

SINGULARITY CROSSING PHENOMENA IN NONLINEAR ELECTRICAL CIRCUITS

Diana Kleiman^b, María Etchechoury[†] and Paul Puleston^{b,†}

^bDepartamento De Ciencias Básicas - Fac. De Ingeniería - UNLP, diana.kleiman@ing.unlp.edu.ar

[†]Departamento De Matemática - Fac. De Ciencias Exactas - UNLP, marila.mate@gmail.com

^{b,†}Leici - Fac. De Ingeniera - UNLP y Conicet, puleston@ing.unlp.edu.ar

Abstract: In a nonlinear system a *singular crossing point* is a singular point such that there is at least one solution crossing through it. In this article we study a family of nonlinear electrical circuits, that can be represented by nonlinear Implicit Differential Equations -IDEs-. We set conditions that ensure the existence of singular crossing points in these circuits. There are different approaches to this problem for a given general IDE, but the results we get for this family of circuits allow us to find these points in an extremely simple way. The results are illustrated in a concrete example.

Keywords: *implicit differential equation, nonlinear circuit, singularity, singular crossing point.*

1 INTRODUCTION

Implicit Differential Equations appear frequently modelling different physical systems in many areas. Many works about them have been inspired by applications in *circuit theory* [1], [2]. Certain initial value problems concerning the existence and extension of solutions for some singular points are of interest. In particular we are interested in solutions crossing singular points, that we call *singularity crossing solutions* and *singular crossing points*, respectively. In the literature there are some results that ensure the existence of singular crossing points [3]. In this article we obtain a new method to straightforwardly detect the existence of these kind of singularities in a family of nonlinear electrical circuits. We illustrate this method in a concrete example.

2 PRELIMINARIES

Quasilinear Implicit Differential Equation. We work, without loss of generality, with Quasilinear IDEs, which allow us to use some known results, with certain restrictions.

Let a real analytic connected m - dimension manifold M , $a(x) : M \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ and $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ analytic maps, with $\det a(x)$ not identically null on M . A *Quasilinear Implicit Differential Equation* -QLIDE- can be represented as

$$a(x)\dot{x} = f(x). \quad (1)$$

Solution curve of a QLIDE. A curve $x : I \rightarrow M$, with I a real interval, $I = (t_0, t_1)$, $I = (t_0, t_1]$, $I = [t_0, t_1)$ or $I = [t_0, t_1]$, is a solution of (1) if $x(t)$ is a continuous function in I , differentiable in the interior of I , and such that $(x(t), \dot{x}(t))$ satisfies (1), for all t in the interior of I . Moreover, if $t_0 \in I$ then $(x(t_0), \dot{x}(t_0^+))$ satisfies (1) and if $t_1 \in I$ then $(x(t_1), \dot{x}(t_1^-))$ satisfies (1); where $\dot{x}(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$

and $\dot{x}(t_1^-) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1}$.

Singular set. For a given QLIDE (1), the *singular set* is $M_s = \{x \in M : \det a(x) = 0\}$ and the points in M_s are called *singular points*. We call $M_r = M - M_s$ the *regular set* corresponding to (1).

Singular Crossing Points. For a given $x_0 \in M$, a solution curve $x(t)$ of (1) is a *singularity crossing solution* through x_0 if it is defined in $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$, for some $\epsilon > 0$, and satisfies:

- $x(t_0) = x_0 \in M_s$,
- $x(t) \in M_r$, for all $t \neq t_0$.

In this case we call x_0 a *singular crossing point*.

In the analysis of the existence of singular crossing points in (1), we work with the vector field $g(x) = (\text{adj } a(x))^t f(x)$ and apply the following results [4], [5].

Lemma 1 *If x_0 is a singular crossing point of (1), then $g(x_0) = 0$.*

Theorem 1 *Let $x_0 \in M_s$ that verifies:*

- (a) $g(x_0) = 0$
- (b) $\nabla h(x_0) \neq 0$
- (c) $Dg(x_0)$ has a simple real eigenvalue $\lambda < 0$
- (d) the others eigenvalues of $Dg(x_0)$ have real part great than λ
- (e) the eigenvector corresponding to λ is not tangent to M_s ,

then x_0 is a singular crossing point of (1).

