

## UN ELEMENTO FINITO VIGA APTO PARA MODELAR SÓLIDOS HETEROGÉNEOS CON ANISOTROPÍA GENERAL.

Echarri, Tomás<sup>1</sup>, Lopardo, Edgardo<sup>2</sup>, Saralegui, Gustavo<sup>3</sup>

UNLP, Facultad de Ingeniería UID-DISIM.

<sup>1</sup>[tomas.echarri@ing.unlp.edu.ar](mailto:tomas.echarri@ing.unlp.edu.ar)

<sup>2</sup>[edgardo.lopardo@ing.unlp.edu.ar](mailto:edgardo.lopardo@ing.unlp.edu.ar)

<sup>3</sup>[gsarale@ing.unlp.edu.ar](mailto:gsarale@ing.unlp.edu.ar)

### RESUMEN.

El modelado tridimensional mediante el método de los elementos finitos (MEF) de cuerpos esbeltos constituidos por sólidos heterogéneos con anisotropía general, puede resultar con un número innecesariamente alto de grados de libertad (GDL) para los requerimientos de aproximación.

En problemas elastodinámicos que involucran sólidos anisótropos esbeltos, en general no homogéneos, el campo de desplazamientos no puede ser restringido *a priori* pues su carácter predominante varía con las propiedades de la materia constituyente. Por esta razón, la generalización de las teorías eficaces bajo isotropía, en general, no entrega resultados satisfactorios. Adicionalmente, las teorías *had hoc* tienen limitada su aplicación a determinadas configuraciones geométricas y/o constitutivas.

En el presente trabajo se desarrolla una metodología que permite obtener para un cuerpo cilíndrico compuesto, en general, por fases sólidas con anisotropía constitutiva un funcional energético unidimensional del cual se derivan, a partir del principio de *Hamilton*, las ecuaciones de movimiento sin realizar conjeturas sobre el campo de desplazamientos. Utilizando este funcional se formula e implementa un elemento finito viga con capacidad para modelar problemas elastodinámicos en sólidos anisótropos esbeltos y se estudia el comportamiento del elemento desarrollado frente a problemas con soluciones analíticas, numéricas y resultados experimentales.

**Palabras Claves:** finite-element, anisotropic-beam, variational-asymptotic-method, warping-functions.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las teorías aproximadas pueden separarse en dos grupos: las que establecen a priori la cinemática de la viga, y aquellas no realizan conjeturas sobre la totalidad del campo de desplazamiento. Los trabajos pertenecientes al primer grupo son frecuentes en la literatura y referidos a problemas particulares. En el segundo grupo se encuentran formulaciones generales, comúnmente basadas en el MEF, a partir de las cuales se han desarrollado programas con escasa difusión o utilizados como herramientas de investigación.

El trabajo de Giavotto & Cía. [1] (1983) puede considerarse precursor en el enfoque general del problema elastoestático asociado a sólidos esbeltos con anisotropía constitutiva. Los autores presentan una teoría en vigas anisótropas basada en el MEF utilizando el principio de los trabajos virtuales. Este proceso conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con la coordenada en la dirección de la generatriz del sólido como variable independiente, cuyas soluciones son polinómicas o con decaimiento exponencial. Las primeras son llamadas soluciones centrales por Giavotto y de ellas se deriva la flexibilidad diferencial del sólido elástico asociada a las resultantes de la distribución de fuerzas en los extremos. Las soluciones exponenciales corresponden al problema de difusión de esfuerzos para una distribución auto-equilibrada. Imponiendo la aplicación de fuerzas solo en las secciones extremas de la viga y derivando sucesivamente la ecuación diferencial asociada al problema variacional, se obtiene la expresión de la flexibilidad diferencial de la viga mediante operaciones algebraicas. La energía de deformación diferencial queda expresada en función de nuevas deformaciones unidimensionales (deformaciones naturales de la viga), que son equivalentes a las cinemáticas solo en el caso isotrópico. El enfoque de Giavotto adicionalmente ha sido implementado por Bauchau, el programa desarrollado (NABSA) es apto para modelar vigas prismáticas con anisotropía constitutiva.

Según expone Hodges [2] (1990), Berdichevsky (1981) fue el primero en demostrar, considerando el orden de magnitud de las cantidades variacionales, que el análisis no lineal en vigas puede ser dividido en dos problemas desacoplados: uno bidimensional lineal a nivel de la sección y el problema global no lineal unidimensional.

