Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah Pada Ruang Metrik Parsial

Weakly Contractive Mapping and Weakly Kannan Mapping in Partial Metric Space

Sunarsini*), Sadjidon, Annisa Rahmita S.
Departemen Matematika, Fakultas Matematika Komputasi dan Sains Data,
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
*E-mail: sunarsini@matematika.its.ac.id

ABSTRACT

In the article the concept of metric space could be expanded, one of which is a partial metric space. In the metric space, the distance of a point to itself is equal to zero, while in the partial metric space need not be equal to zero.The concept of partial metric space is used to modify Banach's contraction principle. In this paper, we discuss weakly contractive mapping and weakly Kannan mapping which are extensions of Banach's contraction principle to partial metric space together some related examples. Additionally, we discuss someLemmas which are shows an analogy between Cauchy sequences in partial metric space with Cauchy sequences in metric space and analogy between the complete metric space and the complete partial metric space.

Keywords: Cellulose metric space, partial metric space, weakly contraction mapping, weakly Kannan mapping.

PENDAHULUAN

Ruang metrik parsial merupakan salah satu perluasan dari konsep ruang metrik. Salah satu ilmuwan komputer yang pertama kali mengenalkan sebuah konsep ruang metrik parsial adalah Matthews. Lewat tulisannya yang berjudul “Partial Metric Topology” Matthews (1994) menjabarkan hasil penelitiannya mengenai topologi ruang metrik parsial. Di dalam penelitiannya, prinsip kontraksi Banach diperluas untuk menunjukkan keberadaan dan ketunggalan titik tetap dari suatu pemetaan kontraktif pada ruang metrik parsial. Hasil penelitiannya tersebut dijadikan pedoman oleh para peneliti selanjutnya dalam mengembangkan konsep ruang metrik parsial. Diawali dengan (Ruiz & Antonio 2010), mereka memperluas prinsip kontraksi Banach pada ruang metrik yang digagas oleh Kannan (Kannan 1968). Berpedoman pada hasil penelitian yang dilakukan oleh (Dugundji & Granas 1978) terkait pengembangan pemetaan kontraktif menjadi pemetaan kontraktif lemah, mereka memperluas teorema Kannan ke dalam pemetaan Kannan lemah.Kemudian, berdasarkan hasil penelitian yang dilakukan oleh Matthews, Dugundji dan Granas serta Ruiz, (Alghamdi *et al.*, 2012) melakukan penelitian untuk menyelidiki bahwa pemetaan kontraktif lemah dan Kannan lemah pada ruang metrik dapat dikonstruksi ke dalam ruang metrik parsial.

Dari penelitian-penelitian di atas, maka tujuan utama paper ini adalah mengkonstruksi metrik pada ruang metrik parsial, membahas lemma-lemma yang menunjukkan analogi antara barisan Cauchy pada ruang metrik parsial dengan barisan Cauchy pada ruang metrik, analogi antara ruang metrik lengkap dengan ruang metrik parsial lengkap serta contoh-contoh yang terkait dengan pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah.

METODE

Pada bagian ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan konsep ruang metrik parsial, meliputi definisi ruang metrik, ruang metrik parsial, pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik, definisi konvergensi barisan dan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial, definisi ruang metrik parsial lengkap.

Definisi 1 (Kreyszig, E 1978) Diberikan himpunan tak kosong X. *Fungsi* $d: X \text{x} X \to \mathbb{R}$ dikatakan metrik pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi

(M1) $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \geq 0$

(M2) $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0$ jika dan hanya jika $\mathrm{x} = \mathrm{y}$

(M3) $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{d}(\mathrm{y},\mathrm{x})$

(M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Pasangan (X,d) dikatakan sebagai ruang metrik.

Contoh 2 (Kreyszig, E 1978) Diberikan himpunan $\mathbb{R}$. Fungsi $\mathrm{d}: \mathbb{R} \text{x} \mathbb{R} \to \mathbb{R}$yang didefinisikan sebagai $\mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = |\mathrm{x}-\mathrm{y}|$ untuk setiap $\mathrm{x},\mathrm{y} \in \mathbb{R}$merupakan metrik pada $\mathbb{R}$.