Theorem 2 *Let $x_0 \in M_s$ such that $g(x_0) = 0$ with all the eigenvalues of $Dg(x_0)$ with the same sign. We consider an eigenvalue λ of $Dg(x_0)$ an a corresponding eigenvector v_λ . If $\lambda \neq 0$ and v_λ is not tangent to M_s , then x_0 is a singular crossing point of (1).*

3 SINGULAR CROSSING POINTS IN A PARALLEL NONLINEAR CIRCUIT

In this section we find sufficient conditions for the existence of singular crossing points in a family of parallel electrical circuits. We consider the generic parallel circuit (see Fig.1) with a nonlinear capacitor C , a nonlinear inductor L and a nonlinear memoryless two-terminal element NME [6], such as nonlinear resistor, diode, tunnel diode, etc. Note that if any of the components of the parallel circuit is linear, it can be treated as a particular case of a comprehensive nonlinear family. The corresponding currents are I_{nme}, I_c

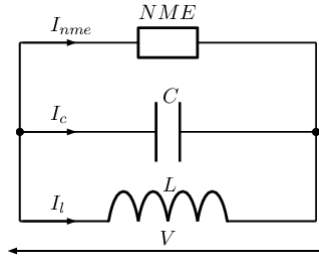


Figure 1: Parallel nonlinear circuit.

and I_l and the common voltage is V . Nonlinear relations are assumed between the capacitor charge and V ($Q = \gamma_c(V)$) and, the inductor flow and I_l ($\phi = \gamma_l(I_l)$). C and L are real analytic nonlinear functions defined as $C(V) = \frac{d\gamma_c}{dV}$ and $L(I_l) = \frac{d\gamma_l}{dI_l}$, with $C : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ and $L : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. In the branch of the NME, I_{nme} and V are related by means of the equation $V = \theta(I_{nme})$, with $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an analytic real function no constant and nonlinear. From the Kirchoff Current Law we get $I_{nme} + I_c + I_l = 0$. In addition, from electromagnetic relations, $I_c = C(V)\dot{V}$ and $V = L(I_l)\dot{I}_l$. Calling $x_1 = I_{nme}$, $x_2 = I_c$, $x_3 = I_l$, $x_4 = V$ and $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, the QLIDE that models the circuit is equivalent to a reduced one [7],

$$\tilde{a}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x), \quad (2)$$

where $x = (x_1, x_2) \in M = \mathbb{R}^2$ and

$$\tilde{a}(x) = \begin{pmatrix} -L(-x_1 - x_2) & -L(-x_1 - x_2) \\ C(\theta(x_1))\frac{d\theta(x_1)}{dx_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} \theta(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

The singular set is $M_s = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0 \right\}$. As we are looking for singular crossing points, the case $M_s = \emptyset$ is not considered. If $M_s \neq \emptyset$, as $\frac{d\theta(x_1)}{dx_1}$ is not identically null, $M_r \neq \emptyset$. Then we are interested in solutions on M_r crossing singular points, i.e singularity crossing solutions.

Note 1 If $(x_1, x_2) \in M_s$ satisfies $\theta(x_1) = 0$ and $x_2 = 0$, then (x_1, x_2) is a singular equilibrium point of (2). So we consider from now only those points $(x_1, x_2) \in M_s$ such that $\theta(x_1)$ and x_2 are not simultaneously nulls.

In order to use the results set in the previous section we introduce:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x) &= \det \tilde{a}(x_1, x_2) = C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} L(-x_1 - x_2), \\ \tilde{g}(x) &= (\text{adj } \tilde{a}(x_1, x_2))^t \tilde{f}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 L(-x_1 - x_2) \\ - \left[C(\theta(x_1)) \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} \theta(x_1) + x_2 L(-x_1 - x_2) \right] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In the main result of this section we get a sufficient condition for a singularity to be a singular crossing point of (2).

Theorem 3 We consider the system (2) and $x = (x_1, x_2) \in M_s$ with $\tilde{g}(x) = 0$. If $\frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \neq 0$ and all the eigenvalues of $D\tilde{g}(x)$ are in \mathbb{R} , then x is a singular crossing point of (2).

