Peer Review Journal
Rivista Italiana di Filosofia Analitica junior

Rivista Italiana di Filosofia Analitica Junior 2:2 (2011)
ISSN 2037-4445 ⓒ http://www.rifanalitica.it
Patrocinata dalla *Società Italiana di Filosofia Analitica*

INTERVISTA A GABRIELE LOLLI

Carlo Monti

PRESENTAZIONE Professore ordinario di Filosofia della matematica alla Scuola Normale dal 2008, si è laureato in matematica all'Università di Torino. Si è specializzato in Logica matematica alla Yale University sotto la guida del prof. Abraham Robinson.

Ha insegnato al Politecnico di Torino e nelle università di Salerno, Genova e Torino, per i corsi di laurea in matematica, informatica, filosofia e psicologia.

I suoi interessi di ricerca hanno riguardato inizialmente la teoria assiomatica degli insiemi, quindi le applicazioni della logica all'informatica, all'Intelligenza Artificiale e alle scienze cognitive e, a partire dagli anni ottanta, la storia e la filosofia della matematica e della logica. Attualmente i suoi studi sono rivolti alla dimostrazione matematica.

Tra le pubblicazioni più significative sono da menzionare: la raccolta di saggi Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche, il Mulino, Bologna, 1985; la cura dell'edizione italiana di A. M. Turing, *Intelligenza meccanica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1994; *Il riso di Talete*, Bollati Boringhieri, Torino, 1998, *Filosofia della matematica*, il Mulino, Bologna, 2002; *Da Euclide a Gödel*, il Mulino, Bologna, 2004; *QED Fenomenologia della dimostrazione*, Bollati Boringhieri, Torino, 2005; *Sotto il segno di Gödel*, il Mulino, 2007; *Discorso sulla matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2011; *La guerra dei trent'anni (1900-1930)*, ETS, Pisa, 2011.

Professor Lolli, a quali argomenti si sta interessando in questo momento? Un obiettivo generale a cui mi sto dedicando è quello di dare un contributo alla comprensione realistica delle vicende intellettuali che negli ultimi 150 anni hanno plasmato le diverse facce della matematica che si sono succedute, il che vuol dire in pratica la nascita della matematica astratta, lo sviluppo della metamatematica, la comparsa del calcolatore. Ho appena pubblicato una storia del programma di Hilbert e della logica matematica negli anni Venti, in *La guerra dei trent'anni*, ETS, Pisa, settembre 2011; forse l'anno prossimo sarà completata una ricostruzione della nascita della teoria degli insiemi, per le edizioni della Normale. Non è accettabile che continuino a tramandarsi versioni caricaturali di vicende di tale importanza e portata: personaggi schematici come burattini, geni a cui sono messe in bocca banalità, le banalità del facilmente comprensibile.

AUTORE. Carlo Monti. carlomonti83@gmail.com

So bene che anche i miei resoconti non saranno neutri né completi, ma almeno che si evitino le più grossolane incongruenze. Quanti sanno che la presentazione del formalismo da parte di von Neumann alla Conferenza di Königberg del 1930 descriveva il programma di Hilbert come la ricerca di una dimostrazione di conservatività dei concetti transfiniti rispetto a quelli finiti?

Anche le reazioni all'ortodossia paludata delle scuole (logicismo, formalismo, intuizionismo, secondo la classificazione impostasi subito dopo il 1930), e i tentativi di rivitalizzare la filosofia della matematica secondo il famoso manifesto di Reuben Hersh del 1976, che ha aperto la strada alle filosofie umanistiche della matematica, sono inficiate dal fatto che si prende come bersaglio polemico qualcosa di irreale; non si parla della matematica ma dell'immagine della matematica imputata alle scuole; si finisce così in polemiche ideologiche e sterili.

Un altro argomento più specifico che mi interessa ora, nell'ambito già frequentato della problematica della dimostrazione, è quello delle dimostrazioni fisiche, cioè le dimostrazioni (di teoremi matematici) che usano concetti e modellizzazioni fisiche del problema matematico. Si trovano spunti interessanti quasi solo nella scuola matematica russa, o degli emigrati russi, ma l'argomento è importante per i suoi riflessi sulla didattica negli anni di passaggio dalla matematica concreta a quella simbolica.