Definisi 3 (Dugundji & Granas 1978) Diberikan (X,d) ruang metrik. Pemetaan $\mathrm{f}: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ dinamakan pemetaan kontraktif lemah jika terdapat $\overline{\alpha}: X \times X \to [0,1)$ sedemikian hingga untuk setiap $0 \le a \le b$,

$$\sup\{\overline{\alpha}(x,y): a \le d(x,y) \le b\} < 1$$

Dan $d(f(x),f(y)) \le \overline{\alpha}(x,y)d(x,y)$ untuk setiap $x,y \in X$.

Definisi 4 (Ariza-Ruiz & Antonio 2010) Diberikan (X,d) ruang metrik. Pemetaan $f: X \to X$ dinamakan pemetaan Kannan lemah jika terdapat $\overline{\alpha}: X \times X \to [0,1)$ sedemikian hingga untuk setiap $0 \le a \le b$, $\sup\{\overline{\alpha}(x,y): a \le d(x,y) \le b\} < 1$ dan $d(f(x),f(y)) \le \frac{\overline{\alpha}(x,y)}{2}\left[d\big(x,f(x)\big) + d(y,f(y))\right]$ untuk setiap $x,y \in X$.

Definisi 5 (Matthews 1994) Diberikan himpunan tak kosong X. Fungsi $p: X \times X \to \mathbb{R}^+$ dikatakan metrik parsial pada X jika untuk setiap $x,y,z \in X$ memenuhi

(MP1) $x = y$ jika dan hanya jika $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$;

(MP2) $p(x,x) \le p(x,y)$;

(MP3) $p(x,y) = p(y,x)$;

(MP4) $p(x,z) \le p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$.

Pasangan (X,p) dikatakan sebagai ruang metrik parsial.

Definisi 6 (Matthews 1994) Jika diberikan (X,p) ruang metrik parsial dan $\{x_n\}$ adalah barisan pada X untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka

(i).$\{x_n\}$ konvergen ke titik $x \in X$ pada X jika dan hanya jika $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x)$;

(ii).$\{x_n\}$ dikatakan barisan Cauchy pada (X,p) jika $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ ada dan berhingga;

(iii).(X,p) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy $\{x_n\}$ pada X konvergen ke titik $x \in X$ sehingga

$p(x,x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$.

Definisi 7 (Matthews 1994) Diberikan (X,p)ruang metrik parsial. Pemetaan $f: X \to X$ dinamakan pemetaan kontraktif jika terdapat $\overline{\alpha} \in \mathbb{R}$, $0 \le \overline{\alpha} < 1$ sedemikian hingga $p(f(x),f(y)) \le \overline{\alpha}p(x,y)$ untuk setiap $x,y \in X$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini, dibahas mengenai analogi ruang metrik dan ruang metrik parsial. Ditunjukkan pula beberapa contoh terkait pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik dan ruang metrik parsial.

Dari (Matthews 1994), diperoleh analogi antara ruang metrik dan ruang metrik parsial. Hal tersebut tertuang pada teorema berikut ini.

Teorema 8 Diberikan (X,p) ruang metrik parsial. Jika $d^p: X \times X \to \mathbb{R}$ dengan

$$d^p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \quad \text{...(1)}$$

untuk setiap $x,y \in X$, maka d^p adalah metrik pada X.

Bukti:

Seperti pada Definisi 1, maka d^p harus memenuhi (M1), (M2), (M3) dan (M4) untuk setiap $x,y,z \in X$.

Dari Definisi 5 (MP2) dan (MP3) diperoleh (M1). Selanjutnya dengan (MP2), (MP3) dan (MP1) diperoleh (M2). Untuk memperoleh (M3) dari (MP3). Terakhir dari (MP4) diperoleh (M4)**.** Terbukti bahwa d^p adalah metrik pada X.