Proof. We consider $x = (x_1, x_2) \in M_s$ with $\tilde{g}(x) = 0$, then

$$D\tilde{g}(x) = \begin{pmatrix} 0 & L(-x_1) \\ -C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \theta(x_1) & -L(-x_1) \end{pmatrix}$$

with eigenvalues and eigenvectors

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[-L(-x_1) \pm \sqrt{L^2(-x_1) - 4L(-x_1)C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \theta(x_1)} \right], \\ v_{\lambda_{1,2}} &= \left(1 \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{L^2(-x_1) - 4L(-x_1)C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \theta(x_1)}}{2L(-x_1)} \right)^t. \end{aligned}$$

By hypothesis $\frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \neq 0$ and the eigenvalues are in \mathbb{R} . Moreover, as $\tilde{g}(x) = 0$, then $x_2 = 0$ and, from Note 1, $\theta(x_1) \neq 0$. From the expression of the eigenvalues of $D\tilde{g}(x)$ we conclude that $\lambda_1 \neq 0$ and $\lambda_2 < 0$. We analyze separately the cases of different eigenvalues (with equal or different signs) and equal eigenvalues.

1. $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. By simple calculations we can verify the hypothesis of Theorem 1: a) $\tilde{g}(x_1, x_2) = (0, 0)$ by hypothesis; b) $\nabla \tilde{h}(x_1, x_2) = (L(-x_1)C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \theta(x_1) \quad 0) \neq (0 \quad 0)$; c) $D\tilde{g}(x_1, x_2)$ has a simple real eigenvalue $\lambda_2 < 0$; d) the other eigenvalue has real part great than λ_2 (in this case is a real eigenvalue $\lambda_1 > 0$); e) $\nabla \tilde{h}(x_1, x_2) \cdot v_{\lambda_2} = L(-x_1)C(\theta(x_1)) \frac{d^2\theta(x_1)}{dx_1^2} \theta(x_1) \neq 0$, i.e. the eigenvector corresponding to λ_2 is not tangent to M_s . Then, (x_1, x_2) is a singular crossing point of (2).
2. $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. In this case we use Theorem 2: $\lambda_2 \neq 0$ and the corresponding eigenvector v_{λ_2} is not tangent to M_s because $\nabla \tilde{h}(x_1, x_2) \cdot v_{\lambda_2} \neq 0$, then (x_1, x_2) is a singular crossing point of (2).
3. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. In this case $\lambda = -\frac{L(-x_1)}{2} \neq 0$, its eigenvector $v_\lambda = (1 \quad -\frac{1}{2})^t$ is not tangent to M_s in x because $\nabla \tilde{h}(x) \cdot v_\lambda \neq 0$, then by Theorem 2 (x_1, x_2) is a singular crossing point of (2).

□

Note 2 In the first case there are two crossing solutions tangent to the lines with directions v_{λ_1} and v_{λ_2} , respectively. In the second one, there is one crossing solution tangent to the line with direction v_{λ_2} and infinite crossing solutions all tangent to the line with direction v_{λ_1} . Finally, in the third case there are infinite crossing solutions all tangent to the line with direction v_{λ} . [8]

Example 1 We study a particular case in the family of parallel circuits by considering: $x_4 = \theta(x_1) = x_1^3 - x_1 + \sqrt{3}$ and, for simplicity sake, constants $C = 3$ and $L = 56$. From $\frac{\partial \theta(x_1)}{\partial x_1} = 3x_1^2 - 1$, for all $x_1 \in \mathbb{R}$, the set of singularities satisfying $\tilde{g}(x_0) = 0$ is

$$\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{d\theta(x_1)}{dx_1} = 0, x_2 = 0 \right\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0 \right) \right\}.$$

As $\frac{d^2\theta\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{dx_1^2} \neq 0$ and for $PC_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ there is only one eigenvalue $\lambda = -28$, by Theorem 3 PC_1 is a singular crossing point of (2); moreover, there are infinite crossing solutions (see Fig.2). Finally, as $\frac{d^2\theta\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{dx_1^2} \neq 0$ and for $PC_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ the corresponding eigenvalues are $\lambda_{1,2} = -28 \pm 6\sqrt{56}$, real and with different signs, there are exactly two crossing solutions.

