

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE

GUSTAVO SANTARSIERE ETCHEBEHERE

EXPLORAÇÃO COMPUTACIONAL DOS ESPECTROS DE FOURIER DE
AUTÔMATOS CELULARES ELEMENTARES ASSÍNCRONOS

São Paulo

2019

GUSTAVO SANTARSIERE ETCHEBEHERE

EXPLORAÇÃO COMPUTACIONAL DOS ESPECTROS DE FOURIER DE
AUTÔMATOS CELULARES ELEMENTARES ASSÍNCRONOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação da Universidade Presbiteriana Mackenzie como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica e Computação.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira

São Paulo

2019

E83e

Etchebehere, Gustavo Santarsiere

Exploração computacional dos espectros de Fourier de autômatos celulares elementares assíncronos / Gustavo Santarsiere Etchebehere – São Paulo, 2019.

81 f.: il., 30 cm.

Mestrado (Mestrado em Engenharia Elétrica e Computação) - Universidade Presbiteriana Mackenzie - São Paulo, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira

Bibliografia: f. 80-81

1. Espectro de Fourier 2. Transformada discreta de Fourier 3. Autômatos celulares elementares 4. Autômatos celulares assíncronos 5. Sistemas dinâmicos discreto comportamento dinâmico I. Oliveira, Pedro Paulo Balbi de, orientador. II. Título.

CDD 515.723

Bibliotecária Responsável: Maria Gabriela Brandi Teixeira – CRB 8/ 6339

GUSTAVO SANTARSIERE ETCHEBEHERE

EXPLORAÇÃO COMPUTACIONAL DOS ESPECTROS DE FOURIER DE
AUTÔMATOS CELULARES ELEMENTARES ASSÍNCRONOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação da Universidade Presbiteriana Mackenzie, como requisito parcial à obtenção de título de Mestre em Engenharia Elétrica e Computação.

Aprovada em 31 de JULHO de 2019.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira
Universidade Presbiteriana Mackenzie



Prof. Dr. Eurico Prospero Ruivo
Universidade Presbiteriana Mackenzie



Prof. Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE)

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família e amigos por todo o apoio, assim como pelo inesquecível alívio cômico, recebido durante os árduos meses de confecção desta dissertação.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira, por toda a mentoria, material e ajuda prestada a mim no decorrer do programa de mestrado.

Agradeço ao Prof. Dr. Eurico Luiz Prospero Ruivo, pela colaboração que teve para o desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa de mestrado que me foi concedida, bem como por auxílios de pesquisa concedidos a meu orientador, através dos projetos STIC-AmSud (CoDANet) no. 88881.197456/2018-01 e PrInt no. 88887.310281/2018-00.

RESUMO

Os tópicos autômatos celulares assíncronos e análise espectral são relevantes em meio à comunidade científica de autômatos celulares. Autômatos celulares assíncronos são variantes de autômatos celulares nos quais as células têm seu estado alterado em diferentes passos de tempo, em vez de serem todas atualizadas em um mesmo passo global, como no modelo convencional. As atualizações assíncronas, determinísticas ou probabilísticas, têm recebido um aumento progressivo de atenção na comunidade científica pertinente, em função da maior flexibilidade que os autômatos celulares adquirem tanto do ponto de vista de computabilidade quanto pela maior naturalidade para modelagem de sistemas naturais. Análise espectral é um conjunto de técnicas para transportar dados do domínio do espaço para o domínio da frequência. Dentre suas muitas aplicações, esta técnica é aplicada ao estudo do comportamento limite das regras dos autômatos celulares, que consiste em calcular o espectro de Fourier destes autômatos celulares, para determinado tamanho de reticulado, número de iterações, e conjunto de reticulados como amostra. Na presente dissertação são efetuados estudos sobre o impacto que sequências de atualização determinísticas distintas têm sobre a forma dos espectros de Fourier das regras do espaço elementar de autômatos celulares. São aqui definidas três famílias distintas de padrões de assincronia, cada qual se apresentando com dez padrões de assincronia distintos, para todas as regras do espaço elementar. São descritas e classificadas as mudanças de forma dos espectros obtidas com a evolução assíncrona do reticulado, bem como outros fenômenos observados com o experimento. Os novos espectros obtidos também foram agrupados em classes de similaridade espectral para estudo. O foco da dissertação é documentar, por meio de explorações computacionais, como a presença da assincronia afeta a formação dos espectros de Fourier dos autômatos assíncronos, e identificar razões para tais fenômenos.

Palavras-chave: Espectro de Fourier, transformada discreta de Fourier, autômatos celulares elementares, autômatos celulares assíncronos, sistemas dinâmicos discretos, comportamento dinâmico.

ABSTRACT

The spectral analysis and asynchronous cellular automata subjects are relevant among the cellular automata scientific community. Asynchronous cellular automata are variants of cellular automata at which the cells have their state shifted at distinct time paces, instead of being all updated at the same global pace, as in the conventional model. The asynchronous updates, deterministic or probabilistic, have been receiving a progressive rise of attention by the pertinent scientific community, due to the bigger flexibility the cellular automata acquire concerning computability as well as for the better suitability to model natural systems. Spectral analysis is a set of techniques to transpose data from the space domain to the frequency domain. Among its many applications, this technique is applied to the study the limit behavior of the cellular automata rules, which consist in calculating the Fourier spectrum of these cellular automata, for a given lattice size, number of iterations, and set of lattices as a sampling. At the present dissertation are done studies concerning the impact that distinct deterministic updating sequences have over the shape of the elementary space rules' Fourier spectra. There have been defined three distinct asynchrony patterns families, each one displaying itself at ten distinct asynchrony patterns, for all the rules of the elementary space of cellular automata. There are described and classified the shape shifts of the spectra obtained by the lattice asynchronous updating, as well as other phenomena described with the experiment. The newly obtained spectra were groped in spectral similarity classes for study as well. The focus of the dissertation is to document, by means of computational explorations, how the presence of asynchrony effects the formation of the asynchronous automata Fourier spectra, and identify reasons for these phenomena.

Keywords: Fourier spectrum, discrete Fourier transform, elementary cellular automata, asynchronous cellular automata, discrete dynamical systems, dynamical behavior.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	A regra 90 do espaço elementar	5
Figura 2	Equivalência dinâmica entre regras do espaço elementar	6
Figura 3	Comparação entre a evolução de um autômato celular síncrono e um assíncrono	8
Figura 4	Evolução temporal da regra 184 com o respectivo espectro	9
Figura 5	Espectros da regra 56 calculados para diferentes conjuntos de parâmetros	11
Figura 6	Espectros das regras 54 e 110 calculados com diferentes números de iterações	12
Figura 7	Semelhança espectral das regras (18,183) e (146,182)	13
Figura 8	Comparação entre espectros formados com 40 CI e espectros formados com 1000 CIs	18
Figura 9	Ilustração da família assincronia sequencial em blocos	21
Figura 10	Ilustração da família assincronia em blocos alternados	22
Figura 11	Ilustração da família assincronia em blocos fixos com deslocamento	24
Figura 12	Comportamento de um espectro nulo	29
Figura 13	Comportamento de um espectro invariante	30
Figura 14	Comportamento de um espectro com morfologia gradual	31
Figura 15	Comportamento de um espectro com morfologia abrupta	33
Figura 16	Comportamento de um espectro com morfologia particulada	35
Figura 17	Exemplo de espectro em U	36
Figura 18	Exemplo de espectro em I	37
Figura 19	Exemplo de espectro ascendente	37
Figura 20	Exemplo de espectro cadente	38
Figura 21	Exemplo de espectro de pico	39
Figura 22	Exemplo de espectro linear	39
Figura 23	Exemplo de espectro em forma nula	40
Figura 24	Exemplo de espectro uniforme	40
Figura 25	Exemplo de espectro distinto dos demais	41
Figura 26	Comportamento de um espectro nulo (3ª família)	42

Figura 27	Comportamento de um espectro invariante (3ª família)	43
Figura 28	Comportamento um de espectro com leves variações nas ordens intermediárias	44
Gráfico 1	Distribuição da quantidade de classes de equivalência dinâmica por esquema de assincronia	53
Gráfico 2	Grau de assincronia médio da família assincronia sequencial em blocos por ordem de assincronia	55
Gráfico 3	Grau de assincronia médio da família assincronia em blocos alternados por ordem de assincronia	55
Gráfico 4	Grau de assincronia médio da família assincronia em blocos fixos com deslocamento por ordem de assincronia	56
Figura 29	Matriz da co-ocorrência de regras em diferentes classes da família assincronia sequencial em blocos	58
Figura 30	Matriz da co-ocorrência de regras em diferentes classes da família assincronia em blocos alternados	59
Figura 31	Matriz da co-ocorrência de regras em diferentes classes da família assincronia em blocos fixos com deslocamento	60
Figura 32	Matriz da co-ocorrência de regras em diferentes classes das famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados	61
Figura 33	Matriz da co-ocorrência de regras em diferentes classes em todas as famílias	62
Gráfico 5	Gráfico que relaciona as quantidades de classes de equivalência dinâmica dotadas de determinada quantidade de espectros na família assincronia sequencial em blocos	64
Gráfico 6	Gráfico que relaciona as quantidades de classes de equivalência dinâmica dotados de determinada quantidade de espectros na família assincronia blocos alternados	64
Gráfico 7	Gráfico que relaciona as quantidades de classes de equivalência dinâmica dotados de determinada quantidade de espectros na família assincronia em blocos fixos com deslocamento	65

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Descrição dos dez esquemas de assincronia usadas nas famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados	25
Tabela 2	Descrição dos dez esquemas de assincronia usadas na família assincronia em blocos fixos com deslocamento	25
Tabela 3	Classificação dos espectros das regras estudadas, evoluídas segundo as famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados	46-48
Tabela 4	Classificação dos espectros das regras estudadas, evoluídas segundo a família assincronia em blocos fixos com deslocamento	49-51
Tabela 5	Quantidade de classes de equivalência dinâmica por família e ordem de assincronia	52

LISTA DE ABREVIATURAS

AC	Autômato celular
ACA	Autômato celular assíncrono
ACS	Autômato celular síncrono
CED	Classe de equivalência dinâmica
CF	Configuração final
CI	Condição inicial
ACE	Autômato celular elementar
FA	Família de assincronia
EA	Esquema de assincronia
TDF	Transformada discreta de Fourier

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	REFERENCIAL TEÓRICO	4
2.1	AUTÔMATOS CELULARES	4
2.2	AUTÔMATOS CELULARES ASSÍNCRONOS	6
2.3	ANÁLISE ESPECTRAL DE AUTÔMATOS CELULARES	8
2.4	TRABALHOS CORRELATOS	14
3	METODOLOGIA	17
4	RESULTADOS	28
4.1	CLASSIFICAÇÃO DOS ESPECTROS QUANTO À SUA MUDANÇA COM O AUMENTO DA ORDEM DE ASSINCRONIA NAS FAMÍLIAS ASSINCRONIA SEQUENCIAL EM BLOCOS E ASSINCRONIA EM BLOCOS ALTERNADOS	28
4.2.	CLASSIFICAÇÃO DOS ESPECTROS NO ESQUEMA DE ASSINCRONIA DE ORDEM MÁXIMA	36
4.3	CLASSIFICAÇÃO DOS ESPECTROS QUANTO À SUA MUDANÇA COM O AUMENTO DA ORDEM DE ASSINCRONIA NA FAMÍLIA ASSINCRONIA EM BLOCOS FIXOS COM DESLOCAMENTO	41
4.4	TABELA RESUMO DA CLASSIFICAÇÃO DOS ESPECTROS	45
4.5	DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	51
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	66
6	BIBLIOGRAFIA	68

1 INTRODUÇÃO

Autômatos celulares (ACs) são sistemas dinâmicos discretos capazes de computabilidade universal, baseados na ideia de que complexidade possa emergir de ações locais, mesmo simples. Estruturalmente, consistem de dois componentes, sendo o primeiro deles um reticulado de máquinas de estado finito – as células – cada qual com um padrão idêntico de conexões locais com suas vizinhas; o reticulado pode ser finito ou infinito, com condições de contorno definidas apropriadamente. O segundo componente é uma regra de transição de estados que, atuando localmente, provê o estado de cada célula em função dos estados de sua vizinhança (MITCHELL, 1996). Este modelo de sistema complexo é comumente estudado em sua formulação original, mas é também analisado em outras frentes, tais como variantes de sua concepção clássica, ou conjuntamente com outras técnicas de análise em computação. Exemplos das frentes mencionadas são autômatos celulares assíncronos e espectros de Fourier dos reticulados dos autômatos celulares. Ambos conceitos serão apresentados abaixo.

Autômatos celulares assíncronos (ACAs) são uma variação do modelo tradicional de ACs, nos quais grupos de células têm seu estado alterado em diferentes passos de tempo, seguindo um esquema de assincronia (EA) definido, em vez de serem todas atualizadas em um mesmo passo global. Tal EA pode ser determinística, se mantendo a mesma durante a evolução do reticulado, ou ser estocástica, e variar com a evolução do reticulado. A evolução assíncrona das células permite a criação de comportamentos diferenciados, tanto em termos das dinâmicas evolutivas que exibem (por exemplo, o jogo da vida (GADNER, 1970), quando totalmente assíncrono e em um reticulado de tamanho finito, pode estabilizar em configurações que se assemelham a labirintos (BERSINI; DETOURS, 1994)) quando dos problemas que podem modelar (por exemplo, ACAs podem ser utilizados na construção de redes booleanas (MEDEL *et al*, 2017); pode-se também descrever um autômato assíncrono, simétrico, com vizinhança de Moore, que possui poder de computação e construção universais (TAKADA *et al*, 2006)). Estudos sobre este modelo particular de CA podem ser encontrados nos trabalhos de Schonfisch e de Roos (1999), Fatès (2014), Dennunzio *et al* (2017) e Ruivo *et al* (2018).

A análise do espectro de Fourier de autômatos celulares surgiu como uma abordagem para investigar seu comportamento dinâmico, a existência de padrões e atratores gerados por sua evolução temporal, bem como os padrões formados em seu comportamento limite. Além disso, o espectro obtido pela transformada de Fourier provê informações estatísticas sobre o comportamento do reticulado dos ACs (RUIVO; DE OLIVEIRA, 2013). O espectro de Fourier de um CA é obtido computando-se a transformada discreta de Fourier sobre um conjunto de configurações limite gerados pela evolução temporal da regra, provendo assim uma representação no domínio da frequência de tal comportamento limite. Isso significa que, no caso particular dos ACs binários, tal frequência torna-se uma medida de quão frequentemente todos os possíveis padrões de mudança de estado dos bits estão presentes para todos os possíveis vetores binários que compõem a configuração limite da regra (RUIVO; DE OLIVEIRA, 2013). A análise e classificação dos espectros de Fourier foi tema de pesquisas anteriores, em artigos tais como os de Li (1987), Ninagawa (2008) e Ruivo e de Oliveira (2013).

Observa-se, pelos trabalhos científicos mencionados nos parágrafos anteriores, que ambos os enfoques de ACAs e análise espectral de ACs são de interesse para a comunidade científica que estuda os ACs. Portanto, identificou-se uma proposta de estudo que se mostra relevante para esta área do conhecimento: nesta dissertação, será feita uma análise, classificação e agrupamento dos espectros de versões assíncronas determinísticas das regras do espaço elementar, assim como investigadas as razões para tais fenômenos observados. Com esta pesquisa, pretende-se contribuir com o campo de estudos de autômatos celulares, apresentando novas dados sobre as mudanças na dinâmica dos ACs.

O dissertação está estruturada da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados o referencial teórico, onde são definidos os conceitos fundamentais pertinentes à dissertação, como ACSs e ACAs, métodos utilizados como base teórica para este experimento, como as técnicas para o cálculo de espectro de ACs, e também apresentados os trabalhos correlatos; no Capítulo 3 são definidas as metodologias aplicadas no experimento, tais como os procedimentos para se obter os espectros dos ACAs, e as famílias de EAs utilizadas na pesquisa; no Capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos, os seja, as classificações dos espectros dos ACAs, divididos pela família de EAs que os geraram, os dados sobre o agrupamento

dos espectros de Fourier obtidos em cada família, bem como discussões sobre estes resultados; no Capítulo 5 são postas as conclusões da dissertação bem como descritos os trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 AUTÔMATOS CELULARES

De maneira geral, um autômato celular (AC) é uma quadrupla (S, N, f, d) , na qual $S = \{0, 1, \dots, k-1\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ é seu conjunto de estados, $N = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$, $\vec{x}_i \in \mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N}$, é seu vetor de vizinhança, $f: S^n \rightarrow S$ é sua função de transição local (ou regra local) e $d \in \mathbb{Z}_+$ é sua dimensão (KARI, 2005).

Um AC unidimensional é um caso particular de AC, no qual o parâmetro $d = 1$. Neste tipo de AC, o valor de uma célula i em um passo t é denotado por s_i^t e é um símbolo escolhido do conjunto de estados $S = \{0, 1, \dots, k-1\}$. A cada passo, o valor de cada célula é atualizado com base naqueles da vizinhança de extensão $2r+1$, $r \in \mathbb{N}$, células, segundo a regra local $f: S^{2r+1} \rightarrow S$ da forma $s_i^t = f(s_{i-r}^{t-1}, s_{i-r+1}^{t-1}, \dots, s_{i+r}^{t-1})$ (WOLFRAM, 1984).

Os autômatos celulares elementares (ACEs) são um grupo de regras de ACs unidimensionais bastante conhecidos e estudados no campo de autômatos celulares. Consiste em regras com regra local $f: S^3 \rightarrow S$ da forma $s_i^t = f(s_{i-1}^{t-1}, s_i^{t-1}, s_{i+1}^{t-1})$ e onde $S = \{0,1\}$. As regras deste espaço podem ser descritas com uma sequência binária de comprimento $2^3 = 8$, na forma $(s_7s_6s_5s_4s_3s_2s_1s_0)$, onde s_0 mapeia o estado de x_i para a vizinhança 000, s_1 mapeia para 001, e assim por diante, até s_7 que mapeia para 111. Tal convenção é chamada de ordem lexicográfica de Wolfram. Devido ao fato deste espaço ser binário, existem um total de $2^8 = 256$ regras distintas (LI; PACKARD, 1990).

Convertendo-se a sequência binária ordenada $(s_7s_6s_5s_4s_3s_2s_1s_0)$ para seu valor em decimal, obtém-se um número que pode ser usado como código de identificação desta regra. Tal convenção é denominado o número da regra (WOLFRAM, 1994).

Na Figura 2.1 temos um exemplo da tabela de transição da regra 90 do espaço elementar (na parte superior da gravura) e o seu resultado após 16 passos de execução (na parte inferior da gravura).

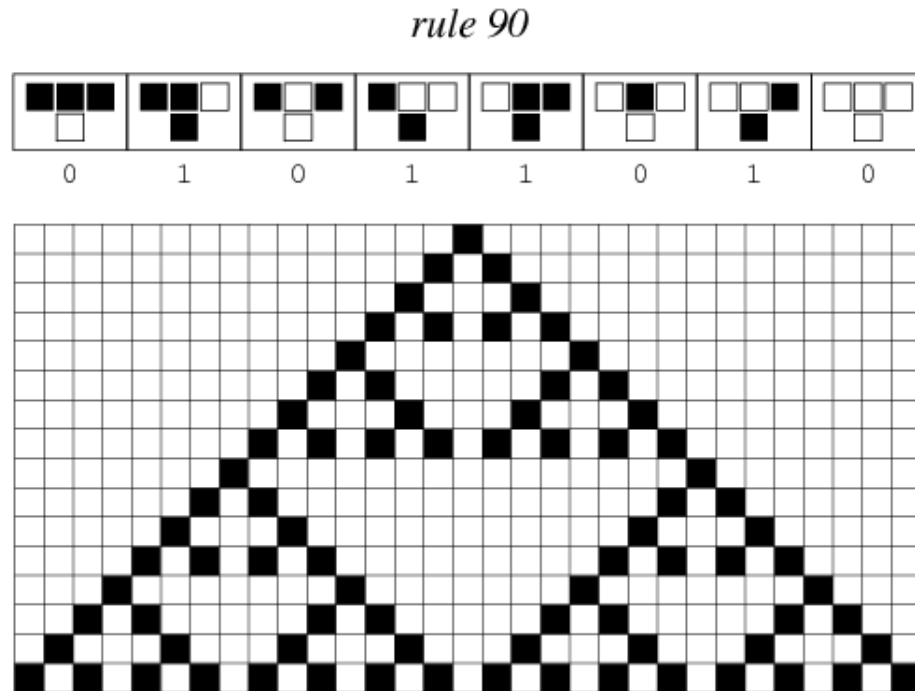


Figura 2.1: A tabela de transição da regra 90 do espaço elementar (parte superior) e sua evolução por 16 iterações (parte inferior). Fonte: Wolfram Mathworld, 2002.

Wolfram (1984) classificou o espaço elementar em quatro classes com dinâmicas próprias e características, chamadas classes de comportamento dinâmico, sendo estas:

- Classe I (regras nulas): dotadas de um comportamento muito simples, no qual quase todas as condições iniciais levam a um estado final homogêneo.
- Classe II (regras periódicas): seus estados finais são muito diferentes entre si, mas todos consistem apenas em determinados conjuntos de estruturas simples, que ou se mantêm imutadas, ou se repetem a cada poucos passos.
- Classe III (regras caóticas): possuem um comportamento mais complexo, que aparenta em muitos aspectos ser aleatório, apesar de triângulos e outras estruturas de pequena escala serem sempre observadas em certa medida.
- Classe IV (regras complexas): estes exemplares envolvem uma combinação entre ordem e caos: estruturas localizadas são geradas e possuem aspecto relativamente simples, mas tais estruturas se deslocam pelo reticulado e interagem umas com as outras de formas muito complexas.

É importante ressaltar que esta classificação foi feita para ACSs. Para o espaço elementar executado de forma assíncrona, tal classificação das regras do ACE ainda não foi explorado e, portanto, esta classificação pode não ter validade nos ACAs.

Ainda no texto, Wolfram resalta a equivalência dinâmica de certas regras, ou seja, regras que exibem a mesma evolução (comportamento dinâmico), salvo por uma reflexão do reticulado (regra refletida), uma troca das cores (regra conjugada) ou ambas (regra refletida e conjugada). A Figura 2.2 ilustra um exemplo deste fenômeno.

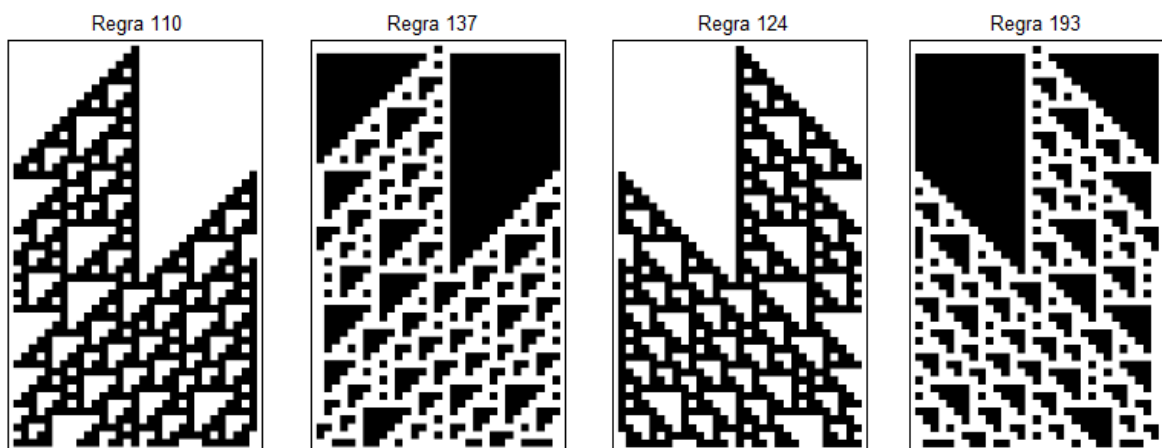


Figura 2.2: Equivalência dinâmica entre regras do espaço elementar. Da esquerda para a direita: na primeira imagem, a regra original; na segunda imagem, sua regra equivalente com troca de cores (conjugada); na terceira imagem, sua regra equivalente com reflexão do reticulado (refletida); e na quarta imagem, sua regra equivalente com reflexão do reticulado e troca de cores (refletida e conjugada).