Dari Teorema 8, terlihat bahwa p adalah metrik parsial pada X dan d^p adalah metrik pada ruang metrik parsial (X,p) (metrik yang dibangun oleh metrik parsial). Dengan menggunakan p dan d^p, dibentuk lemma-lemma yang menunjukkan analogi antara barisan Cauchy pada ruang metrik dan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial, serta analogi antara ruang metrik lengkap dan ruang metrik parsial lengkap.

Lemma 9 Diberikan (X,p) ruang metrik parsial dan (X,d^p) ruang metrik, dengan d^p adalah metrik yang didefinisikan pada (1). Barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X,p) jika dan hanya jika $\{x_n\}$ adalah barisan Cauchy pada (X,d^p).

Bukti:

$(\Longrightarrow)$

Jika $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada(X,p), maka sesuai Definisi 6 (ii), $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ ada dan berhingga. Karena (X,d^p) adalah ruang metrik dengan d^p adalah metrik yang dibangun oleh metrik parsial seperti pada (1) maka $\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n,x_m) = 2\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) - \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n) - \lim_{m\to\infty} p(x_m,x_m)$

atau $2\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m) = \lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n,x_m) + \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n) + \lim_{m\to\infty} p(x_m,x_m)$

Karena $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ ada dan berhingga, maka $2\lim_{n,m\to\infty} p(x_n,x_m)$ juga ada dan berhingga, sehingga $\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n,x_m) + \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n) + \lim_{m\to\infty} p(x_m,x_m)$ ada dan berhingga, artinya $\lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n,x_m)$, $\lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n)$ dan $\lim_{m\to\infty} p(x_m,x_m)$ juga ada dan berhingga. Hal ini menunjukkan bahwa $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X,d^p).

$(\Longleftarrow)$

Karena d^p adalah metrik yang dibangun oleh metrik parsial seperti pada (1), maka jika $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$adalah barisan Cauchy pada (X, d^p), diperoleh$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n)$=2 $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) - \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) - \lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m)$ada dan berhingga.

Sehingga, jelas bahwa 2 $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$, $\lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n)$ dan $\lim_{m\to\infty} p(x_m, x_m)$ ada dan berhingga. Karena 2 $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, maka $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ada dan berhingga, artinya $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X, p).

Lemma 10 Diberikan (X, p) ruang metrik parsial dan (X, d^p) ruang metrik, dengan d^p adalah metrik yang didefinisikan pada (1). (X, p) lengkap jika dan hanya jika (X, d^p) lengkap. Sehingga, jika diberikan barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pada (X, p) maka untuk $x \in X, \lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x) = 0$ jika dan hanya jika $p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x)$
$= \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$.

Bukti:

$(\Longrightarrow)$

Jika (X, p) merupakan ruang metrik parsial lengkap, maka sesuai Definisi 6 (iii), setiap barisan Cauchy$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$pada(X, p) konvergen ke titik$x \in X$sehingga$p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$. Karena $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X, p), maka berdasarkan Lemma 9,$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X, d^p), sehingga $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke titik$x \in X$, artinya (X, d^p) adalah ruang metrik lengkap. Karena d^p adalah metrik yang dibangun dari metrik parsial seperti pada (1), maka $d^p(x, x) = 2p(x, x) - p(x, x) - p(x, x) = 0$ atau dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x) = 0$.

$(\Longleftarrow)$

Jika (X, d^p) adalah ruang metrik lengkap dengan d^p adalah metrik yang dibangun dari metrik parsial seperti pada (1), maka setiap barisan Cauchy$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$pada(X, d^p)konvergen ke titik$x \in X$sehingga$d^p(x, x) = \lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} d^p(x_n, x_m)$. Karena d^p adalah metrik yang dibangun dari metrik parsial seperti pada (1), maka $d^p(x, x) = 2p(x, x) - p(x, x) - p(x, x) = 0$ atau dengan kata lain $\lim_{n\to\infty} d^p(x_n, x) = 0$. Karena $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy pada (X, d^p), maka berdasarkan Lemma 9,$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ juga merupakan barisan Cauchy pada (X, p), sehingga $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen ke titik$x \in X$, artinya (X, p) adalah ruang metrik parsial lengkap. Karena (X, p) adalah ruang metrik parsial lengkap, dari Definisi 6 (iii) diperoleh bahwa$p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x)$
$$= \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m).$$

Pemetaan Kontraktif Lemah dan Pemetaan Kannan Lemah pada Ruang Metrik Parsial

Pada bagian inidiberikan pengertian pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial, contoh pemetaan yang merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial, namun bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik. Diberikan pula contoh pemetaan yang merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial, namun bukan merupakan pemetaan Kannanlemah pada ruang metrik.