Kosmatka & le [3] (1991) presentan en el marco de la elastodinámica una formulación geoméricamente no lineal para vigas anisótropas homogéneas, en la cual se aproxima el campo de desplazamientos imponiendo funciones incógnitas comandadas por las resultantes de esfuerzo a nivel de la sección. Estas son obtenidas a partir de la resolución del problema de valor de frontera asociado a la aplicación de resultantes de esfuerzo unitarias. Finalmente formulan un elemento de 24 GDL externos basado en desplazamientos a partir de las condiciones de equilibrio estático, las funciones de forma son polinomios de *Hermite* para las 6 variables de campo y se introduce un GDL interno en los desplazamientos transversales para impedir el bloqueo por cortante. Presenta resultados cualitativos en esfuerzos para una viga de sección elíptica empotrada sometida a una fuerza transversal, y cuantitativos en el análisis modal de la misma viga libre de restricciones.

Živković & Cía. [4] (2001) desarrollan un elemento viga no lineal basado en desplazamientos, llamado por los autores súper elemento, apto para modelar torsión y curvatura naturales. Resuelven el problema a nivel de la sección utilizando el enfoque de Giavotto mencionado anteriormente, sin resolver el inconveniente de las nuevas deformaciones naturales de la viga, razón por la cual se limita el potencial del elemento a vigas con isotropía constitutiva.

Según expone Hodges [5] (2002) el enfoque de Giavotto se encuentra en desventaja respecto del método variacional asintótico (VAM) de Berdichevsky, este pronunciamiento se fundamenta en la simplicidad con la que el VAM puede manipular problemas no lineales. Este autor y colaboradores han utilizado dicho método para obtener distintas formulaciones en vigas. A partir del VAM, Yu & Cía. desarrollaron el programa de análisis seccional VABS. Yu, Hodges & Cía. [6] (2002) presentan en el marco de la elastoestática una formulación no lineal para vigas con torsión y curvatura naturales que se deriva del VAM, a partir del cual es desacoplado el problema elástico tridimensional. El problema a nivel de la sección se resuelve en forma aproximada a partir de la minimización de la energía de deformación.

Finalmente obtienen la matriz de rigidez diferencial asociada a las deformaciones naturales típicas de la teoría en vigas de Timoshenko (TVT).

## 2. APLICACIONES.

### 2.1. Análisis modal.

Considérese una sección transversal definida por las matrices diferenciales  $\{AEI\}$  en un problema unidimensional de  $n$  GDL, con  $r$  condiciones cinemáticas y  $n-r$  naturales. Realizado el ensamblaje elemental sobre el dominio de la viga utilizando elementos definidos por las Ecuaciones y, el problema queda definido por el sistema de EDO con coeficientes constantes:

$$\underline{K}_q \underline{u}_q + \underline{M}_q \ddot{\underline{u}}_q = \underline{f}_q \quad (1)$$

Donde:

$$\underline{K}_q = \begin{bmatrix} \underline{K}_q & \underline{R}_q^T \\ \underline{R}_q & \underline{0}_n \end{bmatrix}; \underline{M}_q = \begin{bmatrix} \underline{M}_q & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0}_n \end{bmatrix}; \underline{f}_q = \begin{Bmatrix} \bar{\underline{f}}_q \\ \underline{q}_p \end{Bmatrix}; \underline{u}_q = \begin{Bmatrix} \underline{u}_q \\ \underline{\lambda}_q \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{K}_q = \sum_{(e)=1}^{nelD} \mathbf{A}^{(e)} \underline{K}_q^{(e)} \mathbf{A}^{(e)T}; \underline{M}_q = \sum_{(e)=1}^{nelD} \mathbf{A}^{(e)} \underline{M}_q^{(e)} \mathbf{A}^{(e)T}; \underline{f}_q = \sum_{(e)=1}^{nelD} \mathbf{A}^{(e)} \underline{f}_q^{(e)} \quad (3)$$

En las expresiones en Ecuación (3),  $\mathbf{A}^{(e)}$  simboliza el ensamblaje elemental de modo que las  $\underline{f}_A$  y  $\underline{f}_\lambda$  sean eliminadas. El problema elastodinámico tridimensional se ha reducido al sistema de EDO en Ecuación (1). Este puede integrarse directamente mediante métodos numéricos [9].

En el AMT se propone la solución armónica en el problema de vibración libre ( $\bar{\underline{f}}_q = \underline{0}$ ):

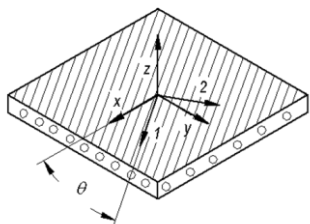
$$\underline{u}_q = \underline{\psi} e^{i\sqrt{\lambda}t} \rightarrow \underline{K}_q \underline{\psi} = \lambda \underline{M}_q \underline{\psi} \quad (4)$$

Donde  $\sqrt{\lambda} = \omega$  es la frecuencia natural (circular) de vibración y la solución del PVP en Ecuación (4) entrega los  $m$  (con  $m=n+r$  si se utilizan ecuaciones de restricción) pares propios  $\{\lambda_i, \underline{\psi}_i\}$ .

