

# Representación y razonamiento con bases de conocimiento probabilísticas

Natalia Abad Santos<sup>†</sup> Gerardo I. Simari<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> Inst. de Cs. e Ing. de la Computación (Universidad Nacional del Sur-CONICET)  
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina  
[gis@cs.uns.edu.ar](mailto:gis@cs.uns.edu.ar)

<sup>‡</sup>Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur  
Av. Alem 1253, (8000) Bahía Blanca, Argentina  
[nasantos@uns.edu.ar](mailto:nasantos@uns.edu.ar)

## Resumen

Esta línea de investigación busca realizar un relevamiento lo más abarcativo posible de los formalismos desarrollados para la representación de conocimiento probabilístico, y sus algoritmos de razonamiento asociados. El principal desafío de este trabajo – y por ende la novedad y utilidad del mismo – yace en la necesidad de reconciliar desarrollos y estudios realizados en áreas diferentes, tales como bases de datos, representación de conocimiento y razonamiento, machine learning, y otras en las que se desarrollan sistemas aplicados específicos.

**Palabras clave:** Representación de conocimiento y razonamiento, Razonamiento bajo incertidumbre probabilística, Bases de datos, Lenguajes de ontología.

## 1. Contexto

La presente línea de investigación se encuentra inserta en el marco del proyecto PRH-2014-0007 “*Respuesta de consultas a bases de conocimiento sociales con incertidumbre utilizando las preferencias de los usuarios*”, coordinado por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica, Ministerio de Ciencias, Tecnología e Innovación Productiva, y llevado a cabo dentro del Departamento de Ciencias e Ingeniería de la Computación de la Universidad Nacional del Sur.

## 2. Introducción

El razonamiento bajo incertidumbre es una parte central de nuestras vidas como agentes razonadores. La incertidumbre puede surgir de varios factores: vivimos en un mundo que cambia constantemente, con información frecuentemente contradictoria o incompleta, y que también contiene elementos inherentemente inciertos como el clima, el comportamiento de los demás agentes, o de sistemas complejos como la economía. Este tipo de razonamiento es entonces central para la Inteligencia Artifi-

cial, y su desarrollo y estudio adecuado es esencial para el avance de la disciplina.

## Antecedentes

La *lógica probabilística*, también conocida como *lógica de probabilidad*, tiene una larga historia que se remonta a la época de Leibniz (fines del siglo 17, principios del siglo 18). En su artículo de 1984 [13], Hailperin relata esta historia con cierto detalle, y también releva el trabajo de muchos lógicos y matemáticos involucrados en el desarrollo de lógicas de probabilidad que condujeron a los formalismos de hoy en día.

**De Leibniz a Boole.** Tal y como se afirmó en [13], Leibniz ya visualizaba una “nueva clase de lógica” que involucraría grados de probabilidad. Como el nacimiento de la teoría de probabilidad ocurrió durante su vida, esta propuesta no fue clara, pero fue claro que visionaba un medio para estimar la probabilidad de los valores de verdad, y una teoría de prueba que sólo llevó a la probabilidad en lugar de a la certeza. No fue hasta el siglo 19 que la lógica moderna fue desarrollada y fue Boole [3] quien combinó por primera vez la lógica de “no”, “y” y “o” con la teoría de probabilidad. Hubo algunas restricciones (quizás innecesarias) en el formalismo propuesto, ya que el conectivo “o” fue interpretado como excluyente (y entonces las probabilidades de las disyunciones eran el resultado de sumar las probabilidades de sus componentes), y todos los eventos representados por proposiciones eran supuestos independientes (y entonces las probabilidades de las conjunciones eran el producto de las probabilidades de sus componentes). Este fue ciertamente el primer progreso en lógica por probabilística. Algún tiempo después en el siglo 19, C.S. Peirce también mostró gran interés en este proyecto, pero su tratado de *inferencia probable* [30] en realidad no hace un tratamiento formal de este tipo inferencias. Las lógicas multi-valuadas fueron desarrolladas en la década de 1920, y la probabilidad fue asociada naturalmente con este nuevo formalismo. Reichenbach fue uno de los más distinguidos partidarios de esta asociación [31]; Tarski, por otro

lado, se opuso a la extensión de lógicas multivaluadas incorporando probabilidad, y también manifestó que la lógica probabilística de Reichenbach no era realmente una lógica multivaluada sino un caso especial de lógica bivaluada [39].