Terlebih dahulu diberikan definisi pemetaan kontraktif lemah dan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial. Dari (Alghamdi *et al*. 2012), diperoleh definisi pemetaan kontraktif lemah sebagai berikut.

Definisi 11 Diberikan (X, p)ruang metrik parsial. Pemetaan $f: X \to X$ dinamakan pemetaan kontraktif lemah jika terdapat $\overline{\alpha}: X \times X \to [0,1)$sedemikian hingga untuk setiap $0 \le a \le b$,$\sup\{\overline{\alpha}(x, y): a \le p(x, y) \le b\} < 1danp(f(x), f(y)) \le \overline{\alpha}(x, y)p(x, y)$untuk setiap $x, y \in X$.

Dengan menggunakan Definisi 11 dan Definisi 3 dapat diperoleh contoh pemetaan yang merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial, namun bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik.

Contoh 12: Diberikan p metrik parsial, dengan $p: [0,1]\mathrm{x}[0,1] \to \mathbb{R}^+$ didefinisikan sebagai $p(x, y) = m \quad \{x, y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\overline{\alpha}: [0,1]\mathrm{x}[0,1] \to [0,1)$ dengan $\overline{\alpha}(x, y) = \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka $f$merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$.Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut.Terlihat bahwaterdapat$\overline{\alpha}$yang memenuhi Definisi 11,yaitu:
$$\sup\{\overline{\alpha}(x, y): a \le p(x, y) \le b\}$$

$=\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq \max\{x,y\} \leq b\}$=1/2<1

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga $p\big(f(x), f(y)\big) = p\left(\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right) = \max\left\{\frac{x^2}{2}, \frac{y^2}{2}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\max\{x^2, y^2\} = \frac{1}{2}(\max\{x,y\})^2$$
$$\leq \frac{1}{2}\max\{x,y\} = \bar{\alpha}(x,y)p(x,y)$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Artinya, f merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$.

Contoh 13: Diberikand^p metrikdengan $d^p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan $d^p(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$ dan p adalah metrik parsial, $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to [0,1]$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = m \quad \{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi$f: [0,1] \to [0,1]$dengan $f(x) = \frac{x^2}{2}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1]\text{x}[0,1] \to [0,1)$ dengan $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{1}{2}$untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$.

Hal ini dapat ditunjukkan dengan kontradiksi.Andaikan f merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$, maka terdapat $\bar{\alpha}$yang memenuhi Definisi 3, yaitu $\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq d^p(x,y) \leq b\}$

$=\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq |x-y| \leq b\}$=1/2<1

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$d^p\big(f(x), f(y)\big) = \left|\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right| = \left|\frac{x^2-y^2}{2}\right|$

$= \left|\frac{(x+y)(x-y)}{2}\right| = \left|\frac{x+y}{2}\right| |x-y|$

$\leq \frac{1}{2}|x-y| = \bar{\alpha}(x,y)|x-y|$

$= \bar{\alpha}(x,y)d^p(x,y)$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jadi, diperoleh $\frac{x+y}{2} \leq \bar{\alpha}(x,y)$untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Selanjutnya, diambil $x, y \in [0,1]$ dengan $x = 1$ dan $y = 1$, sehingga

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \leq \bar{\alpha}(x,y) = \bar{\alpha}(1,1)$$

Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $\bar{\alpha}(x,y) < 1$. Akibatnya,f bukan merupakan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$.

