Pelabelan Total Super (a,d)-Sisi Antimagic Pada Graf Buah Naga

Agnes Ika Nurvitaningrum[1,2], Dafik[1,2], Susi Setiawani[2]
[1] CGANT- University of Jember
[2] Department of Mathematics Education FKIP University of Jember,
(agnesika76,d.dafik,setiawanisusi@gmail.com

Abstract

A graph G is called an (a,d)-edge-antimagic total labeling if there exist a one-to-one mapping $f : f(V) = \{1, 2, 3, ..., p\} \rightarrow f(E) = \{1, 2, \dots, p + q\}$ such that the edge-weights, $w(uv) = f(u) + f(v) + f(uv), uv \in E(G)$, form an arithmetic progression $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(q-1)d\}$, where $a > 0$ and $d \geq 0$ are two fixed integers, form an arithmetic sequence with first term a and common difference d. Such a graph G is called *super* if the smallest possible labels appear on the vertices. In this paper we recite super (a,d)-edge-antimagic total labelling of connected Dragon Fruit Graph. The result shows that Dragon Fruit Graph have a super edge antimagic total labeling for $d \in 0, 1, 2$.

Key Words : *(a,d)-edge-antimagic total labeling, super (a,d)-edge-antimagic total labeling, Dragon Fruit Graph..*

Pendahuluan

Matematika merupakan salah satu disiplin ilmu yang mendasari dari ilmu pengetahuan yang lain. Sebagian besar masalah kehidupan sehari-hari dapat di abstraksikan sebagai masalah yang berkaitan dengan himpunan benda-benda dan relasi pada benda-benda tersebut yang tentunya terkait dengan teorema yang terkandung dalam matematika. Matematika terdiri dari beberapa cabang ilmu, suatu pembelajaran tentang aplikasi dari Matematika Diskrit yang terkenal yaitu teori graf. Terdapat berbagai jenis tipe pelabelan dalam graf, salah satunya adalah pelabelan total super(a,d)-sisi antimagic (SEATL), dimana a bobot sisi terkecil dan d nilai beda. Untuk lebih detail memahami tentang graf terdapat di [2],[9],[12],[17].

Dalam artikel ini akan dibahas mengenai salah satu topik dalam teori graf yakni pelabelan graf. Pelabelan graf G adalah sebuah pemetaan dari elemen-elemen graf G (V(G);E(G))terhadap bilangan bulat positif. Jika domainnya adalah himpunan titik G maka pelabelannya disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), sedangkan apabila domainnya adalah himpunan sisi G maka pelabelannya disebut pelabelan sisi (*edge labeling*). Jika domainnya adalah kedua himpunan tersebut maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labeling*). Untuk lebih detail mengenai definisi dari pelabelan graf dapat ditemukan di [8],[11], and [14].

Pelabelan dikenalkan oleh Simanjuntak *at al.* di [15], Selanjutnya pelabelan magic diperkenalkan oleh Kotzig dan Rosa [1]. Terdapat banyak jenis pelabelan salah satunya adalah pelabelan titik, pelabelan sisi. Dafik di [3, 4, 5, 6, 7] menemukan beberapa labelan graf, antara lain pelabelan total super (a,d)-sisi-antimagic pada graf $mK_{n,n,n}$. S. Arumugam dan M. Nalliah [16], mempublikasikan *Super(a,d)-edge antimagic total labelings of friendship graphs.* Dalam artikel ini akan dibahas mengenai pelabelan total super (a, d)-sisi-antimagic pada graf buah naga.

Lemma yang digunakan

Kita menemukan hasil penelitian sebuah graf agar termasuk dalam pelabelan total super (a,d)-sisi antimagic menggunakan beberapa lemma. Yang pertama ialah kita menentukan batas atas d yang mungkin. Lemma yang pertama ini, terdapat di [10].

◇ **Lemma 1** *Jika sebuah graf (p, q) adalah pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic maka $d \leq \frac{2p+q-5}{q-1}$*

Bukti Misalkan graf (p, q) mempunyai pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic dengan $f(V) = \{1, 2, 3, ..., p\}$ dan $f(E) = \{p + 1, p + 2, ..., p + q\}$ dan pemetaan $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., p+q\}$. Nilai minimum yang mungkin dari bobot sisi terkecil adalah dengan menjumlahkan dua label titik terkecil (1 dan 2) dengan satu label sisi terkecil $(p + 1)$, sehingga diperoleh:
$1 + (p + 1) + 2 = p + 4$. Jika himpunan bobot sisi sebuah graf adalah $\{a, a + d, a + 2d, ..., a + (q - 1)d\}$ dimana a merupakan bobot sisi terkecil, maka dapat ditulis $p + 4 \leq a$. Sedangkan pada sisi yang lain, nilai maksimum yang mungkin dari bobot sisi terbesar adalah dengan menjumlahkan dua label titik terbesar ($(p - 1)$ dan p) dengan satu label sisi terbesar $(p + q)$, sehingga diperoleh $(p - 1) + (p + q) + p = 3p + q - 1$. Dari sifat bobot SEATL yang menyatakan bahwa $a + (q - 1)d$ adalah suku terbesar, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad a + (q - 1)d \leq 3p + q - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (p + 4) + (q - 1)d \leq 3p + q - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad d \leq \frac{3p + q - 1 - (p + 4)}{q - 1} \\
&\Leftrightarrow \quad d \leq \frac{2p + q - 5}{q - 1}
\end{aligned}$$

