory, vol. 9, World Scientific, Singapore, 1997.

[67] R.Sz.Madarasz, Od skupova do univerzalnih algebri, Novi Sad, septembar, 2006.

[68] D.S.Malik, J.N.Mordenson, Extensions of fuzzy subrings and fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems **45** (1992), 245–251.

[69] J.N.Mordeson, K.R.Bhutani, A.Rosenfeld, Fuzzy Group Theory Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer 2005.

[70] T.K. Mukherjee, M.K. Sen, On fuzzy ideals of a ring 1, Fuzzy sets and Systems 21 (1987), 99-104.

[71] T.K. Mukherjee, P.Bhattacharya, Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets, Inform. Sci. 34 (1984), no. 3, 225-239.

[72] Daniele Mundici, Free generating sets of lattice-ordered abelian groups, J. of Pure and Applied Algebra Volume 211 (2007), 400-403.

[73] V.Murali, Fuzzy congruence relation, Fuzzy Sets and Systems 41 (1991), 359-389.

[74] V.Murali, Fuzzy equivalence relation, Fuzzy Sets and Systems 30 (1989), 155-163.

[75] V.Murali, Equivalent finite fuzzy sets and Stirling numbers, Inform. Sci. 174, 251-263.

[76] C.V.Negoita, R.A.Ralescu, Applications of Fuzzy Sets to System Analysis, New York 1976.

[77] S.V. Ovchinnikov, Similarity relations, fuzzy partitions, and fuzzy orderings, Fuzzy Sets an Systems 40(1) (1991) 107–126.

[78] E.Olivos, H.Soto, A.Mansilla, A characterization of the Dedekind completion of a totally ordered group of infinite rank Volume 19 (2008), 633-641.

[79] S.V. Ovchinnikov, Structure of fuzzy binary relations, Fuzzy Sets an Systems 6 (1981), 169-195.

[80] E. Palmgren, Constructive completions of ordered sets, groups and fields, Annals of Pure and Applied Logic Volume 135 (2005), 243-262.

[81] A. Pillay, Charles Steinhorn, Definable Sets in Ordered Structure I, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 295, No. 2 (1986), 565-592.

[82] F.Point, F.O.Wagner, Essentially periodic ordered groups, Annals of Pure and Applied Logic, Volume 105 (2000), 261-291.

[83] A. Rosenfeld, Fuzzy Groups, J. Math. Anal. Appl. **35** (1971), 512–517.

[84] G.S.V. Satya Saibaba, Fuzzy Lattice Ordered Groups, Southeast Asian Bulletin of Mathematics (2008) 32: 749–766.

[85] K.L.N. Swamy, U.M.Swamy, Fuzzy Prime ideals of rings, J. Math. Anal. Appl. 134 (1988), 94-103.

[86] U.M.Swamy, D.Viswanadha Raju, Algebraic Fuzzy systems, Fuzzy Sets and Systems **41 (**1991**),** 187-194.

[87] B. Šešelja, *L*-fuzzy covering relation, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007), 2456–2465.

[88] B. Šešelja and A. Tepavčević, Representation of Lattices by Fuzzy Sets, Information Sciences **79** (1993), 171–180.

[89] B. Šešelja and A. Tepavčević, A note on fuzzy groups, YUJOR 7 (1997) 1 49-54.

[90] B. Šešelja and A. Tepavčević, Completion of Ordered Structures by Cuts of Fuzzy Sets, An Overview, Fuzzy Sets and Systems 136 (2003), 1–19.

[91] B. Šešelja and A. Tepavčević, Representing Ordered Structures by Fuzzy Sets, An Overview, Fuzzy Sets and Systems 136 (2003), 21–39.

[92] B. Šešelja and A. Tepavčević, A note on natural equivalence relation on fuzzy power set, Fuzzy Sets and Systems 148 (2004), 201–210.

[93] B. Šešelja, A. Tepavčević, Fuzzy Ordering Relation and Fuzzy Poset, A. Ghosh, R.K. De, and S.K. Pal (Eds.): PReMI 2007, LNCS 4815, pp. 209—216, 2007.