Selanjutnya, dari (Alghamdi *et al*., 2012), juga diperoleh definisi pemetaan Kannan lemah sebagai berikut.

Definisi 14 Diberikan (X, p) ruang metrik parsial. Pemetaan $\mathrm{f}: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ dinamakan pemetaan Kannan lemah jika terdapat $\bar{\alpha}: \mathrm{X} \text{ x } \mathrm{X} \to [0,1)$ sedemikian hingga untuk setiap $0 \leq \mathrm{a} \leq \mathrm{b}$,$\sup\{\bar{\alpha}(\mathrm{x},\mathrm{y}): \mathrm{a} \leq \mathrm{p}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leq \mathrm{b}\} < 1$ dan $\mathrm{p}\big(\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{f}(\mathrm{y})\big) \leq \mathrm{p}\big(\mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{f}(\mathrm{y})\big)$ $\leq \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}[p(x, f(x)) + p(y, f(y))]$untuk setiap $x, y \in X$.

Dengan menggunakan Definisi 14 dan Definisi 4 dapat diperoleh contoh pemetaan yang merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial, namun bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

Contoh 15: Diberikan p metrik parsial, dengan $p: [0,1] \text{ x } [0,1] \to \mathbb{R}^+$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = m \quad \{x,y\}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$dengan $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1]\text{x}[0,1] \to [0,1)$ dengan

$$\bar{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{p\big(f(x), f(y)\big)}{p(x,y)}, m \quad \{x,y\} \neq 0 \\ \quad 0 \qquad\quad , m \quad \{x,y\} = 0 \end{cases}$$

untuk setiap $x, y \in [0,1]$, maka f merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$.Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut. Karena fungsi $\bar{\alpha}$ didefinisikan seperti pada Contoh 12, maka diperoleh $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{p(f(x), f(y))}{p(x,y)} \leq \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0,1]$. Selanjutnya, dapat ditunjukkan bahwaterdapat$\bar{\alpha}$yang memenuhi Definisi 11, yaitu $\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq p(x,y) \leq b\}$

$=\sup\{\bar{\alpha}(x,y): \leq \max\{x,y\} \leq b$ =1/2 <1

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$p\big(f(x), f(y)\big) = p\left(\frac{x^2}{x+1}, \frac{y^2}{y+1}\right)$$
$$= \max\left\{\frac{x^2}{x+1}, \frac{y^2}{y+1}\right\} \leq \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}[x+y]$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left(\max\left\{x, \frac{x^2}{x+1}\right\} + \left\{y, \frac{y^2}{y+1}\right\}\right)$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\big[p\big(x, f(x)\big) + p\big(y, f(y)\big)\big]$$
$$\leq \frac{1/2}{2}[x+y] = \frac{1}{4}[x+y]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\max\left\{x, \frac{x^2}{x+1}\right\} + \max\left\{y, \frac{y^2}{y+1}\right\}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\big[p\big(x, f(x)\big) + p\big(y, f(y)\big)\big]$$

untuk setiap $x, y \in X$. Artinya, f merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial $([0,1], p)$.

Contoh 16: Diberikan d^p metrik, dengan

$d^p: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $d^p(x,y) = |x-y|$ untuk setiap $x,y \in [0,1]$. Jika fungsi $f: [0,1] \to [0,1]$ dengan $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan fungsi $\bar{\alpha}: [0,1]\text{x}[0,1] \to [0,1)$ dengan

$$\bar{\alpha}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{p(f(x),f(y))}{p(x,y)}, m & \{x,y\} \neq 0 \\ 0 & , m \quad \{x,y\} = 0 \end{cases}$$

untuk setiap $x,y \in [0,1]$ dengan p metrik parsial, $p: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$ yang didefinisikan sebagai $p(x,y) = m \quad \{x,y\}$ untuk setiap $x,y \in [0,1]$, maka f bukan merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$.Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut. Karena fungsi $\bar{\alpha}$ didefinisikan seperti pada Contoh 12, maka diperoleh $\bar{\alpha}(x,y) = \frac{p(f(x),f(y))}{p(x,y)} \leq \frac{1}{2}$ untuk setiap $x,y \in [0,1]$. Andaikan f merupakan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$, maka terdapat $\bar{\alpha}$ yang memenuhi Definisi 4, yaitu