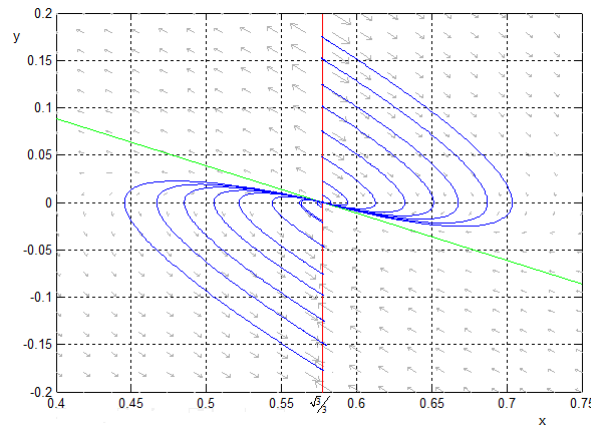


Figure 2: Crossing solutions by PC_1 .

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by Grants X674 and 11/I217 Universidad Nacional de La Plata, ANPCyT PICT 2015 – 2257 and CONICET PIP 112 – 2015 – 0100496CO, ARGENTINA.

REFERENCES

- [1] CHUA, L.O. AND DENG, A.C. *Impasse Points I, Numerical Aspects*. Int. J. Circ. Theory Appl. 17 (1989), pp. 213-235.
- [2] RIAZA R. *Differential-Algebraic Systems. Analytical Aspects and Circuit Applications*. World Scientific. (2008).
- [3] MARSZALEK, W., AMDEBERHAN, T. AND RIAZA, R. *Singularity Crossing Phenomena in DAEs: A Two-Phase Fluid Flow Application Case Study*. Comp. and Math. with Appl. J. Math. Anal. and Appl. 49 (2005), pp. 303-319.
- [4] ZORBA, G. *Existencia de Soluciones de Ecuaciones Diferenciales Implícitas*. PhD Thesis, Depto de Matemática, Fac. de Cs. Exactas, UNLP. (2013)
- [5] RIAZA R. AND ZUFIRIA P. *Weak Singularities and the Continuous Newton Method*. J. Math. Anal. and Appl. 236 (1999), pp. 438-462.
- [6] RABIER P.J. AND RHEINOLDT W.C. *On impasse points of quasilinear differential-algebraic equations*. J. of Math Anal. and Appl. 181 pp. 429-454.
- [7] CENDRA H. AND ETCHECHOURY M. *Desingularization of implicit analytic differential equations*. J. Phys. A:Mat. Gen., vol. 39 (2006), pp. 10975-11001.
- [8] KHALIL H. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall Inc. (1996).

ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO SINGULAR EN REDES ELÉCTRICAS NO LINEALES

Etchechoury, María[†] y González, Cecilia[‡]

[†]Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas. UNLP, Argentina, marila.mate@gmail.com

[‡]Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ingeniería. UNLP, Argentina, ceciliazgonzalez@gmail.com

Resumen: En este trabajo analizamos la estabilidad del equilibrio singular para una clase de circuitos eléctricos no lineales que se modelizan por ecuaciones diferenciales algebraicas: *los circuitos RLC*. El análisis consta de dos partes: por un lado, se usan resultados conocidos que permiten determinar la estabilidad del equilibrio singular, y por el otro, se utiliza una técnica de reducción, que nos permite modelar el sistema por una ecuación diferencial ordinaria sobre un espacio de menor dimensión, de este modo el estudio de la estabilidad puede hacerse a partir de resultados clásicos de sistemas no-lineales. Además, se obtienen conclusiones sobre la dinámica alrededor del equilibrio, es decir, más allá de establecer la estabilidad asintótica, es posible determinar la caracterización de las órbitas en las cercanías del mismo.

Palabras clave: *ecuaciones diferenciales algebraicas, estabilidad, circuitos eléctricos, equilibrio singular.*

2000 AMS Subject Classification: 34D20 - 37C75

1. INTRODUCCIÓN

Una *ecuación diferencial algebraica cuasilineal* -EDAC- tiene la forma,

$$A(x)\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

donde $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$ y $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $\text{rg}A(x) < n$ se llaman *puntos singulares* de (1) y el *conjunto singular* M_s es el conjunto de todos los puntos singulares, es decir, $M_s = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{rg}A(x) < n\}$. Se llama *equilibrio singular* de la EDAC a un punto $x^* \in M_s$ que además verifica $f(x^*) = 0$.