□

Lemma yang kedua yang ditemukan oleh Figueroa-Centeno di [13],

◇ **Lemma 2** *Sebuah* (p, q)*-graf* G *adalah super sisi ajaib jika dan hanya jika fungsi bijektif* $f : V(G) \to \{1, 2, \ldots, p\}$ *sedemikian hingga himpunan* $S = \{f(u)+f(v) : uv \in E(G)\}$ *terdiri dari bilangan bulat* q *berturut-turut.*

Lemma ketiga menggunakan lemma milik Martin Baca di [**?**].

◇ **Lemma 3** *Misalkan* G_s *untuk* $s = 1, 2, \ldots, m$ *adalah graf dengan jumlah titik* p *dan jumlah sisi* q *dan memiliki pelabelan super* $(a, 1)$*-EAT. Maka, gabungan saling lepas dari* $\cup_{s=1}^{m} G_s$ *juga memiliki super* $(b, 1)$*-EAT.*

Bukti. Misalkan G_s, $s = 1, 2, \ldots, m$ adalah sebuah graf yang memiliki p titik dan q sisi. Perlu diketahui bahwa G_i tidak harus isomofis dengan G_j untuk $i = j$. Misalkan untuk setiap G_s, $s = 1, 2, \ldots, m$ memiliki sebuah pelabelan super $(a, 1)$-EAT berdasarkan f_s, sedemikian hingga:

$$
\begin{aligned}
f_s &= V(G_s) \to \{1, 2, \ldots, p\} \\
&= E(G_s) \to \{p + 1, p + 2, \ldots, p + q\}
\end{aligned}
$$

dan $\{f_s(u) + f_s(v) + f_s(uv); uv \in E(G_s)\} = \{a, a + 1, \ldots, a + q - 1\}$

Definisi pelabelan f untuk semua titik dan sisi dari $\cup_{s=1}^{m} G_s$ adalah sebagai berikut:

$$
f(x) = \begin{cases} m[(f_1)_s(x) - 1] + s, \text{ jika } x \in V(G_s) \\ m(f_1)_s(x) + 1 - s, \text{ jika } x \in E(G_s) \end{cases}
$$

Bobot total dari gabungan $\cup_{s=1}^{m} G_s$ adalah $\{f(u) + f(v) + f(uv) : uv \in E(\cup_{s=1}^{m} G_s)\}$ sama dengan $\{m(a - 2) + 2, m(a - 2) + 3, \ldots, m(a + q - 2) + 1\}$.

Hasil Penelitian

Dalam hal ini akan disajikan hasil penelitian terkait dengan pelabelan total super (a, d)-sisi antimagic pada graf buah naga $Df_{m,n}$. Jika $Df_{m,n}$ memiliki pelablen total super (a, d)-sisi antimagic untuk $p = 4n + 2nm$ and $q = 6n + 3nm - 1$, berdasarkan lemma 1 batas atas nilai d adalah $d \le 2$ atau $d \in \{0, 1, 2\}$. Lemma 4 adalah lemma yang berkaitan dengan pelabelan titik $(a, 1)$-sisi Antimagic pada $6n + 3nm - 1$

◇ **Lemma 4** *Ada pelabelan titik* $(\frac{n+3}{2} + 1, 1)$*-sisi antimagic pada graf buah naga* $Df_{m,n}$ $m \ge 2$*,* m *genap dan* $n \ge 1$*,* n *ganjil.*

Bukti. Labeli titik graf buah naga $Df_{m,n}$ dengan fungsi bijektif f_1 yang didefinisikan sebagai pelabelan $f_1 : V(Df_{m,n}) \to \{1, 2, \ldots, 4n + 2mn\}$ maka pelabelan f_1 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f_1(x_i) = \begin{cases} \frac{i+1}{2}, \text{untuk i ganjil} \\ \frac{n+i+1}{2}, \text{ untuk i genap} \end{cases}$$

$$f_1(y_{i,k}) = \begin{cases} \frac{2kn+i}{2}, \text{untuk i genap dan} \, 1 \leq k \leq \frac{m}{2} \\ \frac{2kn+n+i}{2}, \text{untuk i ganjil dan} \, 1 \leq k \leq \frac{m}{2} \\ \frac{n(2k-4)+i}{2}, \text{untuk i genap dan } \frac{m+6}{2} \leq k \leq m+2 \\ \frac{n(2k-3)+i}{2}, \text{untuk i ganjil dan } \frac{m+6}{2} \leq k \leq m+2 \\ \frac{n(2m+2)+i}{2}, \text{untuk i genap dan} \, k = \frac{m+2}{2} \\ \frac{n(2m+3)+i}{2}, \text{untuk i ganjil dan} \, k = \frac{m+2}{2} \\ \frac{n(3m-2k+10)-2i+2}{2}, \text{v } 1 \leq i \leq n \text{ dan} \, k = \frac{m+4}{2} \end{cases}$$