$$\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq d^p(x,y) \leq b\}$$

$$=\sup\{\bar{\alpha}(x,y): a \leq |x-y| \leq b\}=1/2<1$$

untuk setiap $0 \leq a \leq b$, sehingga

$$d^p(f(x),f(y)) = \left|\frac{x^2}{x+1} - \frac{y^2}{y+1}\right|$$
$$= \left|\frac{x^2(y+1) - y^2(x+1)}{(x+1)(y+1)}\right|$$
$$\leq \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[\left|\frac{x}{x+1}\right| + \left|\frac{y}{y+1}\right|\right]$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left(\left|\frac{x(x+1)-x^2}{x+1}\right| + \left|\frac{y(y+1)-y^2}{y+1}\right|\right)$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[\left|x - \frac{x^2}{x+1}\right| + \left|y - \frac{y^2}{y+1}\right|\right]$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(x,y)}{2}\left[d^p(x,f(x)) + d^p(y,f(y))\right]$$
$$\leq \frac{1/2}{2}\left[\left|\frac{x}{x+1}\right| + \left|\frac{y}{y+1}\right|\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left|\frac{x}{x+1}\right| + \left|\frac{y}{y+1}\right|\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left|\frac{x(x+1)-x^2}{x+1}\right| + \left|\frac{y(y+1)-y^2}{y+1}\right|\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left|x - \frac{x^2}{x+1}\right| + \left|y - \frac{y^2}{y+1}\right|\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[d^p(x,f(x)) + d^p(y,f(y))\right]$$

untuk setiap $x,y \in [0,1]$. Selanjutnya, diambil $x,y \in [0,1]$ dengan $x = 1$ dan $y = 0$, maka diperoleh

$$d^p(f(1),f(0)) = \left|\frac{1^2}{1+1} - 0\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$$
$$\leq \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{4} = \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\frac{1}{2} = \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\left|\frac{1}{2}\right|$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\left[\left|1 - \frac{1}{2}\right|\right] =$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\left[|1 - f(1)| + |0 - f(0)|\right]$$
$$= \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{2}\left[d^p(1,f(1)) + d^p(0,f(0))\right]$$

sehingga $\frac{1}{2} \leq \frac{\bar{\alpha}(1,0)}{4}$ atau $2 \leq \bar{\alpha}(1,0)$. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $\bar{\alpha}(x,y) < 1$ untuk setiap $x,y \in [0,1]$. Akibatnya, f bukan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik $([0,1], d^p)$.

KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa fungsi jarak (metrik) dapat dikonstruksi pada ruang metrik parsial. Adanya analogi antara barisan Cauchy pada ruang metrik dan barisan Cauchy pada ruang metrik parsial, serta analogi antara ruang metrik lengkap dan ruang metrik parsial lengkap. Dapat diberikancontoh pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik parsial, tetapi bukan pemetaan kontraktif lemah pada ruang metrik. Selain itu, dapat diberikancontoh pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik parsial, tetapi bukan pemetaan Kannan lemah pada ruang metrik.

DAFTAR PUSTAKA

Ariza-Ruiz, D &Antonio Jiménez-Melado. 2010. A Continuation Method for Weakly Kannan Maps. *Fixed Point Theory andApplications*,Article ID 321594:1-12.

Alghamdi, Maryam A, Naseer S, Oscar V. 2012. On Fixed Point Theory in Partial Metric Spaces.*Fixed Point Theory and Applications*. 175:1-25.

Dugundji, J dan A. Granas. 1978.Weakly Contractive Maps and Elementary Domain Invariance Theorem*. *Bull. Greek Math. Soc.* 19: 141-151.

Kannan, R. 1968. Some Results On Fixed Points. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*. 60:71-76.

Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Aplication*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.Canada.

Matthews, SG. 1994. Partial Metric Topology.

Annals of the New York Academy of Sciences, 183 - 197.