Esistono differenze (di approccio, di metodo, di obiettivi...) fra una filosofia della matematica analitica ed una "non-analitica"? Secondo lei una tale distinzione ha senso in filosofia della matematica? La domanda mi fa venire in mente l'apertura dell' *Enquiry Concerning Human Understanding* (1748) di David Hume, dove sono distinte due filosofie: una, facile [*easy*], è rivolta ai sentimenti delle persone per convincerle, e si basa su apologhi, esempi, retorica accattivante che stimola l'immaginazione e muove gli affetti. L'altra, difficile e profonda, è rivolta alla comprensione [*understanding*] degli esseri umani, alla ricerca dei principi che regolano l'intelletto [*understanding*] e che eccitano i sentimenti. I filosofi della prima specie vogliono solo rappresentare il senso comune con colori piacevoli, e confermarlo, e sono loro che hanno successo, non coloro che ragionano in astratto.

Non so se esista una definizione di filosofia analitica della matematica, ma si può supporre che comprenda in modo caratterizzante le analisi che fanno uso degli strumenti e dei risultati della ricerca logica; se è così, essa non può essere portatrice di messaggi rassicuranti, perché la logica nel corso dell'ultimo secolo ha messo in luce soprattutto limiti, aporie, vicoli ciechi. La filosofia facile, a prescindere dalla sua sofisticazione, è una filosofia consolatoria, che pretende di essere in grado di assicurare che tutto quello che il senso comune crede a proposito della matematica è vero e viene fondato da essa, magari in modi del tutto contrapposti: se si accetta la presentazione (talvolta ricostruzione) che viene offerta, si sa con soddisfazione che cosa sono gli oggetti matematici, e come possiamo conoscerli, e che tipo di certezza acquisiamo, e così via illudendosi.

Cellucci (*La Filosofia della Matematica del Novecento*, Laterza, 2007) sostiene che tutta (o gran parte) della filosofia della matematica sia minata alla base dal teorema di Gödel in quanto quest'ultima concepisce erroneamente la matematica come "metodo assiomatico". Secondo l'autore, invece, questa caratteristica della matematica (il metodo assiomatico) non sarebbe poi così essenziale. Che posto occupa, secondo Lei, il teorema di Gödel nella filosofia della matematica? È veramente così invasivo? Non credo che si possa riassumere in questo modo il pensiero di Cellucci, sarebbe un po' troppo semplicistico. La filosofia della matematica non può concepire la matematica secondo le sue preferenze; può concepirla solo come è, nella varietà dei suoi aspetti. È un fatto storico che dalla fine dell'Ottocento i matematici hanno scelto in modo quasi esclusivo l'organizzazione assiomatica per le loro teorie, ma hanno anche dovuto inserire nella loro logica da una parte l'infinito e dall'altra la calcolabilità effettiva; è un fatto storico inoltre che i più consapevoli tra i matematici si sono dedicati a chiarire il significato e i problemi che nascono dall'assiomatizzare concetti astratti. Ma i matematici non si dedicano prevalentemente a questo tipo di riflessione, anzi lo fanno solo eccezionalmente; normalmente, e nella quasi loro totalità, fanno altro. Se una filosofia della matematica si interessa solo del metodo assiomatico è certo molto limitata; si può legittimamente sostenere che la filosofia della matematica debba occuparsi anche o soprattutto dell'altro. Ma il teorema di Gödel si rischia di incontrarlo ugualmente, perché esso non ha a che fare tanto con l'attività di assiomatizzazione, quanto con alcune nostre capacità intellettuali che appaiono in conflitto e inconciliabili.

Il teorema di Gödel (il primo teorema di incompletezza) comporta che gli enunciati aritmetici veri nella struttura standard dei numeri naturali non possono essere assiomatizzati in modo effettivo, non formano un insieme semidecidibile (oltre a dire altre cose più specifiche). Questo fatto potrebbe anche esaurirsi lì, ma ha delle diramazioni o implicazioni inquietanti.