$$f_1(x_{i,j}) = \begin{cases} \frac{2n(m+j+2)+i}{2}, \text{untuk i genap dan} \, 1 \leq j \leq m \\ \frac{n(2m+2j+5)+i}{2}, \text{untuk i ganjil dan} \, 1 \leq j \leq m \end{cases}$$

$$f_1(z_i) = \begin{cases} \frac{n(4m+6)+i+1}{2}, \text{untuk i ganjil} \\ \frac{n(4m+7)+i+1}{2}, \text{untuk i genap} \end{cases}$$

Jika w_{f_1} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan titik f_1 maka fungsi bijektif $Df_{m,n}$ dapat ditentukan melalui pengamatan pola dan penggunaan konsep barisan aritmatika sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
w^1_{f_1}(x_i x_{i+1}) &= \tfrac{n+3+2i}{2}, \text{untuk } 1 \ \leq i \leq n-1 \\
w^2_{f_1}(x_i y_{i,k}) &= \tfrac{n+2kn+2i+1}{2}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \ 1 \ \leq k \leq \tfrac{m}{2} \\
w^3_{f_1}(x_i y_{i,k}) &= \tfrac{n(2k-3)+2i+1}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ \tfrac{\text{m}+6}{2} \ \leq k \leq m+2 \\
w^4_{f_1}(x_i y_{i,k}) &= \tfrac{n(2m+3)+2i+1}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ \text{k} = \tfrac{\text{m}+2}{2} \\
w^5_{f_1}(x_i y_{i,k}) &= \tfrac{n(2m+6)-i+3}{2}, \text{untuk i ganjil}, \ \text{k} = \tfrac{\text{m}+4}{2} \\
w^6_{f_1}(x_i y_{i,k}) &= \tfrac{n(2m+7)-i+3}{2}, \text{untuk i genap}, \ \text{k} = \tfrac{\text{m}+4}{2} \\
w^7_{f_1}(x_i x_{i,j}) &= \tfrac{n(2m+2j+5)+2i+1}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m \\
w^8_{f_1}(y_{i,\frac{m+2}{2}} y_{i,\frac{m+4}{2}}) &= \tfrac{n(4m+8)-i+2}{2}, \text{untuk i genap} \\
w^9_{f_1}(y_{i,\frac{m+2}{2}} y_{i,\frac{m+4}{2}}) &= \tfrac{n(4m+9)-i+2}{2}, \text{untuk i ganjil} \\
w^{10}_{f_1}(z_i y_{i,k}) &= \tfrac{n(4m+2k+7)+2i+1}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ 1 \ \leq k \leq \tfrac{m}{2} \\
w^{11}_{f_1}(z_i y_{i,k}) &= \tfrac{n(4m+2k+3)+2i+1}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ \tfrac{\text{m}+6}{2} \ \leq k \leq m+2 \\
w^{12}_{f_1}(z_i y_{i,k}) &= \tfrac{n(6m+9)+2i+1}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ \text{k} = \tfrac{\text{m}+2}{2} \\
w^{13}_{f_1}(z_i y_{i,k}) &= \tfrac{n(6m+12)-i+3}{2}, \text{untuk i ganjil}, \ \text{k} = \tfrac{\text{m}+4}{2} \\
w^{14}_{f_1}(z_i y_{i,k}) &= \tfrac{n(6m+13)-i+3}{2}, \text{v i genap}, \ \text{k} = \tfrac{\text{m}+4}{2}
\end{aligned}$$

Rumusan tersebut membentuk himpunan $\cup_{t=1}^{14} w^t_{f_1} = \{\frac{n+3}{2} + 1, \frac{n+3}{2} + 2, \frac{n+3}{2} + 3, \ldots, \frac{n(6m+13)+1}{2}\}$. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa f_1 adalah suatu pelabelan titik $(\frac{n+3}{2} + 1, 1)$. □

◇ **Teorema 0.1** *Ada pelabelan total super* $(\frac{n(10m+21)+3}{2}, 0)$*-sisi antimagic dan* $(\frac{4mn+9n+7}{2}, 2)$*-sisi antimagic pada graf buah naga* $Df_{m,n}$ $m \geq 2$*, m genap dan* $n \geq 1$*, n ganjil.*