2.2 AUTÔMATOS CELULARES ASSÍNCRONOS

A definição de assíncrono vem do grego *a-sun-cronos*, que significa “não ao mesmo tempo”, ou seja, a palavra indica que existe um sistema cujas partes não compartilham um mesmo tempo de execução. Não existe uma definição consensual para o que seja assíncrono, apenas se reconhece que se trata de assíncrono no momento em que se deixa de usar o paradigma da evolução convencional, plenamente paralela (FATÈS, 2014).

De forma simplificada, a assincronia determinística, o modelo mais simples existente, funciona da seguinte forma: trata-se de uma quintupla (S, N, f, d, v) , onde o parâmetro adicional $v = (v_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ com $v_t \subseteq [1, n]$ é um vetor denominado de esquema de assincronia (EA). As posições de todas as células do reticulado são, individualmente, indexadas a uma única posição i deste vetor v , de modo que cada posição i de v contém uma ou mais células. A cada passo de tempo $t > 0$, a regra de transição local f é aplicada às células do reticulado cuja posição no vetor v esteja presente em v_t , de acordo com o EA v , permanecendo as demais células imutáveis no dado passo t (DENNUNZIO *et al*, 2017). Assincronias determinísticas podem também ser definidas de outras formas. Por exemplo, no EA *ordem sequencial*, células são alteradas sequencialmente seguindo uma ordem que resulta de sua organização espacial (por exemplo, da esquerda para a direita), células também podem ser alteradas com base em sua paridade em passo pares ou ímpares (FATÈS, 2014).

Os EAs dos ACAs podem ser também definidos de forma estocástica. Em uma definição informal, suas evoluções podem ser classificadas em (FATÈS, 2014):

- Evolução totalmente assíncrona: a cada passo de tempo, a regra local é aplicada a apenas uma célula, escolhida aleatoriamente dentre o grupo de células, possuindo todas a mesma chance de ser escolhida.
- Evolução α -assíncrona: a cada passo, cada célula tem uma probabilidade α de evoluir segundo a regra e uma probabilidade $1-\alpha$ de permanecer no mesmo estado. O parâmetro α é um número em porcentagem e é chamado de taxa de sincronia.

Outro aspecto que pode ser definido sobre ACAs é a forma como sua temporização é implementada: por meio de uma temporização própria de cada célula ou uma global. Estas são, respectivamente, *orientado a tempo*, no qual é associado a cada célula um passo t onde a célula será atualizada, e *orientado a passos*, no qual não há uma variável de tempo, e a EA das células é formulada por algoritmos que determinam a ordem de atualização das células. O método orientado a passos, por sua vez, é subdividido em outros submétodos para sua implementação, tais como *direção fixa ou mudança linha-a-linha*, *mudança fixada aleatória*, *mudança nova aleatória* ou *escolha uniforme*. A evolução de uma célula é considerada um “passo singular”, e cada iteração da evolução do AC constitui uma série de passos singulares

(SCHONFISCH, DE ROOS, 1999). Uma amostra das mudanças que a assincronia provoca na evolução de um autômatos celular é ilustrada na Figura 2.3.

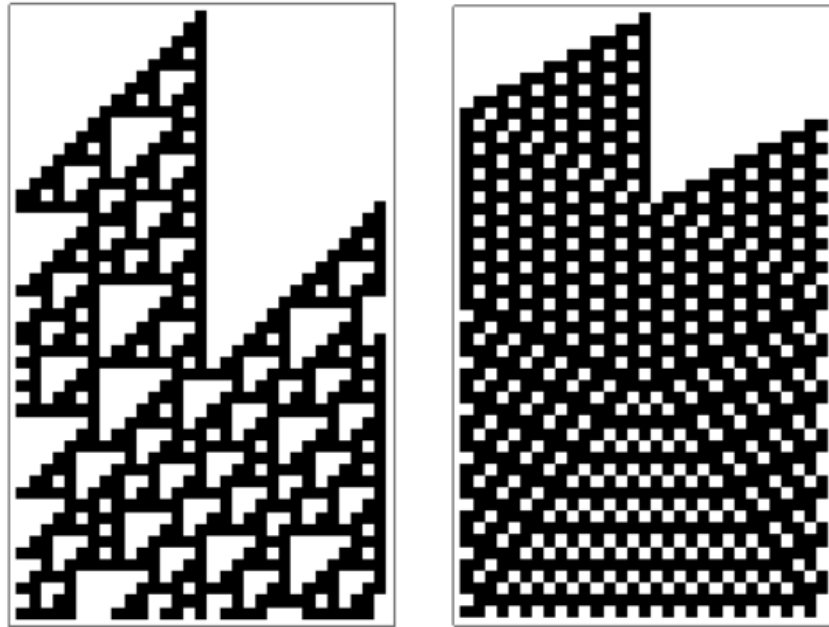


Figura 2.3: Comparação entre a evolução de um autômato celular síncrono, à esquerda da gravura, e um assíncrono, à direita da gravura. O esquema de assíncrono utilizado é determinístico, e consistem em alternância entre células ímpares e pares. Ambos os autômatos evoluem segundo a regra 110 do espaço elementar.

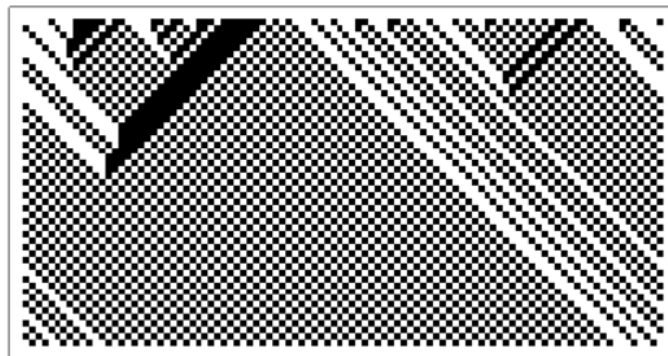
Desta gama de métodos, foi escolhida a assincronia determinística para este estudo. O método mais simples foi o selecionado por ser o mais fácil de ser controlado e analisado, já que a sequência da assincronia é pré-definida e não se altera. Como este é um estudo pioneiro sobre os efeitos da assincronia na formação dos espectros, a seleção de tal modelo de assincronia será adequada ao presente caso. Para simplificar as explanações, a partir deste ponto, os índices do vetor v que determinam a EA serão chamados de *blocos*.

2.3 ANÁLISE ESPECTRAL DE AUTÔMATOS CELULARES

Para melhor compreender o significado dos espectros dos ACEs, deve-se entender o significado de frequência das configurações finais do reticulado. Por frequência,

entende-se a quantidade de mudanças nos valores de bits adjacentes, ou seja, intensidade com que há mudança de bits. Com isso um reticulado com grandes extensões de 0s ou 1s é de baixa frequência, ao passo que aqueles dotados de grandes extensões com 0 e 1s intercalados são de alta frequência. Por esta razão, espectros de regras equivalentes, quando calculados sobre os mesmos parâmetros, são idênticos, pois o espelhamento ou inversão de cores não afeta os fatos descritos (RUIVO; DE OLIVEIRA, 2013).

O eixo horizontal de um espectro apresenta as diferentes frequências desse espectro, ou seja, os conjuntos de padrões binários com as mesmas intensidades de mudança de bits, estando os bits com maior taxa de mudança à direita e os de menor taxa de mudança à esquerda. O eixo vertical apresenta a densidade relativa (ou densidade) de cada frequência do espectro, a intensidade com que cada conjunto de padrões binários de mesma frequência aparece nas configurações finais. A densidade também é nominada como energia. Um exemplo da relação entre reticulado e espectro aparece na Figura 2.4 (RUIVO; DE OLIVEIRA, 2013). Será mostrado posteriormente como é efetuado tal mapeamento.



Regra 184

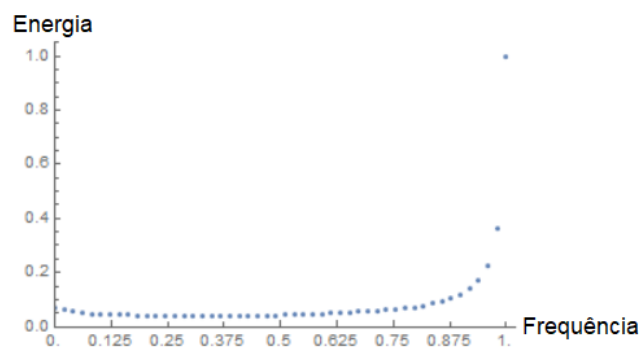


Figura 2.4: Evolução temporal da regra 184 para uma configuração com 40% de 1s (acima) e o espectro correspondente, calculado sobre um conjunto de configurações iniciais desse tipo (abaixo).

Fonte: RUIVO, E. L. P., 2012.

Abordagens prévias no assunto de análise espectral de ACs foram feitas no artigo de Li (1987), o qual utilizou a análise espectral como ferramenta para analisar as propriedades dos ACEs síncronos, bem como no estudo de Ninagawa (2008) que estudou e classificou as dinâmicas do espaço ACE síncrono.

A técnica de análise espectral utilizada como base para esta dissertação de mestrado foi aquela descrita em Ruivo e de Oliveira (2013). Tal técnica segue os embasamentos das técnicas mencionadas anteriormente, e consiste em calcular as Transformadas Discretas de Fourier (TDF) para um conjunto de configurações finais do reticulado (CF), obtidas após a evolução da regra aplicada sobre um conjunto de condições iniciais aleatórias por uma quantidade de passos suficiente para atingirem a estabilidade dinâmica.

A TDF é utilizada para transportar uma função temporal para o domínio da frequência, permitindo descobrir se há padrões e/ou periodicidades na sequência analisada. A TDF é calculada da seguinte forma:

Dada um vetor complexo $u = (u_1, \dots, u_n)$, a TDF de u é denotada por $TDF(u)$ e corresponde ao vetor complexo $v = (v_1, \dots, v_n)$ dado por: $v_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n u_j e^{2\pi i(j-1)(k-1)/n}$.

Com isso, $TDF(u)$ denota o valor absoluto da $TDF(u)$ calculado coordenada a coordenada. Ou seja, se $TDF(u) = (v_1, \dots, v_n)$, então $|TDF(u)| = (|v_1|, \dots, |v_n|)$.

Dada uma regra local de um AC unidimensional, pode-se calcular o espectro de Fourier associado a ela da seguinte maneira (RUIVO, 2012):

- Considera-se um conjunto $C = \{c_1, \dots, c_p\}$ de p configurações iniciais aleatórias (sendo que 0 e 1 têm a mesma probabilidade de serem o valor de uma posição qualquer de uma configuração) de comprimento L ;
- Aplica-se a regra f a cada configuração inicial $c_i \in C$ um número $t \in \mathbb{N}$ de vezes, obtendo-se um conjunto $C' = \{c'_1, \dots, c'_p\}$ de p configurações finais, com $c'_i = F^t(c_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$;
- Calcula-se a TDF para cada $c'_i \in C'$, obtendo-se o conjunto $\mathcal{F}(C') = \{\mathcal{F}(c'_1), \dots, \mathcal{F}(c'_p)\}$ das TDFs das configurações finais obtidas;

- Define-se então o espectro de Fourier (ou simplesmente espectro) da regra f como a média aritmética do módulo das transformadas $\mathcal{F}(c'_1), \dots, \mathcal{F}(c'_p)$ tomado coordenada a coordenada.

Formalmente, o espectro f_c da regra local f é definido como: $f_c = \frac{1}{p} \sum_{c' \in C'} |\mathcal{F}|(c')$

O resultado destes cálculos exhibe os espectros considerados o comportamento limite da regra. Para determinadas regras do espaço elementar, tais como a regra 56, mudanças nos parâmetros do cálculo do espectro (número de passo de execução t ; número de condições iniciais p ; e comprimento do reticulado l) não acarretam alterações significativas na forma geral do espectro. Por exemplo, ao aumentar o comprimento dos reticulados, obtém-se um espectro de maior espessura, mas de mesma forma. A Figura 2.5 ilustra o espectro desta regra com alterações em todos os parâmetros (RUIVO; DE OLIVEIRA, 2013).

É importante ressaltar que a técnica de geração do espectro de Fourier utilizada nos estudos de Ruivo e de Oliveira (2013), e também utilizada aqui, possui a desvantagem de utilizar a média dos espectros de N execuções individuais para compor o espectro médio de uma regra. Esse fato acarreta a perda em potencial de particularidades dos espectros individuais, o que poderia prover múltiplas assinaturas espectrais características para uma regra, ao invés de apenas uma única.

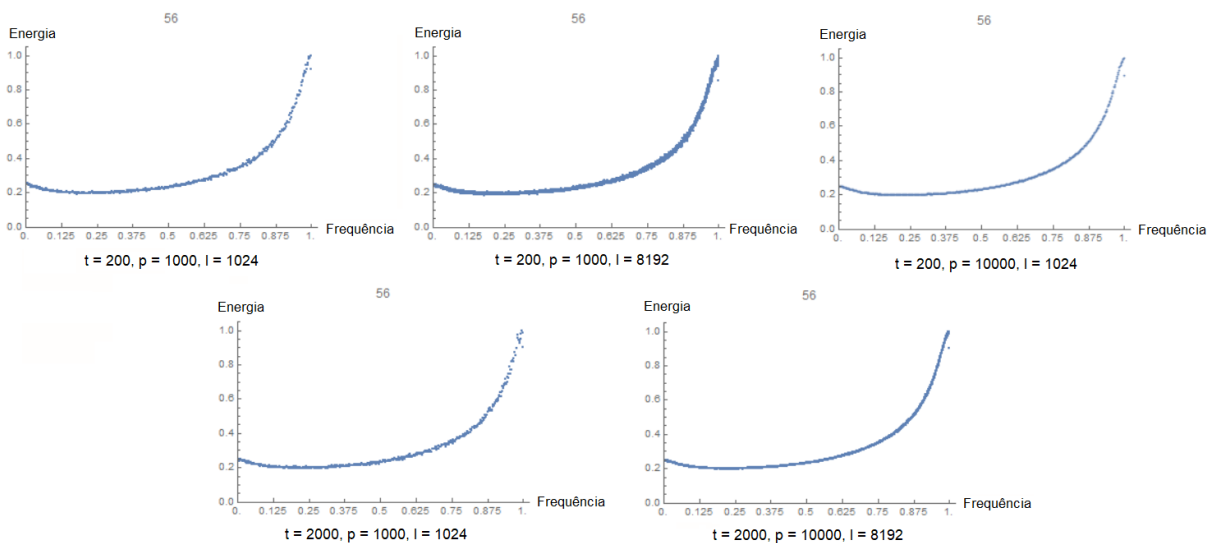


Figura 2.5: Espectros da regra 56 calculados para diferentes conjuntos de parâmetros. O aspecto essencial do espectro permanece o mesmo, mesmo com o aumento dos valores dos parâmetros.

Fonte: RUIVO, E. L. P.; DE OLIVEIRA, P. P. B., 2013.

Em outras regras, as alterações nos parâmetros proporcionam mudanças significativas no espectro. Tal comportamento se observa nas regras complexas (Classe IV), onde o elevado número de passos para que a estabilidade seja atingida implica mudanças no espectro obtido, dependendo do número de passos escolhidos (t) para o cálculo dos espectros. A Figura 2.6 ilustra esta peculiaridade para as regras 54 e 110 do espaço elementar (RUIVO; DE OLIVEIRA, 2013).

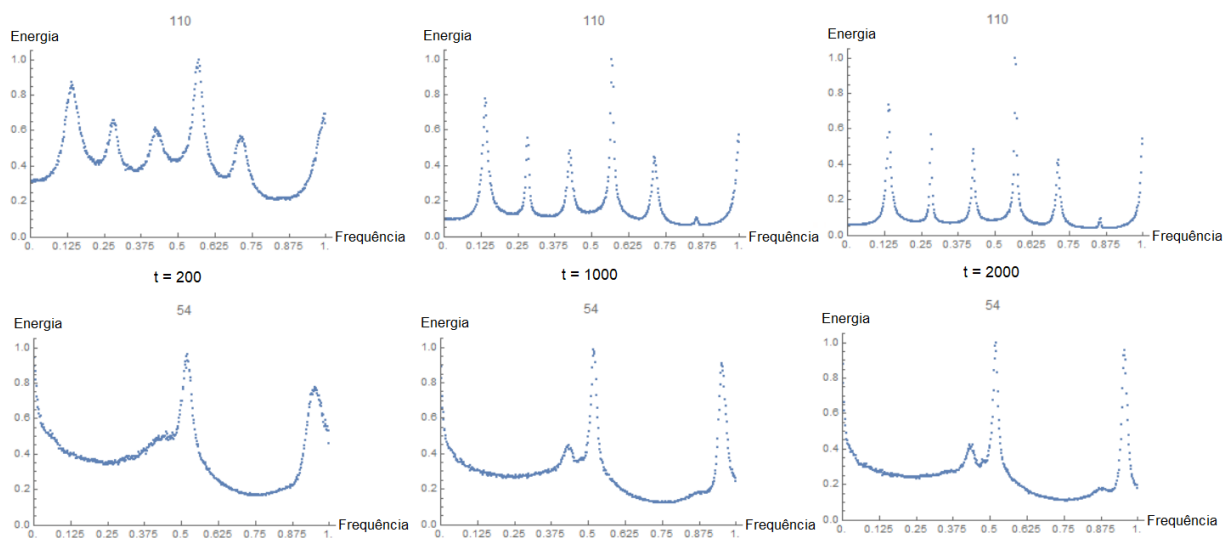


Figura 2.6: Espectros das regras 54 e 110 (sob condição de contorno periódica) calculados com diferentes números de iterações sobre conjuntos com 1000 CIs de comprimento 1024. Fonte: RUIVO, E. L. P.; DE OLIVEIRA, P. P. B., 2013.

Os experimentos de Ruivo e de Oliveira (2013) mostram que todas as regras do ACE com comportamento dinâmico distinto, bem como suas refletidas e conjugadas, apresentam sempre seus respectivos espectros, devido à razão descrita anteriormente. No entanto, um espectro não é exclusivo de uma regra, já que se observam regras distintas, com comportamentos dinâmicos distintos, que apresentam um mesmo espectro, ou seja, apresentam *similaridade* entre si. Definem-se os grupos de espectros com formas semelhantes como *classe de equivalência dinâmica* (CED). O fenômeno da similaridade entre espectros é ilustrado nas Figuras 2.7 e 2.8. A fim de estudar os motivos para classes espectrais distintas terem espectros semelhantes, foi necessário particionar os espectros dos ACEs segundo sua similaridade. Para efetuar o particionamento, foi definida a métrica de distância entre os espectros como

a distância euclidiana $d(f_s, g_s)$ entre os vetores dos espectros f_s e g_s de duas regras locais f e g . As distâncias entre todos os pares semelhantes foram posteriormente normalizadas pela maior distância encontrada. Foi definida a vizinhança espectral de f como $N_f^{0,\epsilon} = \{g \text{ é uma regra local de um ACE: } d(f_s, g_s) < \epsilon\}$, com $\epsilon > 0$. Devido a flutuações estatísticas, é possível que a vizinhança da regra $g \in N_f^{0,\epsilon}$ contenha regras não presentes na vizinhança espectral de f . Para solucionar este problema, os conjuntos $N_f^{k,\epsilon}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ são definidos como: $N_h^{l,\epsilon} = \{g \in N_h^{0,\epsilon}: h \in N_f^{(k-1),\epsilon}\}$. Uma vez que o espaço dos ACE é finito, para cada regra local f , existe um $k_f \in \mathbb{N}$ tal que $N_f^{(k+1),\epsilon} = N_f^{1,\epsilon}$, para todo $k > k_f$. Portanto, é possível definir uma classe espectral de f , S_f^ϵ , como $S_f^\epsilon = \bigcup_{i=1}^{k_f} N_f^{i,\epsilon}$. O espectro da regra g é dito similar ao espectro da regra f se $g \in S_f^\epsilon$. Com estas definições, pode-se concluir que se o espectro de uma regra f é considerado da mesma classe de g , o espectro de g é considerado da mesma classe de f .

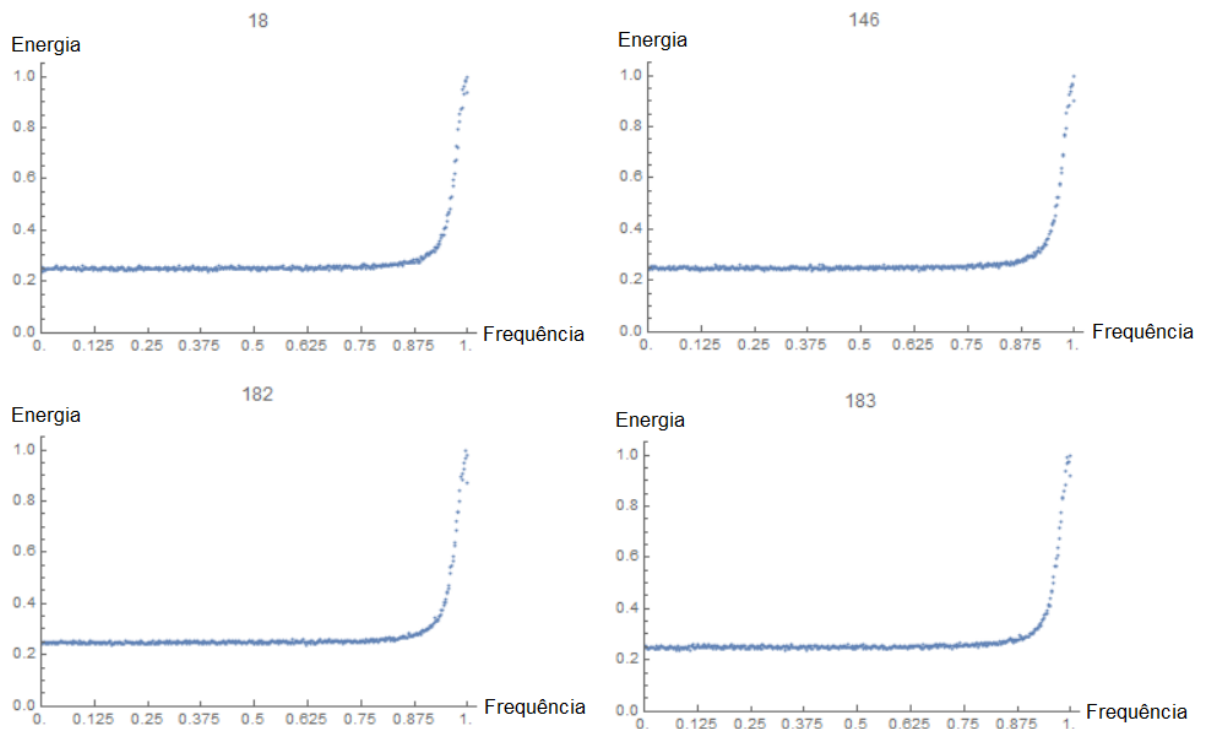


Figura 2.7: Apesar das regras (18,183) e (146,182) pertencerem, em pares, a classes de equivalência dinâmica distintas, seus espectros são semelhantes. Fonte: RUIVO, E. L. P.; DE OLIVEIRA, P. P. B., 2013.