La struttura dei numeri naturali infatti è ben definita, in modo categorico (secondo un teorema di Dedekind), e tuttavia risulta sfuggente, secondo il teorema di Gödel. Se dalla definizione globale della struttura passiamo alle proprietà dei suoi elementi, ed elenchiamo quelle che conosciamo, che in ogni momento sono in numero finito o date da un numero finito di schemi di generazione, e le organizziamo in modo assiomatico in modo da concepire tutte le loro possibili conseguenze, non riusciamo a caratterizzare la struttura (cioè ce ne sono altre, non isomorfe, che soddisfano tutte le proprietà che abbiamo dimostrato o che sono così dimostrabili).

Pare che ci sia un'inesauribilità nascosta, che non si riesce a controllare; per quanto si raffini la descrizione con proprietà assodate, vere, ce ne è qualcuna che si sottrae alla descrizione e che non è nemmeno potenzialmente recuperabile con le capacità deduttive logiche, e se crediamo di individuarla ed aggiungerla ai nostri assiomi, la situazione si ripete.

Che tipo di definizione è quella, che ha una tale caratteristica di inesauribilità? Perché non potremmo mettere lei come unico assioma? Qualcuno ritiene che sia possibile e legittimo, soprattutto se pensa come i categorialisti a una trattazione che ha come oggetto le strutture piuttosto che i loro elementi. Ma è una definizione che ha un tipo di non effettività estremo, riferendosi all'insieme dei sottoinsiemi della struttura infinita. Per usarla nella deduzione delle proprietà dei numeri, invece che solo come definizione della struttura, dovremmo adottare una logica di cui non sappiamo elencare le regole.

Un matematico che lavori in altri campi può ugualmente incontrare questo fenomeno, lo incontrano per esempio quelli che studiano teoria degli insiemi e non riescono a determinare la cardinalità del continuo; e altre situazioni analoghe si sono sperimentate, con i numeri reali per esempio.

Questa è una delle cattive notizie accennate sopra; apparentemente, abbiamo capacità definitorie, per mezzo di concetti che sembrano non ambigui e fondamentali, che non vanno d'accordo con le nostre capacità deduttive. In altri termini, fondiamo le teorie di base con una logica che non è meccanizzabile, e questo proprio nell'epoca della meccanizzazione.

Tuttavia l'inesauribilità è una caratteristica positiva; il teorema di Gödel (questa volta in combinazione con il secondo) ci dice che tale inesauribilità è una condizione vitale, come amava sottolineare Gödel, quasi genetica: per la soluzione di problemi, occorre utilizzare concetti astratti (rispetto ai dati del problema); i concetti astratti, se ora generalizziamo con cautela, diventano generatori di conoscenze e tecniche manipolabili in modo effettivo; la contemplazione delle conoscenze finora raggiunte ci spinge ad aggiungere nuovi principi a quelli dati, attraverso la considerazione della loro non contradditorietà. Il concetto stesso di astratto potrebbe essere definito in questo modo, come riflessione metateorica sugli strumenti disponibili.

Non è detto che quello descritto sia l'unico processo di ampliamento delle assunzioni matematiche; tanti problemi vengono affrontati e risolti con idee nuove perché la direzione della ricerca spinge in una determinata direzione, e le soluzioni non hanno nulla a che vedere con la dialettica dell'incompletezza. Tuttavia un filosofo non può restare indifferente di fronte a fenomeni come questo. Anzi, il teorema di incompletezza potrebbe essere un sostegno per una filosofia della matematica centrata sull'inesauribilità; Zermelo sosteneva che la generazione di ordinali e di modelli della teoria degli insiemi di base era inesauribile per la natura dello spirito umano, ma Gödel ha fornito una spiegazione e una tecnica quasi meccanica per la manifestazione di tale inesauribilità.