Bukti. Gunakan pelabelan titik f_1 untuk melabeli titik graf buah naga $Df_{m,n}$, kemudian definisikan label sisi $f_2 : E(Df_{m,n}) \rightarrow \{2mn+4n+1, 2mn+4n+2, \ldots, 5mn+10n-1\}$, sehingga label sisi f_2 untuk pelabelan total super $(a,0)$-sisi antimagic pada graf $Df_{m,n}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{lcl}
f_2(z_i y_{i,k}) & = & \frac{n(4m+8)+i}{2}, \text{ untuk i genap, } \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+4}{2} \\
f_2(z_i y_{i,k}) & = & \frac{n(4m+9)+i}{2}, \text{ untuk i ganjil, } \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+4}{2} \\
f_2(z_i y_{i,k}) & = & n(2m+6)-i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+2}{2} \\
f_2(z_i y_{i,k}) & = & n(3m-k+9)-i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ \frac{\mathrm{m}+6}{2} \leq k \leq m+2 \\
f_2(z_i y_{i,k}) & = & n(3m-k+7)-i+1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq k \leq \frac{m}{2} \\
f_2(y_{i,\frac{m+2}{2}} y_{i,\frac{m+4}{2}}) & = & \frac{n(6m+12)+i+1}{2}, \text{ untuk i ganjil} \\
f_2(y_{i,\frac{m+2}{2}} y_{i,\frac{m+4}{2}}) & = & \frac{n(6m+13)+i+1}{2}, \text{ untuk i genap} \\
f_2(x_i x_{i,j}) & = & n(4m-j+8)-i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m \\
f_2(x_i y_{i,k}) & = & \frac{n(8m+14)+i}{2}, \text{ untuk i genap, } \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+4}{2} \\
f_2(x_i y_{i,k}) & = & \frac{n(8m+15)+i}{2}, \text{ untuk i ganjil, } \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+4}{2} \\
f_2(x_i y_{i,k}) & = & n(4m+9)-i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+2}{2} \\
f_2(x_i y_{i,k}) & = & n(5m-k+12)-i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ \frac{\mathrm{m}+6}{2} \leq k \leq m+2 \\
f_2(x_i y_{i,k}) & = & n(5m-k+10)-i+1, \text{untuk } 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq k \leq \frac{m}{2} \\
f_2(x_i x_{i+1}) & = & n(5m+10)-i, \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1
\end{array}
$$

Jika W_{f_2} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total graf buah naga berdasarkan penjumlahan bobot sisi dengan label sisinya maka W_{f_2} dapat diperoleh dengan merumuskan jumlah bobot sisi EAVL w_{f_1} dan rumus label sisi f_2 dengan syarat batas i, j, k yang bersesuaian, sehingga himpunan bobot sisi untuk W_{f_2} dapat ditulis $\cup_{t=1}^{14} W_{f_2}^t = \{\frac{n(10m+21)+3}{2}, \frac{n(10m+21)+3}{2}, \ldots, \frac{n(10m+21)+3}{2}\}$. Dapat disimpulkan bahwa graf buah naga $Df_{m,n}$ mempunyai pelabelan total super(a,d)-sisi antimagic dengan $a = \frac{n(10m+21)+3}{2}$ dan $d = 0$, dengan kata lain graf buah naga $Df_{m,n}$ mempunyai pelabelan total super $(\frac{n(10m+21)+3}{2}, 0)$-sisi antimagic.

Jika $f_2(z)$ adalah label sisi $Df_{m,n}$ untuk $d = 0$ maka berdasarkan urutan peletakkan label sisi yang ditetapkan pada letak bobot sisi EAVL, maka $f_3(z)$ dapat dirumuskan sebagai label sisi $Df_{m,n}$ untuk $d = 2$. Misalkan f_3 adalah label sisi untuk $d = 2$, maka berdasarkan rumusan di atas untuk label sisi $d = 2$ diperoleh hasil sebagai berikut:

$$
\begin{array}{lcl}
f_3(x_ix_{i+1}) & = & \frac{n(4m+8)+2i}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n-1 \\
f_3(x_iy_{i,k}) & = & \frac{n(4m+2k+8)+2i-2}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ 1 \ \le k \le \frac{m}{2} \\
f_3(x_iy_{i,k}) & = & \frac{n(4m+2k+4)+2i-2}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \frac{\mathrm{m+6}}{2} \ \le k \le m+2 \\
f_3(x_iy_{i,k}) & = & \frac{n(6m+10)+2i-2}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+2}}{2} \\
f_3(x_iy_{i,k}) & = & \frac{n(6m+13)-i}{2}, \text{untuk i ganjil},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+4}}{2} \\
f_3(x_iy_{i,k}) & = & \frac{n(6m+14)-i}{2}, \text{untuk i genap},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+4}}{2} \\
f_3(x_ix_{i,j}) & = & \frac{n(6m+2j+12)+2i-2}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m \\
f_3(y_{i,\frac{m+2}{2}}y_{i,\frac{m+4}{2}}) & = & \frac{n(8m+15)-i-1}{2}, \text{untuk i genap} \\
f_3(y_{i,\frac{m+2}{2}}y_{i,\frac{m+4}{2}}) & = & \frac{n(8m+16)-i-1}{2}, \text{untuk i ganjil} \\
f_3(z_iy_{i,k}) & = & \frac{n(8m+2k+14)+2i-2}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ 1 \ \le k \le \frac{m}{2} \\
f_3(z_iy_{i,k}) & = & \frac{n(8m+2k+10)+2i-2}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \frac{\mathrm{m+6}}{2} \ \le k \le m+2 \\
f_3(z_iy_{i,k}) & = & \frac{n(10m+16)-2i-2}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+2}}{2} \\
f_3(z_iy_{i,k}) & = & \frac{n(10m+19)-i}{2}, \text{untuk i ganjil},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+4}}{2} \\
f_3(z_iy_{i,k}) & = & \frac{n(10m+20)-i}{2}, \text{untuk i genap},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+4}}{2}
\end{array}
$$