Para estudiar la estabilidad del equilibrio singular x^* utilizaremos resultados ya conocidos [2], que se basan fundamentalmente en el análisis del espectro de (1), que se define como $\sigma(A, -J) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda A - J) = 0\}$, siendo $A = A(x^*)$ y $J = Df(x^*)$, el Jacobiano del campo f evaluado en x^* . Por otro lado, analizaremos la estabilidad del equilibrio basándonos en una técnica de reducción, inspirada en [1], que nos permite describir el sistema por una ecuación diferencial ordinaria sobre un espacio de menor dimensión, más precisamente de dimensión dos.

2. ECUACIONES DIFERENCIALES ALGEBRAICAS REGULARES

Una EDAC del tipo (1) se dice *localmente regular* en un punto $x^* \in M_s$ si el *índice diferencial* está definido y es constante en un entorno de ese punto, siendo el índice diferencial de una EDA el mínimo número de diferenciaciones que se necesitan para reducir la EDAC a una Ecuación Diferencial Ordinaria equivalente, definida sobre una subvariedad de \mathbb{R}^n , donde puede garantizarse existencia de solución.

En esta sección enunciamos algunos resultados sobre la estabilidad del equilibrio en EDACs localmente regulares, basados en la teoría de matrices pencil y usando la forma canónica de Kronecker y métodos de proyectores para determinar el índice [2], [3].

2.1. PRELIMINARES

- ◊ Una **matriz pencil** $\{A, B\}$ es una familia de un parámetro: $\{A, B\} = \{\det(\lambda A + B) : \lambda \in \mathbb{C}\}$.
- ◊ El **espectro** de la matriz pencil es el conjunto: $\sigma(A, B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda A + B) = 0\}$.
- ◊ Una matriz pencil es **regular** cuando el polinomio en λ , $\det(\lambda A + B)$, de grado $k \leq n$, no es idénticamente nulo o cuando el espectro es finito.
- ◊ Una matriz cuadrada A es **nilpotente** si existe un $\nu \in \mathbb{N}$, tal que A^ν es la matriz nula, siendo ν el menor

natural para el que se cumple esta propiedad, llamado índice de nilpotencia. El índice ν es el **índice de Kronecker** de la matriz pencil $\{A, B\}$.

Proposición 1 Si $\{A, B\}$ es una matriz pencil regular, entonces existen matrices no singulares $E, F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que: $EAF = \begin{pmatrix} I & O \\ O & N \end{pmatrix}$, $EBF = \begin{pmatrix} W & O \\ O & I \end{pmatrix}$, con $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $N \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, para algún $m < n$, siendo N una matriz nilpotente de índice $\nu < n - m$.

Proyectores: las técnicas de proyectores se aplican al estudio de la estabilidad de EDAs lineales de la forma $A\dot{x} = Bx$, y permiten conocer el índice de Kronecker de la matriz pencil $\{A, B\}$.

En este caso hace falta tener en cuenta que la variedad solución \mathcal{M} de la EDA debe ser un subconjunto de $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx \in \text{Im}A\}$. En la proposición que se enuncia a continuación se demuestra que para el caso de índice 1 los conjuntos \mathcal{M} y \mathcal{D} coinciden.

Proposición 2 Sea Q algún proyector sobre $\mathcal{N} = \text{Ker}A$, es decir, un operador lineal que satisface $Q^2 = Q$ y $\text{Im}Q = \mathcal{N}$. Son equivalentes:

1. La matriz pencil $\{A, B\}$ tiene índice de Kronecker 1.
2. La matriz $A_1 = A + BQ$ es no singular.
3. $\mathbb{R}^n = \mathcal{N} \oplus \mathcal{D}$.
4. $\mathcal{M} = \mathcal{D}$.

Teorema 1 (Estabilidad del equilibrio en EDACs) Sea una EDA del tipo (1) y x^* un punto de equilibrio singular de (1). Llamamos $A = A(x^*)$ y $J = Df(x^*)$ y supongamos que $A(x)$ tiene rango constante en algún entorno de x^* . Si $\{A, -J\}$ es una matriz pencil regular con índice de Kronecker 1, con $\sigma(A, -J) \subset \mathbb{C}^-$, entonces x^* es equilibrio asintóticamente estable.