Che posto occupa il problema ontologico nella filosofia della matematica e qual è la sua importanza? Il problema ontologico è stato sviscerato in tutti i suoi risvolti, da Carnap e Quine in avanti; per chi non lo considera superato, la dicotomia nominalismo/realismo si è arricchita con concetti matematici nuovi, per esempio quello di struttura; ma restano sostanzialmente le alternative che si sono presentate fin dall'inizio dell'età contemporanea: o si accetta solo il finito, o meglio l'infinito potenziale, oppure il numerabile, oppure l'infinito attuale. Si potrebbe dire che si è arrivati non a un punto morto, ma a un punto in cui si sa tutto di tutte le alternative, e non c'è alcun esperimento cruciale per decidere per una soluzione o l'altra. Se possibile, si cerca di evadere il problema, immaginando giustificazioni della matematica che non impegnino all'esistenza delle strutture, né nel mondo reale né in quello platonico (per esempio Chihara ha fatto questo tentativo).

Alcune volte può sembrare che i vari dibattiti filosofici siano semplicemente (semplicisticamente) una questione di scelte, di posizioni assunte a priori e giustificate a posteriori. Secondo Lei quali sono, se esistono, i criteri che dovrebbero guidare la valutazione delle varie posizioni in gioco? Esistono dei "fatti" di cui una teoria filosofica debba dare ragione per essere ritenuta valida? A ben guardare, le varie filosofie della matematica non si si confrontano con gli stessi problemi; nascono da sensibilità diverse per diversi aspetti della matematica; quindi ipostatizzano un elemento e ne fanno il nucleo essenziale e definitorio della matematica. I neo-empiristi per esempio sono attratti dalle attività di ricerca sperimentale e di formazione di congetture, e arrivano a dire che le verità matematiche sono fondate induttivamente; i sociologi della conoscenza invece sono attenti alla determinazione sociale, e concludono che la dimostrazione è una convenzione; le due problematiche si sfiorano ma non sono rivolte allo stesso oggetto. In pratica tutte (o quasi) le filosofie mettono in evidenza qualche fattore importante dell'attività matematica; questo non significa che sia consigliabile adottare una posizione sincretista, che prende quello che di buono c'è in ciascuna posizione, perché la sintesi dei vari aspetti è proprio quello che fa della matematica la matematica, la sintesi è nella matematica, non una sintesi esterna che possa essere fatta dalla filosofia.

I fatti di cui una teoria filosofica della matematica dovrebbe dare ragione sono ovviamente, verrebbe da dire, i fatti matematici, cioè le ricerche, i teoremi, le teorie, i concetti e le loro relazioni, la costruzione delle dimostrazioni, l'invenzione di strategie argomentative, i diversi tipi di pensiero che sono attivati. Ma cosa vuol dire darne ragione? In termini di un altro sistema di concetti? O potrebbe significare spiegare come i diversi fatti si integrano per la riuscita dell'obiettivo generale? Senonché non è facile indicare un obiettivo generale: una risposta è che è la conoscenza del mondo, una volta soprattutto fisico, ora anche umano, ma non tutti i matematici sarebbero d'accordo.

La filosofia della pratica matematica, che è la più recente proposta di filosofia della matematica, assume i fatti matematici come proprio oggetto, più esattamente i fatti nel loro farsi. Le ricerche che confluiscono sotto questa etichetta mettono in luce aspetti di estremo interesse di quello che, per tornare a Hume, si potrebbe chiamare il dispiegamento dello *human understanding* nell'attività dei matematici; la varietà delle ricerche per ora è poco omogenea (si va dal ruolo della visualizzazione a quello del calcolatore). Al di là della funzione descrittiva, e del messaggio pluralista, rispetto a metodi, obiettivi, strumenti, strategie messe in atto nella pratica, il denominatore comune vorrebbe essere quello di portare alla luce gli aspetti della pratica dei matematici che hanno una rilevanza filosofica. Il criterio di rilevanza filosofica tuttavia dovrebbe essere dettato, nelle intenzioni, dalla filosofia, non dalla matematica; per ora non è chiaro il denominatore comune di coloro che si riconoscono in questa posizione; genericamente, sembra di poter riconoscere come filosofico l'interesse generico per lo *human understanding* in senso lato, inclusa la psicologia.