Jika W_{f_3} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total berdasarkan pelabelan f_3 maka rumus label sisi f_3 dengan syarat batas i, j, dan k yang bersesuaian dan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{lcl}
W^1_{f_3}(x_iy_{i,k}) & = & \frac{n(4m+9)+4i+3}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n-1 \\
W^2_{f_3}(x_iy_{i,k}) & = & \frac{n(4m+2k+9)+4i-1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ 1 \ \le k \le \frac{m}{2} \\
W^3_{f_3}(x_iy_{i,k}) & = & \frac{n(4m+4k+1)+4i-1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \frac{\mathrm{m+6}}{2} \ \le k \le m+2 \\
W^4_{f_3}(x_iy_{i,k}) & = & \frac{n(8m+13)+4i-1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+2}}{2} \\
W^5_{f_3}(x_iy_{i,k}) & = & \frac{n(8m+19)-2i+3}{2}, \text{untuk i ganjil},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+4}}{2} \\
W^6_{f_3}(x_iy_{i,k}) & = & \frac{n(8m+21)-2i+3}{2}, \text{untuk i genap},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+4}}{2} \\
W^7_{f_3}(x_ix_{i,j}) & = & \frac{n(8m+4j+17)+4i-1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m \\
W^8_{f_3}(y_{i,\frac{m+2}{2}}y_{i,\frac{m+4}{2}}) & = & \frac{n(12m+23)-2i+1}{2}, \text{untuk i genap} \\
W^9_{f_3}(y_{i,\frac{m+2}{2}}y_{i,\frac{m+4}{2}}) & = & \frac{n(12m+21)-2i+1}{2}, \text{untuk i ganjil} \\
W^{10}_{f_3}(z_iy_{i,k}) & = & \frac{n(12m+4k+21)+4i-1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ 1 \ \le k \le \frac{m}{2} \\
W^{11}_{f_3}(z_iy_{i,k}) & = & \frac{n(12m+4k+13)+4i-1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \frac{\mathrm{m+6}}{2} \ \le k \le m+2 \\
W^{12}_{f_3}(z_iy_{i,k}) & = & \frac{n(16m+25)+4i-1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+2}}{2} \\
W^{13}_{f_3}(z_iy_{i,k}) & = & \frac{n(16m+31)-2i+3}{2}, \text{untuk i ganjil},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+4}}{2} \\
W^{14}_{f_3}(z_iy_{i,k}) & = & \frac{n(16m+33)-2i+3}{2}, \text{untuk i genap},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m+4}}{2}
\end{array}
$$

Dapat dikatakan bahwa W_{f_3} membentuk barisan aritmatika $\cup_{t=1}^{14} W^t_{f_3} = \{\frac{n(4m+9)+7}{2}, \frac{n(4m+9)+9}{2}, \frac{n(4m+9)+11}{2}, \ldots, \frac{n(16m+33)-1}{2}\}$ sehingga dapat ditentukan bobot sisi terbesar dengan mensubstitusikan nilai awal $a = \frac{n(4m+9)+7}{2}$ dan nilai $b = 2$ ke persamaan $U_n = a + (n-1)b = \frac{n(4m+9)+7}{2} + (3mn + 6n - 1 - 1)2$ dan didapatkan $U_n = \frac{n(16m+33)-1}{2}$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf buah naga $Df_{m,n}$

mempunyai super $(\frac{n(4m+9)+7}{2}, 2)$- EAT; $m \geq 2$ dan $n \geq 1$. Berdasarkan kedua pembuktian di atas maka dapat disimpulkan bahwa ada pelabelan total super $(\frac{n(10m+21)+3}{2}, 0)$-sisi antimagic dan $(\frac{n(4m+9)+7}{2}$,
2)-sisi antimagic pada graf buah naga $Df_{m,n}$ $m \geq 2$, m genap dan $n \geq 1$, n ganjil. □

◇ **Teorema 0.2** *Ada pelabelan total super* $(\frac{7mn+15n+5}{2}, 1)$*-sisi antimagic pada graf buah naga* $Df_{m,n}$ $m \geq 2$*, m genap dan* $n \geq 1$*, n ganjil.*