**Avances modernos.** Hailperin [13] desarrolló una lógica probabilística en el nivel proposicional que generaliza levemente la idea de tabla de verdad. La noción de probabilidad es parte de la semántica, y, de esta manera, el significado de la probabilidad juega el mismo rol que la verdad en la lógica clásica. Esta lógica no está dada sintácticamente, sino semánticamente a través de la definición de *consecuencia lógica* usando la noción de *modelo probabilístico*. En la misma dirección (y publicado con sólo dos años de diferencia), Nilsson [29] propuso una generalización semántica de la lógica en la cual los valores de verdad de las sentencias son valores probabilísticos. La generalización de Nilsson se aplica a cualquier sistema lógico para el cual la consistencia de un conjunto finito de sentencias pueda ser establecida. La semántica de esta lógica probabilística asigna distribuciones de probabilidad sobre el conjunto de mundos posibles (es decir, subconjuntos de las bases de Herbrand). Este artículo fue pionero en el desarrollo de lógicas probabilísticas en varios sentidos. Primero, propuso una interpretación geométrica para el conjunto de restricciones lineales inducido por el conjunto de sentencias y sus anotaciones probabilísticas. Esta interpretación claramente ilustra los métodos propuestos por Nilsson para calcular soluciones al problema intratable de obtener distribuciones de probabilidad que satisfagan las restricciones. Uno de dichos métodos para la inferencia probabilística consiste en aproximar el vector de variables asociado con la fórmula de consulta mediante una combinación lineal de las filas de la matriz que contiene los coeficientes de los mundos posibles, dependiendo de las relaciones lógicas entre las fórmulas en el conjunto de entrada y la consulta. El otro método propuesto por Nilsson consiste en calcular la distribución que tiene la *máxima entropía*; este enfoque fue adoptado más tarde por otros para su aplicación en la programación en lógica probabilística, como discutiremos más adelante.

Durante las últimas dos décadas del siglo 20 se continuó con el desarrollo de muchos trabajos en esta dirección. Halpern [14] considera dos formas de darle una semántica a la lógica probabilística de primer orden. La primera es adecuada para “conocimiento estadístico” o “escenarios de azar”, y asume la existencia de un mundo donde las afirmaciones acerca de individuos pueden ser verdaderas o falsas; de esta manera, no son representables los *grados de creencia*. El ejemplo usado por Halpern para ilustrar esta semántica es la frase “la probabilidad de que un pájaro elegido aleatoriamente vuele es mayor que 0,9”. El otro tipo de semántica asigna probabilidades a los mundos posibles, y, por lo tanto, no están bien definidos los escenarios de azar, y esto es más apropiado para grados de creencia. En relación con el ejemplo previo, un ejemplo de esta semántica es la frase “la probabilidad de que Tweety (un pájaro en particular) vuele

es mayor que 0,9”. Halpern prueba que ambos enfoques pueden ser combinados y aborda el problema de proveer axiomas sanos y completos para caracterizar el razonamiento probabilístico en los distintos tipos de escenario. Aunque hay resultados previos de complejidad [1] que muestran que no es posible una axiomatización *completa*, se establecen axiomas sanos para ambas semánticas que son suficientemente ricos como para realizar razonamiento probabilístico interesante. Se extrae además un paralelo entre esta situación y el resultado de incompletitud de Gödel para la axiomatización de la aritmética y los axiomas sanos (pero no completos) de Peano.

El trabajo de Jaumard et al. [16] es muy interesante ya que es posiblemente el primero en informar sobre implementaciones de la lógica probabilística. Los autores consideran extensiones de la lógica probabilística de Nilsson que involucran intervalos de valores de probabilidad, probabilidades condicionadas y un nuevo problema que implica el cálculo de mínimas modificaciones de anotaciones probabilísticas para restablecer la satisfacibilidad de un conjunto de sentencias. Este trabajo se centra en una propuesta basada en *generación de columnas* (*column generation*, en inglés) que permita resolver exactamente todas estas extensiones. La generación de columnas [11, 5] es una técnica diseñada para resolver eficientemente programas lineales con un gran número de variables dejándolas implícitas. Utiliza la teoría de la dualidad asignando restricciones a las variables y viceversa, y extiende el método revisado del símplice para determinar la columna entera resolviendo un subproblema auxiliar (también llamado el *oráculo*), o el *generador de columnas*. Encontrar una columna de este tipo enumerando todas las posibilidades es intratable, y este subproblema depende del tipo de problema considerado, pero es usualmente uno de programación combinatoria. Resolver el subproblema es por lo general NP-hard; sin embargo, no es necesario resolverlo exactamente en cada iteración, siempre y cuando se encuentre un costo reducido negativo. Cuando la heurística ya no genere tales valores, se debe utilizar un algoritmo exacto, lo cual es una debilidad del método. Uno de los resultados más importantes de [16] es que el *problema de la valoración* (encontrar las entradas para el oráculo) puede ser reducido a una instancia de MAX-SAT con pesos, que implica que PSAT puede ser resuelto en tiempo polinomial (por medio del método del elipsoide) para aquellas clases de fórmulas en las cuales MAX-SAT con pesos puede ser resuelto en tiempo polinomial.