Por fim, as classes descobertas foram organizadas em um grafo. O algoritmo de construção do grafo consiste em, primeiro, tomar a regra de menor número de cada classe como representante no grafo. Em seguida, o espectro de cada classe é calculado e normalizado pelo componente de maior valor do espectro. Então, a distância entre cada par de espectros é calculada e normalizada pela maior distância entre espectros calculada. Por fim, cada classe é conectada àquela com menor distância d até ela. O processo pode ser iterado para mostrar uma hierarquia crescente de afinidades, que resultou em 19 classes na primeira iteração, agrupados em 4 grupos na segunda iteração, e em um único grupo na terceira iteração (RUIVO; DE OLIVEIRA, 2013).

2.4 TRABALHOS CORRELATOS

O estudo de Schonfisch e de Roos (1999) trouxe uma compilação sobre formas de se implementar o assincronismo em ACs, bem como as variantes existentes nestes modelos. De forma geral, as técnicas gerais são *orientada a tempo*, onde existe a temporização própria de cada célula, e a *orientada a passos*, em que se usa uma temporização global. A pesquisa também estudou as alterações e mudanças que o assincronismo proporciona na evolução dos ACs, por meio de simulações e cálculos numéricos, bem como provou um teorema que enuncia que “estados que são estacionários em ACSs também o são em ACAs e vice-versa”.

O texto de Fatès (2014) traz uma compilação de conhecimentos sobre ACAs, e define seis grupos de perguntas em aberto relevantes para a área. Dos conhecimentos concretos que o texto apresenta, serão mencionados os mais relevantes. Ele discute as formas de se implementar assincronismo, tais como as já mencionadas *orientado a tempo* e *orientado a passos*, bem como outras mais gerais, como evolução totalmente assíncrona, em que a uma célula de um grupo é escolhida para ser atualizada a cada passo de tempo, e evolução α -assíncrona, em que cada célula tem probabilidade α de evoluir e $1-\alpha$ de permanecer no mesmo estado. Demais conceitos explorados foram:

- A influência que o assincronismo exerce sobre a evolução do reticulado;

- As análises matemáticas feitas sobre ACAs;
- As capacidades computacionais que este modelo de AC possui e suas tentativas para explorá-la;
- Discussão sobre os modelos que podem ser simulados com o uso de ACAs (teoria dos jogos, ecologia, sistemas físicos e biológicos, etc...);
- Por fim menciona outros sistemas complexos cuja estrutura é similar aos ACAs.

Dennunzio *et al* (2017) também conduziram experimentos para investigar as propriedades dos ACAs, mas nos aspectos de velocidade computacional destes modelos para a resolução de problemas. Foram estudados os problemas da alcançabilidade e da existência de pré-imagens no artigo. Para cada tipo de problema, as versões existenciais (uma propriedade se verifica em pelo menos um EAs) e universais (uma propriedade se verifica em todos os EAs possíveis) foram consideradas.

Outro estudo sobre as dinâmicas de ACAs é de Ruivo *et al* (2018), onde foram analisados os efeitos que padrões de atualização assíncronos têm sobre a evolução do reticulado. O estudo abordou apenas as regras do espaço elementar. A pesquisa propôs e provou teoremas sobre o impacto que a atualização assíncrona proporciona em função da regra elementar e da dimensão do reticulado presentes, determinando se cada caso é de sensibilidade máxima ou não.

Abordagens prévias no assunto de análise espectral de ACs foram feitas no artigo de Li (1987), o qual analisou as propriedades dos ACEs síncronos, recorrendo-se à análise espectral como ferramenta usada para este fim. Neste texto, cada regra foi executada sobre 18 reticulados aleatórios, em média, de comprimento de 4096 células, e por uma quantidade de passo que variou entre 15 para até mais de 100.

Um estudo anterior sobre o tema específico da análise espectral e sua classificação foi feita por Ninagawa (2008) que estudou e classificou as dinâmicas do espaço ACE síncrono por meio de análises espectrais. Os espectros daquela pesquisa foram calculados com reticulados de 700 células executados por 1024 passos.

Outro estudo especificamente sobre análise e classificação de espectros sobre o espaço dos ACE foi conduzido por Ruivo e de Oliveira (2013), utilizando uma técnica

distinta das demais citadas nesta seção. Utilizando-se cálculo do espectro ao longo do espaço, os espectros foram calculados utilizando-se reticulados de 1024 células de comprimento, iterados por 200 passos de tempo, e valendo-se de 1000 reticulados com CIs aleatórias como amostragem. O experimento foi realizado com condição de contorno periódica, bem como com condição de contorno não-periódica. Como resultados, os espectros tiveram sua similaridade mensurada pelo cálculo da distância euclidiana dos pontos que os compõe, e foram agrupados segundo este critério em 19 grupos, para condição de contorno periódica, e 16 grupos, para condição de contorno não-periódica.

Definidos os conceitos elementares nos quais se embasa a dissertação, no próximo capítulo serão expostas as metodologias da pesquisa, bem como suas justificativas.

3 METODOLOGIA

Seguindo a técnica de Ruivo e de Oliveira (2013), para garantir que os espectros computados sejam calculados sobre reticulados que estejam além de qualquer estado transiente, ou seja, tenham atingido a estabilidade dinâmica, todos os reticulados foram iterados até a 200ª iteração. Outro cuidado atendido foi prover um espaço de amostragens suficientemente grande, tanto para garantir a precisão dos espectros quanto para acomodar os diferentes EAs estudados, permitindo ao menos 10 amostras para cada tipo de EA; portanto, os cálculos foram efetuados sobre reticulados de 1024 células de comprimento. No entanto, nesta dissertação foram utilizadas 40 ICs aleatórias como amostragem, ao invés das 1000 condições iniciais usadas no trabalho base de Ruivo e de Oliveira (2013). Essa mudança foi feita pois o processamento de dados para calcular cada espectro seria consideravelmente mais elevado (1,01 segundos para o cálculo de cada espectro com 40 condições iniciais contra 23,23 segundos para o cálculo de cada espectro com 1000 condições iniciais com blocos de tamanho 512, e 23,95 segundos para o cálculo de cada espectro com 40 condições iniciais contra 633,58 segundos para o cálculo de cada espectro com 1000 condições iniciais com blocos de tamanho um), e o volume de espectros analisados aqui também é substancialmente maior (88 espectros na pesquisa base contra 3944 espectros na presente pesquisa). Ademais, embora os espectros formados com 1000 ICs apresentem uma forma mais precisa, ambos tipos de espectro possuem as mesmas formas, o que os tornam ambos adequados para os experimentos aqui realizados, conforme mostra a Figura 3.1. Também seguindo a técnica base, todos os valores de concentração de energia dos espectros foram normalizados para uma faixa de valores entre zero e um, para facilitar a análise e a apresentação destes espectros. Tal técnica foi selecionada por ser a mais precisa encontrada na literatura, pois leva em conta o maior número de amostragens e um processamento mais refinado destas amostras, quando comparada àquelas descritas nas demais pesquisas que efetuam análises desta categoria (vide trabalhos correlatos), apesar de, por esta mesma razão, ser também a mais complexa computacionalmente. Esta técnica tem como desvantagem o uso de uma média estatística para a composição dos espectros, o que implica que informações relevantes para a composição destes dados podem ser excluídas dos resultados. Uma

vez que os custos computacionais podem ser contornados, todavia a precisão é imprescindível à condução deste experimento, concluiu-se que esta técnica foi a mais adequada à pesquisa.

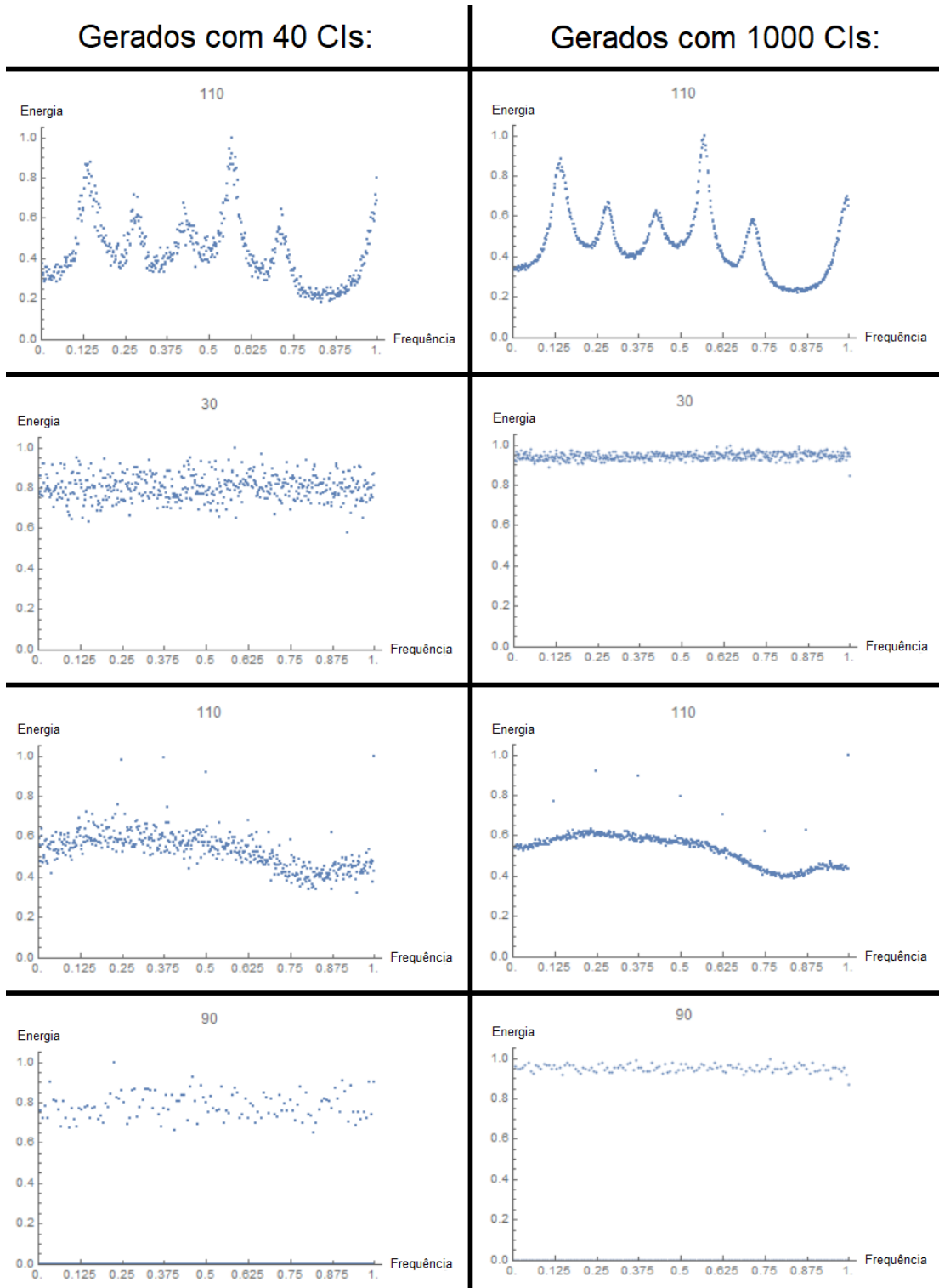


Figura 3.1: Ilustração que compara os espectros formados com 40 CIs (na coluna da esquerda) com os formados com 1000 CIs, (na coluna da direita).

Devido ao fato de que os espectros dos ACs são computados pela evolução de uma dada regra sobre um conjunto de CIs aleatórias, podem ocorrer variações nos espectros das regras síncronas e em cada uma de suas variantes assíncronas, dependendo dos conjuntos de condições iniciais (CIs), de seus comprimentos, e do número de iterações na evolução da regra (RUIVO; DE OLIVEIRA, 2013).

No presente trabalho, foram calculados os espectros das 136 regras do espaço elementar com comportamento dinâmico próprio, excluindo-se apenas as regras conjugadas. Uma vez que as regras dinamicamente equivalentes por conjugação apresentam o mesmo comportamento dinâmico a menos de uma troca de cores, estas possuem o mesmo espectro, sendo a análise destas regras um esforço redundante (RUIVO; DE OLIVEIRA, 2013). Com a presença da assincronia, as regras refletidas podem demonstrar um comportamento distinto, o que justifica a sua inclusão nas análises.

O tipo de assincronia utilizado neste experimento foi a assincronia determinística. Como os reticulados do experimento possuem extensão de 1024 células, tornou-se inviável a investigação de todos os EAs distintos. Segundo a sequência de Fubini (OEIS, 2012), para um reticulado de apenas cinco células, existe um total de 541 combinações distintas de assincronia que podem ser empregadas. Com isso, os EAs utilizados no experimento tiveram de ser selecionados dentro do espaço de todos os EAs existentes. Cada EA foi pensado para explorar um determinado comportamento, resolvendo-se estudar nesta pesquisa EAs com diferentes tamanhos de blocos e com diferentes posicionamentos de blocos. Tais EAs foram agrupados em famílias com um determinado comportamento próprio.

As figuras que seguem as descrições das famílias ilustram como estas FAs se comportam. Nas ilustrações, exibe-se o comportamento da FA sobre um reticulado hipotético de oito células de comprimento, representado pelas barras de quadrados. Cada figura é dividida em três partes, separadas por barras pretas transversais, sendo que nas Figuras 3.2 e 3.3 a parte superior o comportamento da FA com blocos de comprimento de quatro células, a parte central o comportamento da FA com blocos de comprimento de duas células, e a parte inferior o comportamento com blocos de comprimento de uma única célula, e na Figura 3.4, três posições distintas de um bloco

cuja posição é variável, demarcado na gravura por uma moldura azul, sendo a parte superior da gravura este bloco na extrema esquerda do reticulado, a parte central da gravura este bloco entre blocos de tamanho quatro e dois, e a parte inferior da gravura o bloco entre blocos de tamanho dois e um. Cada iteração é representada por uma destas barras de quadrados, com progressão de cima para baixo em todos os exemplos. Os números no centro dos quadrados indicam o número do passo, e quais células são atualizadas nos blocos daquele passo. As células que permanecem estáticas naquela iteração exibem um “X” vermelho dentro de si. Em cada exemplo, as reticências abaixo das ilustrações indicam que o processo exemplificado se repete a partir daquele ponto.

As famílias de assincronia (FA) selecionadas foram:

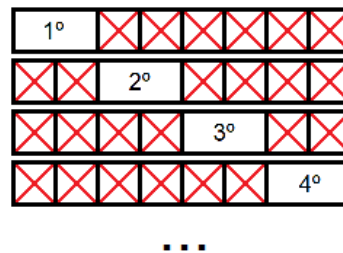
- **Assincronia sequencial em blocos:** Apenas um bloco é atualizado a cada passo, e o rodízio dos blocos ocorre de forma sequencial, da esquerda para a direita. O primeiro bloco a ser atualizado é o primeiro da extrema esquerda, o segundo é aquele à direita do primeiro, e ao atualizar o último bloco existente na extrema direita, o bloco a ser atualizado é novamente o da extrema esquerda. Formalmente, este esquema pode ser definido pelos seguintes parâmetros, em reticulados de 8 células de comprimento: $v = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\})$; $v = (\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\})$; $v = (\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\})$. A assincronia sequencial em blocos aparece ilustrada na Figura 3.2.

Assincronia sequencial em blocos:

Blocos de tamanho 4:



Blocos de tamanho 2:



Blocos de tamanho 1:



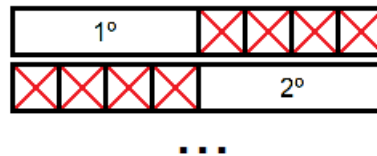
Figura 3.2: Ilustração do comportamento da assincronia sequencial em blocos. A ilustração exibe blocos com tamanho de quatro, duas e uma célula, respectivamente na parte superior, média e inferior da figura. O reticulado deste exemplo tem comprimento de oito células.

- **Assincronia em blocos alternados:** A cada passo, grupos de blocos alternados são atualizados simultaneamente, e a soma das células que compõem estes blocos atualizados a cada iteração são sempre iguais à metade do reticulado. Os blocos que são atualizados se alternam segundo um padrão de tabuleiro de damas, onde existem os blocos ímpares (compostos pelo 1º bloco, 3º bloco, etc... até o penúltimo bloco), e os blocos

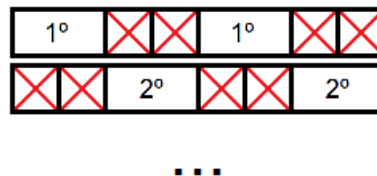
pares (compostos pelo 2º bloco, 4º bloco, etc... até o último bloco), numerados da esquerda para a direita. Na primeira iteração, os blocos ímpares são atualizados, e os blocos pares permanecem estáveis. Na iteração seguinte, os blocos ímpares se mantêm estáveis, e os blocos pares são atualizados. Na iteração seguinte, o processo se repete. Formalmente, este esquema pode ser definido pelos seguintes parâmetros, em reticulados de 8 células de comprimento: $v = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8\})$; $v = (\{1, 2, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8\})$; $v = (\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 8\})$. A assincronia em blocos alternados aparece ilustrada na Figura 3.3.

Assincronia em blocos alternados:

Blocos de tamanho 4:



Blocos de tamanho 2:



Blocos de tamanho 1:

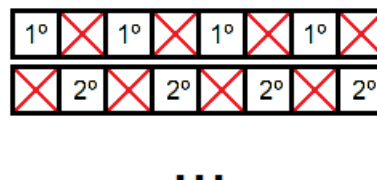
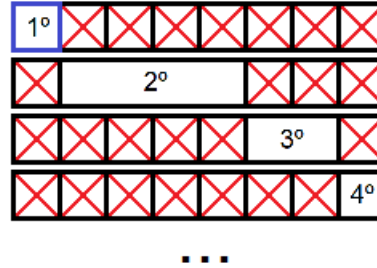


Figura 3.3: Ilustração do comportamento da assincronia em blocos alternados. A ilustração exibe blocos com tamanho de quatro, duas e uma célula, respectivamente na parte superior, média e inferior da figura. O reticulado deste exemplo tem comprimento de oito células.

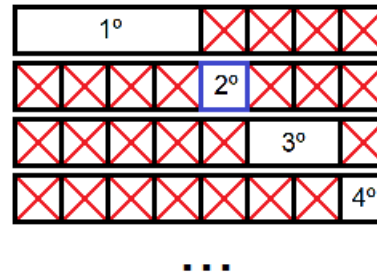
Assincronia em blocos fixos com deslocamento: Diferentemente das demais, esta família tem por objetivo estudar a alteração provocada por diferentes ordenações de blocos de assincronia na formação dos espectros de Fourier. Cada EAs desta família possui onze blocos, dez deles organizados em posições fixas e um bloco cuja posição varia a cada EA. Cada bloco de posição fixa possui um tamanho distinto, cada um com metade do comprimento do anterior, organizados da esquerda para a direita: o bloco da extrema esquerda possui comprimento de 512 células, o bloco à direita deste possui comprimento de 256 células, e assim por diante, até que os blocos mais à direita tenham comprimentos de quatro, duas e uma célula. A alteração a cada EA é a posição do 11º bloco de assincronia, que possui comprimento de uma única célula. No EA de ordem mínima, ele aparece ao lado esquerdo do bloco de tamanho 512, no EA de segunda ordem, ele aparece ao lado direito do bloco de tamanho 512 e ao lado esquerdo do bloco de tamanho 256, e assim sucessivamente, até que no EA de ordem máxima, ele aparece ao lado direito do bloco de tamanho dois e ao lado esquerdo do bloco de tamanho um. O bloco de posição variável não aparece ao lado direito do bloco de tamanho um pois esta configuração de blocos possui um comportamento equivalente ao esquema de ordem máxima descrito. A Figura 3.4 ilustra este esquema.

Assincronia gradual:

Primeira ordem de assincronia:



Segunda ordem de assincronia:



Terceira ordem de assincronia:

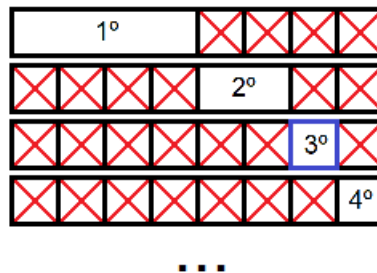


Figura 3.4: Ilustração do comportamento da família assincronia em blocos fixos com deslocamento. A ilustração exibe esquemas de assincronia nos quais o bloco de posição variável (demarcado pela moldura azul) está na extrema esquerda do reticulado, entre os blocos de tamanho quatro e dois, e entre os blocos de tamanho dois e um, respectivamente na parte superior, média e inferior da figura. O reticulado deste exemplo tem comprimento de oito células.

A fim de obter uma amostra ampla sobre como os diferentes tipos de assincronia afetam a formação dos espectros, todas as FAs contém dez EAs distintos. Nas famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados, cada EA contém blocos de assincronia de mesmo tamanho, cuja quantidade e

tamanho varia a cada EA. Os blocos dos EAs destas famílias cobrem porções de igual tamanho de 1/2 do reticulado, 1/4 do reticulado, 1/8 do reticulado, etc... Até que possuam tamanho de uma única célula. A Tabela 3.1 enumera e descreve todos as EAs utilizados nestas famílias. Na família assincronia em blocos fixos com deslocamento, o tamanho dos blocos é o mesmo a cada EA, sendo a posição do bloco de posição v ariável a única mudança entre seus EAs. A Tabela 3.2 enumera e descreve todos as EAs utilizadas nesta família. Cada o número de cada EA será referenciado no contexto das famílias como sua ordem, sendo os EAs com número 1 os esquemas de ordem mínima e os EAs com número 10 os esquemas de ordem máxima.

Número do EA.	Razão do reticulado por bloco.	Nº de células por bloco.
1	1/2	512
2	1/4	256
3	1/8	128
4	1/16	64
5	1/32	32
6	1/64	16
7	1/128	8
8	1/256	4
9	1/512	2
10	1/1024	1

Tabela 3.1: Descrição dos dez esquemas de assincronia usadas nas famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados.

Número do EA.	Tamanho do bloco à esquerda do bloco de posição variável.	Tamanho do bloco à direita do bloco de posição variável.
1	-	512
2	512	256
3	256	128
4	128	64
5	64	32
6	32	16
7	16	8
8	8	4
9	4	2
10	2	1

Tabela 3.2: Descrição dos dez esquemas de assincronia usadas na família assincronia em blocos fixos com deslocamento.