Alcuni autori hanno sostenuto che la filosofia della matematica non influenza minimamente il lavoro dei matematici. Questo è vero secondo Lei? Quanto i matematici sono interessati al dibattito sulla filosofia della matematica? Quelli che hanno una filosofia militante, come detto sopra, ovviamente sono influenzati nel loro lavoro dalla loro filosofia; ma sono una minoranza numericamente trascurabile, anche se formano un'*élite* nobile e credo più influente del loro peso numerico; in fondo sono rispettati perché hanno delle convinzioni, sia pure eccentriche, se fanno buona matematica. I matematici *operai* (i cosiddetti *working mathematicians*) non sono interessati e non vogliono sentire parlare di filosofia. Un motivo è che ne hanno sentito parlare male, della filosofia e della logica. Hanno sentito dire, dai resoconti correnti, che i logici volevano formalizzare tutta la matematica, o costringere a svolgerla tutta nella teoria degli insiemi, che i formalisti volevano dimostrarne la non contraddittorietà, ma non si può, e poi che interesse ha, se si incontra una contraddizione si torna indietro e si corregge (diceva Bourbaki), e che cosa importa se una teoria è incompleta, quello che interessa sono i teoremi che si dimostrano. In una parola, i matematici credono che i filosofi, e soprattutto i logici, vorrebbero insegnare a loro come devono fare matematica. Tendono anche a pensare che i filosofi fomentino tempeste in un bicchiere d'acqua, come a proposito della dimostrazione assistita del teorema dei quattro colori. “Lasciateci lavorare”, è la reazione comune. La responsabilità di questo atteggiamento, quando non è opportunista come era in Bourbaki, è anche, come si diceva all'inizio, del modo come la storia dei fondamenti è stata tramandata.

Nel Suo ultimo libro (*Discorso sulla Matematica*) traccia dei paralleli tra la pratica matematica e quella letteraria. A Suo parere è possibile (ed auspicabile) un avvicinamento fra questi due ambiti disciplinari? Cosa possono imparare i matematici dai “letterati” (e viceversa)? Io ho sostenuto nel libro che vi è una coincidenza sia tra le capacità che si esprimono nella creatività letteraria e quelle che sono all'opera nella creatività matematica, sia delle qualità estetiche che si godono nei loro prodotti più riusciti. La tesi è illustrata con esempi che confermano le indicazioni di Calvino sui valori della leggerezza, rapidità, esattezza, visibilità e molteplicità. I letterati sono molto più abituati a riflettere sulla letteratura di quanto non lo siano i matematici a proposito della matematica. La società ha affiancato alla letteratura la critica letteraria, un'attività riconosciuta, magari non molto amata dagli artisti, che ha una funzione importante nell'aiutare i fruitori delle opere a capire le ragioni del loro apprezzamento estetico e i motivi del valore di queste opere. Non è un caso che sia stato Calvino a mettere in evidenza quelle caratteristiche, da lui riconosciute o ricercate nelle opere letterarie, che ora, proiettate sulla matematica, illuminano tanti aspetti coinvolti nella costruzione di un pezzo di matematica; aspetti che spesso il matematico stesso non è in grado di esplicitare, ma che fanno sentire anche a chi non è esperto la differenza tra quello che vale e quello che è caduco. Non tutte le dimostrazioni o le idee matematiche ci meravigliano, ci sorprendono nello stesso modo, come non tutte le poesie ci toccano con la stessa intensità. Per esempio una dimostrazione con figure, senza parole, di una formula numerica (si pensi a quella per la somma dei primi n numeri) ci fa provare i brividi del pensiero vero, quello dove si cambiano le carte in tavola (la rappresentazione dei dati), si affronta il problema da una diversa angolazione, si ottiene una risposta inaspettata ma evidente; quale differenza se la confrontiamo con la dimostrazione numerica, e con la delusione delle dimostrazioni per induzione che spesso non fanno capire il perché del risultato! Di fronte a una soluzione geniale proviamo la stessa emozione di quando leggiamo di Beatrice che "dà per gli occhi una dolcezza al core, / che intender non la può chi no la prova", rispetto a una qualsiasi altra descrizione dell'amore.