### 2.2. Contraste con resultados experimentales.

Considérese un sólido elástico de longitud  $lx=190\text{mm}$ , con sección transversal rectangular de dimensiones  $\{lz=3.175\text{mm}, ly=12.7\text{mm}\}$  sobre las direcciones  $\{z, y\}$  Dicho cuerpo está constituido por el material descrito en la Tabla 1, cuya dirección principal de anisotropía forma un ángulo  $\theta=30^\circ$  con la dirección  $x$  en el sistema de referencia.

Tabla 1 Propiedades elásticas.

Orientación	Propiedad	Magnitud[Pa]
	$C_{11}^{-1}$	$129.1 \times 10^9$
	$C_{22}^{-1} = C_{33}^{-1}$	$9.408 \times 10^9$
	$C_{44}^{-1}$	$2.541 \times 10^9$
	$C_{55}^{-1}$	$4.304 \times 10^9$
	$C_{66}^{-1}$	$5.157 \times 10^9$
	$C_{23}C_{22}^{-1} = C_{13}C_{11}^{-1} = C_{12}C_{11}^{-1}$	-0.3
	$\rho$	1551

El modelo discreto bidimensional posee 1024 elementos y 1663 GDL, las matrices de rigidez e inercia diferencial son respectivamente:

$$\mathbf{AE} = \begin{bmatrix} 867387 & 0 & 0 & 0 \\ & 1.46626 & -0.931983 & 0 \\ & & 1.32712 & 0 \\ \text{sim} & & & 11.6715 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{I} = \text{diag}(6254020, 6254020, 6254020, 89.31, 5.25, 84.06)10^{-6} \quad (6)$$

Considerando restringido el desplazamiento en una de las secciones extremas del sólido, se obtienen las 8 primeras frecuencias naturales utilizando 10 elementos unidimensionales.

### 2.3. Análisis estático.

En este caso la Ecuación(1) se reduce al sistema de ecuaciones algebraicas siguiente:

$$\mathbf{K}_q \mathbf{u}_q = \mathbf{f}_q \rightarrow \mathbf{u}_q = \mathbf{K}_q^{-1} \mathbf{f}_q \quad (7)$$

La Ecuación entrega la solución nodal  $\mathbf{u}_q$  y las fuerzas de restricción  $-\lambda_q$ .

Obtenida la solución nodal  $\mathbf{u}_q$ , de Ecuación(1) o Ecuación (7), y utilizando la Ecuación para obtener la matriz de deformaciones naturales  $\chi^{(e)}(\xi)$ , el campo de esfuerzos se recupera a partir de la Ecuación imponiendo  $\partial_x \chi_1 = \mathbf{0}_{4 \times 1}$ . En la formulación propuesta se obtiene la expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}^{(j)} (\mathbf{G}_x \Phi_0^{(j)} + \mathbf{G}_\psi \bar{\mathbf{U}}_1^{(j)}) \mathbf{T}_f \mathbf{B}_q^{(k)}(\xi) \mathbf{u}_q^{(k)} \quad (8)$$

Donde el pseudo-vector de esfuerzo en Ecuación (8) corresponde al elemento unidimensional  $k$  y bidimensional  $j$ , este ultimo definido en el dominio de la fase  $i$ . La inclusión de la matriz  $\mathbf{T}_f$  corresponde a la transformación de las deformaciones naturales asociadas a la matriz de rigidez diferencial definida en un sistema de referencia con origen en el centro tangencial. En el caso de que el CC haya sido obtenido en un sistema de referencia cuyo origen coincide con el centro tangencial, se tiene  $\mathbf{T}_f \equiv \mathbf{1}_4$ .

### 3. CONCLUSIONES.

Se desarrollo una metodología que permite obtener para un sólido cilíndrico compuesto en general, por fases con anisotropía constitutiva, un funcional energético unidimensional del cual se derivan, a partir del principio de Hamilton, las ecuaciones de movimiento sin establecer a priori el campo de desplazamientos en el sólido. A partir de este funcional fue formulado e implementado un elemento finito viga con capacidad para modelar problemas elastodinámicos en sólidos anisótropos esbeltos.