Bukti.0.2a. Labeli titik graf Buah naga $Df_{m,n}$ dengan $f_4(x_ix_{i,j}) = f_1(x_ix_{i,j})$, $f_4(x_iy_{i,k}) = f_1(x_iy_{i,k})$, $f_4(z_iy_{i,k}) = f_1(z_iy_{i,k})$, $f_4(x_ix_{i+1}) = f_1(x_ix_{i+1})$, $f_4(y_{i,\frac{m+2}{2}}y_{i,\frac{m+4}{2}}) = f_1(y_{i,\frac{m+2}{2}}$
$y_{i,\frac{m+4}{2}})$, maka label sisi f_4 untuk pelabelan total super $(a, 1)$-sisi antimagic pada graf $Df_{m,n}$ dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
f_4(x_ix_{i,j}) &= \tfrac{n(3m+2j+6)+2i}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\ \tfrac{m+2}{2} \leq j \leq m \\
f_4(y_{i,\frac{m+2}{2}}y_{i,\frac{m+4}{2}}) &= \tfrac{n(5m+9)-i+1}{2}, \text{untuk i genap} \\
f_4(y_{i,\frac{m+2}{2}}y_{i,\frac{m+4}{2}}) &= \tfrac{n(5m+10)-i+1}{2}, \text{untuk i ganjil} \\
f_4(z_iy_{i,k}) &= \tfrac{n(5m+2k+8)+2i}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq \tfrac{m}{2} \\
f_4(z_iy_{i,k}) &= \tfrac{n(5m+2k+4)+2i}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\ \tfrac{m+6}{2} \leq k \leq m+2 \\
f_4(z_iy_{i,k}) &= \tfrac{n(7m+10)+2i}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\ \text{k} = \tfrac{m+2}{2} \\
f_4(z_iy_{i,k}) &= \tfrac{n(7m+13)-i+2}{2}, \text{untuk i ganjil},\ \text{k} = \tfrac{m+4}{2} \\
f_4(z_iy_{i,k}) &= \tfrac{n(7m+14)-i+2}{2}, \text{untuk i genap},\ \text{k} = \tfrac{m+4}{2} \\
f_4(x_ix_{i+1}) &= \tfrac{n(7m+14)+2i}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n-1 \\
f_4(x_iy_{i,k}) &= \tfrac{n(7m+2k+14)+2i-2}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq \tfrac{m}{2} \\
f_4(x_iy_{i,k}) &= \tfrac{n(7m+2k+10)+2i-2}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\ \tfrac{m+6}{2} \leq k \leq m+2 \\
f_4(x_iy_{i,k}) &= \tfrac{n(9m+16)+2i-i}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\ \text{k} = \tfrac{m+2}{2} \\
f_4(x_iy_{i,k}) &= \tfrac{n(9m+19)-i}{2}, \text{untuk i ganjil},\ \text{k} = \tfrac{m+4}{2} \\
f_4(x_iy_{i,k}) &= \tfrac{n(9m+20)-i}{2}, \text{untuk i genap},\ \text{k} = \tfrac{m+4}{2} \\
f_4(x_ix_{i,j}) &= \tfrac{n(9m+2j+18)2i-2}{2}, \text{untuk } 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq \tfrac{m}{2}
\end{aligned}$$

Jika W_{f_4} didefinisikan sebagai bobot sisi pelabelan total berdasarkan pelabelan f_4, maka W_{f_4} dapat diperoleh dengan menjumlahkan rumus bobot sisi EAVL $w_{f_1} = w_{f_4}$ dan rumus label sisi f_4 dengan syarat batas i yang bersesuaian.

Pelabelan tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$
\begin{array}{lcl}
W^1_{f_4}(x_i x_{i,j}) & = & \frac{n(5m+4j+11)+4i+1}{,}\text{for } 1 \le i \le n,\ \frac{\mathrm{m}+2}{2} \le j \le m \\
W^2_{f_4}(y_{i,\frac{m+2}{2}} y_{i,\frac{m+4}{2}}) & = & \frac{n(9m+17)-2i+3}{2}, \text{untuk i genap} \\
W^3_{f_4}(y_{i,\frac{m+2}{2}} y_{i,\frac{m+4}{2}}) & = & \frac{n(9m+19)-2i+3}{2}, \text{untuk i ganjil} \\
W^4_{f_4}(z_i y_{i,k}) & = & \frac{n(9m+4k+15)+4i+1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ 1 \le k \le \frac{m}{2} \\
W^5_{f_4}(z_i y_{i,k}) & = & \frac{n(9m+4k+7)+4i+1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \frac{\mathrm{m}+6}{2} \le k \le m+2 \\
W^6_{f_4}(z_i y_{i,k}) & = & \frac{n(13m+19)+4i+1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+2}{2} \\
W^7_{f_4}(z_i y_{i,k}) & = & \frac{n(13m+25)-2i+5}{2}, \text{untuk i ganjil},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+4}{2} \\
W^8_{f_4}(z_i y_{i,k}) & = & \frac{n(13m+27)-2i+5}{2}, \text{untuk i genap},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+4}{2} \\
W^9_{f_4}(x_i x_{i+1}) & = & \frac{n(7m+15)+4i+3}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n-1 \\
W^{10}_{f_4}(x_i y_{i,k}) & = & \frac{n(7m+4k+15)+4i-1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ 1 \le k \le \frac{m}{2} \\
W^{11}_{f_4}(x_i y_{i,k}) & = & \frac{n(7m+4k+7)+4i-1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \frac{\mathrm{m}+6}{2} \le k \le m+2 \\
W^{12}_{f_4}(x_i y_{i,k}) & = & \frac{n(11m+19)+4i-1}{2}, \text{untuk } 1 \le i \le n,\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+2}{2} \\
W^{13}_{f_4}(x_i y_{i,k}) & = & \frac{n(11m+25)-2i+3}{2}, \text{untuk i ganjil},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+4}{2} \\
W^{14}_{f_4}(x_i y_{i,k}) & = & \frac{n(11m+27)-2i+3}{2}, \text{untuk i genap},\ \mathrm{k} = \frac{\mathrm{m}+4}{2} \\
W^{15}_{f_4}(x_i x_{i,j}) & = & \frac{n(11m+4j+23)+4i-1}{2}, \text{for } 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le \frac{m}{2}
\end{array}
$$