Finalmente, el trabajo de Andersen y Pretolani [2] apunta a casos tratables de satisfacibilidad probabilística en fórmulas CNF cuyas cláusulas son anotadas con probabilidades. Los autores señalan que PSAT es computacionalmente más difícil que SAT, ya que se mantiene difícil en casos en los cuales SAT no lo hace. Su objetivo es entonces identificar casos fáciles de PSAT en los cuales es posible dar una representación compacta del conjunto de asignaciones probabilísticas consistentes. Se consideran dos enfoques diferentes basados en diferentes representaciones de fórmulas CNF. El primero está ba-

sado en hipergrafos dirigidos; extendiendo una formulación de programación entera de MAX-SAT, es posible resolver el caso en el cual el hipergrafo no tiene ciclos. Si una fórmula es representada por hiperárboles, su matriz asociada es equilibrada, lo cual permite proyectar restricciones en un espacio  $n$ -dimensional, dando lugar a un programa lineal pequeño. El otro enfoque está basado en grafos de co-ocurrencia, y los autores proveen una solución para el caso en el que el grafo es un 2-árbol parcial. En este caso, el resultado más importante afirma que PSAT puede ser reducido a resolver un sistema de  $O(n)$  ecuaciones en  $O(n)$  variables no negativas para fórmulas representables por 2-árboles parciales.

**Programación en lógica probabilística.** Los formalismos probabilísticos basados en programación en lógica fueron introducidos por primera vez por Ng y Subrahmanian en [26, 27]; estos dos artículos abordan el problema de combinar lógica probabilística [21] con teoría de la probabilidad, adoptando semánticas del estilo de Nilsson y Halpern como discutimos anteriormente. Los autores señalan que todas las semánticas propuestas para programación en lógica cuantitativa anteriores a su trabajo habían sido no probabilísticas, de las cuales son ejemplos [40] y [35]; este enfoque probabilístico tiene como objetivo el desarrollo de una teoría de modelos probabilísticos y una teoría de punto fijo. El tratamiento lógico de probabilidades en programación en lógica es complicado por dos razones: primero, los conectivos no pueden ser interpretados simplemente como funciones de valores de verdad tradicionales, y segundo, un conjunto de sentencias definidas con forma cercana a cláusulas y sin negaciones aún puede ser inconsistente. La forma general de las reglas en su formalismo es:

$$F_0 : \mu_0 \leftarrow F_1 : \mu_1 \wedge \dots \wedge F_n : \mu_n$$

donde los  $F_i$  son *fórmulas básicas* (conjunciones o disyunciones de átomos) y los  $\mu_i$  son anotaciones probabilísticas en forma de intervalos que pueden contener expresiones con variables. En [27], las cabezas de las reglas están restringidas a átomos anotados, donde la negación se puede representar mediante anotaciones de la forma  $[0, 0]$ , pero las probabilidades condicionadas no pueden ser expresadas. Este formalismo es un marco lógico general para expresar información probabilística, y los autores estudian su semántica y su relación con la teoría de la probabilidad, la teoría de modelos, la teoría de punto fijo y la teoría de prueba. También desarrollan un procedimiento para responder consultas sobre probabilidades de eventos, que es diferente del procesamiento de consultas en programación en lógica clásica ya que los unificadores más generales no son siempre únicos y por lo tanto deben computarse unificadores maximalmente generales. En este formalismo, las fórmulas atómicas asignan rangos de probabilidad (intervalos) a los átomos y, en base a éstas, una función de fórmula determina el rango de probabilidad para una fórmula no atómica aplicando  $\oplus$  y  $\otimes$  (siguiendo el principio de la ignorancia). El operador de punto fijo se define con estas funciones de fórmulas.