[94] B. Šešelja, A. Tepavčević, Partially ordered and Relational Valued Algebras and Congruences, Review of Research, Faculty of Science, Mathematical Series 23 (1993), 273-287

[95] B. Šešelja, A. Tepavčević, Weak Congruences in Universal Algebra, Institute of Mathematics Novi Sad, 2001.

[96] B. Šešelja, A. Tepavčević, Fuzzy Identities. In: Proceedings of FUZZ-IEEE 2009, pp. 1660-1663 (2009).

[97] B. Šešelja, A. Tepavčević, Fuzzy groups and collections of level subgroups, Fuzzy Sets and Systems 83 (1996) 85-91.

[98] B.Šešelja, Teorija mreža, Novi Sad, 2006.

[99] B. Šešelja, A. Tepavčević, M.Udovičić, Fuzzy posets with fuzzy order applied to fuzzy ordered groups, Filomat, u štampi.

[100] B. Šešelja, A. Tepavčević, M.Udovičić, Fuzzy chains, fuzzy lattices and fuzzy lattice ordered groups, Journal of Inteligent and Fuzzy Systems, u štampi DOI 10.3233/IFS-131075

[101] S. Tamura, S. Higuchi, K. Tanaka, Pattern classification based on fuzzy relations, IEEE Trans. System Man Cubernet. SMC 1 (1971) 61-66.

[102] A. Tepavčević and G. Trajkovski, L-fuzzy lattices: an introduction, Fuzzy Sets and Systems 123 (2001), 209–216.

[103] S.Yehia, Fuzzy partitions and fuzzy-quotient rings, Fuzzy Sets and Systems 54 (1993), 57-62.

[104] B.Yuan, W.Wu, Fuzzy ideals on a distributive lattice, Fuzzy Sets and Systems 35 (1990), 231-240.

[105] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8 (1965), 338-353.

[106] L.A. Zadeh, Similarity Relations and Fuzzy Orderings, Inform. Sci. 3 (1971), 177–200.

[107] Q.Zhang, W.Xie, L.Fan, Fuzzy complete lattices, Fuzzy Sets and Systems 160, (2009) 2275-2291.

[108] K.Zhang, K.Hirota, On fuzzy number lattice $(\widetilde{R}, \leqslant)$, Fuzzy Sets and Systems 92 (1997), 113-122.

[109] Z.Udovičić, A certain class of quadratures with hat function as a weight function, Acta Univ. Apulensis no 20 (2009), 251-257.

[110] Z.Udovičić, M.Udovičić, A certain class of quadratures with even Tchebychev weights, Analele Stiintifice Ale Universitatii "Ovidius" Constanta Vol. 20(1) (2012), 447-458.

[111] Wang-Jin Liu, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems **8** (1982), 133–139.

[112] G.Wen-Xiang, C.De-Gang, A fuzzy subgroupoid which is not a fuzzy group, Fuzzy Sets and Systems 62, 115-116, 1994.

[113] W.X.Zhang, J.M.Ma, S.Q.Fan, Variable threshold concept lattices, Information Sciences 177 (22) (2007) 4883-4892.

[114] R. Wille, Complete tolerance relations of concept lattices, in: G.Eigenthaler et. al (Eds.), Contributions to general Algebra vol. 3 Holder-Pichler Tempsky, Vienna (1985), 397-415

Kratka biografija

Mirna Udovičić je rođena 1975. godine u Mostaru, Republika BiH. Osnovnu školu i matematičku gimnaziju završila je u Beogradu. Prirodno-matematički fakultet, Odsek za matematiku je završila u Beogradu. Postdiplimske studije je završila na Matematičkom fakultetu u Beogradu, na smeru Matematička logika i teorijsko računarstvo. Magistarski rad pod naslovom "Teorija unifikacije i primena u eliminaciji kvantifikatora" je odbranila na Matematičkom fakultetu u Beogradu 2007. godine.

Radni odnos je zasnovala 2003. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Tuzli. Od 2002. godine je bila angažovana u izvođenju nastave na istom Univerzitetu. Od 2003. do 2007. godine je radila u zvanju asistenta na Univerzitetu u Tuzli na Odseku za matematiku, a od 2007. do 2013. godine je radila u zvanju višeg asistenta na istom Univerzitetu, na smeru Algebra i matematička logika.