Jika nilai tiap batas rumusan bobot definisi W_{f_4} disubstitusikan dengan tepat, maka akan diperoleh rangkaian bilangan yang membentuk deret aritmatika dengan suku awal $\frac{n(7m+15)+5}{2}$. Beda setiap rangkaian tersebut adalah 1, sehingga dapat ditulis dalam himpunan $\cup_{t=1}^{15} w^t_{f_4} = \{\frac{n(7m+15)+5}{2}, \frac{n(7m+15)+7}{2}, \ldots, \frac{n(13m+27)+1}{2}\}$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf buah naga $Df_{m,n}$ mempunyai super $(\frac{n(7m+15)+5}{2}, 1)$- EAT; $m \ge 2$, m genap dan $n \ge 1$, n ganjil.

Berikut diberikan bukti alternatif untuk membuktikan bahwa graf buah naga $Df_{m,n}$ mempunyai Super $(\frac{n(7m+15)+5}{2}, 1)$-EAT. Untuk mengetahui bagaimana pelabelan $(a, 1)$-sisi antimagic untuk graf buah naga $Df_{m,n}$ peneliti menggunakan sebuah lema. Lema yang digunakan penulis adalah lema yang dikembangkan oleh Dafik, Adawiyah (2014) dengan beda 1 dari sebuah permutasi $\Pi(\Psi)$ dan himpunan bilangan berurutan Ψ. Lema yang digunakan adalah sebagai

◇ **Lemma 5** *Misalkan Ψ merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan $\Psi = \{c, c+1, c+2, \ldots, c+k\}$, dengan k genap. Maka terdapat sebuah permutasi $\Pi(\Psi)$ dari anggota-anggota himpunan Ψ sehingga $\Psi + \Pi(\Psi)$ juga merupakan sebuah himpunan bilangan berurutan yaitu $\Psi + \Pi(\Psi) = \{2c + \frac{k}{2}, 2c + \frac{k}{2} + 1, 2c + \frac{k}{2} + 2, \ldots, 2c + \frac{3k}{2}\}$.*

Misal Ψ adalah suatu himpunan bilangan berurutan $\Psi = \{v_i | v_i = c + (i-1), 1 \le i \le k+1\}$ dan k adalah genap. Selanjutnya didefinisikan nilai permutasi

$\Pi(\Psi) = \{w_i | 1 \leq i \leq k+1\}$ dari anggota Ψ adalah sebagai berikut:

$$w_i = \begin{cases} c + i + \frac{k}{2} - 1, & \text{jika } 1 \leq i \leq \frac{k}{2} + 1 \\ c + i - (\frac{k}{2} + 2), & \text{jika } \frac{k}{2} + 2 \leq i \leq k + 1 \end{cases}$$

untuk membuktikan lema 5, langkah pertama yang harus dilakukan adalah mensubstitusikan nilai i sesuai batasan yang diberikan maka akan diperoleh w_i sebagai berikut:

Untuk $1 \leq i \leq \frac{k}{2} + 1$ maka akan diperoleh hasil: untuk $i = 1$, maka $w_1 = c + \frac{k}{2}$; untuk $i = 2$, maka $w_2 = c + \frac{k}{2} + 1$; untuk $i = \frac{k}{2}$, maka $w_{\frac{k}{2}} = c + k - 1$; . . .; untuk $i = \frac{k}{2} + 1$, maka $w_{\frac{k}{2}+1} = c + k$. Sedangkan untuk nilai $\frac{k}{2} + 2 \leq i \leq k + 1$ diperoleh hasil: untuk $i = \frac{k}{2} + 2$, maka $w_{\frac{k}{2}+2} = c$; untuk $i = \frac{k}{2} + 3$, maka $w_4 = c + 1$; . . .; untuk $i = k$, maka $w_k = c + \frac{k}{2} - 2$; untuk $i = k + 1$, maka $w_{k+1} = c + \frac{k}{2} - 1$. Jika $\mathfrak{C}$ dinyatakan dalam himpunan v_i dan $\Pi(\Psi)$ dinyatakan dalam himpunan w_i seperti telah disampaikan sebelumnya, maka akan diperoleh: $\Psi + \Pi(\Psi) = \{v_i + w_i | 1 \leq i \leq k + 1\}$

Selanjutnya, sebagai alternatif pembuktian dari teorema 0.2, peneliti akan menggunakan lema 5 yang telah dijelaskan sebelumnya.