La programación en lógica probabilística fue estudiada

más tarde por varios autores: Ngo y Haddawy [28], Lukasiewicz y Kern-Isberner [24], Lakshmanan y Shiri [20], Dekhtyar y Subrahmanian [7], Damasio et al. [6], entre otros. Ngo y Haddawy [28] presentan una teoría de modelos, una teoría de punto fijo y un procedimiento de prueba para la programación en lógica probabilística condicionada. Lukasiewicz y Kern-Isberner [24] combinan programación en lógica probabilística (adoptando también un tratamiento explícito de probabilidades condicionadas) con máxima entropía, como fue discutido más arriba en relación al propósito original de Nilsson. En un trabajo estrechamente relacionado, Lukasiewicz [22] presenta una semántica condicionada para programas lógicos probabilísticos donde cada regla se interpreta especificando la probabilidad condicionada de la cabeza de la regla, dado el cuerpo. Lakshmanan y Shiri [20] desarrollaron una semántica para programas lógicos en la cual los diferentes métodos axiomáticos generales son dados para calcular probabilidades de conjunciones y disyunciones, y estos son utilizados para definir una semántica para programas lógicos probabilísticos. En [7], Dekhtyar y Subrahmanian consideran diferentes estrategias para conjunciones y disyunciones, originalmente introducidas por Lakshmanan et al. en [19], y permiten una sintaxis explícita en programas lógicos probabilísticos para que los usuarios puedan expresar sus conocimientos de una dependencia. Damasio et al. [6] presentan una semántica bien fundada para programas lógicos anotados y muestran cómo calcularla.

**Desarrollos más recientes.** En las últimas dos décadas se ha visto una proliferación de desarrollos en el área de razonamiento probabilístico con modelos lógicos, tal vez por la combinación de dos factores: (i) el desarrollo de hardware rápido capaz de correr los algoritmos complejos asociados con este tipo de modelos, al menos para instancias de tamaño mediano; y (ii) la explosión en la cantidad de datos disponibles en la Web. La programación en lógica probabilística ha sido explorada en sus aplicaciones en el modelado de acciones de otros agentes [17, 37]; otra línea interesante es el desarrollo de métodos novedosos para razonar con probabilidades inexactas [4, 41], y la investigación de algoritmos para llevar a cabo abducción en programas lógicos probabilísticos [36]. Otra línea relevante para este tipo de programas lógicos es la del desarrollo de modelos para razonamiento temporal [33, 34].

También se han estudiado extensamente las bases de datos probabilísticas [9, 8, 38], en las cuales generalmente se hace una suposición de independencia probabilística entre tuplas. Cercanos a las bases de datos están los desarrollos de lenguajes ontológicos probabilísticos, en los cuales se estudia el uso de reglas al estilo de la programación en lógica pero buscando lograr una baja complejidad computacional; en esta línea se destacan las extensiones de Datalog+/- con anotaciones probabilísticas [12] y las lógicas de descripción probabilísticas [15, 18, 23, 25]. Por último, otros modelos relacionales probabilísticos tales como la Lógica de Markov [32] y PRL [10] han tenido un gran impacto en los desarrollos del área.

### 3. Líneas de Investigación, Desarrollo e Innovación

Dado que el objetivo de la línea de investigación es el de desarrollar un relevamiento comprensivo de la literatura sobre formalismos lógicos para el razonamiento probabilístico bajo incertidumbre, la metodología utilizada será la de búsqueda sistemática de bibliografía relacionada en las principales áreas en las que se han publicado trabajos pertinentes:

1. Bases de datos
2. Representación de conocimiento y razonamiento
3. Machine learning
4. Sistemas aplicados, investigando aplicaciones en la práctica e implementaciones disponibles.

En el último punto, se buscará realizar un relevamiento de las implementaciones existentes, su disponibilidad al público en general, y sacar conclusiones acerca de madurez (sistema prototipo de interés académico, sistema implementado en etapa beta, o sistema maduro). Esto ayudará a completar el panorama del estado actual del arte, y el resultado a su vez será una guía útil para todo investigador y practicante que esté interesado en utilizar estos formalismos.

### 4. Resultados y objetivos

El objetivo general de esta investigación es el estudio de los formalismos basados en diferentes formalismos lógicos que se han desarrollado para llevar a cabo razonamiento bajo incertidumbre probabilística. Como ya hemos visto, estos formalismos han sido estudiados en una gran variedad de áreas de las Ciencias de la Computación y la Matemática, y en la actualidad no hay literatura que unifique su tratamiento y discusión. El objetivo particular de esta tesis es entonces el de acortar las brechas entre las áreas y disciplinas que han abordado este tema, con el fin de evitar el desarrollo aislado de trabajos que comparten muchos objetivos.