Técnica de Reducción. Dada una variedad analítica real M y un sistema del tipo (1), donde ahora A y f toman valores en M , puede demostrarse que (1) es equivalente a otra EDAC reducida que simbolizamos $\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x)$, y que resulta de rango localmente constante sobre una variedad analítica \tilde{N} . Además, existe una proyección de \tilde{N} sobre M tal que las soluciones de la EDAC reducida se proyectan como soluciones de la EDAC original. Para construir la variedad \tilde{N} se utiliza una técnica de reducción, llamada *desingularización* [1], que básicamente permite obtener una EDA equivalente, definida en general sobre una variedad de menor dimensión que M , y donde se puede garantizar existencia de solución.

3. CONDICIONES PARA LA ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Los resultados sobre estabilidad enunciados antes pueden aplicarse a distintos modelos de redes eléctricas que se representan por EDACs.

Consideramos un circuito RLC no lineal que consiste de una resistencia, un capacitor y un inductor en paralelo como en la Figura 1.

Las ecuaciones que gobiernan la evolución del voltaje y la corriente son del tipo (1), con

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(x_4) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ \psi(x_1, x_4) \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Se puede aplicar el Teorema 1 para determinar la estabilidad del equilibrio singular. En este caso los equilibrios son de la forma $x^* = (x_1^*, 0, -x_1^*, 0)$, con $\psi(x_1^*, 0) = 0$, que resultan singulares pues $\text{rg}A(x) = 2$, para todo x , ya que $L(x_3)$ y $C(x_4)$ son funciones estrictamente positivas. A partir de la matriz pencil

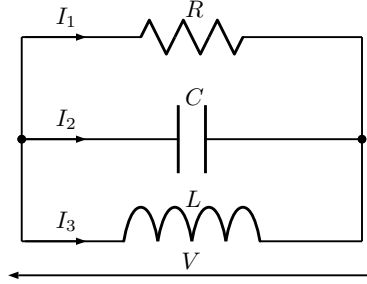


Figura 1: Circuito RLC no lineal

$\{A, -J\} = \{A(x^*), -Df(x^*)\}$, se tiene

$$\lambda A - J = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{\partial \psi(x_1^*, 0)}{\partial x_1} & 0 & 0 & -\frac{\partial \psi(x_1^*, 0)}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & \lambda L(-x_1^*) & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda C(0) \end{pmatrix}.$$

Aplicando la Proposición 2 se demuestra que si $\frac{\partial \psi(x_1^*, 0)}{\partial x_1} \neq 0$, la matriz pencil $\{A, -J\}$ tiene índice de Kronecker 1, y podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 3 *Los equilibrios singulares de la EDA cuasilineal correspondiente al circuito RLC son de la forma $x^* = (x_1^*, 0, -x_1^*, 0)$, con $\psi(x_1^*, 0) = 0$. Además, si $\frac{\partial \psi(x_1^*, 0)}{\partial x_4}$ y $\frac{\partial \psi(x_1^*, 0)}{\partial x_1}$ son ambos no nulos y de signo contrario, entonces x^* es equilibrio asintóticamente estable.*

Aplicación de la técnica de reducción. Mostraremos que a partir de la técnica de reducción la EDAC que modeliza al circuito resulta equivalente a una EDO de orden 2, lo que nos permite determinar si el equilibrio x^* es un nodo o un foco. En este caso la variedad analítica real M está definida por las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 ; \psi(x_1, x_4) = 0.$$

Si $\psi(x_1, x_4)$ es tal que $\frac{\partial \psi(x_1, x_4)}{\partial x_4} \neq 0$ en un entorno del punto de equilibrio, aplicando el Teorema de la Función Implícita se tiene que existe una función φ continuamente diferenciable, tal que $x_4 = \varphi(x_1)$. Luego, el sistema original se reduce a otro del tipo