En el elemento viga formulado, se asume que el campo de desplazamiento complementario al roto-traslacional es constante sobre la directriz, o en forma equivalente que las deformaciones naturales de primer orden son uniformes. Entonces la formulación unidimensional será efectiva en general, esto es sin verificar la hipótesis mencionada, mientras los términos no considerados en la expresión de la energía de deformación, sean despreciables dentro de los requerimientos de aproximación en la solución del problema.

Se ha demostrado que mediante la recuperación del estado tridimensional de esfuerzos, el elemento unidimensional permite la evaluación esfuerzos con un nivel de detalle solo observable en el modelado sólido (MEF), cuya discretización a nivel de la sección transversal sea equivalente a la del modelo discreto bidimensional utilizado para obtener la rigidez diferencial. Se deduce que, si el comportamiento global de un sólido es predicho en forma aceptable por el elemento unidimensional, su desempeño será comparable con el modelado mediante elementos sólidos (MEF).

El número de GDL del problema resultante con elemento formulado se reduce notablemente respecto de elementos finitos de mayor jerarquía, esta ventaja se ve disminuida conforme lo hace la diferencia entre el orden de magnitud en las dimensiones (vigas no esbeltas) o se establece una dimensión intermedia (vigas de paredes delgadas). En los casos presentados,

el problema a resolver con elementos estructurales o sólidos, en el mejor de los casos, duplica el número de GDL del problema resultante a partir del elemento unidimensional. Aun en problemas simples, existen situaciones en las que utilizar el modelado sólido (MEF) requiere un número demasiado elevado de GDL para alcanzar el nivel de aproximación obtenido con el elemento unidimensional.

Las pruebas de verificación en problemas elastodinámicos indican una aproximación aceptable a la obtenida con elementos finitos de mayor jerarquía. La correlación con el modelado sólido (MEF) en problemas de vibración libre (AMT) bajo diversas configuraciones del material, es buena en general.

La correlación con resultados publicados en la literatura obtenidos con formulaciones apropiadas en problemas específicos (teorías ad hoc) es buena. La aproximación a los resultados experimentales (AME) presentados es aceptable. Sin embargo debe tenerse en cuenta que su validez como herramienta de verificación requiere la determinación fehaciente de las propiedades elásticas del material y correcta implementación de las condiciones de borde.

## 5. REFERENCIAS.

- [1] V. Giavotto, M. Borri, P. Mantegazza, G. Ghiringhelli, V. Carmaschi, G. Maffioli y F. Mussi, «Anisotropic Theory and Applications,» *Computers & Structures*, vol. 16, n° 1-4, pp. 403-413, 1983.
- [2] D. Hodges, A. Atdgan and B. Lee, "Modeling of Composite Beams and Plates for Static and Dynamic Analysis," Interim Semi-Annual Report NASA Grant NAG-I-1094, 17 January- 16 July 1990.
- [3] J.B.Kosmatka, «The Use of Cross-Section Warping Functions in Composite Rotor Blade Analysis,» Final Report Nasa-Cr-191772, 1992.
- [4] M. Živković, M. Kojić, R. Slavković y N. Grujović, «A General Beam Finite Element with Deformable Cross-Section,» *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, n° 190 , pp. 2651-2680, 2001.
- [5] W. Yu, D. Hodges, V. Volovoi y C. Cesnik, «On Timoshenko-Like Modeling of Initially Curved and Twisted Composite Beams,» *International Journal Of Solids And Structures*, n° 39 , p. 5101–5121, 2002.
- [6] W. Yu, V. Volovoi, D. Hodges y X. Hong, «Validation of The Variational Asymptotic Beam Sectional Analysis (VABS),» *AIAA Journal*, vol. 40, n° 10, 2002.
- [7] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, Toronto: University of Toronto Press, 1949.
- [8] L. Meirovitch, *Methods of Analytical Dynamics*, Mc. Graw-Hill, 1970.
- [9] K. Bathe, *Finite Element Procedures*, Pentice Hall, 1996.
- [10] M. Mitra, S. Gopalakrishnan y M. Seetharama Bhat, «A New Super Convergent Thin Walled Composite Beam Element for Analysis of Box Beam Structures,» *International Journal Of Solids And Structures*, n° 41, p. 1491–1518, 2004.
- [11] ANSYS, «Release 10.0 Documentation for ANSYS,» SAS IP, Inc, 2005.
- [12] T. Echarri Fernández, «Análisis Teórico-Experimental del Comportamiento Dinámico de Una Viga en Voladizo de Material Compuesto Laminado Reforzado con Fibras,» Tesis Magistral PUCP, Lima, Perú, 2009.
- [13] S. Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers, 1981.
- [14] S. Timoshenko y J. Goodier, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 1951.