Para efetuar análises sobre os resultados, os espectros de Fourier de todas as ordens de assincronia das três famílias foram agrupados nas CEDs por um processo de agrupamento que, na presente dissertação, tem como único critério a similaridade da forma dos espectros, ou seja, espectros cuja diferença na concentração de energia, em todas as frequências do espectro, seja de 0,1 unidades de energia ou menor. Esta técnica difere de outros trabalhos que agruparam espectros em classes, tais como o de Ruivo e de Oliveira (2013), que se baseia em propriedades comuns às regras para seu agrupamento (por exemplo, as regras serem sobrejetoras), fato este que traz uma certa subjetividade ao agrupamento efetuado, permitindo que diferentes pessoas ou processos, ao agrupar a presente massa de dados, obtivessem classes distintas das exibidas aqui. No tocante ao procedimento, o processo de agrupamento foi feito em duas etapas: a primeira com o uso da função *FindCluster* (função nativa do software *Mathematica* e que agrupa dados segundo sua similaridade por meio de técnicas de inteligência artificial), usando o algoritmo de cálculo de proximidade Jarvis-Patrick (JARVIS; PATRICK, 1973), com raio de vizinhança de tamanho 0,1932. Este algoritmo de cálculo e tamanho de raio foram escolhidos após testar todos os algoritmos suportados pela função *FindCluster*, com diferentes tamanhos de raios, onde tal combinação se mostrou a que produziu o menor número de falsos positivos (espectros distintos em uma mesma classe) e falsos negativos (espectros iguais em classe distintas) no agrupamento dos espectros em classes. Como o uso da função proveu um agrupamento parcial, fora executada a segunda etapa, na qual as classes foram analisadas visualmente e os espectros foram reorganizados manualmente, corrigindo os erros de classificação cometidos pela *FindCluster*.

Sobre o ambiente de implementação e testes, foi utilizado o software *Mathematica*, utilizando-se de funções nativas da aplicação, bem como de funções providas pela biblioteca de autômatos celulares *Cellular Automata Mathematica Toolbox – CAMaT* (DE OLIVEIRA, 2018). Esta plataforma foi selecionada devido às amplas ferramentas de cálculo avançado que fornece, além de demonstrar um desempenho superior para o processamento de dados numéricos.

Como ferramenta adicional de análise, foram calculados os graus de assincronia médio (DE OLIVEIRA, 2018) de todos os dez esquemas das três famílias. Grau de assincronia é definido como uma medida da dependência que cada célula do

reticulado possui sobre a evolução das células anteriores, para reticulados evoluídos com assincronia determinística. O grau de assincronia é calculado traduzindo-se o EA para seu grafo de interações correspondente (ARACENA *et al*, 2011), e então mensurando-se, para cada nó do grafo, o grau de dependência que este possui em relação a todos os demais nós. Para fins desta dissertação, basta observar que a grandeza é definida em função de uma somatória das dependências individuais de cada célula com relação às demais, em função do tipo de esquema de assincronia que esteja sendo usado. Por exemplo, em um reticulado de comprimento L, com assincronia sequencial da célula 1 à célula L, enquanto a atualização da célula 1 é independente das demais, a dependência da célula L é máxima, dado que seu próximo valor depende da atualização de todas as demais células do reticulado. As medidas de todas os nós são então combinadas para fornecer o grau de assincronia do respectivo EA. Dentre as muitas formas de efetuar tal combinação, foi escolhido o grau de assincronia médio, que consiste em calcular a média de todos os graus de assincronia obtidos, pois até o presente momento, este é considerada a valoração mais precisa para esta medida.

Uma vez apresentados os detalhes do experimento da dissertação, no capítulo seguinte serão descritos os resultados obtidos, ou seja, os espectros dos ACAs descobertos, a classificação elaborada sobre estes, bem como os resultados do processo de agrupamento.

4 RESULTADOS

No presente capítulo, são apresentados os resultados do experimento: as classificações determinadas para os espectros, com base na alteração de sua forma com os efeitos das assincronias, nos dez EAs determinados das três FAs, bem como os espectros obtidos como consequência das assincronias no EA de ordem máxima, nas famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados. São também apresentados e discutidos os resultados do agrupamento, e quais fatos e propriedades podem ser concluídos do experimento por meio dessa ferramenta. Cada um dos resultados é apresentado em seções distintas.

Na apresentação dos resultados, será usado o valor de 0,1 unidades de energia como valor referencial para mudanças significativas na forma do espectro. Este valor foi selecionado pela observação detalhada dos espectros, pela qual se constatou que, nas alterações com valores maiores do que este, existe a tendência de que a forma do espectro de uma regra continue a ser modificada com o aumento da ordem do EA, até que o espectro seja radicalmente diferente do caso síncrono daquela regra. Além deste fato, é um valor suficientemente grande para distinguir alterações na forma do espectro e meras flutuações decorrentes da natureza estatística da formação dos espectros.

4.1 CLASSIFICAÇÃO DOS ESPECTROS QUANTO À SUA MUDANÇA COM O AUMENTO DA ORDEM DE ASSINCRONIA NAS FAMÍLIAS ASSINCRONIA SEQUENCIAL EM BLOCOS E ASSINCRONIA EM BLOCOS ALTERNADOS

Na presente seção é apresentada a classificação das mudanças ocorridas nos espectros das regras dos ACEs quando calculados com EAs compostos por blocos de assincronia de diferentes tamanhos. Foram definidos neste aspecto cinco classificações distintas: espectros nulos; espectros invariantes; espectros com

variação gradual; espectros com variação abrupta; espectros com variação particulada.

- **Espectros nulos:** Apresentam espectro invariável, sempre apresentando níveis nulos de energia por todo o espectro em todos os EAs. Estes espectros são característicos das regras pertencentes à Classe I de Wolfram, sendo esta a única classe de Wolfram em que todos os espectros se mantiveram iguais, mesmo com a presença da assincronia (Figura 4.1).

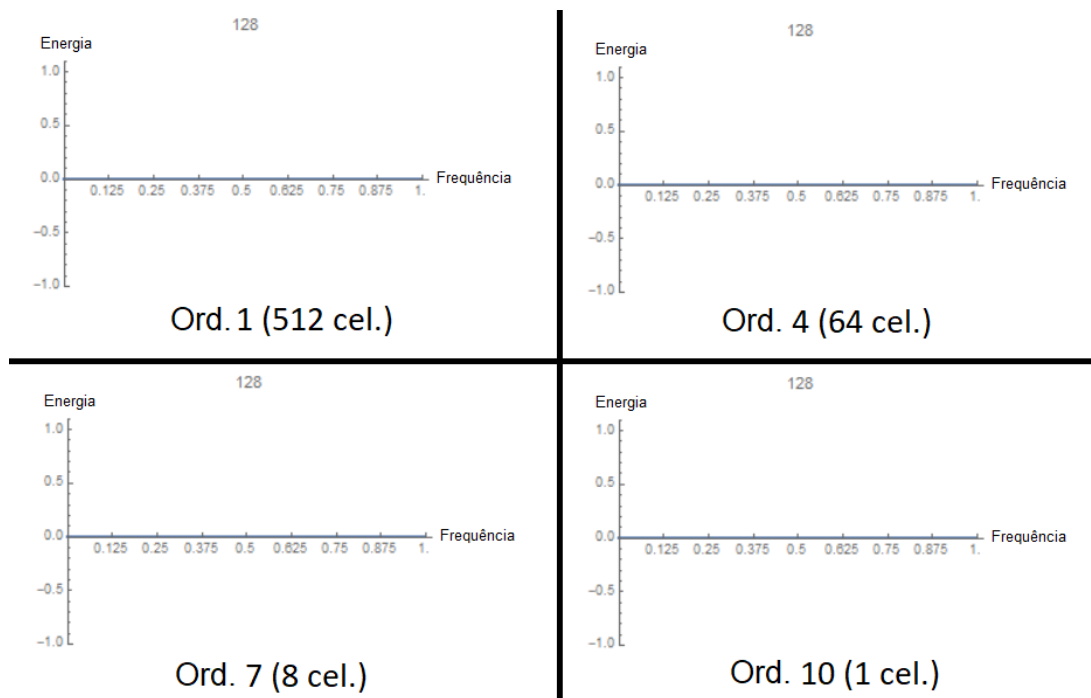


Figura 4.1: Comportamento de um espectro nulo. Observe como o espectro mantém a mesma forma em cada ordem dos esquemas de assincronia. Em cada quadrante está o número a ordem do esquema de assincronia que corresponde àquele espectro, e entre parênteses o número de células por bloco naquele esquema de assincronia.

- **Espectros invariantes:** O espectro se mantém constante, ou se altera em pequena escala (mudanças de concentração de energia de 0,1 unidades ou menores) como o aumento da ordem dos EAs, observável somente com uma comparação das concentrações de energia em cada uma das faixas de frequência dos espectros das diferentes frequência de assincronia (Figura 4.2).

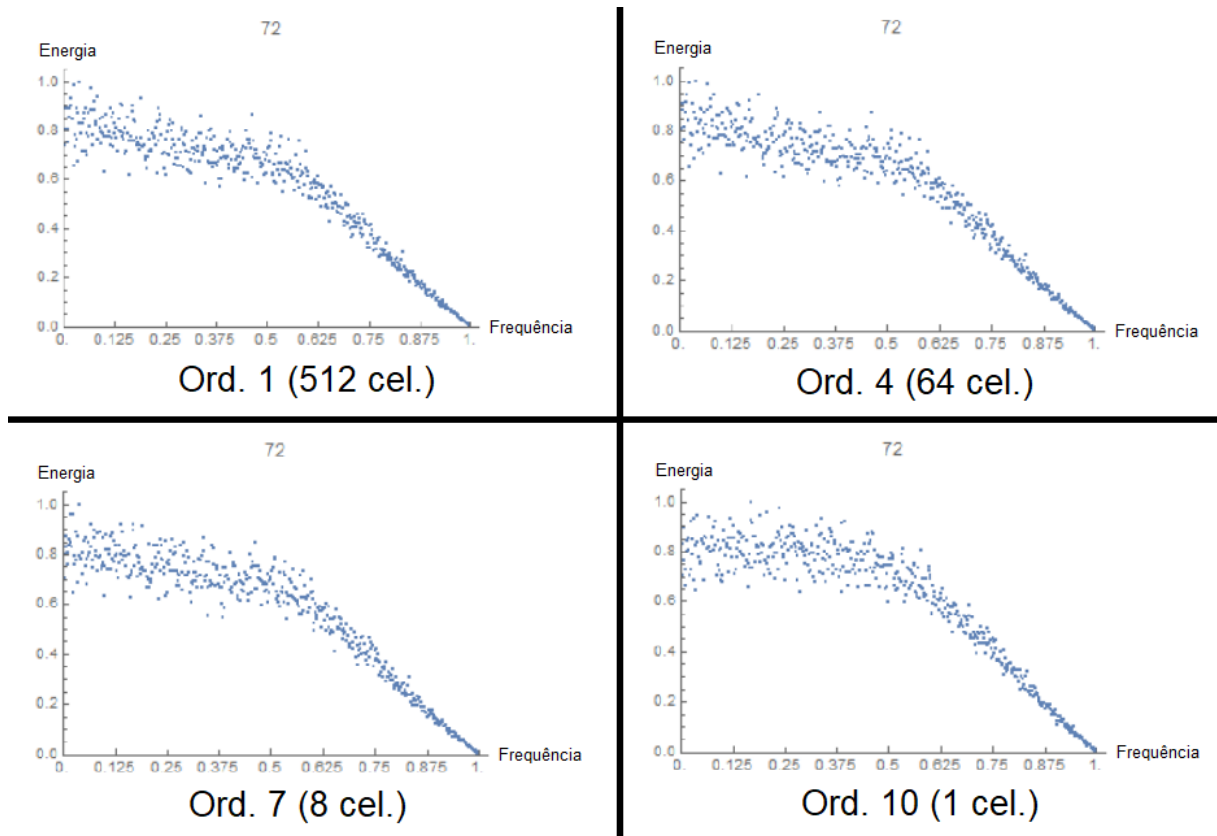


Figura 4.2: Comportamento de um espectro invariante. Observe como o espectro pouco varia em forma e valores com o aumento da ordem dos esquemas de assincronia. Em cada quadrante está o número de ordem do esquema de assincronia que corresponde àquele espectro, e entre parênteses o número de células por bloco naquele esquema de assincronia.

- **Espectros com variação gradual:** Alterações perceptíveis a olho nu (mudanças de 0,5 unidades de energia ou maiores) ocorrem na forma do espectro a cada aumento do EA, em forma e/ou valores do espectro (Figura 4.3).

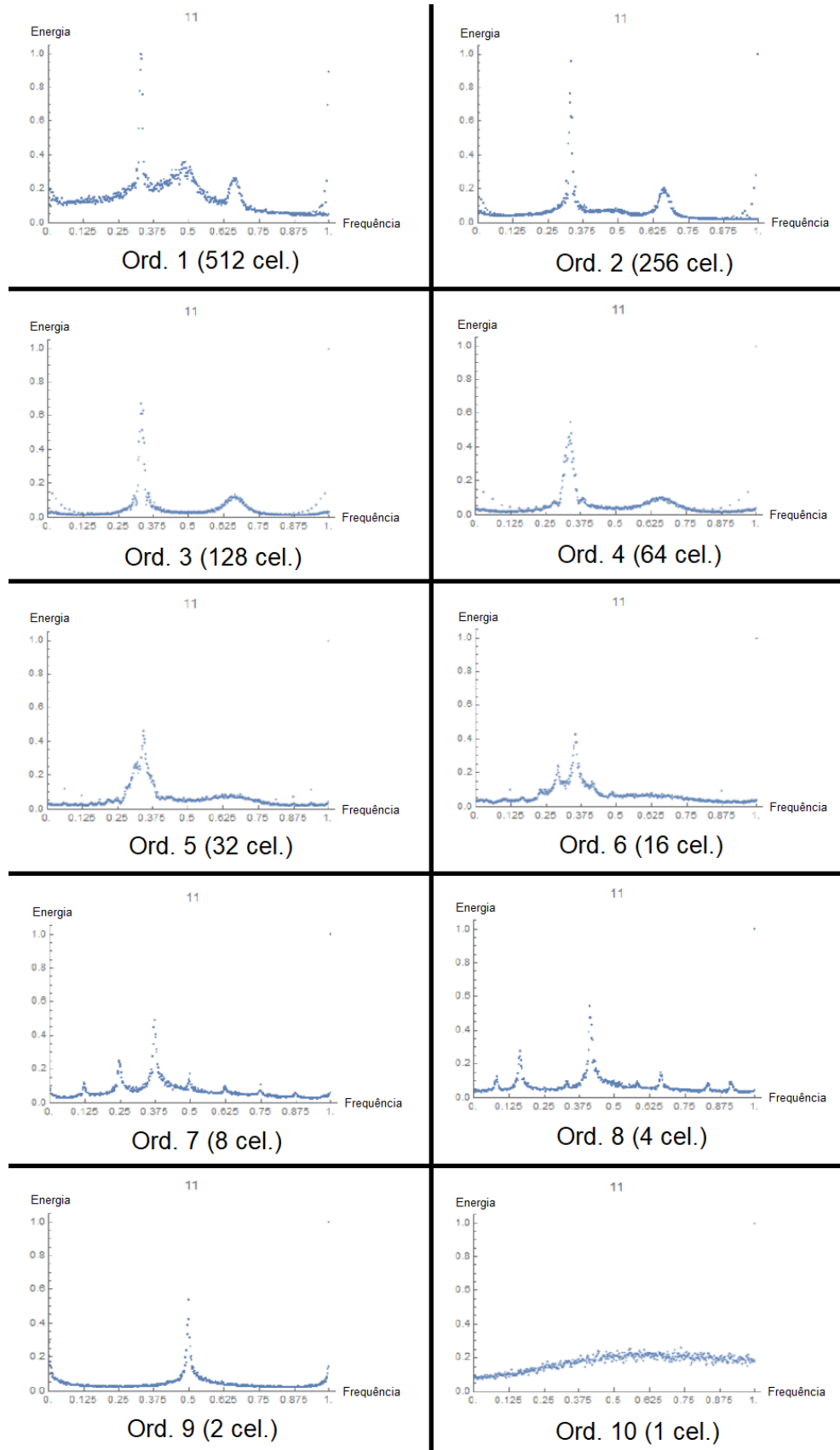


Figura 4.3: Comportamento de um espectro com variação gradual. Observe como o espectro varia gradativamente em forma e valores com o aumento da ordem do esquema de assincronia. Em cada quadrado está o número da ordem do esquema de assincronia que corresponde àquele espectro, e entre parênteses o número de células por bloco naquele esquema de assincronia.

- **Espectros com variação abrupta:** Alterações perceptíveis a olho nu (mudanças de 0,5 unidades de energia ou maiores) ocorrem na forma do espectro apenas nas mais altas ordens dos EAs (em geral nas 3 mais elevadas), em forma e/ou valores do espectro, se mantendo imutável ou imperceptível nas demais, mudanças de 0,1 unidades de energia ou menores (Figura 4.4).

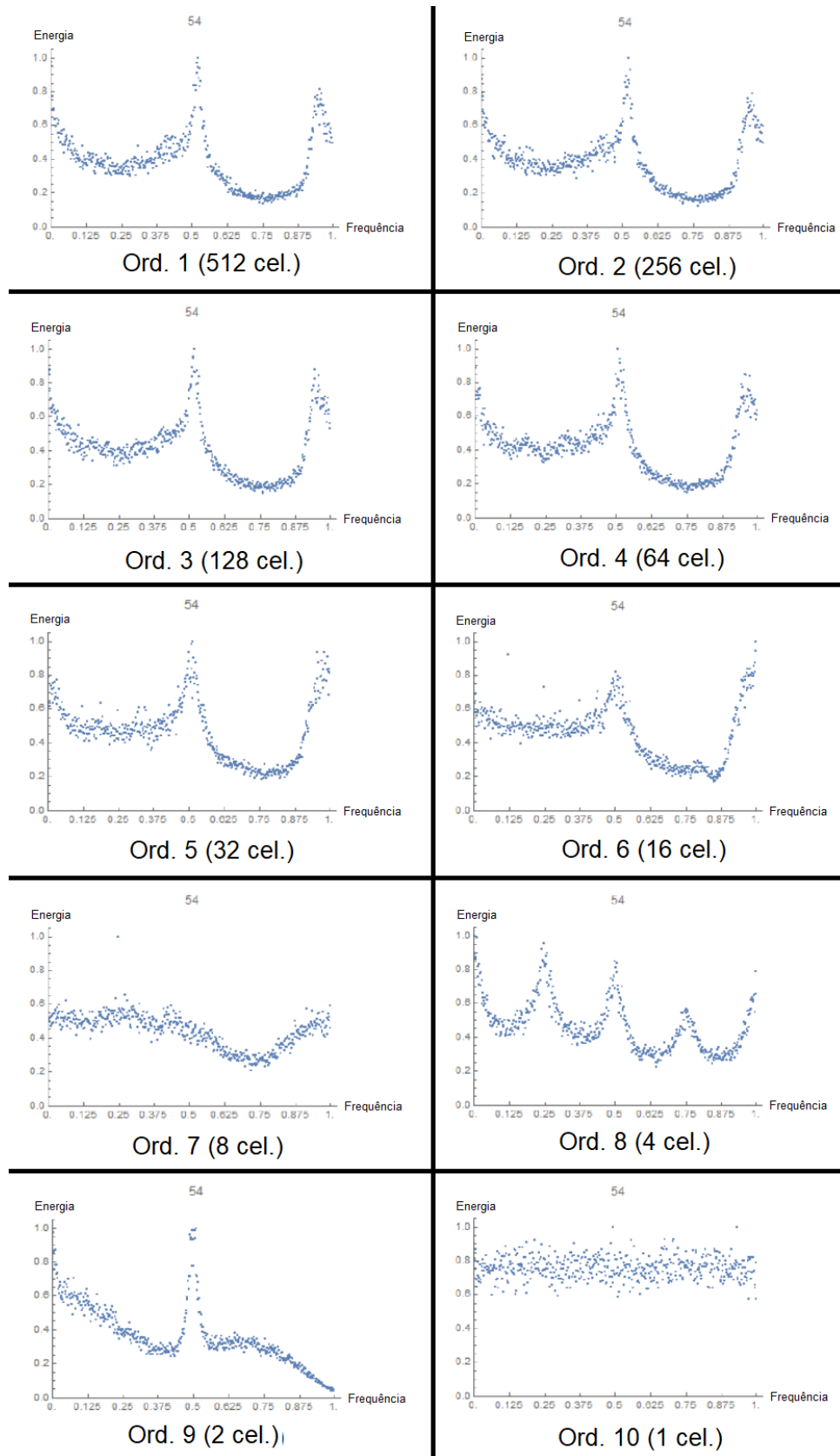


Figura 4.4: Comportamento de um espectro com variação abrupta. Observe como o espectro pouco varia em forma e valores com o aumento da ordem dos esquemas de assincronia até os últimos cinco esquemas, a partir dos quais sofre mudanças consideráveis nestes aspectos. Em cada quadrado está o número da ordem do esquema de assincronia que corresponde àquele espectro, e entre parênteses o número de células por bloco naquele esquema de assincronia.

- **Espectros com variação particulada:** Estes espectros constituem uma classificação especial, se manifestando apenas em conjunto com os espectros de morfologia gradual ou espectros de morfologia abrupta. A característica de espectros com variação particulada é a presença de pontos isolados de elevada concentração de energia presentes no espectro, que se destacam da aglomeração comum, com diferença de 0,2 ou mais unidades de energia (Figura 4.5). Tal fenômeno é observado em especial nos 5 EAs de ordem mais elevada. Em geral, tais partículas não aparecem no esquema de assincronia de ordem máxima.

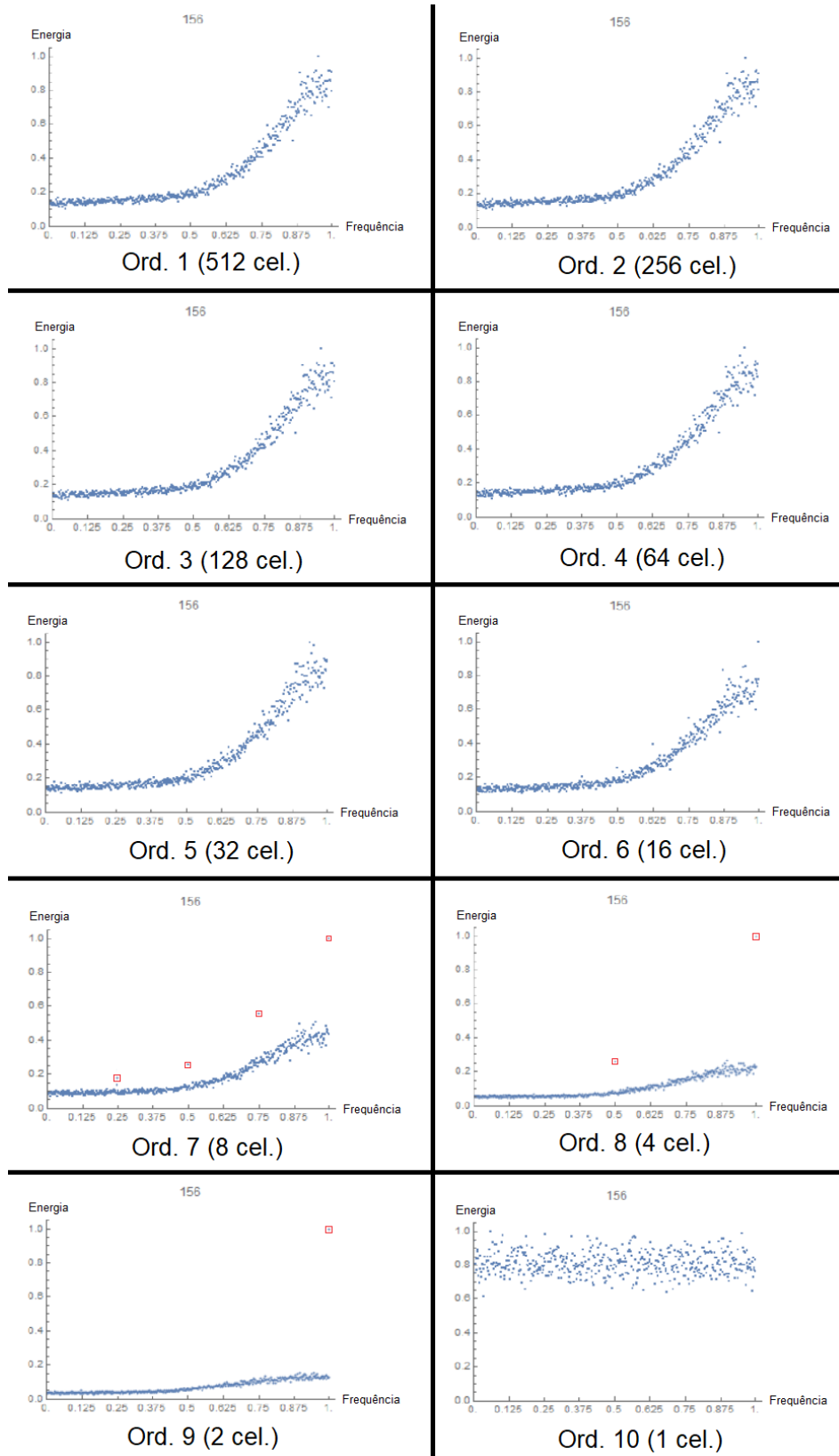


Figura 4.5: Comportamento de um espectro com variação particulada, que é também de morfologia abrupta no presente exemplo. Observe a existência de pontos de energia que se destacam, demarcados na gravura por molduras vermelhas, havendo quatro na sétima ordem de esquema de assincronia (sobre as frequências 0,25; 0,5; 0,75 e 1,0), dois na oitava ordem de esquema de assincronia (sobre as frequências 0,5 e 1,0) e um na nona ordem de esquema de assincronia (sobre a frequência 1,0).