### 5. Formación de Recursos Humanos

Esta línea de investigación corresponde a la tesis de Magister en Ciencias de la Computación de Natalia Abad Santos, bajo la dirección de Gerardo I. Simari, a desarrollarse dentro del Laboratorio de Investigación y Desarrollo en Inteligencia Artificial (LIDIA) de la Universidad Nacional del Sur. Actualmente, el LIDIA cuenta con investigadores, becarios y estudiantes de posgrado trabajando intensamente en las áreas de Razonamiento bajo Incertidumbre e Inconsistencia, Web Semántica, Razonamiento sobre Preferencias, Robótica Cognitiva, Argumentación Rebatible, Revisión de Creencias y Sistemas

Multi-agente. El trabajo propuesto está estrechamente relacionado con varios proyectos que se están llevando a cabo en el lugar de trabajo propuesto. El director de tesis ha sido participante central en diferentes proyectos de investigación sobre lenguajes ontológicos para razonar bajo incertidumbre, razonamiento en redes complejas, sistemas multi-agente, revisión de creencias, robótica cognitiva, y razonamiento acerca del comportamiento de adversarios en el marco de proyectos de modelamiento cultural computacional.

### Referencias

- [1] ABADI, M., AND HALPERN, J. Y. Decidability and expressiveness for first-order logics of probability. *Information and Computation* 112, 1 (1994), 1–36.
- [2] ANDERSEN, K. A., AND PRETOLANI, D. Easy cases of probabilistic satisfiability. *Ann. Math. Artif. Intell.* 33, 1 (2001), 69–91.
- [3] BOOLE, G. *The Laws of Thought*. Macmillan, London, 1854.
- [4] BROECHELER, M., SIMARI, G. I., AND SUBRAHMANIAN, V. Using histograms to better answer queries to probabilistic logic programs. In *Proc. of ICLP* (2009), pp. 40–54.
- [5] CHVÁTAL, V. *Linear Programming*. W.H.Freeman, New York, 1983.
- [6] DAMASIO, C. V., PEREIRA, L. M., AND SWIFT, T. Coherent well-founded annotated logic programs. In *Logic Programming and Non-monotonic Reasoning* (1999), pp. 262–276.
- [7] DEKHTYAR, A., AND SUBRAHMANIAN, V. S. Hybrid probabilistic programs. In *Proc. of ICLP* (1997), pp. 391–405.
- [8] DEY, D., AND SARKAR, S. A probabilistic relational model and algebra. *ACM Trans. on Database Systems* 21, 3 (1996), 339–369.
- [9] FUHR, N., AND RÖLLEKE, T. A probabilistic relational algebra for the integration of information retrieval and database systems. *ACM Trans. on Information Systems* 15, 1 (1997), 32–66.
- [10] GETOOR, L., AND GRANT, J. Prl: A probabilistic relational language. *Machine Learning* 62, 1-2 (2006), 7–31.
- [11] GILMORE, P. C., AND GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research* 9, 6 (1961), 849–859.
- [12] GOTTLÖB, G., LUKASIEWICZ, T., MARTINEZ, M. V., AND SIMARI, G. I. Query answering under probabilistic uncertainty in Datalog+/- ontologies. *Ann. Math. Artif. Intell.* 69, 1 (2013), 37–72.