Bukti.0.2b. Berdasarkan lema 4 bahwa graf buah naga memiliki pelabelan $(\frac{n+3}{2} + 1, 1)$-EAV.Hal ini berarti graf $Df_{m,n}$ memiliki himpunan bobot sisi berdasar-
kan pelabelan titik f_2 yang dinyatakan dalam $\{\frac{n+3}{2} + 1, \frac{n+3}{2} + 2, \frac{n+3}{2} + 3, \ldots, \frac{n(6m+13)+1}{2}\}$, dengan kata lain graf $Df_{m,n}$ memiliki barisan bobot sisi dengan nilai awal $a = \frac{n+3}{2} + 1$ dan beda tiap sukunya adalah 1.

Jika dimisalkan barisan bobot sisi $Df_{m,n}$ dinyatakan dalam $\Upsilon = \{c, c + 1, c + 2, \ldots, c + k\}$ maka diperoleh nilai $c = \frac{n+3}{2} + 1$ dan $k = 3mn + 6n - 2$. Berdasarkan lema 5, $\Pi(\Upsilon)$ adalah permutasi nilai Υ sedemikian hingga nilai $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta)$ adalah bobot total dari fungsi tersebut.

$$\begin{aligned} \Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) &= a \\ c + (c + 1 + \frac{k}{2} - 1) + \eta &= \frac{n(7m+15)+5}{2} \\ 2c + \frac{k}{2} + \eta &= \frac{n(7m+15)+5}{2} \\ 2(\frac{n+3}{2} + 1) + \frac{3mn+6n-2}{2} + \eta &= \frac{n(7m+15)+5}{2} \\ \eta &= \frac{4mn+7n-3}{2} \end{aligned}$$

Jika $i = 1$,$c = \frac{n+3}{2} + 1$, dan $k = 3mn + 6n - 2$ disubstitusikan diperoleh $\Upsilon + (\Pi(\Upsilon) + \eta) = (\frac{n(7m+15)+5}{2})$. Sehingga terbukti bahwa grap buah naga $Df_{m,n}$ mempunyai pelabelan super $(\frac{n(7m+15)+5}{2})$-sisi-antimagic untuk $m \geq 2$, m genap dan $n \geq 1$, n ganjil. $\square$

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, dapat disimpulkan bahwa: Ada pelabelan total super(a,d)-sisi antimagic pada graf buah naga $Df_{m,n}$ untuk $m \geq 2$, m genap dan $n \geq 1$, n ganjil.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Drs. Slamin, M.Comps.Sc., Ph.D yang telah memberika masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

References

[1] A. Kotzig and A. Rosa, Magic valuations of finite graphs, *Canad. Math. Bull.* **13** (1970), 451–461.

[2] Chartrand, G, and Ping Zhang. 2012.*Introductory Graph Theory.* United Stated of America: Dover Publication, inc.

[3] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic total labeling of disjoint union of complete s-partite graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.

[4] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, On super (a, d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009), 4909-4915.

[5] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Super edge-antimagic total labelings of $mK_{n,n,n}$, *Ars Combinatoria* , **101** (2011), 97-107

[6] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, Antimagic total labeling of disjoint union of complete s-partite graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **65** (2008), 41–49.

[7] Dafik, M. Miller, J. Ryan and M. Bača, On super (a, d)-edge antimagic total labeling of disconnected graphs, *Discrete Math.*, **309** (2009), 4909-4915.

[8] J.A. Gallian. 2013. *A Dinamic Survey Of Graph Labeling.*Jember: Gallian Survey.124–128.

[9] J. Baugh, Richard. 2009. *Discrete Mathematics, seventh edition.* New Jersey: Pearson Education, Inc.

[10] K.A. Sugeng, M. Miller and M. Bača, Super edge-antimagic total labelings, *Utilitas Math.*, **71** (2006) 131–141.

[11] M. Bača, Y. Lin, M. Miller and R. Simanjuntak, New constructions of magic and antimagic graph labelings, *Utilitas Math.* **60** (2001), 229–239.

[12] N. Hartsfield and G. Ringel, Pearls in Graph Theory, Academic Press, Boston - San Diego - New York - London, 1990.

[13] R.M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima and F.A. Muntaner-Batle, On super edge-magic graph, Ars Combin. 64 (2002), 81–95.

[14] R.M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima, F.A. Muntaner-Batle, The place of super edge-magic labelings among ather classes of labelings, Discrete Mathematics, **231** (2001), 153–168.

[15] R. Simanjuntak, F. Bertault and M. Miller, Two new (a, d)-antimagic graph labelings, *Proc. of Eleventh Australasian Workshop on Combinatorial Algorithms* (2000), 179–189.

[16] S. Arumugam and M. Nalliah. 2012. *Super(a,d)-edge antimagic total labelings of friendship graphs.* Australas: J. Combin.**53** (2012), 237–243.

[17] Vasudev, C. 2006. *Graph theory with application* . India : new age international publisher.