4.2 CLASSIFICAÇÃO DOS ESPECTROS NO ESQUEMA DE ASSINCRONIA DE ORDEM MÁXIMA

Na presente seção é apresentada a classificação das formas que os espectros dos ACEs assumem quando calculados com o EA de ordem máxima. Tais alterações só são observadas nas famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados. Foram definidos neste aspecto 9 classificações distintas: espectro em U; espectro em I; espectro ascendente; espectro cadente; espectro de pico; espectro linear; espectro nula; espectro uniforme; espectro distinto dos demais.

- **Espectros em U:** Apresentam as maiores e mais altas concentrações de energia nas frequências de maior magnitude (tipicamente acima de 0,9), e/ou nas mais baixas frequências (tipicamente abaixo de 0,1), e nula ou tendendo a nula (tipicamente abaixo de 0,1 unidades de energia) nas demais (Figura 4.6).

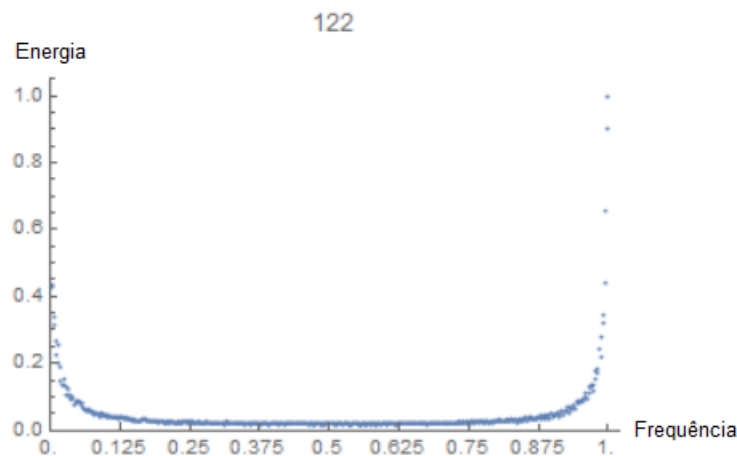


Figura 4.6: Exemplo de espectro em U. Observe como há concentrações de energia extremamente elevadas nos mais baixos e altos valores da frequência do espectro, e uma concentração quase nula nas frequências intermediárias.

- **Espectros em I:** Apresentam as maiores e mais altas concentrações de energia nas frequências centrais (tipicamente de 0,45 até 0,65) e nula ou

tendendo a nula (tipicamente abaixo de 0,1 unidades de energia) nas demais (Figura 4.7).

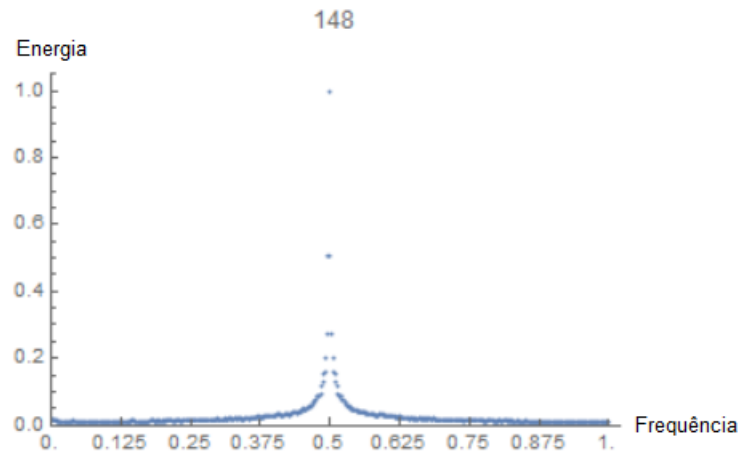


Figura 4.7: Exemplo de espectro em I. Observe como há concentrações de energia extremamente elevadas nas faixas mais centrais do espectro, e uma concentração quase nula nas demais frequências.

- **Espectros ascendentes:** Apresentam distribuição de valores em todas as faixas de energia, todavia exibe uma predominância nas faixas de energia mais elevadas (tipicamente nas frequências maiores do que 0,75), na qual a concentração cresce exponencialmente com a frequência (Figura 4.8).

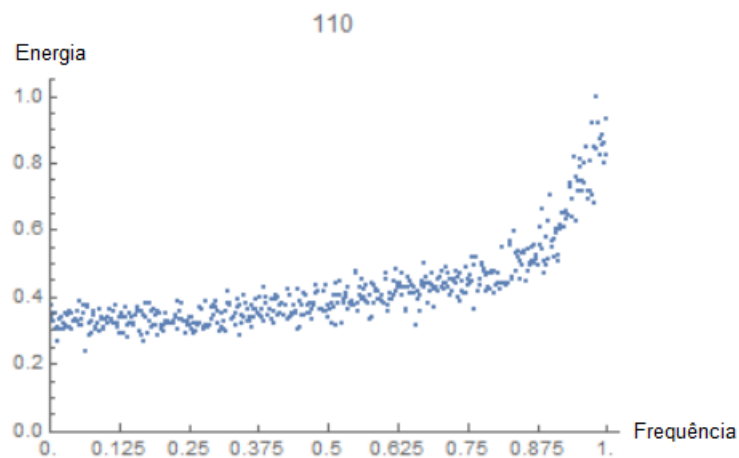


Figura 4.8: Exemplo de espectro ascendente. Observe como há uma concentração de energia consideravelmente maior nas frequências mais elevadas do espectro.

- **Espectros descendentes:** Apresentam a característica notável de que, a partir das frequências medianas (0,5), ao se aproximar da frequência mais elevada (1.0), a concentração de energia fica progressivamente menor, até que atinge concentração nula quando neste valor de frequência. Nas faixas inferiores à mediana, pode crescer em concentração a partir da frequência mais baixa (0), até as faixas medianas, a partir das quais a concentração de energia passa a cair, ou pode permanecer em queda desde as faixas mais baixas de frequência (Figura 4.9).

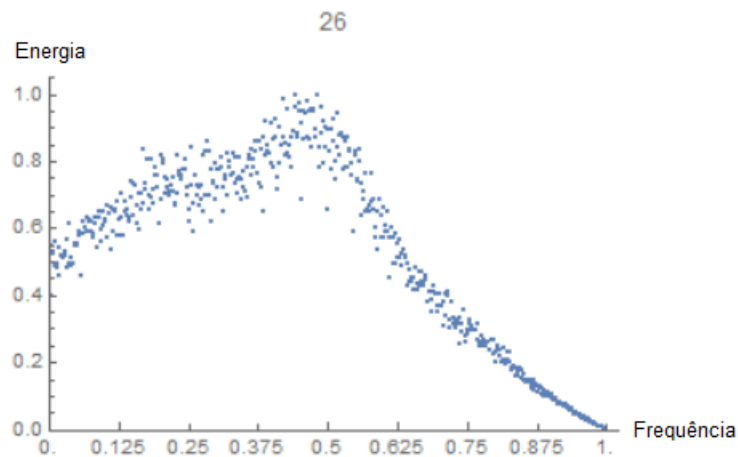


Figura 4.9: Exemplo de espectro cadente. Observe como há queda nas concentrações de energia a partir da faixa de frequência mediana (0,5), comportamento que se mantém com o aumento da faixa de frequência, até atingir concentrações nulas na frequência mais elevada (1.0).

- **Espectros de pico:** Apresentam distribuição de valores em todas as faixas de energia, exibindo um ponto onde existe uma predominância de valores de energia, com ascensão e decréscimo antes e após este ápice. Tal pico é localizado tipicamente na frequência de valor 0,5 ou após ela (Figura 4.10).

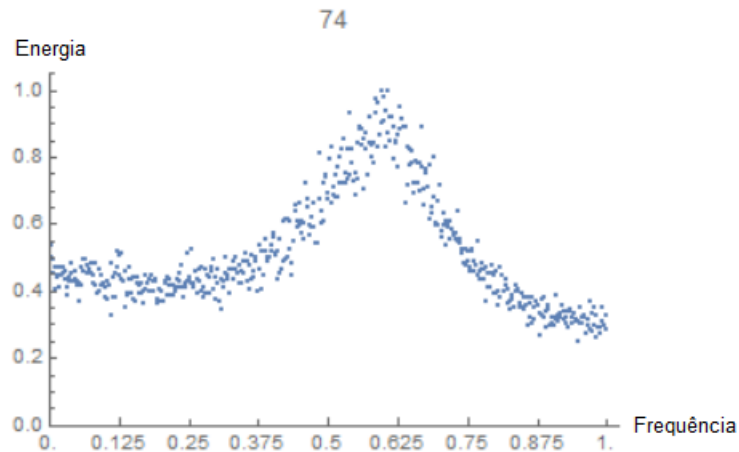


Figura 4.10: Exemplo de espectro de pico. Observe como há um valor de frequência do espectro que concentra um valor mais elevado de energia.

- **Espectros lineares:** Apresentam distribuição de valores em todas as faixas de energia, com aumento de energia nas frequências mais elevadas, em escala linear ou próxima desta (Figura 4.11).

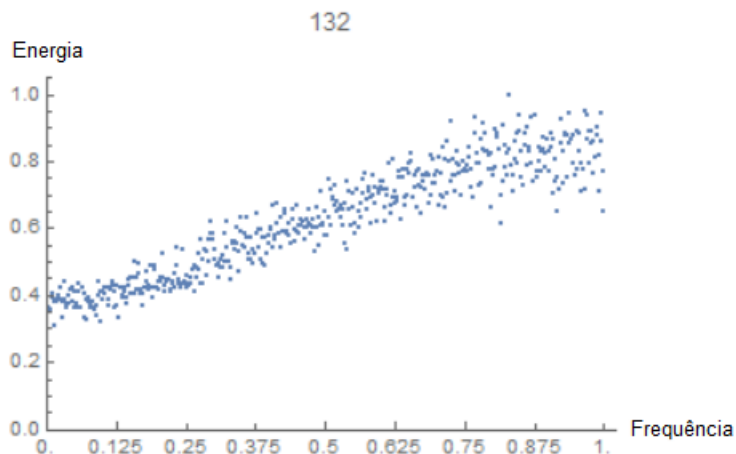


Figura 4.11: Exemplo de espectro linear. Observe como há um aumento constante na concentração de energia conforme aumenta a frequência do espectro.

- **Espectros de forma nula:** Apresentam distribuição homogênea de valores nulos por todas as frequências, em alguns casos, apresentando elevada concentração de valores no grau de frequência mais elevada (1.0) (Figura 4.12).

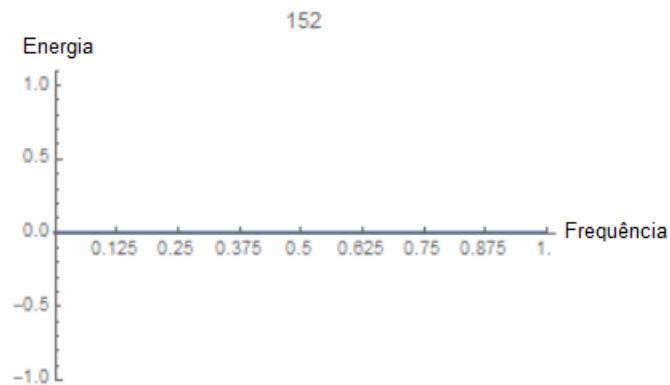


Figura 4.12: Exemplo de espectro de forma nula. Observe que, para todos os valores de frequência do espectro, a concentração de energia é nula.

- **Espectros uniformes:** Apresentam distribuição de valores de energia em igual proporção por todas as frequências do espectro (Figura 4.13).

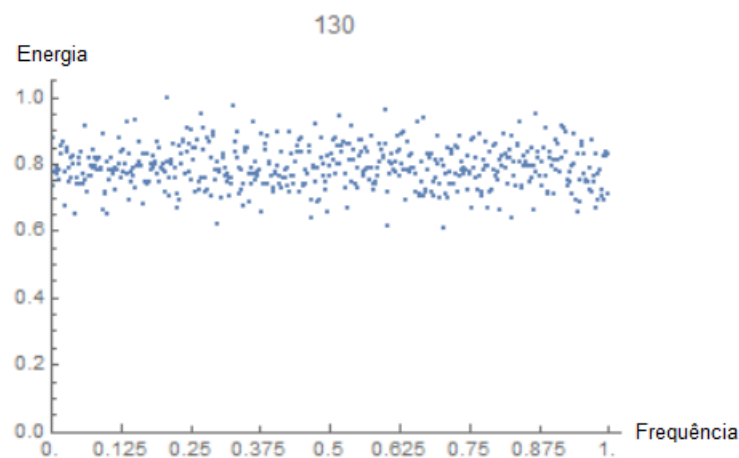


Figura 4.13: Exemplo de espectro uniforme. Observe como há uma concentração de energia em iguais proporções em todos os valores da frequência do espectro.

- **Espectros distintos dos demais:** Apresentam distribuição de valores de energia em um padrão que não se enquadra em nenhum dos demais apresentados nesta seção. São as ocorrências mais raras e, em geral, aparecem somente em uma regra, a regra 90 (Figura 4.14).

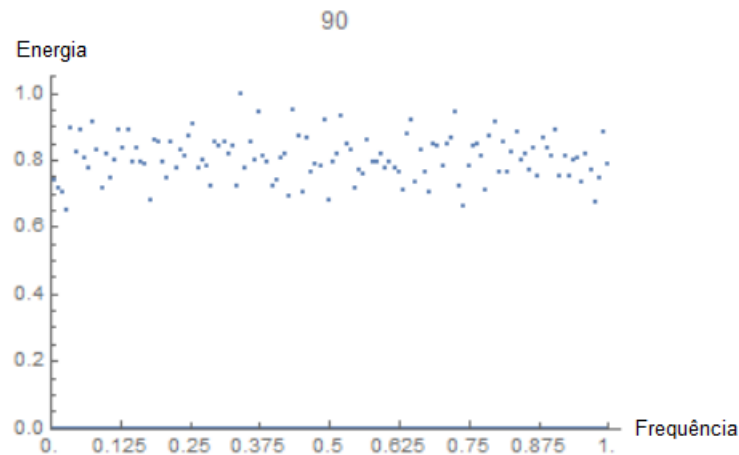


Figura 4.14: Exemplo de espectro com distinto dos demais, exibindo um espectro que não é observado em nenhuma outra regra.

4.3 CLASSIFICAÇÃO DOS ESPECTROS QUANTO À SUA MUDANÇA COM O AUMENTO DA ORDEM DE ASSINCRONIA NA FAMÍLIA ASSINCRONIA EM BLOCOS FIXOS COM DESLOCAMENTO

Na presente seção é apresentada a classificação das mudanças ocorridas nos espectros das regras dos ACEs quando calculados com EAs compostos por blocos de assincronia cuja posição varia no reticulado. Foram definidos neste aspecto três classificações distintas: espectros nulos, espectros invariantes; espectros com leves variações nas ordens intermediárias. Espectros com variação particulada não foram observados nesta família.

- **Espectros nulos:** Apresentam espectro invariável, sempre apresentando níveis nulos de energia por todo o espectro em todos os EAs. Estes espectros são característicos das regras pertencentes à Classe I de Wolfram, sendo esta a única classe de Wolfram em que todos os espectros se mantiveram iguais, mesmo com a presença da assincronia (Figura 4.15).

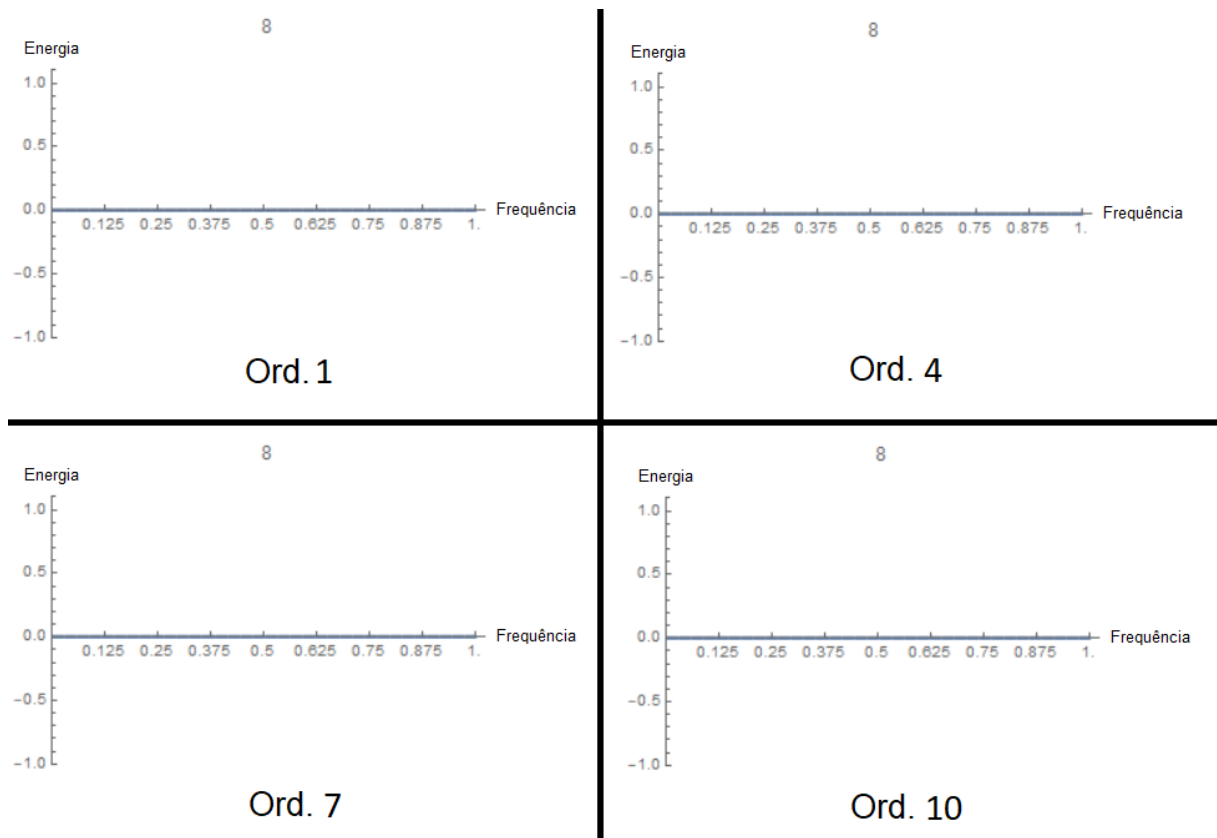


Figura 4.15: Comportamento de um espectro nulo. Em cada quadrante está o número da ordem do esquema de assincronia que corresponde àquele espectro. Observe como o espectro mantém a mesma forma em cada ordem dos esquemas de assincronia.

- **Espectros invariantes:** Os espectros se mantêm constantes, ou se alteram em pequena escala (mudanças de concentração de energia de 0,1 unidades ou menores) como o aumento da ordem dos EAs, observável somente com uma comparação das concentrações de energia em cada uma das faixas de frequência dos espectros das diferentes frequência de assincronia (Figura 4.16).

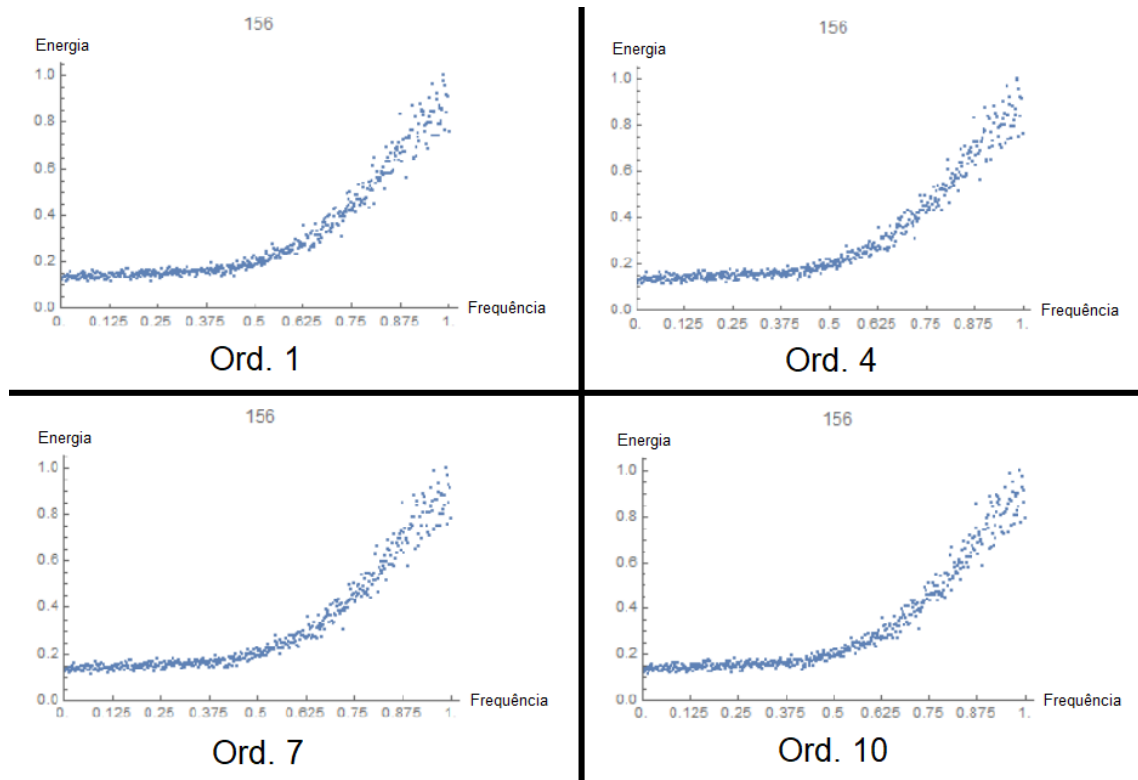


Figura 4.16: Comportamento de um espectro invariante. Observe como o espectro pouco varia em forma e valores com o aumento da ordem dos esquemas de assincronia. Em cada quadrante está o número da ordem do esquema de assincronia que corresponde àquele espectro.