$$\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x), \quad (2)$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}(x) = \begin{pmatrix} -L(-x_1 - x_2) & -L(-x_1 - x_2) \\ C(\varphi(x_1))\varphi'(x_1) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x_1) \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Si $\varphi(x_1^*) = 0$ y $\varphi'(x_1^*) \neq 0$, $x^* = (x_1^*, 0)$ es un equilibrio regular del sistema reducido, pues en un entorno de x^* la matriz $\tilde{A}(x)$ resulta no singular. Luego, localmente alrededor de x^* las trayectorias del sistema no lineal

$$\dot{x} = \tilde{A}^{-1}(x)\tilde{f}(x)$$

se corresponden con las del sistema lineal

$$\dot{x} = J(x^*)x,$$

donde $J(x)$ es la matriz Jacobiana de $\tilde{A}^{-1}(x)\tilde{f}(x)$, Teorema de Hartman-Grobman [4].

Ejemplo: Considerando $\psi(x_1, x_4) = x_4 - (x_1^3 - 9x_1^2 + 24x_1)$, el equilibrio singular es $x^* = (0, 0, 0, 0)$. Aplicando la Proposición 3, x^* es asintóticamente estable para la EDAC que modeliza el circuito RLC,

puesto que $\frac{\partial\psi(0,0)}{\partial x_4} = 1$ y $\frac{\partial\psi(0,0)}{\partial x_1} = -24$.

Usando la técnica de reducción obtenemos el sistema de orden dos equivalente:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L(-x_1 - x_2) & -L(-x_1 - x_2)^{-1} \\ C(x_1^3 - 9x_1^2 + 24x_1) \cdot (3x_1^2 - 18x_1 + 24) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 - 9x_1^2 + 24x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

cuya linealización alrededor del equilibrio $x_0^* = (0, 0)$ es

$$\dot{x} = J(x_0^*)x,$$

donde

$$J(x_0^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{24C(0)} \\ -\frac{24}{L(0)} & -\frac{1}{24C(0)} \end{pmatrix}.$$

Mediante cálculos sencillos podemos concluir que si $L(0) - 4 \cdot 24^2 C(0) \geq 0$ el equilibrio es un nodo (Fig. 2), mientras que si $L(0) - 4 \cdot 24^2 C(0) < 0$ el equilibrio es un foco (Fig. 3).

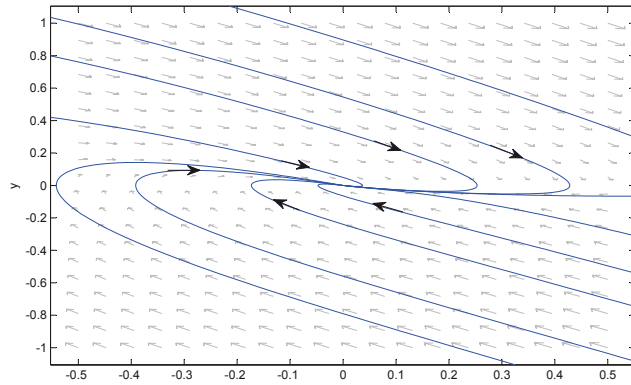


Figura 2

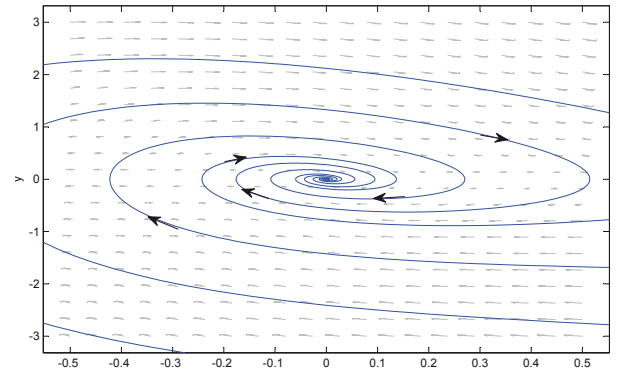


Figura 3

REFERENCIAS

- [1] H. CENDRA, ETCHECHOURY, M., *Desingularization of implicit analytic differential equations*, J. Phys. A: Math. Gen.39 (2006), pp. 10975-11001.
- [2] R. RIAZA, *Stability Issues in Regular and Noncritical Singular DAEs*, Acta Applicandae Mathematicae 73 (2002), pp. 301-336.
- [3] R. RIAZA, *Differential-Algebraic Systems. Analytical Aspects and circuit applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- [4] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer. 1991.