Ma non voglio fare propaganda alla mia tesi, né lanciare una nuova filosofia; l'accostamento tra matematica e opere d'arte, letterarie o musicali, in fondo non è peregrino, anche se penso che possa essere spinto più avanti e che possa essere qualcosa di più di una superficiale analogia. Ritengo tuttavia che un compito paragonabile a quello della critica letteraria potrebbe essere svolto dalla filosofia della matematica, ispirandosi alla prima (per fare un esempio, la messa in luce dell'uso dell'iperbaton da parte di Leopardi): far capire dove si nasconde, come si esprime l'arte che la costruisce, nei suoi risultati meglio riusciti. Talvolta basta raccontare ed analizzare certe dimostrazioni, alcune di quelle epocali di Dedekind o di Zermelo per esempio, ma anche quella di Andrew Wiles: lì è la vera matematica, ed è tenuta nascosta, inaccessibile al pubblico.

Quali sono attualmente gli autori più importanti in filosofia della matematica? Alcune figure che negli anni passati hanno catalizzato l'attenzione sulle loro opere sono ancora attive, mentre alcuni filosofi sono passati ad altri interessi, come per esempio H. Putnam o Ph. Kitcher. Tra i primi si possono ricordare J. P. Burgess e G. Rosen nominalisti; H.H. Field, nominalista e sostenitore del realismo modale; C. S. Chihara sull'esistenza matematica; M. D. Resnik su Frege e sulla teoria dei *pattern*; S. Shapiro su strutturalismo e sulla logica del secondo ordine; P. Maddy su realismo e naturalismo; M. Steiner sull'applicabilità della matematica (oltre a essere uno studioso, tra i tanti, di Wittgenstein). Tra gli autori di formazione logica, Ch. Parsons, S. Feferman, W. Tait hanno recentemente raccolto la loro ricca produzione in volumi organici che diventeranno dei classici. Nomi nuovi emergenti sono M. Detlefsen (sui problemi connessi alla dimostrazione), D. Corfield (filosofia della "vera" matematica), E. R. Grosholz (sull'ambiguità), C. Pincock (sulla matematica applicata).

Bisogna tuttavia tenere presente che i filosofi della matematica più influenti sono i matematici stessi, o almeno quelli di essi capaci di una riflessione sul nuovo; è stato così un secolo fa, lo è ancora, in misura minore solo perché i problemi sono meno drammatici. La problematica ontologica e quella della ricerca di nuovi principi si trova soprattutto nei cultori di teoria degli insiemi (notizie dalla capitale arrivano al mondo filosofico attraverso meritori lavori come quelli di Penelope Maddy o di Tania Arrigoni); per la matematica sperimentale è meglio rivolgersi a J. M. Borwein che non a Hilary Putnam; per le applicazioni della matematica a Ed Witten o a Yuri Manin.

Può consigliare una lettura che possa introdurre al dibattito attuale in filosofia della matematica? Se si vuole avere un panorama delle posizioni che verso la fine del ventesimo secolo hanno rotto la situazione allora stagnante, si può consultare l'antologia curata da Thomas Tymoczko, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1998, con scritti di Lakatos, Putnam, Hersh, Davis, Wang, Grabiner e altri; vi si trovano i vari filoni delle filosofie cosiddette umanistiche. Per quel che riguarda la filosofia della pratica matematica, che come abbiamo detto è la posizione più attuale, si può vedere Paolo Mancosu (ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford, 2008.

Ma una sola lettura non è sufficiente, perché il panorama è molto variegato; non so se questo sia un segno di vitalità o di debolezza; due titoli introduttivi sono S. Shapiro, *Thinking about Mathematics*, Oxford Univ. Press, 2000 e G. Lolli, *Filosofia della matematica*, il Mulino, 2002; non essendo possibile una rassegna completa mi limito a indicare tre titoli, uno per il naturalismo, sopra citato, di Penelope Maddy, *Naturalism in Mathematics*, Oxford Univ. Press, 1997; uno sulla fenomenologia, di Richard Tieszen, *Phenomenology, Logic and the Philosophy of Mathematics*, Cambridge Univ. Press, 2005; e uno sul problema dell'applicabilità della matematica, di Mark Steiner, *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Harvard Univ. Press, 1998. Per altre indicazioni rinvio alla bibliografia relativa nel sito dell'Aila: http://www.ailalogica.it/didattica/bibliografie.php.