- **Espectro com leves variações nas ordens intermediárias:** Apresentam variações significativas na forma dos espectros que se manifestam apenas nas ordens de assincronia intermediárias (não são observadas nas ordens mínimas e máximas), e se manifestam tipicamente nas quatro ordens de menor magnitude (do 2º ao 5º esquema de assincronia da família assincronia em blocos fixos com deslocamento), apesar de ser vista em todas as ordens de assincronia intermediárias em alguns EAs (Figura 4.17).

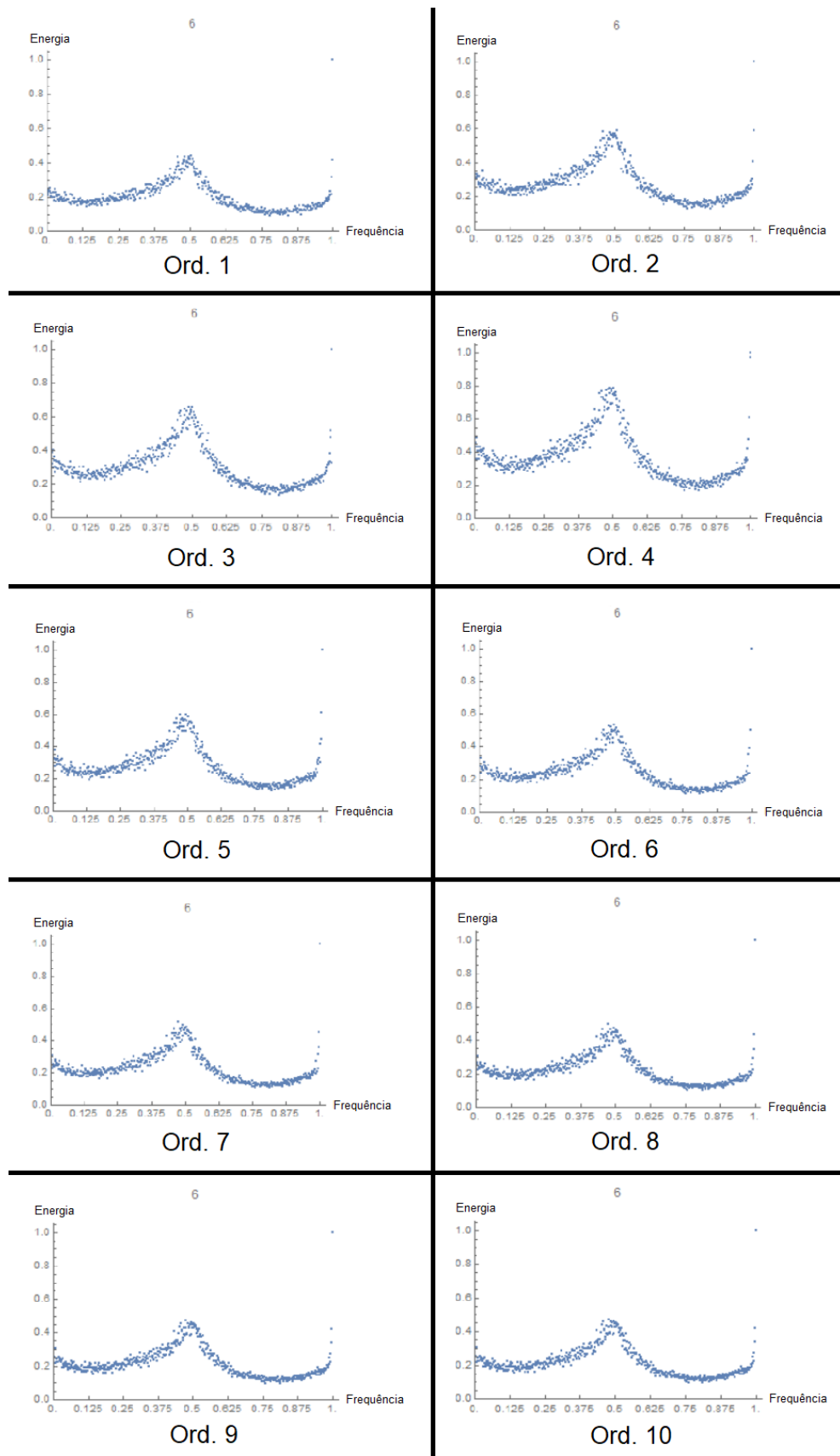


Figura 4.17: Comportamento de um espectro com leves variações nas ordens intermediárias. Em cada quadrante está o número da ordem do esquema de assincronia que corresponde àquele espectro. Observe que os espectros das ordens de assincronia 2 a 5 exibem um espectro diferente das demais, tanto das ordens anteriores quanto posteriores a estas.

4.4 TABELA RESUMO DA CLASSIFICAÇÃO DOS ESPECTROS

Nesta seção são apresentadas as Tabelas 4.1 e 4.2, que listam todas as regras do espaço elementar e suas classificações, segundo os grupos descritos nas seções anteriores deste capítulo. A classificação da família assincronia sequencial em blocos aparece no grupo de colunas à esquerda da Tabela 4.1, e a classificação das famílias assincronia em blocos alternados e de assincronia sequencial em blocos alternados aparecem no grupo de colunas à direita da Tabela 4.1. A classificação da família assincronia em blocos fixos com deslocamento na Tabela 4.2.

A legenda da Tabela 4.1 segue:

No cabeçalho:

- FEAOM: Forma no Esquema de Assincronia de Ordem Máxima.
- MAOEA: Mudança com o Aumento da Ordem do Esquema de Assincronia.
- ÉEP: É um Espectro Particulado.

No conteúdo da tabela:

Coluna FEAOM:

- EU: Espectro em U.
- EI: Espectro em I.
- EA: Espectro Ascendente.
- EC: Espectro Cadente.
- EP: Espectro de Pico.
- EL: Espectro Linear.
- EFN: Espectro de Forma Nula.
- EUN: Espectro Uniforme.
- EDD: Espectro Distinto dos Demais.

Coluna MAOEA:

- EN: Espectro Nulo.
- EI: Espectro Invariante.

- EVG: Espectro de Variação Gradual.
- EVA: Espectro de Variação Abrupta.

Coluna ÉEP:

- S: Sim; N: Não.

Nº regra	Família SeqBloc			Família BlocAlt		
	FEAOM	MAOEA	ÉEP	FEAOM	MAOEA	ÉEP
0	-	EN	N	-	EN	N
1	EA	EVA	S	EL	EVA	S
2	EL	EVA	S	EC	EVA	S
3	EA	EVA	S	EL	EVA	S
4	EL	EVA	S	-	EI	S
5	EA	EVA	S	EL	EVA	S
6	EA	EVA	S	EP	EVA	S
7	EU	EVA	S	EL	EVA	S
8	-	EN	N	-	EN	N
9	EL	EVG	S	EL	EVG	S
10	EA	EVG	S	EC	EVG	S
11	EA	EVG	S	EL	EVG	S
12	EA	EVA	S	-	EI	S
13	-	EI	S	-	EI	S
14	EA	EVG	N	EP	EVG	S
15	EU	EVA	N	EL	EVA	N
16	EFN	EVA	N	EC	EVA	S
17	-	EI	N	EFN	EVG	S
18	EL	EVG	S	EC	EVG	S
19	EP	EVA	N	EU	EVA	N
20	EUN	EVG	S	EI	EVG	S
21	EUN	EVA	S	EA	EVG	S
22	EUN	EVA	N	EDD	EVA	N
23	EUN	EVA	N	EU	EVA	N
24	EFN	EVG	S	EDD	EVG	S
25	EDD	EVA	N	EDD	EVG	N
26	EA	EVG	S	EC	EVG	S
27	EA	EVG	S	EL	EVA	S
28	-	EI	S	-	EI	S
29	EA	EVA	S	EA	EVA	S
30	EU	EVA	N	EL	EVA	N
32	-	EN	N	-	EN	N
33	EU	EVA	S	EDD	EVA	S
34	-	EI	N	EC	EVA	S
35	EA	EVG	N	EDD	EVG	S
36	EDD	EVA	S	EDD	EVA	S
37	EI	EVA	S	EU	EVA	S
38	EA	EVG	S	EP	EVA	S
40	-	EN	N	-	EN	N
41	EP	EVG	S	EDD	EVG	S

42	EA	EVG	N	EC	EVG	N
43	EA	EVG	N	EDD	EVG	N
44	EP	EVA	N	EP	EVA	S
45	EI	EVA	N	EL	EVA	N
46	EA	EVA	S	EP	EVA	S
48	EFN	EVA	S	EC	EVA	S
49	EC	EVG	S	EP	EVG	S
50	EL	EVA	N	EC	EVA	N
51	-	EI	N	-	EI	N
52	EP	EVG	S	EI	EVG	S
53	EP	EVA	S	EL	EVA	S
54	EUN	EVA	S	EUN	EVG	S
56	EFN	EVG	S	EDD	EVG	S
57	EUN	EVG	S	EUN	EVG	S
58	EA	EVG	S	EC	EVG	S
60	-	EI	N	-	EI	N
61	EI	EVG	N	EDD	EVG	N
62	EU	EVG	N	EP	EVG	S
64	-	EN	N	-	EN	N
65	EA	EVG	S	EA	EVG	S
66	EP	EVG	S	EDD	EVG	S
68	-	EI	N	EL	EVA	S
69	EA	EVA	S	EA	EVA	S
70	-	EI	N	EA	EVA	S
72	-	EI	N	EC	EVA	S
73	EDD	EVG	S	EL	EVA	S
74	EP	EVG	S	EDD	EVG	S
76	EA	EVA	S	-	EI	S
77	-	EI	N	-	EI	N
78	-	EI	S	-	EI	S
80	EFN	EVG	S	EC	EVG	S
81	EC	EVG	S	EL	EVG	S
82	EFN	EVG	S	EC	EVG	S
84	EUN	EVG	S	EP	EVA	S
85	-	EI	N	EA	EVA	N
86	-	EI	N	EA	EVA	N
88	EU	EVG	S	EDD	EVG	S
89	-	EI	N	EL	EVA	N
90	-	EI	N	EDD	EVA	N
92	EA	EVA	S	EA	EVA	S
94	EA	EVA	S	EA	EVA	S
96	-	EN	N	-	EN	N
97	EU	EVG	S	EP	EVG	S
98	EP	EVG	S	EC	EVG	S
100	-	EI	N	-	EI	N
102	-	EI	N	-	EI	N
104	-	EI	N	EC	EVG	N
105	-	EI	N	-	EI	N
106	-	EI	N	EDD	EVA	N
108	EUN	EVA	S	EUN	EVA	S
110	EA	EVG	S	EL	EVG	S
112	EFN	EVG	N	EC	EVG	N
113	EC	EVG	N	EP	EVG	N

114	EFN	EVG	S	EC	EVG	S
116	EC	EVA	S	EP	EVA	S
118	EC	EVA	N	EP	EVA	N
120	EFN	EVG	N	EL	EVA	N
122	EU	EVG	S	EDD	EVG	S
124	EA	EVG	S	EL	AVG	S
126	EVA	EVA	S	EL	EVG	S
128	-	EN	N	-	EN	N
130	EUN	EVA	N	EC	EVA	S
132	EL	EVA	N	EL	EVG	S
134	EUN	EVG	S	EP	EVG	S
136	-	EN	N	-	EN	N
138	EUN	EVA	N	EC	EVA	S
140	-	EI	N	-	EI	N
142	EUN	EVG	N	EP	EVG	N
144	EFN	EVA	S	EC	EVA	S
146	EUN	EVG	S	EU	EVG	S
148	EUN	EVG	S	EI	EVG	S
150	-	EI	N	-	EI	N
152	EFN	EVA	S	EU	EVA	S
154	-	EI	N	EC	EVA	N
156	EUN	EVA	S	EUN	EVA	S
160	-	EN	N	-	EN	N
162	EUN	EVA	S	EC	EVA	S
164	EDD	EVA	N	EDD	EVA	S
168	-	EN	N	-	EN	N
170	-	EI	N	EC	EVA	N
172	EP	EVA	S	-	EI	S
176	EFN	EVA	S	EC	EVA	S
178	EUN	EVA	N	EU	EVA	N
180	EFN	EVA	N	EC	EVA	N
184	EFN	EVG	S	EU	EVG	S
188	EU	EVA	S	EU	EVA	S
192	-	EN	N	-	EN	N
196	-	EI	N	-	EI	N
200	-	EI	N	-	EI	N
204	-	EI	N	-	EI	N
208	EFN	EVA	N	EC	EVA	S
212	EUN	EVG	N	EI	EVA	N
216	EP	EVA	S	EL	EVA	S
224	-	EN	N	-	EN	N
232	-	EI	N	-	EI	N
240	EFN	EVG	N	EC	EVA	N

Tabela 4.1: Classificação dos espectros das regras estudadas, evoluídas segundo as famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados. No grupo de colunas à esquerda, a classificação com a família assincronia sequencial em blocos, e no grupo de colunas à direita, a classificação com as famílias assincronia em blocos alternados. Nas colunas da esquerda de cada grupo, a forma do espectro quando do esquema de ordem máxima, nas colunas do centro de cada grupo, o tipo de variação que sofrem com o aumento da ordem do esquema de assincronia, e nas colunas da direita de cada grupo, A indicação se os espectros são, também, de variação particulada.

Nº regra	Mudança com o Aumento da Ordem do Esquema de Assincronia.
0	Espectro Nulo
1	Espectro Invariante
2	Espectro Invariante
3	Espectro Invariante
4	Espectro Invariante
5	Espectro Invariante
6	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
7	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
8	Espectro Nulo
9	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
10	Espectro Invariante
11	Espectro Invariante
12	Espectro Invariante
13	Espectro Invariante
14	Espectro Invariante
15	Espectro Invariante
16	Espectro Invariante
17	Espectro Invariante
18	Espectro Invariante
19	Espectro Invariante
20	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
21	Espectro Invariante
22	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
23	Espectro Invariante
24	Espectro Invariante
25	Espectro Invariante
26	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
27	Espectro Invariante
28	Espectro Invariante
29	Espectro Invariante
30	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
32	Espectro Nulo
33	Espectro Invariante
34	Espectro Invariante
35	Espectro Invariante
36	Espectro Invariante
37	Espectro Invariante
38	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
40	Espectro Nulo
41	Espectro Invariante
42	Espectro Invariante
43	Espectro Invariante
44	Espectro Invariante
45	Espectro Invariante
46	Espectro Invariante
48	Espectro Invariante
49	Espectro Invariante
50	Espectro Invariante
51	Espectro Invariante
52	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
53	Espectro Invariante
54	Espectro Invariante

56	Espectro Invariante
57	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
58	Espectro Invariante
60	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
61	Espectro Invariante
62	Espectro Invariante
64	Espectro Nulo
65	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
66	Espectro Invariante
68	Espectro Invariante
69	Espectro Invariante
70	Espectro Invariante
72	Espectro Invariante
73	Espectro Invariante
74	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
76	Espectro Invariante
77	Espectro Invariante
78	Espectro Invariante
80	Espectro Invariante
81	Espectro Invariante
82	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
84	Espectro Invariante
85	Espectro Invariante
86	Espectro Invariante
88	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
89	Espectro Invariante
90	Espectro Invariante
92	Espectro Invariante
94	Espectro Invariante
96	Espectro Nulo
97	Espectro Invariante
98	Espectro Invariante
100	Espectro Invariante
102	Espectro Invariante
104	Espectro Invariante
105	Espectro Invariante
106	Espectro Invariante
108	Espectro Invariante
110	Espectro Invariante
112	Espectro Invariante
113	Espectro Invariante
114	Espectro Invariante
116	Espectro Invariante
118	Espectro Invariante
120	Espectro Invariante
122	Espectro Invariante
124	Espectro Invariante
126	Espectro Invariante
128	Espectro Nulo
130	Espectro Invariante
132	Espectro Invariante
134	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
136	Espectro Nulo

138	Espectro Invariante
140	Espectro Invariante
142	Espectro Invariante
144	Espectro Invariante
146	Espectro Invariante
148	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
150	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
152	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
154	Espectro Invariante
156	Espectro Invariante
160	Espectro Nulo
162	Espectro Invariante
164	Espectro Invariante
168	Espectro Nulo
170	Espectro Invariante
172	Espectro Invariante
176	Espectro Invariante
178	Espectro Invariante
180	Espectro Invariante
184	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
188	Espectros com Leves Variações nas Ordens Intermediárias
192	Espectro Nulo
196	Espectro Invariante
200	Espectro Invariante
204	Espectro Invariante
208	Espectro Invariante
212	Espectro Invariante
216	Espectro Invariante
224	Espectro Nulo
232	Espectro Invariante
240	Espectro Invariante

Tabela 4.2: Classificação dos espectros das regras estudadas, evoluídas segundo a família assincronia em blocos fixos com deslocamento. Associado ao número de cada regra, aparece a classificação dos espectros daquela regra.

4.5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Pode-se observar com os resultados apresentados nas seções anteriores que os ACAs determinísticos possuem espectros diferentes dos ACSs comparando-se, por exemplo, o espectro da regra 110 síncrona com o espectro de cada um dos EAs da regra 110 assíncrona apresentados. Apesar de tal propriedade não ser presente em todas as regras do espaço elementar ou EAs (como nos espectros nulos e espectros invariantes, que preservam o mesmo espectro da regra síncrona), pode-se observar

que existem regras cujos espectros são significativamente afetados pela presença da assincronia, principalmente nos EAs de ordem mais elevada (como nos espectros de morfologia gradual e morfologia abrupta). A razão para tais diferenças pode ser a forma como as células interagem nestes reticulados, nas quais a presença de um determinado tipo de assincronia pode interferir na evolução natural destes, produzindo organizações de estados de células cujos espectros de Fourier diferem dos gerados pelos reticulados síncronos ou pelos assíncronos com menores ordens de assincronia.

É também interessante o fato de que, apesar de diferentes EAs gerarem determinadas formas de espectro em uma quantidade maior do que outras EAs, os espectros que se formam são comuns às famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados, o que indica que a evolução assíncrona de ACs provoca alterações limitadas na formação dos espectros. Este fato se assemelha ao limitado acréscimo de complexidade na evolução dos reticulados, ao se acrescentar mais estados e maior vizinhança ao ACE, como descrito por Wolfram (2002).

Computando-se o número de classes formadas pelo processo de agrupamento em cada FA, em todas as ordens de assincronia, obteve-se a Tabela 4.2 abaixo. Para efeito de comparação, também foi inserido na tabela o número de classes do ACSs, obtidas com os mesmos parâmetros de cálculo.

Ordem de assincronia	Quantidade de classes de equivalência dinâmica			Esq. síncrono
	Esq. assíncronos			
	Sequencial em blocos	Blocos alternados	Blocos fixos com deslocamento	
1	62	62	71	59
2	62	62	68	
3	64	62	68	
4	69	64	67	
5	74	64	68	
6	81	65	65	
7	91	65	67	
8	106	75	64	
9	94	68	64	
10	45	62	69	

Tabela 4.3: Quantidade de classes de equivalência dinâmica por família e ordem de assincronia.

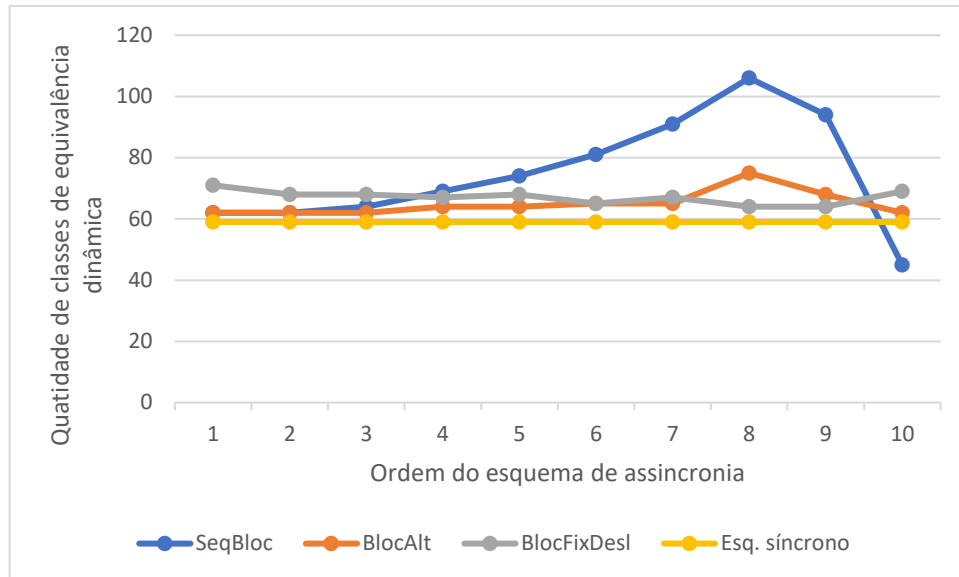


Gráfico 4.1: Distribuição da quantidade de classes de equivalência dinâmica por família e ordem de assincronia. A linha azul mapeia os dados referentes à família assincronia sequencial em blocos, a linha laranja mapeia os dados referentes à família assincronia em blocos alternados, a linha cinza mapeia os dados referentes à família assincronia em blocos fixos com deslocamento, e a linha amarela mapeia os dados referentes ao caso síncrono, inserido do gráfico para efeito de comparação.

Percebe-se, pela análise das famílias assincronia sequencial em blocos (linha azul no gráfico) e assincronia em blocos alternados (linha laranja no gráfico), que existe a tendência de um aumento no número de CEDs, conforme aumenta a ordem da assincronia, seguida por um eventual decréscimo, ambos mais acentuados na primeira família do que na segunda.

A tendência de crescimento é observada desde o caso síncrono (linha amarela no gráfico), se mantendo no EA de ordens menores (Ordens de assincronia 7 e anteriores no gráfico), até o EA com blocos de tamanho 4 (Ordem de assincronia 8 no gráfico), após o qual é observada uma queda no número de CEDs, uma vez que os esquemas de ordem mais elevada (Ordens de assincronia 9 e 10 no gráfico) apresentam quantidade menor de CEDs do que as demais ordens de assincronia, e a família assincronia sequencial em blocos, nesta ordem em particular (Ordem de assincronia 10 da linha azul no gráfico), apresenta menos classes do que a família assincronia em blocos alternados.

A sequência apresentada de EAs, possui aumento gradual na intensidade da assincronia, já que os blocos tornam-se progressivamente menores quanto maior a

ordem do esquema de assincronia, e a família assincronia sequencial em blocos possui maior assincronia quando comparada com a família assincronia em blocos alternados, já que apenas um bloco é alterado a cada vez na primeira família, ao passo que a execução de vários blocos paralelos na segunda família proporciona uma execução mais próxima do paralelismo, o que justifica o fato de as mudanças no número de CEDs ser maior na primeira família do que na segunda os EAs de maior ordem.

Sobre os resultados da família assincronia em blocos fixos com deslocamento (linha cinza no gráfico), observa-se que a quantidade de classes se mantém com valores semelhantes em todos os EAs daquela família. Isso permite concluir que a mudança do posicionamento de blocos de assincronia, sem mudanças em seus tamanhos destes, também provoca alterações no formato dos espectros do espaço elementar, apesar de serem menos intensas do que as observadas por EAs das famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados.