- [13] HALPERIN, T. Probability logic. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 25 (3) (1984), 198–212.
- [14] HALPERN, J. Y. An analysis of first-order logics of probability. *Artif. Intell.* 46, 3 (Dec. 1990), 311–350.
- [15] HEINSOHN, J. Probabilistic description logics. In *Proc. of UAI* (1994), pp. 311–318.
- [16] JAUMARD, B., HANSEN, P., AND DE ARAGÃO, M. P. Column generation methods for probabilistic logic. In *Proc. of 1st. Integer Programming and Combinatorial Optimization Conference* (1990), pp. 313–331.
- [17] KHULLER, S., MARTINEZ, M. V., NAU, D., SIMARI, G., SLIVA, A., AND SUBRAHMANIAN, V. Computing most probable worlds of action probabilistic logic programs: Scalable estimation for  $10^{30,000}$  worlds. *Ann. Math. Artif. Intell.* 51, 2–4 (2007), 295–331.
- [18] KOLLER, D., LEVY, A., AND PFEFFER, A. P-CLASSIC: a tractable probabilistic description logic. In *Proc. of AAAI* (1997), vol. 1997, pp. 390–397.
- [19] LAKSHMANAN, L. V. S., LEONE, N., ROSS, R., AND SUBRAHMANIAN, V. S. ProbView: a flexible probabilistic database system. *ACM Trans. on Database Systems* 22 (1997), 419–469.
- [20] LAKSHMANAN, L. V. S., AND SHIRI, N. A parametric approach to deductive databases with uncertainty. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering* 13, 4 (2001), 554–570.
- [21] LLOYD, J. W. *Foundations of Logic Programming, Second Edition*. Springer-Verlag, 1987.
- [22] LUKASIEWICZ, T. Probabilistic logic programming. In *Proc. of ECAI* (1998), pp. 388–392.
- [23] LUKASIEWICZ, T. Expressive probabilistic description logics. *Artif. Intell.* 172, 6 (2008), 852–883.
- [24] LUKASIEWICZ, T., AND KERN-ISBERNER, G. Probabilistic logic programming under maximum entropy. In *LNCS*, vol. 1638. 1999.
- [25] LUKASIEWICZ, T., MARTINEZ, M. V., ORSI, G., AND SIMARI, G. I. Heuristic ranking in tightly coupled probabilistic description logics. In *Proc. of UAI* (2012), pp. 554–563.
- [26] NG, R. T., AND SUBRAHMANIAN, V. S. A semantical framework for supporting subjective and conditional probabilities in deductive databases. In *Proc. of ICLP* (1991), The MIT Press, pp. 565–580.
- [27] NG, R. T., AND SUBRAHMANIAN, V. S. Probabilistic logic programming. *Information and Computation* 101, 2 (1992), 150–201.
- [28] NGO, L., AND HADDAWY, P. Probabilistic logic programming and bayesian networks. In *Asian Computing Science Conference* (1995), pp. 286–300.
- [29] NILSSON, N. Probabilistic logic. *Artif. Intell.* 28 (1986), 71–87.
- [30] PEIRCE, C. A theory of probable inference. In *Studies in Logic: By Members of Johns Hopkins University*, C. Peirce, Ed. Little, Brown and Company, Boston, 1883, pp. 126–181.
- [31] REICHENBACH, H. *The theory of probability, an inquiry into the logical and mathematical foundations of the calculus of probability*. English translation by Ernest H. Hutten and Maria Reichenbach, 2d ed. ed. University of California Press, Berkeley,, 1949.
- [32] RICHARDSON, M., AND DOMINGOS, P. Markov logic networks. *Machine learning* 62, 1-2 (2006), 107–136.
- [33] SHAKARIAN, P., PARKER, A., SIMARI, G. I., AND SUBRAHMANIAN, V. S. Annotated probabilistic temporal logic. *ACM Trans. Comput. Log.* 12, 2 (2011), 14.
- [34] SHAKARIAN, P., SIMARI, G. I., AND SUBRAHMANIAN, V. S. Annotated probabilistic temporal logic: Approximate fixpoint implementation. *ACM Trans. Comput. Log.* 13, 2 (2012), 13.
- [35] SHAPIRO, E. Y. Logic programs with uncertainties: A tool for implementing rule-based systems. In *Proc. of IJCAI* (1983), pp. 529–532.
- [36] SIMARI, G. I., DICKERSON, J. P., SLIVA, A., AND SUBRAHMANIAN, V. Parallel abductive query answering in probabilistic logic programs. *ACM Trans. Comput. Log.* 14, 2 (2013).
- [37] SIMARI, G. I., MARTINEZ, M. V., SLIVA, A., AND SUBRAHMANIAN, V. Focused most probable world computations in probabilistic logic programs. *Ann. Math. Artif. Intell.* 64, 2–3 (2012).
- [38] SUCIU, D., OLTEANU, D., RÉ, C., AND KOCH, C. *Probabilistic Databases*. Morgan & Claypool Publishers, 2011.
- [39] TARSKI, A. Wahrscheinlichkeitslehre und mehrwertige logik. *Erkenntnis* 5 (1935-36), 174–175.
- [40] VAN EMDEN, M. Quantitative deduction and its fixpoint theory. *Journal of Logic Programming* 4 (1986), 37–53.
- [41] YUE, A., LIU, W., AND HUNTER, A. Imprecise probabilistic query answering using measures of ignorance and degree of satisfaction. *Ann. Math. Artif. Intell.* 64, 2-3 (2012), 145–183.