.

Novi Sad, 2014. Mirna Udovičić

UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija

VR

Autor: Mirna Udovičić

AU

Mentor: prof. dr Branimir Šešelja

Naslov rada: Algebarska analiza nekih klasa fazi uređenih struktura

NR

Jezik publikacije: srpski (Latinica)

JP

Jezik izvoda: S/EN

JI

Zemlja publikovanja: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2014.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad

MA

Fizički opis rada: 4 poglavlja/108 strana/114 lit citata/1 tabela/5 slika/0 grafika/0 priloga

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Algebra

ND

Predmetna odrednica/ Ključne reči: poset, mreža, rasplinuti podskup, rasplinuti poset, rasplinuta grupa, rasplinuti poredak, slabi rasplinuti poredak, raplinuta uređena grupa, rasplinuta mrežno uređena grupa

PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Instituta za matematiku

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: Neka je A neprazan skup i $\mathcal{L} = (L, \leq)$ proizvoljna mreža sa nulom i jedinicom. Svako preslikavanje $\mu : A \to L$ zovemo rasplinuti podskup od A. U ovoj tezi proučavali smo rasplinute posete i relacije rasplinutog poretka. Uveli smo neke nove pojmove: rasplinuta uređena grupa, rasplinuti pozitivan konus, rasplinuti negativan konus, rasplinuta mrežno uređena grupa. Posmatrajući strukturu svih relacija slabog rasplinutog poretka koje su podskup klasične relacije poretka $\leqslant$, došli smo do zaključka da ova struktura predstavlja kompletnu mrežu. Takođe, važan zadatak je bio da ispitamo egzistenciju rasplinute mrežno uređene podgrupe l-uređene grupe koja nije linearno uređena. Bitan rezultat je rasplinuta mrežno uređena podgrupa date mrežno uređene grupe G, koja je konstruisana pomoću mreže svih konveksnih l-podgrupa od G.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:
(Naučni stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet)

KO

Predsednik: Dr. Madarász Sz. Rozália, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr. Branimir Šešelja, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: Dr. Andreja Tepavčević, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Dr. Jelena Ignjatović, vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerzitet u Nišu

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monographic type

DT

Type of record: Text printed material

TR

Contents code: DSc degree thesis

CC

Author: Mirna Udovičić

AU

Mentor: prof. dr Branimir Šešelja

MN

Title: Algebraic Analysis of some Classes of Fuzzy Ordered Structures

TI

Language of text: Serbian (Latinic)

LT

Language of abstract: s/en

LA

Country of publication: Srbija

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2014.

PY

Publisher:

PU

Publ. place: Novi Sad

PP

Physical description: 4 chapters/108 pages/114 literature/1 table/5 pictures/0 graps/0 additional lists

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline: Algebra

SD

Subject/Key words: poset, lattice, fuzzy subset, fuzzy poset, fuzzy group, fuzzy order, fuzzy weak order, fuzzy ordered group, fuzzy lattice ordered group

SKW

UC:

Holding data: Biblioteka Instituta za matematiku

Note:

N

Abstract: Let A be a nonempty set, and let $\mathcal{L} = (L, \leq)$ be a lattice with 0 and 1. The mapping: $\mu : A \to L$ is called a fuzzy subset of A. In this work we investigated fuzzy posets and fuzzy ordering relations. We introduced some new notions: fuzzy ordered groups, fuzzy positive cone, fuzzy negative cone, fuzzy lattice ordered group. Considering a structure of all weak fuzzy orderings contained in the crisp order $\leqslant$, we concluded that this structure represents a complete lattice. Also, an important task was to investigate the existence of a fuzzy lattice ordered subgroup of an l-ordered group which is not linearly ordered. A main result is a fuzzy lattice ordered subgroup of a given lattice ordered group G, which is constructed by the lattice of all convex l-subgroups of G.

AB

Accepted by the Scientific Board on:

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

(Degree/name/surname/title/faculty)

DB

President: Dr Madarász Sz. Rozália, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr Branimir Šešelja, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, mentor

Member: Dr Andreja Tepavčević, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: Dr Jelena Ignjatović, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Niš