Uma vez que classes agrupam espectros com forma semelhante, e que todas as EAs são executadas sobre as mesmas 136 regras, um maior número de classes espectrais implica que determinado EA consegue gerar uma diversidade maior de formas de espectro. Com este fenômeno, pode-se concluir que o aumento da assincronia proporciona maior variação na forma dos espectros até um dado ponto, a partir do qual a diversidade de espectros passa a decrescer com o aumento da assincronia.

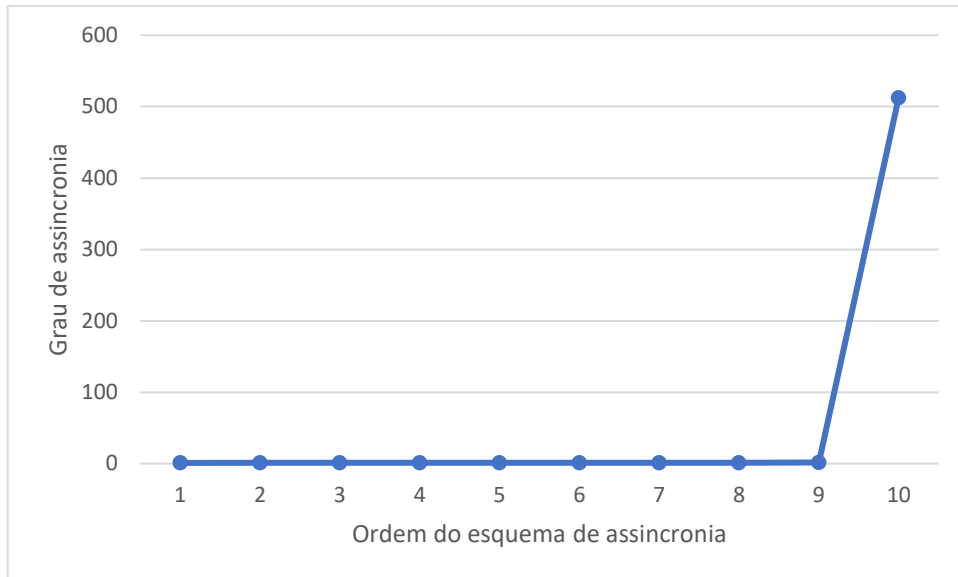


Gráfico 4.2: Grau de assincronia médio da família assincronia sequencial em blocos por ordem de assincronia. Observe como o esquema de ordem máxima desta família de assincronia apresenta grau de assincronia muito acima das demais ordens.

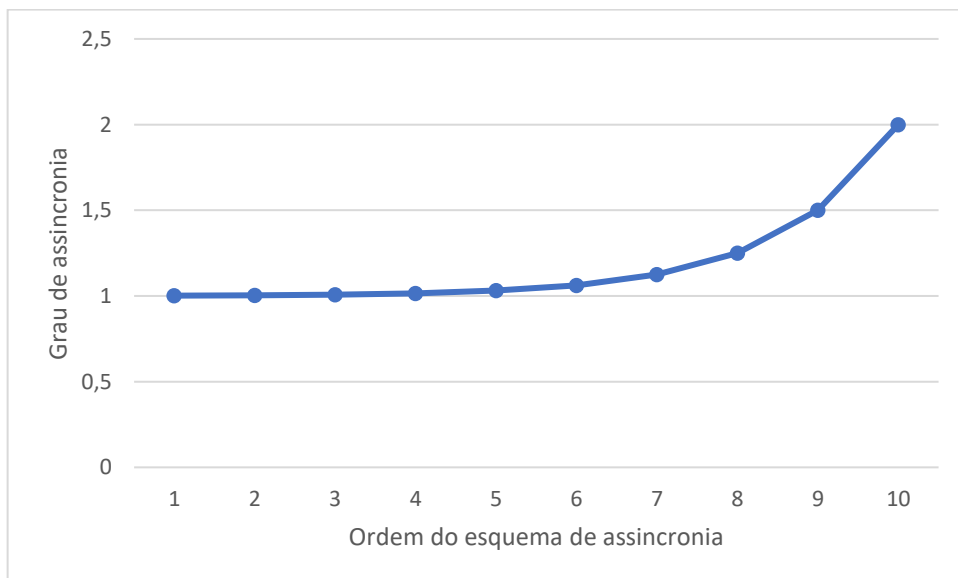


Gráfico 4.3: Grau de assincronia médio da família assincronia em blocos alternados por ordem de assincronia.

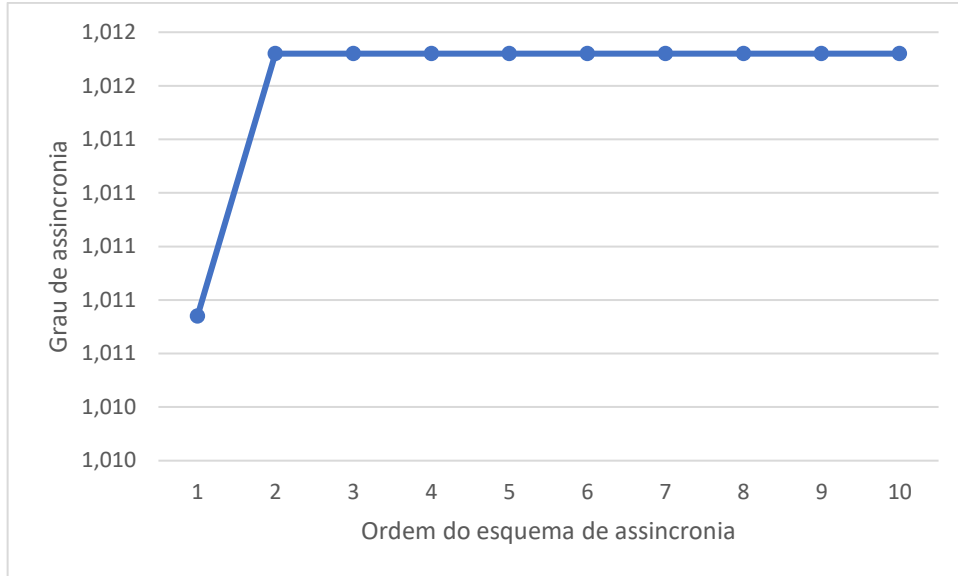


Gráfico 4.4: Grau de assincronia médio da família assincronia em blocos fixos com deslocamento por ordem de assincronia.

Sobre o grau de assincronia dos EAs analisados, percebe-se que os esquemas das famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados possuem os exatos mesmos valores de grau de assincronia (não perceptível no Gráfico 4.2 devido à escala utilizada), cujo valor apresenta crescimento constante a cada esquema de ordem mais elevada, até o esquema de ordem máxima, no qual a família assincronia sequencial em blocos apresenta um grau de assincronia imensamente maior. Apesar deste fato, a família assincronia sequencial em blocos possui uma variação no número de CEDs em relação a família assincronia em blocos alternados em quase todos os esquemas, não apenas no EA de ordem máxima. Tal fato torna a eficácia dos métodos de mensuração de grau de assincronia de EAs utilizado aqui questionável, e indica que algumas informações relevantes para cálculo desta grandeza podem estar deixando de ser consideradas. A família assincronia em blocos fixos com deslocamento apresenta grau de assincronia de valor 1 no EA de ordem mínima, e um valor constante e minimamente maior em todas os demais esquemas de sua família. Os valores do grau de assincronia em cada EAs das famílias assincronia sequencial em blocos, assincronia em blocos alternados e assincronia em blocos fixos com deslocamento são exibidos nos Gráficos 4.2, 4.3 e 4.4.

Também foi analisado o quanto cada CED se mantém constante ou tem seu tamanho e composição alterados, em cada uma das FA. Para tal, foi computado o

quanto cada regra aparece conjuntamente com todas as demais regras, em todas as ordens de assincronia de uma família, gerando assim, para o presente caso, uma matriz de 136x136 células. Estes dados foram calculados para cada uma das três famílias individualmente, bem como analisando as CEDs das famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados, já que estas possuem um mesmo padrão de variação de blocos, e analisando também as classes de todas as três famílias simultaneamente, produzindo no total cinco matrizes distintas. Os valores nestas matrizes são representados com uma escala de cores, posicionada ao lado direito dos gráficos, sendo branco a quantidade 0, azul a menor intensidade (no caso 1), verde a intensidade mediana (5 nas famílias individuais, 10 quando combina duas famílias, e 20 quando combina as três famílias), e vermelho a maior intensidade (10 nas famílias individuais, 20 quando combina duas famílias, e 30 quando combina as três famílias).

- Na matriz da família assincronia sequencial em blocos (Figura 4.18), são observados mais pares de regras com uma única co-ocorrência do que nas demais matrizes de uma família, e uma quantidade moderada de pares de regras entre 8 a 10 co-ocorrências;
- A matriz da família assincronia em blocos alternados (Figura 4.19) exibe quantidade menor de pares de regras entre 8 a 10 co-ocorrências, e a maior quantidade de pares de regras entre 4 a 6 co-ocorrências dentre todas as matrizes de uma família;
- Na matriz da família assincronia em blocos fixos com deslocamento (Figura 4.20), quase todos os pares de regras exibem de 8 a 10 co-ocorrências, e uma quantidade quase nula dos demais valores de co-ocorrência;
- Na matriz que combina as famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados (Figura 4.21), há quantidades quase iguais de todos os valores de 0 a 20 co-ocorrências;
- A matriz que une os dados de todas as três famílias (Figura 4.22) apresenta quantidades similares à matriz de duas famílias, diferindo-se pela presença pouco maior de classes com mais de 15 co-ocorrências.

As matrizes que unem os dados de duas ou três famílias podem ser entendidas como uma compilação da distribuição dos valores destes, respectivamente, das duas famílias com tamanhos de blocos variáveis, e de todas as três famílias.

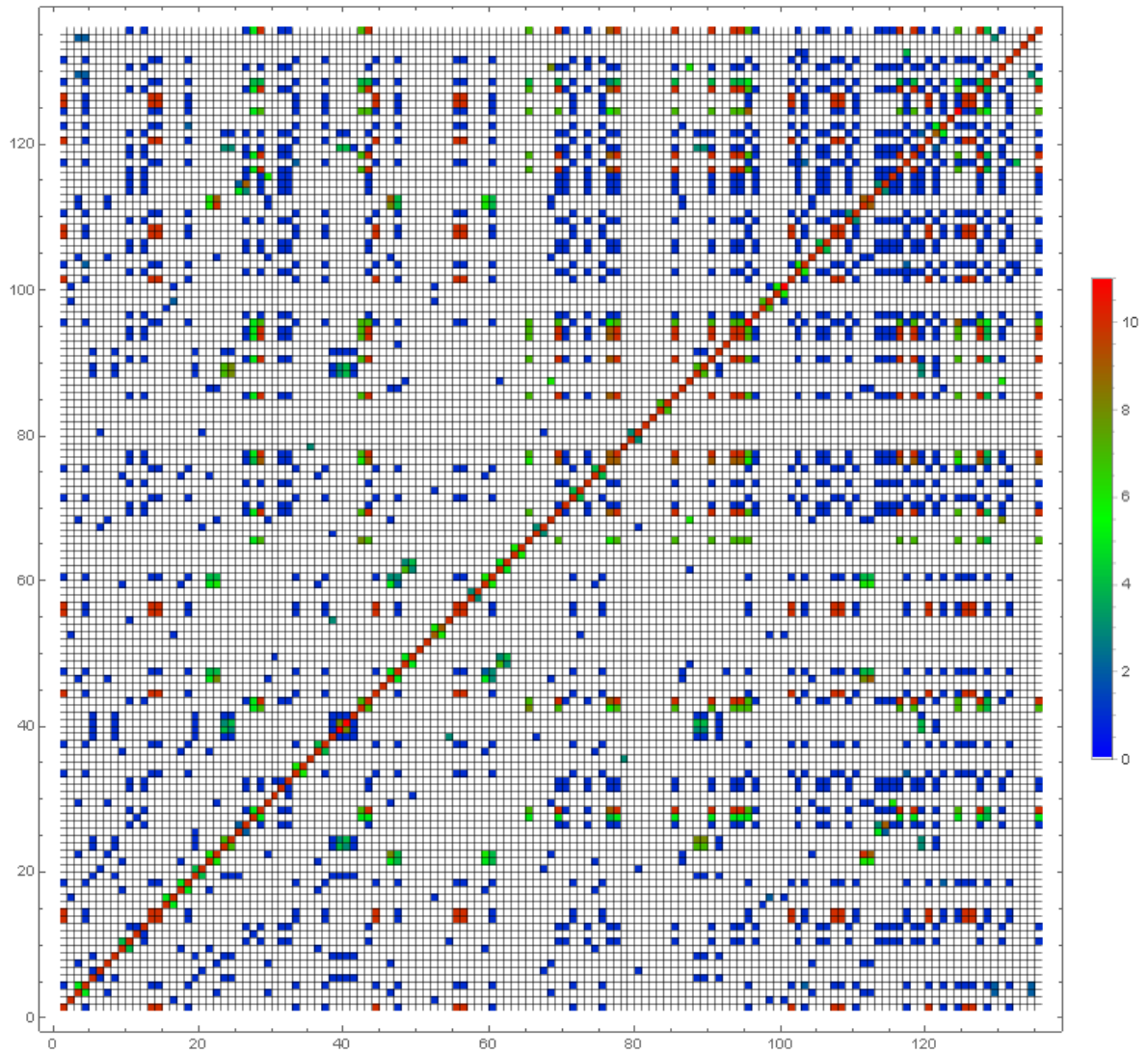


Figura 4.18: Matriz da co-ocorrência de regras em diferentes classes da família assincronia sequencial em blocos.

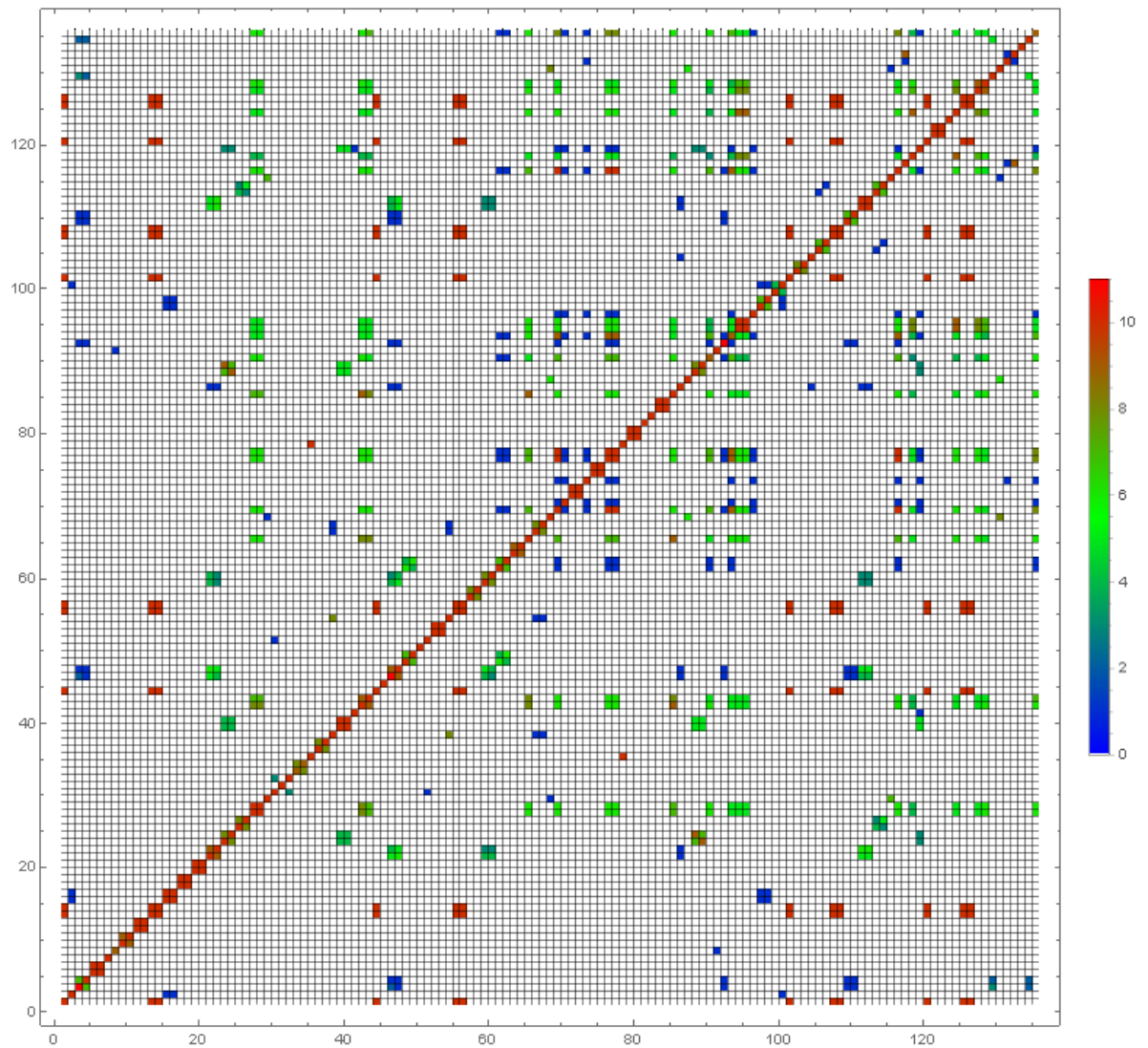


Figura 4.19: Matriz da co-ocorrência de regras em diferentes classes da família assincronia em blocos alternados.

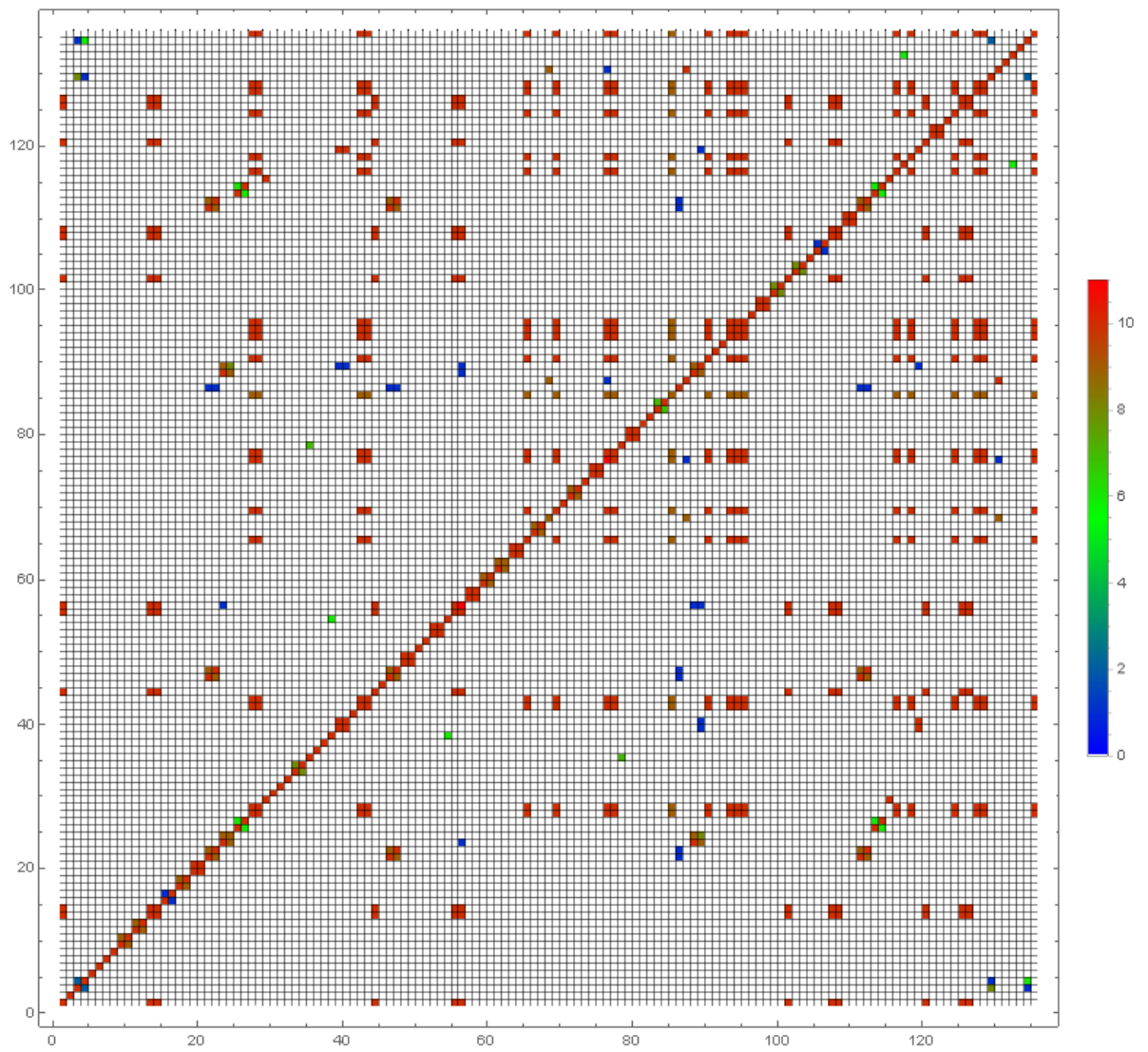


Figura 4.20: Matriz da co-ocorrência de regras em diferentes classes da família assincronia em blocos fixos com deslocamento.

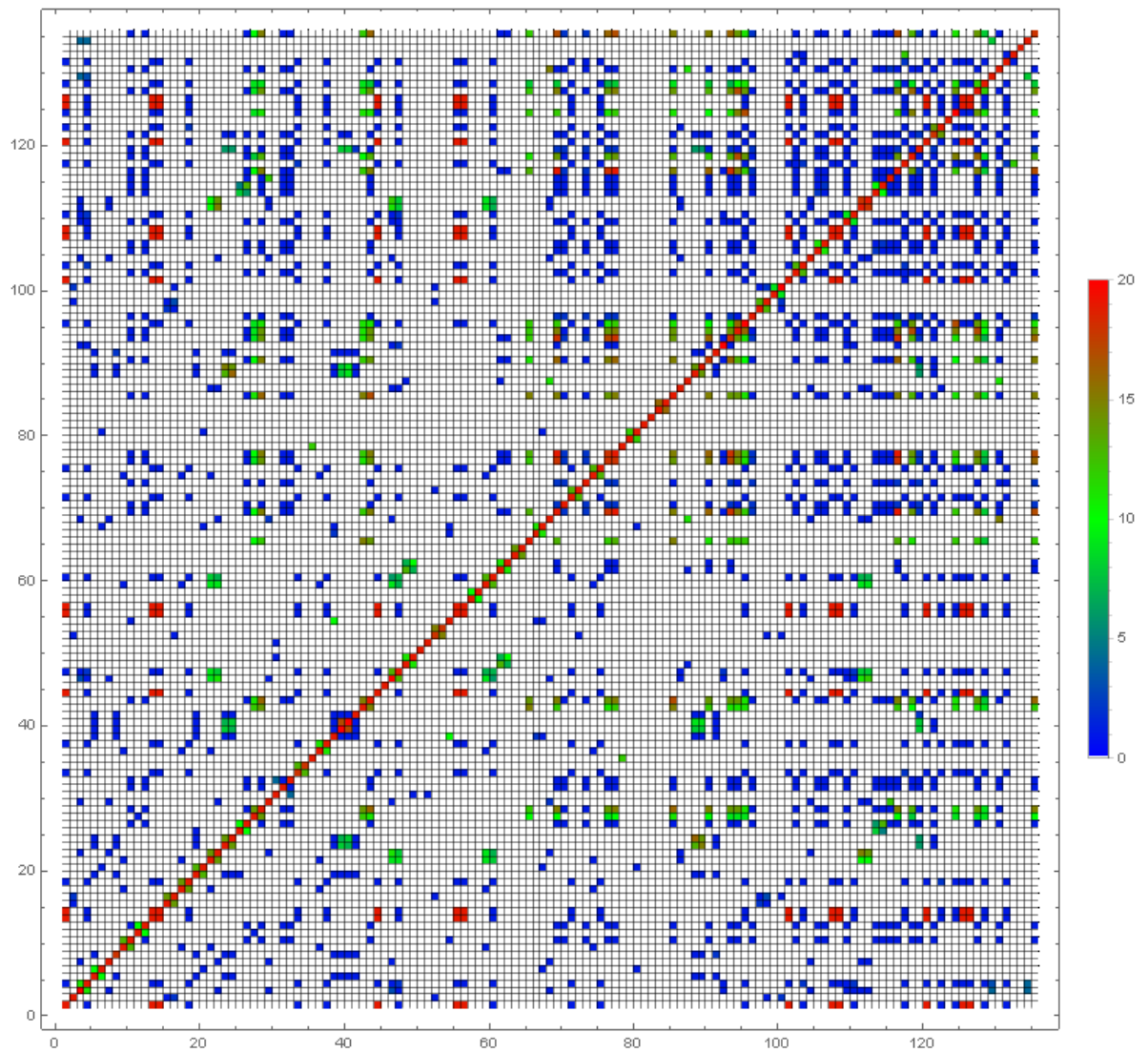


Figura 4.21: Matriz da co-ocorrência de regras em diferentes classes das famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados.

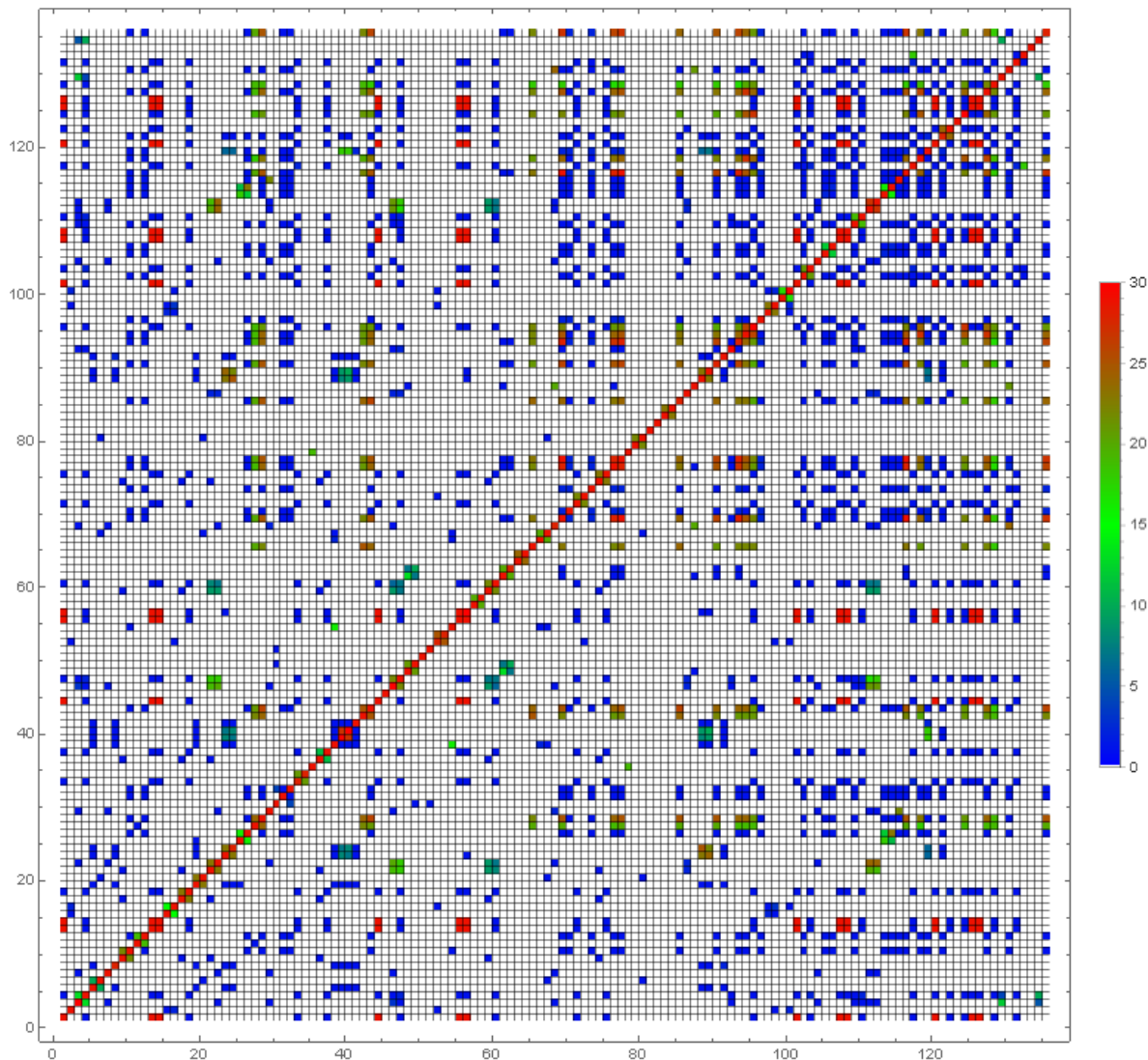


Figura 4.22: Matriz da co-ocorrência de regras em diferentes classes em todas as famílias.

É possível observar que existem regras cuja co-ocorrência em classes aparece em todas as matrizes, apesar de sua frequência variar nas diferentes famílias, o que indica que existem regras cuja co-ocorrência ocorre em todas as famílias, porém é mais frequente em determinadas FAs.

A organização das matrizes descritas demonstra uma relação com o número de classes das famílias que as geraram, uma vez que a matriz da família assincronia sequencial em blocos apresenta a distribuição de valores mais diversificada, qualidade entendida aqui como a quantidade de posições da matriz ocupadas por valores maiores que 0 e diversidade de valores presentes nas células da matriz, e esta é a família que também exibe a maior variação na quantidade de CEDs por ordem

(diferença de 61 classes entre a ordem com menos e a com mais classes); a matriz da família assincronia em blocos alternados apresenta distribuição de valores com menor diversidade, e esta família também exibe variação menor na quantidade de CEDs por ordem (diferença de 13 classes entre a ordem com menos e a com mais classes); por fim, a matriz da família assincronia em blocos fixos com deslocamento exibe uma diversidade extremamente baixa nos valores que contém, e a variação na quantidade de CEDs por ordem é também a menor entre todas as famílias estudadas (diferença de 7 classes entre a ordem com menos e a com mais classes). Como a diversidade de valores em uma matriz indica a tendência dos espectros das regras a aparecerem em CEDs distintas em um número maior de ordens, e esta propriedade se mostrou proporcional à diferença da quantidade de classes por ordem de assincronia, pode-se concluir que, quanto maior o grau de assincronia mediano de uma FA (a média dos graus de assincronia de todos os EAs de uma FA), maior será a tendência dos espectros obtidos pelos esquemas desta FA a se agruparem em diferentes CEDs a cada ordem de assincronia.

Contabilizando-se todas as CEDs de todas os EAs de uma FA em conjunto, foi também descoberto que, quanto maior o grau de assincronia mediano de uma FA, maior é a tendência dos esquemas desta FA a apresentar CEDs com apenas um espectro. Nos Gráficos 4.5, 4.6 e 4.7, são exibidas as quantidades de CEDs com determinado número de regras existentes, em todos os esquemas de uma família, para as famílias assincronia sequencial em blocos, assincronia em blocos alternados e assincronia em blocos fixos com deslocamento, respectivamente. Observa-se que existe predominância de CEDs com apenas 1 regra nas famílias assincronia sequencial em blocos e assincronia em blocos alternados, fato observado em menor intensidade na família assincronia em blocos fixos com deslocamento, que possui o menor grau de assincronia mediano de FA entre todas. Esta propriedade, no entanto, possui uma relação menor com o grau de assincronia mediano, uma vez que a família assincronia em blocos alternados apresenta quantidade ligeiramente maior deste tipo de classe, apesar de o grau de assincronia mediano desta família ser menor do que o da família assincronia sequencial em blocos.

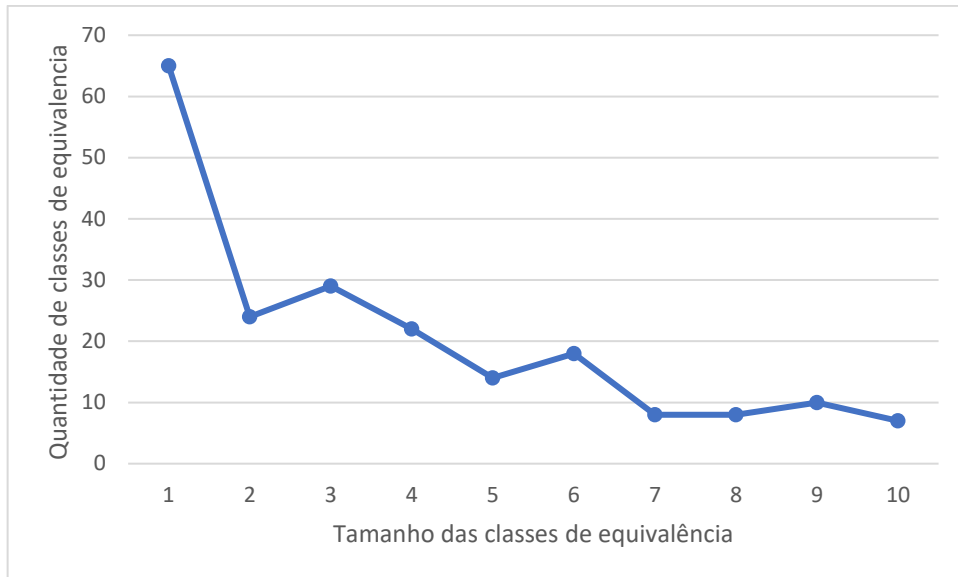


Gráfico 4.5: Histogramas das quantidades de classes de equivalência dinâmica que são compostas por determinada quantidade de espectros em todos os esquemas da família assincronia sequencial em blocos.

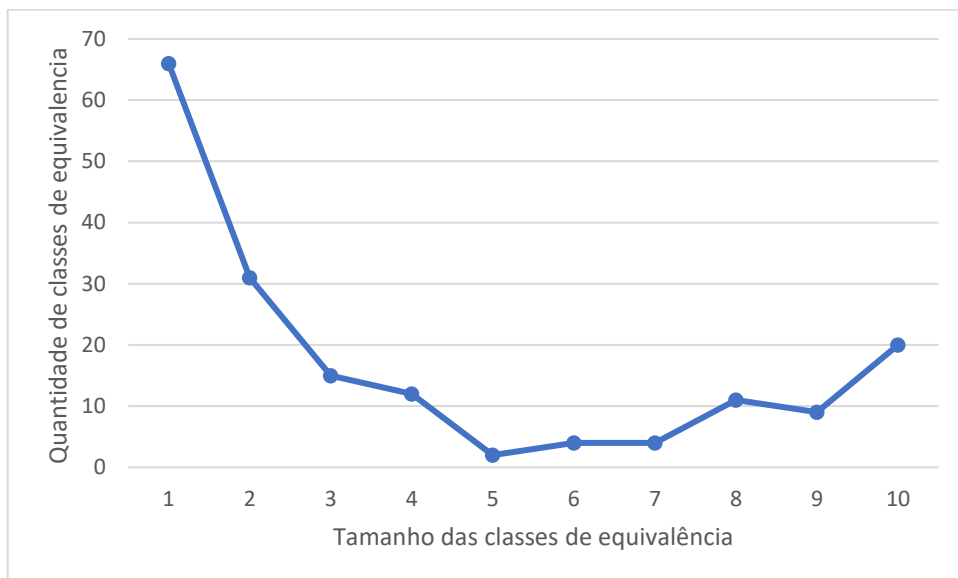


Gráfico 4.6: Histogramas das quantidades de classes de equivalência dinâmica que são compostas por determinada quantidade de espectros em todos os esquemas da família assincronia em blocos alternados.

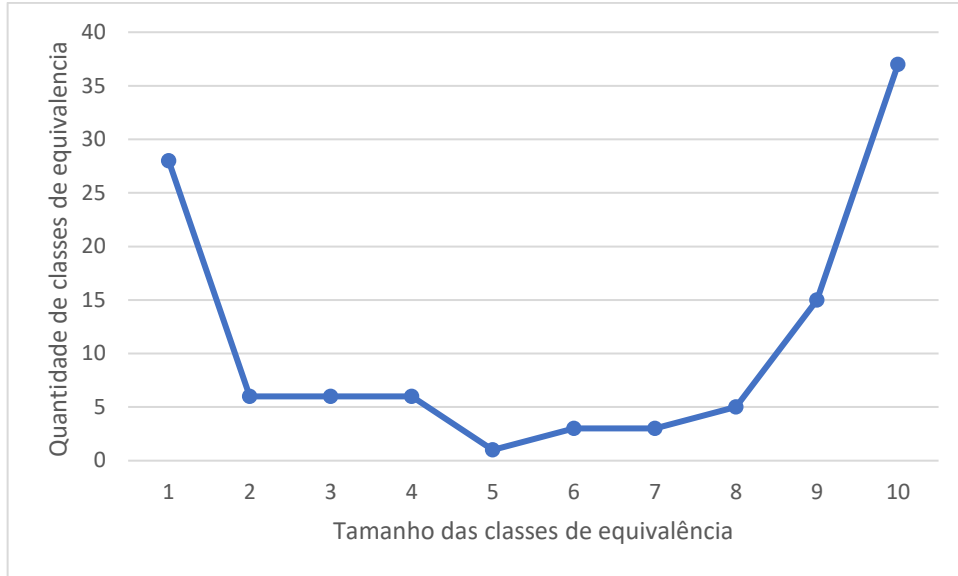


Gráfico 4.7: Histograma das quantidades de classes de equivalência dinâmica que são compostas por determinada quantidade de espectros em todos os esquemas da família assincronia em blocos fixos com deslocamento.

Nos resultados, foi possível observar que apenas as regras pertencentes à Classe I de Wolfram mantêm seu espectro constante, mesmo com a presença de diferentes EAs, o que é compreensível já que estas regras tendem a transformar todo o reticulado para um mesmo estado, e conseguem fazê-lo mesmo que as células do reticulado alterem seus estados em diferentes momentos. Nas demais classes de Wolfram, os espectros possuem comportamentos variados e observados também nas demais classes de Wolfram, principalmente nos EAs mais elevados, o que demonstra que não há correlação do espectro com a classe de Wolfram a que pertencem nos casos das classes II, III e IV.

Exibidos e descritos os resultados práticos da dissertação, no próximo capítulo apresentaremos as conclusões da pesquisa e possíveis trabalhos futuros.

5 CONCLUSÕES

Os experimentos permitiram concluir que a presença da assincronia na evolução dos ACEs, tanto em diferentes tamanhos de blocos de atualização como em diferentes ordens destes blocos, pode provocar, como esperado, alterações efetivas na formação dos espectros destes autômatos. Apesar de o fenômeno não ser absoluto, como nos espectros invariantes e em parte nos espectros de variação abrupta, há alterações presentes nos demais casos, como nos espectros de variação gradual, espectros de variação particulada e em parte nos espectros de variação abrupta.

Por este motivo, foi possível averiguar também que a presença da sincronia na evolução dos autômatos provoca alterações nas CEDs formadas pelos espectros das regras de determinado EA, modificando os espectros que as compõem, e, por conseguinte, o número de classes. Neste aspecto, foi possível constatar que, quanto maior o grau de assincronia mediano de uma FA, maior a tendência dos espectros se agruparem em CEDs distintas a cada ordem do EA. Foi possível averiguar também que, quanto maior o grau de assincronia mediano de uma FA, maior será a tendência dos EAs desta família a apresentarem CED dotada de apenas 1 regra. Todavia, o mapeamento mostrou que existem pares de regras que, embora se agrupem em maior ou menor frequência nas diferentes FAs, possuem ao menos uma co-ocorrência em todas as FA estudadas. Com este fato, pode-se concluir que estas regras possuem sempre o mesmo espectro em determinadas ordens de assincronia e, portanto, o mesmo comportamento limite nestas ordens, possivelmente no esquema de assincronia de ordem máxima, onde há maior convergência no formato dos espectros de diferentes regras.

Também foi possível perceber que a intensidade da assincronia é um fator que determina as mudanças ocorridas nos espectros, já que o aumento desta provoca maior diversidade na forma dos espectros até determinado ponto - a ordem de assincronia de blocos de tamanho 4 - após o qual o aumento da intensidade de assincronia passa a diminuir a diversidade de formas de espectros. Este fato pode ser justificado pela ideia a seguir:

Esquemas com alto grau de assincronia (aqueles nos quais os blocos de células atualizados simultaneamente são menores e atualizados de maneira sequencial) dependem fortemente do valor obtido após a atualização da primeira célula, diminuindo a diversidade dinâmica obtida ao longo da evolução temporal em relação ao caso síncrono. Já esquemas que apresentam um grau de assincronia intermediário, permitem uma propagação de informação mais rápida entre as células que o caso síncrono – assim diminuindo a diluição dessa informação ao longo da evolução temporal – ao mesmo tempo que não dependem tão fortemente da primeira atualização, justificando assim sua maior riqueza dinâmica.

Como pesquisas futuras, recomenda-se repetir os processos de análise espectral aqui presentes com outros EAs, obtendo assim mais evidências empíricas sobre as descobertas aqui efetuadas, bem como estudar o efeito de outros paradigmas de assincronia (evolução totalmente assíncrona, evolução α -assíncrona, evolução orientada a tempo, etc...) na formação dos espectros de Fourier. Apesar de os resultados do presente trabalho terem sido satisfatórios, também seria oportuno repetir os experimentos aqui realizados, e os demais sugeridos, com dados mais detalhados, como maior número de ICs (1000 ou 2000 ICs para formar cada espectro), maior número de passos (300, 400 ou mais passos) e maior reticulado (com 2048 ou mais células de comprimento), a fim de obter dados com uma precisão maior, bem como utilizar outra técnica para formular os espectros de Fourier, a qual não utilizasse uma média estatística das CI para formação dos espectros e, portanto, não deixasse de incluir propriedades relevantes presentes nas evoluções dos reticulados.

6 BIBLIOGRAFIA

- ARACENA, J.; FANCHON, E.; MONTALVA, M.; NOUAL, M. Combinatorics on update digraphs in boolean networks. *Discrete Applied Mathematics*, v. 159, p. 401-409, 2011.
- BERSINI, H.; DETOURS, V. Asynchrony Induces Stability in Cellular Automata Based Models. *Artificial Life V*, Cambridge, p. 382-387, 1994.
- DENNUNZIO, A.; FORMENTI, A.; MANZONI, L.; MAURI, G.; PORRECA, A. E. Computational Complexity of Finite Asynchronous Cellular Automata. *Theoretical Computer Science*, Amsterdam, v. 664, p. 131-143, 2017.
- ETCHEBEHERE, G. S.; DE OLIVEIRA, P. P. B. ; RUIVO, E. P. Análise Espectral de Autômatos Celulares em duas Famílias de Assincronia. *VI Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC)*, 2019. Publicação pendente.
- FATÈS, N. A guided tour of asynchronous cellular automata. *Journal of Cellular Automata*, Philadelphia, v. 9, n. 5-6, p. 387-416, 2014.
- GADNER, M. Mathematical Games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life", v. 223, p. 120-123, 1970.
- JARVIS, R. A.; PATRICK, E. A. Clustering using a similarity measure based on shared near neighbors. *IEEE Transactions on computers*, v. 100, n. 11, p. 1025-1034, 1973.
- KARI, J. Theory of cellular automata: A survey. *Theoretical Computer Science*, Amsterdam, v. 334, n. 1-3, p. 3-33, 2005.
- LI, W. Power spectra of regular languages and cellular automata. *Complex Systems*, Champaign, v. 1, n. 1, p. 107-130, 1987.
- LI, W.; PACKARD, N. The structure of the elementary cellular automata rule space. *Complex systems*, Champaign, v. 4, n. 3, p. 281-297, 1990.
- MEDEL, M. M.; PERROT, K.; DE OLIVEIRA, P. P. B.; RUIVO, E. Sensitivity to synchronism in some boolean automata networks. *23rd International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems – AUTOMATA*, Milano, v. 23, p. 69–76, 2017.
- MITCHELL, M. Computation in cellular automata: A selected review. *NonStandard Computation*, p. 95-140, 1996.
- NINAGAWA, S. Power spectral analysis of elementary cellular automata. *Complex Systems*, Champaign, v. 17, n. 4, p. 399-411, 2008.
- DE OLIVEIRA, P. P. B. CAMaT.nb - Cellular automata package for Mathematica, Software de distribuição restrita, disponibilizada pelo autor, 2018.
- DE OLIVEIRA, P. P. B.; VERARDO, M. Representing Families of Cellular Automata Rules. *The Mathematica Journal*, Champaign, v. 16, 2014. Disponível em:

<<http://www.mathematica-journal.com/2014/08/representing-families-of-cellular-automata-rules/>>. Acesso em 5 outubro 2018.

M. VERARDO; P.P.B. DE OLIVEIRA. A fully operational framework for handling cellular automata templates, *Complexity*, Article ID 6573793, 2019.

RUIVO, Eurico Luiz Prospero. *Análise espectral dos autômatos celulares elementares*. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2012.

RUIVO, E. L. P.; DE OLIVEIRA, P. P. B. A spectral portrait of the elementary cellular automata rule space. *Irreducibility and Computational Equivalence*, Berlin, v. 2, p. 211-235, 2013.

RUIVO, E. L. P.; MONTALVA-MEDEL, M.; DE OLIVEIRA, P. P. B.; PERROT, K. Characterisation of the elementary cellular automata in terms of their maximum sensitivity to all possible asynchronous updates. *Chaos, Solitons & Fractals*, Amsterdam, v. 113, p. 209-220, 2018.

SCHONFISCH, B.; DE ROOS, A. Synchronous and asynchronous updating in cellular automata. *BioSystems*, Amsterdam, v. 51, n. 3, p. 123-143, 1999.

WOLFRAM, Stephen. *A new kind of science*. Champaign: Wolfram Media, 2002.

WOLFRAM, Stephen. *Cellular automata and complexity*. Collected Papers. New York: Basic Books, 1994.

WOLFRAM, S. Computation theory of cellular automata. *Communications in mathematical physics*, v. 96, n. 1, p. 15-57, 1984.

WOLFRAM MATHWORLD. *Rule 90*. 2002. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/Rule90.html>>. Acesso em: 23 março 2018.

TAKADA, Y.; ISOKAWA, T.; PEPER F.; MATSUI, N. Construction Universality in Purely Asynchronous Cellular Automata. *Journal of Computer and System Sciences*, Amsterdam, v. 72, n. 8, p. 1368–1385, 2006.

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES – OEIS. *Fubini Numbers: Number of Preferential Arrangements of n Labeled Elements*. New Jersey, 2012. Disponível em: <<https://oeis.org/A000670>>. Acesso em: 18 Outubro 2018.